FLÁVIO GUILHERME DE ABREU DRUMOND

# SISTOLES EM SUPERFÍCIES GERADA PELA TESSELAÇÃO $\{8g-4, 4\}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA**
**MINAS GERAIS - BRASIL**
**2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

D795s
2015

Drumond, Flávio Guilherme de Abreu, 1990-
Sistoles em superfícies gerada pela tesselação {8g-4,4} / Flávio Guilherme de Abreu Drumond. - Viçosa, MG, 2015.
x, 83f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador : Mércio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.82-83.

1. Geometria hiperbólica. 2. Sistoles (Matemática). 3. Bers, Constante de. 4. Tesselação. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516

FLÁVIO GUILHERME DE ABREU DRUMOND

**SISTOLES EM SUPERFÍCIES GERADA PELA TESSELAÇÃO** $\{8g-4, 4\}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2015.

Vandenberg Lopes Vieira

Catarina Mendes de Jesus Sánchez

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais.*

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."

---

Marthin Luther King

# Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus por tudo que tem feito na minha vida e dos meus familiares, sem ele nada disso teria acontecido.

Quero agradecer aos meus pais, Fernando e Inácia, pela dedicação que me fez chegar até aqui, pelo carinho e amor fundamental e insubstituível nessa caminhada, meu herói e minha heroína. Essa conquista é de vocês.

Agradecer as minhas amadas irmãs, Vanessa e Amannda, que me deram coragem e incentivo para que pudesse encarar esse desafio.

Agradecer a toda minha família, pois sei que torceram por mim esse tempo todo, em especial minha querida vó, Maria Conceição (in memoriam), que lá no céu deve esta comemorando essa vitória.

Quero agradecer minha namorada, Márcia, pelo o apoio desde do primeiro momento, que mesmo estando tão longe me incentivou a todo instante.

Agradeço aos meus amigos de Araguaína em especial ao Edison e Onésimo pelo o incentivo. Ao pessoal da peladinha das sextas a noite em Viçosa, que me mostraram que eu jogo muito.

Agradeço ao pessoal da minha turma que hoje considero meus amigos: Lázaro, Lizeth, Dayane, Marcelo, Sabrina, Glelson e todos os outros que conviveram na salinha durante esses dois anos. Em especial a Cris que foi minha companheira de estudo, mão amiga no momentos difíceis, uma amizade para vida toda. Quero Agradecer ao secretário, João Marcos, pela paciência e destreza no seu trabalho.

Quero agradecer ao meu Orientador, Mercio Faria, pelo aprendizado, paciência e ser sempre atencioso. Um exemplo de pessoa.

Agradeço aos professores do DMA-UFV, em especial aos professores Enoch, Rogério e Catarina.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Sumário

**Lista de Figuras** vii

**Resumo** ix

**Abstract** x

**Introdução** 1

**1 Geometria Hiperbólica, Grupos Fuchsianos e Teoria de Grafos** 3

1.1 Geometria Hiperbólica Plana . . . 3

1.1.1 Modelos Hiperbólicos . . . 4

1.1.2 Transformações de Möbius . . . 7

1.1.3 Transformações lineares fracionárias . . . 8

1.1.4 Isometrias . . . 10

1.2 Grupos Fuchsianos . . . 12

1.2.1 Grupos Discretos . . . 17

1.2.2 Domínios Fundamentais . . . 18

1.2.3 Domínio de Dirichlet . . . 20

1.2.4 Assinatura de um grupo Fuchsiano . . . 23

1.3 Trigonometria hiperbólica . . . 23

1.3.1 Área Hiperbólica . . . 25

1.4 Superfície de Riemann . . . 25

1.5 Geometria de superfícies hiperelípticas . . . 28

1.6 Teoria de Grafo . . . 29

**2 Sístole** **31**

2.1 Panorama sistólico . . . . . 32

2.1.1 Desigualdades isosistólicas . . . . . 33

2.1.2 Sístole de uma superfície de Riemann . . . . . 34

2.2 Constante de Bers . . . . . 34

2.2.1 Colagem . . . . . 35

2.2.2 Construção das calças . . . . . 35

2.2.3 Constante de Bers . . . . . 36

**3 Constante de Bers em gênero 2** **39**

3.1 Grafo de contiguidade . . . . . 40

3.1.1 Geodésicas separantes determinadas por duas não-separantes . . . . . 45

3.1.2 Relação entre os comprimentos das geodésicas . . . . . 47

3.2 Majoração do comprimento das arestas do grafo de contigüidade . . . . 48

3.3 A 3-sístole e a sístole da família $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$ . . . . . 51

3.4 Determinação de um máximo global . . . . . 54

**4 Tesselação** $\{8g-4, 4\}$ **59**

4.1 Existência do polígono fundamental de $(8g-4)$ arestas . . . . . 59

4.2 O polígono fundamental $8g-4$ . . . . . 66

**Considerações Finais** **81**

**Bibliografia** **82**

# Lista de Figuras


1.1 No primeiro caminho a distância hiperbólica é 4 e no segundo caminho a distância hiperbólica é 3.1. . . . . 5

1.2 Domínios fundamentais do tipo $\mathcal{D}_k$ do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = 2z \rangle$. . 20

1.3 Domínios fundamentais do tipo $\mathcal{D}_k$ do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$. 20

1.4 Superfície de Riemann $R$ de $g = 3$ . . . . . 27

1.5 polígono fundamental associado a $R$ com $g = 3$ . . . . . 28

1.6 Grafos isomorfos. . . . . 30

2.1 A geodésica fechada à direita não é uma sístole porque é contrátil. . . . 31

2.2 Bitoro. . . . . 32

2.3 Colagem. . . . . 35

2.4 Construção da calça. . . . . 36

3.1 Geodésica separante $\xi$ . . . . . 39

3.2 Grafo minimal de 6 vértices. . . . . 42

3.3 Pentágono sobre um esfera singular. . . . . 43

3.4 Subgrafo isomorfo a $G_4$ . . . . . 44

3.5 Decomposição de um elemento de $\mathcal{G}_\xi$ . . . . . 46

3.6 Notação . . . . . 47

3.7 Geodésicas no Toro com bordo $T_i$ . . . . . 48

3.8 Notação no hexágono com ângulos retos. . . . . 49

3.9 Borda do Toro $T_1$ . . . . . 49

3.10 Notação no hexágono com ângulos retos. . . . . 51

3.11 Nova configuração topologica . . . . . 55

3.12 Configuração geométrica . . . . . 56

4.1 Arestas de $F$ . . . . . 60

4.2 Pontos sobre o disco . . . . . 61

4.3 Polígono fundamental de 12 arestas. . . . . 62

4.4 Transformação $T_i$. . . . . 63

4.5 Tesselação para $g = 2$. . . . . 64

4.6 Tesselação para $g = 3$. . . . . 65

4.7 Obtendo expressões analíticas para as geodésicas de $F$. . . . . 67

# Resumo

DRUMOND, Flávio Guilherme de Abreu, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2015. **SISTOLES EM SUPERFÍCIES GERADA PELA TESSELAÇÃO** $\{8g-4,4\}$. Orientador: Mercio Botelho Faria.

Seja $S$ uma superfície Riemann compacta, orientável, de gênero $g \geq 2$. Uma sístole de $S$, é uma geodésica fechada, não-contrátil, de menor comprimento sobre $S$. Encontrar os valores desses comprimentos para todas as sístoles de uma superfície $S$ é muito difícil, e daí o interesse em buscar seus limitantes inferiores e superiores. Bers [9] mostrou que toda superfície de Riemann de gênero de $g$ possui $3g-3$ geodésicas fechadas simples e disjuntas que podem ser majoradas por uma constante $B(g)$ chamada de constante de Bers onde ela só depende do gênero da superfície. Em [11], foi apresentado limitantes para esta constante $B(g)$, a saber: $B(g) : \sqrt{6g-2} \leq B(g) \leq 26(g-1)$. Bavard, [5], em seu trabalho obteve um limite máximo, relacionado à tesselação $\{12g-6,3\}$, para o raio de injetividade sobre uma superfície de Riemann $\geq 2$, tal que para $g=2$ esse limite permite majorar o comprimento das geodésicas fechadas por $2\,\mathrm{arccosh}(2,88)$. Neste trabalho nós apresentaremos alguns resultados sobre sístoles em superfícies e avaliamos um tipo de sístoles de superfícies relacionadas a tesselação $\{8g-4,4\}$ para $g \geq 2$.

# Abstract

DRUMOND, Flávio Guilherme de Abreu, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2015. **SYSTOLES SURFACE GENERATED BY TESSELLATION** $\{8g-4,4\}$. Adviser: Mercio Botelho Faria.

Let S be a compact Riemann surface, orientable, of genus $g \geq 2$. A systole of $S$, is a closed, non-contractile geodesic, of smaller length on $S$. Finding the values of these lengths for all systoles of a surface $S$ is very difficult, and hence the interest in get your lower and upper limiting. Bers [9] shows that every Riemann surface of genus of $g$ has $3g-3$ disjoint simple closed geodesics that can be increased by a constant $B(g)$ constant call of Bers where she only depends on the genus of the surface. In [11], was presented for limiting this constant (g) B, namely: $B(g) : \sqrt{6g-2} \leq B(g) \leq 26(g-1)$. Bavard, [5], in his work earned a maximum limit, related to tessellation $\{12g-6,3\}$ for the injetividade radius on a Riemann surface $\geq 2$, such that for $g = 2$ this limit allows you to increase the length of the geodesic closed for $2\,\mathrm{arccosh}(2,88)$. This work we will present some results on sístoles on surfaces and evaluate a type of surface tessellation related sístoles $\{8g-4,4\}$ for $g \geq 2$.

# Introdução

O objetivo deste trabalho é calcular as sístoles, que são geodésicas fechadas, simples e não contráteis de menor comprimento sobre uma superfície gerada pela tesselação $\{8g-4, 4\}$ que fornecem uma superfície fechada com gênero $g \geq 2$. Calcularemos através do emparelhamento das arestas do polígonos $8g-4$ fornecido pelo artigo [1] o comprimento das geodésicas que tem um representante na classe dos eixos da transformação hiperbólica. No primeiro momento, falaremos das geodésicas que decompõem uma superfície de Riemann $g \geq 2$ em calças, essas geodésicas também são fechadas, simples e disjuntas, formando uma família de $3g-3$ geodésicas, que chamaremos de partição dessa superfície [11] .

E sobre essas geodésicas que decompõe a superfície em calças, Lipman Bers observou em [9] que qualquer superfície de Riemann de $g \geq 2$ possui essa família de geodésicas, cujo o comprimento dessas geodésicas são majorados por uma constante $B(g)$ que depende somente do gênero da superfície. A constante foi batizada com o nome do matemático, passando assim ser chamada de Constante de Bers. Em 1980, Peter Buser majorou $B(g)$ por $(6g-4)\operatorname{arccosh}(2\pi(g-1))$. Em 1992, ele chegou com Mika Seppälä a um resultado mais preciso [12]. O conjunto que dá uma boa ideia do comportamento assintótico da constante de Bers é : $\sqrt{6g}-2 \leq B(g) < 26(g-1)$.

Durantes os anos 90, Paul Schmutz Schaller se interessou pelas sístoles sobre as superfícies de Riemann, e se lançou a procura destes valores. Em [29], Schmutz Schaller generaliza assim a sístole: Considerando uma família fechada de $k$ geodésicas simples e disjuntas, ele associa a cada uma delas uma função comprimento que corresponde ao comprimento da maior geodésica, então ele introduz $k$-sístoles como a menor função destes comprimentos. A constante de Bers aparece como limitante superior para essas $(3g-3)$-sístoles.

Em 1997, Christophe Bavard elaborou por analogia ao Invariante de Hermite de malhas euclidianas a uma teoria geral [6] que unifica o mesmo quadro geométrico do Invariante de Hermite de malhas euclidianas, Invariante de Hermite de variedades abelianas, e das sístoles sobre uma superfície de Riemann. Então em [6] a sístole esta definida como mínimo das funções comprimentos das geodésicas, tal que elas sejam contínua sobre o espaço de Teichmüller e invariante sobre a ação de grupo modular.

Até o presente momento não existe uma valor específico para $B(g)$, senão limitantes inferiores e superiores, mas as pesquisas continuam ([23], [24]). Neste trabalho apresentaremos um valor quando $g = 2$, que é baseado no artigo [16]. Abaixo um breve resumo dos capítulos.

O Capítulo 1 tem como objetivo apresentar definições e teoremas importantes para o restante do trabalho. No Primeiro momento, introduzimos o que é a Geometria Hiperbólica através do estudo do semiplano superior $\mathbb{H}^2$, do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ e logo a seguir apresentamos conceitos básicos para a Geometria Hiperbólica. Com isso partimos para o estudo de transformações que mantém o disco e o semiplano invariante, as Transformações de Möbius, para logo após apresentar o estudo de Isometrias que é de grande importância para o trabalho e em especial para o Capítulo 4. Em seguida, falaremos sobre o grupos Fucshianos e suas propriedades para podermos exibir superfícies que trabalharemos como quociente de um modelo hiperbólico sobre um grupo Fuchsiano. Definido isso falaremos da trigonometria hiperbólica e algumas relações trigonométricas e no final do capítulo explanamos um pouco sobre superfície de Riemann.

No Capítulo 2, iniciaremos falando sobre sístoles de maneira geral, ou seja, quais são as principais definições e resultados conhecidos. Destacamos as desigualdades isosistólicas, as sístoles na superfície de Riemann, e quem foram os percussores sobre o tema. Em seguida, falaremos sobre a constante de Bers que é importante para o capítulo seguinte, e nesta parte exibiremos como é feita a decomposição de uma superfície de Riemann em calças e que condições devem satisfazer para que aconteça essa decomposição. Deste modo, exibiremos as geodésicas que fazem parte deste processo e são limitadas por uma constante de Bers $B(g)$, além de alguns resultados que fornecem limitantes para essa constante $B(g)$.

No Capítulo 3, temos como objetivo principal encontrar uma maneira para obter o valor da constante de Bers para $g = 2$ e para isso falaremos do Grafo de Contiguidade que nos apresentam uma nova configuração das $3g - 3$ geodésicas sobre uma superfície. Para majorar os comprimentos dessas geodésicas trabalharemos com os pontos de Weiertrass sobre uma superfície de Riemann hiperelíptica e com as geodésicas que decompõem essa superfície em calças. Além disso majoramos o comprimento da geodésica $\xi$ que separa a superfície em dois toros com bordo. E depois disso determinaremos as sístole sobre essa superfície e o valor da constante $B(2)$.

No Capítulo 4, construiremos um polígono de (8g-4)-arestas, onde aplicaremos o emparelhamentos de arestas deste polígono com uma tesselação $\{8g - 4, 4\}$ afim de obter as transformações que emparelham cada aresta. Em seguida, podemos escrever cada transformação em função de uma só e a partir daí conseguir as matrizes que são associadas a essa transformação. Com isso podemos através dessas matrizes encontrar o comprimento das geodésicas que serão os eixos dessas transformações.

# Capítulo 1

# Geometria Hiperbólica, Grupos Fuchsianos e Teoria de Grafos

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, omitiremos as demonstrações. Iniciaremos falando da Geometria hiperbólica plana onde apresentaremos dois modelos mais usados: Semiplano superior $\mathbb{H}^2$ e o disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Mais adiante trabalharemos com as Transformações de Möbius que mantém o plano hiperbólico invariante. Em seguida, apresentaremos os tipos existentes de isometrias e como determiná-las. Explanaremos alguns conceitos e resultados básicos de grupos Fuchsianos, domínios fundamentais, superfície de Riemann e exibiremos algumas relações da trigonometria hiperbólica.

As principais referências são:[2], [3], [7], [11], [13], [14], [20], e outras referências que serviram na complementação da teoria foram [18], [19], [26], [31], [32].

## 1.1 Geometria Hiperbólica Plana

Neste seção apresentaremos dois modelos mais utilizados na geometria hiperbólica que são o semiplano superior (ou Plano de Lobatchevsky) e o disco de Poincaré (ou disco unitário). A escolha de um ou outro depende do trabalho que se deseja realizar. Por exemplo, uma vantagem do modelo de disco Poincaré sobre o modelo do semiplano superior é que o disco unitário $\mathbb{D}^2$ é um subconjunto limitado do plano euclidiano. Assim, podemos visualizar todo o plano hiperbólico facilmente em uma folha de papel. Uma vantagem do modelo do semiplano superior $\mathbb{H}^2$ em relação ao modelo de disco Poincaré é a facilidade com que as coordenadas cartesianas podem ser usados em cálculos. Vamos considerar $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e usaremos as notações usuais para as partes real e imaginária, $Re(z) = x, Im(z) = y$.

### 1.1.1 Modelos Hiperbólicos

**Definição 1.1.** *O modelo do* ***Semiplano superior*** *para o plano hiperbólico é definido como*

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$$

*dotado da estrutura riemanniana* $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

O círculo no infinito ou ao limite do $\mathbb{H}^2$ é definido como sendo o conjunto

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) = 0\} \cup \{\infty\},$$

isto é, $\partial\mathbb{H}$ é o eixo real juntamente com o ponto $\infty$.

**Definição 1.2.** *Seja* $I = [0,1]$ *e* $\gamma : I \to \mathbb{H}^2$ *uma curva diferenciável por partes*

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H}^2 | t \in I\}.$$

*Então o* ***comprimento hiperbólico*** *de* $\gamma$, $\|\gamma\|$, *é dado por:*

$$\|\gamma\| = \int_\gamma \frac{1}{Im(z)}|dz| = \int_0^1 \frac{|\frac{dz(t)}{dt}|}{y(t)}dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx(t)}{dt})^2 + (\frac{dy(t)}{dt})^2}}{y(t)}dt.$$

Uma aplicação da regra da cadeia mostra que este comprimento hiperbólico independente da parametrização de $\gamma$.

**Exemplo 1.3.** *Seja* $\gamma_1(t) = -2 + 4t + i$, *com* $0 \leq t \leq 1$, *uma parametrização de um curva continuamente diferenciáveis por partes que passa pelos pontos* $-2 + i$ *e* $2 + i$. *Então, seu comprimento hiperbólico de* $\|\gamma_1\|$ *é dado por :*

$$\|\gamma_1\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx(t)}{dt})^2 + (\frac{dy(t)}{dt})^2}}{y(t)}dt = \int_0^1 4dt = 4.$$

**Exemplo 1.4.** *Seja* $\gamma_2$ *uma outra curva continuamente diferenciáveis por partes que passa pelos pontos* $-2 + i$ *e* $2 + i$, *parametrizada da seguinte forma:*

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} (2t-2) + i(1+t), & 0 \leq t \leq 1 \\ \\ (2t-2) + i(3-t) & 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

*Então seu comprimento hiperbólico é* $\|\gamma_2\| \simeq 3,1$.

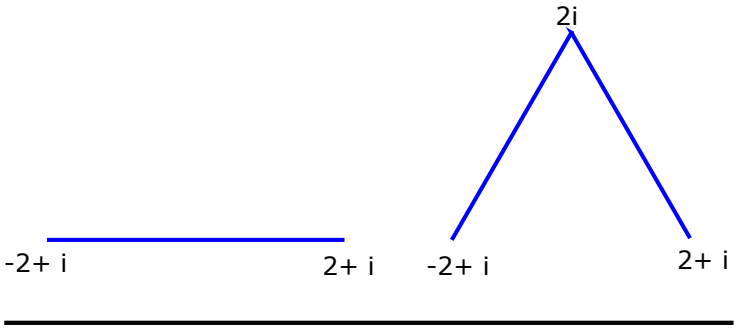



Figura 1.1: No primeiro caminho a distância hiperbólica é 4 e no segundo caminho a distância hiperbólica é 3.1.

**Definição 1.5.** *A* ***distância hiperbólica*** $d(z,w)$ *entre dois pontos* $z,w \in \mathbb{H}$ *é definida pela fórmula*

$$d(z,w) = inf\|\gamma\|,$$

*onde o ínfimo é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes* $\gamma : I \to \mathbb{H}^2$, *com* $\gamma(0) = z$ *e* $\gamma(1) = w$.

Veremos que entre as curvas unindo $z$ e $w$, aquela com menor comprimento hiperbólico (ie, uma geodésica) é uma semirreta ou um semicírculo ortogonal ao eixo $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) = 0\}$.

**Definição 1.6.** *Dados* $z,w \in \mathbb{H}^2, z \neq w$ *a* ***geodésica*** *definida por* $z$ *e* $w$ *é a curva de comprimento mínimo entre* $z$ *e* $w$ *em* $\mathbb{H}^2$, *e o segmento geodésico que conecta esses dois pontos é representado por* $[z,w]$

**Teorema 1.7.** *([20], pág.: 4) Seja* $z$ *e* $w$ *quaisquer pontos no plano complexo. Então, a curva* $\gamma$ *passando por* $z$ *e* $w$ *satisfaz*

$$||\gamma|| = d(z,w)$$

*se, e somente se, a parametrização da curva* $\gamma$ *é semicírculo ou semirretas ortogonais ao eixo real.*

**Exemplo 1.8.** *Seja* $\gamma_3(t) = \sqrt{5}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$, *com* $\frac{17\pi}{20} \leq t \leq \frac{3\pi}{20}$, *uma parametrização de curva que passa por* $-2+i$ *e* $2+i$. *Então, o comprimento de* $\|\gamma_3\|$ *é dado por:*

$$\begin{aligned} \|\gamma_3\| = & \int_{\frac{17\pi}{20}}^{\frac{3\pi}{20}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\operatorname{sen}(t)} dt \\ = & \int_{\frac{17\pi}{20}}^{\frac{3\pi}{20}} \csc(t) dt \\ = & \; ln \left| \frac{\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\frac{3\pi}{20})}{\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\frac{17\pi}{20})} \right| \simeq 2,87 \; . \end{aligned}$$

O resultado a seguir nos dá a unicidade de uma geodésica entre dois pontos.

**Corolário 1.9.** *([20], pág.: 5) Dadas quaisquer dois pontos em $\mathbb{H}^2$, existe uma única geodésica que passa através destes.*

**Corolário 1.10.** *([20], pág.: 5) Sejam $z$ e $w$ dois pontos distintos no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, então $d(z,w) = d(z,\xi) + d(\xi,w)$ se, e somente se, $\xi \in [z,w]$.*

Vejamos algumas igualdades.

**Teorema 1.11.** *([7], pág.: 130) Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, temos:*

$$(i) \qquad d(z,w) = \ln \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-\bar{w}| - |z-w|};$$

$$(ii) \qquad cosh[d(z,w)] = 1 + \frac{|z-w|^2}{2Im[z]Im[w]};$$

$$(iii) \qquad \text{senh}\,[\frac{1}{2}d(z,w)] = \frac{|z-w|}{2(Im[z]Im[w])^{1/2}};$$

$$(iv) \qquad cosh[\frac{1}{2}d(z,w)] = \frac{|z-\bar{w}|}{2(Im[z]Im[w])^{1/2}};$$

$$(v) \qquad \tanh[\frac{1}{2}d(z,w)] = \left|\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right|.$$

**Definição 1.12.** *O disco*

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$$

*é chamado o* ***disco Poincaré*** *dotado da estrutura riemanniana $ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{[1-(x^2+y^2)]^2}$.*

*O círculo $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ é chamado de círculo em $\infty$ ou ao limite do $\mathbb{D}^2$ .*

**Teorema 1.13.** *([3], pág.: 120) Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}^2$, então o comprimento hiperbólico é dado por:*

$$\|\gamma\| = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|.$$

**Definição 1.14.** *Definimos a distância entre dois pontos $z$ e $w$ do disco $\mathbb{D}^2$ como sendo:*

$$d^*(z,w) = \ln \frac{|1-z\bar{w}| + |z-w|}{|1-z\bar{w}| - |z-w|}.$$

**Definição 1.15.** *Os segmentos geodésicos em $\mathbb{D}^2$ são arcos de círculos ortogonais a $\partial\mathbb{D}^2$ ou segmentos de reta passando pelo centro de $\mathbb{D}^2$.*

Na geometria hiperbólica existe dois tipos de retas hiperbólicas paralelas, isto é, retas hiperbólicas que não se cruzam dentro de um modelo ( $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$ ) que são:

***i)*** Se duas retas hiperbólicas se cruzam na sua fronteira, então elas são chamadas de *paralelas* ou *hiperparalelas*;

***ii)*** Se duas retas hiperbólicas não se cruzam na sua fronteira, então elas são chamadas de *disjuntas* ou *ultraparalela*.

**Observação 1.16.** *Por uma reta hiperbólica $r$ em $\mathbb{H}^2$ e $p \in \mathbb{H}^2$, tal que $p$ não pertença a $r$, existem infinitas retas hiperbólicas distintas passando por $p$ e que são paralelas a $r$.*

### 1.1.2 Transformações de Möbius

As transformações de Möbius apareceram no estudo de análise complexas e superfícies de Riemann, como transformações que mantém um disco ou semiespaço invariante. O foco do estudo é sobre o caso do plano hiperbólico bidimensional. Mas inicialmente introduzimos as transformações de Möbius para dimensão arbitrária, primeiramente falaremos de dois tipos distintos de transformações de Möbius, as reflexões e as imersões. Depois trataremos do caso das transformações no caso bidimensional. Vejamos,

Uma esfera $S(a,r)$ em $\mathbb{R}^n$ é dado por $S(a,r) = \{x \in R^n; |x-a| = r\}$, onde $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ é chamado de compactificação por um ponto ideal $\infty$. Com isso, temos:

**Definição 1.17.** *A* inversão *na esfera $S(a,r)$ é dado por: $i_s : \widehat{\mathbb{R}}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ onde $i_s(a) = \infty$ e $i_s(\infty) = a$, e para $x \neq \{a, \infty\}$ temos:*

$$i_s(x) = a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) \ .$$

Agora, falta definir o que é uma reflexão, mas antes chamaremos de *hiperplano* em $\mathbb{R}^n$ um conjunto da forma:

$$P_t = \{x \in \mathbb{R}^n | < x, a >= t\},$$

onde $< x, a >$ é um produto interno.

