THIAGO MARCIANO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA UM MODELO DE CAMPO DE FASES NO PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO ISOTÉRMICA DE UMA LIGA BINÁRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Marciano, Thiago, 1990-

M319e Existência de solução para um modelo de campo de fases
2014 no processo de solidificação isotérmica de uma liga binária /
Thiago Marciano. – Viçosa, MG, 2014.
vi, 123 f. ; 29 cm.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 122-123.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Faedo-Galerkin, Métodos de. 3. Solidificação. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.353

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus. Como em todas as minhas realizações até agora na minha vida Ele veio em primeiro lugar e sempre continuará vindo. “Senhor, por tudo que vivemos, obrigado! Por tudo que viveremos, SIM!”(Ivna Sá).

Aos meus pais, Anselmo e Fátima, pela educação e orações durante esse curso. Agradeço a minha esposa, Ana Paula, por todo o incentivo, as noites mal dormidas, e também pelas orações. Ao meu irmão, Jhonatan, por todas as orações. E a todos os meus familiares.

À todos os amigos que fiz em Viçosa. Aos que moraram comigo, em especial, Alan e Raphael, e claro ao Guemael. Muito obrigado pelos longos papos nos intervalos de estudo. Aos amigos do mestrado, em especial aos colegas da minha turma (Aline, Carlos, Felipe, Luis, Priscila, Reno, Serginei) aos meus irmãos acadêmicos, Rondinei, e a Samara, e ao meu camarada dos jogos do “Galo mais bunito do mundo”, Gustavo. Muito obrigado pelos momentos de estudo, orientação e descontração.

Aos amigos do Ministério Universidades Renovadas, em especial a Bárbara, minha eterna coordenadora, e em especial a todos do Cenáculo, Semente e da Perseverança. Se não fosse essas pessoas, com as conversas e orações, com certeza eu não teria chegado até aqui.

À todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática, em especial ao meu orientador Anderson, e ao secretário da pós-graduação, João Marcos. Eles tiveram muita paciência comigo e me auxiliaram muito. Aos professores Luis Henrique Miranda e Ariane Piovezan Entringer, pelas contribuições neste trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

MARCIANO, Thiago, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2014. **Existência de Solução para um Modelo de Campo de Fases no Processo de Solidificação Isotérmica de uma Liga Binária**. Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

Estudamos nesse trabalho um modelo de campo de fase para a solidificação isotérmica de uma liga binária, devido a Warren-Boettinger [23]. Obtemos a existência de solução fraca, e resultados de regularidade e unicidade sob as hipóteses das não linearidades serem Lipschitz e limitadas. Por fim, caracterizamos um dos termos não lineares pelo double-well potential, e obtemos a existência de solução fraca para esse modelo e sua unicidade. Utilizamos durante todo o trabalho o Método de Faedo-Galerkin.

Abstract

MARCIANO, Thiago, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2014. **Existence of Solution for Phase field model for the isothermal solidification process of a binary alloy**. Adviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this work, we study a phase-field model for the isothermal solidification of a binary alloy due to Warren-Boettinger [23]. We obtain the existence of weak solution, and results of regularity and uniqueness under the assumptions that the nonlinearities are Lipschitz and limited. Finally, by characterizing the nonlinear terms by the double-well potential, we obtain existence and uniqueness of weak solution for a modified version of the model. Throughout this work, we apply the Faedo-Galerkin method.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência de solução para um modelo de campo de fase na solidificação de uma liga binária a uma temperatura constante. O modelo é devido a Warren - Boettinger [23], e envolve a concentração relativa c e um parâmetro de ordem ϕ, chamado campo de fase, que representa o estado de solidificação da liga, sendo igual a 0 se o sistema está em uma fase sólida, e igual a 1 se estiver em uma fase líquida. A evolução no tempo de c e ϕ é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + c\, F_2(\phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c, \phi)\nabla \phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$, com $1 \leqslant d \leqslant 3$, e com fronteira ou bordo $\partial\Omega$, n é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$ é uma constante.

As funções F_1, F_2, D_1 e D_2 que aparecem em (1) possuem as seguintes propriedades:

(1) F_1 e F_2 são funções regulares tais que $F_i(0) = F_i(1) = 0$ para $i = 1, 2$.

(2) D_1 é uma função positiva e regular limitada por duas constantes positivas.

(3) D_2 é uma função regular tal que $D_2(c, .) = 0$ para $c = 0$ e 1.

Além disso, os dados iniciais c_0 e ϕ_0 estão entre 0 e 1. As funções c e ϕ são soluções do problema (1) e devem ser encontradas com a mesma propriedade.

Este tipo de modelo é usado para descrever as transições de fase de materiais puros devido aos efeitos térmicos, e consistem em sistemas não lineares parabólicos para o campo de fase e a temperatura.

Fazemos agora uma breve descrição do modelo de campo de fase que vamos estudar. Para uma descrição completa da modelagem, nos referimos a Warren - Boettinger [23].

Considere uma liga de dois componentes A e B, em um domínio espacial Ω de $\mathbb{R}^d$ com $d \leqslant 3$. O sistema está caracterizado pela concentração relativa $c = c(x,t)$, do componente B, com relação à mistura, para $x \in \Omega$ e no tempo t. A função de c satisfaz $0 \leq c \leq 1$. Por outro lado, o estado de solidificação da liga é considerado, por um parâmetro de ordem $\phi = \phi(x,t)$, o chamado campo de fase. Mais precisamente, o campo de fase é igual a 0, se o sistema está na fase sólida e é igual a 1 se está na fase líquida, podendo assumir valores contínuos entre 0 e 1. Supomos que o processo de solidificação transcorre com temperatura T, constante e homogênea, que é fixada em algum ponto entre as duas temperaturas de fusão T_m^A e T_m^B dos componentes A e B. Para se ter uma descrição termodinâmica do sistema, introduzimos o funcional de energia livre de Ginzburg-Landau, usando uma energia livre de densidade f que depende de c e ϕ. As leis termodinâmicas, juntamente com a lei de conservação de massa implicam nas seguintes equações para ϕ e c, segundo Warren - Boettinger [23]:

$$\alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \phi - \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}\left(M \nabla \frac{\partial f}{\partial c} \right) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3}$$

onde ε e α são parâmetros positivos e $M = M(c,\phi)$ e uma função positiva.

Além disso, c e ϕ estão sujeitos a condições de contorno de Neumann homogêneas, sobre a fronteira $\partial\Omega$ de Ω.

A densidade de energia livre é construída a partir da densidade de energia livre f^A e f^B dos elementos puros ($c \equiv 0$ e 1, respectivamente), em relação a sua própria concentração, somados a um termo de energia de mistura:

$$f(T,c,\phi) = (1-c) f^A(T,\phi) + c f^B(T,\phi) + \frac{RT}{v_m}[(1-c)\ln(1-c) + c \ln c],$$

onde R é a constante de Boltzman e v_m é o volume molar.

Assumindo que as temperaturas de fusão T_m^A e T_m^B, as funções $f^A(T_m^A,.)$ e $f^B(T_m^B,.)$ são do tipo *double-well potential* e que a uma dada temperatura T, as funções $f^A(T,.)$ e $f^B(T,.)$ têm somente dois mínimos para $\phi \in [0,1]$, ou seja, $\phi = 0$ e 1. Usando princípios termodinâmicos básicos, podemos obter uma forma geral para f^A, f^B e, em seguida, para f em qualquer temperatura T. A escolha usual de f é uma função polinomial de ϕ de grau maior ou igual a cinco, quando T é diferente das temperatura de fusão T_m^A e T_m^B. Maiores detalhes podem ser encontrados em Warren - Boettinger [23].

Agora, podemos inferir que

$$-\frac{\partial f}{\partial \phi} = F_1(\phi) + c F_2(\phi), \tag{4}$$

onde F_1, F_2 são funcionais de ϕ que anulam para $\phi = 0$ e 1, e

$$\nabla \frac{\partial f}{\partial c} = -F_2(\phi) \nabla \phi + \frac{RT}{v_m} \frac{1}{c(1-c)} \nabla c. \tag{5}$$

Ressaltamos que a possível escolha de uma função polinomial de quinto grau em ϕ implica (4), e que F_1 e F_2 podem ser escolhidas como funções polinomiais de quarto grau (veja Warren - Boettinger [23]).

Assim, das equações (2) e (4) temos

$$\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta\phi + F_1(\phi) + cF_2(\phi) \text{ em } \Omega. \tag{6}$$

Os parâmetros α e ε^2 podem estar relacionadas a parâmetros físicos, exibindo uma solução especial para o campo de fase num processo 1-dimensional para um elemento puro ($c \equiv 0$ ou 1) e realizando uma análise assintótica quando ε tende para 0 (veja Warren - Boettinger [23]). Além disso, ε^2 é proporcional à espessura da interface.

A fim de recuperar uma equação de difusão clássica para c sempre que $\phi \equiv 0$ ou 1, ou seja, numa fase totalmente sólido ou líquido, escolhemos

$$M(c,\phi) = \frac{v_m}{RT}D_1(\phi)c(1-c), \tag{7}$$

em que D_1 é uma função crescente suave tal que $D_1(0) > 0$ é o coeficiente de difusão de sólidos e líquidos, e D_1 é limitada por cima e por baixo por duas constantes positivas $D_s < D_1$.

Assim, das equações (3), (5) e (7) deduzimos que

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \text{ em } \Omega, \tag{8}$$

onde $D_2(c,\phi) = -(v_m/RT)D_1(\phi)c(1-c)F_2(\phi)$ é uma função suave que é nula em $c = 0$ e 1.

Sem perda de generalidade, para a finalidade deste trabalho, podemos escolher $\alpha = 1$ e, em seguida, as equações (6) e (8), juntamente com as condições de contorno de Neumann homogêneas e as condições iniciais nos levam ao problema (1).

O presente trabalho apresenta a seguinte estrutura:

No Capítulo 1 apresentamos notações, definições e resultados que são fundamentais para o desenvolvimento das demonstrações desse trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos um resultado de existência de solução fraca para o problema (1), sob as hipóteses de que os termos não-lineares do modelo são funções Lipschitz e limitadas. Para a demonstração do Teorema principal desse capítulo, utilizamos o método de Faedo-Galerkin, tal método é utilizado em todo o trabalho.

No Capítulo 3 apresentamos um resultado de regularidade para as soluções fracas, e provamos a unicidade dessas soluções. Para os termos não lineares utilizamos as mesmas hipóteses do Capítulo 2.

No Capítulo 4 provamos um princípio de máximo para as soluções, supondo a existência de um princípio de máximo nas condições iniciais, e de hipóteses adicionais para os termos não-lineares. Esse resultado é importante nas interpretações físicas do modelo.

Os capítulos 2, 3 e 4 são leituras do trabalho de Rappaz e Scheid [19].

Por fim, no Capítulo 5 fazemos uma modificação no modelo. O objetivo é eliminar de algum termo não linear a hipótese de ser Lipschitziana e limitada. Para tal, utilizamos o double-well potential, que caracteriza processos que envolvem o campo de fase. Nesse novo modelo conseguimos obter a existência de solução fraca, utilizando o método de Faedo-Galerkin.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo trazemos resultados que são ferramentas fundamentais na demonstração dos teoremas. Fazeremos inicialmente algumas considerações e definições importantes para todo o texto.

Dado $x \in \mathbb{R}^N$, onde N é um número natural, escrevemos

$$x = (x', x_N) \text{ com } x' \in \mathbb{R}^{N-1}, \;\; x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}),$$

e

$$|x'| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^N_+ & = & \{x = (x', x_N);\, x_N > 0\}, \\ Q & = & \{x = (x', x_N); |x'| < 1 \text{ e } |x_N| < 1\}, \\ Q_+ & = & Q \cap \mathbb{R}^N_+, \\ Q_0 & = & \{x = (x', 0); |x'| < 1\}. \end{array}$$

Definição 1.1 (Brezis [4])**.** *Dizemos que um conjunto aberto Ω de fronteira ou bordo $\partial\Omega$ é de classe C^m, $m \geqslant 1$ inteiro, se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^N$ e uma bijeção $H : Q \to U$ tal que*

$$H \in C^m(\overline{Q}), \;\; H^{-1} \in C^m(\overline{U}), \;\; H(Q_+) = U \cap \Omega, \;\; H(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Dizemos que Ω é de classe C^∞ se é de classe C^m para todo m. Neste caso dissemos que Ω é suave.

Observação 1.2. *A mesma definição é válida para a fronteira $\partial\Omega$ ser de classe C^m, $m \geqslant 1$, e de classe C^∞.*

1.1 Espaços Funcionais

Nesta seção vamos definir e denotar os espaços funcionais onde encontramos a solução do problema (1). Essas definições podem ser vistas com mais detalhes em Brezis [4] e Ladyzhenskaya, Solonnikov e Uraltseva [11].

Seja Ω um subconjunto aberto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Denotamos o espaço $C_0^m(\Omega)$, o das funções com todas as derivadas de ordem menor ou igual a m contínuas em Ω, (m inteiro positivo ou $m = \infty$) e tanto a função quanto todas suas derivadas com suporte compacto em Ω. Denotamos ainda $D(\Omega)$ o espaço vetorial das funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω.

Apresentamos a seguir os espaços de funções mensuráveis.

O espaço de Banach $L^p(\Omega)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, é o das (classes de) funções $u(\cdot)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e p-integráveis cuja norma é dada por:

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$
$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}\,|\text{u(x)}| \qquad (\text{p} = \infty).$$

O espaço de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, (com $m \in \mathbb{N}$) das funções $u(\cdot)$ em $L^p(\Omega)$ com derivadas generalizadas de ordem menor ou igual à m que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cuja norma é dada por:

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)},$$

onde usamos a notação multi-índice padrão $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$ com $\alpha_i \geqslant 1$, um inteiro, com

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \ \text{ e } \ D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Quando $p = 2$, o espaço acima é Hilbert denotado por $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, e em alguns momentos no texto denotaremos $V = H^1(\Omega)$, o produto interno em $H^m(\Omega)$ é

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Por exemplo, para $\Omega = (0, T)$, temos o espaço de Hilbert $H^1(0, T) = W^{1,2}(0, T)$ definido por

$$H^1(0, T) = \{u \in L^2(0, T), u' \in L^2(0, T)\},$$

com a norma definida por

$$||u||_{H^1(0,T)} = \left(\int_0^T |u(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T |u'(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

e produto interno

$$(u,v)_{H^1(0,T)} = \int_0^T (u(t)v(t) + u'(t)v'(t))\, dt.$$

Frequentemente utilizamos o produto cartesiano desses espaços. Por exemplo:

- $(H^1(0,T))^2 = H^1(0,T) \times H^1(0,T)$ e
- $(C([0,T]))^2 = C([0,T]) \times C([0,T])$.

Eles são munidos da norma produto usual, dada por

$$||(u,v)||_{(H^1(0,T))^2} = \left(||u||^2_{H^1(0,T)} + ||v||^2_{H^1(0,T)}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$||(u,v)||_{(C([0,T]))^2} = ||u||_{C([0,T])} + ||v||_{C([0,T])}.$$

O espaço de Banach $L^{p,r}(Q_T)$, com $Q_T = \Omega \times (0,T)$, é o constituído das (classes de) funções $u(x,t)$ de Q_T em $\mathbb{R}$, mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por

$$||u||_{p,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p\, dx\right)^{\frac{r}{p}} dt\right)^{\frac{1}{r}}, \quad (p, r \geqslant 1).$$

Para $p = r$ usamos a notação $L^{p,p}(Q_T) = L^p(Q_T)$ e $||u||_{p,p,Q_T} = ||u||_{L^p(Q_T)}$.

O espaço de Banach $W_p^{2,1}(Q_T)$ $(p \geqslant 1)$, é o formado pelas (classes de) funções $u(\cdot,\cdot)$ pertencentes a $L^p(Q_T)$ com derivadas generalizadas $D_x u, D_x^2 u, D_t u$ em $L^p(Q_T)$, considerando em $W_p^{2,1}(Q_T)$ a norma definida por

$$||u||_{W_p^{2,1}(Q_T)} = ||u||_{L^p(Q_T)} + ||D_x u||_{L^p(Q_T)} + ||D_x^2 u||_{L^p(Q_T)} + ||D_t u||_{L^p(Q_T)}.$$

1.1.1 Espaços Funcionais Abstratos

Seja B um espaço de Banach com norma $||\cdot||_B$ e $0 < T < \infty$, denotamos por $C([0,T];B)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to B$ contínuas (com relação a topologia forte de B).

O espaço de Banach $L^p(0,T;B)$ é o das (classes de) funções $u : [0,T] \to B$, fortemente mensuráveis tal que a função $t \in [0,T] \to B$ (definidas q.t.p.) é

p-integrável ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) com norma dada por

$$||u||_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T ||u(x)||_B^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leqslant p < \infty)$$
$$||u||_{L^\infty(0,T;B)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \text{ess}\, ||\text{u(t)}||_{\text{B}} \qquad (\text{p} = \infty).$$

O espaço de Banach $W^{m,p}(0,T;B)$ é o das (classes de) funções em $L^p(0,T;B)$ cujas derivadas generalizadas de ordem menor ou igual a m também pertencem a $L^p(0,T;B)$.

E finalmente, o espaço $D'(0,T;L^2(\Omega))$ é o das aplicações lineares e contínuas de $D(0,T)$ em $L^2(\Omega)$. A derivada $\dfrac{df}{dt} = f'$ de uma distribuição f é definida por

$$(f')(\varphi) = -f(\varphi'),$$

para todo $\varphi \in D(0,T)$.

1.2 Teorema de Traço e Aplicações

O Teorema de Traço é utilizada para caracterizar o espaço ao qual pertence $u|_{\partial\Omega}$, onde u pertence a $H^m(\Omega)$, e Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ suave com fronteira $\partial\Omega$ suave. Para enunciar tal teorema é necessário o espaço $H^s(\Omega)$ e $H^s(\partial\Omega)$, quando s é um real positivo, para mais detalhes sobre esse espaço ver Medeiros e Miranda [15] p. 86. Nesse teorema definimos o Operador Traço em $H^s(\Omega)$, $s > 0$.

Como aplicação do Teorema do Traço temos o **Traço da Derivada Normal** de $u \in H^m(\Omega)$, isto é o traço de $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u)_{|\partial\Omega} \cdot n$, onde n é o vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$.

O Teorema do Traço que segue é baseado em Lions e Magenes [14], p.41, e encontra-se em Araujo [1], p.12.

Teorema 1.3. *Assuma que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{\mu+1}$, onde μ é o maior inteiro tal que $\mu < s - \dfrac{1}{2}$, com $s > 0$. Então, a aplicação*

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \ldots, \mu \right\}$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to (\mathcal{D}(\partial\Omega))^m$ estende-se por continuidade para uma aplicação linear e contínua

$$u \to \left\{ \left. \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \right|_{\partial\Omega}, j = 0, 1, \ldots, \mu \right\} \;\; de \;\; H^s(\Omega) \to \prod_{j=0}^{\mu} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega).$$

A partir do Teorema do Traço, aplicado ao Traço da Derivada Normal, temos as **Fórmulas de Green para espaços de Sobolev** (ver Brezis [4] p.316 e Medeiros e Miranda [15] p.122).

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto suave com fronteira $\partial\Omega$ suave. Então, dados $u, v \in L^2(\partial\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uv(n \cdot e_i)\, ds, \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega). \tag{1.1}$$

Agora considerando a derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u)_{|\partial\Omega} \cdot \vec{n}$ para uma função $u \in W^{2,p}(\Omega)$ com $(\nabla u)_{|\partial\Omega} \in L^p(\partial\Omega)^n$. Então também vale

$$-\int_\Omega (\Delta u) v\, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, ds, \;\; \forall\, u, v \in H^2(\Omega). \tag{1.2}$$

Por fim, tomando $u \in L^2(\Omega)$ com $\Delta u \in L^2(\Omega)$, e $v \in H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \tag{1.3}$$

1.3 Regularidade de Soluções Fracas

O resultado dessa seção pode ser encontrado no livro de Brezis [4]. Este resultado é importante para mostrarmos a linearidade do operador Laplaciano negativa somado com a Identidade, definido por $-\Delta + I : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio suave, com fronteira $\partial\Omega$ suave. E também para mostrar que dada uma função em $u \in L^2(\Omega)$ com $\Delta u \in L^2(\Omega)$, segue que $u \in H^2(\Omega)$.

Teorema 1.4 (Agmon-Douglis-Nirenberg)**.** *Suponha que Ω seja de classe C^2 com $\partial\Omega$ limitada. Tome $1 < p < \infty$. Então para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ ($m \geqslant 1$ um inteiro), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \;\; e \;\; ||u||_{W^{m+2,p}} \leqslant C||f||_{W^{m,p}}.$$

Demonstração. Brezis [4], Teorema 9.32, p.316.

1.4 Resultados de Convergência e Imersões

Nessa seção apresentaremos resultados importantes sobre convergências e imersões. Durante todo o texto desse trabalho utilizaremos os seguintes símbolos:

$\rightarrow$ para a convergência na topologia forte;

$\rightharpoonup$ para a convergência na topologia fraca;

$\hookrightarrow$ para imersão contínua;

$\overset{c}{\hookrightarrow}$ para imersão compacta.

Teorema 1.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ que converge quase sempre a uma função mensurável f. Se existe uma $g \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x), \ \ x \in \Omega$$

então f pertence a $L^p(\Omega)$ e (f_n) converge fortemente em $L^p(\Omega)$ para f.

Demonstração. Bartle [3], Teorema 7.2, p.67.

Proposição 1.6. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, g_m e g funções de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, tais que*

$$\begin{aligned} &||g_m||_{L^p(\Omega)} \leqslant C, \ \ (C > 0 \ constante) \\ &g_m \to g \ \ q.t.p. \ \Omega. \end{aligned}$$

Então,

$$g_m \rightharpoonup g \ em \ L^p(\Omega).$$

Demonstração. Lions [12], Lema 1.3, p.12.

Proposição 1.7. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em E.*

Demonstração. Brezis [4], Teorema 3.18, p.69.

Teorema 1.8. *Sejam $m \geqslant 1$ um inteiro e $p \in [1, +\infty)$. Então temos as seguintes imersões contínuas*

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad onde \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} && se \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, \\ &W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall\, q \in [p, +\infty) && se \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, \\ &W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) && se \ \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Brezis [4], Corolário 9.13, p.283.

Proposição 1.9. *As conclusões do Teorema 1.8 acima, continuam sendo válidas, se $\mathbb{R}^N$ for substituído por $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^m, $m \geqslant 1$.*

Demonstração. Brezis [4], Corolário 9.15, p.285.

Teorema 1.10 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que $\Omega \in \mathbb{R}^N$ seja* **limitado** *e de classe C^1. Então temos as seguintes imersões* **compactas***:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*), \quad onde\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} && se\ p < N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty), && se\ p = N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}) && se\ p > N.
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ para todo p e N.

Demonstração. Brezis [4], Teorema 9.16, p.285.

Teorema 1.11. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado com fronteira suave. Então vale que a seguinte imersão contínua:*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ para\ \ 1 \leqslant q \leqslant 6 \tag{1.5}$$

Demonstração. Segue por aplicação dos Teoremas 1.8 e 1.10, tomando $m = 1$, $p = 2$ e $N = 3$.

Teorema 1.12. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^{m+1}, e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, $1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-p}$ *se* $p < n$;

b) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$ *se* $p = n$;

c) $W^{m+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\Omega)$ *se* $p > n$.

Demonstração. Medeiros e Miranda [15], Corolário 9 p.82.

Teorema 1.13. *Sejam X, B e Y três espaços de Banach reflexivos tais que:*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y. \tag{1.6}$$

Tome $T, \alpha_0, \alpha_i \in \mathbb{R}$, tais que $T > 0$ e $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$.

Considere o espaço

$$W = \left\{ u \in L^{\alpha_0}(0,T;X), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\alpha_1}(0,T;Y) \right\}. \tag{1.7}$$

Então a imersão de W em $L^{\alpha_0}(0,T;B)$ é compacta ($W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{\alpha_0}(0,T;B)$).

Demonstração. Temam [21], Capítulo 3, Teorema 2.1, p.271.

Teorema 1.14. *Sejam X, B e Y três espaços de Banach tais que:*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y. \tag{1.8}$$

Considere o conjunto F limitado em $L^p(0,T;X)$, com $1 < p < \infty$, e o conjunto $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t} : f \in F\right\}$, um limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.

Agora considere o conjunto F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ um limitado em $L^r(0,T;Y)$, com $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Demonstração. Simon [20], Corolário 4, p.21.

No próximo teorema apresentamos um resultado de compacidade para os espaços $H^s(\Omega)$, $s > 0$, e encontra-se em Lions e Magenes [14], p.99.

Teorema 1.15. *Assuma que Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^μ, com μ o menor inteiro positivo tal que $\mu > s$ e $s > 0$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, vale que*

$$H^s(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{s-\varepsilon}(\Omega).$$

1.5 Identidades e Desigualdades Importantes

Os próximos resultados, apresentam importantes identidades.

Teorema 1.16. *Sejam V, H e V' três espaços de Hilbert, onde V' é o dual de V, tal que valem as seguintes inclusões densas e contínuas:*

$$V \subset H \subset V'.$$

Se $u \in W(0,T) = \{v \in L^2(0,T;H);\, v' \in L^2(0,T;H')\}$, então u coincide quase sempre com uma função $C([0,T];H)$. Além disso,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||_H^2 = \langle u'(t), u(t)\rangle_{V',V} \tag{1.9}$$

Demonstração. Temam [21], Lema 1.2, p.260.

Teorema 1.17. *Sejam E um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de E. Então:*

(a) E é soma direta de M e $M^\perp$, isto é, cada $x \in E$ admite uma única representação na forma

$$x = x_M + x_{M^\perp} \text{ com } x_M \in M \text{ e } x_{M^\perp} \in M^\perp.$$

Além disso

$$||x - x_M|| = dist(x, M)$$

e x_M é chamado de projeção ortogonal de x sobre M.

(b) Se definirmos $P(x) = x_M$ e $Q(x) = x_{M^\perp}$ para $x \in E$, então temos $P, Q \in \mathcal{L}(E, E)$. O operador P é chamado de operador projeção de E sobre M, ou simplesmente projeção.

(c) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ e $P \circ Q = Q \circ P = 0$.

Demonstração. Pellegrino [18], Teorema 3.2.9, p.44 e p.45.

Teorema 1.18 (Teorema da Representação de Riesz). *Sejam $1 < p < \infty$, p' o conjugado de p, isto é $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, e $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx, \ \ \forall\, v \in L^p(\Omega) \ \ e \ \ ||u||_{L^{p'}(\Omega)} = ||\varphi||_{(L^p(\Omega))'}, \tag{1.10}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o par de dualidade de $(L^p(\Omega))'$ e $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Brezis [4], Teorema 4.11, p.97.

Proposição 1.19 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que a distribuição Tu satisfaz*

$$\langle Tu, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração. Cavalcanti e Cavalcanti [5], Proposição 4, p.12.

Nos próximos resultados temos desigualdades importantes para o desenvolvimento dos cálculos, as demonstrações das mesmas se encontram em Evans [7], páginas 622 à 625.

Teorema 1.20 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f_1 \in \mathrm{L}^{p_1}$, $f_2 \in \mathrm{L}^{p_2}$, $\ldots$, $f_n \in \mathrm{L}^{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$, com $p_1, \ldots, p_n > 1$ expoentes conjugados $\left(\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1\right)$. Então $f_1 \cdots f_n \in \mathrm{L}^1$ e*

$$\int |f_1 \cdots f_n| \leq ||f_1||_{\mathrm{L}^{p_1}} \cdots ||f_n||_{\mathrm{L}^{p_n}}. \tag{1.11}$$

Observação 1.21. *Se $a, b \geqslant 0$ e $p \geqslant 1$ então, $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p + b^p)$.*

Teorema 1.22 (Desigualdades de Young). *Sejam $a, b \geqslant 0$, e p, $q > 1$ expoentes conjugados $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.12}$$

$$ab \leqslant C(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q. \tag{1.13}$$

Teorema 1.23 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam* $\varphi \in L^\infty(0,T)$ *e* $\beta \in L^1(0,T)$ *tais que* $\beta > 0$, $\varphi \geqslant 0$ *e* $K \geqslant 0$ *uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leqslant K + \int_0^t \beta(s)\varphi(s)\,ds, \ \ \forall\ t \in [0,T], \tag{1.14}$$

então tem-se

$$\varphi(t) \leqslant K\, e^{\int_0^t \beta(s)\,ds}, \ \ \forall\ t \in (0,T). \tag{1.15}$$

Teorema 1.24 (Lema de Gronwall - Forma Diferencial)**.** *Seja* $\eta(\cdot)$ *uma função absolutamente contínua não negativa em* $[0,T]$*, que satisfaz, para t quase sempre, a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leqslant \phi(t)\eta(t) + \psi(t), \tag{1.16}$$

em que $\phi(t)$, $\psi(t)$ *são funções integráveis não negativas em* $[0,T]$*. Então*

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \phi(s)\,ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds\right], \tag{1.17}$$

para todo $t \in [0,T]$*.*

O próximo resultado dessa seção é a seguinte estimativa elíptica, que também iremos omitir a demonstração, e pode ser encontrada em Lions e Magenes [13], Capítulo 2, Teorema 5.1.

Teorema 1.25. *Sejam* Ω *um aberto suave, com fronteira* $\partial\Omega$ *suave,* $k \in \mathbb{N}$ *e* $u \in H^2(\Omega)$ *satisfazendo que* $\Delta u \in H^k(\Omega)$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*. Então* $u \in H^{k+2}(\Omega)$ *e existe uma constante* $C > 0$ *independente de u tal que*

$$||u||_{H^{k+2}(\Omega)} \leqslant C(||\Delta u||_{H^k(\Omega)} + ||u||_{H^k(\Omega)}). \tag{1.18}$$

O último resultado dessa seção é a **Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg** que se encontra em Henry [9].

Teorema 1.26 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto e limitado com fronteira suave. Então existem constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que:*

$$\begin{aligned} ||u||_{L^3(\Omega)} &\leqslant C_1||u||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||u||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, u \in H^1(\Omega). && (1.19)\\ ||u||_{L^6(\Omega)} &\leqslant C_2||u||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||u||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, u \in H^2(\Omega). && (1.20) \end{aligned}$$

1.6 Teorema de Prolongamento de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias

Os resultados dessa seção podem ser encontrados em Narciso [17], p.17, mais detalhes encontra-se em [6] e [8]. Com esses resultados temos a existência de solução para um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, isso é um importante passo no método que será aplicado.