$P_t$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ e $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$ é chamado *hiperplano compactificado*. Com isso,

**Definição 1.18.** *Defnimos uma* reflexão *em hiperplano compactificado sendo*

$$i_p = \begin{cases} x - 2\frac{<x,a>-t}{|a|^2}a & , \quad se\ x \in \mathbb{R}^n \\ \infty & , \quad se\ x = \infty. \end{cases}$$

Portanto, podemos definir as transformações de Möbius da seguinte maneira:

**Definição 1.19.** *Uma* ***transformação de Möbius*** *de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas.*

Claramente, cada transformação de Möbius é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo. A composição de duas transformações de Möbius é ainda uma transformação de Möbius, assim também para inversa de uma transformação de Möbius, pois se $\sigma = \sigma_1 ... \sigma_m$ (onde $\sigma_j$ é uma inversão ou reflexão) então

$$\sigma^{-1} = \sigma_m ... \sigma_1.$$

Finalmente, para qualquer $\sigma$, temos que $\sigma^2 = I_d$ e assim a função identidade é uma transformação de Möbius.

O conjunto das transformações de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é chamado de **Grupo Geral de Möbius** o qual denotamos por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$. De fato, $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é um grupo pois, por definição, ele é fechado por decomposição e

- A composição é associativa;
- $Id \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é o elemento neutro;
- Todo elemento de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ possui inverso. Basta observar que cada $\sigma$ de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é um elemento de ordem dois, ou seja, $\sigma^2 = Id$.

**Observação 1.20.** *O Grupo de Möbius $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ formado pelas transformações de $R^n$ que preservam a orientação. Temos que um elemento qualquer $\sigma \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ preservará a orientação se, e somente se, for a composição de um número par de inversões e reflexões.*

### 1.1.3 Transformações lineares fracionárias

Consideremos agora o grupo real das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ com } \det(A) = ad - bc = 1 \ ,$$

onde $Tr(A) = |a + d|$ é o traço da matriz $A$. Esse grupo é chamado de grupo linear especial e denotado por $SL(2, \mathbb{R})$. As **transformações lineares** ( ou **Möbius**) de $\mathbb{C}$ em si mesmo é dado da forma:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}; \ \{a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}. \end{array} \tag{1.1}$$

O conjunto dessas transformações forma um grupo tal que o produto das transformações correspondem ao produto das matrizes correspondentes e a inversa corresponde a matriz inversa.

Cada transformação $T$ de (1.1) é representada por um par de matrizes $\pm A \in SL(2, \mathbb{R})$. Vejamos, supondo que as matrizes $A$ e $B$ sejam diferentes, seja $T_A$ e $T_B$

transformações associadas as matrizes $A$ e $B$ respectivamente. Se $T_A = T_B$ acontece, então para determinar todas as matrizes que satisfaça a essa igualdade, basta determinar as matrizes $C$ tais que $T_C = T_{Id} = Id$, onde $Id$ é a matriz identidade, se $T_A = T_B$ então $Id = T_A(T_B)^{-1} = T_A T_B^{-1} = T_{AB^{-1}} = T_{Id}$. Mas considerando os pontos $0$, $i \in \mathbb{C}$, obtemos:

$$\begin{aligned} T_A(0) &= \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ T_A(i) &= \frac{ac}{c^2+d^2} + \frac{ad}{c^2+d^2} i \Rightarrow c = 0, a = d \end{aligned}$$

donde obtemos, consideremos que $1 = ad - bc = a^2$ que $b = c = 0$ e $a = d = \pm 1$, ou seja

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm Id.$$

**Definição 1.21.** *O grupo de todas as transformações Möbius de $\mathbb{C}$, chamado de* ***Grupo Projetivo*** *e denotado por $PSL(2,\mathbb{R})$, é isomorfo a $\dfrac{SL(2,\mathbb{R})}{\{\pm Id\}}$.*

**Teorema 1.22.** *([20], pág.: 4) O grupo $PSL(2,\mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}})$ das transformações de Möbius que preservam a orientação.*

## Modelo $\mathbb{H}^2$

Consideremos o grupo $SL(2,\mathbb{R})$. Para cada $A \in SL(2,\mathbb{R})$, consideremos a transformação linear fracionária:

$$\begin{aligned} T_A : \ & \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2 \\ z \ & \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned} .$$

Temos,

- Se $Im(z) > 0$, então $Im(T_A(z)) > 0$;
- A transformação $T_A$ é uma ação de grupo;
- A transformação $T_A$ é uma isometria de $(\mathbb{H}^2, d)$.

## Modelo $\mathbb{D}^2$

Consideremos agora a ação de

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

em $\mathbb{C}$ determinada por

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Temos então que

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2 = \frac{|a|^2|z|^2+|b|^2+2Re(abz)}{|c|^2|z|^2+|d|^2+2Re(cdz)}.$$

Se quisermos considerar apenas os elementos de $SL(2,\mathbb{C})$ que mantêm o disco $\mathbb{D}^2$ invariante, devemos ter, para $|z|=1$,

$$\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2 = \frac{|a|^2+|b|^2+2Re(abz)}{|c|^2|z|+|d|^2+2Re(cdz)} = 1.$$

ou equivalente,

$$|a|^2+|b|^2-|d|^2-|c|^2 = 2Re((cd-ab)z), \forall z \in S^1,$$

devemos ter $Re(cd) = Re(ab)$ e com a condição adicional que $ad-bc=1$, temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Temos agora que a métrica hiperbólica do disco $\mathbb{D}^2$ é invariante pelas as transformações da forma

$$z \mapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}}, |a|^2-|c|^2 = 1.$$

**Definição 1.23.** *Seja $T(\neq Id)$ uma transformação de Möbius restrita ao plano Hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Dizemos que:*

1. *$T$ é **parabólica** se, e somente se, $T$ fixa somente um ponto $\partial\mathbb{H}^2$;*
2. *$T$ é **hiperbólico** se, e somente se, $T$ fixa exatamente dois pontos em $\partial\mathbb{H}^2$;*
3. *$T$ é **elíptica** se, e somente se, $T$ fixa um único ponto de $\mathbb{H}^2$.*

### 1.1.4 Isometrias

**Definição 1.24.** *Uma transformação $T : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma **isometria** se preserva a distância hiperbólicas $d_{\mathbb{H}^2}$ sobre $\mathbb{H}^2$, isto é, $d_{\mathbb{H}^2}(T(z_1),T(z_2)) = d_{\mathbb{H}^2}(z_1,z_2)$. Denotaremos este conjunto por $Isom(\mathbb{H}^2)$. Analogamente, temos que uma transformação $T : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ é uma **isometria** se preserva a distância hiperbólica $d_{\mathbb{D}^2}$ sobre $\mathbb{D}^2$. Denotaremos este conjunto por $Isom(\mathbb{D}^2)$.*

Os conjuntos $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $Isom(\mathbb{D}^2)$ têm estrutura de grupo.

Seja grupo

$$PSL^*(2,\mathbb{R}) = \frac{SL^*(2,\mathbb{R})}{\pm Id},$$

onde $SL^*(2,\mathbb{R})$ é grupo das matrizes $2 \times 2$ com determinante igual a $\pm 1$.

**Observação 1.25.** *$Isom(\mathbb{H}^2)$ é isomorfo a $PSL^*(2,\mathbb{R})$.*

Podemos pensar em $PSL^*(2,\mathbb{R})$ como sendo um grupo composto por transformações de Möbius, ou seja,

$$Isom(\mathbb{H}^2) = \left\langle T_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ,\ \varphi(z) = -\overline{z} \right\rangle,\ M \in SL(2,\mathbb{R}).$$

Notemos que $\varphi$ é uma reflexão pelo eixo imaginário no plano $\mathbb{C}$.

Seja $A$ um subgrupo de $SL(2,\mathbb{C})$ dado por

$$A = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix};\ a,b \in \mathbb{C} \text{ e } \det M = 1 \right\}$$

e definindo

$$B = \frac{A}{\pm Id}$$

podemos demonstrar que

$$Isom(\mathbb{D}^2) = \left\langle T_m(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \varphi(z) = -\bar{z} \right\rangle,\ M \in B$$

Temos também uma importante transformação $F$, que permite trabalhar ora com o modelo do semiplano superior $\mathbb{H}^2$ e ora com o disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, essa transformação define uma isometria bijetora entre $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, dada por

$$F(z) = i + \frac{2(\bar{z}-i)}{|\bar{z}-i|^2} = \frac{iz+1}{z+1},$$

em que $F$ é uma transformação de Möbius determinada pela a matriz

$$M_F = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

e sua inversa é dada por

$$M_{f^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomando uma isometria $\zeta : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ temos uma isometria correspondente em $\mathbb{D}^2$ dado por $F \cdot \zeta \cdot F^{-1}$.

Para cada $\zeta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$, temos

$$\begin{array}{rccl} F \cdot \zeta \cdot F^{-1} : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{D}^2 \\ & z & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+d)+i(b-c) & (b+c)+i(a-d) \\ (b+c)-i(a-d) & (a+d)-i(b-c) \end{pmatrix}(z) \end{array} .$$

Para cada transformação de Möbius $\xi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ temos uma correspondente em $\mathbb{H}^2$ dada por $F^{-1} \cdot \xi \cdot F$.

Seja $\xi = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$, temos

$$\begin{array}{rccl} F^{-1} \cdot \xi \cdot F : & \mathbb{H}^2 & \to & \mathbb{H}^2 \\ & z & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Re(a)+Im(b) & Re(b)+Im(a) \\ Re(b)-Im(a) & Re(a)-Im(b) \end{pmatrix}(z) \end{array} .$$

## 1.2 Grupos Fuchsianos

Existem três tipos de elementos em $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm Id$ que se distinguem pelo valor da função **traço**, representada por $Tr(A)$, ou seja, eles são classificados de acordo com o módulo do traço de uma matriz $A \in SL(2,\mathbb{R})$

**Definição 1.26.** *Dado* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, *a transformação* $T_A \in PSL(2,\mathbb{R})$ *associada à* $A$ *é :*

- ***Elíptica*** *se* $Tr(A) < 2$;
- ***Parabólica*** *se* $Tr(A) = 2$;
- ***Hiperbólica*** *se* $Tr(A) > 2$.

**Observação 1.27.** *Temos que o traço de uma matriz é invariante por conjugação pois,* $Tr(BAB^{-1}) = |$ *traço* $(BAB^{-1})| = |traço(A)| = Tr(A)$ *para toda matriz* $A_n$ *e para toda matriz* $B \in GL(n,\mathbb{R})$.

O número 2 da Definição 1.26 depende somente dos autovalores reais da matriz $A$. O polinômio característico de uma matriz $A$ é dado por

$$p_A(x) = \det[xId - A].$$

Os autovalores de $A$, caso existam, são raízes do seu polinômio característico. Ve-

jamos então, dado $A \in SL(2,\mathbb{R})$, temos

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xId - A) \\ &= x^2 - xd - ax + ad - bc \\ &= x^2 - Tr(A)x + \det(A) \\ &= x^2 - Tr(A)x + 1. \end{aligned}$$

Assim o discriminante é $\Delta = Tr(A)^2 - 4$. Logo teremos os seguintes casos:

**1)** Se $\Delta > 0$, $A$ possui dois autovalores reais distintos $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Desse modo, $A$ é diagonalizável, portanto a menos de conjugação, podemos assumir $A$ da forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

mas como $\det(A) = 1$, temos que $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$. Logo,

$$Tr(A) = \left|\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right| > 2,$$

com $\lambda_1 \neq \pm 1$.

**2)** Se $\Delta = 0$, $A$ possui um único valor real, e este deve ter multiplicidade 2. Então, o polinômio característico é da forma:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= (x - \lambda)^2 \\ &= x^2 - 2x\lambda + \lambda^2, \end{aligned}$$

como $\det(A) = 1$, temos $\lambda^2 = 1$, o que implica que $\lambda = \pm 1$ e $Tr(A) = |2\lambda| = 2$.

**3)** Se $\Delta < 0$, $A$ possui dois autovalores complexos não reais conjugados $\lambda$ e $\overline{\lambda}$. Então, o polinômio característico é da forma:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= (x - \lambda)(x - \overline{\lambda}) \\ &= x^2 - 2Re(\lambda)x - |\lambda|^2, \end{aligned}$$

onde $|\lambda|^2 = \det(A) = 1$. Se $\lambda \neq \pm 1$ então, $Tr(A) = |\text{traço}(A)| = |2Re(\lambda)| < 2$.

Estudaremos os aspectos geométricos de cada tipo de isometria a partir de famílias especiais que contém representantes de cada classe de conjugação. Os aspectos mais importantes são o conjuntos de pontos fixos e pontos invariantes de cada conjugação.

Uma **permutação** de um conjunto $X$ é uma bijeção $\psi : X \to X$. Seja $G$ um grupo de permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$. Dado $x \in X$, chamamos de **estabilizador**de $x$ o subgrupo

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

A **órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$G(x) = \{g(x) \in X | g \in G\}.$$

O conjunto de **pontos fixos** de um elemento $g \in G$ é o conjunto

$$F_g = \{x \in X \mid g(x) = x\}.$$

Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é **invariante** por $g \in G$ se $g(A) \subset A$.

**Lema 1.28.** *([14], pág.: 47) Seja $A \in SL(2,\mathbb{R})$ e $x, y \in \overline{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ dois pontos fixos por $T_A$. Então, a geodésica $\gamma$ contendo $x$ e $y$ é invariante por $T_A$. Se algum dos pontos for um ponto ordinário, ou seja, que não seja pontos isolados, então $T_A = Id$.*

Caracterização de cada uma das transformações:

## Elíptica

Seja a família das matrizes

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ 0 < \theta < 2\pi.$$

Notemos que, para $\theta \neq k\pi$, $Tr(A_\theta) = |2\cos\theta| < 2$, ou seja, $T_\theta$ é de fato elíptica. Temos que $T_\theta$ terá ponto fixo $i$, pois

$$\begin{aligned} T_\theta(i) &= \frac{\cos(\theta)i + \operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta)} \\ &= \frac{\cos(\theta)i + \operatorname{sen}(\theta)[\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta)]}{|-\operatorname{sen}(\theta)i + \cos(\theta)|^2} \\ &= \frac{[\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)] + [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)]i}{\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)} \\ &= i. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.28, teremos que $i$ será o único ponto fixo de $T_\theta$.

## Parabólica

Seja a família das matrizes

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \neq t.$$

Assim, $Tr(A_t) = |1+1| = 2$, ou seja, $T_A$ é uma isometria parabólica. Observemos que

$$T_t(z) = \frac{z+t}{0z+1} = z+t.$$

Logo, para $z \neq \infty$, temos $T_t(z) \neq z$. No entanto, se considerarmos a geodésica $\gamma(s) = e^s i$, com $\gamma(\infty) = \infty$, temos:

$$\lim_{s\to\infty} T_t(\gamma(s)) = \lim_{s\to\infty} (e^s i + t) = \infty,$$

de modo que $T_t(\infty) = \infty$. Isso mostra que um ponto fixo de $T_t$ é o ideal $\infty$ e ele será único.

## Hiperbólica

Consideremos então a família das matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}, k \neq 0.$$

Temos, $Tr(A_k) = \sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} > 2$, logo $T_k$ é, de fato, uma isometria hiperbólica.

Os pontos fixos por $T_k$ são os pontos ideais 0 e $\infty$, pois

$$T_k(z) = \frac{\sqrt{e^k}+0}{0z+\frac{1}{\sqrt{e^k}}} = e^k z.$$

Então $T_k(0) = 0$. Notemos que geodésica $\gamma(t) = e^t i$ é invariante por $T_k$:

$$T_k(\gamma(t)) = e^k e^t i = e^{k+t} i = \gamma(k+t),$$

e, portanto, $T_k(\infty) = \infty$.

Como o traço da matriz é invariante por conjugação, temos que

- As matrizes da forma $BA_\theta B^{-1}$ induzem isometrias **elípticas**;
- As matrizes da forma $BA_t B^{-1}$ induzem isometrias **parabólicas**;
- As matrizes da forma $BA_k B^{-1}$ induzem isometrias **hiperbólicas**,

onde $B \in GL(2,\mathbb{R})$.

**Teorema 1.29.** *([14], pág.: 50) Dada uma transformação $Id \neq T_A \in PSL(2,\mathbb{R})$, existe $B \in SL(2,\mathbb{R})$ tal que $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ é da forma $T_\theta, T_t$ ou $T_k$.*

A definição abaixo será de grande importância em nosso trabalho precisamente no Capítulo 4.

**Definição 1.30.** *A geodésica em $\mathbb{H}^2$ que liga dois pontos fixos da transformação hiperbólica $T$ é chamado* ***eixo*** *de $T$.*

Vejamos abaixo como encontrar pontos fixos da transformação hiperbólica.

**Exemplo 1.31.** *Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e uma transformação $T$ associada a $A$ da forma $T(z) = \frac{2z+3}{3z+5}$. Como $Tr(A) > 2$, temos que $T$ é uma transformação hiperbólica, logo possui dois pontos fixos, digamos $z^+$ e $z^-$, que podem ser encontrados da seguinte forma*

$$\begin{aligned} z^{\pm} &= \frac{a-d \pm \sqrt{(TrA)^2-4}}{2c} \\ &= \frac{2-5 \pm \sqrt{(7)^2-4}}{2\cdot 3} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{45}}{6} \\ &= \frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{6} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

*ou seja,*

$$z^+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad z^- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

*Para verificar se esse pontos são fixos basta mostrar que $T(z_0) = z_0$. Vejamos para o caso $z^+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Assim,*

$$\begin{aligned} T\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+3}{3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)+5} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{5}+2}{7+3\sqrt{5}}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}+4}{7+3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+4}{7+3\sqrt{5}} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

### 1.2.1 Grupos Discretos

Além de ser um grupo, $PSL(2,\mathbb{R})$ é um espaço topológico no qual a transformação $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ podem ser identificadas com o ponto $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Mais precisamente, o espaço topológico, $SL(2,\mathbb{R})$ é identificado como o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$\{(a,b,c,d)|\ ad-bc=1\}.$$

A norma de $PSL(2,\mathbb{R})$ é induzida pela a norma do $\mathbb{R}^4$, para $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad-bc=1$, nós definimos

$$\|T\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

onde $T \in PSL(2,\mathbb{R})$, e a métrica em $PSL(2,\mathbb{R})$ é definida por

$$d(T_A,T_B) = \|T_A - T_B\|, \text{com } T_A, T_B \in PSL(2,\mathbb{R}).$$

**Definição 1.32.** *Um subgrupo $\Gamma$ de $Isom(\mathbb{H}^2)$ é dito* ***discreto*** *se a topologia induzida em $\Gamma$ for uma topologia discreta, isto é, se $\Gamma$ for um subconjunto discreto na topologia do espaço $Isom(\mathbb{H}^2)$.*

**Definição 1.33.** *Uma família $\{X_\alpha|\alpha \in A\}$ de subconjunto de um espaço métrico $X$ é dita* ***localmente finita*** *se para todo compacto $K \subseteq X$ o conjunto $\{\alpha \in A|X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ for finito.*

**Definição 1.34.** *Seja $\Gamma$ um subgrupo de homeomorfismo de um espaço métrico $X$. Dizemos que a ação de $\Gamma$ é* ***propriamente descontínua*** *se para todo $x \in X$ a família $\{\{g(x)\}|g \in \Gamma\}$ for localmente finita.*

O Teorema abaixo estabelece equivalências importantes envolvendo conceitos definidos acima.

**Teorema 1.35.** *([14], pág.: 57) Seja $\Gamma$ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico $X$ localmente compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*i) A ação de $\Gamma$ é propriamente descontínua.*

*ii) Para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta $V_x$ tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos de $\Gamma$.*

*iii)* *Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $U_x$ tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica $g(x) = x$.*

*iv)* *Dado $K \subseteq X$ compacto, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos de $g \in \Gamma$.*

**Definição 1.36.** *Um grupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$ é chamado de* ***grupo Fuchsiano*** *se consiste de transformações que preservam a orientação, ou seja, o* ***grupo Fuchsiano*** *é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

**Proposição 1.37.** *([14], pág.: 59) Os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$ gerado por elementos hiperbólicos ou parabólicos são discretos. Um subgrupo cíclico gerado por elemento elíptico é discreto se, e somente se, for finito.*

Vejamos alguns lemas importantes.

**Lema 1.38.** *([20], pág.: 30) Seja $w \in \mathbb{H}^2$ e $K \subset \mathbb{H}^2$ compacto. Então, o conjunto*

$$H = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) / t(w) \in K\}$$

*é compacto.*

**Lema 1.39.** *([20], pág.: 32) Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ grupo com ação propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Então, os pontos fixos por elementos de $\Gamma$ é discreto, ou seja, o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \exists T \in \Gamma, T(z) = z\}$$

*é discreto.*

O resultado abaixo e o principal dessa seção.

**Teorema 1.40.** *([14], pág.: 62) Um grupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.*

**Definição 1.41.** *Um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é dito* ***grupo elementar*** *se existe $z \in \overline{\mathbb{H}}^2$ tal que a órbita $\Gamma(z)$ é finita.*

**Teorema 1.42.** *([20], pág.: 39) Seja $\Gamma$ grupo não elementar. Então, $\Gamma$ possui elementos hiperbólico.*

### 1.2.2 Domínios Fundamentais

A importância de Domínio Fundamental(também chamada de Região Fundamental) $\mathcal{D}$ de um grupo Fucshiano $\Gamma$ é que nos ajuda ver como $\Gamma$ age em $\mathcal{D}$.

**Definição 1.43.** *Sejam $X$ um espaço métrico e $\Gamma$ grupo de homeomorfismos agindo em $X$ de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é chamado um* ***domínio fundamental*** *de $\Gamma$ se satisfaz as seguintes condições:*

*(i)* $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X.$

*(ii)* $\mathcal{D}^\circ \cap T(\mathcal{D}^\circ) = \emptyset$, *para todo* $Id \neq T \in \Gamma$.

*(iii)* $\mathcal{D}^\circ \neq \emptyset$.

O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D}\backslash\mathcal{D}^\circ$, em que $\mathcal{D}^\circ$ é o interior de $\mathcal{D}$, é chamado de **fronteira** de $\mathcal{D}$ e a família

$$\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$$

é chamada **tesselação** ou **ladrilhamento** de $X$. Notemos que sendo $\mathcal{D}$ domínio fundamental de $\Gamma$, $T(\mathcal{D})$ também o será, para todo $T \in \Gamma$.

**Exemplo 1.44.** *Seja* $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{R})$ *o subgrupo cíclico gerado por* $T(z) = 2z$. *Temos então que para todo* $k > 0$ *o semi-anel*

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2 | k \leq |z| \leq 2k\}$$

*é um domínio fundamental de* $\Gamma$ *como representado na Figura 1.2 e a tesselação determinada por este domínio é a família* $\{\mathcal{D}_{2^n k}/n \in \mathbb{Z}\}$. *De fato, temos*

$$\begin{array}{rcl} T(z) & = & 2z \\ T^2(z) & = & T(2z) = 2^2 z \\ \vdots & & \\ T^n(z) & = & T(nz) = 2^n z \end{array}$$

*e*

$$\begin{array}{rcl} T(\mathcal{D}_k) & = & 2k \leq 2|z| \leq 2^2 k \\ T^2(\mathcal{D}_k) & = & 2^2 k \leq 2^2|z| \leq 2^3 k \\ \vdots & & \\ T^n(\mathcal{D}_k) & = & 2^n k \leq 2^n|z| \leq 2^{n+1} k \end{array} .$$

*Verificando as condições da definição, temos*

**i)** $T^n(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_{2^n k}$.

**ii)** $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_{2^n k} = \mathbb{H}^2$.

**iii)** $(\mathcal{D}_{2^n k})^\circ \bigcap (\mathcal{D}_{2^m k})^\circ = \emptyset$ *se* $n \neq m$.

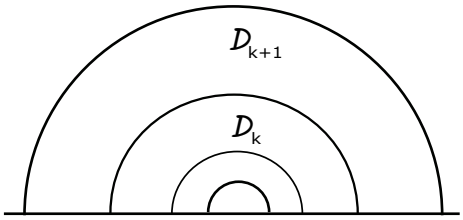



Figura 1.2: Domínios fundamentais do tipo $\mathcal{D}_k$ do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = 2z \rangle$.

**Exemplo 1.45.** *Seja* $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ *o grupo cíclico gerado por* $T(z) = z + 1$. *Temos que*

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2 / k \leq Re(z) \leq k + 1\}$$

*é domínio fundamental onde* $T_i \in \Gamma$. *Como é representado na Figura 1.3*

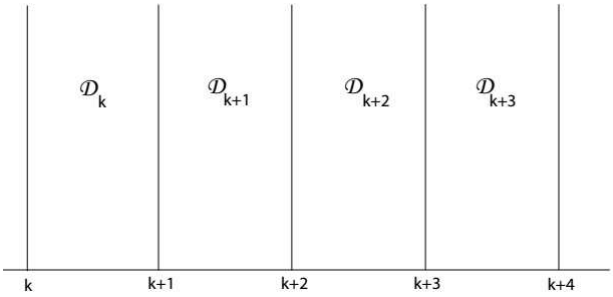



Figura 1.3: Domínios fundamentais do tipo $\mathcal{D}_k$ do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$.

Domínios fundamentais não são únicos necessariamente, pois dado um grupo Fuchsianos pode-se ter diferentes domínios fundamentais.

**Teorema 1.46.** *([14], pág.: 59) Seja* $\Gamma$ *grupo propriamente descontínuo de isometrias de um espaço métrico* $X$ *e* $\mathcal{D}$ *domínio fundamental de* $\Gamma$. *Seja* $\Gamma' \subset \Gamma$ *subgrupo de índice finito* $n$ *e sejam* $T_1, T_2, ..., T_n \in \Gamma$ *tais que*

$$\Gamma = \Gamma' T_1 \cup \Gamma' T_2 \cup ... \cup \Gamma' T_n$$

*seja decomposição de* $\Gamma$ *em* $\Gamma'$*-classes laterais, ou seja,* $\Gamma' T_i = \{S \circ T_i; S \in \Gamma'\}$. *Então,*

$$\mathcal{D}' = T_1(\mathcal{D}) \cup T_2(\mathcal{D}) \cup ... \cup T_n(\mathcal{D})$$

*é domínio fundamental de* $\Gamma'$.

### 1.2.3 Domínio de Dirichlet

Nesta seção descreve em particular a construção de polígonos fundamentais convexos. Estabelecemos a existência destes tais polígonos para qualquer grupo Fuchsiano através do domínio de Dirichlet.

**Definição 1.47.** *Seja $\Gamma$ fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$, para todo $T \in \Gamma$. Tal ponto existe, pois o conjunto dos pontos fixos por algum elemento de $\Gamma$ é discreto. Chamamos de* ***Domínio de Dirichlet*** *centrado em $p$ ao conjunto*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 | d(z,p) \leq d(z,T(p)), \text{ para todo } T \in \Gamma\}.$$

*Isto é, consideramos a órbita $\Gamma(p)$ e escolhemos os pontos $z \in \mathbb{H}^2$ que estão mais próximos de $p$ do que qualquer outro ponto da órbita $\Gamma(p)$.*

**Definição 1.48.** *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ pontos distintos. Chamamos de* ***bissetor perpendicular*** *dos pontos $p$ e $q$ o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{H}^2 / d(z,p) = d(z,q)\}.$$

**Lema 1.49.** *([20], pág.: 54) O bissetor perpendicular de dois pontos $p$ e $q$ é a geodésica passando pelo ponto médio do segmento $\overline{pq}$ e ortogonal a este.*

Veremos no teorema a seguir que o domínio de Dirichlet são domínios fundamentais.

**Teorema 1.50.** *([14], pág.: 83) Seja $\Gamma$ grupo fuchsiano, $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet centrado em $p$. Então, $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de $\Gamma$.*

**Exemplo 1.51.** *Seja $\Gamma$ o grupo cíclico gerado por $T(z) = z + 1$. Como $T$ é parabólico, $\Gamma$ não possui pontos fixos e podemos considerar $p \in \mathbb{H}^2$ qualquer. Temos então que*

$$\mathcal{A}_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 / |Re(z) - Re(p)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

*é domínio de Dirichlet de $\Gamma$. De fato, constata-se que*

$$H_p(T) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 / Re(z) - Re(p) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

*e*

$$H_p(T^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 / Re(z) - Re(p) \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

*de modo que*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}_p(\Gamma).$$

*Mas dado $z \in \mathbb{H}^2$, com $-\frac{1}{2} < Re(z) - Re(p) < \frac{1}{2}$, temos que $Re(T^n(z)) = Re(z) + n$, logo para $|n| > 1$,*

$$|R(T^n(z)) - Re(p)| > \frac{1}{2}(|n| - 1) > \frac{1}{2}, \forall |n| > 1,$$

*ou seja, se $z$ for ponto interior de $\mathcal{A}_p(\Gamma)$, $T^n(z)$ não o será, a menos que $T^n = Id$, de modo que $\mathcal{D}_p(\Gamma) = \mathcal{A}_p(\Gamma)$.*

**Teorema 1.52.** *([14], pág.: 87) Seja $\Gamma$ grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet. Então o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D}_p(\Gamma))/T \in \Gamma\}$ é localmente finito.*

**Observação 1.53.** *A fronteira de um domínio de Dirichlet é formada pela a união de geodésicas, raios geodésicos ou segmentos geodésicos. A cada uma destas geodésicas (raios ou segmentos) chamaremos de* ***aresta ordinárias****. Diremos que um ponto da fronteira de um domínio de Dirichlet é um* ***vértice ordinário*** *se este for a interseccção de duas arestas ordinárias distintas de* $\mathcal{D}_p(\Gamma)$.

**Teorema 1.54.** *([14], pág.: 92) Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet* $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ *contém exatamente dois pontos.*

Vemos então que se $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ possui um número finito de arestas, este é necessariamente um número par. Mais ainda, dada uma aresta $\mathcal{A}_1$, existe uma única outra aresta $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{A}_1$ e um único elemento de $T \in \Gamma$ tal que $T(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$. Dizemos neste caso que $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ é um **par de arestas congruentes** e que $T$ *relaciona* o par, ou então que $T$ **emparelha as arestas**. Observemos que se $T$ relaciona o par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, então $T^{-1}$ também o relaciona.

**Teorema 1.55.** *([20], pág.: 74) Seja* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ *domínio de Dirichlet de* $\Gamma$. *Considere o conjunto*

$$\{T_i |\ i \in I\}$$

*de elementos de* $\Gamma$ *que relaciona arestas distintas de* $\mathcal{D}$. *Então,* $\{T_i |\ i \in I\}$ *é o conjunto de geradores de* $\Gamma$.

**Definição 1.56.** *Definimos um ciclo como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como sendo um conjunto da forma*

$$\{T(z) |\ T \in \Gamma e\ z e\ T(z)\ são\ vértices\ de\ \mathcal{D}_p(\Gamma)\}.$$

**Definição 1.57.** *Um grupo Fuchsiano* $\Gamma$ *é dito* ***co-compacto*** *se o espaço quociente* $\mathbb{H}^2/\Gamma$ *for compacto.*

Os próximos resultados são importantes para o nosso trabalho.

**Teorema 1.58.** *([20], pág.: 72) Seja* $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ *domínio de Dirichlet de* $\Gamma$. *Sejam* $v_1, ..., v_r$ *vértices de um ciclo e sejam* $\theta_1, ..., \theta_r$ *os ângulos internos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por* $m$ *a ordem do estabilizador em* $\Gamma$ *de um dos vértices do ciclo, temos que*

$$\theta_1 + ... + \theta_r = \frac{2\pi}{m}.$$

**Definição 1.59.** *Seja* $\Gamma$ *um grupo Fuchsiano. Então,* $\mathcal{P}$ *é dito um* ***polígono fundamental convexo*** *de* $\Gamma$ *quando* $\mathcal{P}$ *e convexo e localmente finito em um domínio fundamental de* $\Gamma$.

Sejam $\mathcal{P}$ um polígono fechado conexo em $\mathbb{H}^2$ e $\mathcal{A}$ o conjunto e todos as arestas de $\mathcal{P}$.

**Definição 1.60.** *Um emparelhamento de arestas é o conjunto* $\Phi = \{\gamma_\tau |\ \tau \in \mathcal{A}\}$ *de isometrias que, para toda aresta* $\tau \in \mathcal{A}$:

**i)** *Existe uma aresta* $\tau' \in \mathcal{A}$ *com* $\gamma_\tau(\tau') = \tau$*;*

**ii)** *As isometria* $\gamma_\tau$ *e* $\gamma'_\tau$ *satisfazem a relação* $\gamma'_\tau = \gamma_\tau^{-1}$*;*

**iii)** *Se* $\tau$ *for aresta de* $\mathcal{P}$*, então* $\tau' = \mathcal{P} \cap \gamma_\tau^{-1}(\mathcal{P})$*.*

### 1.2.4 Assinatura de um grupo Fuchsiano

Seja $\Gamma$ um grupo Fuchsiano co-compacto. Temos que todo domínio de Dirichlet é compacto e portanto $\Gamma$ é geometricamente finito. Se considerarmos então domínio de Dirichlet $\mathcal{D}$ de $\Gamma$, temos um número finito de vértices de um ponto fixo de elementos elípticos de $\Gamma$. Se $v_1, v_2$ forem vértices de um mesmo cíclo então os estabilizadores $\Gamma_{v_1}$ e $\Gamma_{v_2}$ são conjugados, e tem portanto a mesma ordem, e podemos assim falar da ordem de um ciclo. Sejam $m_1, ..., m_r$ as ordens distintos ciclos elípticos de $\mathcal{D}$. Notemos que os pontos fixos de elementos elípticos devem estar contidos na fronteira de qualquer domínio fundamental, de modo que cada ciclo é representado na fronteira de qualquer domínio fundamental. Temos então que os números $m_1, ..., m_r$ não dependem de $\mathcal{D}$ mas apenas de $\Gamma$.

Assim $\mathcal{D}/\Gamma$ é superfície compacta, orientável, de gênero $g$, com $r$ pontos $p_1, ..., p_r$ diferenciados.

**Definição 1.61.** *Nas condições acima, chamamos de* ***assinatura*** *de* $\Gamma$ *ao conjunto de inteiros* $(g; m_1, ..., m_r)$*.*

Assim podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 1.62.** *([20], pág.: 91) Seja* $\Gamma$ *grupo Fuchsiano co-compacto e* $(g; m_1, ..., m_r)$ *sua assinatura. Temos*

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi \left[ (2g-2) + \sum_{k=1}^{r} \left( 1 - \frac{1}{m_k} \right) \right].$$

## 1.3 Trigonometria hiperbólica

Seja $T_\triangle$ um triângulo hiperbólico compacto no plano hiperbólico com lados (arestas) $a, b$ e $c$. Tal como no caso para um triângulo euclidiano, existem leis trigonométricas no plano hiperbólico que relacionam os ângulos internos de $T_\triangle$ e os comprimentos hiperbólicos dos lados de $T_\triangle$.

Suponhamos que apenas um dos vértice de $T_\triangle$ esteja no infinito, isto é, em $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Vamos ter duas arestas que serão determinadas por raios geodésicos, enquanto a terceira é determinada por um segmento geodésico, tem ângulo oposto a 0. Supondo assim que os ângulos do triângulo tem medida $\alpha, \beta$ e 0, com $\alpha$ e $\beta$ não nulos, $|a| = |b| = \infty$ e $0 < |c| < \infty$. Temos os seguintes teoremas:

**Teorema 1.63.** *([7], pág.: 146) Para qualquer triângulo com ângulos $\alpha$, $\beta$, 0, com $\alpha$ e $\beta$ não-nulos, temos:*

*(i)* $\cosh c = \dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$.

*(ii)* $\operatorname{senh} c = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$.

**Teorema 1.64.** *([7], pág.: 145) Seja $T$ um triângulo com ângulos $\alpha$, 0, $\pi/2$ ($\alpha \neq 0$). Então:*

*(i)* $\operatorname{senh} b \cdot \tan\alpha = 1$.

*(ii)* $\cosh b \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1$.

*(iii)* $\tan b \cdot \sec\alpha = 1$.

Para triângulos com os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\pi/2$ temos os seguintes resultados:

**Teorema 1.65.** *([7], pág.: 147) Para qualquer triângulo com ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\pi/2$, temos:*

*(i)* $\tanh b = \operatorname{senh} a \tanh\beta$.

*(ii)* $\operatorname{senh} b = \operatorname{senh} c \operatorname{sen}\beta$.

*(iii)* $\tanh a = \tanh c \cos\beta$.

**Teorema 1.66.** *([7], pág.: 147) Para qualquer triângulo com ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\pi/2$, temos:*

*(i)* $\cosh a \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$.

*(ii)* $\cosh c = \cot\alpha\cot\beta$.

A seguir apresentaremos o **Teorema de Pitágoras hiperbólico**.

**Teorema 1.67.** *([7], pág.: 146) Dado um triângulo com ângulos $\alpha, \beta, \frac{\pi}{2}$ e lados opostos de comprimento $a, b, c$, temos*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

Para os próximos casos consideraremos um triângulo hiperbólico com lados $a, b, c$ (finitos) e ângulos opostos $\alpha, \beta, \gamma$, respectivamente.

**Teorema 1.68.** *([3], pág.: 183)*

*(i) Lei dos cossenos I:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \cos \gamma.$$

*(ii) Lei dos cossenos II:*

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \beta}.$$

*(iii) Lei dos senos:*

$$\frac{\operatorname{senh} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{senh} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{senh} c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

### 1.3.1 Área Hiperbólica

Assim como na geometria Euclidiana, podemos calcular a área no plano hiperbólico, e veremos logo a seguir um dos principais resultado para calculo de área, que calculado sobre os triângulos hiperbólicos. Vejamos,

**Definição 1.69.** *Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{H}^2$, definimos sua área, denotada por $\mu(A)$, como sendo a seguinte integral*

$$\mu(A) = \int_A \frac{dxdy}{y^2},$$

*se esta existir e for finita.*

**Teorema 1.70.** *([14], pág.: 42) Seja $T$ um triângulo com ângulos internos $\alpha, \beta, \gamma$, então*

$$\mu(T) = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

O Teorema 1.70 é conhecido como Fórmula de Gauss-Bonnet.

**Teorema 1.71.** *([1], pág.: 253) Seja $\alpha, \beta, \gamma$ um triângulo cujo os lados são segmentos geodésicos. Então $\alpha, \beta, \gamma$ possui área finita.*

## 1.4 Superfície de Riemann

Ao longo deste trabalho, trabalharemos com superfície de Riemann de gênero $g$. Mas para compreendermos um pouco melhor, vamos definir primeiramente o que é uma variedade diferencial, em seguida algumas definições.

**Definição 1.72.** *Uma **variedade diferencial** de dimensão "n" é um conjunto $M$ e uma família de aplicações injetoras $\varphi_k : A_k \subset \mathbb{R}^n \to M$, onde $k$ pertencente ao conjunto de índices e $A_k$ aberto de $\mathbb{R}^n$ e $M$ satisfazendo:*

1. $\bigcup_k \varphi_k(A_k) = M$;

2. *Para todos $k_1$ e $k_2$, com $\varphi_{k_1}(A_{k_1}) \cap \varphi_{k_2}(A_{k_2}) = V \neq \emptyset$, os conjuntos $\varphi_{k_1}^{-1}(V)$ e $\varphi_{k_2}^{-1}(V)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\varphi_{k_2}^{-1} \circ \varphi_{k_1}$ são diferenciáveis;*

3. *A família $\{(A_k, \varphi_k)\}$, chamada de **estrutura diferenciável**, é a máxima relativamente às condições acima.*

**Definição 1.73.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z_0 \in \Omega$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que $f$ tem **derivada complexa** em $z_o$ se o limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe. Se $f$ tem derivadas complexas em todos os pontos de $\Omega$, então ela é chamada **função holomorfa**.*

**Definição 1.74.** *Uma função $f$ é dita **meromorfa** em $\Omega$, se $f$ é holomorfa em $\Omega$, exceto nas singularidades isoladas, que são todos pólos,ou singularidades removivéis de $f$.*

**Definição 1.75.** *Seja $R$ um espaço de Hausdorff conexo com a família $\{(U_j, \varphi_j\}_{j \in J}$ satisfazendo as condições a seguir:*

1. *Onde $U_j$ é um subconjunto aberto de $R$, e $R = \bigcup_{j \in J} U_j$;*

2. *onde $\varphi_j$ é um homeomorfismo de $U_j$ sobre um conjunto aberto $D_j$ no plano complexo $\mathbb{C}$;*

3. *Se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então a função transição*

$$\varphi_{kj} = \varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \to \varphi_k(U_j \cap U_k)$$

*é uma aplicação biholomorfa, isto é, um homeomorfismo holomorfo.*

*Então, $R$ é uma **superfície de Riemann**.*

São exemplo de superfícies de Riemann:

- Plano complexo $\mathbb{C}$;
- O semiplano superior $\mathbb{H}$;
- A esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ( homeomorfo a esfera);
- g-toros.

A superfície de Riemann homeomorfa a esfera com g alças é chamada de **superfície de Riemann fechada de gênero g**. A esfera de Riemann é de gênero 0, o Toro é de gênero 1. É conhecido que cada superfície de Riemann compacta é uma superfície fechada de gênero finito.

**Definição 1.76.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos e $I = [0,1]$. Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ dizem-se* ***homotópicas*** *quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \to Y$$

*tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação $H$ chama-se então uma* ***homotopia*** *entre $f$ e $g$.*

**Definição 1.77.** *Sejam $X$ um espaço topológico e $p_0$ um ponto de $X$. O caminho em $X$ que começa e termina em $p_0$ é chamado de* ***laço*** *(ou loop) baseado em $p_0$. O conjunto de classes homotópicas dos laços baseada em $p_0$, com a operação $*$, é chamado de* ***grupo fundamental*** *de $X$ baseada no ponto $p_0$. E denotamos por*

$$\pi_1(X, p_0).$$

Seja $R$ uma superfície de Riemann de gênero $g$. Consideremos um ponto $p_0$ sobre $R$ e o grupo fundamental $\pi_1(R, p_0)$, então

- $R$ tem $2g$ geradores.
- Se tomarmos $p_0$ sobre $R$ e cortarmos $R$ ao longo das curvas simples e fechadas $A_1, B_1, ..., A_g, B_g$, tendo como ponto base $p_0$, temos um domínio homeomorfo ao polígono convexo com $4g$ lados.

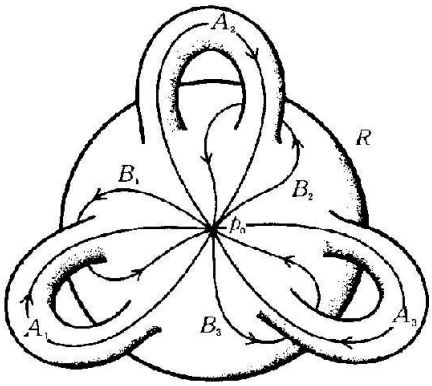



Figura 1.4: Superfície de Riemann $R$ de $g = 3$

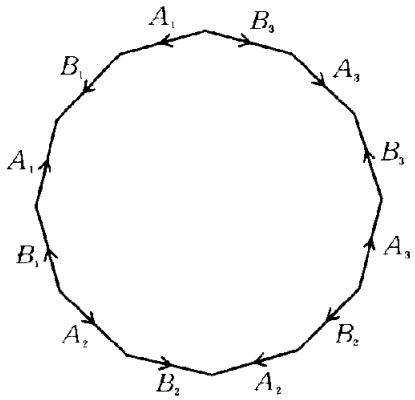



Figura 1.5: polígono fundamental associado a $R$ com $g = 3$

## 1.5 Geometria de superfícies hiperelípticas

**Definição 1.78.** *Uma superfície de Riemann $S$ é dita* ***hiperelíptica*** *se ela admite uma função meromorfa com 2 pólos contando a multiplicidade.*

**Definição 1.79.** *Um* ***revestimento ramificado*** *é uma aplicação entre espaços topológicos $\tilde{\Sigma}$ e $\Sigma$ que é um recobrimento, exceto num subconjunto discreto de $\Sigma$.*

Pela fórmula de Hurwitz, o número de pontos de ramificações do revertimento $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ e necessariamente $2g + 2$, onde $g$ designa o gênero de $S$.

Todas as superfícies de Riemann de gênero inferior ou igual a 2 são hiperelíptica. Para esfera e toros podemos facilmente exibir morfismo de grau 2: $z \to z^2$ para a esfera, a função $\wp$ de Weierstrass para os toros. Para gênero 2, o resultado vem do Teorema de Riemann-Roch.

**Teorema 1.80.** *([27], pág.: 110) Seja $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ um revestimento ramificado de grau 2 e $z_1, ..., z_{2g+2}$ os pontos de ramificação (sobre $\hat{\mathbb{C}}$). Então, $S$ é a superfície de Riemann associada à curva planar de equação*

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - z_i)$$

*(somente $2g + 1$ termos se $z_i$ vale $\infty$ ). Reciprocamente, a superfície de Riemann associada a uma curva de equação $y^2 = \prod_1^n (x - z_1)$ ($z_i \in \mathbb{C}$ distintos) é hiperelíptica de gênero $\frac{n-1}{2}$. Em particular, existe uma curva hiperelíptica de cada gênero.*

Aparentemente, as superfície de hiperelípticas de gênero $g$ são parametrizadas por $2g - 1$ coordenadas complexas, porque três $z_i$ de $2g + 2$ podem ser fixos por ação de um homografia sobre a esfera. Os espaço de módulos de uma superfície hiperelíptica de gênero $g$ é de dimensão $2g - 1$ complexo, contra $3g - 3$ para espaço de módulos da superfície de Riemann de gênero $g$.

**Corolário 1.81.** *([27], pág.: 111) O morfismo $f : S \to \hat{\mathbb{C}}$ de grau 2 é único automorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ para $g \geq 2$. Em particular, os pontos de ramificação sobre $S$ está bem definido.*

As superfícies hiperelípticas se caracterizam pela existência de uma **involução hiperelíptica**

**Teorema 1.82.** *([27], pág.: 111) Uma superfície de Riemann $S$ é hiperelíptica se, e somente se, existe uma involução conforme $\iota_S$ sobre $S$ fixando exatamente $2g + 2$ pontos.*

**Definição 1.83.** *A involução $\iota_S$ é chamada de **involução hiperelíptica** de $S$, e esse pontos fixados são **pontos de Weierstrass** de $S$.*

**Exemplo 1.84.** *Descrevendo topologicamente a situação a seguir. Uma maneira de representar o 8 (figura) com o contorno no plano $xy$ é da seguinte forma*

$$(((x-1)^2 + y^2) - 1)(((x-1)^2 + y^2) - 1) = 0. \tag{1.2}$$

*Agora analisando o 8 (1.2) como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. O limite da sua vizinhança tubular é uma superfície de gênero 2. Rotacionando o eixo $x$ por $\pi$, a involução hiperelíptica fixa 6 pontos nesta superfície, ou seja, um par de pontos fixos perto de cada um dos pontos $-2, 0, +2$ do eixo $x$. O quociente pela a rotação é homeomorfo a esfera.*

## 1.6 Teoria de Grafo

**Definição 1.85.** *Um **grafo** $G$ é formado por um par $(V(G), A(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito não-vazio. Os elementos de $V(G)$ são chamados de **vértices** e $A(G)$ uma família de pares ordenados de elementos que são chamados de **arestas**, não necessariamente distinto de $V(G)$. Uma família é uma coleção de elementos, os quais podem ser repetidos. Uma aresta $\{w_1, w_2\} \in A(G)$ será denotada por $w_1w_2$.*

O grau de um vértice $w$ é o número de arestas que contém $w$, denotado por $g(w)$.

**Definição 1.86.** *Um grafo $H$ é um **subgrafo** de um grafo $G$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Um subgrafo de $G$ é **próprio** se $V(H) \neq V(G)$ ou $A(H) \neq A(G)$.*

Um **caminho** $C$ em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, iniciando e terminando com vértices. Suponhamos

$$C = w_0, a_1, w_1, a_2, w_2, a_3, ..., a_n, w_n$$

onde $a_i = (w_{i-1}, w_i)$, $0 < 1 \leq n$. Dizemos que $C$ é um caminho de $w_0$ a $w_n$ e este pode ser denotado por $w_0w_1...w_n$.

**Definição 1.87.** *Um grafo $G$ é **conexo** se, para qualquer par, $v$ e $w$, de vértices de $G$ existe um caminho com extremos de $v$ e $w$. Caso contrário, $G$ é desconexo.*

Um grafo $G$ desconexo é formado por pelo menos dois subgrafos conexos disjuntos em relação ao vértices. Cada um destes subgrafos é dito ser uma componente conexa de $G$.

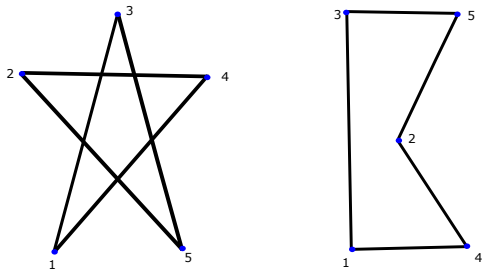



Figura 1.6: Grafos isomorfos.

**Definição 1.88.** *Dois grafos $G$ e $H$ são ditos **isomorfos**, se existe uma bijeção $f : V(G) \to V(H)$ tal que*

$$vw \in A(G) \Leftrightarrow f(v)f(w) \in A(H)$$

*para todo $v, w \in G$ e além disso, o número de arestas unindo $v$ e $w$ em $G$ é igual ao número de arestas unindo $f(v)f(w)$.*

Se $G$ é isomorfo a $H$ então, dois vértices $v$ e $w$ são adjacentes em $G$ se, e somente se, $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em $H$.

# Capítulo 2

# Sístole

A Figura 2.1, representa uma superfície $S$ tridimensional do espaço euclidiano, uma curva fechada em $S$ é uma curva que parece topologicamente com um círculo, porque $S$ tem a topologia de um toro. Em $S$ vão existir curvas fechadas que não são contráteis em um ponto de $S$. Iremos ver que a sístole de $S$, é o menor comprimento dessas curvas. Teremos um limite inferior positivo que será realizado por pelo menos uma curva, que será uma geodésica fechada. O termo matemático sístole foi adotado em 1980.