Teorema 1.27 (Teorema de Caratheodory)**.** *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{N+1}$ cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função que satisfaz as condições de Caratheodory sobre Ω, isto é:*

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável tal que

$$|f(t,x)|_{\mathbb{R}^N} \leqslant m_K(t);\ \forall (t,x) \in K.$$

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Então existe uma solução $x(t)$ de (1.21) contínua sobre algum intervalo $|t - t_0| \leqslant \beta$ $(\beta > 0)$.

Proposição 1.28. *Seja $\Omega = [0,T) \times B$ com $T > 0$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b\}$, $b > 0$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Caratheodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.21) tal que $|x_0| \leqslant b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leqslant M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então x possui um prolongamento em $[0,T]$.*

1.7 Teorema Espectral para Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Nesta seção apresentamos um importante Teorema da Análise Funcional, que é uma das principais ferramentas na aplicação do Método de Faedo-Galerkin, método com o qual obtemos a existência de solução das Equações Diferenciais Parciais deste trabalho. O Teorema e a demonstração apresentados nessa seção são baseados em Mujica [16] e Pellegrino [18]. No final da seção, apresentamos alguns resultados que caracterizam conjuntos ortonormais em espaços de Hilbert.

Proposição 1.29. *Seja E um espaço de Hilbert, e seja $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e auto-adjunto, com $T \neq 0$. Então $||T||$ ou $-||T||$ é um autovalor de T, e existe um autovetor correspondente $x \in S_E$ tal que $|(Tx,x)| = ||T||$.*

Demonstração. Pellegrino [18], Proposição 6.3.1, p.95.

Teorema 1.30 (Teorema Espectral para operadores compactos e auto-adjuntos em espaços de Hilbert)**.** *Seja E um espaço de Hilbert, com produto interno $(.,.)$ e norma $||.||$, e seja $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador compacto e auto-adjunto, com $T \neq 0$. Então:*

(a) Existem uma sequência finita ou infinita (λ_n) de autovalores distintos de zero de T, e uma sequência correspondente (x_n) de autovetores tais que, T admite uma representação da forma,

$$Tx = \sum \lambda_n (x, x_n) x_n = \sum (Tx, x_n) x_n \tag{1.22}$$

para todo $x \in E$. A sequência (x_n) é ortogonal.

(b) Se a sequência (λ_n) é infinita, então $\lambda_n \to 0$.

(c) Cada autovalor $\lambda \neq 0$ de T aparece na sequência (λ_n) um número finito de vezes, que coincide com a dimensão do subespaço $E_\lambda = \{v \in E \,|\, Tv = \lambda v\}$ de autovetores correspondente.

Demonstração. (a) Aplicando a proposição anterior obtemos $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, e $x_1 \in E$, com $||x_1|| = 1$, tais que

$$Tx_1 = \lambda_1 x_1, \;\; |\lambda_1| = ||T||.$$

Se $E_1 = [x_1]$, é fácil ver que $T(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$. De fato, para cada $x \in E_1^\perp$ tem-se que

$$\begin{aligned} (Tx, x_1) &= (x, Tx_1), \;\; \text{pois } T \text{ é auto-adjunto,} \\ &= (x, \lambda_1 x_1), \;\; \text{pois } x_1 \text{ é autovetor de } T, \\ &= \lambda_1 (x, x_1), \;\; \text{pois } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\ &= 0, \;\; \text{pois } x \in E_1^\perp \text{ e } x_1 \in E_1, \\ &\ \text{então } \;Tx \in E_1^\perp. \end{aligned}$$

Se a restrição $T|E_1^\perp$ é identicamente zero, então o processo termina aí. Caso contrário, aplicando a proposição anterior a restrição $T|E_1^\perp$, obtemos $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, e $x_2 \in E_1^\perp$, com $||x_2|| = 1$, tais que

$$Tx_2 = \lambda_2 x_2, \;\; |\lambda_2| = ||T|E_1^\perp||, \;\; T(E_2^\perp) \subset E_2^\perp,$$

onde $E_2 = [x_1, x_2]$.

Note que $T|E_1^\perp$ é tal que $T|E_1^\perp \in \mathcal{L}(E_1^\perp; E_1^\perp)$, pois $T(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$ e $T \in \mathcal{L}(E; E)$.

Procedendo por indução obtemos uma sequência finita ou infinita $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, com $\lambda_n \neq 0$, e uma sequência correspondente $(x_n) \subset E$, com $||x_n|| = 1$, tais que

$$Tx_n = \lambda_n x_n, \;\; x_n \in E_{n-1}^\perp, \;\; |\lambda_n| = ||T|E_{n-1}^\perp||, \;\; T(E_n^\perp) \subset E_n^\perp,$$

para cada n, onde $E_n = [x_1, \ldots, x_n]$. Afirmamos que a sequência $(|\lambda_n|)$ é decrescente, e a sequência (x_n) é ortonormal. De fato, note que

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots \subset E$$

$$\cdots \subset E_n^{\perp} \subset \cdots \subset E_2^{\perp} \subset E_1^{\perp} \subset E$$

$$\cdots \leqslant ||T|E_n^{\perp}|| \leqslant \cdots \leqslant ||T|E_2^{\perp}|| \leqslant ||T|E_1^{\perp}|| \leqslant ||T||$$

$$\cdots \leqslant |\lambda_{n+1}| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_3| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|.$$

E a sequência (x_n) é ortonormal por construção.

A sequência (λ_n) é finita se $T|E_n^{\perp} = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e é infinita caso contrário.

Suponhamos primeiro que a restrição $T|E_n^{\perp}$ seja zero para algum n. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que E_n é um subespaço fechado, e assim $E = E_n \oplus E_n^{\perp}$. Então, cada $x \in E$ pode ser escrito na forma

$$x = y_n + z_n, \text{ com } y_n \in E_n, \; z_n \in E_n^{\perp}.$$

A partir daí afirmamos que

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) x_j + z_n.$$

De fato, lembramos que:

- $E_n = [x_1, \ldots, x_n]$;
- $y_n \in E_n \Rightarrow y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Assim devemos mostrar que $c_j = (x, x_j)$.

Observe que

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + z_n.$$

Para $n = 1$, temos $x = c_1 x_1 + z_1$, então

$$(x, x_1) = (c_1 x_1 + z_1, x_1) = c_1 (x_1, x_1) + (z_1, x_1).$$

Como (x_n) é ortonormal, $(x_1, x_1) = ||x_1|| = 1$, e do fato de $z_1 \in E_1^{\perp}$, e $x_1 \in E_1$, segue que $(z_1, x_1) = 0$, logo

$$c_1 = (x, x_1).$$

Para $n = 2$, temos $x = c_1x_1 + c_2x_2 + z_2$, logo, $x = (x, x_1)x_1 + c_2x_2 + z_2$, então

$$\begin{aligned}(x, x_2) &= ((x, x_1)x_1 + c_2x_2 + z_2, x_2)\\ &= (x, x_1)(x_1, x_2) + c_2(x_2, x_2) + (z_2, x_2).\end{aligned}$$

Como $x_2 \in E_1^{\perp}$, $x_1 \in E_1$, então, $(x_1, x_2) = 0$. E $z_2 \in E_2^{\perp}$, $x_2 \in E_2$, assim, $(z_2, x_2) = 0$ e $(x_2, x_2) = ||x_2|| = 1$. Logo

$$(x, x_2) = c_2.$$

Continuando provamos o que queremos.

De $T|E_n^{\perp} = 0$, segue que $Tz_n = 0$, então

$$\begin{aligned}Tx &= T\left(\sum_{j=1}^{n}(x, x_j)x_j + z_n\right) = \sum_{j=1}^{n}(x, x_j)Tx_j + Tz_n = \sum_{j=1}^{n}(x, x_j)Tx_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}(x, x_j)\lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n}(x, \lambda_j x_j)x_j = \sum_{j=1}^{n}(x, Tx_j)x_j, \text{ como } T \text{ é auto-adjunto,}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(Tx, x_j)x_j.\end{aligned}$$

Isto prova a validade da representação 1.22 quando $T|E_n^{\perp} = 0$ para algum n, ou seja, quando (λ_n) é uma sequência finita.

(b) Antes de provar a validade da representação (1.22) quando (λ_n) é uma sequência infinita, provaremos (b), ou seja, se (λ_n) é uma sequência infinita, então $\lambda_n \to 0$.

Suponhamos que $\lambda_n \nrightarrow 0$. Do fato de $(|\lambda_n|)$ ser decrescente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com efeito, por definição do $\lim |\lambda_n| = c > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geqslant n_0$, $\frac{c}{2} < |\lambda_n|$. Como $|\lambda_n|$ é decrescente, segue que $\frac{c}{2} \leqslant |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim basta tomar $\varepsilon = \frac{c}{2}$.

Por hipótese T é compacto e por construção (x_n) é limitada, pois $||x_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí segue que a sequência (Tx_n) admite uma subsequência convergente. Como $Tx_n = \lambda_n x_n$ segue que $\frac{1}{\lambda_n}Tx_n = x_n$ e $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$, então $\frac{1}{|\lambda_n|} < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim (x_n) admite subsequência convergente. Mas isso é um absurdo, pois, sendo (x_n) ortonormal, segue que

$$||x_n - x_m||^2 = ||x_n||^2 - 2Re(x_n, x_m) + ||x_m||^2 = 1 - 2.0 + 1 = 2,$$

sempre que $n \neq m$. Logo (x_n) não é de Cauchy e assim não admite subsequência convergente.

Portanto segue o item (b).

A seguir provaremos a validade da representação (1.22) quando (λ_n) é uma sequência infinita. Como no caso finito escrevemos $x = y_n + z_n$, com $y_n \in E_n$ e $z_n \in E_n^{\perp}$. Note que $|\lambda_{n+1}| = ||T|E_n^{\perp}||$, então

$$||Tz_n|| = ||(T|E_n^{\perp})z_n|| \leqslant ||T|E_n^{\perp}||||z_n|| = |\lambda_{n+1}|||z_n||,$$

pelo Teorema de Pitágoras temos que, $||x||^2 = ||y_n||^2 + ||z_n||^2$, daí $||z_n|| \leqslant ||x_n||$, assim,

$$||Tz_n|| \leqslant |\lambda_{n+1}|||z_n|| \leqslant |\lambda_{n+1}|||x_n|| \to 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
Tx &= Ty_n + Tz_n \\
\lim_{n\to\infty} Tx &= \lim_{n\to\infty} Ty_n + \lim_{n\to\infty} Tz_n \\
Tx &= \lim_{n\to\infty} Ty_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}(x, x_j)Tx_j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(x, x_j)\lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty}(Tx, x_j)x_j.
\end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do item (a).

(c) Suponhamos que exista um autovalor $\lambda \neq 0$ de T que não apareça na sequência (λ_n). Seja x um autovetor correspondente, $x \neq 0$. Neste caso $(x, x_n) = 0$ para cada n, pois autovetores de um operador auto-adjunto, associados a autovalores distintos, são ortogonais. De fato,

$$\begin{aligned}
(\lambda x, x_n) &= (Tx, x_n) = (x, Tx_n) = (x, \lambda_n x_n) \\
\lambda(x, x_n) &= \lambda_n(x, x_n) \\
(\lambda - \lambda_n)(x, x_n) &= 0,\ \lambda \neq \lambda_n \\
(x, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Segue de (1.22) que $Tx = 0$, absurdo, pois $Tx = \lambda x$ com $\lambda \neq 0$ e $x \neq 0$. Como $\lambda_n \to 0$, é claro que nenhum autovalor $\lambda \neq 0$ de T pode aparecer na sequência (λ_n) uma infinidade de vezes, pois senão convergiria para esse valor que repetiu. Assim, temos provado que cada autovalor $\lambda \neq 0$ de T aparece na sequência (λ_n) um número finito de vezes.

Suponhamos que um autovalor $\lambda \neq 0$ de T apareça exatamente p vezes na sequência (λ_n). Nesse caso na sequência (x_n) aparecem p vetores $x_{n_1}, \ldots, x_{n_p}$ que correspondem ao autovalor λ, e os demais vetores x_n correspondem a autovalores distintos de λ. É claro que $\dim E_\lambda \geqslant p$, pois temos p vetores na base, que são linearmente independentes. Se $\dim E_\lambda > p$, então existe $x \in E_\lambda$, com $x \neq 0$ e $(x, x_{n_j}) = 0$ para $j = 1, \ldots, p$, pois (x_n) é ortonormal, então ortogonal. Daí $(x, x_n) = 0$ para todo n, pois autovalores distintos de um operador auto-adjunto tem autovetores ortogonais. E segue novamente de (1.22) que $Tx = 0$, absurdo. Logo $\dim E_\lambda = p$.

$\square$

Teorema 1.31. *Sejam E um espaço de Hilbert, e $S = \{x_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em E. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $x = \sum_{i\in I}(x, x_i)_E \, x_i$, *para cada $x \in E$;*

(b) S é completo;

(c) $\overline{[S]} = E$;

(d) Identidade de Parseval

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x, x_i)_E|^2, \ \forall\, x \in E; \tag{1.23}$$

(e) $(x, y)_E = \sum_{i\in I}(x, x_i)_E\overline{(y, x_i)_E}$ *para qualquer $x, y \in E$.*

Demonstração. Pellegrino [18], Teorema 3.3.12, p. 49.

Observação 1.32 (Pellegrino [18], Observação 3.3.6, p.47.)**.** *A expressão* $\sum_{i=1}^{n}(x, x_i)x_i$ *é chamada de* **melhor aproximação** *de x em $M = [x_1, \ldots, x_n]$.*

Teorema 1.33 (Desigualdade de Bessel)**.** *Seja E um espaço com produto interno e $S = \{x_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em E. Então, se $x \in E$, temos*

$$\sum_{i\in J} |(x, x_i)_E|^2 \leqslant ||x||_E^2,$$

com $J = \{i \in I; (x, x_i)_E \neq 0\}$.

Demonstração. Pellegrino [18], Teorema 3.3.9, p.47.

Capítulo 2

Resultados de Existência

Neste capítulo provaremos a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \phi + F_1(\phi) + c\, F_2(\phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c, \phi)\nabla \phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d \geqslant 1$, é um domínio suave, com fronteira $\partial\Omega$ suave. A restrição $d \leqslant 3$ não ocorrerá no resultado de existência desse capítulo.

Suponhamos que as funções não lineares F_i e D_i com $i = 1, 2$ são Lipschitzs e limitadas. Mais precisamente, vamos supor que

(H1) F_1, F_2 são Lipschitz e limitadas com

$$|F_i(r)| \leqslant M_i \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

(H2) $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é Lipschitz positiva e limitada com

$$0 < D_s \leqslant D_1(r) \leqslant D_1, \;\; \forall\, r \in \mathrm{R}.$$

(H3) $D_2 \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ é Lipschitz e limitada com

$$|D_2(r_1, r_2)| \leqslant M_3, \;\; \forall\, (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

De posse dessas hipotéses podemos enunciar o seguinte resultado de existência de solução.

Teorema 2.1. *Assumindo que $(H1)-(H3)$ sejam válidas.*

(1) Para qualquer $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $T > 0$, existe um par de funções (ϕ, c) satisfazendo

$$\phi, c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V'), \tag{2.2}$$

tal que $\phi(0) = \phi_0$, $c(0) = c_0$ e

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi.\nabla v \; dx = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))v \; dx, \tag{2.3}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi).\nabla w \; dx = 0 \tag{2.4}$$

para todo $v, w \in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

(2) Para qualquer $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $T > 0$, existe um par de funções (ϕ, c) satisfazendo

$$\begin{aligned} \phi &\in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \\ c &\in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V'), \end{aligned} \tag{2.5}$$

tal que $\phi(0) = \phi_0$, $c(0) = c_0$ e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta\phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad \text{q.t.p em } Q_T, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.7}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi).\nabla v \; dx = 0, \tag{2.8}$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

Observação 2.2. *Dadas $\phi, c \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$ segue que $\phi, c \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Além disso, $\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ implica que $\phi \in C([0,T];H^1(\Omega))$ (veja em Lions e Magenes [13], Teorema 3.1, p.23).*

Para demonstrar o resultado acima vamos usar o método de Faedo-Galerkin. Este consiste em obter problemas aproximados ao original em espaços de dimensão finita. Tais problemas formam uma sequência, e para cada um deles conseguimos a existência de solução. Assim o objetivo é mostrar que os problemas aproximados convergem, em algum sentido, para o problema original.

A demonstração será apresentada na próxima seção, e durante esta enunciaremos alguns lemas para facilitar o entendimento.

2.1 Demonstração: Parte 1

Seja $\{v_j\}_{j\geqslant 1}$ as autofunções do operador $-\Delta$ com condição de Neumann correspondentes aos autovalores (λ_j), definidos pelo seguinte resultado.

Lema 2.3 (Autovalores do operador Laplaciano com condição de contorno de Neumann)**.** *Seja* $D(-\Delta) = \left\{u \in H^2(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0\right\}$ *o domínio do operador laplaciano negativo,* $-\Delta : D(-\Delta) \to L^2(\Omega)$*, que é definido pelo problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda\, u \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

onde λ *é autovalor associado ao autovetor* u *do operador* $-\Delta$*. Então existe uma sequência* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de autovalores de* $-\Delta$*, tais que:*

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots.$$

Demonstração. Para mostrar este resultado vamos aplicar o Teorema 1.30. Neste resultado temos que esses autovalores são distintos de zero, mas como no nosso caso temos uma condição de contorno de Neumann homogênea, mostraremos que $\lambda_1 = 0$.

Considere o seguinte problema de autovalores para o operador $B = -\Delta + I : D(B) \to L^2(\Omega)$, onde $D(B) = D(-\Delta)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= \alpha u \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Dado $f \in L^2(\Omega)$, temos o seguinte problema elíptico associado

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} &= 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Fazendo a formulação variacional do problema acima, multiplicando este por $v \in H^1(\Omega)$ e integrando em relação a Ω obtemos:

$$-\int_\Omega \Delta u.v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx.$$

Pelo Teorema 1.4, existe um único $u \in D(B)$ solução de (2.11). Daí temos que B é um operador sobrejetor, e como u é unico e esse operador é linear, segue que B é também injetor. Logo B é um operador bijetor. Então existe o operador $B^{-1} : L^2(\Omega) \to H^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Portanto, o operador $B^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\mathit{\Omega})$ é compacto.

Agora mostremos que o operador B^{-1} é auto-adjunto, isto é, $(B^{-1}f,g)_{L^2(\Omega)} = (f, B^{-1}g)_{L^2(\Omega)}$, para todo $f, g \in L^2(\Omega)$.

De fato, temos que

$$\begin{array}{rccc} B^{-1}: & L^2(\Omega) & \longrightarrow & H^2(\Omega) \\ & f & \longmapsto & B^{-1}f = u, \end{array}$$

onde $u \in D(-\Delta)$ é solução de $-\Delta u + u = f$. Considere $B^{-1}g = v$, onde $v \in D(-\Delta)$ é solução de $-\Delta v + v = g$. Então, como $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$, pois $u, v \in D(-\Delta)$, por (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} (B^{-1}f,g)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega B^{-1}f\, g = \int_\Omega u(-\Delta v + v) \\ &= -\int_\Omega u\Delta v + \int_\Omega uv \\ &= -\int_\Omega \Delta u\, v + \int_\Omega uv \\ &= \int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega f\, B^{-1}g \\ &= (f, B^{-1}g)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 1.30, existe uma sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de autovalores distintos de zero do operador B^{-1}, tais que

$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n \geqslant \ldots.$$

Sejam, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as autofunções associadas aos autovalores $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então

$$B^{-1}f_n = \beta_n f_n. \tag{2.12}$$

Observe que $\beta_n f_n \in H^2(\Omega)$. Como $\beta_n \in \mathbb{R}$, segue que $f_n \in H^2(\Omega)$. De (2.12) temos

$$f_n = B\beta_n f_n = -\Delta\beta_n f_n + \beta_n f_n, \text{ então } -\Delta f_n + f_n = \frac{1}{\beta_n} f_n$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$ como autovalor da autofunção $u \in H^2(\Omega)$, temos

$$-\Delta u + u = \frac{1}{\beta}\, u = \alpha u$$

Assim para o operador $B = -\Delta + I$ obtemos a sequência de autovalores (α_n) tal que

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \ldots.$$

Assim temos a existência da sequência de autovalores para o problema (2.10). Note que a partir desse problema obtemos o problema (2.9), basta tomar

$\lambda = \alpha - 1$, pois

$$-\Delta u + u = \alpha u, \text{ então, } \Delta u = (\alpha - 1)u = \lambda u.$$

Logo, obtemos

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots.$$

O primeiro autovalor do Laplaciano é dado como o mínimo do funcional de Rayleigh. Assim, sendo α_1 o primeiro autovalor de $B = -\Delta + I$, ele é dado por:

$$\alpha_1 = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{(Bu, u)_{L^2(\Omega)}}{||u||^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Como

$$(Bu, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 = ||u||^2_{H^1(\Omega)},$$

e

$$||u||^2_{H^1(\mathit{\Omega})} = \int_{\mathit{\Omega}} |\nabla u|^2 + \int_{\mathit{\Omega}} |u|^2 \geq ||u||^2_{L^2(\mathit{\Omega})},$$

segue que,

$$\frac{||u||^2_{H^1(\mathit{\Omega})}}{||u||^2_{L^2(\mathit{\Omega})}} \geq 1; \text{ para todo } u \in H^1(\mathit{\Omega}).$$

Assim,

$$\alpha_1 = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathit{\Omega}) \\ u \neq 0}} \frac{||u||^2_{H^1(\mathit{\Omega})}}{||u||^2_{L^2(\mathit{\Omega})}} \geq 1.$$

Se $u = cte$, então $||u||^2_{H^1(\mathit{\Omega})} = ||u||^2_{L^2(\mathit{\Omega})}$. Logo $\dfrac{||u||^2_{H^1(\mathit{\Omega})}}{||u||^2_{L^2(\mathit{\Omega})}} = 1$. Portanto, $\alpha_1 = 1$, é o primeiro autovalor de $B = -\Delta + I$.

Agora seja u_1 a primeira auto-função associada $\alpha_1 = 1$, assim,

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + u_1 &= 1.u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= 0 = 0.u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda_1 = 0$.

Como pelo Teorema 1.30 os autovalores são distintos de zero segue que

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots.$$

$\square$

Observação 2.4. *As funções v_j definidas anteriormente são suaves, isto é, para cada $j \geqslant 1$, $v_j \in H^2(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$. E pelos Teoremas 1.30 e 1.31, formam uma base ortonormal completa em $L^2(\Omega)$.*

A partir dos dois próximos resultados, concluí-se que $\{v_j\}_{j \geqslant 1}$ é uma base ortogonal em $H^1(\Omega)$.

Lema 2.5. *Sejam $\{v_j\}_{j\geqslant 1}$ as autofunções correspondentes dos autovalores (λ_i), definidos no Lema 2.3. Assim $\{v_j\}_{j\geqslant 1}$ são tais que:*

$$(v_j, v_k)_{L^2(\Omega)} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \text{, para } 1 \leqslant j, k.$$

E, essas autofunções satisfazem também,

$$(\nabla v_j, \nabla v_k)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{para } j \neq k,\ 1 \leqslant j, k.$$

Demonstração. De fato, por (1.2),

$$\begin{aligned}
(\nabla v_j, \nabla v_k)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla v_j . \nabla v_k \, d\Omega \\
&= -\int_\Omega v_j \, \Delta v_k \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\int_\Omega v_j \, \lambda_k v_k \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\lambda_k \int_\Omega v_j \, v_k \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \, ds \\
&= -\lambda_k (v_j, v_k)_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \, ds \\
&= \int_{\partial\Omega} v_j \frac{\partial v_k}{\partial n} \, ds, \ \text{ pois } \{v_j\} \text{ é base ortonormal e } j \neq k, \\
&= 0, \ \text{ pela condição de contorno de Neumann homogênea.}
\end{aligned}$$

□

Lema 2.6. *Seja V_m o espaço vetorial finito gerado por $\{v_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$. No que segue, vamos fazer uso da projeção L^2-ortogonal p_m sobre o espaço V_m. Então, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,*

$$(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall\, v \in V_m, \tag{2.13}$$

isto é, p_m é também uma projeção H^1-ortogonal sobre V_m.

Demonstração. De fato, por (1.2), para todo $v \in V_m$ temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla(p_m\varphi - \varphi)\nabla v \, dx \\
&= -\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)\, \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} (p_m\varphi - \varphi)\frac{\partial v}{\partial n} \, ds,
\end{aligned}$$

pela condição de contorno de Neumann homogênea temos que $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$, então

$$\begin{aligned}
(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)\,\Delta v\,dx \\
&= -\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)\,\Delta(c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m)\,dx \\
&= -\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)\,(c_1\Delta v_1 + \ldots + c_m\Delta v_m)\,dx \\
&= -\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)\,(c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + c_m\lambda_m v_m)\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\Omega [(p_m\varphi - \varphi)c_1\lambda_1 v_1 + \ldots + (p_m\varphi - \varphi)c_m\lambda_m v_m]\,dx \\
&= -\left[\int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)c_1\lambda_1 v_1\,dx + \ldots + \int_\Omega (p_m\varphi - \varphi)c_m\lambda_m v_m\,dx\right] \\
&= -\big(c_1\lambda_1(p_m\varphi - \varphi, v_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots + c_m\lambda_m(p_m\varphi - \varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\big) \\
&= -\big(c_1\lambda_1\left[(p_m\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)} - (\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)}\right] + \ldots + c_m\lambda_m\left[(p_m\varphi - \varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\quad \left. - (\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\right]\big) \\
&= c_1\lambda_1(\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots + c_m\lambda_m(\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)} - \big(c_1\lambda_1(p_m\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)} + \ldots \\
&\quad + c_m\lambda_m(p_m\varphi - \varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\big) \\
&= \sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(\varphi, v_i)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^m c_i\lambda_i(p_m\varphi, v_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $p_m\varphi = \varphi = \sum_{j=1}^m (\varphi, v_j)_{L^2(\Omega)}\, v_j$, pelo item (a) do Teorema 1.31 segue que

$$\begin{aligned}
(p_m\varphi, v_i)_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{j=1}^m (\varphi, v_j)_{L^2(\Omega)}\, v_j, v_i\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m (\varphi, v_j)_{L^2(\Omega)}\, v_j\right) v_i\,dx \\
&= \int_\Omega \big((\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)}\, v_1 + \ldots + (\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\, v_m\big)\, v_i\,dx \\
&= \int_\Omega (\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)}\, v_1 v_i\,dx + \ldots + \int_\Omega (\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}\, v_m v_i\,dx \\
&= (\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)} \int_\Omega v_1 v_i\,dx + \ldots + (\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)} \int_\Omega v_m v_i\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varphi, v_1)_{L^2(\Omega)}(v_1, v_i)_{L^2(\Omega)} + \ldots + (\varphi, v_m)_{L^2(\Omega)}(v_m, v_i)_{L^2(\Omega)} \\
&= (\varphi, v_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
(\nabla(p_m\varphi-\varphi),\nabla v)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi,v_i)_{L^2(\Omega)}-\sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(p_m\varphi,v_i)_{L^2(\Omega)}\\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi,v_i)_{L^2(\Omega)}-\sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i(\varphi,v_i)_{L^2(\Omega)}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

2.1.1 O Problema Aproximado e Solução em um Espaço de Dimensão Finita

Nesta seção provaremos a existência de solução local para um problema aproximado ao o enunciado no Teorema 2.1. Para cada $m \geqslant 1$, considere o seguinte problema aproximado:

$$
(P_m)\begin{cases}
\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}v\,dx+\varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla v\,dx=\int_\Omega (F_1(\phi_m)+c_mF_2(\phi_m))v\,dx,\\
\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}w\,dx+\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m+D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla w\,dx=0,\\
\text{para todo } v,\ w\in V_m, \text{ e q.t.p. } t\in(0,T)\\
\phi_m(0)=\phi_{0m}\in \mathrm{V}_m,\ \ c_m(0)=c_{0m}\in \mathrm{V}_m.
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

Considere as soluções aproximadas da forma

$$
\phi_m(t)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)v_i,\quad c_m(t)=\sum_{i=1}^{m}c_{im}(t)v_i.
$$

Tome por

$$
U_m(t)=\begin{pmatrix}(\varphi_{im}(t))\\(c_{im}(t))\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2m}.
$$

Temos que (P_m) vale para todo $v,w\in V_m$, assim tomemos

$$
v=w=0v_1+0v_2+\cdots+v_j+\cdots+0v_m\in V_m.
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}v_j\,dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)v_i\right)v_j\,dx\\
&= \int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi'_{im}(t)v_i\right)v_j\,dx=\sum_{i=1}^{m}\varphi'_{im}(t)\int_\Omega v_iv_j\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \varphi'_{im}(t)(v_i, v_j)_{L^2(\Omega)} = \varphi'_{jm}(t),\\
\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} v_j\,dx &= c'_{jm}(t),\\
\int_\Omega \nabla\phi_m \nabla v_j\,dx &= \int_\Omega \nabla\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)v_i\right)\nabla v_j\,dx\\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)\nabla v_i\right)\nabla v_j\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)\int_\Omega \nabla v_i\nabla v_j\,dx\\
&= \sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)(\nabla v_i, \nabla v_j)_{L^2(\Omega)} = \varphi_{jm}(t)(\nabla v_j, \nabla v_j)_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m))v_j\,dx &= \int_\Omega F_1\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)v_i\right)v_j\,dx\\
&+ \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)v_i\right)F_2(\phi_m)v_j\,dx\\
&= \int_\Omega F_1(\phi_m)v_i\,dx + \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)\int_\Omega v_i v_1 F_2(\phi_m)\,dx\\
&= \int_\Omega F_1(\phi_m)v_i\,dx + c_{1m}(t)\int_\Omega v_1 v_1 F_2(\phi_m)\,dx + \ldots\\
&+ c_{mm}(t)\int_\Omega v_m v_1 F_2(\phi_m)\,dx,
\end{aligned}
$$

e, finalmente,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\nabla v_j\,dx\\
=\;& \int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla c_m\nabla v_j\,dx + \int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m\nabla v_j\,dx\\
=\;& \sum_{i=1}^{m} c_{im}(t)\int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla v_i\nabla v_j\,dx + \sum_{i=1}^{m}\varphi_{im}(t)\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla v_i\nabla v_j\,dx\\
=\;& c_{1m}(t)\int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla v_1\nabla v_j\,dx + \cdots + c_{mm}(t)\int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla v_m\nabla v_j\,dx\\
+\;& \varphi_{1m}(t)\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla v_1\nabla v_j\,dx + \cdots + \varphi_{mm}(t)\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla v_m\nabla v_j\,dx.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $U_m(t)$ é uma matriz coluna, obtemos a primeira linha $\varphi_{1m}(t)$ e a $m+1$-linha $c_{1m}(t)$, que é dada substituindo as expressões acima em (P_m), isto é,

$$\begin{aligned}\varphi'_{jm}(t) + \varepsilon^2(\nabla v_j, \nabla v_j)_{L^2(\Omega)}\varphi_{jm}(t) &= \int_\Omega F_1\left(\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)v_i\right) v_j\, dx \\ &+ \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^m c_{im}(t)v_i\right) F_2(\phi_m)v_j\, dx\end{aligned}$$

e

$$c'_{jm}(t)+\sum_{i=1}^m c_{jm}(t)\int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla v_i\nabla v_j\, dx+\sum_{i=1}^m \varphi_{im}(t)\int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla v_i\nabla v_j\, dx = 0$$

Assim temos o seguinte problema

$$\mathrm{U'}_m(t) + \begin{bmatrix}\mathrm{E(U_m(t))} & \mathrm{G(U_m(t))}\\ \mathbf{0} & \mathrm{H(U_m(t))}\end{bmatrix} \mathrm{U}_m(t) = \begin{bmatrix}\mathrm{J(U_m(t))}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathrm{E(U_m(t))} = [\mathrm{E_{ij}}]_{m\times m}, &\quad \text{com}\quad \mathrm{E_{ij}} = \int_\Omega v_j v_i F_2(\phi_m)\, dx;\\ \mathrm{G(U_m(t))} = [\mathrm{G_{ij}}]_{m\times m}, &\quad \text{com}\quad \mathrm{G_{ij}} = \int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla v_j\nabla v_i\, dx;\\ \mathrm{H(U_m(t))} = [\mathrm{H_{ij}}]_{m\times m}, &\quad \text{com}\quad \mathrm{H_{ij}} = \int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla v_j\nabla v_i\, dx;\\ \mathrm{J(U_m(t))} = [\mathrm{J_{ij}}]_{m\times 1}, &\quad \text{com}\quad \mathrm{J_{ij}} = \int_\Omega F_1(\phi_m)v_i\, dx - \varepsilon^2(\nabla v_j,\nabla v_j)_{\mathrm{L^2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Tome, $B(U_m(t)) = \begin{bmatrix}\mathrm{E(U_m(t))} & \mathrm{G(U_m(t))}\\ \mathbf{0} & \mathrm{H(U_m(t))}\end{bmatrix} \mathrm{U}_m(t)$ e $\mathcal{F}(U_m(t)) = \begin{bmatrix}\mathrm{J(U_m(t))}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$.