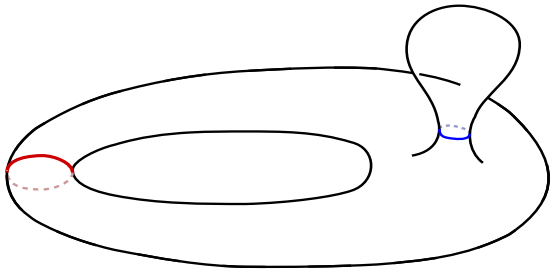


Figura 2.1: A geodésica fechada à direita não é uma sístole porque é contrátil.

A Figura 2.1 mostra intuitivamente que, dada uma sístole de $S$, a área de $S$, $A(S)$, não pode ser demasiadamente tão pequena. A pergunta natural é: Qual a relação da sístole com $A(S)$? Assim surgiu a procura de um tipo de desigualdade isoperimétrica, que a relação entre uma comprimento de uma curva e área da superfície onde tal curva se encontra. A primeira pessoa que resolveu este problema foi Loewner, que em 1949 mostrou essa relação para qualquer superfície do tipo topológico de um toro. Assim surgindo a desigualdade isosistólica. Loewner provou que essa igualdade é alcançada apenas para o toro planar.

Logo depois, as pesquisas foram no caminho de generalizar o Teorema de Loewner. Então considerando superfícies mais gerais do que a do toro, por exemplo o plano projetivo, P.PU um estudante de Loewner conseguiu estabelecer também uma relação para essa superfície. Mas o principal avanço nestas generalizações foi em 1983 com Gromov que também conseguiu introduzir alguns novos conceitos na geometria. Porém para outros questionamentos sobre esse assunto ainda contínua em aberto.

Apesar da sua introdução bastante recente, as sístoles já são utilizadas em vários domínios, um deles são na geometria algébrica e na topologia algébrica, e também está relacionado com entropia e o volume esférico.

Além do mais, encontrar as sístoles de uma superfície é uma tarefa árdua e difícil, e neste capítulo depois de conhecer os principais resultados da desigualdades isosistólica, falaremos das Constantes de Bers, que é um limitante superior para as geodésicas que decompõem uma superfície de Riemann de gênero $g \geq 2$ em calças, e são importantes para majorar os comprimentos da sístole que iremos considerar. As principais referências desse capítulo são: [4], [6], [7], [8], [11], [13], [16], [17], [21], [22], [28], [29] e [30].

## 2.1 Panorama sistólico

**Definição 2.1.** *Seja $M$ uma variedade riemanniana fechada não simplesmente conexa, munida de uma métrica $\phi$. A **sístole** de $M$, denotada por*

$$sys(M, \phi),$$

*é definida como menor comprimento das geodésicas fechadas, simples e não contráteis. Para não existir confusão, chamaremos as sístoles de $M$ as geodésicas fechadas, simples e não contráteis de menor comprimento.*

*Um dos exemplos de geodésicas fechadas são as curvas obtidas pelo eixo de uma transformação hiperbólica em $\mathbb{H}^2$, que quando passada por um quociente $\Gamma$ formam uma superfície e esses eixos serão geodésicas fechadas. No Capítulo 4, calcularemos os comprimentos dessas geodésicas a partir da matriz associada a uma transformação hiperbólica.*

Outro exemplo de menores geodésicas, são curvas que decompõe uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ em calças.

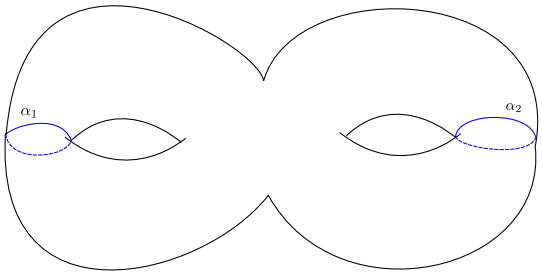



Figura 2.2: Bitoro.

### 2.1.1 Desigualdades isosistólicas

De maneira geral, o interesse em sístoles reside em pesquisar desigualdades universais, chamadas isosistólicas, que tem a seguinte notação:

$$sys^n(M,\phi) \leq c_M Vol(M),$$

onde $n$ designa a dimensão da variedade e $c_M$ uma constante estritamente positiva que não depende da métrica $\phi$. A exploração deste tema ganhou um grande impacto em 1983 com a publicação do trabalho de M. Gromov. Este provou a existência de uma constante $c_M$ para uma larga escala de variedades, e estabeleceu assim desigualdades isosistólicas para superfície compactas. A determinação de constante $c_M$ ótimas (ou ideais) e a descrição de métricas ainda estão sendo procuradas, mas temos casos bastante conhecidos.

Em 1949, Loewner provou a primeira desigualdade isosistólica e ele obteve o seguinte resultado.

**Teorema 2.2.** *([21], pág.: 42) Toda métrica riemanniana $\phi$ no toro $T^2$ satisfaz a desigualdade*

$$sys^2(T^2,\phi) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot área(T^2,\phi), \tag{2.1}$$

*onde $c_M = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ é a constante de Hermite.*

*A métrica atinge o valor ótimo em 2.1 se ela for necessariamente plana e homotópica ao quociente de $\mathbb{C}$ pela estrutura gerada pelas raízes cúbicas da unidade.*

Logo depois, P.Pu em 1952 apresentou o resultado para o plano projetivo

**Teorema 2.3.** *([21], pág.: 40) Seja $\mathbb{RP}^2$ o plano projetivo real com a métrica riemanniana $\phi$. Então,*

$$sys^2(\mathbb{RP},\phi) \leq \pi/2 \cdot área(\mathbb{RP}^2),$$

*onde $\pi/2$ é a melhor constante.*

E em 1986, C. Barvard apresentou o resultado para a garrafa de Klein.

**Teorema 2.4.** *([4], pág.: 439) Para toda métrica riemanniana $\phi$ sobre a garrafa de Klein $\mathbb{K}$,*

$$sys^2(\mathbb{K},\phi) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot área(\mathbb{K})$$

*com,*

**i)** *igualdade para métrica $K_0$ ;([4], p. 440)*

**ii)** *estritamente desigual se $\phi$ é suave.*

### 2.1.2 Sístole de uma superfície de Riemann

A sístole de uma superfície de Riemann foi objeto de profundos estudos entre 1993 e 2003. O artigo [29] de Paul Schumtz Schaller marcou um avanço importante nas pesquisas de superfícies maximais para a sístole. O trabalho [5] de C. Bavard fornece um bom quadro teórico que é baseado na teoria das malhas euclidianas.

Em 1993, Paul Schumtz Schaller apresenta uma nova abordagem. A sístole torna-se um função contínua sobre o espaço de Teichmüller [1],$\mathcal{T}_g$ , invariante sobre ação do grupo modular. E C. Bavard definiu a sístole para uma superfície de Riemann como

**Definição 2.5.** *A sístole de uma superfície de Riemann é definida como a menor função de comprimento geodésico sobre o espaço de Teichmüller e invariante sobre a ação de um grupo modular.*

Schumtz Schaller generalizou assim a sístole. Considerando a família de K-geodésicas fechadas, simples e disjuntas, ele associa a cada uma delas uma função comprimento correspondente em todo ponto ao comprimento da maior geodésica:

$$l_{\gamma_1,...,\gamma_k}(M) = sup(l_{\gamma_1}(M), ..., l_{\gamma_k}(M)) \qquad (M \in \mathcal{T}_g)$$

E introduziu a **K-sístole** como o mínimo das funções comprimentos

$$sys_k = \inf\{l_{\{\gamma_1,...,\gamma_k\}} | \text{ onde } \gamma_1, ..., \gamma_k \text{ são K geodésicas fechadas simples e disjuntas } \}$$

Um problema clássico de geometria de superfície é a procura de métricas hiperbólicas sobre uma superfície de dado gênero que maximiza a sístole. Métricas que maximizam localmente sobre essas superfícies são ditas *extremas*. Porém, até o momento, pouco se sabe sobre essas superfícies. Na verdade, somente para gênero 2, está completamente resolvido, com a existência de uma única superfície extrema que é a superfície de Bolza. Para gênero 3 até o momento ainda não foram encontradas.

## 2.2 Constante de Bers

Toda superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser decomposta em calças (ou Y-peças) por geodésicas fechadas, simples e disjuntas. Mas o que podemos dizer sobre o comprimento das geodésicas envolvidas nesta decomposição? Bers mostrou que existe uma constante que depende apenas do gênero que limita superiormente o tamanho destas geodésicas, e este teorema de Bers tem numerosas consequências para a geometria de superfície de Riemann compactas. Antes de apresentarmos este resultado mostraremos como é feito essas calças, que são blocos de construção para toda superfície de Riemann compacta de gênero maior do que 1.

[1] Sobre o assunto indicamos as seguintes referências: [13], [18], [25] e [31].

### 2.2.1 Colagem

Seja $S$ e $S'$ dois polígonos hiperbólico convexos de $\mathbb{H}^2$ tal que os ângulos interiores não são maiores que $\pi$. Usando uma isometria $m \in Isom(\mathbb{H}^2)$ que move de acordo com a Figura 2.3 Então $S* := m(S) \cup S'$ é novamente um polígono hiperbólico convexo.

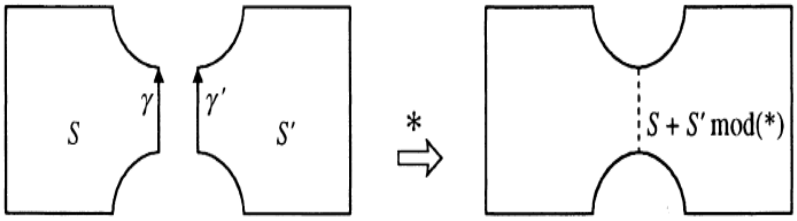



Figura 2.3: Colagem.

Agora observando a construção $S*$ nos necessitamos mover $S$. Colamos $S$ e $S'$ ao longo de $\gamma$ e $\gamma'$. Assumindo $S$ e $S'$ disjuntos. Seja $\gamma : [0,1] \to S$ e $\gamma' : [0,1] \to S'$ uma parametrização de um dos lados. Então existe uma isometria $m \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que

$$m(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad t \in [0,1].$$

Definindo a relação de equivalência da união disjunta $S \cup S'$ a seguir.

**Definição 2.6.** *Todo ponto $p = \gamma(t), t \in [0,1]$, a classe de equivalência consiste em dois pontos $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$. Para todo ponto $p \notin \gamma \cup \gamma'$ a classe de equivalência consiste em um único ponto $p$. Diremos que a relação de equivalência e definida pela a* ***condição de colagem***

$$m(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad t \in [0,1]. \quad (*)$$

*e denotada por*

$$F = S + S' mod(*)$$

*$F$ é isométrico ao domínio $S* := m(S) \cup S'$*

### 2.2.2 Construção das calças

Seja $G$ um hexágono geodésico com ângulos retos no plano hiperbólico com lados consecutivos

$$\alpha_1, c_3, \alpha_2, c_1, \alpha_3, c_2$$

e seja $G'$ uma cópia disjunta de $G$ com lados correspondentes

$$\alpha'_1, c'_3, \alpha'_2, c'_1, \alpha'_3, c'_2$$

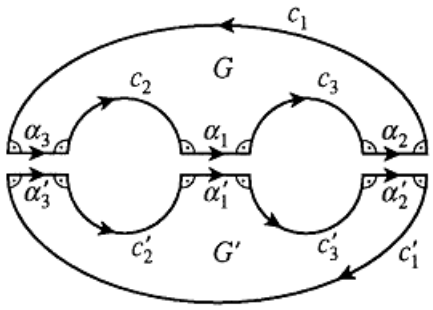



Figura 2.4: Construção da calça.

Parametrizamos todos os lados no intervalo $[0,1]$, com uma velocidade constante

$$\begin{array}{llll} t \mapsto & \alpha_i(t), & t \mapsto & \alpha'_1(t) \\ t \mapsto & c_i(t), & t \mapsto & c'_1(t), \end{array}$$

onde $t \in [0,1]$ e $i = 1,2,3$, tal que os lados de $G$ e $G'$ em conjunto formam uma curva de fronteira fechada.

Tomando a condição de colagem

$$\alpha_i(t) = \alpha'_i(t) := a_i(t) \qquad t \in [0,1], i = 1,2,3, \qquad (**)$$

definimos uma 3-esfera com furos.

Seja $Y$ uma superfície tal que

$$Y = G + G' mod(**),$$

que herda as estruturas hiperbólicas de $G$ e $G'$.

Uma vez que todos os ângulos são ângulos retos, as curvas da fronteira

$$t \mapsto \gamma_i(t) := \begin{cases} c_i(2t), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ c'_i(2-2t), & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}, \qquad (2.2)$$

onde i=1,2,3, são geodésicas fechadas.

Assim, $Y$ é uma par de calças.

### 2.2.3 Constante de Bers

**Definição 2.7.** *Seja $S$ superfície compacta de Riemann de gênero $g \geq 2$. Uma **partição** em $S$ é um conjunto de $3g-3$ geodésicas fechadas, simples e mutualmente disjuntas.*

Bers provou que para todo superfície compacta de Riemann de gênero $g \geq 2$, a partição $\gamma_1, ..., \gamma_{3g-3}$ tem comprimento geodésico

$$l(\gamma_1), ..., l(\gamma_{3g-3}) \leq B(g),$$

onde $B(g)$ é uma constante que depende somente do gênero $g$. A melhor constante possível com essa propriedade é denotado por $B(g)$ e é chamada de **Constante de Bers**. O melhor resultado conhecido é o de Peter Buser [11] que diz:

**Teorema 2.8.** *([11], pág.: 123) Cada superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ tem uma partição $\gamma_1, ..., \gamma_{3g-3}$ que satisfaz a desigualdade*

$$l(\gamma_k) \leq 4k \log \frac{8\pi(g-1)}{k}, \quad k = 1, ..., 3g-3.$$

*Diante de uma ordenação sobre o comprimento da partição $\gamma_1, ..., \gamma_{3g-3}$, temos que a maior geodésica é limitada por $\leq 26(g-1)$, ou seja, $l(3g-3) \leq 26(g-1)$.*

A partir desse teorema, temos o seguinte limite superior para a constante de Bers

$$B(g) \leq 26(g-1). \tag{2.3}$$

Além disso, o próximo resultado dá um limite inferior para $B(g)$.

**Teorema 2.9.** *([11], pág.: 123) $B(g) \geq \sqrt{6g} - 2$ para todo $g \geq 2$.*

Agora vejamos outro teorema, mas agora para uma variedade bidimensional.

**Teorema 2.10.** *([11], pág.: 124) Seja $M$ uma variedade de Riemann bidimensional compacta e orientável arbitrária de gênero $\geq 2$. Então, existe uma decomposição de $M$ em 3-esferas com alças por geodésicas simples e mutualmente disjuntas $\gamma_1, ..., \gamma_{3g-3}$ de comprimento*

$$l(\gamma_k) \leq 3\sqrt{kA}, \quad k = 1, ..., 3g-3,$$

*onde $A$ é área de $M$.*

Seja $S$ uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$. Pelo teorema de Gauss-Bonnet, a área de $S$ é

$$\Delta_S = 4\pi(g-1)$$

.

Dado $p \in S$, denotamos $U_p^r$ o conjunto dos pontos mais próximo de $p$

$$U_p^r = \{q \in S | \text{dist}(p,q) < r\}$$

para $r > 0$ suficientemente pequeno. $U_p^r$ é isométrico a um disco aberto de raio r em $\mathbb{H}^2$.

**Definição 2.11.** *O supremo de todo r para qual $U_p^r$ é isométrico a um disco é chamado de **raio de injetividade** de $S$ em $p$, e denotado por $r_p(S)$. O raio de injetividade de $S$ é definido por*

$$r_{inj}(S) = \inf\{r_p(S) |\, p \in S\}.$$

**Lema 2.12.** *([11], pág.: 96) Seja $r_p(S) = \frac{1}{2}l(\gamma_p)$, onde $\gamma_p$ é a menor geodésica fechada passando por $p$, e $r_{inj}(S) = \frac{1}{2}l(\gamma)$, onde $\gamma$ é a menor geodésica fechada em $S$. Então, $\gamma_p$ e $\gamma$ são curvas simples.*

**Proposição 2.13.** *Em $S$ existe uma geodésica simples e fechada $\gamma$ de comprimento $l(\gamma) \leq 2\,\mathrm{arccosh}(2g-1)$.*

**Demonstração**: Seja $\gamma$ a menor geodésica não-trivial em $S$ e fixando um ponto $p \in \gamma$. Temos que conjunto distância é dado por

$$U = \{q \in S \mid \mathrm{dist}(p,q) < r\}.$$

O raio $r$ é menor que $l(\gamma)/2$ pelo o Lema 2.12. Usando coordenadas polares nos calculamos a área para valores de $r$ de seguinte maneira.

$$\Delta_U = 2\pi \int_0^p \mathrm{senh}\,\rho d\rho = 2\pi(\cosh r - 1)$$

Por outro lado, $U \subset S$ e

$$\Delta_U \leq \Delta_S = 4\pi(g-1).$$

Tomando $r = \frac{1}{2}l(\gamma)$, temos

$$\begin{aligned} 2\pi(\cosh(\tfrac{1}{2}l(\gamma)) - 1) &\leq 4\pi(g-1) &&\Rightarrow \\ \cosh(\tfrac{1}{2}l(\gamma)) - 1 &\leq 2(g-1) &&\Rightarrow \\ \tfrac{1}{2}l(\gamma) &\leq \mathrm{arccosh}(2(g-1)+1) &&\Rightarrow \\ l(\gamma) &\leq 2\,\mathrm{arccosh}(2g-1) \end{aligned}$$

■

Como vimos, a constante de Bers não possui valores exatos, existe apenas limitantes inferiores e superiores. No próximo capítulo, exibiremos um valor para essa constante quando o gênero da superfície for igual a dois.

# Capítulo 3

# Constante de Bers em gênero 2

As geodésicas, fechadas, simples e disjuntas que decompõe a superfície em calças, como vimos no capítulo anterior, são majoradas pela constante de Bers. Temos que essas geodésicas possuem dois limitantes conhecidos $\sqrt{6g-2} \leq B(g) \leq 26(g-1)$, $g \geq 2$. Sabemos que superfície de Riemann com g=2 possui uma geodésica separante.[1]

Neste capítulo trabalharemos com a superfície de Riemann de gênero 2, representada por $X$, construída por Paul Schumtz em [29], onde ela vai maximizar os comprimentos das geodésicas fechadas que decompõem a superfície em calça. Veremos que cada toro limitado por $\xi$, possui três pontos de Weiertrass, $w_0, w_1, w_2$ ou $w_3, w_4, w_5$, que serão próximos um dos outros, e os dois pontos de Weierstrass que situam-se um de cada lado de $\xi$, $w_0$ e $w_3$, serão distantes um do outro, como representado na Figura 3.1.

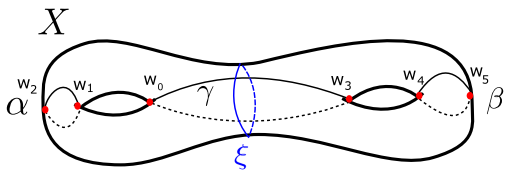



Figura 3.1: Geodésica separante $\xi$

As geodésicas $\alpha, \beta$ e $\gamma$ que decompõem uma superfície de gênero 2 em calças serão as 3-sístole de $X$ que são da seguinte forma: duas geodésicas estarão cada uma em um dos toros limitados por $\xi$, enquanto a terceira liga um ponto de Weiertrass de cada toro, cortando $\xi$ em dois pontos. Para demonstrar isso, vamos apresentar o **grafo de contiguidade**, que veremos a seguir. As principais referências deste capítulo são: [5],[15],[16],[29].

[1]Uma **geodésica separante** de uma superfície de Riemann de gênero $g = 2$, denotada por $\xi$, é uma geodésica que separa esta superfície em dois toros com bordo.

## 3.1 Grafo de contiguidade

Christophe Bavard desenvolveu uma abordagem da sístole sobre uma superfície de Riemann baseado no argumento da densidade de empacotamento de esferas. Sobre esse argumento temos duas observações interessantes: a primeira que os pontos de Weierstrass desempenham um papel preponderante e serão úteis para estudar sua distribuição sobre superfície. A segunda é que se uma superfície de Riemann de gênero 2 possui três geodésicas disjuntas que realizam o raio de injetividade em um ponto, então a 3-sístole é a menor. Com efeito, o limite sobre o raio de injetividade de [5] permite majorar o comprimento destas geodésicas por $2\,\mathrm{arccosh}(2,88)$ dado pelo teorema a seguir:

**Teorema 3.1** ([5], pág.: 192)**.** *Seja $R$ uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ e $\beta_g = \dfrac{\pi}{12g-6}$.*

**i)** *Se um disco aberto de raio $r$ é mergulhado em $R$, então*

$$\cosh r \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \beta_g}.$$

**ii)** *Se um disco fechado de raio $r$ recobre $R$, então*

$$\cosh r \geq \frac{1}{\sqrt{3}\tan \beta_g}$$

A consequência deste Teorema é obtenção de dois invariantes globais de $R$: a **sístole** aqui denotado por $l(R)$ e o **diâmetro** $d(R)$.

**Corolário 3.2.** *Para toda superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$, temos:*

$$\cos \frac{l(R)}{2} \leq \frac{1}{2\operatorname{sen} \beta_g} \quad e \quad \cosh d(R) \geq \frac{1}{\sqrt{3}\tan \beta_g}.$$

Tomando $g = 2$, temos $\beta_g = \dfrac{\pi}{18} = 10^{\circ}$[2] de modo que,

$$\begin{aligned} \cosh \frac{l(R)}{2} &\leq \frac{1}{2\operatorname{sen} 10} \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 0,1736} \\ &\leq \frac{1}{0,3472} \\ &\leq 2,88. \end{aligned}$$

[2] o valor está em graus

Assim,

$$l(R) \leq 2\,\text{arccosh}(2,88).$$

E por [30] é conhecido que $B(2) > 2\,\text{arccosh}(4,67)$.

Introduzimos um grafo geodésico cujos vértices são os pontos de Weierstrass. Tentaremos então determinar as configurações possíveis para este grafo sobre uma hipótese de minoração da 3-sístole $\geq 2\,\text{arccosh}(4,67)$. Neste capítulo consideramos $X$ sendo uma superfície de Riemann de gênero 2 e salvo menção contrária, por geodésica nos entenderemos como geodésica fechada simples e não-contrátil. E também quando não houver confusão o nome da geodésica ainda designará o seu comprimento, ou seja, $\gamma = l(\gamma)$. Para introduzir algumas definições consideremos provisoriamente uma superfície hiperbólica $S$ munida de uma involução hiperelíptica.

**Definição 3.3.** *Chamaremos* ***grafo regular****, todo grafo geodésico obtido pelo quociente de um involução hiperelíptica de um sistema de geodésicas que satisfazem as propriedades a seguir:*

**i)** *cada geodésica passa por exatamente dois pontos de Weierstrass,*

**ii)** *duas geodésicas não se interceptam em único ponto de Weierstrass,*

**iii)** *para cada ponto de Weierstrass passa ao menos uma geodésica.*

**Observação 3.4.**
1. *Os vértices de um grafo regular é bem entendido como os pontos de Weierstrass.*
2. *Por um vértice passa ao menos uma aresta.*
3. *Dois vértice são ligados por no máximo uma aresta.*

**Definição 3.5.** *Chamaremos* ***grafo de contiguidade*** *da superfície $S$, denotada por $G_{cont}(S)$ o grafo métrico obtido pelo quociente das involuções hiperelípticas do conjunto das geodésicas que satisfazem a distância entre um ponto de Weierstrass e o conjunto dos pontos de Weierstrass restantes.*

**Observação 3.6.** *O grafo de contiguidade será construído através dos pontos fixados pelas involuções hiperelípticas, onde os pontos fixos serão as vértices e as geodésicas que ligam esses pontos serão as arestas e isso sobre a superfíce gerada pelo o quociente das involuções hiperelípticas. No caso para uma superfíce de Riemann de gênero $g = 2$ teremos que o grafo de contiguidade estará sobre uma superfície homeomorfa a uma esfera, como vimos no Exemplo 1.84.*

**Observação 3.7.** *Em superfícies com de gênero $g = 2$, teremos 6 pontos de Weierstrass, já que a involução hiperelíptica fixa $2g + 2$ pontos pelo Teorema 1.82.*

O lema seguinte mostra que os pontos do grafo de contiguidade são exatamente os pontos de Weierstrass.

**Lema 3.8.** *Seja $\gamma$ e $\gamma'$ duas geodésicas distintas que satisfazem cada uma a distância entre um ponto de Weiertrass e o conjunto de pontos de Weierstrass que restaram. Então, os pontos de intersecção de $\gamma$ e $\gamma'$ são os pontos de Weierstrass.*

**Demonstração**: Se $\gamma$ e $\gamma'$ tem um ponto de Weierstrass em comum, então o resultado é imediato. Consideremos o caso onde as duas geodésicas não passam pelo mesmo ponto de Weierstrass. Para fixar as ideias, diremos que $\gamma$ passa por $w_1, w_2$ e satisfaz a distância entre $w_1$ e os outros pontos de Weierstrass, e $\gamma'$ passa por $w_3, w_4$ e realiza a distância de $w_3$ e os outros pontos de Weierstrass.