Logo o problema (P_m) é de fato um problema de valor inicial para um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias de ordem $2m$, que pode ser escrito como

$$\begin{aligned}&U'_m(t) + B(U_m(t))U_m(t) = \mathcal{F}(U_m(t)),\\ &U_m(0) = U_0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Como os termos não-lineares F_1, F_2, D_1 e D_2 são funções contínuas Lipschitz, e como as funções (v_j) são suaves, pelo Teorema 1.27 (Teorema de Caratheodory), o problema (2.15) tem uma solução $U_m(t)$, sobre algum intervalo de tempo maximal $[0,T_m)$ com $T_m > 0$ e $U_m \in C^1([0,T_m))$. Assim, o Problema (2.14) tem uma solução (ϕ_m, c_m) sobre o intervalo de tempo $[0,T_m)$ e $(\phi_m, c_m) \in C^1([0,T_m), V_m \times V_m)$.

2.1.2 Propriedades das Condições Iniciais

Com o resultado que segue temos um importante argumento para as convergências das condições iniciais do Problema 2.14.

Lema 2.7 (Propriedades das Condições Inciais)**.** *Escolhendo* $\phi_{0m} = p_m\phi_0$ *e* $c_{0m} = p_m c_0$*, os dados iniciais tem as seguintes propriedades:*

$$||\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\phi_0||_{L^2(\Omega)} \text{ e } \phi_{0m} \to \phi_0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } m \to +\infty; \tag{2.16}$$

$$||c_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||c_0||_{L^2(\Omega)} \text{ e } c_{0m} \to c_0 \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } m \to +\infty. \tag{2.17}$$

Demonstração. De fato, por hipótese $\phi_0 \in L^2(\Omega)$. Pela Observação 1.32, temos que a melhor aproximação de ϕ_0 em V_m é dada por

$$\sum_{i=1}^{m}(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}v_i,$$

assim, aplicando o Teorema 1.33 e lembrando que $||v_i||_{L^2(\Omega)} = 1$, temos

$$\begin{aligned}
||\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &= ||p_m\phi_0||^2_{L^2(\Omega)} = \left|\left|\sum_{i=1}^{m}(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}v_i\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m}|(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}|^2||v_i||^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}|(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}|^2 \leqslant ||\phi_0||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo, $||\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\phi_0||_{L^2(\Omega)}$.

Agora, aplicando o Teorema 1.31 item a)

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty}\phi_{0m} &= \lim_{m\to+\infty}p_m\phi_0 = \lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}v_i \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty}(\phi_0, v_i)_{L^2(\Omega)}v_i = \phi_0.
\end{aligned}$$

Logo, $\phi_{0m} \to \phi_0$ em $L^2(\Omega)$ quando $m \to +\infty$.

A outra propriedade é análoga pois, por hipótese, $c_0 \in L^2(\Omega)$. □

2.1.3 Estimativas a Priori

Nesta seção obteremos estimativas a fim de ter condições de tomar o limite no Problema 2.14, fazendo $m \to \infty$, e concluir o resultado da primeira parte do

Teorema 2.1.

Denotaremos nesta seção por C uma constante positiva que depende de ε^2, M_1, M_2, M_3, D_s, D_1, $|\Omega|$, T, das constantes de Lipschitz dos termos não-lineares F_i, D_i, $i = 1, 2$ e também de $||\phi_0||_{L^2(\Omega)}$ e $||c_0||_{L^2(\Omega)}$, mas é independente de m.

Lema 2.8. *Seja* $(\phi_m, c_m) \in L^2([0, T_m); V_m)$. *Então existe* $C > 0$ *dependendo de* T_m *tal que, para todo* $0 \leqslant t < T_m$

$$||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant C. \tag{2.18}$$

Demonstração. Escolhendo $v = \phi_m(t)$ na primeira equação do Problema 2.14 e $w = c_m(t)$ na segunda equação, temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\phi_m(t)\,dx \quad &+ \quad \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m(t)\cdot\nabla\phi_m(t)\,dx \\ &= \quad \int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\phi_m(t)\,dx,\end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)c_m(t)\,dx + \int_\Omega (D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t), \phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\cdot\nabla c_m(t)\,dx = 0.$$

Pelo Teorema 1.16, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\phi_m(t)\,dx = \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t), \phi_m(t)\right)_{L^2(\Omega)} \quad &= \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\phi_m(t))^2\,dx.\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)c_m(t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (c_m(t))^2\,dx.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\phi_m(t))^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \quad &= \quad \int_\Omega F_1(\phi_m(t))\phi_m(t)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega F_2(\phi_m(t))c_m(t)\phi_m(t)\,dx,\end{aligned} \tag{2.19}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (c_m(t))^2\,dx \quad &+ \quad \int_\Omega D_1(\phi_m(t))|\nabla c_m(t)|^2\,dx \\ &= \quad -\int_\Omega D_2(c_m(t), \phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Multiplicando (2.20) por $\delta > 0$ que será escolhido depois, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\delta(c_m(t))^2\,dx &+ \int_{\Omega}\delta D_1(\phi_m(t))|\nabla c_m(t)|^2\,dx\\ &= -\delta\int_{\Omega}D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\,dx,\end{aligned}$$

somando esta equação com (2.19),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}((\phi_m(t))^2+\delta(c_m(t))^2)\,dx+\varepsilon^2\int_{\Omega}|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx+\int_{\Omega}\delta D_1(\phi_m(t))|\nabla c_m(t)|^2\,dx\\ = \int_{\Omega}F_1(\phi_m(t))\phi_m(t)\,dx + \int_{\Omega}F_2(\phi_m(t))c_m(t)\phi_m(t)\,dx\\ -\delta\int_{\Omega}D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\,dx. \quad (2.21)\end{aligned}$$

Usando a hipótese (H2), temos

$$\delta D_s \leqslant \delta D_1(\phi_m(t)) \text{ então } \int_{\Omega}\delta D_s|\nabla c_m(t)|^2\,dx \leqslant \int_{\Omega}\delta D_1(\phi_m(t))|\nabla c_m(t)|^2\,dx.$$

Observe que,

$$\int_{\Omega}F_1(\phi_m(t))\phi_m(t)\,dx \leqslant \left|\int_{\Omega}F_1(\phi_m(t))\phi_m(t)\,dx\right| \leqslant \int_{\Omega}|F_1(\phi_m(t))||\phi_m(t)|\,dx,$$

assim, por (H1), temos

$$\int_{\Omega}F_1(\phi_m(t))\phi_m(t)\,dx \leqslant M_1\int_{\Omega}|\phi_m(t)|\,dx,$$

e, analogamente

$$\int_{\Omega}F_2(\phi_m(t))c_m(t)\phi_m(t)\,dx \leqslant M_2\int_{\Omega}|c_m(t)||\phi_m(t)|\,dx.$$

Por outro lado, de (H3), segue que

$$-\delta\int_{\Omega}D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\,dx \leqslant \delta M_3\int_{\Omega}|\nabla\phi_m(t)||\nabla c_m(t)|\,dx.$$

A partir dessas identidades, a equação (2.21) nos fornece

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}((\phi_m(t))^2+\delta(c_m(t))^2)\,dx+\varepsilon^2\int_{\Omega}|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx+\delta D_s\int_{\Omega}|\nabla c_m(t)|^2\,dx\\ \leqslant M\left(\int_{\Omega}|\phi_m(t)|\,dx+\int_{\Omega}|c_m(t)||\phi_m(t)|\,dx\right)+\delta M_3\int_{\Omega}|\nabla\phi_m(t)||\nabla c_m(t)|\,dx,\end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $M = \max\{M_1, M_2\}$.

Note que, pela Desigualdade de Young (1.12)

$$|c_m(t)||\phi_m(t)| \leqslant \frac{|c_m(t)|^2}{2} + \frac{|\phi_m(t)|^2}{2},$$

isto implica que,

$$\int_\Omega |c_m(t)||\phi_m(t)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_m(t)|^2\,dx\right),$$

e, usando o mesmo argumento,

$$\int_\Omega |\phi_m(t)|\,dx = \int_\Omega 1|\phi_m(t)|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\left(|\Omega| + \int_\Omega |\phi_m(t)|^2\,dx\right).$$

Ainda pela Desigualdade de Young (1.13), para todo $\eta > 0$, temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)||\nabla c_m(t)| \leqslant \frac{1}{2\eta}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \frac{\eta}{2}\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx.$$

Logo, (2.22) fica

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx \\
&\leqslant\; M\left(\frac{|\Omega|}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega |\phi_m(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx\right) + \frac{\delta M_3}{2\eta}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \\
&\quad + \frac{\delta M_3}{2}\eta\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \max\left\{\frac{M|\Omega|}{2}, \frac{M}{2}\right\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx \\
&\quad\leqslant\; C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m(t))^2\,dx + \int_\Omega (c_m(t))^2\,dx\right) + \frac{\delta M_3}{2\eta}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \\
&\quad\quad + \frac{\delta M_3}{2}\,\eta\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \frac{D_s\varepsilon^2}{M_3^2}$ e $\eta = \frac{D_s}{M_3}$, note que

$$\frac{\delta M_3}{2\eta} = \frac{\varepsilon^2}{2} \;\text{ e }\; \frac{\delta M_3}{2}\eta = \frac{\delta D_s}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx + \delta D_s \int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\, dx \\
&\quad \leqslant\ C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m(t))^2\, dx + \int_\Omega (c_m(t))^2\, dx\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx \\
&\qquad + \frac{\delta D_s}{2}\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx + \delta D_s \int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\, dx \\
&\qquad \leqslant 2C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m(t))^2\, dx + \int_\Omega (c_m(t))^2\, dx\right). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Como

$$\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx, \delta D_s \int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\, dx \geqslant 0,$$

segue de (2.23) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx &\leqslant 2C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m(t))^2\, dx + \int_\Omega (c_m(t))^2\, dx\right) \\
&\leqslant 2C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m(t))^2\, dx + \int_\Omega \delta(c_m(t))^2\, dx\right),
\end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx \leqslant 2C\left(\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx\right) + 2C.$$

Pelo Teorema 1.24 (Lema de Gronwall - Forma Diferencial), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx &\leqslant e^{\int_0^t 2C\, ds}\left[\int_\Omega \left((\phi_m(0))^2 + \delta(c_m(0))^2\right)\, dt + \int_0^t 2C\, ds\right] \\
&= e^{2Ct}\left[\int_\Omega (\phi_{0m}^2 + \delta c_{0m}^2)\, dt + 2Ct\right] \\
&\leqslant e^{2CT_m}\left[\int_\Omega (\phi_{0m}^2 + \delta c_{0m}^2)\, dt + 2CT_m\right],
\end{aligned}$$

por (2.16), e (2.17), temos que a integral $\int_\Omega (\phi_{0m}^2 + \delta c_{0m}^2)\, dt$ é limitada, então

$$\int_\Omega \left((\phi_m(t))^2 + \delta(c_m(t))^2\right)\, dx \leqslant C(T_m) = C.$$

Logo,

$$\int_\Omega (\phi_m(t))^2\,dx + \delta \int_\Omega (c_m(t))^2\,dx \leqslant C, \text{ então } ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C,$$

para todo $0 \leqslant t < T_m$.

Provamos assim o que queríamos.

□

Antes de continuar com as estimativas, vamos enunciar um importante resultado que é consequência da Proposição 1.28.

Lema 2.9. *Se para cada $m \geqslant 1$, existir $0 < T_m < T$ e uma solução (ϕ_m, c_m) do Problema 2.14, onde se $T_m < +\infty$, então*

$$||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty \;\; \textit{quando} \;\; t \longrightarrow T_m^-$$

Demonstração. Encontramos uma demonstração de um resultado análogo, no artigo de Vaz e Boldrini [22].

A partir da validade da estimativa (2.18), para todo $0 \leqslant t < T_m$, por contrapositiva do lema acima temos que

$$T_m = +\infty.$$

Portanto, o Problema 2.14 (e consequentemente (2.15)) está definido no intervalo fixo $[0, T]$, e a estimativa (2.18) tem constante C independente de m. Logo, podemos enunciar o próximo resultado, que apresenta importantes estimativas.

Lema 2.10. *As seguintes estimativas são válidas:*

$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \leqslant C, \tag{2.24}$$
$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2} \leqslant C, \tag{2.25}$$

onde C é uma constante independente de m, e é dada como no início dessa seção.

Demonstração. Integrando a desigualdade (2.23) de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt}\left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \right. &+ \left. \delta ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \right) dt + \varepsilon^2 \int_0^T ||\nabla \phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ +\delta D_s \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &\leqslant 2C \left(T + \int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \right). \end{aligned}$$

Usando (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}||\phi_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta||c_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} - ||\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} &- \delta||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} \\ + \varepsilon^2 \int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \delta D_s \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt &\leqslant 2C\,(T + CT)\,,\end{aligned}$$

de (2.16) e (2.17) segue que $||\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} = ||\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}$ e $||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} = ||c_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}$ são limitadas. Obtemos, assim Sendo C dependende de ε^2, δD_s, $||\phi_0||^2_{L^2(\Omega)}$ e $||c_0||^2_{L^2(\Omega)}$,

$$\int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt \leqslant C,$$

onde $C = C(\varepsilon^2, \delta D_s, ||\phi_0||^2_{L^2(\Omega)}, ||c_0||^2_{L^2(\Omega)}, T)$ constante. De (2.18)

$$\begin{aligned}\int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt &+ \int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt + \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt \\ + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt &\leqslant C + \int_0^T \left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)\, dt = C + CT,\end{aligned}$$

então,

$$\int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt \leqslant C,$$

ou seja,

$$||\phi_m||^2_{L^2([0,T];H^1(\Omega))} + ||c_m||^2_{L^2([0,T];H^1(\Omega))} \leqslant C,$$

logo

$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^2([0,T];H^1(\Omega)))^2} \leqslant C.$$

E, em (2.18), tomando o supremo essencial temos

$$\sup_{t\in[0,T]} ess \left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant C,$$

ou seja,

$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^\infty([0,T];L^2(\Omega)))^2} \leqslant C.$$

□

Vamos agora obter estimativas para as derivadas no tempo de ϕ_m e c_m.

Antes das estimativas vamos definir a norma em V' e um elemento de V_m, tomando $V = H^1(\Omega)$. Devido ao fato de que a projeção $L^2(\Omega)$-ortogonal é também $H^1(\Omega)$-ortogonal sobre V_m, temos para $\varphi_m \in V_m$

$$||\varphi_m||_{V'} \equiv \sup_{\substack{\psi\in V \\ \psi\neq 0}} \frac{|\langle\varphi_m, \psi\rangle_{V',V}|}{||\psi||_V}.$$

Observe que $V = V_m \oplus V_m^\perp$, então $\psi = \psi_m + \psi_m^\perp$. Note que $\psi_m = p_m(\psi)$, logo

$$||\varphi_m||_{V'} = \sup_{\substack{\psi \in V \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m + \psi_m^\perp \rangle_{V',V}|}{||\psi||_V} = \sup_{\substack{\psi \in V \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi||_V},$$

como $V_m \subset V$,

$$||\varphi_m||_{V'} \geqslant \sup_{\substack{\psi_m \in V_m \\ \psi_m \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi_m||_V}.$$

Por outro lado, de $\psi_m = p_m(\psi)$ segue que $||\psi_m||_V \leqslant ||\psi||_V$. Então,

$$\frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi_m||_V} \geqslant \frac{|\langle \varphi_m, \psi \rangle_{V',V}|}{||\psi||_V},$$

logo,

$$||\varphi_m||_{V'} = \sup_{\substack{\psi \in V \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi \rangle_{V',V}|}{||\psi||_V} \leqslant \sup_{\substack{\psi_m \in V_m \\ \psi_m \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi_m||_V}.$$

Assim,

$$||\varphi_m||_{V'} = \sup_{\substack{\psi_m \in V_m \\ \psi_m \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi_m||_V}.$$

Como V_m é um espaço vetorial de dimensão finita, segue que é compacto, daí

$$||\varphi_m||_{V'} = \max_{\substack{\psi_m \in V_m \\ \psi_m \neq 0}} \frac{|\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V}|}{||\psi_m||_V}.$$

Por definição

$$\langle \varphi_m, \psi_m \rangle_{V',V} = \int_\Omega \varphi_m \, \psi_m \, dx = (\varphi_m, \psi_m)_{L^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$||\varphi_m||_{V'} = \max_{\substack{\psi_m \in V_m \\ \psi_m \neq 0}} \frac{(\varphi_m, \psi_m)_{L^2(\Omega)}}{||\psi_m||_V}.$$

Agora podemos enunciar e provar o seguinte lema.

Lema 2.11. *A seguinte estimativa é válida*

$$\left|\left| \left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right) \right|\right|_{(L^2(0,T;V'))^2} \leqslant C. \tag{2.26}$$

Demonstração. Retomando a primeira equação do Problema 2.14, temos para todo $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t) v \, dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla \phi_m(t) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t) F_2(\phi_m(t))) v \, dx, \tag{2.27}$$

para todo $v \in V_m \subset L^2(\Omega)$.

Como $\phi_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{im}(t)v_i$, $v_i \in V_m$, concluímos que $\phi_m(t) \in V_m$. Por conseguinte $\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial t}(t)v_i$, então $\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t) \in V_m \subset L^2(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)v\, dx = \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t), v\right)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.28}$$

Por (1.11), temos:

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\cdot\nabla v\, dx &\leqslant \int_\Omega |\nabla\phi_m(t)\nabla v|\, dx \\
&\leqslant ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\left(||\nabla v||_{L^2(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leqslant ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||v||_V.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

E ainda tomando $C = \max\{M_1, M_2\}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m(t)F_2(\phi_m)v\, dx &\leqslant \int_\Omega \left(|F_1(\phi_m)| + |c_m(t)||F_2(\phi_m|)\right)|v|\, dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left(M_1|v| + |c_m(t)|M_2|v|)\right) dx \\
&\leqslant C\left(\int_\Omega (1.|v| + |c_m(t)||v|)\, dx\right) \\
&\leqslant C\left(||v||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= C||v||_{L^2(\Omega)}\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leqslant C||v||_{L^2(\Omega)}\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) + C||\nabla v||_{L^2(\Omega)}\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= C\left(||v||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}\right)\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= C||v||_V\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo (2.28), (2.29) e (2.30) em (2.27) obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t), v\right)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m(t)F_2(\phi_m)v\, dx - \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\cdot\nabla v\, dx \\
&\leqslant \varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||v||_V + C||v||_V\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

para todo $v \in V_m$.

Daí

$$\max_{\substack{v\in V_m\\ v\neq 0}} \frac{\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t), v\right)_{L^2(\Omega)}}{||v||_V} \leqslant \varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + C\left(1 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right),\ \forall\, v \in V_m$$

e então
$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'} \leqslant \varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + C\left(1+||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right).$$

A partir da última desigualdade e da Observação 1.21

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'}^2 &\leqslant \left(\varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + C\left(1+||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)\right)^2\\
&\leqslant 4\left(\varepsilon^4||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C^2\left(1+||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)\\
&\leqslant 4\left(\varepsilon^4||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 4C^2\left(1+||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)\right)\\
&\leqslant C\left(||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 1 + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')}^2 &\leqslant C\left(T + ||c_m||^2_{L^2(Q_T)} + \int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right)\\
&\leqslant C\left(T + ||c_m||^2_{L^2(Q_T)} + \int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right.\\
&\qquad\left. + \int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right)\\
&= C\left(T + ||c_m||^2_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')} \leqslant C\left(1 + ||c_m||_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right). \tag{2.31}$$

Agora retomando a segunda equação do Problema 2.14, temos para todo $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)w\,dx + \int_\Omega (D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\cdot\nabla w\,dx = 0, \tag{2.32}$$

para todo $w \in V_m$.

Temos que,
$$\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)w\,dx = \left(\frac{\partial c_m}{\partial t}(t), w\right)_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega (D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\cdot\nabla w\,dx \\
\leqslant\ & \int_\Omega (|D_1(\phi_m(t))||\nabla c_m(t)| + |D_2(c_m(t),\phi_m(t))||\nabla\phi_m(t)|)|\nabla w|\,dx \\
\leqslant\ & C\left(\int_\Omega |\nabla c_m(t)||\nabla w|\,dx + \int_\Omega |\nabla\phi_m(t)||\nabla w|\,dx\right) \\
\leqslant\ & C\left(||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla w||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla w||_{L^2(\Omega)}\right) \\
=\ & C||\nabla w||_{L^2(\Omega)}\left(||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
\leqslant\ & C||\nabla w||_{L^2(\Omega)}\left(||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \\
=\ & C||\nabla w||_{L^2(\Omega)}\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right) \\
\leqslant\ & C||\nabla w||_{L^2(\Omega)}\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right) + C||w||_{L^2(\Omega)}\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right. \\
& \left.+||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right) \\
=\ & C||w||_V\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}(t), w\right)_{L^2(\Omega)}}{||w||_V} \leqslant C\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right),\ \forall\, w\in V_m,$$

aplicando o máximo

$$\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'}^2 \leqslant C\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}^2 + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}^2\right).$$

Integrando de 0 a T

$$\int_0^T \left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'}^2 dt \leqslant C\left(\int_0^T ||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}^2\,dt + \int_0^T ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}^2\,dt\right),$$

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')}^2 &\leqslant C\left(||c_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + ||\phi_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2\right), \\
\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')} &\leqslant C\left(||c_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Assim, a partir de (2.31) e (2.33), temos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right)\right|\right|_{(L^2(0,T;V'))^2} &= \left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')} + \left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')} \\
&\leqslant C\left(||c_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right) + C\left(1 + ||c_m||_{L^2(Q_T)}\right. \\
&\quad \left.+ ||\phi_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right).
\end{aligned}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
||c_m||^2_{L^2(Q_T)} &= ||c_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T ||c_m||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\
&\leqslant \int_0^T \left(||c_m||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m||^2_{L^2(\Omega)} \right) dt = ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)\right|\right|_{(L^2(0,T;V'))^2} &\leqslant C\,||(c_m,\phi_m)||_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \\
&\quad + C\left(||(c_m,\phi_m)||_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} + 1 \right).
\end{aligned}
$$

Logo, usando (2.24), obtemos

$$
\left|\left|\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)\right|\right|_{(L^2(0,T;V'))^2} \leqslant C. \tag{2.34}
$$

□

2.1.4 Existência das Soluções Fracas e Convergências

Deduzimos de (2.24), (2.25) e (2.34) que c_m e ϕ_m são limitadas (uniformemente em relação a m) em

$$
W_1 = \left\{ u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \right\},
$$

e em

$$
W_2 = \left\{ u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V') \right\}.
$$

Do Teorema 1.10 a inclusão de $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = V$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, e como também é densa, segue que $(L^2(\Omega))' \hookrightarrow V'$ e, por consequência do Teorema 1.18, temos ainda $L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))'$. Logo, obtemos as seguintes imersões

$$
H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow V'.
$$

Então, pelo Teorema 1.13, $W_1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$. Em outras palavras W_1 é compactamente imerso em $L^2(Q_T)$.

Além disso, considerando o seguinte resultado:

Teorema 2.12 (Schauder)**.** *Sejam E, F dois espaços de Banach. Se $T : E \to F$ é um operador compacto, então $T' : E' \to F'$ é um operador compacto. E, vale a recíproca.*

Demonstração. Brezis [4], Teorema 6.4, p.159.

Assim, como o operador $i : V \to L^2(\Omega)$ é compacto, pelo teorema acima o operador $i' : (L^2(\Omega))' \to V'$ é compacto.

Considerando a seguinte isometria em $L^2(\Omega)$

$$\begin{array}{rccl} T: & L^2(\Omega) & \to & (L^2(\Omega))' \\ & u & \mapsto & T_u v = \int_\Omega uv\,dx, \end{array}$$

segue que o operador $i' \circ T : L^2(\Omega) \to V'$ é compacto.

Logo, podemos considerar as seguintes imersões

$$L^2(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} V' \hookrightarrow V'.$$

Então, pelo Teorema 1.14, $W_2 \overset{c}{\hookrightarrow} C(0,T;V')$. Em outras palavras W_2 é imerso em $C([0,T],V')$ compactamente.

Assim, existem

$$c, \phi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$$

e subsequências de c_m e ϕ_m, que ainda denotaremos por c_m e ϕ_m, tais que, quando $m \to +\infty$, temos

$$(c_m, \phi_m) \to (c, \phi) \text{ em } (L^2(Q_T))^2 \cap (C([0,T],V'))^2. \tag{2.35}$$

O fato de $(c_m, \phi_m), (c, \phi) \in (C([0,T],V'))^2$ é de muita importância, pois com este resultado damos sentido às condições iniciais, ou seja, podemos calcular estas funções no ponto 0.

Agora, do Teorema 1.7, e pelo fato de que os espaços $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;V')$ são reflexivos, seguem as seguintes convergências

$$(c_m, \phi_m) \rightharpoonup (c, \phi) \text{ em } (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2, \tag{2.36}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right) \rightharpoonup \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \text{ em } (L^2(0,T;V'))^2. \tag{2.37}$$

A fim de obter o limite do Problema 2.14, temos os seguintes resultados de convergências para os termos não lineares.

Lema 2.13.

$$F_i(\phi_m) \to F_i(\phi) \;\; i = 1,2 \;\; \textit{em} \;\; L^p(Q_T), \;\; \textit{para todo}\; p \in [1, +\infty), \tag{2.38}$$

$$D_1(\phi_m) \to D_1(\phi) \;\; \textit{em} \;\; L^p(Q_T), \;\; \textit{para todo}\; p \in [1, +\infty), \tag{2.39}$$

$$c_m F_2(\phi_m) \to c F_2(\phi) \;\; \textit{em} \;\; L^q(Q_T), \;\; \textit{para todo}\; q \in [1, 2), \tag{2.40}$$

$$D_1(\phi_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\phi)\nabla c \;\; \textit{em} \;\; L^q(Q_T), \;\; \textit{para todo}\; q \in [1, 2), \tag{2.41}$$

$$D_2(c_m, \phi_m)\nabla \phi_m \rightharpoonup D_1(c, \phi)\nabla \phi \;\; \textit{em} \;\; L^q(Q_T), \;\; \textit{para todo}\; q \in [1, 2). \tag{2.42}$$

Demonstração. Temos que $\phi_m \to \phi$ em $L^2(Q_T)$, de acordo com (2.35); e por (H1), $F_i \in C(\mathbb{R})$ são Lipschitz e limitadas com $|F_i(r)| \leqslant M_1$ para todo $r \in \mathbb{R}$ com $i = 1, 2$. Então $F_i(\phi_m) \to F_i(\phi)$ em $L^2(Q_T)$. Assim passando a uma subsequência, se necessário, e usando a mesma notação, temos que $F_i(\phi_m) \to F_i(\phi)$ q.t.p. em Q_T e como $|F_i(\phi_m)| \leqslant M_1$, para todo m e $M_1 \in L^p(Q_T)$, para todo $p \geqslant 1$. Segue pelo Teorema 1.5 que

$$F_i(\phi_m) \to F_i(\phi) \;\text{ em }\; L^p(Q_T), \;\text{ para todo } p \in [1, +\infty)$$

Portanto, temos (2.38).

A segunda convergência do Lema segue analogamente, pois, pela hipótese (H2), $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é Lipschitz positiva e limitada com

$$0 < D_s \leqslant D_1(r) \leqslant D_1, \;\forall\, r \in \mathbb{R}.$$

Assim da mesma forma obtemos (2.39).

Agora, vamos mostrar (2.40). Para tal, basta mostrar que para todo $q \in [1, 2)$, $||c_m F_2(\phi_m) - c\, F_2(\phi)||_{L^q(Q_T)} \to 0$, isto é,

$$\int_{Q_T} |c_m F_2(\phi_m) - c\, F_2(\phi)|^q \, dx\, dt \to 0.$$

Observe que consideramos a restrição $q \in [1, 2)$, que decorre entre outros fatores, de $c_m \in L^2(Q_T)$. A justificativa desse fato será notada no decorrer dessa demostração.

De fato,

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} |c_m F_2(\phi_m) - c\, F_2(\phi)|^q \, dx\, dt \\ = & \int_{Q_T} |c_m F_2(\phi_m) - c_m F_2(\phi) + c_m F_2(\phi) - c\, F_2(\phi)|^q \, dx\, dt \\ = & \int_{Q_T} |c_m (F_2(\phi_m) - F_2(\phi)) + F_2(\phi)(c_m - c)|^q \, dx\, dt \end{aligned}$$

$$\leqslant \; C_1 \int_{Q_T} |c_m (F_2(\phi_m) - F_2(\phi))|^q \, dx\, dt + C_2 \int_{Q_T} |F_2(\phi)(c_m - c)|^q \, dx\, dt$$

Agora analisemos cada integral separadamente. Primeiro,

$$\int_{Q_T} |c_m|^q |F_2(\phi_m) - F_2(\phi)|^q \, dx\, dt. \tag{2.43}$$

Sabemos que $||c_m||_{L^2(Q_T)}$ é limitada e temos (2.38) para todo $p \in [1, +\infty)$. Daí a necessidade que $q \in [1, 2)$, pois, assim, temos que $\dfrac{2}{q} > 1$ e $\dfrac{q}{2} + \dfrac{1}{y} = 1$ isso implica que $\dfrac{1}{y} = 1 - \dfrac{q}{2} = \dfrac{2 - q}{2}$, que, por sua vez, implica que, $y = \dfrac{2}{2 - q} > 1$, então

$\dfrac{2}{2-q}$ é o conjugado de $\dfrac{2}{q}$. Assim, podemos aplicar a Desigualdade de Hölder (1.11) em (2.43), obtendo

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} |c_m|^q |F_2(\phi_m) - F_2(\phi)|^q \, dx\, dt \\
\leqslant\ & \left(\int_{Q_T} |c_m|^{q\frac{2}{q}} \, dx\, dt\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{Q_T} |F_2(\phi_m) - F_2(\phi)|^{q\frac{2}{2-q}} \, dx\, dt\right)^{\frac{2-q}{2}} \\
=\ & \left(\int_{Q_T} |c_m|^2 \, dx\, dt\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_{Q_T} |F_2(\phi_m) - F_2(\phi)|^{\frac{2q}{2-q}} \, dx\, dt\right)^{\frac{2-q}{2q}.q} \\
=\ & ||c_m||^q_{L^2(Q_T)} \, ||F_2(\phi_m) - F_2(\phi)||^q_{L^{\frac{2q}{2-q}}(Q_T)}
\end{aligned}$$

Como $F_2(\phi_m) \to F_2(\phi)$ em $L^p(Q_T)$, para todo $p \in [1, +\infty)$, segue que

$$\int_{Q_T} |c_m(F_2(\phi_m) - F_2(\phi))|^q \, dx\, dt \to 0, \text{ em } L^q(Q_T) \text{ para todo } q \in [1, 2).$$

Temos, também, que $\displaystyle\int_{Q_T} |F_2(\phi)|^q |c_m - c|^q \, dx\, dt \to 0$. De fato, sabemos que $||c_m - c||_{L^2(Q_T)} \to 0$, e procedendo de forma análoga a convergência anterior segue o resultado.

Portanto, vale (2.40).

Agora vamos mostrar (2.41), lembre-se que

$$D_1(\phi_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\phi)\nabla c \text{ em } L^q(Q_T)$$

se, e somente se, para todo $\psi \in L^{q'}(Q_T)$

$$\langle D_1(\phi_m)\nabla c_m, \psi\rangle_{L^q(Q_T), L^{q'}(Q_T)} \to \langle D_1(\phi)\nabla c, \psi\rangle_{L^q(Q_T), L^{q'}(Q_T)},$$

onde $\dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{q} = 1$. De acordo com o Teorema 1.18, para mostrar (2.41), basta provar, para todo $v \in L^{q'}(Q_T)$

$$\int_{Q_T} (D_1(\phi_m)\nabla c_m - D_1(\phi)\nabla c)\, v \, dx\, dt \to 0.$$

De fato, de (1.11)

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (D_1(\phi_m)\nabla c_m - D_1(\phi)\nabla c_m + D_1(\phi)\nabla c_m - D_1(\phi)\nabla c)\, v \, dx\, dt \\
=\ & \int_{Q_T} (D_1(\phi_m) - D_1(\phi))\nabla c_m \, v \, dx\, dt + \int_{Q_T} D_1(\phi)(\nabla c_m - \nabla c)\, v \, dx\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_{Q_T} |D_1(\phi_m) - D_1(\phi)||\nabla c_m|\,|v|\,dx\,dt + \left|\int_{Q_T} (\nabla c_m - \nabla c)\,D_1(\phi) v\,dx\,dt\right| \\
&\leqslant ||D_1(\phi_m) - D_1(\phi)||_{L^s(Q_T)} ||\nabla c_m||_{L^2(Q_T)} ||v||_{L^{q'}(Q_T)} \\
&\quad + \left|\int_{Q_T} (\nabla c_m - \nabla c)\,D_1(\phi) v\,dx\,dt\right|, \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

onde $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{q'} = 1$, e assim $s > 2$ pois $q' < +\infty$.

Observe que, como D_1 é Lipschitz com constante $k \geqslant 0$, e por (2.35)

$$
\begin{aligned}
||D_1(\phi_m) - D_1(\phi)||^s_{L^s(Q_T)} &= \int_{Q_T} |D_1(\phi_m) - D_1(\phi)|^s\,dx\,dt;\;\; s > 2 \\
&= \int_{Q_T} |D_1(\phi_m) - D_1(\phi)|^{s-2} |D_1(\phi_m) - D_1(\phi)|^2\,dx\,dt \\
&\leqslant \int_{Q_T} |D_1(\phi_m) - D_1(\phi)|^{s-2}\,k^2 |\phi_m - \phi|^2\,dx\,dt, \\
&\leqslant \int_{Q_T} (2D_1)^{s-2}\,k^2 |\phi_m - \phi|^2\,dx\,dt \\
&= (2D_1)^{s-2}\,k^2 \int_{Q_T} |\phi_m - \phi|^2\,dx\,dt \\
&= (2D_1)^{s-2}\,k^2 ||\phi_m - \phi||_{L^2(Q_T)} \to 0.
\end{aligned}
$$

Note que $||\nabla c_m||_{L^2(Q_T)} < +\infty$, pois, de (2.24), temos

$$
\begin{aligned}
||\nabla c_m||^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leqslant \int_0^T (||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)})\,dt \\
&= ||c_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} < +\infty.
\end{aligned}
$$

E observe que, como $c_m \rightharpoonup c$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, em particular temos que

$$\nabla c_m \rightharpoonup \nabla c \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo

$$\int_0^T (\nabla c_m - \nabla c, \psi)_{L^2(\Omega)}\,dt \to 0,$$

para todo $\psi \in L^2(Q_T)$. Como $v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^2(Q_T)$, então $D_1(\phi)\,v \in L^2(Q_T)$ e temos que $||D_1(\phi)\,v||_{L^2(Q_T)} < \infty$. Logo, voltando em (2.44), segue (2.41).

Finalmente, para mostrar (2.42), a partir dos mesmos argumentos utilizados anteriormente, basta mostrar que para todo $v \in L^{q'}(Q_T)$ temos

$$\int_{Q_T} (D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m - D_2(c,\phi)\nabla\phi)\,v\,dx\,dt \to 0$$

De fato, de (1.11), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} D_2(c,\phi)(\nabla\phi_m - \nabla\phi)\, v\, dx\, dt + \int_{Q_T} (D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi))\nabla\phi_m\, v\, dx\, dt \\
\leqslant\ & \int_{Q_T} D_2(c,\phi)(\nabla\phi_m - \nabla\phi)\, v\, dx\, dt \\
& + ||D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)||_{L^s(Q_T)} ||\nabla\phi_m||_L^2(Q_T) ||v||_{L^{q'}(Q_T)}, \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

com $\frac{1}{q'} + \frac{1}{2} + \frac{1}{s} = 1$. Observe também que, como D_2 é Lipschitz com constante $k_1 \geqslant 0$, e por (2.35)

$$\begin{aligned}
& ||D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)||^2_{L^s(Q_T)} \\
=\ & \int_{Q_T} |D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)|^s\, dx\, dt \\
=\ & \int_{Q_T} |D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)|^{s-2} |D_2(c_m,\phi_m) - D_2(c,\phi)|^2\, dx\, dt \\
\leqslant\ & \int_{Q_T} (|D_2(c_m,\phi_m)| + |D_2(c,\phi)|)^{s-2} k_1^2 |(c_m - c, \phi_m - \phi)|^2\, dx\, dt \\
\leqslant\ & (2M_3)^{s-2} k_1^2 \int_{Q_T} |(c_m - c, \phi_m - \phi)|^2\, dx\, dt \\
=\ & (2M_3)^{s-2} k_1^2 ||(c_m - c, \phi_m - \phi)||^2_{L^2(Q_T)} \\
=\ & (2M_3)^{s-2} k_1^2 (||c_m - c||^2_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m - \phi)||^2_{L^2(Q_T)}) \to 0.
\end{aligned}$$

Como $||\nabla\phi_m||_{L^2(Q_T)} < \infty$, $D_2(c,\phi)\, v \in L^2(Q_T)$ e $\nabla\phi_m \rightharpoonup \nabla\phi$ em $L^2(Q_T)$. Voltanto em (2.45), segue (2.42).

Portanto, segue o resultado do lema. □

2.1.5 Convergência do Problema Aproximado

Agora estamos em condições de passar o limite no Problema 2.14, a fim de obter as equações (2.3) e (2.4).

Inicialmente, da convergência (2.35), temos que c_m, ϕ_m, c e ϕ são funções contínuas de $[0,T]$ a V', e a partir das propriedades das condições iniciais dadas pelo Lema 2.7, segue que as condições iniciais do Problema 2.14 convergem para as funções dadas ϕ_0 e c_0, e ainda temos que $\phi(0) = \phi_0$ e $c(0) = c_0$.

Observe ainda que pelo item (c) do Teorema 1.31, temos que

$$\overline{\bigcup_{m\geqslant 1} V_m} = L^2(\Omega) \qquad (2.46)$$

e

$$\overline{\bigcup_{m\geqslant 1} V_m} = H^1(\Omega). \qquad (2.47)$$

Primeiro vamos passar o limite na primeira equação do problema (2.14). Esta equação é equivalente a

$$\begin{aligned}\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v\, dx\, dt \quad &+ \quad \varepsilon^2 \int_0^T \beta \int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v\, dx\, dt \\ &- \quad \int_0^T \beta \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)) v\, dx\, dt = 0, \quad (2.48)\end{aligned}$$

para todo $v \in V_m$ e $\beta \in D = D(0,T)$.

Da equação (2.37) temos que $\dfrac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ em $L^2(0,T;V')$. Esta convergência implica que, para todo $\psi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, quando $m \to +\infty$,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, \psi \right\rangle_{V',V} dt \to \int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \psi \right\rangle_{V',V} dt,$$

note que $V'' = V$ e $(L^2(0,T;H^1(\Omega)))' = L^2(0,T;V')$, pois $V = H^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo.

Como $\beta v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, segue que, para todo $v \in V_m$ e para todo $\beta \in D(0,T)$, quando $m \to +\infty$,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, \beta v \right\rangle_{V',V} dt \to \int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \beta v \right\rangle_{V',V} dt.$$

Agora, como $\dfrac{\partial \phi_m}{\partial t} \in L^2(0,T,V')$, então $I(v) = \displaystyle\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, v\, dx\, dt$ define um funcional linear em $H^1(\Omega)$.

Assim fazemos a identificação $I(v) = \displaystyle\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} dt$. Logo,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, \beta v \right\rangle_{V',V} dt = \int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v\, dx\, dt,$$

e

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \beta v \right\rangle_{V',V} dt = \int_0^T \beta \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} dt = \left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D},$$

isto é, a última integral acima gera a distribuição $\left\langle \dfrac{\partial \phi_m}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}$.

Então, fazendo $m \to +\infty$, obtemos

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v\, dx\, dt \to \left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D}, \quad (2.49)$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

De (2.36) $\phi_m \rightharpoonup \phi$ em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, então passando a uma subsequência, se necessário, e denotando com o mesma notação, temos que $\nabla\phi_m \rightharpoonup \nabla\phi$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Logo, para todo $\psi \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, temos, em particular, $\nabla\psi \in L^2(Q_T)$, e vale

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\psi\nabla\phi_m \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \nabla\psi\nabla\phi \, dx \, dt,$$

fazendo $m \to +\infty$.

Como $\beta v \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, e β não depende de $x \in \Omega$, $\beta \in L^\infty(0,T)$, segue que $\beta\nabla v \in L^2(Q_T)$, então

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla\phi_m \, \beta\nabla v \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \nabla\phi \, \beta\nabla v \, dx \, dt,$$

para todos $\nabla v \in L^2(\Omega)$ e $\beta \in D(0,T)$.

A integral do lado direito gera a distribuição $\int_\Omega \nabla\phi\nabla v \, dx$, assim, quando $m \to +\infty$ temos

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \nabla\phi_m\nabla v \, dx \, dt \to \left\langle \int_\Omega \nabla\phi\nabla v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.50}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

Agora vamos fazer o limite dos termos não lineares. Observe que, para todo $\psi \in L^2(Q_T)$, quando $m \to +\infty$

$$\int_{Q_T} F_1(\phi_m)\psi \, dx \, dt \to \int_{Q_T} F_1(\phi)\psi \, dx \, dt.$$

De fato, por (2.38), para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_T} (F_1(\phi_m) - F_1(\phi))\psi \, dx \, dt \right| &= \left| (F_1(\phi_m) - F_1(\phi), \psi)_{L^2(Q_T)} \right| \\ &\leqslant ||F_1(\phi_m) - F_1(\phi)||_{L^2(Q_T)} ||\psi||_{L^2(Q_T)} \to 0. \end{aligned}$$

Assim como $\beta v \in L^2(Q_T)$ segue que, com $m \to +\infty$,

$$\int_0^T \beta \int_\Omega F_1(\phi_m) v \, dx \, dt \to \int_0^T \beta \int_\Omega F_1(\phi) v \, dx \, dt = \left\langle \int_\Omega F_1(\phi) v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.51}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

E finalmente, de (2.40) temos que

$$c_m F_2(\phi_m) \to c \, F_2(\phi) \text{ em } L^q(Q_T); \text{ para todo } q \in [1,2).$$

Daí temos que, passando a uma subsequência, e usando a mesma notação,

$$c_m F_2(\phi_m) \to c\, F_2(\phi), \quad \text{q.t.p. em } Q_T.$$

E, como $||c_m F_2(\phi_m)||_{L^2(Q_T)} \leqslant M_2 ||c_m||_{L^2(Q_T)} \leqslant C$ por (2.24), pela Proposição 1.6, concluimos que

$$c_m F_2(\phi_m) \rightharpoonup c\, F_2(\phi) \text{ em } L^2(Q_T).$$

Logo, para $m \to +\infty$,

$$\int_0^T \int_\Omega c_m F_2(\phi_m)\psi\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega c F_2(\phi)\psi\, dx\, dt, \quad \text{para todo } \psi \in L^2(Q_T).$$

Como $\beta v \in L^2(Q_T)$, temos

$$\int_0^T \beta \int_\Omega c_m F_2(\phi_m) v\, dx\, dt \to \int_0^T \beta \int_\Omega c F_2(\phi) v\, dx\, dt = \left\langle \int_\Omega c F_2(\phi) v\, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.52}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

Portanto, passando o limite com $m \to \infty$, em (2.48), e usando (2.49), (2.50), (2.51) e (2.52), obtemos, para todo $\beta \in D(0,T)$,

$$\begin{aligned}\left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D} &+ \varepsilon^2 \left\langle \int_\Omega \nabla\phi \nabla v\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} - \left\langle \int_\Omega F_1(\phi) v\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} \\ &- \left\langle \int_\Omega c F_2(\phi) v\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0,\end{aligned}$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \nabla v\, dx - \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) v\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0.$$

Logo, pela Proposição 1.19, aplicado à $L^1_{loc}(0,T)$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \nabla v\, dx - \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi)) v\, dx = 0,$$

para todo $v \in V_m$ e q.t.p. em $(0,T)$.

Da densidade de $\bigcup_{m \geqslant 1} V_m$ em $H^1(\Omega)$ (2.47), vale a equação acima para todo $v \in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

Agora tomaremos o limite da segunda equação do Problema 2.14. Note que esta equação é equivalente à

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} w\, dx\, dt + \int_0^T \beta \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\nabla w\, dx\, dt = 0, \tag{2.53}$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$ e $\beta \in D = D(0,T)$.

Como $\dfrac{\partial c_m}{\partial t} \rightharpoonup \dfrac{\partial c}{\partial t}$ em $L^2(0,T;V')$, (veja (2.37)), por argumentos análogos aos utilizados para obter (2.49), segue que

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}\, w\, dx\, dt \to \left\langle \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}, w \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.54}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$, quando $m \to +\infty$.

De (2.41) temos que $D_1(\phi_m)\nabla c_m \rightharpoonup D_1(\phi)\nabla c$ em $L^q(Q_T)$, para todo $q \in [1,2)$. Então, para todo $\psi \in L^{q'}(Q_T)$

$$\int_0^T \int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla c_m\, \psi\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega D_1(\phi)\nabla c\, \psi\, dx\, dt.$$

Da Observação 2.4 as autofunções do Laplaciano são $C^\infty(\overline{\Omega})$. Logo, $\nabla\psi \in L^{q'}(\Omega)$, pois $\dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $1 \leqslant q < 2$.

Portanto $\beta\nabla w \in L^{q'}(Q_T)$ e, quando $m \to +\infty$

$$\int_0^T \beta \int_\Omega D_1(\phi_m)\nabla c_m \nabla w\, dx\, dt \to \left\langle \int_\Omega D_1(\phi)\nabla c \nabla w\, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.55}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

Finalmente, de (2.42) temos $D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m \rightharpoonup D_2(c,\phi)\nabla\phi$ em $L^q(Q_T)$, para todo $q \in [1,2)$. Logo, como $\beta\nabla w \in L^{q'}(Q_T)$, segue que

$$\int_0^T \int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m \nabla w\, dx\, dt \to \left\langle \int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla w\, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{2.56}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

Portanto, de (2.54), (2.55) e (2.56), passando o limite com $m \to \infty$ em (2.53) obtemos para todo $\beta \in D(0,T)$ que

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}, w \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D} &+ \left\langle \int_\Omega D_1(\phi)\nabla c\nabla w\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} \\ &+ \left\langle \int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla w\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0 \end{aligned}$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}, w \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi)\nabla w\, dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0,$$

logo,

$$\left\langle \frac{\partial c_m}{\partial t}, w \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi)\nabla w\, dx = 0$$

para todo $w \in V_m$ e q.t.p em $(0,T)$. Logo novamente da densidade de $\bigcup_{m\geqslant 1} V_m$ em $H^1(\Omega)$ (2.47), segue que, na equação acima temos $v \in H^1(\Omega)$.

Assim concluímos a demonstração da parte 1 do Teorema 2.1.

2.2 Demonstração: Parte 2

Na segunda parte do teorema conseguimos uma solução ϕ mais regular onde recuperamos a equação para o campo de fase em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e também a condição de contorno homogênea de Neumann q.t.p sobre $\partial\Omega \times (0,T)$.

Suponhamos agora $\phi_0 \in H^1(\Omega)$. Na seção que segue obtemos novas estimativas para ϕ_m.

2.2.1 Novas Estimativas

Lema 2.14. *Seja $\phi_0 \in H^1(\Omega)$. Escolhendo $\phi_{0m} = p_m\phi_0$ como dados iniciais para o problema (P_m) (2.14), pela propriedade (2.13) sobre p_m concluimos que*

$$||\nabla\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\nabla\phi_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.57}$$

Demonstração. De (2.13) temos que $(\nabla(p_m\varphi - \varphi), \nabla v)_{L^2(\Omega)} = 0$, para todo $v \in V_m$, onde $\varphi \in H^1(\Omega)$. Sendo $\varphi = \phi_0$ e $v = \phi_{0m}$, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla(p_m\phi_0 - \phi_0), \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0\\
(\nabla(\phi_{0m} - \phi_0), \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0\\
(\nabla\phi_{0m} - \nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0\\
(\nabla\phi_{0m}, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} - (\nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0\\
(\nabla\phi_{0m}, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} &= (\nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||\nabla\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)}\\
||\nabla\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant |(\nabla\phi_0, \nabla\phi_{0m})_{L^2(\Omega)}|\\
||\nabla\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant ||\nabla\phi_0||_{L^2(\Omega)}||\nabla\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)}\\
||\nabla\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} &\leqslant ||\nabla\phi_0||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

A partir de agora, ainda denotamos por C uma constante positiva como na demonstração da Parte 1, mas que agora também depende de $||\nabla\phi_0||_{L^2(\Omega)}$.

Lema 2.15. *Vale a seguinte estimativa*

$$\left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C. \tag{2.58}$$

Demonstração. Tomando $v = \dfrac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)$ na primeira equação do problema (P_m) (2.14). Obtemos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla \phi_m(t) \cdot \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx = \int_\Omega F_1(\phi_m(t)) \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx +$$

$$+ \int_\Omega c_m(t) F_2(\phi_m(t)) \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx, \tag{2.59}$$

Observe que, por (1.9) e como $\dim V_m < +\infty$

$$\int_\Omega \nabla \phi_m(t) \nabla \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx = \int_\Omega \nabla \phi_m(t) \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi_m(t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx. \tag{2.60}$$

De acordo com a hipótese (H1), temos que $|F_i(\phi_m(t))| \leqslant M_i$, para $i = 1, 2$, assim,

$$\int_\Omega F_1(\phi_m(t)) \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx \leqslant \int_\Omega |F_1(\phi_m)| \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right| dx \leqslant \int_\Omega M_1 \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right| dx$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega c_m(t) F_2(\phi_m(t)) \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx &\leqslant \int_\Omega |c_m(t)||F_2(\phi_m(t))| \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right| dx \\ &\leqslant \int_\Omega M_2 |c_m(t)| \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right| dx. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young (1.13), tomando $\varepsilon = \eta_1$ e $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{4\eta_1}$, temos que

$$M_1 \int_\Omega \left|1.\frac{\partial \phi_m(t)}{\partial t}(t)\right| dx \leqslant M_1 \left(\eta_1 |\Omega| + \frac{1}{4\eta_1} \int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx\right),$$

e tomando $\varepsilon = \eta_2$ e $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{4\eta_2}$, temos que

$$M_2 \int_\Omega |c_m(t)| \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right| dx \leqslant M_2 \left(\eta_2 \int_\Omega |c_m(t)|^2\, dx + \frac{1}{4\eta_2} \int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx\right).$$

Então,

$$\int_\Omega F_1(\phi_m(t))\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\,dx \leqslant \eta_1 M_1|\Omega| + \frac{M_1}{4\eta_1}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \tag{2.61}$$

e

$$\int_\Omega c_m(t)F_2(\phi_m(t))\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\,dx \leqslant \eta_2 M_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx + \frac{M_2}{4\eta_2}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx. \tag{2.62}$$

Substituindo (2.60), (2.61) e (2.62), em (2.59), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \ &\leqslant \ \eta_1 M_1|\Omega| + \frac{M_1}{4\eta_1}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \\ &+\eta_2 M_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx \ + \ \frac{M_2}{4\eta_2}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \ &\leqslant \ \eta_1 M_1|\Omega| \\ +\left(\frac{M_1}{4\eta_1}+\frac{M_2}{4\eta_2}\right)\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \ &+ \ \eta_2 M_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.63}$$

Escolhendo $\eta_1 = M_1$ e $\eta_2 = M_2$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \ &\leqslant \ M_1^2|\Omega| + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \\ &+ M_2^2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx,\end{aligned}$$

de modo que,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \ \leqslant \ M_1^2|\Omega| + M_2^2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx.$$

Tomando $C = \max\{2M_1^2|\Omega|, 2M_2^2\}$,

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + \varepsilon^2\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \leqslant C\left(1+\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx\right).$$

Integrando a desigualdade acima sobre $(0,r)$, para $r \in (0,T)$, temos

$$\int_0^r \int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx\, dt \;+\; \varepsilon^2 \int_0^r \frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2\, dx\, dt \leqslant C\left(r + \int_0^r \int_\Omega |c_m(t)|^2\, dx\, dt\right).$$

Segue que

$$\int_0^r \left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \;+\; \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(r)|^2\, dx - \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(0)|^2\, dx \leqslant C\left(r + \int_0^r ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt\right).$$

Temos ainda

$$\int_0^r \left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \;+\; \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_m(r)|^2\, dx \leqslant C\left(r + \int_0^r ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt\right) + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi_0|^2\, dx.$$

Logo,

$$\sup_{r\in[0,T]} ess \int_0^r \left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \;+\; \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess \int_\Omega |\nabla \phi_m(r)|^2\, dx \leqslant C\left(T + \sup_{r\in[0,T]} ess \int_0^r ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt\right) + \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess ||\nabla \phi_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sendo assim,

$$\int_0^T \left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess ||\nabla \phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess ||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leqslant C\left(T + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt\right) + \varepsilon^2 ||\nabla \phi_0||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess ||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.64}$$

Note que $\varepsilon^2 ||\nabla \phi_0||^2_{L^2(\Omega)} = C_1$ (constante), e por (2.24),

$$\int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt = ||c_m||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C,$$

e por (2.25), temos

$$\sup_{r\in[0,T]} ess ||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Então, (2.64) implica que

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)} + \varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess(||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}) \leqslant C(T) = C,$$

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C,$$

lembrando que C também depende de ε^2.

Portanto,

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C,$$

provando assim o que queríamos.

□

Lema 2.16. *Também são válidas as seguintes estimativas*

$$||\Delta\phi_m||_{L^2(Q_T)} \leqslant C \tag{2.65}$$

$$||\phi_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C \tag{2.66}$$

Demonstração. Observe que $-\Delta\phi_m \in V_m$, assim escolhendo $v = -\Delta\phi_m$ na primeira equação do problema (P_m) (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)(-\Delta\phi_m(t))\,dx \quad + \quad \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla(-\Delta\phi_m(t))\,dx \\ = \int_\Omega (F_1(\phi_m) \quad + \quad c_m(t)F_2(\phi_m))(-\Delta\phi_m(t))\,dx.\end{aligned} \tag{2.67}$$

Integrando por partes, utilizando a Fórmula de Green (1.2), e também a condição homogênea de Neumann sobre $\partial\Omega$, no termo ϕ_m, isto é, $\dfrac{\partial\phi_m}{\partial n}(t) = 0$, e por fim, usando (1.9), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)(-\Delta\phi_m(t))\,dx &= \int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right)\nabla\phi_m(t)\,dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\frac{\partial\phi_m}{\partial n}(t)\,ds \\ &= \int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right)\nabla\phi_m(t)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx,\end{aligned} \tag{2.68}$$

e

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla(\Delta\phi_m(t))\,dx &= \int_\Omega \Delta\phi_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx - \int_{\partial\Omega}\Delta\phi_m(t)\frac{\partial\phi_m}{\partial n}(t)\,ds \\ &= \int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.69}$$

Assim, substituindo (2.68) e (2.69) em (2.67), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx &= -\int_\Omega F_1(\phi_m)\Delta\phi_m(t)\,dx \\ &- \int_\Omega F_2(\phi_m)c_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.70}$$

Usando (H1) e a desigualdade de Young (1.13), temos que, para todo $\eta_1, \eta_2 > 0$,

$$\begin{aligned}-\int_\Omega F_1(\phi_m)\Delta\phi_m(t)\,dx &\leqslant M_1\left(\eta_1\int_\Omega dx + \frac{1}{4\eta_1}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right) \\ &\leqslant \eta_1 M_1|\Omega| + \frac{M_1}{4\eta_1}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx, \qquad (2.71)\\ -\int_\Omega F_2(\phi_m)c_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx &\leqslant M_2\left(\eta_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx + \frac{1}{4\eta_2}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right).\end{aligned} \tag{2.72}$$

Substituindo (2.71) e (2.72) em (2.70), temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \eta_1 M_1|\Omega| + \frac{M_1}{4\eta_1}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx + \eta_2 M_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx + \frac{M_2}{4\eta_2}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \\ &\leqslant \eta_1 M_1|\Omega| + \left(\frac{M_1}{4\eta_1} + \frac{M_2}{4\eta_2}\right)\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx + \eta_2 M_2\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Escolhendo $\eta_1 = \dfrac{M_1}{\varepsilon^2}$ e $\eta_2 = \dfrac{M_2}{\varepsilon^2}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx &\leqslant \frac{M_1^2}{\varepsilon^2}|\Omega| + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \\ &+ \frac{M_2^2}{\varepsilon^2}\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \leqslant \frac{M_1^2}{\varepsilon^2}|\Omega| + \frac{M_2^2}{\varepsilon^2}\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx.$$

Tomando $C = \max\left\{2\,\dfrac{M_1^2}{\varepsilon^2}|\Omega|, 2\,\dfrac{M_2^2}{\varepsilon^2}\right\}$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \leqslant C\left(1+\int_\Omega |c_m(t)|^2\,dx\right).$$

Integrando a desigualdade acima de $(0,r)$ com $r\in[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} &- ||\nabla\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2\int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\leqslant C\left(r+\int_0^r ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right).\end{aligned}$$

Tomando o supremo essencial da equação acima $\left(\sup_{r\in[0,T]} ess\right)$,

$$\begin{aligned}\sup_{r\in[0,T]} ess||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} &+ \varepsilon^2\int_0^T ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\ &\leqslant C\left(T+\int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right) + ||\nabla\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Note que, de (2.24)

$$\int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt = ||c_m||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C.$$

Logo,

$$||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \varepsilon^2||\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C \quad \text{e então,}\ \ ||\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C.$$

Portanto, segue (2.65).

Considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi_m(t)+\phi_m(t) = f_m(t)\in L^2(\Omega),\\ \dfrac{\partial\phi_m}{\partial n}(t) = 0,\end{cases}$$

onde

$$f_m(t) := F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)) - \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t) + \phi_m(t) \in L^2(\Omega)$$

pelo Teorema 1.4 temos que $\phi_m(t)\in H^2(\Omega)$.

Assim, tomando $k=0$ no Teorema 1.25, como $H^0(\Omega)\cong L^2(\Omega)$; daí, de $\Delta\phi_m(t)\in L^2(\Omega)$ e por (2.65), obtemos $||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\leqslant C_1$, e por (2.18), obtemos $||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\leqslant C_2$, com C_1, C_2 constantes como C. Assim segue de (1.18) que

$$\begin{aligned}||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} &\leqslant C(||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}) \leqslant C,\\ ||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} &\leqslant C.\end{aligned}$$

Logo, integrando de $(0,r)$ com $r \in (0,T)$, e tomando o supremo essencial, da desigualdade acima obtemos

$$\int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C, \text{ ou seja, } ||\phi_m||^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C.$$

Portanto, segue (2.66), e obtemos assim segue o resultado desejado.