Suponhos por absurdo que existe um ponto $p$ pertencente a $\gamma$ e $\gamma'$. Se por exemplo $d(p, w_2) \leq d(p, w_4)$, então

$$\begin{aligned} d(w_3, w_2) &< d(w_2, p) + d(w_3, p) \\ &< d(w_4, p) + d(w_3, p) \\ &< d(w_3, w_4) \end{aligned}$$

Que é uma contradição. ■

**Observação 3.9.** *As arestas do grafo de contiguidade não se intercepta fora do vértices, assim o grafo de contiguidade é um grafo regular.*

**Definição 3.10.** *Um grafo será dito minimal se minimiza o número de arestas entre os grafos com o mesmo número de componentes conexas. Um subgrafo do grafo $G$ será chamado minimal se minimiza o número de arestas entre os subgrafos de $G$ que tem mesmo número de vértices e componentes conexas que $G$.*

**Exemplo 3.11.** *Apresentamos na Figura 3.2 todos os grafos minimais de 6 vértices, sem vértices isolados; classificados de acordo com número de componentes conexas.*

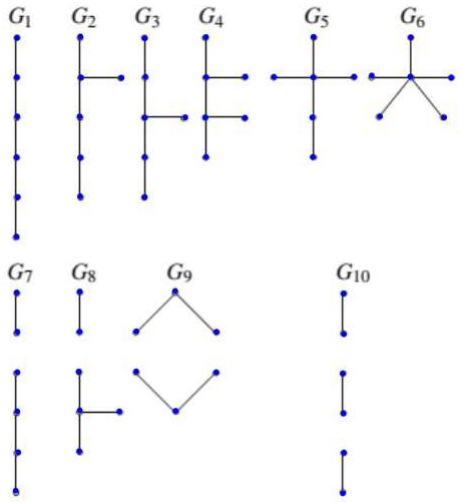



Figura 3.2: Grafo minimal de 6 vértices.

A proposição a seguir nos dá uma configuração dos subgrafos minimais do grafo de contiguidade sobre a hipótese de minoração da 3-sístole.

**Proposição 3.12.** *Seja $X$ uma superfície de Riemann de gênero 2 que satisfaz a hipótese $sys_3 \geq 2\,\mathrm{arccosh}(4, 67)$. Seja $G$ um grafo geodésico sobre a esfera $X/\langle \iota_X \rangle$,*

*tal que $\iota_X$ é uma involução hiperelíptica e os vértices são pontos canônicos. Se nenhum vértice é isolado, e se suas arestas são majorados por $arccosh(2,88)$, então todo subgrafo minimal de $G$ é isomorfo a $G_9$.*

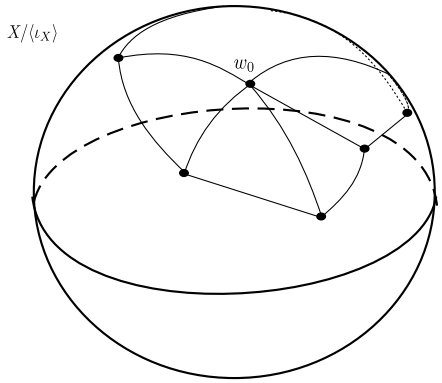



Figura 3.3: Pentágono sobre um esfera singular.

Seja $X$ uma superfície de Riemann de gênero 2 que satisfaz a condição $sys_3 \geq 2\,\text{arccosh}(4,67)$. O quociente $X/\langle\iota_X\rangle$ é uma esfera munida da métrica hiperbólica com 6 singularidades canônicas de ângulo $\pi$. Seja $G$ um grafo geodésico em $X/\langle\iota_X\rangle$ tal que os vértices de $G$ sejam pontos canônicos, nenhum vértice é isolado e o comprimento das suas arestas é majorado por $\text{arccosh}(2,88) < \text{arccosh}(4,67)$. Então, $G$ não pode possuir três arestas disjuntas, caso contrário, estas formariam uma partição de $X$ de comprimento inferior a $2\,\text{arccosh}(4,67)$.

A prova da Proposição 3.12 é dividida em duas partes. A primeira parte eliminamos os subgrafos minimais que não sejam isomorfo a $G_4$ e a $G_9$. E na segunda, eliminamos os subgrafos isomorfos a $G_4$ através da menor geodésica $\gamma$ disjunta da geodésica que liga dois pontos de Weierstrass correspondente a um vértice de grau 3. Então, vamos a demonstração.

**Demonstração**:[Proposição 3.12] Temos que o grafo $G$ não possui três arestas disjuntas e segue então que nenhum subgrafo de $G$ é isomorfo a $G_1$,$G_3$,$G_7$ ou $G_{10}$. Temos agora que mostrar que nenhum subgrafo de $G$ é isomorfo a $G_4, G_6$ ou $G_8$, pois $G_8$ é subgrafo de $G_2$ e $G_5$ .

Primeiramente, suponhamos que $G$ contém um subgrafo $H$ isomorfo a $G_6$. Chamando $w_0$ o vértice de grau 5, ou seja, por $w_0$ passa cinco arestas, e $w_i, i = 1, ..., 5$ vizinhos que suponhamos tem uma ordenação de acordo com a orientação da esfera. Adicionando em $H$ segmentos geodésicos que completa os pares de arestas $(w_0w_1, w_0w_{i+1})$ (com a convenção que $w_6 = w_1$) em triângulos hiperbólicos sem singularidades. Temos assim construído um pentágono hiperbólico não necessariamente convexo, com uma singularidade canônica (Figura 3.3). O ângulo total em $w_0$ é igual a $\pi$ e existe três ângulos $w_iw_0w_{i+1}$ de medida inferior ou igual á $\pi/3$. Como as arestas $w_0w_1$ de comprimento inferior ao $\text{arccosh}(2,88)$, os lados do pentágono em frente a face dos ângulos menores que $\pi/3$ são de comprimento inferior ao $\text{arccosh}(4,67)$, entre estes lados podemos escolher dois que sejam disjuntos e adicionar a aresta $w_0w_i$ que liga dois vértices ainda não utilizado. Este três segmentos associam três geodésicas de $X$, formando uma partição de $X$ com comprimento inferior a $2\,\text{arccosh}(4,67)$ que é um absurdo.

Agora, suponhamos que $G$ contém um subgrafo isomorfo á $G_8$. Denotando por $w_0$ o vértice de grau 3, $w_1, w_2$ e $w_3$ seus vizinhos e $w_4$ e $w_5$ os vértices restantes. Como anteriormente construiremos um polígono hiperbólico singular com vértices vizinhos de $w_0$, este polígono é disjunto da aresta $w_4w_5$. Um dos lados deste polígono é dito $w_2w_3$ de comprimento inferior a $\operatorname{arccosh}(4, 67)$. Assim, as geodésicas acima que são associadas ao lado $w_2w_3$ e as arestas $w_0w_1$,$w_4w_5$ formam uma partição com comprimento inferior a $2\operatorname{arccosh}(4, 67)$ que é um absurdo.

Finalmente, suponhamos que $G$ contém um subgrafo $H$ isomorfo a $G_4$. Nós tomaremos a notação da Figura 3.4, em particular, $w_0$ e $w_3$ serão vértices de grau 3. É impossível adicionar a $H$ uma aresta de comprimento inferior á $\operatorname{arccosh}(4, 67)$ que ligue $w_1$ á $w_2$ (respectivamente $w_4$ e $w_5$) caso contrário aplicando o raciocínio do paragrafo anterior ao grafo formado pela as arestas $w_1w_2, w_0w_3, w_3w_4, w_3w_5$ (respectivamente $w_4w_5, w_0w_3, w_0w_1, w_0w_2$), assim temos um absurdo. Do mesmo modo, é impossível adicionar a $H$ uma aresta de comprimento inferior a $\operatorname{arccosh}(2, 88)$ entre dois vértice $w_iw_j$ tal que $\{w_i, w_j\} \neq \{w_0, w_3\}$, caso contrário, estaríamos no caso anterior.

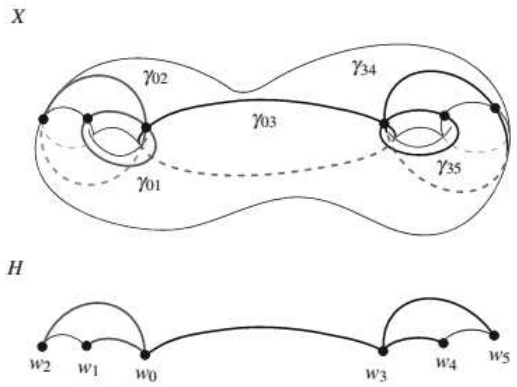



Figura 3.4: Subgrafo isomorfo a $G_4$

Considere a superfície $X$ da Figura 3.1, denotaremos por $\gamma_{ij}$ a geodésica de $X$ correspondendo a aresta $w_iw_j$. Como as geodésicas $\gamma_{01}$ e $\gamma_{02}$ (respectivamente $\gamma_{34}$ e $\gamma_{35}$ se intersectam em exatamente um ponto, existe um único bordo do toro $T_1$ (resp. $T_2$) que o contém. No toro existe duas geodésicas que completam $\gamma_{01}$ e $\gamma_{02}$ (respectivamente $\gamma_{34}$ e $\gamma_{35}$) em triângulos, mas somente uma delas não intercepta por $\gamma_{03}$. Nós chamaremos $\gamma_{12}$ (resp. $\gamma_{45}$) esta geodésica. De acordo com o paragrafo anterior, $\gamma_{12}$ e $\gamma_{45}$ tem o comprimento superior a $2\operatorname{arccosh}(4, 67)$. Deduzimos que o triângulo $(w_0w_1w_2)$ (resp. $w_3w_4w_5$) e os pontos $w_1$ e $w_2$ (resp. $w_4$ e$w_5$) estão a uma distância superior a $\operatorname{arccosh}(1, 62)$ de seus lados opostos. (utilizando teorema de Pitágoras hiperbólico).

Seja $\gamma$ a menor a geodésica disjuntas de $\gamma_{03}$. Estabelecemos uma lista de propriedade de $\gamma$. Em todo bordo, $\gamma$ está um comprimento inferior a $2\operatorname{arccosh}(2, 88)$ pela a desigualdade sistólica do toro em [29]. Então, $\gamma$ não é separante, pois caso contrário, poderíamos construir uma pequena partição e aplicar a desigualdade sistólica do Toro [29]. Em particular, $\gamma$ passa por dois pontos de Weierstrass diferentes de $w_0$ e $w_3$. Enfim, $\gamma$ não esta contido em nenhum dos toros $T_1$ e $T_2$, caso contrário teríamos $\gamma = \gamma_{12}$ ou $\gamma_{45}$, pois $\gamma$ não intersecta $\gamma_{03}$, mas isto é impossível pelo comprimento destas geodésicas, pois $\gamma_{12}$ e $\gamma_{45}$ tem o comprimento superior a $2\operatorname{arccosh}(4, 67)$. Finalmente, observando

que $\gamma$ intersecta uma geodésica $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{34}$ e $\gamma_{35}$ além dos pontos de Weierstrass. Caso contrário, acrescentamos a imagem $\gamma$ em $X/\langle\iota_X\rangle$ ao grafo $H$, poderíamos acrescentar uma nova aresta de comprimento inferior a $\operatorname{arccosh}(2,88)$ entre dois vértices diferente de $w_0$ e $w_3$; logo impossível pelo que foi visto anteriormente.

Supomos que $\gamma$ passa por $w_1$. Assim, de $w_1$ a geodésica $\gamma$ sai do toro $T_1$. Por razões de minimalidade, as geodésicas $\gamma_{01}$ e $\gamma$ não se intersectam além de $w_1$, e dentro de $T_1$, $\gamma$ pode interceptar no máximo uma vez $\gamma_{02}$. Neste caso, a distância percorrida por $\gamma$ em $T_1$ é superior a $\operatorname{arccosh}(1,62)$, como visto acima. Faremos o mesmo para o segundo ponto de Weierstrass pertencente $\gamma$. Partindo do segundo ponto de Weierstrass, $\gamma$ pode interceptar no máximo uma geodésica $\gamma_{ij}$ antes de trocar de toro, e neste caso ela percorre uma distância superior a $\operatorname{arccosh}(1,62)$ antes de atingir outro lado do toro. No entanto, $\gamma/2 < \operatorname{arccosh}(2,88) < 2\operatorname{arccosh}(1,62)$. Portanto, o comportamento descrito acima ocorre para mais de um ponto de Weierstrass. De fato, supondo que $\gamma$ parte de $w_1$ e deixe o toro $T_1$, sem se intercepta nem $\gamma_{01}$ e nem $\gamma_{02}$. Depois de deixar $T_1$, ela intercepta necessariamente $\gamma_{34}$ ou $\gamma_{35}$, digamos $\gamma_{34}$.

Como $\gamma$ e $\gamma_{34}$ têm comprimento inferior a $2\operatorname{arccosh}(2,88)$, e foram construídos a partir de duas geodésicas com caminho geodésico que ligam $w_1$ a $w_3$ ou $w_4$ de comprimento inferior à $\operatorname{arccosh}(2,88)$; e que não intercepta $\gamma_{ij}$ além dos pontos de Weierstrass. Desta forma, temos um caminho geodésico correspondente a uma nova aresta do subgrafo $H$, e esta aresta de fato mostra que subgrafo é isomorfo a $G_1$ ou $G_8$, que é impossível. Então, todo subgrafo minimal de $G$ é isomorfo a $G_9$.

■

Dado uma superfície $X$, olharemos para a relação entre as geodésicas separantes e as geodésicas não-separante de $X$. Em particular, fixando uma geodésica separante $\xi$, estudamos a família $\mathcal{G}_\xi$ de geodésicas que interceptam $\xi$ em exatamente dois pontos.

### 3.1.1 Geodésicas separantes determinadas por duas não-separantes

Notaremos $\mathcal{G}_s$(resp. $\mathcal{G}_{\not s}$) toda geodésica fechada, simples e separante (resp. não-separante) de $X$. Consideremos o subconjunto $A$ de $\mathcal{G}_{\not s} \times \mathcal{G}_{\not s}$ formado por pares de geodésicas não-separantes que se interceptam exatamente em um ponto:

$$A = \{(\alpha,\beta) \in \mathcal{G}_{\not s} \times \mathcal{G}_{\not s} |\ \alpha \text{ e } \beta \text{ se intersepta em exatamente um ponto.}\}$$

Podemos construir uma aplicação sobrejetora

$$\begin{array}{rccc} Sep: & A \subset \mathcal{G}_{\not s} \times \mathcal{G}_{\not s} & \to & \mathcal{G}_s \\ & (\alpha,\beta) & \mapsto & Sep(\alpha,\beta), \end{array}$$

que associa cada par $(\alpha,\beta) \in A$ a única geodésica fechada e simples em uma classe de homotopia livre comutativa $[\alpha,\beta]$. O ponto de intersecção de duas geodésicas implicitamente foi escolhido como ponto base do grupo fundamental.

**Proposição 3.13.** *Se $(\alpha, \beta) \in A$, então uma geodésica fechada e simples que não intercepta $\alpha \cup \beta$ está contido no toro limitado por $Sep(\alpha, \beta)$ que não contém nem $\alpha$ e nem $\beta$.*

Seja $T$ um toro com bordo. Nós chamaremos de **raio** de $T$ um segmento geodésico simples que liga dois pontos do bordo. Dado $\gamma$ uma geodésica fechada, simples de $T$, existe uma único raio $\gamma'$ de $T$ disjunto de $\gamma$. De fato, esta relação induz uma bijeção entre as geodésicas fechadas e os raios de $T$. Denotaremos $\gamma'$ como o **raio dual** de $\gamma$. Os comprimentos de $\gamma$ e $\gamma'$ estão relacionados pela fórmula [15]

$$\text{senh}\left(\frac{\gamma'}{2}\right)\text{senh}\left(\frac{l_\partial(T)}{4}\right) = cosh\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

com $l_\partial$ o comprimento do bordo de $T$. Com ênfase que o raio de $T$ minimiza o comprimento da classe de homotopia livre.

Chamaremos $T_1$ e $T_2$ os toros com borda resultante da decomposição de $\xi$ em $X$. Por $\mathcal{G}_{T_i}$ nos designaremos todas as geodésicas fechadas simples de $T_i$, e por $\mathcal{G}_\xi$ todas as geodésicas fechadas e simples de $X$ que corta $\xi$ em exatamente dois pontos.

As geodésicas fechadas simples de $X$ são estáveis por involução hiperelíptica; cada geodésica $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ passa necessariamente por um ponto de Weierstrass de cada toro $T_1$ e $T_2$. Naturalmente, exite uma geodésica fechada simples que cortam $\xi$ em mais de dois pontos. Assim, podemos escolher a mesma que passa por dois pontos de Weierstrass situado no mesmo lado de $\xi$. Vamos por em correspondência $\mathcal{G}_\xi$ com $\mathcal{G}_{T_1} \times \mathcal{G}_{T_2}$ via ao lema seguinte

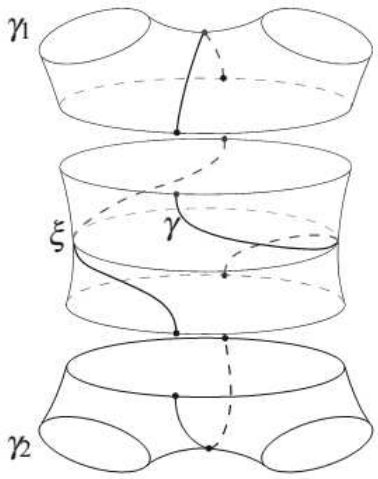



Figura 3.5: Decomposição de um elemento de $\mathcal{G}_\xi$

**Lema 3.14.** *Se $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$, então existe uma única curva $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{G}_{T_1} \times \mathcal{G}_{T_2}$ tal que $\gamma_1$ e $\gamma_2$ são disjuntos de $\gamma$.*

**Demonstração**: Decompondo o traço de $\gamma$ sobre o toro $T_i$, obtemos um cilindro. Com a homotopia e a orientação presente, existe uma única curva fechada, simples sobre o cilindro, $\gamma_i$ é a geodésica desta classe de classe de homotopia livre. ■

### 3.1.2 Relação entre os comprimentos das geodésicas

Considere o par $(X, \xi)$ e fixamos $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$, podemos induzir algumas relações ou igualdades entres os comprimentos das geodésicas. Para cada calça de decomposição por $\xi$ e $\gamma_i$ em $T_i$ temos:

- $a_i$ uma perpendicular comum a $\xi$ e a um bordo identificado por $\gamma_i$ $(i = 1, 2)$;
- $h_i$ a metade do segmento de $\gamma_i'$ que é o raio dual de $\gamma_i$ em $T_i$;

Enfim, designaremos por $\theta_\xi$ as coordenadas de torção sobre $\xi$ em relação a $h_i$ $(i = 1, 2)$. Convencionamos que se $\theta_\xi = 0$, então os segmentos $h_1$ e $h_2$ são suporte para a geodésica $\gamma$. Esta notação pode ser ilustrada na Figura 3.6.

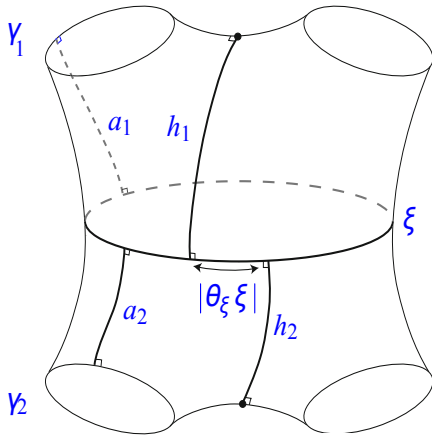



Figura 3.6: Notação

Com a torção qualquer, o comprimento de $\gamma$ pode ser dado pela seguinte fórmula [15]

$$cosh(\tfrac{\gamma}{2}) = \operatorname{senh}(\tfrac{\gamma_1}{2})\operatorname{senh}(\tfrac{\gamma_2}{2})[\operatorname{senh}(a_1)\operatorname{senh}(a_2)\cosh(\theta_x i\xi) + \cosh(a_1)\cosh(a_2)] - \cosh(\tfrac{\gamma_1}{2})\cosh(\tfrac{\gamma_2}{2})$$

Temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \operatorname{senh}(\frac{\gamma_1}{2})\operatorname{senh}(a_i) &= cosh(h_i); \\ \operatorname{senh}(\frac{\gamma_1}{2})\cosh(a_i) &= \cosh(\frac{\gamma_i}{2})\coth(\frac{\xi}{4}), \qquad i = 1, 2; \\ \operatorname{senh}(h_i)\operatorname{senh}(\frac{\xi}{4}) &= \cosh(\frac{\gamma_i}{2}). \end{cases}$$

que nos permite obter as seguintes expressões

$$\cosh(\frac{\gamma}{2}) = \cosh(h_1)\cosh(h_2)\cosh(\theta_\xi\xi) + \cosh(\tfrac{\gamma 1}{2})\cosh(\tfrac{\gamma_2}{2})[\coth^2(\tfrac{\xi}{4}) - 1],$$

$$\cosh(\frac{\gamma}{2}) = \cosh(h_1)\cosh(h_2)\cosh(\theta_\xi\xi) + \operatorname{senh}(h_1)\operatorname{senh}(h_2).$$

## 3.2 Majoração do comprimento das arestas do grafo de contigüidade

Aqui seguiremos com a notação $T_1$ e $T_2$ para os toros com bordos delimitados por $\xi$, nomeamos $\alpha_i$ a nossa sístole de $T_i$, $\beta_i$ a menor curva geodésica de $T_i$ que intersepta $\alpha_i$ em exatamente um ponto. Chamaremos $\delta_i$ e $\varepsilon_i$ duas geodésicas que formam um triângulo com $\alpha_i$ e $\beta_i$ no toro $T_i$ com a convenção $\delta_i \leq \varepsilon_i$, onde em alguns momentos utilizaremos as notações $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \varepsilon_i$ para designar o comprimento e também o nome da respectiva geodésica.

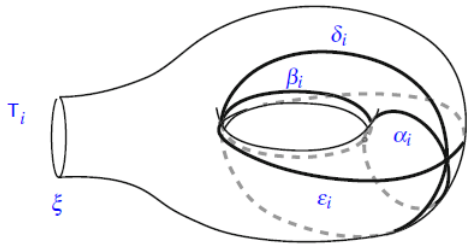



Figura 3.7: Geodésicas no Toro com bordo $T_i$

Teremos que geodésicas $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \varepsilon_i$ que satisfaz a seguinte condição:

$$\alpha_i \leq \beta_i \leq \delta_i \leq \varepsilon_i$$

e por monotonia, seus raios duais também satisfazem a ordem $\alpha_i' \leq \beta_i' \leq \delta_i' \leq \varepsilon_i'$.

**Lema 3.15.** *A menor geodésica fechada simples de $T_i$ depois de $\alpha_i$ é $\beta_i$.*

**Demonstração**: Considere o toro $T_1$ e denotamos por $w_1$ um ponto de Weiertrass por qual não passa $\alpha_1$. A geodésica $\beta_1$ passa necessariamente por $w_1$, e projeta sobre uma aresta de $G_{cont}(T_i)$. Assim, $\beta_i$ é a menor geodésica passando por $w_i$.

Seja $\eta$ uma geodésica distinta de $\alpha_i$ e não passando por $w_i$. Vamos mostrar que $\eta \geq \beta_1$, que é suficiente para concluir. Cortando o toro em $\alpha_1$ e depois cortando as perpendiculares comuns aos bordos $\alpha_1$ e $\xi$, obtemos dois hexágono isométricos com os ângulos retos. Como representado na Figura 3.8, com a convenção que $e = \alpha_1/2, c = \xi/4$. Na calça, a metade do segmento $\eta$ liga dois bordos a partir da decomposição de $\alpha_1$ e de fato teremos que $\eta/2 \geq 2a$. O segmento$f$ liga $w_1$ ao meio de $e$ e majora a metade do comprimento da menor geodésica não trivial passando por $w_1$, então $f \geq \beta_1/2 \geq e$.

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo de lados $a, f$ e $e/2$ temos:

$$\begin{aligned} \beta_1/2 &\leq f \\ &\leq a + e/2 \\ &\leq 2a \\ &\leq \eta/2. \end{aligned}$$

Logo, $\beta_1 \leq \eta$. ■

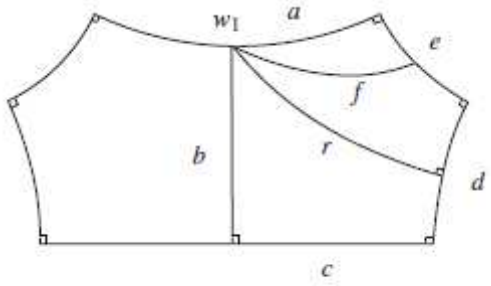



Figura 3.8: Notação no hexágono com ângulos retos.

**Lema 3.16.** *Existe um ponto de* $\xi \cap (\alpha'_1 \cup \beta'_1)$ *e um ponto de* $\xi \cap \alpha'_2$ *separados por um segmento de* $\xi$ *de comprimento inferior a* $\xi/6$.