$\square$

2.2.2 Regularidade da Solução Fraca e Convergências

De acordo com as desigualdades (2.58) e (2.66) concluímos que, quando $\phi_0 \in H^1(\Omega)$, ϕ_m é limitada (uniformemente em relação a m) em

$$W_3 = \left\{ u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \right\}. \tag{2.74}$$

Como a imersão de $H^2(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ é compacta, concluímos, pelo Teorema 1.13, que W_3 está compactamente imerso em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Ao tomar o limite ϕ de uma subsequência de ϕ_m, podemos concluir a demonstração da parte 2 do Teorema 2.1 da mesma maneira da parte 1. Mais precisamente, considerando também a estimativa (2.58), temos

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)).$$

Além disse, existe uma subsequência de ϕ_m (usando a mesma notação ϕ_m) tal que, quando $m \to +\infty$,

$$\phi_m \to \phi \text{ em } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{2.75}$$

Como $L^2(Q_T)$ é reflexivo, pela estimativa (2.58), segue que tomando uma subsequência de ϕ_m como anteriormente temos,

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ em } L^2(Q_T). \tag{2.76}$$

2.2.3 Convergência do Problema Aproximado

Podemos agora passar o limite no Problema 2.14 para concluir a equação (2.6) e a condição de contorno (2.7). Para esta última utilizaremos o Operador Traço definido no Capítulo 1.

Lema 2.17. *A partir das estimativas anteriores vale que*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta\phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad q.t.p \text{ em } Q_T.$$

Demonstração. Observe que a primeira equação do Problema 2.14 é equivalente a

$$\begin{aligned}\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v\,dx\,dt \quad &+ \quad \varepsilon^2 \int_0^T \beta \int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v\,dx\,dt \\ &= \quad \int_0^T \beta \int_\Omega (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)) v\,dx\,dt, \qquad (2.77)\end{aligned}$$

para todos $v \in V_m$ e $\beta \in D(0,T)$.

Fazendo o limite em cada termo, primeiramente usando (2.76), para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{Q_T} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \psi\,dx\,dt \quad = \quad \int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi\,dx\,dt. \qquad (2.78)$$

Pela Fórmula de Green (1.2), temos

$$\int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v\,dx = -\int_\Omega \Delta \phi_m\, v\,dx.$$

Temos que $\Delta \phi_m \rightharpoonup \Delta \phi$ em $L^2(Q_T)$, por (2.65) e (2.75). Logo, para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{Q_T} \Delta \phi_m \psi\,dx\,dt = \int_{Q_T} \Delta \phi\, \psi\,dx\,dt. \qquad (2.79)$$

Da Parte 1, pelo Lema 2.13 temos que

$$\lim_{m\to\infty} (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)) = F_1(\phi) + c F_2(\phi)$$

em $L^q(Q_T)$, para todo $q \in [1,2)$. Passando a uma subsequência se necessário,

$$\lim_{m\to\infty} (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)) = F_1(\phi) + c F_2(\phi)$$

q.t.p em Q_T. Como $||F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)||_{L^2(Q_T)} \leqslant ||F_1(\phi_m)||_{L^2(Q_T)} + ||c_m F_2(\phi_m)||_{L^2(Q_T)} \leqslant C$, então pela Proposição 1.6, segue que

$$F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m) \rightharpoonup F_1(\phi) + c F_2(\phi)$$

em $L^2(Q_T)$. Logo, para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\lim_{m\to\infty} \int_{Q_T} (F_1(\phi_m) + c_m F_2(\phi_m)) \psi\,dx\,dt = \int_{Q_T} (F_1(\phi) + c F_2(\phi)) \psi\,dx\,dt. \qquad (2.80)$$

Assim, passando o limite em (2.77), usando (2.78), (2.79) e (2.80), tomando $\psi = \beta\, v$, onde $v \in V_m \subset L^2(\Omega)$ e $\beta \in D(0,T)$, obtemos

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \beta\, v\,dx\,dt - \varepsilon^2 \int_{Q_T} \Delta \phi\, \beta\, v\,dx\,dt \quad = \quad \int_{Q_T} (F_1(\phi) + c F_2(\phi)) \beta\, v\,dx\,dt.$$

isto é,

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta \phi - F_1(\phi) + cF_2(\phi) \right) \beta \, v = 0, \tag{2.81}$$

para todos $\beta \in D(0,T)$ e $v \in V_m$.

Pela densidade de $\bigcup_{m \geqslant 1} V_m$ em $L^2(\Omega)$ (2.46), a equação acima (2.81) segue para todo $v \in L^2(\Omega)$. Agora aplicando a Proposição 1.19 para $L^1_{loc}(0,T;L^1_{loc}(\Omega))$ obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi)$$

q.t.p em Q_T.

□

Lema 2.18. *Seja $\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, então vale*

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \textit{q.t.p sobre } S = \partial\Omega \times (0,T).$$

Demonstração. Definamos

$$\Gamma(\cdot) = rest|_S : L^2(0,T;H^s(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{s-1/2}(\partial\Omega))$$

o operador traço dado pelo Teorema 1.3, com $\frac{1}{2} < s < 1$. Nele, se tomarmos $s = 2$, obtemos

$$\begin{array}{rcl} H^2(\Omega) & \longrightarrow & \prod_{j=0}^{1} H^{2-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \longmapsto & \left(u|_{\partial\Omega}, \frac{\partial u}{\partial n} \right), \end{array}$$

uma aplicação linear e contínua.

E se $s = 1$, temos

$$\begin{array}{rcl} H^1(\Omega) & \longrightarrow & \prod_{j=0}^{0} H^{1-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u & \longmapsto & \left(u|_{\partial\Omega} \right). \end{array}$$

Temos que $(\phi_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ por (2.66) e que $\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^2(Q_T)$, por (2.58).

Como

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

são imersões contínuas para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, com a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)$ compacta (Teorema 1.15), pelo Teorema 1.14, temos a existência de uma subsequência de ϕ_m, que vamos manter com a mesma notação tal que

$$\phi_m \to \phi \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}(\Omega)),$$

lembrando que $\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Consequentemente,

$$\nabla\phi_m \to \nabla\phi \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Omega)).$$

Portanto, segue da continuidade do operador Γ, tomando $s = \varepsilon$, que

$$\left.\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\right|_S := (\nabla\phi_m \cdot n)|_S \to (\nabla\phi \cdot n)|_S := \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_S$$

em $L^2(0,T;H^\varepsilon(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$.

Como $\left.\dfrac{\partial\phi_m}{\partial n}\right|_S = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\partial\Omega)).$$

Provando assim o que queríamos.

$\square$

Com este resultado concluímos a demostração do Teorema 2.1.

Capítulo 3

Regularidade e Unicidade

Neste capítulo, provaremos um resultado de regularidade e unicidade sob a suposição adicional de que os dados iniciais são suaves o suficiente.

Teorema 3.1. *Assumindo (H1) - (H3). Seja* $\phi_0 \in H^2(\Omega)$ *tal que* $\dfrac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *e* $c_0 \in H^1(\Omega)$ *com* $\dfrac{\partial c_0}{\partial n} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$*. Então para qualquer* $T > 0$*, existe um único par de funções* (ϕ, c) *satisfazendo*

$$\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \tag{3.1}$$
$$c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \tag{3.2}$$

tal que $\phi(0) = \phi_0$, $c(0) = c_0$ *e*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta \phi = F_1(\phi) + cF_2(\phi) \quad q.t.p \text{ em } Q_T, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \quad q.t.p \text{ em } Q_T, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad q.t.p. \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.5}$$

Observação 3.2. *Como consequência da regularidade acima, temos que* $\phi \in C([0,T];H^2(\Omega))$ *e* $c \in C([0,T];H^1(\Omega))$*. (veja Lions e Magenes [13]).*

3.1 Existência com Regularidade

Nessa seção fazeremos a demonstração da existência com regularidade do Teorema 3.1. Para tal, calcularemos inicialmente novas estimativas para as sequências ϕ_m e c_m, a fim de conseguir as convergências nos espaços de Sobolev onde temos mais regularidade.

3.1.1 Estimativas a priori

Antes de obter a primeira estimativa adicional para ϕ_m, observa-se a validade da seguinte desigualdade.

Lema 3.3. *Assumindo que* $\dfrac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *vale a seguinte desigualdade*

$$||\Delta\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\Delta\phi_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Observe, inicialmente, que, pelo Teorema 1.17 temos

$$||\phi_0 - \phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} = dist(\phi_0, V_m),$$

onde $\phi_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (\phi_0, v_j)_{L^2(\Omega)} v_j \in V_m$, é a projeção de ϕ_0 em V_m.

Como V_m é fechado, então $L^2(\Omega) = V_m \oplus V_m^{\perp}$, logo, tomando $q \in V_m^{\perp}$,

$$\phi_0 = \phi_{0m} + q \ \text{ se, e somente se, } \ q = \phi_0 - \phi_{0m} \in V_m^{\perp}.$$

Portanto,

$$(\phi_0 - \phi_{0m}, v)_{L^2(\Omega)} = 0, \ \text{ para todo } \ v \in V_m. \tag{3.7}$$

Assim, observando que a condição de Neumann é satisfeita para $\Delta\phi_{0m}$, e pela Fórmula de Green (1.3), e pela identidade acima (3.7),

$$\begin{aligned}
||\Delta\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &= (\Delta\phi_{0m}, \Delta\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Delta\phi_{0m}\Delta\phi_{0m}\, dx \\
&= \int_\Omega \phi_{0m}\Delta^2\phi_{0m}\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\Delta\phi_{0m}\frac{\partial \phi_{0m}}{\partial n} - \phi_{0m}\frac{\partial \Delta\phi_{0m}}{\partial n} \right) ds \\
&= \int_\Omega \phi_{0m}\Delta^2\phi_{0m}\, dx = (\phi_{0m}, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)}; \ \ (\Delta^2\phi_{0m} \in V_m) \\
&= (\phi_{0m} - \phi_0 + \phi_0, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} \\
&= -(\phi_0 - \phi_{0m}, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} + (\phi_0, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} \\
&= (\phi_0, \Delta^2\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \phi_0\Delta^2\phi_{0m}\, dx = \int_\Omega \phi_0\Delta(\Delta\phi_{0m})\, dx \\
&= \int_\Omega \Delta\phi_{0m}\Delta\phi_0\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\phi_0\frac{\partial \Delta\phi_{0m}}{\partial n} - \Delta\phi_{0m}\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right) ds,
\end{aligned}$$

então,

$$||\Delta\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} = (\Delta\phi_0, \Delta\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial n}\Delta\phi_{0m}\, ds. \tag{3.8}$$

Usando a hipótese, e a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$||\Delta\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} = (\Delta\phi_0, \Delta\phi_{0m})_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\Delta\phi_0||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)},$$

então,

$$||\Delta\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\Delta\phi_0||_{L^2(\Omega)}.$$

Provando assim o que queríamos.

□

Provaremos no próximo resultado estimativas a priori para a sequência $(\phi_m)_{m=1}^{\infty}$.

Lema 3.4. *Valem as seguintes estimativas:*

$$||\phi_m||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.9}$$

$$||\phi_m||_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.10}$$

onde $C > 0$ *não depende de* m.

Demonstração. Lembrando da primeira equação do Problema 2.14

$$\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\, v\, dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m(t)\cdot\nabla v\, dx = \int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\, v\, dx,$$

para todo $v \in V_m$. Tomando $v = \Delta^2\phi_m(t) \in V_m$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\Delta^2\phi_m(t)\, dx \quad &+ \quad \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m(t)\cdot\nabla\Delta^2\phi_m(t)\, dx \\ &= \int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\Delta^2\phi_m(t)\, dx. \end{aligned}\tag{3.11}$$

Observe que a condição de contorno homogênea de Neumann é satisfeita para $\dfrac{\partial\phi_m}{\partial t}$ e $\Delta\phi_m$.

Utilizando (1.2), (1.3) e (1.9), analizando a equação (3.11) por partes temos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\Delta^2\phi_m(t)\, dx &= \int_\Omega \Delta\phi_m(t)\Delta\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\, dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\Delta\frac{\partial\phi_m}{\partial n}(t) - \Delta\phi_m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\right)\right) ds \\ &= \int_\Omega \Delta\phi_m(t)\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}\tag{3.12}$$

e,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla\Delta^2\phi_m(t)\, dx &= -\int_\Omega \Delta\phi_m(t)\Delta^2\phi_m(t)\, dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi_m}{\partial n}\Delta^2\phi_m(t)\, ds \\ &= -\int_\Omega \Delta\phi_m(t)\,\mathrm{div}(\nabla\Delta\phi_m(t))\, dx \\ &= \int_\Omega \nabla\Delta\phi_m(t).\nabla\Delta\phi_m(t)\, dx - \int_{\partial\Omega}\Delta\phi_m(t)\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial n}\, ds \end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \nabla\Delta\phi_m(t).\nabla\Delta\phi_m(t)\,dx = ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.13}$$

De (H1), $F_1, F_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Assim, de (1.2)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\Delta^2\phi_m(t)\,dx \\
= &-\int_\Omega \nabla(F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\nabla\Delta\phi_m(t)\,dx \\
&+\int_{\partial\Omega} (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial n}(t)\,ds \\
= &-\int_\Omega (F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m(t) + F_2(\phi_m)\nabla c_m(t) + F_2'(\phi_m)c_m(t)\nabla\phi_m(t))\nabla\Delta\phi_m(t)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituindo (3.12), (3.13) e (3.14) em (3.11), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} = \mathcal{F}_m, \tag{3.15}$$

onde

$$\mathcal{F}_m = -\int_\Omega (F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m(t) + F_2(\phi_m)\nabla c_m(t) + F_2'(\phi_m)c_m(t)\nabla\phi_m(t))\nabla\Delta\phi_m(t)\,dx.$$

Agora estima-se $\mathcal{F}_m$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &\leqslant \int_\Omega |(F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m(t) + F_2(\phi_m)\nabla c_m(t) + F_2'(\phi_m)c_m(t)\nabla\phi_m(t))\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx \\
&\leqslant \int_\Omega |F_1'(\phi_m)\nabla\phi_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx + \int_\Omega |F_2(\phi_m)\nabla c_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx \\
&\quad + \int_\Omega |F_2'(\phi_m)c_m(t)\nabla\phi_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx.
\end{aligned}$$

Como F_i é Lipschitz, segue que $|F_i'(r)| \leqslant k_i$, para todo $r \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, onde $k_i > 0$ é a constante de Lipschitz, pois

$$\begin{aligned}
&|F_1(x) - F_i(y)| \leqslant k_i|x - y|, \\
&\lim_{x\to y}\frac{|F_1(x) - F_i(y)|}{|x - y|} \leqslant k_i \text{ então } |F_i'(y)| \leqslant k_i.
\end{aligned}$$

Assim, sendo $\delta_1, \delta_2 > 0$, pela Desigualdade de Young (1.13),

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &\leqslant k_1\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx + M_2\int_\Omega |\nabla c_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx \\
&\quad + k_2\int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant k_1\left(\delta_1\int_\Omega |\nabla\Delta\phi_m(t)|^2\,dx + C(\delta_1)\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx\right)\\
&\quad +M_2\left(\delta_2\int_\Omega |\nabla\Delta\phi_m(t)|^2\,dx + C(\delta_2)\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx\right)\\
&\quad +k_2\int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx.
\end{aligned}
$$

Tomando $C=\max\{k_1C(\delta_1), M_2C(\delta_2), k_2\}$ e $k_1\delta_1 = M_2\delta_2 = \dfrac{\varepsilon^2}{8}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{8}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{8}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + C\left(||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\Delta\phi_m(t)|\right)\\
&= \frac{\varepsilon^2}{4}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\left(||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
&\quad \left. + \int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx\right).
\end{aligned}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} &= ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\\
&= ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\\
||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant ||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\left(||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
&\quad \left. + \int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx\right).
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 1.25, para $k=0$,

$$
||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
$$

Logo,

$$
\mathcal{F}_m \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{B}_m\right), \tag{3.16}
$$

onde, $\mathcal{B}_m = \displaystyle\int_\Omega |c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx.$

Agora estima-se o termo $\mathcal{B}_m$. Inicialmente aplica-se as desigualdades de Hölder (1.11) e de Gagliardo-Nirenberg (1.19) e (1.20). Observe que $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}=1$, isto é, 3, 6 e 2 são expoentes conjugados, então

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_m &= \int_\Omega |c_m(t)||\nabla\phi_m(t)||\nabla\Delta\phi_m(t)|\,dx\\ &\leqslant ||c_m(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_1||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}C_2||\nabla\phi_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Usando (2.25) e (2.58), isto é, o fato que c_m é limitado em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e ϕ_m é limitado em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, juntos uniformemente com m, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_m &\leqslant C_1C_2||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\sup ess\,||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\\ &\qquad \sup ess\,||\nabla\phi_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\\ \mathcal{B}_m &\leqslant C||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young (1.13), para todo $\delta > 0$, tomando $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$ e $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\delta}$, obtemos

$$\mathcal{B}_m \leqslant C\left(\frac{\delta}{2}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\left(||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)}\right)\right). \tag{3.17}$$

Como $\partial\Omega$ é suave, segue que $\phi_m(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, para t q.t.p. em $[0,T]$. Assim pela estimativa (1.18) para $k=1$

$$||\phi_m(t)||_{H^3(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right).$$

Além disso, já que

$$||\phi_m(t)||_{H^3(\Omega)} = ||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)}$$

e

$$||\Delta\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} = ||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)},$$

segue que

$$||\nabla\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.18}$$

Aplicando em (3.17) a desigualdade de Young, temos, para todo $\gamma > 0$, e tomando $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{2}$ e $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{2\gamma}$,

$$\mathcal{B}_m \leqslant C\left(\frac{\delta}{2}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\left(\frac{1}{2\gamma}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}||\nabla\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}\right)\right),$$

usando (3.18), obtemos

$$\mathcal{B}_m \leqslant C\left(\frac{\delta}{2}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\left(\frac{1}{2\gamma}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right.\right.\right.$$

$$+||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Big)\Big).$$

Escolhendo $\gamma = 2\delta^2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_m &\leqslant C\left(\frac{\delta}{2}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\delta}\left(\frac{1}{4\delta^2}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \delta^2\Big(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big)\right)\right) \\
&= C\left(\delta||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{8\delta^3}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\Big(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\quad \left. +||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\Big)\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.19) em (3.16), e escolhendo $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{4C}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m &\leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\Big(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +C\left(\delta||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{8\delta^3}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\Big(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right. \\
&\quad \left. +||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\Big)\right)\Big) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{8}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad +C||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{8C^3}{\varepsilon^6}||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{8}||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Note que $\dfrac{\varepsilon^2}{8}$ e $\dfrac{8C^3}{\varepsilon^6}$ são constantes que dependem de ε, e que

$$||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} \text{ e } ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\mathcal{F}_m \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\left(||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\right).$$

Voltando a equação (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\Big(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} \\
&\quad +||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\Big). \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade sobre $(0, r)$ para $r \in (0, T)$ e usando (2.24) isto é, o fato de ϕ_m e c_m serem limitadas em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ uniformemente com m, então

$$\int_0^r \frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \varepsilon^2\int_0^r ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leqslant C\left(\int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right.$$

$$+\int_0^r ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\,dt + \int_0^r ||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\,dt\Big). \tag{3.21}$$

Note que, de (2.24)

$$\begin{aligned}\int_0^r ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\,dt &+ \int_0^r ||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\,dt = \int_0^r ||(\phi_m(t), c_m(t))||^2_{(H^1(\Omega))^2}\,dt \\ &\leqslant \sup_{r\in[0,T]} ess \int_0^r ||(\phi_m(t), c_m(t))||^2_{(H^1(\Omega))^2}\,dt \\ &= \int_0^T ||(\phi_m(t), c_m(t))||^2_{(H^1(\Omega))^2}\,dt \\ &= ||(\phi_m, c_m)||^2_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \leqslant C.\end{aligned}$$

Assim (3.21) implica em

$$\begin{aligned}||\Delta\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \int_0^r ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &\leqslant ||\Delta\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ C\left(1 + \int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $\varepsilon^2 \int_0^r ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \geqslant 0$, de (3.6), e tomando $K = ||\Delta\phi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C$, obtemos

$$||\Delta\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant K + \int_0^r C||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

pelo Teorema 1.23 (Lema de Gronwall), temos

$$||\Delta\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant K\, e^{\int_0^t C\,ds} \;=\; K\, e^{Ct};\; t \in [0,T].$$

Assim

$$\sup_{r\in[0,T]} ess||\Delta\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant K\, e^{CT} = C.$$

Logo,

$$||\Delta\phi_m||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C. \tag{3.23}$$

Voltando à equação (3.22), novamente de (3.6), usando (2.65) e tomando $K = ||\Delta\phi_0||^2_{L^2(\Omega)} + C$, obtemos

$$\varepsilon^2 \int_0^r ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \;\leqslant\; K + C\int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Logo,

$$\varepsilon^2 \sup_{r\in[0,T]} ess \int_0^r ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \;\leqslant\; K + C \sup_{r\in[0,T]} ess \int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

O que implica

$$\varepsilon^2 \int_0^T ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt \;\; \leqslant \;\; K + C \int_0^T ||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\, dt,$$

e portanto,

$$\varepsilon^2||\nabla\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} \;\; \leqslant \;\; K + C\,||\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C.$$

Logo,

$$||\nabla\Delta\phi_m||_{L^2(Q_T)} \leqslant C. \tag{3.24}$$

Pela estimativa (1.18), tomando $k = 0$ temos

$$||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} ess||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} &\leqslant C\left(\sup_{t\in[0,T]} ess||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \sup_{t\in[0,T]} ess||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} &\leqslant C\left(||\Delta\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right).
\end{aligned}$$

Por (3.23) e (2.25), concluímos que

$$||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C,$$

portanto temos (3.9).

Agora, tomando $k = 1$, na estimativa (1.18), temos

$$||\phi_m(t)||^2_{H^3(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\right).$$

Assim, integrando de $(0, r)$ para $r \in (0, T)$,

$$\int_0^r ||\phi_m(t)||^2_{H^3(\Omega)}\, dt \leqslant C\left(\int_0^r ||\Delta\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt + \int_0^r ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt\right),$$

fazendo o $\sup\limits_{t\in[0,T]} ess$, e de (2.24)

$$\int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{H^3(\Omega)}\, dt \;\; \leqslant \;\; C\left(\int_0^T ||\Delta\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt + \int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\, dt\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
||\phi_m||^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} &\leqslant C\left(\int_0^T \left(||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) dt \right. \\
&\qquad \left. + \, ||\phi_m(t)||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \quad C\left(||\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} + ||\nabla\Delta\phi_m||^2_{L^2(Q_T)} + C\right).$$

Por (2.65) e (3.24), concluímos que

$$||\phi_m||^2_{L^2(0,T;H^3(\Omega))} \leqslant C.$$

Daí temos (3.10). Portanto, segue o resultado.

□

Agora provaremos uma estimativa a priori para a sequência da derivada temporal $\left(\dfrac{\partial\phi_m}{\partial t}\right)_{m=1}^{\infty}$.

Lema 3.5. *A seguinte estimativa é válida:*

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.25}$$

onde $C > 0$ não depende de m.

Demonstração. Escolhendo $v = -\dfrac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t) \in V_m$ na primeira equação do problema (P_m) (2.14) obtemos

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \quad &- \quad \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\ &= \quad -\int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sendo a condição de contorno de Neumann satisfeita para $\dfrac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)$, nas integrais da equação acima, usando (1.2) e (1.9), temos

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx &= \int_\Omega \nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\ &= \int_\Omega\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx = \left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx &= \int_\Omega \frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\Delta\phi_m(t)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

De (H1), $F_1, F_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e $F_i'(\phi_m(t)) \leqslant k_i$, pois F_i é Lipschitz. Logo usando

(1.2) e (1.11),

$$
\begin{aligned}
& -\int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\frac{\partial\Delta\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\
= & -\int_\Omega (F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\Delta\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\
= & \int_\Omega \nabla(F_1(\phi_m(t)) + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\
= & \int_\Omega (F_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t) + \nabla c_m(t)F_2(\phi_m(t)) \\
& + c_m(t)F_2'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \\
\leqslant & \; k_1\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\,dx + M_2\int_\Omega |\nabla c_m(t)|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\,dx \\
& + k_2\int_\Omega |c_m(t)||\nabla\phi_m(t))|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\,dx \\
\leqslant & \; C\Bigg(\left(||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \\
& + \int_\Omega \left|c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\,dx\Bigg). \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.27), (3.28) e (3.29) em (3.26), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant & \; C\left(\left(||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} + \mathcal{C}_m\right), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{C}_m = \int_\Omega \left|c_m(t)\nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\,dx.$

Agora estima-se este termo. Pela Desigualdade de Hölder (1.11), como, $2, 3$, e 6 são conjugados, isto é

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1,$$

temos

$$\mathcal{C}_m \leqslant ||c_m(t)||_{L^3(\Omega)}||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}.$$

Da imersão (1.5), temos $||u||_{L^q(\Omega)} \leqslant C||u||_{H^1(\Omega)}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, logo

$$||c_m(t)||_{L^3(\Omega)} \leqslant C_1||c_m(t)||_{H^1(\Omega)},$$

e de (3.9), como $||\phi_m||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C$, então

$$\sup_{t\in[0,T]} ess||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Assim

$$\sup_{t\in[0,T]} ess\left(||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}\right) \leqslant C,$$

logo

$$||\nabla\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} ess||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Daí, por (1.5), e pela desigualdade acima,

$$||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)} \leqslant C_2||\nabla\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)} \leqslant C_3,$$

logo,

$$\mathcal{C}_m \leqslant C_1||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}C_3\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} = C||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.31}$$

Substituindo (3.31) em (3.30)

$$\begin{aligned}
\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\Bigg(\left(||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right.\\
+ &\left.||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)\left|\left|\nabla\frac{\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} + C||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}\Bigg)\\
\leqslant &\ C\Bigg(||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}\\
+ &\ C||c_m(t)||_{H^1(\Omega)}\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young (1.13) nos três termos da desigualdade acima, para todo $\eta > 0$, suficientemente pequeno tal que $2 - C\eta > 0$, e sendo $C(\eta) = \dfrac{\eta}{3}$,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\left(\eta||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\eta}{3}\left|\left|\nabla\frac{\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
+\eta||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\eta}{3}\left|\left|\nabla\frac{\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} &+ \left.\eta||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\eta}{3}\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\eta\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\\
+C\eta||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &+ C\eta||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\eta||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(2-C\eta)\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} &+ \varepsilon^2\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant C\eta\left(||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right. &+ \left.||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

como, $||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant ||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}$ e $||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}$,

$$
\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}+||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\right) \tag{3.32}
$$

Integrando de $(0,r)$ para $r\in(0,T)$, e fazendo o $\sup\limits_{r\in[0,T]} ess$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt &+ \varepsilon^2\int_0^T\frac{d}{dt}||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\\
&\leqslant C\int_0^T\left(||\phi_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}+||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)}\right)dt.
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)} &+ \varepsilon^2\left(||\Delta\phi_m(T)||^2_{L^2(\Omega)}-||\Delta\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leqslant C||\,(\phi_m,c_m)\,||^2_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2}.
\end{aligned}
$$

Por (2.24) e (3.6), concluímos que

$$
\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C. \tag{3.33}
$$

Agora observe que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &= \int_0^T\left(\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}+\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt\\
&= \left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)}+\left|\left|\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)}.
\end{aligned}
$$

Por (2.58) e (3.33), segue que

$$
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C.
$$

Portanto, segue (3.25). □

Provaremos em seguida estimativas a priori para a sequência $(c_m)_{m=1}^{\infty}$.