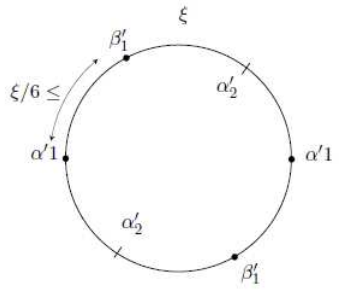



Figura 3.9: Borda do Toro $T_1$

**Demonstração**: Os pontos de $\xi \cap (\alpha'_1 \cup \beta')$ divide $\xi$ em quatro segmentos: dois contendo pontos de $\delta'_1$ e dois contendo nenhum ponto. Seja $Y_1$ a superfície hiperbólica fechada de característica $-1$ associado à $T_1$ com a autocologem de $\xi = \partial T_1$. A decomposição de raios $\alpha'_1, \beta'_1$ e $\delta'_1$ transforma a superfície $Y_1$ em uma calça hiperbólica.

As perpendiculares comuns a esta calça identifica a imagem $\xi$ em $Y_1$, e a perpendicular comum ao maior comprimento é oposto ao bordo mais longo que vem de $\delta'_1$. O comprimento deste segmento que não é aqueles que passa por $\delta'_1$ é superior à $\xi/6$.

Cortando $\alpha_1$ em $T_1$, temos uma calça que se divide em dois hexágonos iguais, situando sem dificuldades os raios $\alpha'_1$ e $\beta'_1$. Majoramos diretamente o comprimento de um segmento de $\xi$ que não passa em $\delta'_1$ por $\xi/4$.

A soma dos quatro comprimento dos segmentos delimitados por pontos de $\xi \cap (\alpha'_1 \cup \beta')$ e $\xi$, deixa claro que os menores segmentos são aqueles que não contém pontos de $\delta'_1$, em particular, são segmentos que estão em $\xi$ entre $\alpha'_1$ e $\beta'_1$.

Concluindo, considerando a metade do segmento de $\xi$ delimitado pelas extremidades do raios $\alpha'_2$ como representado na Figura 3.9 temos o resultado.

■

## Majorações conhecidas

Sejam $X$ uma superfície de Riemann de gênero 2 e $\xi$ uma geodésica separante de $X$, $R_{w_j}$ designara o raio de injetividade do ponto de Weierstrass $w_j$;. Então,

$$\cosh(R_{w_j}) < 2,88, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{senh}(\alpha_i'/2) \leq \frac{1}{2\operatorname{senh}(\xi/12)}, \tag{3.2}$$

$$\cosh(\alpha_i/2) \leq \cosh(\xi/6) + 1/2, \tag{3.3}$$

$\alpha_i'$ é o menor raio do toro $T_i$ e $\alpha_i$ a sístole do toro $T_i$. As duas primeiras desigualdades vem do trabalho de [5] e a terceira vem de [29].

Por (3.3) nos deduzimos que se $sys_3(X) \geq 2\operatorname{arccosh}(4,67)$, então toda geodésica separante $\xi$ verifica a desigualdade

$$\cosh(\xi/2) \geq 4,67. \tag{3.4}$$

Consideremos $X$ uma superfície de Riemann de gênero 2 com $sys_3 \geq 2\operatorname{arccosh}(4,67)$. Suponhamos que um ponto de Weiertrass $w_1$ de $X$, onde seu raio de injetividade não passa por uma geodésica, fechada e simples, mas por um laço geodésico simples $\lambda$. Caso contrário, uma majoração do comprimento das arestas de $G_{cont}(X)$ é dada por (3.1).

**Lema 3.17.** *A geodésica da classe de homotopia livre $\gamma$ é a sístole do toro $T_1$, ou seja, $\alpha_1$.*

**Demonstração**: A geodésica da classe de homotopia livre de $\lambda$ é a menor, não importa qual geodésica que passa por $w_1$, com $\lambda$ satisfazendo o raio de injetividade $R_{w_1}$. Em particular, no toro $T_1$ há exatamente uma sístole e não passa por $w_1$. A menor geodésica fechada simples depois da sístole é $\beta_1$ como vimos no Lema 3.15. Portanto, a geodésica da classe de homotopia livre de $\lambda$ é a sístole do toro $T_1$. ■

Do Lema 3.17 temos os seguintes resultados:

**Proposição 3.18.** *Sobre a hipótese de minoração $sys_3 \geq 2arccosh(4,67)$, as arestas do grafo de contiguidade de uma superfície de Riemann de gênero 2 são de comprimento inferior a $arccosh(2,88)$.*

A demostração desta proposição se encontra de forma detalhada em [16].

**Corolário 3.19.** *Assumindo a hipótese $sys_3 \geq 2\operatorname{arccosh}(4,67)$, todo subgrafo minimal do grafo de contiguidade de uma superfície de Riemann de gênero 2 é isomorfo ao grafo $G_9$.*

## 3.3 A 3-sístole e a sístole da família $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$

Seja $X$ uma superfície de Riemann de gênero 2 que satisfaz à condição $sys_3(X) \geq 2\,\text{arccosh}(4,67)$. De acordo com o Corolário 3.19, todos os subgrafos minimal de $\mathcal{G}_{contX}$ são isomorfos ao grafo $G_9$, em particular, $G_{cont(X)}$ tem exatamente duas componentes conexas, e existe uma única geodésica separante $\xi$ disjunta de $G_{cont(X)}$. Nesta seção estabeleceremos a igualdade entre a 3-sístole e a sístole da família $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$.

Isto será feito em duas etapas; no primeiro momento, veremos quais são as menores geodésicas de $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$ e em seguida mostraremos que se $\gamma$ é uma delas, então teremos uma partição representado por $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$,onde o comprimento dessa partição é dado pelo comprimento de $\gamma$.

### Notação

Tomando a seguinte a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathcal{G}_\xi & \to & \mathcal{G}_{T_1} \times \mathcal{G}_{T_2} \\ & \gamma & \mapsto & (\gamma_1, \gamma_2), \end{array}$$

designaremos a família das geodésicas

$$\mathcal{F} = \{\gamma \in \mathcal{G}_\xi |\ \Psi(\gamma) \in \{\alpha_1, \beta_1, \delta_1\} \times \{\alpha_2, \beta_2, \delta_2\}\} \cup \{\xi\},$$

onde associamos todos elementos de $\gamma \in \mathcal{G}_\xi$ a partição $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ e $\xi$ à partição $(\xi, \alpha_1, \alpha_2)$. Como vimos anteriormente que

$$\cosh(\gamma/2) = \cosh(\gamma_1'/2)\cosh(\gamma_2'/2)\cosh(\mu) + \text{senh}\,(\gamma_1'/2)\,\text{senh}\,(\gamma_2'/2),$$

onde $\mu$ é o modulo $\xi$, o comprimento de quatro segmentos de $\xi$ delimitados por pontos de intersecção de $\gamma_1'$ e $\gamma_2'$ com $\xi$.

Trabalharemos frequentemente com o pentágono $(abcde)$, que é a metade do hexágono com os ângulos retos decomposto através de $T_1$. Vamos ter as seguintes convenções: $b = \beta_1'/2, c = \xi/4, e = \beta_1/2$ e $f = \delta_1/2$ como na figura 3.10.

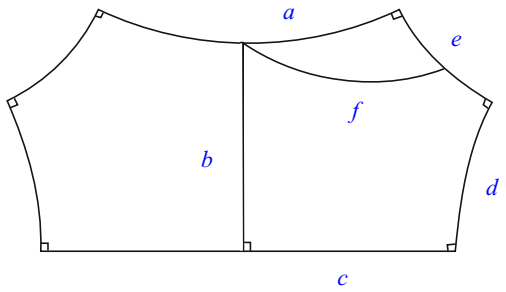



Figura 3.10: Notação no hexágono com ângulos retos.

**Lema 3.20.** *No pentágono* $(abcde)$, $\cosh(e) < 2,16$ *ou* $\cosh(a) < 1,62$ .

**Demonstração**: Supomos por absurdo que $2,16 \leq \cosh(e)$ e $1,62 \leq \cosh(a)$. Então, em $(abcde)$ temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2,16 \leq & \cosh e & \leq 2,88 \\
(2) & 1,62 \leq & \cosh a & \leq 2,88 \\
(3) & 2,44 \leq & \cosh c & \leq 8 \\
(4) & & \cosh b & \leq 1,44 \\
(5) & & \operatorname{senh} b & \leq \dfrac{2,88}{\operatorname{senh} c}.
\end{array}$$

As duas primeiras majorações provem do limite do comprimento das arestas de $\mathcal{G}_{cont}(X)$. Utilizando a identidade $\cosh c = \operatorname{senh} a \operatorname{senh} c$ com os dois primeiros enquadramentos, obtemos a terceira. De fato,

$$\begin{array}{rcccl}
(2,16)^2 & \leq & \cosh^2 e & \leq & (2,88)^2 \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(2,16)^2-1} & \leq & \operatorname{senh} e & \leq & \sqrt{(2,88)^2-1} \quad \Rightarrow \\
1,91 & \leq & \operatorname{senh} e & \leq & 2,7
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl}
(1,62)^2 & \leq & \cosh^2 a & \leq & (2,88)^2 \quad \Rightarrow \\
\sqrt{(1,62)^2-1} & \leq & \operatorname{senh} a & \leq & \sqrt{(2,88)^2-1} \quad \Rightarrow \\
1,27 & \leq & \operatorname{senh} a & \leq & 2,7
\end{array}$$

então

$$\begin{array}{rcccl}
1,27 \cdot 1,91 & \leq & \operatorname{senh} e \operatorname{senh} a & \leq & 2,7 \cdot 2,7 \quad \Rightarrow \\
2,44 & \leq & \cosh c & \leq & 7,29.
\end{array}$$

A majoração do comprimento $\cosh(b)$ se deduz da duas primeiras minorações e da igualdade $\tanh e \cosh a \tanh b = 1$. Temos,

$$\begin{array}{rcl}
\tanh e \cosh a \tanh b & = & 1 \quad \Rightarrow \\
\dfrac{\operatorname{senh} e}{\cosh e} \cosh a \dfrac{\operatorname{senh} b}{\cosh b} & = & 1 \quad \Rightarrow
\end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{1,91}{2,16} \cdot 1,62 \cdot \frac{\operatorname{senh} b}{\cosh b} &\leq 1 \quad \Rightarrow \\ 1,43 \cdot \frac{\operatorname{senh} b}{\cosh b} &\leq 1 \quad \Rightarrow \\ \frac{\operatorname{senh} b}{\cosh b} &\leq \frac{1}{1,43}, \end{aligned}$$

e a última desigualdade vem da igualdade $\operatorname{senh} b \operatorname{senh} c = \cosh e$, então $\operatorname{senh} b \leq \dfrac{2,88}{\operatorname{senh} c}$. Nós exibiremos uma geodésica $\eta \in \mathcal{F}\backslash\{\xi\}$ tal que o comprimento da partição $(\eta, \eta_1, \eta_2)$ é dado por $\eta$ e inferior a $2\operatorname{arccosh}(4,67)$. Partimos de $\eta \in \mathcal{F}\backslash\{\xi\}$ que satisfaz $\Psi(\eta) \in \{\alpha_1, \beta_1\} \times \{\alpha_2\}$ e $\mu \leq \xi/6$ tal que $\eta$ existe pelo Lema 3.16. Pela majoração do raio $\alpha_2'$ por (3.2), temos:

$$\cosh(\eta/2) = \cosh(\beta'/2)\cosh(\alpha_2'/2)\cosh(\mu) + \operatorname{senh}(\beta_1'/2)\operatorname{senh}(\alpha_2'/2)$$

temos

$$\operatorname{senh}(\alpha'/2) \leq \frac{1}{2\operatorname{senh}(\xi/12)} \Rightarrow \cosh(\alpha_2'/2) \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4\operatorname{senh}^2(\xi/12)}}$$

substituindo,

$$\cosh(\eta/2) \leq \cosh(\beta'/2)\sqrt{1 + \frac{1}{4\operatorname{senh}^2(\xi/12)}}\cosh(\xi/6) + \operatorname{senh}(\beta_1'/2)\operatorname{senh}(\alpha_2'/2).$$

Nós distinguimos quatro casos correspondentes ao intervalo de valores de $\xi$. Estes intervalos são determinados por $\cosh(\xi/4) \in [2,44; 3], [3; 4], [4, 6], [6, 8]$. Cada enquadramento de $\xi$ nos fornece uma majoração de $\beta_1'$, assim controlando o comprimento de $\eta$.

-Se $2,44 \leq \cosh(\xi/4) < 3$, utilizaremos a desigualdade (4) para majorar $\beta_1'$. Nós encontraremos $\cosh(\eta) \leq 4,31 < 4,67$.

-Se $3 \leq \cosh(\xi/4) < 4$, utilizaremos a desigualdade (4) para majorar $\beta_1'$. Nós encontraremos $\cosh(\eta) \leq 4,57 < 4,67$.

-Se $4 \leq \cosh(\xi/4) < 6$, utilizaremos a desigualdade (5) para majorar $\beta_1'$. Nós encontraremos $\cosh(\eta) \leq 4,57 < 4,67$.

-Se $6 \leq \cosh(\xi/4) < 8$, utilizaremos a desigualdade (5) para majorar $\beta_1'$. Nós encontraremos $\cosh(\eta) \leq 4,37 < 4,67$.

Em todos os casos, a geodésica $\eta$ verifica $\cosh(\eta) \leq 4,67$. As geodésicas $\eta_1$ e $\eta_2$ são de comprimentos inferiores a $2\,\mathrm{arccosh}(2,88)$, porque elas são projeções da aresta do grafo de contiguidade. Assim chegamos em um absurdo, porque a partição $(\eta, \eta_1, \eta_2)$ contradiz a hipótese $\cosh(\mathrm{sys}_3(X)/2) \geq 4,67$. ■

A sístole $\alpha_1$ do toro $T_1$ satisfaz a condição que $\cosh(\alpha_1/2) < 2,26$. No caso onde $\cosh(e) < 2,16$ é evidente pois $\alpha_1$ é menor que $\beta_1$, nos casos onde $\cosh(a) < 1,62$ utilizamos a majoração $\cosh(\beta_1/2) \leq 2,88$ e $\cosh(\alpha_1/2) \leq \cosh(\beta_1/4)\cosh(a)$.

**Lema 3.21.** *O comprimento de uma partição $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ associada a um elemento $\gamma$ de $\mathcal{F}$ tem o mesmo comprimento de $\gamma$.*

**Demonstração**: Seja $\gamma$ em $\mathcal{F}$. Ou o comprimento da partição $(\gamma, \gamma_1, \gamma_2)$ é igual ao comprimento de $\gamma$, isto ocorre por exemplo quando $\gamma_1, \gamma_2$ se projetam sobre as arestas do grafo de contiguidade 3.18. Ou o comprimento da partição é dado pelo par $(\gamma_1, \gamma_2)$. Como $\alpha_i, \beta_i$ se projetam sobre as arestas de $\mathcal{G}_{cont}(X)$, existe $\gamma_1 = \delta_1$ ou $\gamma_2 = \delta_2$.

Supomos que o comprimento da partição é dado por $\gamma_1 = \delta_1$. No pentágono $(abcde)$ temos então

$$\left.\begin{array}{rcccl} \cosh(a)\cosh(e) & \geq & \cosh(\delta_1/2) & \geq & 4,67 \\ \cosh(e) & \geq & \cosh(\alpha_1/2) & \geq & \cosh(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \cosh(e) \geq \sqrt{4,67} > 2,16$$

e o mesmo,

$$\left.\begin{array}{rcccl} \cosh(a)\cosh(e) & \geq & \cosh(\delta_1/2) & \geq & 4,67 \\ 2,88 & \geq & \cosh(e) & & \end{array}\right\} \Rightarrow \cosh(a) \geq \frac{\sqrt{4,67}}{2,88} > 1,62.$$

■

Esta minoração contradiz o lema anterior.

**Teorema 3.22.** *Se a 3-sístole satisfaz a condição $\mathrm{sys}_3 \geq 2\,\mathrm{arccosh}(4,67)$, a sístole da família $\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}$ é igual a 3-sístole.*

## 3.4 Determinação de um máximo global

Designaremos por $M$ um ponto de $\mathcal{T}_2$ e por $X$ uma superfície de Riemann subjacente. Trabalharemos com uma aberto $D$ de $\mathcal{T}_2$ definido por

$$D = \{sys_3 > 2\,\mathrm{arccosh}(4,67)\}.$$

Usaremos duas superfícies descobertas por Schumutz Schaller [29] que são $N(3)$ e $P(3)$.

Trabalharemos:

$$B(2) = \max_{\bar{D}} \mathrm{sys}_3 = \max_{\bar{D}} \mathrm{sys}_{\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}} .$$

Os pontos que satisfazem o máximo global sobre $\bar{D}$ da função $\mathrm{sys}_{\mathcal{G}_\xi \cup \{\xi\}}$ pertence a $D$. Nós procuraremos esses pontos.

Notaremos $(\gamma_j)_{\mathrm{J}\in J}$ a família de geodésicas distintas $\xi$ de comprimento minimal em $\mathcal{F}$.

**Lema 3.23.** *Os elementos de $\mathcal{F}$ não intersectam $\alpha_i, \beta_i$ e $\delta_i$ em seus pontos de Weierstrass*

**Lema 3.24.** *As geodésicas $(\gamma_j)_{\mathrm{J}\in J}$ não se intersectam fora de um ponto de Weiertrass.*

Seja $\mathrm{M}_{max}$ um ponto de $D$ que satisfaz um máximo local da função $\mathrm{sys}_{\mathcal{F}}$, denotaremos por $\mathrm{X}_{max}$ a superfície subjacente.

**Proposição 3.25.** *Em $\mathrm{X}_{max}$, duas geodésicas de $(\gamma_j)_{\mathrm{J}\in J}$ nunca passa pelo mesmos dois pontos de Weiertrass.*

A demostração desta proposição se encontra de forma detalhada em [16].

**Proposição 3.26.** *Em $X_{max}$, três geodésicas distintas de $(\gamma_j)_{j\in J}$ não passam jamais por um mesmo ponto de Weierstrass.*

**Demonstração**: Suponhamos que por um ponto de Weierstrass passa três geodésicas $(\gamma_j)_{j\in J}$. Decompondo uma das três geodésicas associada por $\Psi$, obtemos duas calças hiperbólicas que enviam uma sobre a outra por uma involução hiperelíptica. Pelos Lemas 3.23 e 3.24, existe só três configurações topológicas possíveis para $(\gamma_j)_{j\in J}$ nestas calças.

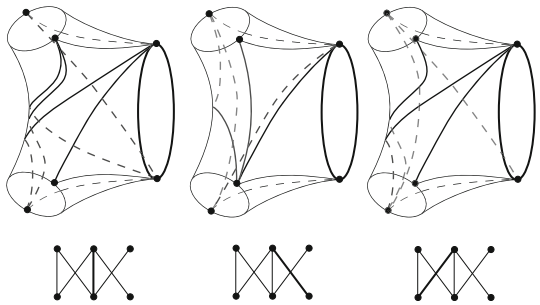


Figura 3.11: Nova configuração topologica

De fato, as três configurações correspondem a uma única configuração de todo superfície inteira, de um ponto de vista combinatório nos temos um mesmo grafo, apenas os cortes na aresta em negrito que mudam. Para provar tomemos $J = \{1, ..., 6\}$

Sejam, $w_1$ e $w_4$ os pontos de Weiertrass em quaisquer três geodésicas concorrentes $(\gamma_j)_{j\in J}$. Seja $\gamma_1$ a geodésica que liga $w_1$ e $w_4$, sejam $\gamma_2$ e $\gamma_3$ duas outras geodésicas passando por $w_1$, e sejam $\gamma_4$ e $\gamma_5$ duas outras arestas passando por $w_4$. Cada um dos pares

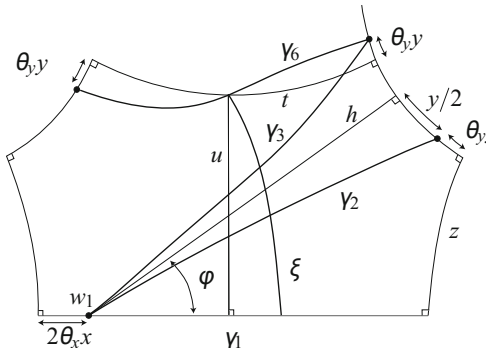



Figura 3.12: Configuração geométrica

$\gamma_2, \gamma_3$ e $\gamma_4, \gamma_5$ formam um triângulo isósceles com uma geodésica das $\alpha_i, \beta_i, \delta_i$. Esses triângulos são disjuntos e nós podemos encontrar uma geodésica separante, pois ela são isométricas. Deduzimos que duas bordas diferente de $\gamma_1$ como na calça à esquerda da figura 3.11 tem o mesmo comprimento.

Exibindo a configuração das geodésicas $\gamma_2$,$\gamma_3$,$\gamma_4$ e $\gamma_5$ na calça, temos necessariamente $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\delta_1 = \delta_2$. Em particular, os toros $T_1$ e $T_2$ são isométricos. Notamos uma translação de ordem 2 de acordo com $\gamma_1$ satisfaz um isomorfismo na superfície $\mathrm{X}_{max}$.

Provaremos a existência da superfície mencionada. De fato, analisando a configuração da figura 3.11, nós consideramos portanto uma calça com duas arestas iguais de comprimento $2y$, e a terceira de comprimento $4x$. Nós exibiremos trivialmente o comprimento $t, u, z$ (Figura 3.12) em função de $x$ e $y$.

$$\begin{aligned}
\cosh^2 t &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 y - 1} + 1, \\
\cosh^2 u &= \frac{\cosh^2 y}{\cosh^2 x - 1} + 1, \\
\cosh^2 z &= \frac{\cosh^2 x \cosh^2 y}{(\cosh^2 x - 1)(\cosh^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

Para cada aresta, fixamos dois pontos opostos correspondendo ao ponto de Weiertrass, os pares sobre essas arestas de comprimento $2y$ tem o mesmo desvio $\theta_y y$ em relação às perpendiculares comuns. Os segmentos traçados em negrito representam a metade das geodésicas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ e $\xi$. A existência da superfície equivalente a existência de parâmetros $x, \theta_x, y, \theta_y$, tal que os cinco segmentos geodésicos em negrito são de mesmo comprimento. Suponhamos $x$ e $y$ fixos, escolhemos $\theta_y$ tal que $\gamma_6$ é de comprimento $4x$, ou seja, tal que $\cosh(\theta_y y) = \cosh x / \cosh t$; podemos então calcular $\operatorname{sen}\phi$ e $h$ em função de $x$ e $y$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\phi &= \cosh^2(\tfrac{y}{2}+\theta_y y) + cosh^2 z - cosh^2(\tfrac{y}{2}+\theta_y y)\cosh^2 z, \\ \cosh^2 h &= \frac{\cosh^2 z}{\operatorname{sen}^2\phi}, \end{aligned}$$

e fazendo $X = \cosh x$ e $Y = \cosh y$, temos:

$$\cosh^2(\frac{y}{2}+\theta_y y) = \frac{Y-1}{X^2+Y^2-1}[X^2Y^2 + X^2Y - X^2/2 - Y^2/2 + 1/2 + X(Y+1)\sqrt{X^2Y^2 - 2X^2 - Y^2 + 1}].$$

A condição $\gamma_2 = \gamma_3 = 4x$ é equivalente a $\cosh h = \cosh(2x)/\cosh(y/2)$, dado implicitamente $y$ em função de $x$. Nos obtemos facilmente através de um pequeno programa com entrada em $x$ e destino com valores próximos de $y$. Para diferenciar esses valores de $x$, calculamos

$$\cosh^2(2(1-\theta_x)x) = \frac{X^2(X^2-1)}{X^2+Y^2-1}[8X^4 - 12X^2 - 4Y^2 + 5 - 4(2X^2-1)\sqrt{X^4 - 2X^2 - Y^2 + 1}].$$

e como a expressão $\cosh^2(2(1-\theta_x)x)\operatorname{sen}^2\phi - \cosh^2(y/2+\theta_y y)$ assume valores negativos e positivos, deduzimos (colocando trirretângulo $h\gamma_1 zy$) a existência de um $x$ tal que a geodésica $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_6$ e $\xi$ são de mesmo comprimento $4x$. Achamos as coordenadas torção-comprimento solução do nosso problema são aproximadamente

$$(x; \theta_x; y; \theta_y) \approx (1,1076; 0,17; 1,06; 0,15).$$

Vamos mostrar que a sístole de $\mathcal{G}_\xi \cup \xi$ realiza a 3-sístole de $\mathrm{X}_{max}$. As geodésicas de comprimento 2y são as sístoles de cada um dos toros limitados por $\xi$ que também a sístole de $\mathrm{X}_{max}$. Identificamos facilmente que a segunda menor geodésica destes toros. Comparando os comprimentos destas geodésicas com aquelas perpendiculares comuns à da calça da Figura 3.12, podemos verificar que cada realiza o raio de injetividade na superfície $X_{max}$ em um ponto de Weierstrass, em outras palavras, elas induzem as arestas de $G_{cont}(\mathrm{X}_{max})$, e as geodésicas $\gamma_1, ..., \gamma_6$ satisfazem a distância entre os dois grupos de pontos de Weierstrass. Considerando uma partição de comprimento minimal, ele contém ao menos duas geodésicas não-separantes, necessariamente ou cada uma delas está inclusa em um dos toros delimitados por $\xi$ ou é um elemento da família $\{\gamma_1, ..., \gamma_6\}$. Se um deles pertencer a família $\{\gamma_1, ..., \gamma_6\}$, estes últimos realizam a 3-sístole. Se as duas estão contidos em um toro, então a terceira geodésica da partição ou é uma não-separante e neste caso aparentemente pertence à família $\{\gamma_1, ..., \gamma_6\}$, ou é separante e neste caso é $\xi$. Temos que $\mathrm{sys}_3(X_{max}) = \mathrm{sys}_{\mathcal{F}}(\mathrm{X}_{max}) \approx 2\,\mathrm{arccosh}(4,63)$.

■

**Teorema 3.27.** *A sístole atinge um máximo valor sobre $\mathcal{T}_2$ nos pontos correspondentes marcados na superfície $P(3)$.*

**Demonstração**: A geodésica $\xi$ separa $P(3)$ em dois toros equivalentes. O comprimento do raio minimal deste toro é dado por (3.2) e o coeficiente $\theta_\xi$ vale 1/12, e

injetando na formulas (3.1.2) obtemos:

$$\cosh(B(2)/2) = \frac{1}{4[\cosh^2(B(2)/12) - 1]} + \cosh(B(2)/12).$$

Simplificando, temos que $\cosh(B(2)/12)$ é solução de

$$32X^5 - 32X^4 - 24X^3 + 24X^2 - 1 = 0.$$

■

# Capítulo 4

# Tesselação $\{8g-4, 4\}$

Neste capítulo, iremos mostrar a existência de um polígono com $8g-4$ arestas que fornece um emparelhamento para uma superfície compacta de gênero $\geq 2$ relacionado à tesselação $\{8g-4, 4\}$.

Os eixos das tranformações deste emparelhamento formam uma geodésica fechada nesta superfície, e assim temos uma correspondência injetiva dos eixos de transformações hiperbólicas com as sístoles. Então conseguindo as isometrias hiperbólicas que emparelham essas arestas e utilizando as matrizes associadas a essas isometrias é possível calcular o comprimento das geodésicas fechadas sobre essa superfície gerada pela tesselação $\{8g-4, 4\}$. As principais referências deste trabalho são: [1],[2],[10],[25] e [30]

## 4.1 Existência do polígono fundamental de $(8g-4)$ arestas

Para provar a existência deste polígono, basearemos nos teoremas clássicos de Poincaré e Frenchel-Nielsen na teoria de grupos Fuchsianos. Omitiremos as demonstrações destes teoremas.

O Teorema de Poincaré nos dá condições suficiente para um polígono ser domínio fundamental de um grupo Fuchsiano. Seja $F$ um polígono delimitado com número par de arestas $\tau_1, ..., \tau_n$ com sentido anti-horário e seja $p_1, ..., p_n$ os respectivos pontos iniciais destas arestas. Suponhamos que $\tau$, $\tau_{\sigma(i)}, 1 \leq i \leq n$, são iguais aos comprimentos hiperbólicos, onde $\sigma(i)$ é dado por uma permutação de $1, ..., n$ de ordem 2 (dois) sem elementos fixos. Seja $T_i$ o movimento que emparelha $\tau_i$ a $\tau_{\sigma(i)}^{-1}$, ou seja, $T_i(p_i) = p_{\vartheta(i)}, 1 \leq i \leq n$, onde a permutação expressado por $i \to \vartheta(i)$ é um produto de ciclos disjuntos. O conjunto de vértices $p_i$, $i$ variando sobre um ciclo, é chamado *ciclo de vértice*.

**Teorema 4.1** (Poincaré)**.** *Suponhamos que a soma dos ângulos internos de um polígono fundamental $F$ ao longo de cada ciclo de vértice é igual a $\frac{2\pi}{m_c}$, onde $m_c$ é um inteiro*

*positivo. O grupo* $\Gamma$ *gerado por* $T_1, ..., T_n$ *é discreto e* $F$ *é um domínio fundamental para* $\Gamma$. $\Gamma$ *age livremente em* $\mathbb{D}^2$ *se, e somente se,* $m_c = 1$ *para cada ciclo de vértice.*

Como aplicação, consideremos um polígono regular $F'$ com $(8g-4)$-arestas, com ângulos internos $\pi/2$ centrado em 0, com um emparelhamento que iremos definir no Teorema 4.6. Onde teremos que cada $\sigma(i)$ verifica $i \to \vartheta(i)$ um produto de disjunto de ciclo, todos com comprimento quatro, e a soma de cada ciclo de vértices é igual a $2\pi$. Pelo Teorema de Poincaré, o grupo gerado por $T'_1, ..., T'_{8g-4}$ é um grupo Fuchsiano que age livremente em $\mathbb{D}$ com $F'$ um domínio fundamental.

Sejam $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ grupos de duas superfícies. Suponhamos que $\mathbb{D}^2/\Gamma_1$ é homeomorfo a $\mathbb{D}^2/\Gamma_2$, que é equivalente afirmar que $\mathbb{D}^2/\Gamma_1$ e $\mathbb{D}^2/\Gamma_2$ tem o mesmo gênero.

**Teorema 4.2** (Frenchel-Nielsen)**.** *Existe um homeomorfismo* $h$ *que preserva a orientação de* $\overline{\mathbb{D}^2}$ *em* $\overline{\mathbb{D}^2}$ *tal que* $\Gamma_2 = h \circ \Gamma_1 \circ h^{-1}$.

**Lema 4.3.** *$F$ é convexo.*

**Demonstração**: Os ângulos interiores de $p_i$ e $p_{\sigma(i)+1}$ são suplementares. Assim todos os ângulos interiores são menores que $\pi$, o que implica que $F$ é convexo.

■

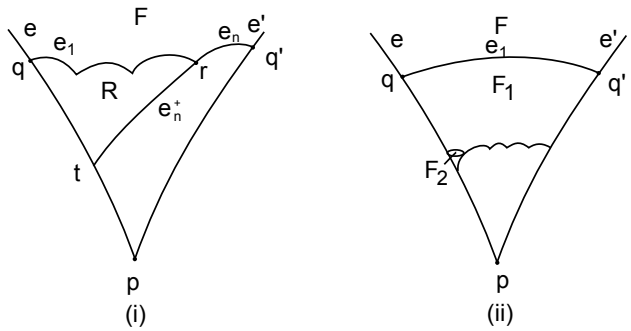



Figura 4.1: Arestas de $F$

**Teorema 4.4.** *Os pontos* $a_i, b_i, 1 \leq i \leq 8g-4$*, são todos distintos e se encontram ao longo de* $\partial\mathbb{D}$ *no sentido anti-horário e na seguinte ordem*

$$a_1, b_0, a_2, b_1, ..., a_{8g-4}, b_{8g-5},$$

*conforme representado na Figura 4.2.*

**Demonstração**: Suponhamos que $e$ e $e'$ sejam arestas não consecutivas de $F$ contendo respectivamente a geodésica $\overline{e}$ e $\overline{e'}$ se encontrando em $p$ (que pode eventualmente está contido em $\partial\mathbb{D}$). Sejam $q, q'$ os pontos finais de $e$ e $e'$ próximos de $p$ e $e_1, ..., e_n$ arestas consecutivas que estão entre $q$ e $q'$ como na Figura 4.1 (i).

Vamos mostrar para o caso que $n > 1$. Para $F$ convexo, o segmento geodésico aberto $qp, q'p$ se encontra fora de $F$. Então a curva que consiste dos segmentos $e_1, ..., e_n, qp, q'p$

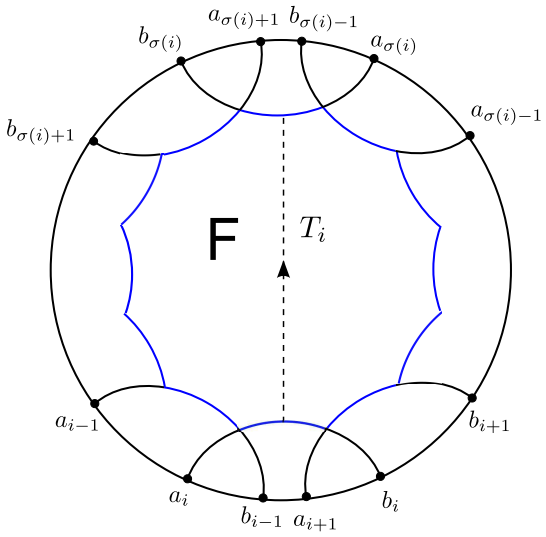



Figura 4.2: Pontos sobre o disco

é simples e limita uma região que chamaremos de $R$. Seja $r$ o ponto final de $e_n$ distinto de $q'$, e $e_n^+$ uma parte de $e_n - e$ que começa em $r$. $e_n^+$ entra em $R$ e deixa depois em $t$. Desde que $e_n^+$ encontra-se fora de $F$ e não intercepte $\overline{e'}$ (caso contrário, $\overline{e_n}, \overline{e'}$ se cruzariam duas vezes), concluímos que $t$ se encontra no segmento aberto $qp$. Assim $\overline{e}, \overline{e_n}$ se interceptam, e $e_1, ..., e_{n-1}$ são arestas consecutivas entre $e$ e $e_n$.

Para $n = 1$ vale o mesmo argumento. Sejam $e$ e $e'$ separado por $e_1$ como na Figura 4.1(ii). Seja $F_1$ um domínio fundamental adjacente de $F$ do outro lado de $e_1$. $F_1$ está dentro de um triângulo $qq'p$. Repetindo o argumento do primeiro parágrafo, obtemos uma domínio $F_2$ adjacente a $F_1$ e dentro de $qq'p$ que tem um par não consecutivo de arestas cuja as extensões estão dentro de $qq'p$. Continuando, nós obtemos um número infinto de domínios fundamentais distintos dentro de $qq'p$, que é impossível já que $qq'p$ tem área finita conforme o Teorema 1.71.

■

**Teorema 4.5.** *$T_i$ leva os pontos $a_{i-1}, a_i, b_{i-1}, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}$ em respectivamente $a_{\sigma(i)+1}, b_{\sigma(i)}$ $b_{\sigma(i)+1}, a_{\sigma(i)-1}, a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)-1}$.*

**Demonstração**: Os pontos são ilustrados na Figura 4.2. Este teorema decorre do fato que $T_i$ leva círculo em círculo. Por exemplo, $T_i$ leva $\overline{\tau}$ a $\overline{\tau_{\sigma(i)}^{-1}}$. Então $T_i$, leva $b_i$ ao ponto final de $\tau_i$, e $a_{\sigma(i)}$ ao ponto final de $\overline{\tau_{\sigma(i)}^{-1}}$. O raciocínio semelhante acontece com os outros pontos. ■

**Teorema 4.6.** *Seja $S = \mathbb{D}^2/\Gamma$ uma superfície compacta de gênero $g \geq 2$. Existe um polígono fundamental $F$ limitado cuja fronteira $\partial F$ consiste de $(8g-4)$ segmentos geodésicos. Seja $\tau_1, ..., \tau_{8g-4}$ arestas consecutivas de $\partial F$ na orientação anti-horário, e $\sigma(i)$ a permutação de ordem 2 de $1, ..., 8g-4$ definida por*

$$\sigma(i) = \begin{cases} 4g - i \ mod(8g-4), & \text{se } i \text{ é impar,} \\ 2 - i \ mod(8g-4), & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

*Seja $\tau_i^{-1}$ a mesma aresta de $\tau_i$ mas com a orientação reversa. Então,*

**i)** *para cada $\tau_i$, existe um único elemento $T_i \in \gamma$ tal que $T_i(\tau_i) = \tau_{\sigma(i)}^{-i}$;*

**ii)** *$T_i(\tau_{i-1})$ e $T_i(\tau_i+1)$ estão contidas respectivamente na mesma geodésica determinada por $\tau_{\sigma(i)+1}, \tau_{\sigma(i)-1}$.*

A Figura 4.3 ilustra o teorema, onde $\tau_i$ é chamado de $i$. Definimos $\tau_i$ para todo inteiro $i, j$, que $\tau_i = \tau_j$ sempre que $i \equiv j \mod (8g-4)$. Seja $p_i$ a intersecção de $\tau_{i-1}$ e $\tau_i$. Então, $T_i = p_{\sigma(i)+1}$. Desde que $T_i$ preserve os ângulos por (ii) é equivalente dizer que os ângulos interiores de $F$ de $p_i$ e $p_{\sigma(i)+1}$ são suplementares.

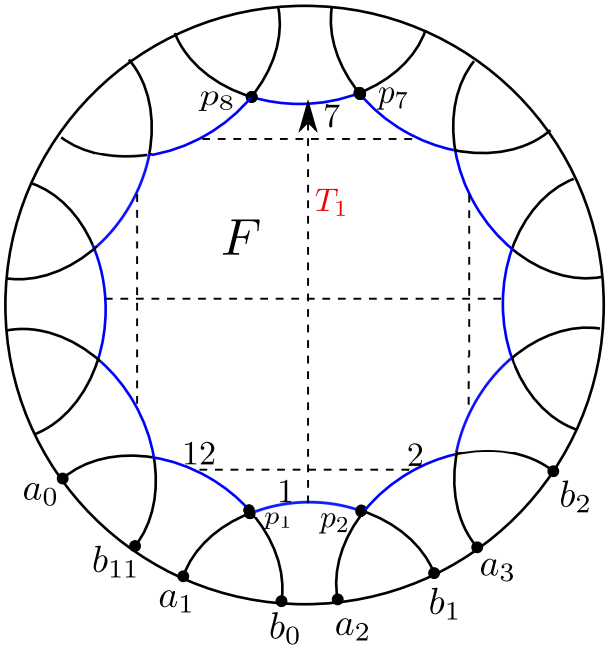



Figura 4.3: Polígono fundamental de 12 arestas.

**Demonstração**: [Teorema 4.6] Seja $g$ o gênero de $\mathbb{D}^2/\Gamma$. Tomando $F'$ um polígono regular de $(8g-4)$ arestas descritas acima e $\Gamma'$ o grupo Fuchsiano associado com os geradores $T'_1, ..., T'_{8g-4}$. Sejam $v$ o número de ciclo de vértice e $e$ o número de arestas emparelhadas. Então, $v = 2g-1$ e $e = 4g-2$. Pela fórmula de Euler, o gênero $g'$ de $\mathbb{D}^2/\Gamma'$ é dado por

$$\begin{aligned} 2 - 2g' &= v - e + 1 \\ &= 2g - 1 - 4g + 2 + 1 \\ &= 2 - 2g \ . \end{aligned}$$

Assim $g' = g$. Pelo Teorema 4.2, existe um homeomorfismo $h$ que preserva orientação de $\overline{\mathbb{D}^2}$ para $\overline{\mathbb{D}^2}$ tal que $\Gamma = h\Gamma' h^{-}1$. A restrição de $h$ para $\partial\mathbb{D}^2$ fornece um homeomorfismo que preserva a orientação $\partial\mathbb{D}^2$ em si mesmo. para $F'$, seja $\overline{\tau_i}$ a geodésica

contendo $\tau_i$ e com a mesma orientação, e seja $a_i', b_i'$ respectivamente os pontos inicial e final de $\overline{\tau_i'}$. Seja $a_i = h(a_i'), b_i = h(b_i')$. Desde que $h$ preserva a orientação em $\partial\mathbb{D}$, podemos concluir pelo Teorema 4.4 que os pontos $a_i, b_i; 1 \leq i \leq 8g-4$ são todos distintos e se encontram ao longo de $\partial\mathbb{D}^2$ no sentido anti-horário e na ordem

$$a_1, b_0, a_2, b_1, ..., a_{8g-4}, b_{8g-5}.$$

Sejam $\overline{\tau_i}$ a geodésica de $a_i$ para $b_i$ e $\tau_{i-1}$ e a geodésica entre os pontos $a_{i-1}, b_{i-1}$. Temos que $\tau_{i-1}$ não se cruza com $\overline{\tau_i}$ em $\partial\mathbb{D}^2$, logo essa geodésicas se cruzam em um ponto $p_i$ em $\mathbb{D}^2$. Os pontos $p_i, 1 \leq i \leq 8g-4$, formam vértices sucessivos de um polígono $F$ com arestas $\tau_1$,$\tau_i$ sendo o segmento geodésico de $p_i$ para $p_{i+1}$. Mostraremos que $F$ é esse polígono desejado.

Seja $T_i = hT_i'h^{-1}$. A função $\varphi' \mapsto h\varphi'\mathbb{H}^{-1}$, $\varphi' \in \Gamma'$, um isomorfismo de $\Gamma'$ em $\Gamma$ e consequentemente os geradores $T_1', ..., T_{8g-4}'$ de $\Gamma'$ leva aos geradores $T_1, ..., T_{8g-4}$ de $\Gamma$. Se $T_i'x = y$, então $T_i(hx) = hy$. Segue do Teorema 4.5 $T_i$ leva os pontos $a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}$ respectivamente em $a_{\vartheta(i)}b_{\vartheta(i)}, b_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i)}, a_{\rho(i)}, b_{\rho(i)}$, isto é, $T_i$ leva as geodésicas $\tau_{i-1}^-, \bar{\tau}_i, \tau_{i+1}^-$ respectivamente $\tau_{\vartheta(i)}^-, \tau_{\sigma(i)}^{-1}, \tau_{\rho(i)}^-$. Desde que $T_i(p_i) = p_{\vartheta(i)}, T_i(p_{i+1}) = p_{\sigma(i)}$, isto é , $T_i$ leva $\tau_i$ em $\tau_{\sigma(i)}$ e o ângulo interior $\theta_i$ de $p_i$ ao ângulo exterior em $p_{\vartheta(i)}$ como visto na Figura 4.4.

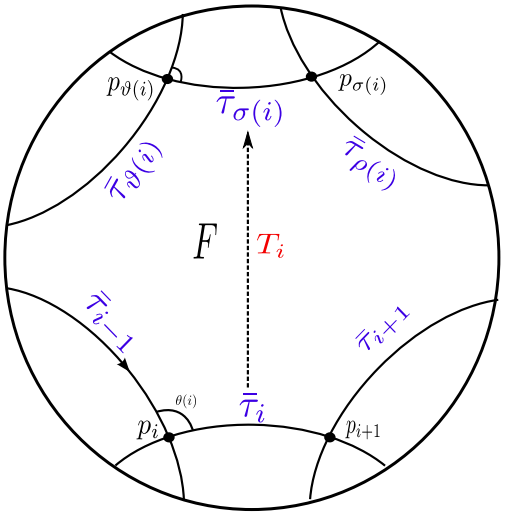



Figura 4.4: Transformação $T_i$.

Desde que $T_i$ preserva os ângulos, concluímos que $\theta_i + \theta_{\sigma(i)} = \pi$. A soma dos ângulos internos de um ciclo de vértice é dado por :

$$(\theta_i + \theta_{\vartheta(i)}) + (\theta_{\vartheta^2(i)} + \theta_{\vartheta^3(i)}) = \pi + \pi = 2\pi.$$

Assim, $F$ satisfaz à condição do Teorema de Poincaré 4.1 e assim concluímos que $F$ é um Domínio fundamental de $\Gamma$.

■

**Exemplo 4.7.** *Vejamos o seguinte emparelhamento para $g = 2$. Temos a nossa permutação de ordem 2 da seguinte maneira*

$$\begin{cases} 8 - i \ mod(12), & se\ i\ é\ impar \\ 2 - i \ mod(12), & se\ i\ é\ par \end{cases},$$

*então,*

$$\begin{array}{rcrlcrl}
\sigma(1) & \equiv & 7 & \mod(12) & & & \\
\sigma(2) & \equiv & 0 & \mod(12) & & & \\
\sigma(3) & \equiv & 5 & \mod(12) & & & \\
\sigma(4) & \equiv & -2 & \mod(12) & = & 10 & \mod(12) \\
\sigma(5) & \equiv & 3 & \mod(12) & & & \\
\sigma(6) & \equiv & -4 & \mod(12) & = & 8 & \mod(12) \\
\sigma(7) & \equiv & 1 & \mod(12) & & & \\
\sigma(8) & \equiv & -6 & \mod(12) & = & 6 & \mod(12) \\
\sigma(9) & \equiv & -1 & \mod(12) & = & 11 & \mod(12) \\
\sigma(10) & \equiv & -8 & \mod(12) & = & 4 & \mod(12) \\
\sigma(11) & \equiv & -3 & \mod(12) & = & 9 & \mod(12) \\
\sigma(12) & \equiv & -10 & \mod(12) & = & 2 & \mod(12)\ .
\end{array}$$

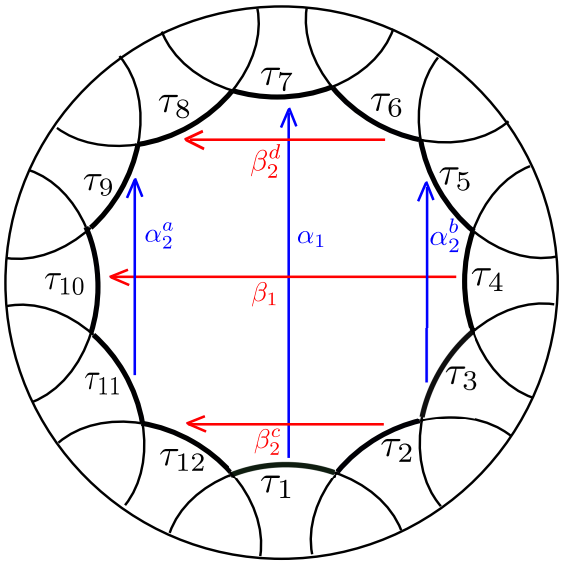



Figura 4.5: Tesselação para $g = 2$.

**Exemplo 4.8.** *Para o emparelhamento $g = 3$, temos*

$$\begin{cases} 12 - i \ mod(20), & se\ i\ é\ impar \\ 2 - i \ mod(20), & se\ i\ é\ par \end{cases},$$

*logo,*

$$
\begin{array}{rcrlcrl}
\sigma(1) & \equiv & 11 & \mod(20) & & & \\
\sigma(2) & \equiv & 0 & \mod(20) & & & \\
\sigma(3) & \equiv & 9 & \mod(20) & & & \\
\sigma(4) & \equiv & -2 & \mod(20) & = & 18 & \mod(20) \\
\sigma(5) & \equiv & 7 & \mod(20) & & & \\
\sigma(6) & \equiv & -4 & \mod(20) & = & 16 & \mod(20) \\
\sigma(7) & \equiv & 5 & \mod(20) & = & & \\
\sigma(8) & \equiv & -6 & \mod(20) & = & 14 & \mod(20) \\
\sigma(9) & \equiv & 3 & \mod(20) & & & \\
\sigma(10) & \equiv & -8 & \mod(20) & = & 12 & \mod(20) \\
\sigma(11) & \equiv & 1 & \mod(20) & & & \\
\sigma(12) & \equiv & -10 & \mod(20) & = & 10 & \mod(20) \\
\sigma(13) & \equiv & -1 & \mod(20) & = & 19 & \mod(20) \\
\sigma(14) & \equiv & -12 & \mod(20) & = & 8 & \mod(20) \\
\sigma(15) & \equiv & -3 & \mod(20) & = & 17 & \mod(20) \\
\sigma(16) & \equiv & -14 & \mod(20) & = & 6 & \mod(20) \\
\sigma(17) & \equiv & -5 & \mod(20) & = & 15 & \mod(20) \\
\sigma(18) & \equiv & -16 & \mod(20) & = & -4 & \mod(20) \\
\sigma(19) & \equiv & -7 & \mod(20) & = & 13 & \mod(20) \\
\sigma(20) & \equiv & -18 & \mod(20) & = & 2 & \mod(20)\ .
\end{array}
$$

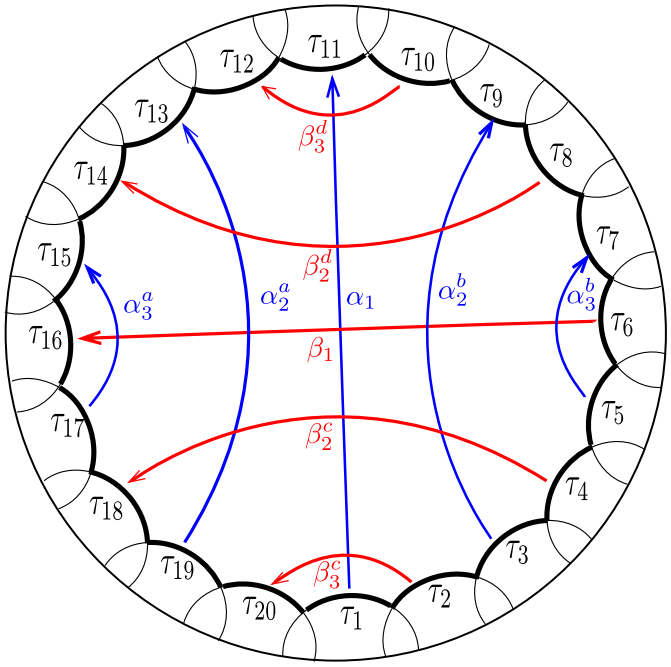



Figura 4.6: Tesselação para $g = 3$.

## 4.2 O polígono fundamental $8g-4$

Sabemos que $\mathbb{H}^2/\Gamma$ origina um $g$-toro através de um emparelhamento de arestas da região fundamental $\mathcal{F}$ de $\Gamma$ e este deve possuir um número par de arestas. Impondo a condição que $\mathcal{F}$ seja um polígono hiperbólico regular centrado na origem de $\mathbb{D}^2$, podemos encontrar expressões para as isometrias que geram grupo Fuchsiano $\Gamma$ de assinatura $(g,0)$ a partir de $\mathcal{F}$.