Lema 3.6. *Existe uma constante C, independente de m, tal que*

$$||c_m||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C, \tag{3.34}$$
$$||c_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C. \tag{3.35}$$

Demonstração. Escolhendo $w = -\Delta c_m \in V_m$ na segunda equação do Problema 2.14, temos

$$-\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\Delta c_m(t)\,dx - \int_\Omega D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\cdot\nabla(\Delta c_m(t))\,dx + \int_\Omega D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\cdot\nabla(\Delta c_m(t))\,dx = 0. \tag{3.36}$$

Por questão de organização, abordaremos cada termo da equação acima separadamente. Para o primeiro termo da equação, por (1.2) e (1.9), temos

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\Delta c_m(t)\,dx &= \int_\Omega \nabla\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\nabla c_m(t)\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\frac{\partial c_m}{\partial n}(t)\,ds\\
&= \int_\Omega \nabla\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\nabla c_m(t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla c_m(t)|^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para o segundo termo da equação (3.36), de (H2)-(H3), p.20, temos $D_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e $D_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, então por (1.1), segue que

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega (D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t))\nabla\Delta c_m(t)\,dx\\
&= \sum_{i=1}^n \left(-\int_\Omega \left(D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)\right)\frac{\partial \Delta c_m}{\partial x_i}(t)\,dx\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)\right)\Delta c_m\,dx - \int_{\partial\Omega} D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)\Delta c_m(t)n^i\,ds\right)\\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)\right)\Delta c_m\,dx - \int_{\partial\Omega} D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t)\sum_{i=1}^n\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)n^i\,ds\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\right)\Delta c_m\,dx - \int_{\partial\Omega} D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t)\nabla c_m(t)\cdot n\,ds\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\right)\Delta c_m\,dx - \int_{\partial\Omega} D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t)\frac{\partial c_m}{\partial n}(t)\,ds\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\right)\Delta c_m\,dx.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega (D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\nabla\Delta c_m(t)\,dx\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\Delta c_m(t)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Substituindo (3.37), (3.38) e (3.39) em (3.36), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \operatorname{div}\left(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\right)\Delta c_m\,dx$$
$$= -\int_\Omega \operatorname{div}(D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\Delta c_m(t)\,dx. \qquad (3.40)$$

Utilizando as hipóteses (H2)-(H3) temos que

$$\begin{aligned}
D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega D_s|\Delta c_m(t)|^2\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega D_1(\phi_m(t))|\Delta c_m(t)|^2\,dx\\
&= \int_\Omega D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t)\Delta c_m(t)\,dx\\
&= \int_\Omega D_1(\phi_m(t))\operatorname{div}(\nabla c_m(t))\Delta c_m(t)\,dx.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t)\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(D_1'(\phi_m(t))\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}(t)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t) + D_1(\phi_m(t))\frac{\partial^2 c_m}{\partial x_i}(t)\right)\\
&= D_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t) + D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t)\\
&= D_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t) + D_1(\phi_m(t))\operatorname{div}(\nabla c_m(t))
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t))\Delta c_m(t)\,dx$$
$$= \int_\Omega D_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\Delta c_m(t)\,dx + \int_\Omega D_1(\phi_m(t))\operatorname{div}(\nabla c_m(t))\Delta c_m(t)\,dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant{}& \int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t))\Delta c_m(t)\,dx\\
&- \int_\Omega D_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\Delta c_m(t)\,dx.
\end{aligned}$$

Paralelamente, veja que

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \operatorname{div}(D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\Delta c_m(t)\,dx\\
={}& -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_2(c_m(t),\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}(t)\right)\Delta c_m(t)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\left(D_2^1(c_m(t),\phi_m(t)) \frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t) + D_2^2(c_m(t),\phi_m(t)) \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}(t) \right) \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}(t) \right. \\
& \left. + D_2(c_m(t),\phi_m(t)) \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x_i^2}(t) \right) \Delta c_m(t)\, dx,
\end{aligned}
$$

onde: $D_2^1(\cdot,\cdot)$ e $D_2^2(\cdot,\cdot)$ é a derivada com relação a primeira e segunda variável respectivamente. Continuando,

$$
\begin{aligned}
= & -\int_\Omega \Big(\big(D_2^1(c_m(t),\phi_m(t)) \nabla c_m(t) + D_2^2(c_m(t),\phi_m(t)) \nabla \phi_m(t) \big) \nabla \phi_m(t) \\
& + D_2(c_m(t),\phi_m(t)) \Delta \phi_m(t) \Big) \Delta c_m(t)\, dx \\
\leqslant & \int_\Omega \Big(|D_2^1(c_m(t),\phi_m(t))| |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t)| + |D_2^2(c_m(t),\phi_m(t))| |\nabla \phi_m(t)|^2 \\
& + |D_2(c_m(t),\phi_m(t))| |\Delta \phi_m(t)| \Big) |\Delta c_m(t)|\, dx \\
\leqslant & \; C \left(\int_\Omega |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx + \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2 |\Delta c_m(t)|\, dx \right. \\
& \left. + \int_\Omega |\Delta \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt} ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s ||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left(\int_\Omega |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \right. \\
& \left. + \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2 |\Delta c_m(t)|\, dx + \int_\Omega |\Delta \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \right) \\
& + \int_\Omega |D_1'(\phi_m(t)) \nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |D_1'(\phi_m(t)) \nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx & \leqslant \int_\Omega |D_1'(\phi_m(t))| |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \\
& \leqslant C \int_\Omega |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt} ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s ||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left(\int_\Omega |\nabla c_m(t) \nabla \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \right. \\
& \left. + \int_\Omega |\nabla \phi_m(t)|^2 |\Delta c_m(t)|\, dx + \int_\Omega |\Delta \phi_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx \right). \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Considere

$$
\mathcal{E}_1 = \int_\Omega |\nabla \phi_m(t) \nabla c_m(t) \Delta c_m(t)|\, dx,
$$

e

$$\mathcal{E}_2 = \int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2|\Delta c_m(t)|\,dx + \int_\Omega |\Delta\phi_m(t)\Delta c_m(t)|\,dx.$$

Antes de estimar estes termos, observe que, pelo Teorema 1.12, como $n=3$, tomando $m=1$ e $p=2$, do item $a)$ obtemos

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{1,q}(\Omega),\ \ 1 \leqslant q < 6,$$

e $H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega),\ \ 1 \leqslant q \leqslant 6$, então

$$||u||_{W^{1,q}(\Omega)} \leqslant C||u||_{H^2(\Omega)},\ \text{para } 1 \leqslant q \leqslant 6,\ \forall\, u \in H^2(\Omega). \tag{3.42}$$

E, pelas estimativas (3.9) e (3.42), segue que

$$||\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)} = ||\phi_m(t)||_{W^{1,6}(\Omega)} \leqslant C||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C,$$

então

$$||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)} \leqslant C. \tag{3.43}$$

Assim pela Desigualdade de Hölder (1.11), pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.19), e pela estimativa (3.43) acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &\leqslant ||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}||\nabla c_m(t)||_{L^3(\Omega)}||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C||\nabla c_m(t)||_{L^3(\Omega)}||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_2||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_2||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young (1.13), com $D_s > 0$ e $C(D_s) = \eta\dfrac{D_s}{8}$, onde $\eta > 0$ é tomado suficientemente pequeno, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &\leqslant D_s(||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)})^2 + \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&= \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||c_m(t)||_{H^2(\Omega)}||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $k=0$ em (1.18) obtém-se

$$||c_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Então, pela estimativa (2.25) e pelas Desigualdades de Young (1.12) e (1.13), temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &\leqslant \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_sC\left(||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_sC||\Delta c_m(t)||_{L^2(\Omega)}||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)} + C||\nabla c_m(t)||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \eta\frac{D_s}{8}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C^2}{2}\\
&\quad +\frac{1}{2}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \eta\frac{D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C(1+||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

onde $C = \max\left\{D_s, \dfrac{C^2}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Por outro lado, de (1.13), tomando $\eta > 0$ suficientemente pequeno, e usando (1.11), temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 &= \int_\Omega \left(|\nabla\phi_m(t)|^2 + |\Delta\phi_m(t)|\right)|\Delta c_m(t)|\,dx\\
&\leqslant \int_\Omega \left[\frac{D_s}{\eta}\left(|\nabla\phi_m(t)|^2 + |\Delta\phi_m(t)|\right)^2 + \frac{\eta D_s}{4}|\Delta c_m(t)|^2\right]dx\\
&= \frac{\eta D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \frac{D_s}{\eta}\left(|\nabla\phi_m(t)|^2 + |\Delta\phi_m(t)|\right)^2 dx\\
&= \frac{\eta D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{D_s}{\eta}\left(\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^4\,dx + \int_\Omega 2|\nabla\phi_m(t)|^2|\Delta\phi_m(t)|\,dx\right.\\
&\quad \left. + \int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right)\\
&\leqslant \frac{\eta D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s\left(||\nabla\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)} + 2\left(||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^4(\Omega)}||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right)\right.\\
&\quad \left. +||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

De (3.42) e (3.9), temos que

$$
||\phi_m(t)||_{L^4(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||_{L^4(\Omega)} = ||\phi_m(t)||_{W^{1,4}(\Omega)} \leqslant C||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)} \leqslant C,
$$

então

$$
||\nabla\phi_m(t)||_{L^4(\Omega)} \leqslant C.
$$

De (3.23)

$$
||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant C, \quad \forall\, t\in[0,T].
$$

Então,

$$
\mathcal{E}_2 \leqslant \frac{\eta D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C. \tag{3.45}
$$

Substituindo (3.44) e (3.45) em (3.41), concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\left(\eta\frac{D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
&\quad \left. + C(1+||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}) + \frac{\eta D_s}{4}||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C\right).
\end{aligned}
$$

E assim, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\eta D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C_1 \\ &+ C_1||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C_1C_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + (2 - C\eta)D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C(1 + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}).$$

Temos que $\eta > 0$ é suficientemente pequeno, e assim, seja $1 \leqslant 2 - C\eta$. Tomando $C = \max\{C_1, C_1C_2\}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C(1 + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.46}$$

Como $c_0 \in H^1(\Omega)$, de (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}(\nabla(c_{0m} - c_0), \nabla c_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0 \\ (\nabla c_{0m}, \nabla c_{0m})_{L^2(\Omega)} - (\nabla c_0, \nabla c_{0m})_{L^2(\Omega)} &= 0 \\ ||\nabla c_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} &= (\nabla c_0, \nabla c_{0m})_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant ||\nabla c_0||_{L^2(\Omega)}||\nabla c_{0m}||_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

o que nos fornece

$$||\nabla c_{0m}||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||\nabla c_0||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.47}$$

De (3.46) temos

$$\frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C + C||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando o Lema de Gronwall, Teorema 1.23 e usando a desigualdade (3.47), obtemos, para todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant e^{\int_0^t C\,ds}\left[||\nabla c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t C\,ds\right] \\ &= e^{Ct}\left[||\nabla c_{0m}||^2_{L^2(\Omega)} + Ct\right] \\ &\leqslant e^{Ct}\left[||\nabla c_0||^2_{L^2(\Omega)} + Ct\right].\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} \leqslant e^{Ct}\left[||\nabla c_0||^2_{L^2(\Omega)} + Ct\right] + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\sup_{t\in[0,T]} ess||c_m(t)||^2_{H^1(\Omega)} \leqslant e^{CT}\left[||\nabla c_0||^2_{L^2(\Omega)} + CT\right] + \sup_{t\in[0,T]} ess||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Pela equação (2.25), e como o termo $e^{CT}\left[||\nabla c_0||^2_{L^2(\Omega)} + CT\right]$ é uma constante, segue que

$$||c_m||^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C.$$

Assim, obtemos (3.34).

Fazendo, em (3.46), a integral de $(0,r)$ para $r \in (0,T)$, e depois o supremo essencial para $r \in [0,T]$, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T D_s||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leqslant C\int_0^T (1+||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)})\,dt,$$

e, assim

$$\begin{aligned} ||\nabla c_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} - ||\nabla c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} &+ D_s\int_0^T ||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &\leqslant CT + C\int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \end{aligned}$$

Note que, de (2.24) temos $||c_m||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C$, então

$$\int_0^T ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \leqslant C,$$

e como $||\nabla c_m(T)||^2_{L^2(\Omega)} \geqslant 0$ e por (3.47), $||\nabla c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C$ segue que

$$\begin{aligned} D_s\int_0^T ||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &\leqslant C, \\ ||\Delta c_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leqslant C \end{aligned} \tag{3.48}$$

Da estimativa (1.18), com $k = 0$, temos

$$\begin{aligned} ||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} &\leqslant C\left(||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ \int_0^T ||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}\,dt &\leqslant C\left(\int_0^T ||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right) \\ ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} &\leqslant C\left(||\Delta c_m||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right). \end{aligned}$$

Das estimativas (3.48) e (2.24), segue que

$$||c_m(t)||^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C,$$

e assim obtemos (3.35). □

Lema 3.7. *Existe $C > 0$, que não depende de m, tal que*

$$\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(Q_T)} \leqslant C. \tag{3.49}$$

Demonstração. Escolhendo $w = \dfrac{\partial c_m}{\partial t}(t) \in V_m$ na segunda equação do Problema (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\,dx &+ \int_\Omega D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t)\cdot\nabla\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right)dx \\ &+ \int_\Omega D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\cdot\nabla\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right)dx = 0. \quad (3.50)\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\,dx = \int_\Omega \left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx = \left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad (3.51)$$

e usando as respectivas definições de divergente como no lema anteior, concluímos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\cdot\nabla\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right)dx \\ =\ &\int_\Omega \operatorname{div}\Big(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\Big)\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\,dx. \quad (3.52)\end{aligned}$$

De acordo com (H2)-(H3) temos que $D_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $D_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, assim

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)) \\ =\ &\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_1(\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}(t)\right) \\ =\ &\sum_{i=1}^n \Bigg(D_1'(\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}(t)\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t) + D_1(\phi_m(t))\frac{\partial^2 c_m}{\partial x_i^2}(t) + \Bigg(D_2^1(c_m(t),\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial x_i}(t) \\ &+ D_2^2(c_m(t),\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}(t)\Bigg)\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\frac{\partial^2\phi_m}{\partial x_i^2}(t)\Bigg) \\ =\ &D_1'(\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t) + D_1(\phi_m(t))\Delta c_m(t) + \Big(D_2^1(c_m(t),\phi_m(t))\nabla c_m(t) \\ &+ D_2^2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t)\Big)\nabla\phi_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\Delta\phi_m(t). \quad (3.53)\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \operatorname{div}(D_1(\phi_m(t))\nabla c_m(t) + D_2(c_m(t),\phi_m(t))\nabla\phi_m(t))\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\,dx \\ \leqslant\ &C\int_\Omega \big(|\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)| + |\Delta c_m(t)| + |\nabla c_m(t)\nabla\phi_m(t)| + |\nabla\phi_m(t)|^2 \\ &+|\Delta\phi_m(t)|\big)\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|dx\end{aligned}$$

$$\leqslant \; C\int_{\Omega}\left(|\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)|+|\Delta c_m(t)|+|\nabla\phi_m(t)|^2+|\Delta\phi_m(t)|\right)\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx. \tag{3.54}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \;\leqslant\; & C\int_{\Omega}(|\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)|+|\Delta c_m(t)| \\ & +|\nabla\phi_m(t)|^2+|\Delta\phi_m(t)|)\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx \end{aligned} \tag{3.55}$$

Agora estimando o lado direito de (3.55), seja

$$\mathcal{E}_1=\int_{\Omega}\left|\nabla\phi_m(t)\nabla c_m(t)\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx$$

e

$$\mathcal{E}_2=\int_{\Omega}|\nabla\phi_m(t)|^2\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx+\int_{\Omega}|\Delta\phi_m(t)|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx+\int_{\Omega}|\Delta c_m(t)|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right| dx$$

Estimaremos estes dois termos separadamente. Iniciaremos por $\mathcal{E}_1$. Aplicando a Desiguadade de Hölder (1.11), obtemos

$$\mathcal{E}_1 \;\leqslant\; ||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}||\nabla c_m(t)||_{L^3(\Omega)}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.56}$$

Agora, como $H^2(\Omega)\hookrightarrow W^{1,6}(\Omega)$ de (3.42), e (3.9), segue que

$$||\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}+||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}=||\phi_m(t)||_{W^{1,6}(\Omega)}\leqslant C||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)}\leqslant C,$$

então

$$||\nabla\phi_m(t)||_{L^6(\Omega)}\leqslant C.$$

Assim, pela Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.19), segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 \;&\leqslant\; C||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||\nabla c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant\; C||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}||c_m(t)||^{\frac{1}{2}}_{H^2(\Omega)}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)} \\ &=\; C||c_m(t)||_{H^2(\Omega)}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Note que

$$||\nabla c_m||_{H^1(\Omega)}=||\nabla c_m||_{L^2(\Omega)}+||D^2c_m||_{L^2(\Omega)}\leqslant ||c_m||_{H^2(\Omega)}.$$

Sendo η suficientemente pequeno tal que $1 - C\eta > 0$, pela Desigualdade de Young (1.13) segue que

$$\mathcal{E}_1 \leqslant C||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} + \frac{C\eta}{2}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Young (1.13), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 \;&\leqslant\; C\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^4\,dx + \frac{C\eta}{6}\int_\Omega\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + C\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \\ &\quad + \frac{C\eta}{6}\int_\Omega\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx + C\int_\Omega |\Delta c_m(t)|^2 + \frac{C\eta}{6}\int_\Omega\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \\ &\leqslant\; C||\nabla\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)} + C||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C||\Delta c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C\eta}{2}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Então, por (3.9), (3.42), (3.23) e (3.48), segue que

$$\mathcal{E}_2 \leqslant C + \frac{C\eta}{2}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, de (3.55) temos

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \;&\leqslant\; C||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} + \frac{C\eta}{2}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + C + \frac{C\eta}{2}\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \\ &=\; C\eta\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} + C||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} + C. \end{aligned}$$

O que nos fornece

$$(1 - C\eta)\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \;\leqslant\; C||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)} + C,$$

ou seja,

$$\left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} \;\leqslant\; C(1 + ||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}).$$

Assim, integrando de $(0, r)$, para $r \in [0, T]$, e tomando o supremo essencial para $r \in [0, T]$, por (3.35), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt \;&\leqslant\; C\left(T + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}\right) dt \\ \left|\left|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_T)} \;&\leqslant\; C\left(T + ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\right) \end{aligned}$$

$$\left\|\frac{\partial c_m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C,$$

de onde segue (3.49). □

3.1.2 Existência da Solução e Convergência do Problema Aproximado

Com as estimativas da seção anterior estamos em condições de obter o resultado proposto pelo Teorema 3.1. De (3.9), (3.10) e (3.25) temos que

$$\phi \in L^2(0,T;H^3(\Omega)) \cap H^1(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega)).$$

Além disso, devido a (3.35) e (3.49), c_m é limitada no espaço

$$W_3 = \left\{u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}$$

definido em (2.74). Observe que W_3 é compactamente imerso em $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Então, considerando também (3.34), existe

$$c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$$

e existe uma subsequência de c_m, que ainda denotaremos por c_m, tal que, quando $m \to +\infty$,

$$c_m \to c \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.57}$$

Como $L^2(Q_T)$ é um espaço reflexivo, temos

$$\frac{\partial c_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial c}{\partial t} \quad \text{em} \quad L^2(Q_T). \tag{3.58}$$

Agora, para concluírmos (3.3), (3.4) e (3.5), basta seguir os mesmos argumentos utilizados na Seção 2.2.3, para a passagem do limite no Problema 2.14.

Portanto segue a existência de solução proposta no Teorema 3.1.

3.2 Unicidade

Nesta seção, provaremos a unicidade das soluções que encontramos na seção anterior. Suponhamos que existam duas soluções (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) satisfazendo (3.1) - (3.5) em conjunto com os mesmos dados iniciais. Sejam $\phi = \phi_2 - \phi_1$ e $c = c_2 - c_1$. Vamos obter algumas estimativas para estes termos.

Denotaremos por C, uma constante positiva dependente de ε^2, M_1, M_2, D_s,

D_1, T, das constantes de Lipschitz dos termos não lineares F_i, D_i, $i = 1, 2$ e também de $||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$ e $||c_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$.

3.2.1 Estimativas

Lema 3.8. *Assumindo as suposições iniciais deste capítulo, vale a seguinte estimativa:*

$$\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{3.59}$$

onde $C > 0$ é constante.

Demonstração. Como (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções da equação (3.3), temos que

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi_1 = F_1(\phi_1) + c_1F_2(\phi_1)$$

e

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi_2 = F_1(\phi_2) + c_2F_2(\phi_2).$$

Subtraindo a primeira equação acima da segunda, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\phi_2 - \phi_1) - \varepsilon^2\Delta(\phi_2 - \phi_1) &= F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1) + c_2F_2(\phi_2) - c_1F_2(\phi_1)\\ &\quad + c_2F_2(\phi_1) - c_2F_2(\phi_1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi = F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1) \quad + \quad F_2(\phi_1)c + c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1)). \tag{3.60}$$

Multiplicando por ϕ a equação acima, obtemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}.\phi - \varepsilon^2\Delta\phi.\phi = (F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\phi + F_2(\phi_1)c\phi + c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\phi,$$

e integrando sobre Ω,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}.\phi\,dx - \varepsilon^2\int_\Omega \Delta\phi.\phi\,dx &= \int_\Omega (F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\phi\,dx + \int_\Omega F_2(\phi_1)c\phi\,dx\\ &\quad + \int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\phi\,dx.\end{aligned}$$

Note que,

$$\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}.\phi\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\phi(t)|\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

e, da Fórmula de Green (1.2)

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \Delta\phi.\phi\, dx &= \int_\Omega \nabla\phi\nabla\phi\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n}\phi\, d\sigma \\
&= \int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx = ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\phi\, dx + \int_\Omega F_2(\phi_1)c\phi\, dx \\
&+ \int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\phi\, dx.
\end{aligned}
$$

Lembrando que de (H1), F_i são Lipschitz, sendo k_i a constante de Lipschitz, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\phi\, dx &\leqslant \int_\Omega |F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1)||\phi|\, dx \leqslant \int_\Omega k_1(\phi_2 - \phi_1)\phi\, dx \\
&= k_1\int_\Omega |\phi|^2\, dx = k_1||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Hölder (1.11), como $2, 4$ e 4 são conjugados, pois

$$
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1,
$$

então

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\phi\, dx &\leqslant \int_\Omega |c_2||F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1)||\phi|\, dx \\
&\leqslant \int_\Omega k_2|c_2||\phi_2 - \phi_1||\phi|\, dx \\
&= \int_\Omega k_2|c_2||\phi||\phi|\, dx \\
&\leqslant k_2\, ||c_2||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

e, pela Desigualdade de Young (1.12)

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega F_2(\phi_1)c\phi\, dx &\leqslant \int_\Omega |F_2(\phi_1)||c||\phi|\, dx \leqslant M_2\int_\Omega |c||\phi|\, dx \\
&\leqslant \frac{M_2}{2}\left(||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant\ & k_1||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{M_2}{2}\left(||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + k_2||c_2||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant\ & C(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_2||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^4(\Omega)}||\phi||_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

Devido a imersão contínua de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e de $c_2 \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, obtemos

$$||c_2(t)||_{L^4(\Omega)} \leqslant C||c_2||_{H^1(\Omega)} \leqslant C,$$

e

$$||\phi(t)||_{L^4(\Omega)} \leqslant C||\phi(t)||_{H^1(\Omega)} = C(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}),$$

daí,

$$||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant C(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leqslant\ & C(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young (1.13),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ \leqslant\ & C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{C}||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

então,

$$\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + 2\varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

Daí segue (3.59).

□

Lema 3.9. *Assumindo as suposições iniciais deste capítulo, vale a seguinte estimativa*

$$\frac{d}{dt}||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{3.61}$$

onde $C > 0$ é constante.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.60) por $-\Delta\phi$ obtemos

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta\phi + \varepsilon^2(\Delta\phi)^2 = -(F_1(\phi_2) - F_1(\phi_1))\Delta\phi - F_2(\phi_1)c\Delta\phi - c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\Delta\phi.$$

Integrando essa equação sobre Ω, analizando cada integral separadamente, usando (1.2) e (1.11) temos:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta\phi\, dx &= \int_\Omega \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\nabla\phi\, dx - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial n}\, d\sigma \\ &= \int_\Omega \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}\nabla\phi\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi|^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)}; \end{aligned}$$

$$\int_\Omega (\Delta\phi)^2\,dx \;=\; \int_\Omega |\Delta\phi|^2\,dx = ||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)};$$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega (F_1(\phi_2)-F_1(\phi_1))\Delta\phi\,dx &\leqslant \int_\Omega k_1|\phi_2-\phi_1||\Delta\phi|\,dx = \int_\Omega k_1|\phi||\Delta\phi|\,dx\\
&\leqslant k_1||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)};\\
-\int_\Omega F_2(\phi_1)c\Delta\phi\,dx &\leqslant M_2\int_\Omega |c\Delta\phi|\,dx \leqslant M_2||c(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)};\\
-\int_\Omega c_2(F_2(\phi_2)-F_2(\phi_1))\Delta\phi\,dx &\leqslant \int_\Omega |c_2|k_2|\phi_2-\phi_1||\Delta\phi|\,dx = \int_\Omega |c_2|k_2|\phi||\Delta\phi|\,dx\\
&= k_2||c_2(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\big(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}+||c(t)||_{L^2(\Omega)}\\
&+ ||c_2(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}\big)\,||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Devido a imersão contínua de $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$ e da $c_2\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, obtemos

$$||c_2(t)||_{L^4(\Omega)}\leqslant C||c_2(t)||_{H^1(\Omega)}\leqslant C,$$

e

$$||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}\leqslant C||\phi(t)||_{H^1(\Omega)} = C(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}+||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}).$$

Assim, da Desigualdade de Young (1.13)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)}+\varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant\;& C\big(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}+||c(t)||_{L^2(\Omega)}+||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}\big)\,||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant\;& C\big(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}+||c(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}\\
&+||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}\big)\\
\leqslant\;& C\Bigg(C(\varepsilon)||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\varepsilon^2}{3C}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+C(\varepsilon)||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\varepsilon^2}{3C}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&+C(\varepsilon)||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\varepsilon^2}{3C}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)}+2\varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &- \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
\leqslant C(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &+ ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Logo, segue (3.61). □

Lema 3.10. *Assumindo as suposições iniciais deste capítulo, vale a seguinte estimativa*

$$\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}+D_s||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)}+||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \tag{3.62}$$

onde $C>0$ é constante.

Demonstração. Como (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções de (3.4), segue que

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \mathrm{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1)$$

e

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \mathrm{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2).$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_2-c_1) = \mathrm{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2+D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2)-\mathrm{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1+D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1),$$

ou seja, lembrando que $c = c_2 - c_1$,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \mathrm{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2) - \mathrm{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1).$$

Multiplicando esta equação por c, e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial c}{\partial t}\, c\, dx = \int_\Omega \mathrm{div}(D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2)\, c\, dx,$$

isto é,

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1)\, c\, dx.$$

Note que, usando a Fórmula de Green (1.1), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega (D_1(\phi_1)\nabla c_1 + D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1)\nabla c\, dx \\ &- \int_\Omega (D_1(\phi_2)\nabla c_2 + D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2)\nabla c\, dx\end{aligned}$$

$$= -\int_\Omega (D_1(\phi_2)\nabla c_2 - D_1(\phi_1)\nabla c_1)\nabla c\, dx - \int_\Omega (D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2 - D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1)\nabla c\, dx,$$

então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi_2)\nabla c_2\nabla c\, dx &- \int_\Omega D_1(\phi_1)\nabla c_1\nabla c\, dx \\ + \int_\Omega D_2(c_2,\phi_2)\nabla\phi_2\nabla c\, dx &- \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla\phi_1\nabla c\, dx = 0.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo alguns termos, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi_1)\nabla c_2 \nabla c\, dx &- \int_\Omega D_1(\phi_1)\nabla c_1 \nabla c\, dx \\
- \int_\Omega D_1(\phi_1)\nabla c_2 \nabla c\, dx &+ \int_\Omega D_1(\phi_2)\nabla c_2 \nabla c\, dx \\
+ \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla \phi_2 \nabla c\, dx &- \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla \phi_1 \nabla c\, dx
\end{aligned}$$

$$- \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla \phi_2 \nabla c\, dx + \int_\Omega D_2(c_2,\phi_2)\nabla \phi_2 \nabla c\, dx = 0,$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi_1)|\nabla c|^2\, dx &= \int_\Omega (D_1(\phi_1) - D_1(\phi_2))\nabla c_2 \nabla c\, dx \\
- \int_\Omega D_2(c_1,\phi_1)\nabla \phi \nabla c\, dx &+ \int_\Omega (D_2(c_1,\phi_1) - D_2(c_2,\phi_2))\nabla \phi_2 \nabla c\, dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando (H2) e (H3), tomando k_i como as constantes de Lipschitz de D_i respectivamente, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \int_\Omega D_1(\phi_1)|\nabla c|^2\, dx$$

$$\leqslant \int_\Omega k_1|\phi_1 - \phi_2||\nabla c_2 \nabla c|\, dx + \int_\Omega M_3|\nabla \phi \nabla c|\, dx + \int_\Omega k_2|(c_1,\phi_1) - (c_2,\phi_2)||\nabla \phi_2 \nabla c|\, dx.$$

Tomando $C = \max\{k_1, M_3, k_2\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C\left(\int_\Omega |\phi||\nabla c_2 \nabla c|\, dx + \int_\Omega |\nabla \phi \nabla c|\, dx\right. \\
&+ \left.\int_\Omega (|\phi| + |c|)|\nabla \phi_2 \nabla c|\, dx\right). \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

Para estimar o lado direito de (3.63), observamos que, pelo Teorema 1.8 e pela Proposição 1.9, a imersão contínua de $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ é válida para domínios suaves $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d \leqslant 3$. Note, também, que pela estimativa (1.18), com $k = 0$

$$||\phi||_{H^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\Delta\phi||_{L^2(\Omega)} + ||\phi||_{L^2(\Omega)}\right).$$

Assim, existem constantes positivas $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\phi||\nabla c_2 \nabla c|\, dx &\leqslant ||\phi||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla c_2||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_1||\phi||_{H^2(\Omega)}||c_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\nabla c||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C_2\left(||\Delta\phi||_{L^2(\Omega)} + ||\phi||_{L^2(\Omega)}\right)||\nabla c||_{L^2(\Omega)}. \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

A mesma estimativa vale para o termo $\int_\Omega |\phi||\nabla\phi_2\nabla c|\,dx$, isto é,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\phi||\nabla\phi_2\nabla c|\,dx &\leqslant ||\phi||_{L^\infty(\Omega)}||\nabla\phi_2||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_1||\phi||_{H^2(\Omega)}||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_2\left(||\Delta\phi||_{L^2(\Omega)}+||\phi||_{L^2(\Omega)}\right)||\nabla c||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder, a Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (1.19), e a imersão contínua (1.5),temos:

$$||\nabla\phi_2||_{L^6(\Omega)} \leqslant C||\nabla\phi_2||_{H^1(\Omega)} \leqslant C||\phi_2||_{H^2(\Omega)} \leqslant C||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}.$$

Logo, existem constantes $C_3, C_4 > 0$ tais que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |c||\nabla\phi_2\nabla c|\,dx &\leqslant ||c||_{L^3(\Omega)}||\nabla\phi_2||_{L^6(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_1||c||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla\phi_2||_{L^6(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_3||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}||c||^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &\leqslant C_4\left(||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}+||\nabla c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &= C_4\left(||c||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}+||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla c||^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\right).(3.65)\end{aligned}$$

Então das estimativas (3.64) e (3.65) em (3.63), com o uso da Desigualdade de Young (1.13), deduzimos que existe uma constante positiva C tal que para q.t.p $t \in (0,T)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} &+ 2\,D_s||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 2C_2\left(||\Delta\phi||_{L^2(\Omega)}+||\phi||_{L^2(\Omega)}\right)||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &+ \int_\Omega|\nabla\phi\nabla c|\,dx + C_4\left(||c||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}+||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla c||^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leqslant C\left(||\Delta\phi||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\right. &+ ||\phi||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}+||\nabla\phi||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}\\ &+ \left.||c||_{L^2(\Omega)}||\nabla c||_{L^2(\Omega)}+||c||^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}||\nabla c||^{\frac{3}{2}}_{L^2(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant C\left(D_s||\Delta\phi||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_s}{5C}||\nabla c||^2_{L^2(\Omega)}+D_s||\phi||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_s}{5C}||\nabla c||^2_{L^2(\Omega)}+D_s||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)}\right.\\ &\quad\left.+\frac{D_s}{5C}||\nabla c||^2_{L^2(\Omega)}+D_s||c||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_s}{5C}||\nabla c||^2_{L^2(\Omega)}+D_s||c||^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_s}{5C}||\nabla c||^2_{L^2(\Omega)}\right)\\ &\leqslant C\left(||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)}+||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)+D_s||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Portanto segue (3.62).

□

3.2.2 Conclusão da Unicidade

Com as estimativas da seção anterior provaremos a unicidade. Para tal mostraremos que $\phi = c = 0$ q.t.p. em Q_T.

Multiplicando a desigualdade (3.62) por $\mu > 0$ que será escolhido mais tarde

$$\frac{d}{dt}\mu||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s\mu||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\mu\left(||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right),$$

agora adicionando (3.59) e (3.61),

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mu||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + D_s\mu||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C_6\mu\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C_6\mu||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\quad \leqslant C_6\mu\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C_6\mu||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C_5\Big(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad\qquad + ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&\quad \leqslant (C_5 + C_6\mu)\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C_6\mu||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \mu||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+D_s\mu||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant (C_5 + C_6\mu)\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C_6\mu||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} > 0$ e $D_s\mu||\nabla c(t)||^2_{L^2(\Omega)} > 0$ a desigualdade acima implica que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \mu||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant (C_5 + C_6\mu)\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + C_6\mu||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

onde C_5 e C_6 são constantes positivas. Então escolhendo $\mu = \dfrac{\varepsilon^2}{C_6}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon^2}{C_6}||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant (C_5 + \varepsilon^2)\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \dfrac{C_5 + \varepsilon^2}{\max\left\{1, \dfrac{\varepsilon^2}{C_6}\right\}}$, para q.t.p $t \in (0,T)$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant C\left(||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.66}$$

Aplicando o Lema de Gronwall (Forma Diferencial) (1.17), tem-se

$$||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{\int_0^t C\,ds}\left[||\phi(0)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t 0\,ds\right].$$

Como $\phi(0) = c(0) = 0$, temos que

$$||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant e^{CT}0 = 0.$$

Logo,

$$||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ q.t.p } t \in (0,T),$$

então,

$$||\phi(t)||^2_{H^1(\Omega)} = 0 \text{ se, e somente se, } \phi = 0 \text{ q.t.p em } Q_T$$

e

$$||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ se, e somente se, } c = 0 \text{ q.t.p em } Q_T.$$

Portanto, segue a unicidade. Assim, vale o Teorema 3.1.

Capítulo 4

Um Princípio do Máximo

Neste capítulo estabeleceremos um Princípio do Máximo com suposições extras sobre os termos não lineares. Este resultado permite-nos concluir a existência de solução para o problema (2.1) com as hipóteses físicas adequadas, isto é, $0 \leqslant \phi_0 \leqslant 1$ e $0 \leqslant c_0 \leqslant 1$ então, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ e $0 \leqslant c \leqslant 1$.

Assim, além de (H1)-(H3), vamos supor que os termos não lineares F_1, F_2 e D_2 satisfazem as seguintes condições extras:

(H4) $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$ em $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$;

(H5) $D_2(\cdot, r_2) \equiv 0$ em $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ e $\forall\, r_2 \in \mathbb{R}$.

Então, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Sob as hipóteses (H1)-(H5), suponha que os dados iniciais* $(\phi_0, c_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *são tais que*

$$0 \leqslant \phi_0(x),\ \ c_0(x) \leqslant 1 \ \ \textit{para q.t.p. } x \in \Omega.$$

Então para algum $T > 0$, *toda solução fraca* $(\phi, c) \in (L^2(0,T; H^1(\Omega)))^2 \cap (H^1(0,T; V'))^2$ *satisfaz, para todo* $t \in [0,T]$,

$$0 \leqslant \phi(x,t),\ \ c(x,t) \leqslant 1 \ \ \textit{para q.t.p. } x \in \Omega.$$

Demonstração. Vamos provar que se $\phi_0, c_0 \geqslant 0$ q.t.p. em Ω então $\phi(t), c(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω. Consideremos a parte negativa de ϕ e c e denotemos $\phi^- = \max(-\phi, 0)$ e $c^- = \max(-c, 0)$. De acordo com o exercício 17 (ii) da Seção 5.10 do livro do Evans [7], página 292, temos que $\phi^- \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ com $\nabla\phi^- = -\nabla\phi$ se $\phi < 0$ e $\nabla\phi^- = 0$, caso contrário, q.t.p. em Q_T e as mesmas propriedades valem para c^-.

Então, escolhendo $v = -\phi^-$ e $w = -c^-$ nas equações (2.3) e (2.4) respectivamente, obtemos para q.t.p. $t \in (0,T)$:

$$-\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi^- \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega (-\nabla\phi)\nabla\phi^- \; dx = -\int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^- \; dx,$$
$$-\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, c^- \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi)(-\nabla c^-) \; dx = 0.$$

Lembrando que $\phi = \phi^+ - \phi^-$; assim

$$\int_\Omega (-\nabla\phi)\nabla\phi^- \; dx = \int_\Omega (-\nabla(\phi^+ - \phi^-))\nabla\phi^- \; dx = -\int_\Omega \nabla\phi^+\nabla\phi^- \; dx + \int_\Omega |\nabla\phi^-|^2 \; dx$$

Note que

$$\text{se } \phi < 0, \text{ então } \nabla\phi^+ = 0, \quad \text{logo} \quad -\int_\Omega \nabla\phi^+\nabla\phi^- \; dx = 0,$$
$$\text{se } \phi \geqslant 0, \text{ então } \nabla\phi^- = 0, \quad \text{logo} \quad -\int_\Omega \nabla\phi^+\nabla\phi^- \; dx = 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega (-\nabla\phi)\nabla\phi^- \; dx = \int_\Omega |\nabla\phi^-|^2 \; dx.$$

E, analogamente

$$\int_\Omega D_1(\phi)\nabla c(-\nabla c^-) \; dx = \int_\Omega D_1(\phi)| - \nabla c^-|^2 \; dx$$

e

$$\int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi(-\nabla c^-) \; dx = \int_{c<0} D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla c \; dx.$$

Portanto,

$$-\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \phi^- \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla\phi^-|^2 \; dx = -\int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^- \; dx,$$

e

$$-\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, c^- \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega D_1(\phi)| - \nabla c^-|^2 \; dx = -\int_{c<0} D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla c \; dx.$$

Quando uma função ψ pertence a $H^1(0,T;H^1(\Omega))$, é fácil provar que

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi^- \right\rangle_{V',V} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\psi^-||^2_{L^2(\Omega)}$$

em $L^1(0,T)$. Usando argumento de densidade, é possível mostrar que esta igualdade vale para toda função ψ em $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$.

De fato, pelo Teorema 1.16, tomando $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$, como

$\psi = \psi^+ - \psi^-$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi^- \right\rangle_{V',V} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(\psi^+ - \psi^-), \psi^- \right\rangle_{V',V} = \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t}, \psi^- \right\rangle_{V',V} - \left\langle \frac{\partial \psi^-}{\partial t}, \psi^- \right\rangle_{V',V} \\
&= -\left\langle \frac{\partial \psi^-}{\partial t}, \psi^- \right\rangle_{V',V} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\psi^-||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Daí segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi^-|^2\ dx = -\int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^-\ dx, \tag{4.1}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)| - \nabla c^-|^2\ dx = -\int_{c<0} D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla c\ dx. \tag{4.2}$$

Agora, usando a hipótese (H4) sobre os termos não-lineares F_1 e F_2, veja que

$$(F_1(\phi) + cF_2(\phi))\phi^- = 0 \ \text{ q.t.p. em } \ Q_T.$$

Por outro lado, assumindo (H5) sobre D_2 segue

$$D_2(c,\phi) = 0 \ \text{ se } c < 0, \ \text{ q.t.p. em } \ Q_T.$$

Assim, as equações (4.1) e (4.2) são reduzidas para

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla \phi^-|^2\ dx = 0 \tag{4.3}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)| - \nabla c^-|^2\ dx = 0, \tag{4.4}$$

para q.t.p. $t \in (0,T)$. Dados $\phi_0^- = c_0^- = 0$ e devido o fato que a função D_1 é positiva, concluímos que $\phi^-(t) = c^-(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω.

De fato, de (4.3), como $\varepsilon^2 \displaystyle\int_\Omega |\nabla \phi^-|^2\ dx \geqslant 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \ \text{ então } \ ||\phi^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||\phi^-(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

daí

$$||\phi^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \ \text{ se, e somente se, } \ \phi^-(t) = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$ q.t.p. em Ω.

E de (4.4), como $\int_\Omega D_1(\phi)|-\nabla c^-|^2\, dx \geqslant 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||c^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0, \text{ então } ||c^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||c^-(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

daí

$$||c^-(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ se, e somente se, } c^-(t) = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$ q.t.p. em Ω.

Logo, se as partes negativas de ϕ e c são indenticamente nulas, segue que essas funções só possuem partes positivas. Assim, $\phi(x,t), c(x,t) \geqslant 0$ para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω.

Agora vamos mostrar que $\phi_0, c_0 \leqslant 1$ q.t.p. em Ω implica que $\phi(t), c(t) \leqslant 1$ para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω. Para tal, tomemos $v = (\phi-1)^+$ e $w = (c-1)^+$ nas equações (2.3) e (2.4). Então

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, (\phi-1)^+ \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi \nabla(\phi-1)^+\, dx = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))(\phi-1)^+\, dx.$$

Note que $\nabla\phi = \nabla(\phi-1) = \nabla\phi - \nabla 1$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla(\phi-1)\nabla(\phi-1)^+\, dx &= \int_\Omega \nabla(\phi-1)\nabla(\phi-1)^+\, dx \\
&= \int_\Omega \left(\nabla(\phi-1)^+ - \nabla(\phi-1)^-\right)\nabla(\phi-1)^+\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla(\phi-1)^+|^2\, dx - \int_\Omega \nabla(\phi-1)^-\nabla(\phi-1)^+\, dx \\
&= \int_\Omega |\nabla(\phi-1)^+|^2\, dx
\end{aligned}$$

e, pelo Teorema 1.16

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, (\phi-1)^+ \right\rangle_{V',V} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(\phi-1)^+||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(\phi-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla(\phi-1)^+|^2\, dx = \int_\Omega (F_1(\phi) + cF_2(\phi))(\phi-1)^+\, dx.$$

De (H4) segue que $F_1(\phi) + cF_2(\phi) = 0$ q.t.p. em Q_T e no intervalo $(0,1)$ temos que $(\phi-1)^+ = 0$, então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(\phi-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla(\phi-1)^+|^2\, dx = 0. \tag{4.5}$$

Temos também,

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, (c-1)^+ \right\rangle_{V',V} + \int_\Omega D_1(\phi)\nabla c \nabla (c-1)^+ \, dx = -\int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla(c-1)^+ \, dx.$$

Analogamente, como no caso anterior, para ϕ, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(c-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla(c-1)^+|^2 \, dx = -\int_\Omega D_2(c,\phi)\nabla\phi\nabla(c-1)^+ \, dx.$$

De (H5), para $c > 1$, segue que $D_2(c,\phi) = 0$ q.t.p. Q_T, assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(c-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega D_1(\phi)|\nabla(c-1)^+|^2 \, dx = 0. \tag{4.6}$$

Agora, de (4.5), como $\varepsilon^2 \displaystyle\int_\Omega |\nabla(\phi-1)^+|^2 \, dx \geqslant 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(\phi-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0 \text{ então } ||(\phi-1)^+(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||(\phi-1)^+(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0.$$

Note que $(\phi-1)^+(0) = (\phi_0-1)^+$, como $\phi_0 \leqslant 1$ então $\phi_0 - 1 \leqslant 0$, daí $(\phi_0-1)^+ = 0$ q.t.p. em Q_T. Assim

$$||(\phi-1)^+(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ se, e somente se, } (\phi-1)^+(t) = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω, logo

$$(\phi-1)(t) = -(\phi-1)^-(t) \leqslant 0 \text{ então } \phi(t) \leqslant 1,$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω.

E, finalmente, de (4.6), como D_1 é positiva, segue que $\displaystyle\int_\Omega D_1(\phi)|\nabla(c-1)^+|^2 \, dx \geqslant 0$; logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||(c-1)^+||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0 \text{ então } ||(c-1)^+(t)||^2_{L^2(\Omega)} - ||(c-1)^+(0)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant 0,$$

como $c_0 \leqslant 1$ logo $||(c-1)^+(0)||^2_{L^2(\Omega)} = 0$. Então,

$$||(c-1)^+(t)||^2_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ se, e somente se, } (c-1)^+(t) = 0,$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω. Logo

$$(c-1)(t) = -(c-1)^-(t) \leqslant 0 \text{ então } c(t) \leqslant 1,$$

para todo $t \in [0,T]$ e q.t.p. em Ω.

Portanto segue o resultado.

$\square$

Capítulo 5

Modelo Com Um Termo Não Linear Caracterizado Pelo Double-well Potencial

Neste capítulo faremos um estudo do mesmo problema (2.1), mas considerando o termo não linear F_1 dado por $F_1(\phi) = a\phi + b\phi^2 - \phi^3$ onde a e b são funções limitadas conhecidas. Essa é uma caracterização que está relacionada com o chamado double-well potential, consideredada inicialmente por Hoffman e Jiang [10], e outras informações sobre essa função podemos encontrar em Assunção [2]. Assim, teremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta\phi + a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + c\, F_2(\phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) & \text{em } \Omega \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = \dfrac{\partial c}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ \phi(0) = \phi_0, \;\; c(0) = c_0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

Vamos provar um resultado de existência de solução para o problema acima. Para tal consideremos as seguintes hipóteses

(H1) F_2 é Lipschitz e limitada com

$$|F_2(r)| \leqslant M_2 \; \forall\, r \in \mathbb{R}.$$

(H2) $D_1 \in C(\mathbb{R})$ é Lipschitz positiva e limitada com

$$0 < D_s \leqslant D_1(r) \leqslant D_1, \;\; \forall\, r \in \mathrm{R}.$$

(H3) $D_2 \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ é Lipschitz e limitada com

$$|D_2(r_1,r_2)| \leqslant M_3,\ \forall\,(r_1,r_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Assim podemos enunciar o seguinte resultado de existência de solução fraca, considerando Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^d$ com $1\leqslant d\leqslant 3$:

Teorema 5.1. *Assumindo que $(H1)-(H3)$ sejam válidas e que $a,b\in L^\infty(Q_T)$. Para qualquer $(\phi_0,c_0)\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $T>0$, existe um par de funções (ϕ,c) satisfazendo*

$$\phi, c\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap H^1(0,T;V'), \tag{5.2}$$

tal que $\phi(0)=\phi_0$, $c(0)=c_0$ e

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, v\right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi.\nabla v\ dx = \int_\Omega (a\phi+b\phi^2-\phi^3+cF_2(\phi))v\ dx, \tag{5.3}$$

$$\left\langle \frac{\partial c}{\partial t}, w\right\rangle_{V',V} + \int_\Omega (D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi).\nabla w\ dx = 0 \tag{5.4}$$

para todo $v,w\in H^1(\Omega)$ e q.t.p. em $(0,T)$.

A demonstração desse resultado segue na próxima seção.

5.1 Demonstração do Teorema 5.1

Para a demonstração desse resultado vamos também utilizar o método de Faedo-Galerkin. Com os mesmos argumentos da Seção 2.1, p.23, temos um problema aproximado como segue

$$(P_m)\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t} v\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega \nabla\phi_m\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega (a\phi_m + b\phi_m^2 - \phi_m^3 + c_mF_2(\phi_m))v\,dx,\\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial c_m}{\partial t} w\,dx + \int_\Omega (D_1(\phi_m)\nabla c_m + D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m)\cdot\nabla w\,dx = 0,\\ \text{para todo } v,\ w\in V_m, \text{ e q.t.p. } t\in(0,T)\\ \phi_m(0)=\phi_{0m}\in V_m,\ \ c_m(0)=c_{0m}\in V_m. \end{cases} \tag{5.5}$$

Lembrando que: V_m é gerado pelos $\{v_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}$ que são autovetores do operador $-\Delta$, e que $\overline{\bigcup_{m\geqslant 1} V_m} = L^2(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue que $\overline{\bigcup_{m\geqslant 1} V_m} = H^1(\Omega)$. E também do fato de $L^4(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue que $L^4(\Omega)\subset \overline{\bigcup_{m\geqslant 1} V_m}$.

O termo $F_1(\phi_m) = a\phi_m + b\phi_m^2 - \phi_m^3$ é continuo em ϕ_m, então temos condições de concluir que o problema acima tem solução para cada $m\geqslant 1$. Basta utilizar os mesmos argumentos da seção 2.1.1. Então conseguimos a existência de soluções $(\phi_m,c_m)\in C^1([0,T_m],V_m\times V_m)$.

As condições iniciais desse problema convergem da mesma forma que na Seção 2.1.2 (veja p.31).

Agora vamos obter estimativas para a sequência ϕ_m, afim de obtermos condições para passar, quando $m \to +\infty$, nas equações do Problema 5.5, para concluirmos a existência de solução para o problema (5.3) e (5.4).

5.1.1 Estimativa a Priori

Inicialmente mostraremos um resultado semelhante ao Lema 2.8, com o objetivo de obter o tempo t em um intervalo fixo $[0,T]$.

Consideremos a constante positiva C dependendo também de $||a||_{L^\infty(Q_T)}$, $||b||_{L^\infty(Q_T)}$.

Lema 5.2. *Existe $C > 0$ dependendo de T_m tal que, para todo $0 \leqslant t < T_m$*

$$||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant C. \tag{5.6}$$

Demonstração. Escolhendo $v = \phi_m$ na primeira equação do problema (5.5), e $w = c_m$ na segunda equação, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \phi_m^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx = \int_\Omega (a\phi_m + b\phi_m^2 - \phi_m^3)\phi_m\,dx + \int_\Omega c_m F_2(\phi_m)\phi_m\,dx, \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega c_m^2\,dx + \int_\Omega D_1(\phi_m)|\nabla c_m|^2\,dx = \int_\Omega D_2(c_m,\phi_m)\nabla\phi_m\nabla c_m\,dx. \tag{5.8}$$

Multiplicando a equação (5.8) por $\delta > 0$ e somando com a (5.7) obtemos, usando as hipóteses (H1)-(H3) do início desse capítulo,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\phi_m^2 + \delta c_m^2)\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx + \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m|^2\,dx + \int_\Omega \phi_m^4\,dx \\
\leqslant\ &\int_\Omega |a||\phi_m^2|\,dx + \int_\Omega |b||\phi_m^3|\,dx + M_2\int_\Omega |c_m||\phi_m|\,dx + \delta M_3\int_\Omega |\nabla\phi_m||\nabla c_m|\,dx,
\end{aligned}$$

aplicando as desigualdades de Young (1.12) e (1.13), obtemos, tomando $\gamma > 0$ suficientemente pequeno, tal que $1-\gamma > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|\phi_m|^2 + \delta|c_m|^2)\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx + \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_m|^4\,dx \\
\leqslant\ &\frac{1}{2}\int_\Omega |a|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\phi_m|^4\,dx + \gamma\int_\Omega |b|^4\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\phi_m^3|^{\frac{4}{3}}\,dx + \frac{M_2}{2}\Bigg(\int_\Omega |c_m|^2\,dx \\
&+ \int_\Omega |\phi_m|^2\,dx\Bigg) + \frac{\delta M_3}{2\eta}\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx + \frac{\delta M_3\eta}{2}\int_\Omega |\nabla c_m|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \dfrac{D_s\varepsilon^2}{M_3^2}$ e $\eta = \dfrac{D_s}{M_3}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega (|\phi_m|^2 + \delta|c_m|^2)\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx + \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m|^2\,dx + (1-\gamma)\int_\Omega |\phi_m|^4\,dx \\
\leqslant \int_\Omega |a|^2 + 2\gamma\int_\Omega |b|^4\,dx + M_2\left(\int_\Omega |c_m|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_m|^2\,dx\right) \\
\leqslant ||a||^2_{L^\infty(Q_T)} + 2\gamma||b||^2_{L^\infty(Q_T)} + M_2\left(\int_\Omega |c_m|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_m|^2\,dx\right) \\
\leqslant C\left(1 + \int_\Omega |c_m|^2\,dx + \int_\Omega |\phi_m|^2\,dx\right), \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

onde $C = \max\{||a||_{L^\infty(Q_T)}, ||b||_{L^\infty(Q_T)}, \gamma, M_2\}$.

Como

$$\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla\phi_m|^2\,dx \geqslant 0,\ \delta D_s\int_\Omega |\nabla c_m|^2\,dx \geqslant 0 \text{ e } (1-\gamma)\int_\Omega |\phi_m|^4\,dx \geqslant 0,$$

e do fato de $\delta > 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (|\phi_m|^2 + \delta|c_m|^2)\,dx \leqslant C\left(1 + \int_\Omega (\phi_m^2 + \delta c_m^2)\,dx\right).$$

Aplicando o Teorema 1.24 (Lema de Gronwall - Forma Diferencial), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\phi_m|^2 + \delta|c_m|^2)\,dx &\leqslant e^{\int_0^t C\,ds}\left[\phi_m^2(0) + \delta c_m^2(0) + \int_0^t C\,ds\right] \\
&= e^{Ct}[|\phi_{0m}|^2 + \delta|c_{0m}|^2 + Ct] = C(t);\ \forall\, t \in (0, T_m),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega (|\phi_m|^2 + \delta|c_m|^2)\,dx \leqslant C(t) \leqslant C(T_m).$$

Portanto,

$$||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C.$$

□

Assim, de posse desse resultado, aplicando o Lema 2.9 concluímos que $T_m = +\infty$. Então, t pertence a um intervalo fixo $[0, T]$ e a constante C do resultado anterior não depende de m. Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado que apresenta importantes estimativas. Note que algumas delas já são conhecidas e que neste problema também conseguimos obtê-las.

Lema 5.3. *As seguintes estimativas são válidas:*

$$||\phi_m||_{L^4(Q_T)} \leqslant C, \tag{5.10}$$

$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^2(0,T;H^1(\Omega)))^2} \leqslant C, \tag{5.11}$$

$$||(c_m, \phi_m)||_{(L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2} \leqslant C, \tag{5.12}$$

$$\left|\left|\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right)\right|\right|_{(L^2(0,T;V'))^2} \leqslant C, \tag{5.13}$$

onde C é uma constante positiva que independe de m.

Demonstração. Voltando a equação (5.9), note que esta é equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \right. &+ \left. \delta||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right) + \varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta D_s||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ (1-\gamma)||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)} \leqslant C\left(1 + ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Integrando de $(0, r)$ com $r \in [0, T]$, e usando (5.6)

$$\begin{aligned}&\left(||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta||c_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}\right) - \left(||\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta||c_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+\varepsilon^2\int_0^r ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^r \delta D_s||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + (1-\gamma)\int_0^r ||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}\,dt \\ &\leqslant C\,(r + Cr)\,.\end{aligned}$$

Tomando o supremo essencial para todo $r \in [0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \delta D_s||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ &+ (1-\gamma)\int_0^T ||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}\,dt \leqslant C(T), \\ \varepsilon^2\int_0^T ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &+ \int_0^T \delta D_s||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt \\ +\int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt &+ (1-\gamma)\int_0^T ||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}\,dt \\ \leqslant C(T) &+ \int_0^T ||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \int_0^T ||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt,\end{aligned}$$

usando (5.6) novamente e tomando $C = \max\{C(T), \varepsilon^2, \delta D_s, 1-\gamma\}$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)dt + &\int_0^T \left(||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)dt \\ &+ \int_0^T ||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}\,dt \leqslant C \\ ||\phi_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} &+ ||c_m||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_m||^4_{L^4(Q_T)} \leqslant C.\end{aligned}$$

Logo, obtemos (5.10) e (5.11).

E, tomando em (5.6) o supremo essencial obtemos (5.12), ou seja

$$\sup_{t\in[0,T]} ess\left(||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant C.$$

Finalmente, vamos obter a estimativa (5.13). Como pelo Teorema 1.10 segue que $V = H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, com $1 \leqslant q < 6$, assim existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||u||_V \text{ e } ||u||_{L^4(\Omega)} \leqslant C||u||_V \text{ para todo } u \in L^q(\Omega). \tag{5.14}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a\phi_m v\,dx + \int_\Omega b\phi_m^2 v\,dx - \int_\Omega \phi_m^3 v\,dx \\
&\leqslant \int_\Omega |a\phi_m v|\,dx + \int_\Omega |b\phi_m^2 v|\,dx + \int_\Omega |\phi_m^3 v|\,dx \\
&\leqslant \left(||a||_{L^\infty(Q_T)}||\phi_m||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + ||b||_{L^\infty(Q_T)}||\phi_m^2||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m^3||_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)}||v||_{L^4(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

tomando uma constante positiva como sendo o $\max\{||a||_{L^\infty(Q_T)}, ||b||_{L^\infty(Q_T)}, 1\}$, e usando (5.14) em

$$||\phi_m^2||_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\phi_m^2|^2\,dx = \int_\Omega |\phi_m|^4\,dx = ||\phi_m||_{L^4(\Omega)} \leqslant C||\phi_m||_V$$

e

$$||\phi_m^3||_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)} = \int_\Omega |\phi_m^3|^{\frac{4}{3}}\,dx = \int_\Omega |\phi_m|^4\,dx = ||\phi_m||_{L^4(\Omega)} \leqslant C||\phi_m||_V,$$

logo, usando novamente (5.14),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a\phi_m v\,dx + \int_\Omega b\phi_m^2 v\,dx &- \int_\Omega \phi_m^3 v\,dx \\
&\leqslant C||v||_V\left(||\phi_m||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m||_{L^4(\Omega)} + ||\phi_m||_{L^4(\Omega)}\right) \\
&\leqslant C||v||_V\left(||\phi_m||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m||_{H^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Assim, da primeira equação do Problema 5.5, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'} &\leqslant \varepsilon^2||\nabla\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)} + C\left(||\phi_m||_{L^2(\Omega)} + ||\phi_m||_{H^1(\Omega)}\right) + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)} \\
\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|_{V'}^2 &\leqslant C\left(||\phi_m(t)||_{H^1(\Omega)}^2 + ||c_m(t)||_{L^2(\Omega)}^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando a equação acima, obtemos da estimativa (5.11), que

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(0,T;V')}^2 \leqslant C.$$

Da mesma forma como no Lema 2.11, obtemos que

$$\left\| \frac{\partial c_m}{\partial t} \right\|^2_{L^2(0,T;V')} \leqslant C.$$

Logo segue (5.13).

Portanto, segue o resultado.

□

5.1.2 Convergências

De posse das estimativas da seção anterior, conseguimos analogamente como na Seção 2.1.4 (veja p.42) as seguintes convergências:

$$(c_m, \phi_m) \rightarrow (c, \phi) \text{ em } (L^2(Q_T))^2 \cap (C([0,T], V'))^2 \tag{5.15}$$

$$(c_m, \phi_m) \rightharpoonup (c, \phi) \text{ em } (L^2(0,T; H^1(\Omega)))^2 \tag{5.16}$$

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t}, \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \right) \rightharpoonup \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \text{ em } (L^2(0,T;V'))^2, \tag{5.17}$$

onde $c, \phi \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;V')$.

Agora para concluir o teorema vamos passar o limite na primeira equação do problema aproximado (5.5), e obter a equação (5.3). Para equação (5.4), como temos convergências semelhantes com as da Seção 2.1.4, obtemos ela como na Seção 2.1.5 (veja p.47).

A equação do problema (5.5) que vamos passar limite é equivalente a

$$\begin{aligned} \int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v \, dx \, dt \quad &+ \quad \varepsilon^2 \int_0^T \beta \int_\Omega \nabla \phi_m \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ &- \quad \int_0^T \beta \int_\Omega (a\phi_m + b\phi_m^2 - \phi_m^3 + c_m F_2(\phi_m)) v \, dx \, dt = 0, \end{aligned} \tag{5.18}$$

para todo $v \in V_m$ e $\beta \in D = D(0,T)$.

Da Seção 2.1.5 valem as seguintes convergências quando $m \rightarrow +\infty$

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t} v \, dx \, dt \rightarrow \left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{5.19}$$

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \nabla \phi_m \nabla v \, dx \, dt \rightarrow \left\langle \int_\Omega \nabla \phi \nabla v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{5.20}$$

$$\int_0^T \beta \int_\Omega c_m F_2(\phi_m) v \, dx \, dt \rightarrow \left\langle \int_\Omega c F_2(\phi) v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}. \tag{5.21}$$

Vamos obter agora uma convergência para o termo

$$\int_0^T \beta \int_\Omega (a\phi_m + b\phi_m^2 - \phi_m^3) v \, dx \, dt$$

$$= \int_0^T \beta \int_\Omega a\phi_m v \, dx \, dt + \int_0^T \beta \int_\Omega b\phi_m^2 v \, dx \, dt - \int_0^T \beta \int_\Omega \phi_m^3 v \, dx \, dt.$$

Em (5.15) temos que $\phi_m \to \phi$ em $L^2(Q_T)$, daí, segue que $\phi_m \rightharpoonup \phi$ em $L^2(Q_T)$, então para todo $\psi \in L^2(Q_T)$,

$$\int_0^T \int_\Omega \phi_m \psi \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \phi\psi \, dx \, dt,$$

com $m \to +\infty$. Como $a \in L^\infty(Q_T)$, $a\psi \in L^2(Q_T)$. Do fato de $\beta v \in L^2(Q_T)$ segue que

$$\int_0^T \beta \int_\Omega a\phi_m v \, dx \, dt \to \int_0^T \beta \int_\Omega a\phi v \, dx \, dt = \left\langle \int_\Omega a\phi v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{5.22}$$

para todo $\beta \in D(0,T)$.

Ainda de (5.15) temos $\phi_m \to \phi$ em $L^2(Q_T)$, passando a uma subsequência e usando a mesma notação temos $\phi_m \to \phi$ q.t.p. em Q_T, daí $\phi_m^2 \to \phi^2$ q.t.p em Q_T, observe que, usando a estimativa (5.10),

$$\begin{aligned} ||\phi_m^2||^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T ||\phi_m^2(t)||^2_{L^2(\Omega)} \, dt = \int_0^T \int_\Omega |\phi_m^2(t)|^2 \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega |\phi_m(t)|^4 \, dx \, dt = \int_0^T ||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)} \, dt \\ &= ||\phi_m||^4_{L^4(Q_T)} \leqslant C. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.6 concluímos que

$$\phi_m^2 \rightharpoonup \phi^2 \text{ em } L^2(Q_T).$$

Assim para todo $\psi \in L^2(Q_T)$, como $b \in L^\infty(Q_T)$, segue que $b\psi \in L^2(Q_T)$, então

$$\int_0^T \int_\Omega b\phi_m^2 \psi \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega b\phi^2 \psi \, dx \, dt.$$

Como $\beta v \in L^2(Q_T)$,

$$\int_0^T \beta \int_\Omega b\phi_m^2 v \, dx \, dt \to \int_0^T \beta \int_\Omega b\phi^2 v \, dx \, dt = \left\langle \int_\Omega b\phi^2 v \, dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \tag{5.23}$$

para toda $\beta \in D(0,T)$.