Temos pelo Teorema 1.62,

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{D}^2/\Gamma) &= 2\pi[2(g-1)+0] \\ &= 4\pi(g-1).\end{aligned}$$

Tomando o polígono $\mathcal{F}=8g-4$ arestas, vamos ter nessa região composta por $8g-4$ triângulos isósceles. Temos que um dos ângulos internos é

$$\theta = \frac{2\pi}{8g-4} = \frac{\pi}{4g-2}.$$

Além disso, os vértices de ângulo $\dfrac{\pi}{4g-2}$ de todos os triângulos se encontram na origem. Assim, a área $A_\triangle$ de cada triângulo é dado pela a expressão

$$\begin{aligned}A_\triangle &= \frac{4\pi(g-1)}{8g-4} \\ &= \frac{\pi(g-1)}{2g-1}\,.\end{aligned}$$

Seja $\phi$ a medida de cada um dos outros dois ângulos de cada triângulo em questão. Pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned}A_\triangle &= \pi-(\frac{\pi}{4g-2}+2\phi) &&\Rightarrow \\ \frac{\pi(g-1)}{2g-1} &= \pi-\frac{\pi}{4g-2}+2\phi &&\Rightarrow \\ \frac{2(g\pi-\pi)}{2(2g-1)}-\frac{(4g-2)\pi-\pi}{2(2g-1)} &= -2\phi &&\Rightarrow \\ \frac{2g\pi-2\pi-4g\pi+2\pi+\pi}{2(2g-1)} &= -2\phi &&\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{-\pi(2g-1)}{2(2g-1)} = -2\phi \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Então os ângulos internos dos $8g-4$ triângulos são: $\frac{\pi}{4g-2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$. A próxima etapa é encontrar as equações dos círculos euclidianos que contêm as geodésicas que forma as arestas de $\mathcal{F}$. Para tanto, consideremos, a Figura 4.7, que destaca em $\mathbb{D}^2$ uma das geodésicas de $\mathcal{F}$ em consideração, temos as seguintes relações obtidas a partir dos dois triângulos retângulos:

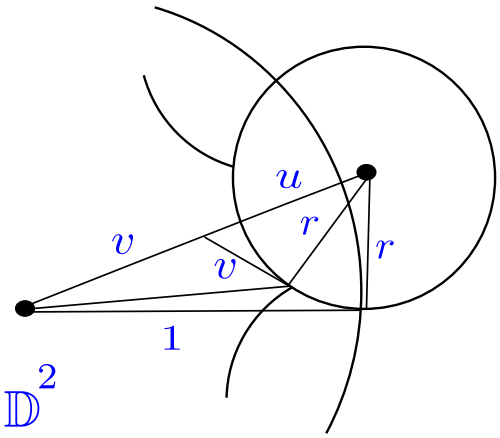



Figura 4.7: Obtendo expressões analíticas para as geodésicas de $F$.

$$r^2 = u^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4g-2}$$

$$(u+v)^2 = \left(u + u\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2 = 1 + r^2.$$

Calculando $u^2$ e chamando $\theta = \frac{\pi}{4g-2}$,

$$(u+u\cos\theta)^2 = 1 + u^2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$u^2 + 2u^2\cos\theta + u^2\cos^2\theta - 1 - u^2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$u^2(1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}_{\cos 2\theta}) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$u^2(1 + 2\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} u^2(1+2\cos\theta+2\cos^{\theta}-1)-1 &= 0 \quad \Rightarrow \\ u^2(2\cos\theta+2\cos^{\theta})-1 &= 0 \quad \Rightarrow \\ u^2 &= \frac{1}{(2\cos\theta+2\cos^{\theta})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{(2\cos\theta+2\cos^{\theta})}\operatorname{sen}\theta \\ &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{2\cos\theta+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \\ &= \frac{\tan^2}{2+2\sec\theta} \quad \Rightarrow \\ r &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{2+2\sec\theta}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r=\frac{\tan\frac{\pi}{4g-2}}{\sqrt{2+2\sec\frac{\pi}{4g-2}}}.$$

De modo análogo, temos

$$(u+v)=\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}}.$$

Com isso, os centros euclidianos das geodésicas das arestas de $\mathcal{F}$ são

$$e^{\left(i\frac{\pi}{4g-2}(1/2+k)\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}},\ k=0,...,8g-5$$

e os raios são

$$r=\frac{\tan\frac{\pi}{4g-2}}{\sqrt{2+2\sec\frac{\pi}{4g-2}}}.$$

Podemos agora encontrar as isometrias geradoras de $\Gamma$, pois as outras serão conjugação desta. Rotulemos as arestas de $\mathcal{F}$ com $\tau_1,...,\tau_{8g-4}$ sendo a contagem iniciada no sentido anti-horário. Seja

$$\begin{aligned} \alpha:\ \mathbb{D}^2 &\to \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{az+\bar{b}}{bz+\bar{a}},\quad a,b\in\mathbb{C}, a\bar{a}-b\bar{b}=1 \end{aligned}$$

um transformação hiperbólica que emparelha as arestas $\tau_1$ e $\tau_{4g-1}$. A inversa de $\alpha$ é

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}: \ \mathbb{D}^2 &\to \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{az-\bar{b}}{-bz+\bar{a}}, \quad a,b\in\mathbb{C}, a\bar{a}-b\bar{b}=1. \end{aligned}$$

O centro de $\tau_1$ pode ser dado por

$$e^{\left(i\frac{\pi}{8g-4}\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}},$$

e o centro de $\tau_{4g-1}$ por

$$e^{\left(i\frac{\pi}{4g-2}(1/2+4g-2)\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}}.$$

Os círculos isométricos de $\alpha$ possui centro $-\dfrac{\bar{a}}{b}$ e raio $\dfrac{1}{|b|}$; e o de $\alpha^{-1}$ centro de $\dfrac{a}{b}$ e mesmo raio. Assim,

$$-\frac{\bar{a}}{b} = e^{\left(i\frac{\pi}{8g-4}\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}} \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{|b|} = \frac{\tan\frac{\pi}{4g-2}}{\sqrt{2+2\sec\frac{\pi}{4g-2}}} \tag{4.2}$$

$$\frac{a}{b} = e^{\left(i\frac{\pi}{4g-2}(1/2+4g-2)\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}} \tag{4.3}$$

Utilizando (4.1) e (4.3), temos

$$\begin{aligned} a &= -e^{\left(i\frac{\pi}{4g-2}\left(\frac{1}{2}+4g-2\right)-\frac{\pi}{8g-4}\right)}\bar{a} \\ &= -e^{i\pi}\bar{a}, \end{aligned}$$

De $a\bar{a}-b\bar{b}=1$ e (4.2), temos que $b\bar{b}=|b|^2$ e $\bar{a}=-e^{-i\pi}a$ então,

$$\begin{aligned} a\bar{a}-|b|^2 &= 1 &&\Rightarrow \\ a\bar{a} &= 1+|b|^2 &&\Rightarrow \\ -a^2e^{-i\pi} &= 1+|b|^2 &&\Rightarrow \\ -a^2e^{-i\pi} &= 1+\frac{2+2\sec\frac{\pi}{4g-2}}{\tan^2\frac{\pi}{4g-2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{2(1+\sec\frac{\pi}{4g-2})}{\left(\sec\frac{\pi}{4g-2}-1\right)\left(\sec\frac{\pi}{4g-2}+1\right)}\\
&= 1+\frac{2}{\sec\frac{\pi}{4g-2}-1}\\
&= 1+\frac{2\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1-\cos\frac{\pi}{4g-2}}\\
&= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1-\cos\frac{\pi}{4g-2}}\\
&= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1-\cos\frac{\pi}{4g-2}}\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}\\
&= \frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2}{1-\cos^2\frac{\pi}{4g-2}}\\
&= \frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4g-2}} \qquad \Rightarrow\\
a^2 &= -\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\pi} \qquad \Rightarrow\\
a &= \pm\sqrt{-\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\frac{\pi}{2}}}\\
&= \pm\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\frac{\pi}{2}}i\ ,
\end{aligned}
$$

temos $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=i$, logo,

$$a=\pm\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\ .$$

Agora calculando o valor de $b$,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= e^{\left(i\frac{\pi}{4g-2}(1/2+4g-2)\right)}\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}} \quad \Rightarrow \\
b &= \pm\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}{2}}} \\
&= \pm\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\sqrt{\frac{2}{1+\sec\frac{\pi}{4g-2}}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\
&= \pm\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\
&= \pm\frac{\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)^2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\sqrt{\frac{2\cos\frac{\pi}{4g-2}}{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \quad \Rightarrow \\
b &= \pm\frac{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}.
\end{aligned}$$

**Proposição 4.9.** *A isometria hiperbólica $\alpha$ que emparelha as arestas $\tau_1$ a $\tau_{4g-1}$ é dada por*

$$\alpha(z)=\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)z-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}}{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}e^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}z+\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)},$$

*ou melhor,*

$$\alpha(z)=\frac{\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)}z-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{4g-2}}e^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}}{\sqrt{2\cos\frac{\pi}{4g-2}}e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}z+\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)}}.$$

Como dito antes, podemos encontrar as outras isometrias através da conjugação de uma isometria elíptica de ordem $\frac{8g-4}{k}$ que fixam o baricentro do polígono, definida por

$$\begin{aligned}
\rho_k: \quad \mathbb{D}^2 &\to \mathbb{D}^2 \\
z &\mapsto e^{i\frac{\pi}{4g-2}\left(\frac{1}{2}+k\right)}z, k=1,...,8g-5,
\end{aligned}$$

a qual pode ser representada matricialmente por:

$$M_\rho = \begin{pmatrix} e^{\left(i\frac{2\pi}{8g-4}\right)} & 0 \\ 0 & e^{\left(-i\frac{2\pi}{8g-4}\right)} \end{pmatrix}.$$

Podemos representar da seguinte forma as funções de emparelhamento, através de $\alpha_1$ e $\beta_1$

$$\begin{aligned} \alpha^a_{k+1} &= \rho_{2k}\cdot\alpha_1\cdot\rho_{2k}\ ;\ k=1,...,g-1 \\ \alpha^b_{k+1} &= \rho^{-1}_{2k}\cdot\alpha_1\cdot\rho^{-1}_{2k}\ ;\ k=1,...,g-1 \\ \beta^c_{k+1} &= \rho_{2k}\cdot\beta_1\cdot\rho_{2k}\ ;\ k=1,...,g-1 \\ \beta^d_{k+1} &= \rho^{-1}_{2k}\cdot\beta_1\cdot\rho^{-1}_{2k}\ ;\ k=1,...,g-1 \\ \beta_1 &= \rho^{-1}_{2g-1}\cdot\alpha_1\cdot\rho_{2g-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $\beta^{c,d}_{k+1}$ em função de $\alpha_1$

$$\beta^c_{k+1} = \rho_{2k}\cdot\left(\rho^{-1}_{2g-1}\cdot\alpha_1\cdot\rho_{2g-1}\right)\cdot\rho_{2k}; k=1,...,g-1$$

e

$$\beta^d_{k+1} = \rho^{-1}_{2k}\cdot\left(\rho^{-1}_{2g-1}\cdot\alpha_1\cdot\rho_{2g-1}\right)\cdot\rho^{-1}_{2k}; k=1,...,g-1.$$

Agora para simplificar, multiplicamos as isometrias elípticas tanto à direita quanto à esquerda. Primeiramente note que as isometrias $\rho$ são dadas da seguinte forma matricial:

$$M_{\rho_{2k}} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

$$M_{\rho^{-1}_{2k}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

$$M_{\rho_{2g-1}} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{8g-4}(2g-1)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}(2g-1)} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

$$M_{\rho^{-1}_{2g-1}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}(2g-1)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{8g-4}(2g-1)} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Multiplicando as matrizes $M_{\rho_{2k}} \cdot M_{\rho_{2g-1}^{-1}}$ dadas por (4.4) e (4.7), temos

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)-2k)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)-2k)} \end{pmatrix} = M_{\rho_{(2g-1)-2k}^{-1}}. \tag{4.8}$$

Multiplicando as matrizes $M_{\rho_{2g-1}} \cdot M_{\rho_{2k}}$ dadas por (4.6) e (4.4), temos

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)+2k)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)+2k)} \end{pmatrix} = M_{\rho_{(2g-1)+2k}}. \tag{4.9}$$

Multiplicando as matrizes $M_{\rho_{2k}^{-1}} \cdot M_{\rho_{2g-1}^{-1}}$ dadas por (4.5) e (4.7)

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)+2k)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)+2k)} \end{pmatrix} = M_{\rho_{(2g-1)+2k}^{-1}}. \tag{4.10}$$

Multiplicando as matrizes $M_{\rho_{2g-1}} \cdot M_{\rho_{2k}^{-1}}$ dadas (4.6) e (4.5)

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)-2k)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}((2g-1)-2k)} \end{pmatrix} = M_{\rho_{(2g-1)-2k}}. \tag{4.11}$$

Assim podemos reescrever $\beta_{k+1}^{c,d}$ em função de $\alpha_1$ da seguinte forma:

$$\beta_{k+1}^{c} = \rho_{(2g-1)-2k}^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot \rho_{(2g-1)+2k}; k = 1, ..., g-1$$

e

$$\beta_{k+1}^{d} = \rho_{(2g-1)+2k}^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot \rho_{(2g-1)-2k}; k = 1, ..., g-1.$$

Como calculado anteriormente o emparelhamento de $\tau_1$ a $\tau_{4g+1}$, podemos exibir a matriz de $\alpha_1$ que é dado da seguinte forma:

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & \frac{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ \frac{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Afim de reduzir escrita e espaço, chamaremos

$$u = \frac{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4g-2}\right)\cos\frac{\pi}{4g-2}}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}},$$

com isso podemos reescrever $M_{\alpha_1}$,

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

e com isso, vamos encontrar as matrizes de $\alpha_{k+1}^{a,b}, \beta_1$ e $\beta_{k+1}^{c,d}$. Vejamos

$$\begin{aligned} M_{\alpha_{k+1}^a} &= M_{\rho_{2k}} \cdot M_{\alpha_1} \cdot M_{\rho_{2k}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)-4k}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)-4k}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{\alpha_{k+1}^b} &= M_{\rho_{2k}^{-1}} \cdot M_{\alpha_1} \cdot M_{\rho_{2k}^{-1}} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)-4k}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)-4k}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\frac{4k\pi}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{4k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{\beta_1} &= M_{\rho_{2g-1}^{-1}} \cdot M_{\alpha_1} \cdot M_{\rho_{2g-1}} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi(2g-1)}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi(2g-1)}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix} \cdot M_{\rho_{2g-1}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{2\pi(2g-1)}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+2(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+2(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi(2g-1)}{4g-2}} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi(2g-1)}{8g-4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi(2g-1)}{8g-4}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Para simplificar as matrizes a seguir usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{(8g-3)+2(2g-1-2k)}{8g-4}\ ;\\ \psi_1 &= (2g-1)+2k\ ;\\ \psi_2 &= (2g-1)-2k\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{\beta^c_{k+1}} &= M_{\rho^{-1}_{2g-1-2k}}\cdot M_{\alpha_1}\cdot M_{\rho_{2g-1+2k}}\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2} & 0\\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)}\\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\end{pmatrix}\cdot M_{\rho_{2g-1+2k}}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2} & ue^{-i\pi\theta}\\ ue^{i\pi\theta} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)}\\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_{\beta_{k+1}^d} &= M_{\rho_{2g-1+2k}^{-1}} \cdot M_{\alpha_1} \cdot M_{\rho_{2g-1-2k}} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{\left(i\pi\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix} \cdot M_{\rho_{2g-1-2k}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1} & ue^{-i\pi\theta} \\ ue^{i\pi\theta} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{8g-4}\psi_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Com isso, podemos escrever as nossas matrizes

$$
M_{\alpha_{k+1}^a} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.14}
$$

$$
M_{\alpha_{k+1}^b} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{8g-3}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.15}
$$

$$
M_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix}. \tag{4.16}
$$

$$M_{\beta^c_{k+1}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

$$M_{\beta^d_{k+1}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}} & ue^{-i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} \\ ue^{i\pi\left(\frac{(8g-3)+4(2g-1)}{8g-4}\right)} & \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}} e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Agora temos a configuração da nossa matriz e podemos calcular o traço de cada uma delas. Observemos que o

$$Tr(M_{\alpha_1}) = Tr(M_{\beta_1})$$

e

$$Tr(M_{\alpha^a_{k+1}}) = Tr(M_{\beta^b_{k+1}}) = Tr(M_{\beta^c_{k+1}}) = Tr(M_{\beta^d_{k+1}}).$$

Então,

$$Tr(M_{\alpha_1,\beta_1}) = 2\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\right) \tag{4.19}$$

e

$$Tr(M_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_{k+1}}) = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\left(e^{i\frac{8k\pi}{8g-4}} + e^{-i\frac{8k\pi}{8g-4}}\right) \tag{4.20}$$

$$= \frac{1+\cos\frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4g-2}}\left(2\cos\frac{8k\pi}{8g-4}\right). \tag{4.21}$$

**Teorema 4.10.** *Seja $\Gamma$ um grupo discreto de isometria do plano hiperbolico $\mathbb{H}^2$, tal que o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja uma superfície de Riemann compacta $R$. Temos que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ é hiperbólico e $\gamma$ representa em $\pi_1(R)$ uma geodésica fechada de comprimento $l_\gamma$, tal que*

$$tr^2(\gamma) = 4\cosh^2\left(\frac{l_\gamma}{2}\right).$$

Assim, pelo teorema anterior, podemos encontrar o comprimento dessas geodésicas pela seguinte igualdade

$$l(\gamma) = 2\operatorname{arccosh}(Tr(\gamma)/2). \tag{4.22}$$

**Observação 4.11.** *Sabemos que cada geodésica fechada de $\mathbb{H}^2/\Gamma$ possui um único elemento hiperbólico da classe de conjugação de $\Gamma$, ou seja, temos um correspondência injetiva entre as classes de $\Gamma$ e as geodésicas de $\mathbb{H}^2/\Gamma$.*

Por (4.22), $\gamma$ será as geodésicas da tesselação, $\alpha_i^j$ e $\beta_i^k$, e $Tr(\gamma)$ será os traços das matrizes de $\alpha_i^j$ e $\beta_i^k$, calculados anteriormente. Com isso, podemos calcular os comprimento através do gênero:

**Para** $g = 2$

$$\begin{aligned} Tr(M_{\alpha_1,\beta_1}) &= 2\left(\frac{1+\cos 30}{\operatorname{sen} 30}\right) \\ &= 2\left(\frac{1,866}{0,5}\right) \\ &= 7,464. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(M_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_2}) &= \left(\frac{1,866}{0,5}\right)\left(2\cos\tfrac{8\pi}{12}\right) \\ &= \left(\frac{1,866}{0,5}\right)(2\cos 120) \\ &= \left(\frac{1,866}{0,5}\right).0,5 \\ &= 3,732. \end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas,

$$\begin{aligned} l_{(\alpha_1,\beta_1)} &= 2\operatorname{arccosh}\left(\frac{7,464}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{arccosh}(3,7320) \\ &= 2(1,99) \\ &= 3,98. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_2} &= 2\operatorname{arccosh}\left(\frac{3,732}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{arccosh}(1,866) \\ &= 2(1,23588) \\ &= 2,4717. \end{aligned}$$

**Para** $g = 3$

$$\begin{aligned} Tr(M_{\alpha_1,\beta_1}) &= 2\left(\frac{1+\cos 18}{\operatorname{sen} 18}\right) \\ &= 2\left(\frac{1,9510}{0,3090}\right) \\ &= 2(6,3139) \\ &= 12,6278. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(M_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_2}) &= (6,3139)\,(2(0,3090)) \\ &= (6,3139)(0,6180) \\ &= 3,9022. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(M_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_3}) &= (6,3139)\,(2(0,8711)) \\ &= (6,3139)(1,6180) \\ &= 10,21. \end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas,

$$\begin{aligned} l_{(\alpha_1,\beta_1)} &= 2\,\text{arccosh}\left(\frac{12,6278}{2}\right) \\ &= 2\,\text{arccosh}(6,3139) \\ &= 2(2,5295) \\ &= 5,059. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_2} &= 2\,\text{arccosh}\left(\frac{3,9022}{2}\right) \\ &= 2\,\text{arccosh}(1,9511) \\ &= 2(1,288) \\ &= 2,5765. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{(\alpha^{a,b}\beta^{c,d})_3} &= 2\,\text{arccosh}\left(\frac{10,21}{2}\right) \\ &= 2\,\text{arccosh}(5,105) \\ &= 2(2,313) \\ &= 4,6272. \end{aligned}$$

# Considerações Finais

Ao longo do nosso trabalho, o objetivo foi calcular as sístoles sobre uma superfície gerada pela tesselação $\{8g-4, 4\}$ que é uma superfície fechada com gênero $g \geq 2$, onde calculamos através do emparelhamento de arestas do polígonos $8g-4$ fornecido pelo artigo [1], conforme está feito no Capítulo 4. Além disso, falamos das geodésicas que decompõem uma superfície de Riemann $g \geq 2$ em calças, essas geodésicas também são fechadas, simples e disjuntas, formando uma família de $3g-3$ geodésicas, conforme visto no Capítulo 2.

Também apresentamos no Capítulo 3, baseado no artigo [16], uma maneira de obter o valor da constante de Bers, $B(g)$, no caso em que o gênero é igual a 2.

Neste momento, temos condições de dizer que a busca pelo comprimento das sístoles não é uma tarefa fácil, mas podemos buscar por limitantes para o seu comprimento. No entanto, para tesselação do tipo $\{p, q\}$, podemos obter os valores de algumas dessas sístoles que podem ser feita de maneira análoga ao que feito no Capítulo 4.

# Bibliografia


[1] ADLER, A. & FLATTO, L.: *Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.25 (1991), 229-334.

[2] AGUSTINI,E.: *Constelações de sinais em espaços hiperbólicos*. Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Imecc-Unicamp (2002).

[3] ANDERSON, J. W.: *Hyperbolic Geometry*.Springer-Verlag(2006).

[4] BAVARD,C.: *Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein*. Mathematische Annalen, Vol.5 (1996), 439-442.

[5] BAVARD,C.: *Disques extrémaux et surfaces modulaires* .Annales de la faculté des sciences de Toulouse, Vol.5 (1996),191-202.

[6] BAVARD,C.: *Systole et invariant d'Hermite*.J. reine angew. Math, Vol. 482 (1997)93-120.

[7] BEARDON, A. F.: *The Geometry of Discrete Groups* .Graduate Texts in Mathematics. Springer (1983).

[8] BERGER, M.: *What is... a Systole* .Notices of the AMS, Vol. 55 (2008).

[9] BERS, L.: *Spaces of degenerating Riemann surfaces* . Proc. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md. (1974), 43-55.

[10] BORTHWICK,D.: *Introduction to Spectral Theory on Hyperbolic Surfaces* . Spectral Geometry, Vol. 84 (2012), 1.

[11] BUSER,P.: *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces* . Springer (2010).

[12] BUSER, P & SEPPÄLÄ,M .: *Symmetric pants decompositions of Riemann surfaces* . Duke Math. J, Vol.67 (1992), 39-55.

[13] FARIA, M.: *Coordenadas Fricke e empacotamentos hiperbolicos de discos* .Tese de Doutorado, Departamento de Matemática, Imecc-Unicamp (2005).

[14] FIRER, M.: *Grupos fuchsianos* .Notas de aula, Departamento de Matemática, Imecc-Unicamp (1999) .

[15] GENDULPHE, M.: *Paysage systolique des surfaces hyperboliques compactes de petit genre* . Thèse, L´Universite Bordeaux I (2006).

[16] GENDULPHE, M.: *Constante de Bers en genre 2* . Mathematische Annalen, Vol.350 (2011), 919-951.

[17] GROMOV, M.: *Systoles and intersystolic inequalities* . Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Vol. 1 (1992), 291-362.

[18] IMAYOSHI, Y & TANIGUCHI, M.: *An introduction to Teichmüller spaces* . Springer-Verlag (1992).

[19] KAPOVICH, M.: *Hyperbolic manifolds and discrete groups* . Springer Science & Business Media (2001)

[20] KATOK,S.: *Fuchsian groups* . University of Chicago press (1992).

[21] KATZ,M.: *Systolic geometry and topology.* American Mathematical Soc.,Vol.137, (2007).

[22] MAKOVER, E.& MCGOWAN, J.: *The length of closed geodesics on random Riemann surfaces* . Geometriae Dedicata, Vol. 151 (2011), 207-220.

[23] PARLIER, H.: *On the geometry of simple closed geodesics* . Thèse, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE (2004).

[24] PARLIER, H.: *Lengths of geodesics on Riemann surfaces with boundary* .Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, Vol.30 (2005), 227-236.

[25] PAUR, K.: *The Fenchel Nielsen Coordinates of Teichmüller Space* . Citeseer (1999).

[26] RATCLIFFE, J.: *Foundations of hyperbolic manifolds* . Springer (2006).

[27] REYSSAT, E.: *Quelques aspects des surfaces de Riemann.* Progress in Math., Vol. 77 (1990).

[28] SABOURAU, S.: *Asymptotic bounds for separating systoles on surfaces* . Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 83 (2008), 35-54.

[29] SCHALLER, P.S.: *Reimann surfaces with shortest geodesic of maximal length.* Geometric & Functional Analysis GAFA, Vol. 3 (1993), 564-631.

[30] SCHALLER,P.S.: *Geometry of Riemann surfaces based on closed geodesics* . Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.35 (1998),193-214.

[31] SEPPÄLÄ,M & SORVALI, T.: *Geometry of Riemann surfaces and Teichmüller spaces* . Elsevier (2011).

[32] THURSTON, W.P.: *Three-dimensional geometry and topology* .Princeton university press (1997).