Finalmente de (5.15), temos que $\phi_m^3 \to \phi^3$ q.t.p em Q_T, e usando (5.10)

$$\begin{aligned} ||\phi_m^3||_{L^{\frac{4}{3}}(Q_T)}^{\frac{4}{3}} &= \int_{Q_T} |\phi_m^3(t)|^{\frac{4}{3}}\,dx\,dt = \int_{Q_T} |\phi_m(t)|^4\,dx\,dt \\ &= ||\phi_m||_{L^4(Q_T)}^4 \leqslant C. \end{aligned}$$

Logo aplicando a Proposição 1.6 concluímos que

$$\phi_m^3 \rightharpoonup \phi^3 \text{ em } L^{\frac{4}{3}}(Q_T).$$

Assim para todo $\psi \in L^4(Q_T)$,

$$\int_0^T \int_\Omega \phi_m^3 \psi\,dx\,dt \to \int_0^T \int_\Omega \phi^3 \psi\,dx\,dt.$$

Observando que $\beta v \in L^4(Q_T)$, pois $v \in V_m \subset L^4(\Omega)$

$$\int_0^T \beta \int_\Omega \phi_m^3 v\,dx\,dt \to \int_0^T \beta \int_\Omega \phi^3 v\,dx\,dt = \left\langle \int_\Omega \phi^3 v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D}, \qquad (5.24)$$

para toda $\beta \in D(0,T)$.

Agora, usando (5.19)-(5.21), (5.22), (5.23) e (5.24), passando o limite com $m \to +\infty$ na equação (5.18), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V}, \beta \right\rangle_{D',D} &+ \varepsilon^2 \left\langle \int_\Omega \nabla\phi \nabla v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} - \left\langle \int_\Omega a\phi v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} \\ -\left\langle \int_\Omega b\phi^2 v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} &+ \left\langle \int_\Omega \phi^3 v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} - \left\langle \int_\Omega cF_2(\phi) v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0 \end{aligned}$$

$$\left\langle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi\nabla v\,dx - \int_\Omega \big(a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + cF_2(\phi)\big)\,v\,dx, \beta \right\rangle_{D',D} = 0$$

para todo $\beta \in D(0,T)$. Logo, pela Proposição 1.19

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, v \right\rangle_{V',V} + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi\nabla v\,dx - \int_\Omega \big(a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + cF_2(\phi)\big)\,v\,dx = 0,$$

para todo $v \in V_m$ e q.t.p. em $(0,T)$. E pela densidade de $\displaystyle\bigcup_{m \geqslant 1} V_m$ em $H^1(\Omega)$ (2.47), segue que, a equação acima vale para todo $v \in H^1(\Omega)$.

Assim, concluímos a demonstração do Teorema 5.1.

5.2 Unicidade da Solução

Nesta seção provaremos a unicidade de solução do Problema 5.1. Primeiramente provaremos um resultado que nos fornece mais regularidade para a solução do problema, para assim obter a unicidade.

5.2.1 Existência com Regularidade

Teorema 5.4. *Para qualquer $(\phi_0, c_0) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $T > 0$, considerando $\phi_0 \in L^4(\Omega)$, existem*

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$

tais que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta\phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + c\, F_2(\phi), \quad q.t.p \text{ em } Q_T, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \quad q.t.p \text{ em } Q_T, \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad q.t.p. \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T). \tag{5.27}$$

Demonstração. Para a demonstração desse Teorema utilizaremos o método de Faedo-Galerkin, como anteriormente. Para tal precisamos de mais estimativas para a sequência ϕ_m. A existência de $c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ e a validade das equações (5.26) e (5.27), segue analogamente a demonstração do Teorema 3.1.

No lema que segue, obtemos as estimativas para a (ϕ_m). Vamos considerar o problema aproximado (5.5) e as hipóteses do início desse capítulo.

Lema 5.5. *São válidas as seguintes estimativas, com $C > 0$ constante*

$$\left|\left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\right|\right|_{L^2(Q_T)} + ||\phi_m||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C, \tag{5.28}$$

$$||\phi_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C. \tag{5.29}$$

Demonstração. Considerando a primeira equação do problema aproximado (5.5), tomando $v = \dfrac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \quad + \quad \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx \\ &= \int_\Omega (a(x,t)\phi_m(t) \quad + \quad b(x,t)(\phi_m(t))^2 - (\phi_m(t))^3 + c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\, \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t)\, dx.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Do Capítulo 2 temos de (2.60) e (2.62) que

$$\int_\Omega \nabla\phi_m(t)\nabla\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \tag{5.31}$$

e, para todo $\eta_2 > 0$

$$\int_\Omega c_m(t)F_2(\phi_m(t)))\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx \leqslant \eta_2 M_2\int_\Omega |c_m|^2\,dx + \frac{M_2}{4\eta_2}\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2\,dx. \tag{5.32}$$

Analizando o termo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(a(x,t)\phi_m(t) + b(x,t)(\phi_m(t)^2) - (\phi_m(t)^3)\right)\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx\\
=\ &\int_\Omega a(x,t)\phi_m(t)\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx + \int_\Omega b(x,t)(\phi_m(t))^2\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx - \int_\Omega(\phi_m(t))^3\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx,
\end{aligned}$$

observe que

$$\int_\Omega(\phi_m(t))^3\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx = \frac{1}{4}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_m(t)\right)^4\,dx$$

assim a equação (5.30) implica em

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx \quad &+ \quad \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx\\
&= \quad \int_\Omega a(x,t)\phi_m(t)\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx + \int_\Omega b(x,t)(\phi_m(t))^2\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx\\
&- \quad \frac{1}{4}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_m(t)\right)^4\,dx + \int_\Omega c_m(t)F_2(\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx,
\end{aligned}$$

integrando de $(0,r)$ com $r\in(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^r\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2 dx\,dt + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^r\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx\,dt\\
=\ &\int_0^r\int_\Omega a(x,t)\phi_m(t)\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx\,dt + \int_0^r\int_\Omega b(x,t)(\phi_m(t))^2\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx\,dt\\
&-\frac{1}{4}\int_0^r\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_m(t)\right)^4\,dx\,dt + \int_0^r\int_\Omega c_m(t)F_2(\phi_m(t))\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young (1.13), para todo $\delta_1,\delta_2 > 0$, pelo Teorema de Fubini, e por (5.32),

$$\begin{aligned}
&\int_0^r\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} - ||\nabla\phi_m(0)||^2_{L^2(\Omega)}\right)\\
\leqslant\ &||a||^2_{L^2(Q_T)}\int_0^r\left(\delta_1\int_\Omega|\phi_m(t)|^2\,dx + \frac{1}{8\delta_1}\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2\,dx\right)dt
\end{aligned}$$

$$+\,||b||^2_{L^2(Q_T)}\int_0^r\left(\delta_2\int_\Omega|(\phi_m(t))^2|^2\,dx+\frac{1}{8\delta_2}\int_\Omega\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|^2\,dx\right)\,dt$$
$$-\frac{1}{4}\int_\Omega\int_0^r\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_m(t)\right)^4\,dt\,dx+\eta_2M_2\int_0^r||c_m||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\frac{M_2}{4\eta_2}\int_0^r\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

tomando $\delta_1=||a||^2_{L^2(Q_T)}+1$, $\delta_2=||b||^2_{L^2(Q_T)}+1$ e $\eta_2=M_2$,

$$\int_0^r\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\varepsilon^2\left(||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}-||\nabla\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$\leqslant 2||a||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^r||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\,2||b||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^r||\phi_m(t)||^4_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$-\frac{1}{2}\int_\Omega(\phi_m(r))^4\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega(\phi_m(0))^4dx+2M_2^2\int_0^r||c_m||^2_{L^2(\Omega)}\,dt.$$

Observe que: $||p_m\phi_0||_{L^2(\Omega)}=||\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)}\leqslant||\phi_0||_{L^2(\Omega)}$ e pelo Lema 2.14, $||\nabla\phi_{0m}||_{L^2(\Omega)}\leqslant||\nabla\phi_0||_{L^2(\Omega)}$, logo somando essas desigualdades

$$||\phi_{0m}||_{H^1(\Omega)}\leqslant||\phi_0||_{H^1(\Omega)}. \tag{5.33}$$

Como $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$,

$$\int_\Omega(\phi_m(0))^4dx\leqslant||\phi_{0m}||_{L^4(\Omega)}\leqslant||\phi_{0m}||_{H^1(\Omega)}\leqslant||\phi_0||_{H^1(\Omega)}. \tag{5.34}$$

Observando também que $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega(\phi_m(r))^4\,dx\leqslant 0$, para todo $r\in[0,T]$, então

$$\int_0^r\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\varepsilon^2\left(||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}-||\nabla\phi_{0m}||^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$\leqslant\;2||a||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^r||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\,2||b||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^r||\phi_m(t)||^4_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\,||\phi_0||_{H^1(\Omega)}+2M_2^2\int_0^r||c_m||^2_{L^2(\Omega)}\,dt,$$

agora fazendo o $\sup_{r\in(0,T)}ess$ da equação acima e por (5.33), obtemos

$$\int_0^T\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\varepsilon^2\sup_{r\in(0,T)}ess||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqslant\;2||a||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^T||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\,2||b||^4_{L^2(Q_T)}\int_0^T||\phi_m(t)||^4_{L^2(\Omega)}\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\,||\phi_0||_{H^1(\Omega)}+2M_2^2\int_0^T||c_m||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\varepsilon^2||\nabla\phi_0||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando por uma contante positiva o

$$\max\left\{2||a||^4_{L^2(Q_T)}, 2||b||^4_{L^2(Q_T)}, \frac{1}{2}\,||\phi_0||_{H^1(\Omega)}, 2M_2^2, \varepsilon^2, \varepsilon^2||\nabla\phi_0||^2_{L^2(\Omega)}\right\}$$

e usando (5.10) e (5.11), existe $C > 0$, tal que

$$\int_0^T \left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}(t)\right|\right|^2_{L^2(\Omega)} dt + \sup_{r\in(0,T)} ess||\nabla\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C.$$

Somando essa equação por $\sup_{r\in(0,T)} ess||\phi_m(r)||^2_{L^2(\Omega)}$, que é limitada por (5.12),

$$\left|\left|\frac{\partial\phi_m}{\partial t}\right|\right|^2_{L^2(Q_t)} + ||\phi_m||^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C.$$

Daí segue (5.28).

Agora, tomando na primeira equação do problema aproximado (5.5) $v = -\Delta\phi_m(t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx \\
= & -\int_\Omega \left(a(x,t)\phi_m(t) + b(x,t)(\phi_m(t))^2 - (\phi_m(t))^3\right)\Delta\phi_m(t)\,dx \\
& -\int_\Omega F_2(\phi_m(t))c_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx \\
= & -\int_\Omega a(x,t)\phi_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx - \int_\Omega b(x,t)(\phi_m(t))^2\Delta\phi_m(t)\,dx \\
& +\int_\Omega (\phi_m(t))^3\Delta\phi_m(t)\,dx - \int_\Omega F_2(\phi_m(t))c_m(t)\Delta\phi_m(t)\,dx.
\end{aligned}$$

Observe que pela Fórmula de Green (1.2)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\phi_m(t))^3\Delta\phi_m(t)\,dx &= -\int_\Omega \nabla(\phi_m(t))^3\nabla\phi_m(t)\,dx + \int_{\partial\Omega}(\phi_m(t))^3\frac{\partial\phi_m}{\partial n}(t)\,ds \\
&= -3\int_\Omega \phi_m(t)^2\nabla\phi_m(t)\nabla\phi_m(t)\,dx \\
&= -3\int_\Omega \phi_m(t)^2|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx \leqslant 0,
\end{aligned}$$

logo, pela Desigualdade de Young (1.13) tomando $\delta_1, \delta_2, \eta_2 > 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi_m(t)|^2\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi_m(t)|^2\,dx$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant\ & ||a||^2_{L^2(Q_T)}\left(\delta_1\int_\Omega|\phi_m(t)|^2\,dx+\frac{1}{8\delta_1}\int_\Omega|\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right)\\
&+||b||^2_{L^2(Q_T)}\left(\delta_2\int_\Omega|(\phi_m(t))^2|^2\,dx+\frac{1}{8\delta_2}\int_\Omega|\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right)\\
&M_2\left(\eta_2\int_\Omega|c_m(t)|^2\,dx+\frac{1}{4\eta_2}\int_\Omega|\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\right),
\end{aligned}
$$

tomando $\delta_1=\dfrac{||a||^2_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^2}$, $\delta_2=\dfrac{||b||^2_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^2}$ e $\eta_2=\dfrac{M^2}{\varepsilon^2}$, então

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\phi_m(t)|^2\,dx+\varepsilon^2\int_\Omega|\Delta\phi_m(t)|^2\,dx\ &\leqslant\ \frac{||a||^4_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^2}\,||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{||b||^4_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^2}\,||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}\ +\ \frac{M_2^2}{\varepsilon^2}\,||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Considerando $C=\max\left\{\dfrac{||a||^4_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^4},\dfrac{||b||^4_{L^2(Q_T)}}{\varepsilon^4},\dfrac{M_2^2}{\varepsilon^4}\right\}$, obtemos

$$
||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\ \leqslant\ C\left(||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\phi_m(t)||^4_{L^4(\Omega)}+||c_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right).
$$

Integrando de $(0,r)$ com $r\in(0,T)$ e depois fazendo o $\sup_{r\in[0,T]}ess$ e usando (5.10) e (5.11) obtemos

$$
||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\leqslant C. \tag{5.35}
$$

Agora, tomando $k=0$ no Teorema 1.25 temos que

$$
||\phi_m(t)||_{H^2(\Omega)}\leqslant C\left(||\Delta\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}+||\phi_m(t)||_{L^2(\Omega)}\right),
$$

integrando essa equação de $(0,T)$

$$
\int_0^T||\phi_m(t)||^2_{H^2(\Omega)}\,dt\leqslant C\left(\int_0^T||\Delta\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt+\int_0^T||\phi_m(t)||^2_{L^2(\Omega)}\,dt\right),
$$

e por (5.12) e (5.35), obtemos

$$
||\phi_m(t)||^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\leqslant C;
$$

daí segue (5.29).

Portanto segue o resultado do lema.

□

Continuando a demonstração do Teorema 5.4, analogamente à Seção 2.2.2 obtemos

$$
\phi\in L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \tag{5.36}
$$

e existem subsequências de ϕ_m tais que

$$\phi_m \to \phi \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{5.37}$$

e

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi}{\partial t} \ \text{ em } \ L^2(Q_T). \tag{5.38}$$

Agora, vamos mostrar que fazendo o limite na equação

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t) v\, dx + \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla \phi_m(t) \nabla v\, dx \\ = \ & \int_\Omega (a(x,t)\phi_m(t) + b(x,t)(\phi_m(t))^2 - (\phi_m(t))^3 + c_m(t) F_2(\phi_m(t)))\, v\, dx, \end{aligned} \tag{5.39}$$

para todo $v \in V_m$, obtemos a equação (5.25).

Primeiramente observe que a equação acima é equivalente à

$$\begin{aligned} & \int_0^T \beta \int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial t}(t) v\, dx\, dt + \varepsilon^2 \int_0^T \beta \int_\Omega \nabla \phi_m(t) \nabla v\, dx\, dt \\ = \ & \int_0^T \beta \int_\Omega (a(x,t)\phi_m(t) + b(x,t)(\phi_m(t))^2 - (\phi_m(t))^3 + c_m(t) F_2(\phi_m(t)))\, v\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{5.40}$$

para todos $v \in V_m$ e $\beta \in D(0,T)$.

Seguindo como na Seção 2.2.3 temos as convergências, com $m \to +\infty$ e para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\int_{Q_T} \frac{\partial \phi_m}{\partial t} \psi\, dx\, dt \ \to \ \int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} \psi\, dx\, dt, \tag{5.41}$$

$$\int_{Q_T} \nabla \phi_m \cdot \nabla \psi\, dx\, dt \ \to \ -\int_{Q_T} \nabla \phi\, \psi\, dx\, dt, \tag{5.42}$$

$$\int_{Q_T} c_m F_2(\phi_m)\, \psi\, dx\, dt \ \to \ \int_{Q_T} c\, F_2(\phi)\, \psi\, dx\, dt. \tag{5.43}$$

Agora vamos analizar a convergência do termo

$$\int_{Q_T} (a(x,t)\phi_m(t) + b(x,t)(\phi_m(t))^2 - (\phi_m(t))^3 + c_m(t) F_2(\phi_m(t)))\, v\, dx\, dt \tag{5.44}$$

De (5.37) segue que $\phi_m \rightharpoonup \phi$ em $L^2(Q_T)$ então, para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\int_{Q_T} \phi_m \psi\, dx\, dt \to \int_{Q_T} \phi\, \psi\, dx\, dt.$$

Como $a \in L^\infty(Q_T)$ temos

$$\int_{Q_T} a\,\phi_m\,\psi\,dx\,dt \to \int_{Q_T} a\,\phi\,\psi\,dx\,dt. \tag{5.45}$$

Agora de (5.37) segue que $\phi_m \to \phi$ em $L^2(Q_T)$, logo passando a uma subsequência temos $\phi_m \to \phi$ q.t.p em Q_T, então $\phi_m^2 \to \phi^2$ q.t.p em Q_T, e por (5.10)

$$||\phi_m^2||^2_{L^2(Q_T)} = ||\phi_m||^4_{L^4(Q_T)} \leqslant C,$$

então pela Proposição 1.6, segue que $\phi_m^2 \rightharpoonup \phi^2$ em $L^2(Q_T)$.

Então, para todo $\psi \in L^2(Q_T)$,

$$\int_{Q_T} \phi_m^2 \psi\,dx\,dt \to \int_{Q_T} \phi^2\,\psi\,dx\,dt,$$

como $b \in L^\infty(Q_T)$ temos

$$\int_{Q_T} b\,\phi_m^2\,\psi\,dx\,dt \to \int_{Q_T} b\,\phi^2\,\psi\,dx\,dt. \tag{5.46}$$

Finalmente, também por (5.37) segue que $\phi_m^3 \to \phi^3$ q.t.p. em Q_T, e por (5.10)

$$||\phi_m^3||^{\frac{4}{3}}_{L^{\frac{4}{3}}(Q_T)} = ||\phi_m||^4_{L^4(Q_T)} \leqslant C,$$

logo, pela Proposição 1.6, segue que $\phi_m^3 \rightharpoonup \phi^3$ em $L^{\frac{4}{3}}(Q_T)$.

Assim, para todo $\psi \in L^4(Q_T) \subset L^2(Q_T)$,

$$\int_{Q_T} \phi_m^3\,\psi\,dx\,dt \to \int_{Q_T} \phi^3\,\psi\,dx\,dt. \tag{5.47}$$

Então, fazendo o limite com $m \to +\infty$, da equação (5.44), obtemos para todo $\psi \in L^2(Q_T)$

$$\int_{Q_T} a\,\phi\,\psi\,dx\,dt + \int_{Q_T} b\,\phi^2\,\psi\,dx\,dt - \int_{Q_T} \phi^3\,\psi\,dx\,dt = \int_{Q_T} \left(a\,\phi + b\,\phi^2 - \phi^3\right)\psi\,dx\,dt.$$

Agora fazendo o limite com $m \to +\infty$, da equação (5.40), tomando $\psi = \beta\,v$ com $\beta \in D(0,T)$ e $v \in V_m$, obtemos

$$\int_{Q_T} \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\beta\,v\,dx\,dt - \varepsilon^2 \int_{Q_T} \Delta\phi\,\beta\,v\,dx\,dt = \int_{Q_T} \left(a\,\phi + b\,\phi^2 - \phi^3 + c\,F_2(\phi)\right)\beta\,v\,dx\,dt,$$

isto é,

$$\int_{Q_T} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \varepsilon^2\,\Delta\phi - a\,\phi - b\,\phi^2 + \phi^3 - c\,F_2(\phi)\right)\beta\,v\,dx\,dt = 0,$$

para todos $\beta \in D(0,T)$ e $v \in V_m$.

Pela densidade de $\bigcup_{m\geqslant 1} V_m$ em $L^2(\Omega)$ (2.46), a equação acima segue para todo $v \in L^2(\Omega)$. Agora aplicando a Proposição 1.19 obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta\phi - a\,\phi - b\,\phi^2 + \phi^3 - c\,F_2(\phi) = 0$$

q.t.p em Q_T.

Daí segue a equação (5.25).

Como valem as estimativas do Lema 5.5, obtemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{q.t.p. sobre } \partial\Omega \times (0,T)$$

analogamente ao Lema 2.18, e a equação (5.26) e a sua respectiva condição de contorno segue como na demonstração do Teorema 3.1.

Portanto vale o Teorema 5.4. □

5.2.2 Resultado de Unicidade

Nesta seção mostraremos a unicidade da solução através do seguinte resultado:

Teorema 5.6. *Para algum $T > 0$, existe um único par de funções (ϕ, c) satisfazendo*

$$\phi \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$c \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$

tais que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + c\,F_2(\phi), \quad \textit{q.t.p em } Q_T, \tag{5.48}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D_1(\phi)\nabla c + D_2(c,\phi)\nabla\phi) \quad \textit{q.t.p em } Q_T, \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \textit{q.t.p. sobre } \partial\Omega \times (0,T). \tag{5.50}$$

Demonstração. Vamos usar nessa demonstração a mesma técnica da Seção 3.2.

Suponhamos que (ϕ_1, c_1) e (ϕ_2, c_2) são soluções de (5.48), então

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi_1 = a\phi_1 + b\phi_1^2 - \phi_1^3 + c_1\,F_2(\phi_1)$$

e

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi_2 = a\phi_2 + b\phi_2^2 - \phi_2^3 + c_2\,F_2(\phi_2).$$

Subtraindo essas equações e considerando $\phi = \phi_2 - \phi_1$ e $c = c_2 - c_1$ obtemos

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi = a\phi + b(\phi_2^2 - \phi_1^2) - \phi_2^3 + \phi_1^3 + c_2\,F_2(\phi_2) - c_1\,F_2(\phi_1),$$

somando e subtraindo no segundo termo $c_2F_2(\phi_1)$,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \varepsilon^2\Delta\phi = a\phi + b(\phi_2^2 - \phi_1^2) - \phi_2^3 + \phi_1^3 + F_2(\phi_1)\,c + c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1)), \quad (5.51)$$

multiplicando por ϕ e integrando em Ω,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}\phi\,dx - \varepsilon^2\int_\Omega \Delta\phi\,\phi\,dx &= \int_\Omega a\phi\,\phi\,dx + \int_\Omega b(\phi_2^2 - \phi_1^2)\phi\,dx \\ + \int_\Omega(-\phi_2^3 + \phi_1^3)\phi\,dx &+ \int_\Omega F_2(\phi_1)\,c\,\phi\,dx + \int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\phi\,dx\end{aligned}$$

Note que:

$$\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}(t)\phi(t)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \Delta\phi(t)\,\phi(t)\,dx &= ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}, \\ \int_\Omega F_2(\phi_1(t))c(t)\phi(t)\,dx &\leqslant \frac{M_2}{2}\left(||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \\ \int_\Omega c_2(t)(F_2(\phi_2(t)) - F_2(\phi_1(t)))\phi(t)\,dx &\leqslant k_2\,||c_2(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Agora vamos estimar os outros termos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,t)(\phi(t))^2\,dx &\leqslant ||a||_{L^2(Q_T)}||\phi||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\phi||^2_{L^2(\Omega)}, \\ \int_\Omega b(x,t)((\phi_2(t))^2 - (\phi_1(t))^2)\phi\,dx &= \int_\Omega b(x,t)(\phi_2(t) + \phi_1(t))(\phi_2(t) - \phi_1(t))\phi\,dx \\ &= \int_\Omega b(x,t)(\phi_2(t) + \phi_1(t))\phi^2\,dx \\ &\leqslant ||b||_{L^2(Q_T)}\Big(||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\phi||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + ||\phi_1||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\phi||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \leqslant C||\phi||^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(-(\phi_2(t))^3 + (\phi_1(t))^3)\phi(t)\,dx \\ = &\int_\Omega(\phi_1(t) - \phi_2(t))((\phi_1(t))^2 + \phi_1(t)\phi_2(t) + (\phi_2(t))^2)\phi(t)\,dx \\ = &\int_\Omega(-\phi(t))((\phi_1(t))^2 + \phi_1(t)\phi_2(t) + (\phi_2(t))^2)\phi(t)\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_\Omega (\phi(t))^2(\phi_1(t))^2\,dx - \int_\Omega (\phi(t))^2\phi_1(t)\phi_2(t)\,dx - \int_\Omega (\phi(t))^2(\phi_2(t))^2)\,dx \\
&\leqslant \int_\Omega |\phi(t)|^2|\phi_1(t)||\phi_2(t)|\,dx \leqslant ||\phi_1||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{M_2}{2}\Big(||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\
&+ C\left(||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}||\phi(t)||_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

usando a Desigualdade Young (1.13), obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\Big(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)}\Big). \quad (5.52)$$

Agora multiplicando (5.51) por $-\Delta\phi$ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta\phi\,dx + \varepsilon^2\int_\Omega |\Delta\phi|^2\,dx &= -\int_\Omega a\phi\Delta\phi\,dx - \int_\Omega b(\phi_2^2 - \phi_1^2)\Delta\phi\,dx \\
&- \int_\Omega (-\phi_2^3 + \phi_1^3)\Delta\phi\,dx - \int_\Omega F_2(\phi_1)\,c\,\Delta\phi\,dx - \int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\Delta\phi\,dx
\end{aligned}$$

Note que

$$-\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta\phi\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$-\int_\Omega F_2(\phi_1)\,c\,\Delta\phi\,dx \leqslant M_2||c(t)||_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega c_2(F_2(\phi_2) - F_2(\phi_1))\Delta\phi\,dx &\leqslant k_2||c_2(t)||_{L^4(\Omega)}||\phi(t)||_{L^4(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant C\left(||\phi(t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||_{L^2(\Omega)}\right)||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Agora estimando os outros termos, obtemos:

$$-\int_\Omega a(x,t)\phi(t)\Delta\phi(t)\,dx \leqslant ||a||_{L^\infty(Q_T)}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega b(x,t)((\phi_2(t))^2 - (\phi_1(t))^2)\Delta\phi(t)\,dx \\
&= -\int_\Omega b(x,t)(\phi_2(t) - \phi_1(t))(\phi_2(t) + \phi_1(t))\Delta\phi(t)\,dx \\
&\leqslant ||b||_{L^\infty(Q_T)}||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\left(||\phi_2||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_1||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\right) \\
&\leqslant C||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega ((\phi_2(t))^3 - (\phi_1(t))^3)\Delta\phi(t)\, dx \\
= \; & \int_\Omega (\phi_2(t) - \phi_1(t))((\phi_2(t))^2 + \phi_2\phi_1 + (\phi_1(t))^2)\Delta\phi(t)\, dx \\
\leqslant \; & \big(||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_2||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}||\phi_1||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + ||\phi_1||_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\big) \\
& ||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant \; & C||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}||\Delta\phi(t)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando a Desigualdade de Young, obtemos a seguinte estimativa

$$
\frac{d}{dt}||\nabla\phi||^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2||\Delta\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(||\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||c(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla\phi(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right)
$$

Agora considerando a validade do Lema 3.10 e fazendo como na Seção 3.2.2, concluímos esse resultado.

Portanto, a solução é única. □

Considerações Finais

Com este trabalho conseguimos, através do Método de Faedo-Galerkin, provar a existência de solução para dois modelos de campo de fase no processo de solidificação isotérmica. Em um primeiro caso, com hipóteses específicas sobre os termos não lineares, e em um segundo caso com uma caracterização, bem utilizada para termos não lineares, o *Double-Well Potential*.

Em ambos os casos provamos a existência de solução fraca e a unicidade desta solução. E no primeiro caso conseguimos a existência de solução com maior regularidade.

Futuramente prentendemos estudar esses modelos através de análise numérica, e com isso simular problemas práticos.

Referências Bibliográficas

[1] ARAUJO, A. L. A. **Análise Matemática de um Modelo de Controle de População de Mosquitos.** Campinas: UNICAMP, Dissertação de Mestrado, 2008.

[2] ASSUNÇÃO, W. V. **Análise Matemática e Controle Ótimo de um Modelo para Solifidicação.** Campinas: UNICAMP, Dissertação de Mestrado, 2007.

[3] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Spinger, 2011.

[5] CAVALCANTI, M. M. & CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.

[6] CODDINGTON, E.A; LEVINSON, N. **Theory of ordinary differential equations**. New York: McGraw-Hill Book Company. Inc, 1955.

[7] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. University of California, Berkeley, 1998.

[8] FIGUEIREDO, D. G. & NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1997.

[9] HENRY, D. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 840, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[10] HOFFMAN, K. H. & JIANG, L. **Optimal control of a phase field model for solidification**, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1 & 2), 1992, p.11-27.

[11] LADYZHENSKAYA, O., SOLONNIKOV, V., URALTSEVA, N., **Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type**, American Mathematical Society, 1968.

[12] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires**. Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[13] LIONS, J. L. & MAGENES, E. **Problemes aux Limites Non Homogenes et Applications**. Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[14] LIONS, J. L. & MAGENES, M. **Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications**. Vol. 1, Springer Verlag, 1972.

[15] MEDEIROS, L. A. da J; MIRANDA, M. A. M. **Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000

[16] MUJICA, J. **Notas de Análise Funcional.** Campinas: UNICAMP/IMECC, 2008.

[17] NARCISO, V. **Sobre um Sistema de Equaçõs do Tipo Timoshenko, Baseado na Equação de Carrier.** Maringá: UEM, Dissertação de Mestrado, 2003.

[18] PELLEGRINO, D. **Introdução à Análise Funcional.** João Pessoa: UFPB/Departamento de Matemática, 2007.

[19] RAPPAZ, J. & SCHEID, J. F. **Existence of Solucions to a Phase-field Model for the Isotermal Solidification Process of Binary Alloy**, *Mathematical Methods ih the Applied Sciences*, 23 (2000) 491-513.

[20] SIMON, J. **Compact sets in the space** $L^p(0,T;B)$, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **146**, 65-96 (1987).

[21] TEMAM. R. **Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis**. New york: American Mathematical Society, 2001.

[22] VAZ, C. L. D. & BOLDRINI, J. L. **A mathematical analysis of a nonisothermal Allen-Cahn type system**, *Mathematical Methods ih the Applied Sciences*, 35 (2012) 1392-1405.

[23] WARREN, J. A. & BOETTINGER, W. J. **Prediction of dendritic growth and microsegregation patterns in a binary alloy using the phase-field model**, *Acta Metall. Mater.*, 43(2) (1995) 689-703.