KARINA NAVARRO GONZALEZ

O ESPECTRO DE OPERADORES TOEPLITZ E OPERADORES TOEPLITZ COMPLEXO SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

N322e
2018

Navarro Gonzalez, Karina, 1991-
O espectro de operadores Toeplitz e operadores Toeplitz complexo simétricos / Karina Navarro Gonzalez. – Viçosa, MG, 2018.
vii, 73 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 72-73.

1. Hilbert, Espaço de. 2. Toeplitz, Operadores de. 3. Análise espectral. 4. Operadores simétricos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.733

KARINA NAVARRO GONZALEZ

O ESPECTRO DE OPERADORES TOEPLITZ E OPERADORES TOEPLITZ COMPLEXO SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 2 de março de 2018.

Sahibzada Waleed Noor

Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
(Orientador)

Dedico este trabalho a minha família
Especialmente a minha mãe.

O Homem torna-se velho muito
rápido e sábio demasiado tarde.

Anônimo

Agradecimentos

Em primeiro lugar sou muitíssima grata aos meus pais, Edgar e Maribel, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são sem dúvida os meus primeiros e eternos professores, e ao meu irmão Stiben por seu incondicional apoio, graças a vocês consegui chegar onde estou, e sei que posso contar com vocês para conseguir ir mais além.

Agradeço ao meu orientador, Anderson, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço de uma forma especial ao meu namorado por me ajudar com o português deste trabalho, e pelo seu apoio incondicional.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

GONZALEZ, Karina Navarro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2018. **O espectro dos operadores Toeplitz e operadores complexo simétricos**. Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo .

Neste trabalho estuda-se ferramentas sobre a importância do espaço Hardy-Hilbert e da análise funcional para abordagem do espectro do operador Toeplitz. Durante o estudo, é explícito que o espectro de tal operador depende de seu símbolo, estudando o espectro para o operador Toeplitz analítico(símbolo analítico), coanalítico(conjugado de seu símbolo analítico), autoadjunto(símbolo real) e operador Toeplitz com símbolo contínuo. Em seguida, introduz-se definições do operador simétrico complexo, para logo responder perguntas como: Quando um operador Toeplitz é simétrico complexo sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^2$?, quando um operador Toeplitz simétrico complexo é normal?

Abstract

GONZALEZ, Karina Navarro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2018. **Espectrum of Toeplitz operators and complex symmetric operators**. Advisor: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this work we study the importance of the Hardy-Hilbert space and the functional analysis to approach the spectrum of the Toeplitz operator, during the study, it is explicit that the spectrum of such operators depend on its symbol, studying the spectrum for the analytical Toeplitz operator (analytical symbol), coanalytic (conjugate of its analytic symbol), autoadjunto (real symbol) and Toeplitz operator with continuous symbol. Next, we introduce the definition of a complex symmetric operator and then answer questions such as: When a Toeplitz operator is complex symmetric on the Hilbert space $\mathcal{H}^2$?, when a complex symmetric Toeplitz operator is normal?

Introdução

O estudo do espaço de Hardy-Hilbert e de operadores definidos nesses espaços, produz uma série de resultados extraordinariamente elegantes. Por exemplo, conceitos muito elementares dos espaços de Hilbert fornecem provas simples das fórmulas da integral de Poisson e da integral de Cauchy.

O espaço de Hardy-Hilbert denotado por $\mathcal{H}^2$ é o conjunto de todas as funções analíticas no disco unitário cujas séries de potência têm coeficientes quadrado somáveis. Este espaço de funções analíticas no círculo unitário é normalmente indicado por $\widetilde{\mathcal{H}}^2$. Existem os espaços $\widetilde{\mathcal{H}}^p$ (chamados espaços de Hardy, em homenagem a G.H. Hardy) para cada $p \geq 1$ (e mesmo para $p \in (0,1)$). O único espaço $\widetilde{\mathcal{H}}^p$ que é um espaço de Hilbert é $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, o mais estudado dos espaços de Hardy, se sugere que seja chamado de espaço Hardy-Hilbert. Existem também outros espaços de funções analíticas, incluindo os espaços Bergman e Dirichlet. Houve muito estudo de todos esses espaços e de vários operadores neles.

O contexto do espaço de Hardy-Hilbert é necessário para entender a representação do operador shift unilateral agindo sobre o espaço das sequências quadrado somáveis $l^2(\mathbb{N})$ mediante o operador multiplicação $M_{e^{i\theta}}$ agindo sobre um subespaço fechado $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ de $L^2(S^1)$, onde se aproveita a relação de isomorfismo isométrico do espaço Hardy-Hilbert com o espaço $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, conforme abordado no Capítulo 1.

Por outro lado, as propriedades do operador shift como exemplo principal dos operadores Toeplitz são úteis na obtenção de resultados interessantes sobre espectro e outros aspectos de tais operadores que são estudados no Capítulo 2.

Os operadores mais conhecidos e mais estudados no espaço Hardy-Hilbert são os operadores Toeplitz. Os shifts unilaterais para frente e para trás são exemplos simples de operadores Toeplitz; de forma mais geral, os operadores Toeplitz são aqueles operadores cujas matrizes com relação à base canônica de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ têm diagonais constantes.

O primeiro maior estudo do operador Toeplitz foi feito por A. Brown e P.R. Halmos no seu artigo 'Algebraic properties of Toeplitz' no ano 1964, ver [2].

Seja $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a álgebra dos operadores lineares limitados definidos no espaço de Hilbert complexo e separável $\mathcal{H}$. Uma conjugação em $\mathcal{H}$ é um operador antilinear

$$C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

com $C^2 = I$ que satisfaz $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Para uma conjugação C, existe uma base ortonormal $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ para $\mathcal{H}$ tal que $Ce_n = e_n$ para todo n. Chamamos um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ complexo simétrico se existe uma conjugação C em $\mathcal{H}$ tal que

$$T = CT^*C.$$

A classe de operadores complexo simétricos incluem todos os operadores normais (se T satisfaz $T^*T = TT^*$), operadores de Hankel, operadores Toeplitz truncados, e operadores integrais de Volterra.

O estudo geral de operadores simétrico complexos foi iniciada em 2006-2007 por Stephan Ramon Garcia e Mihai Putinar , ver [9] e [10].

Em 2014, K. Guo e S. Zhu deram um exemplo de um operador Toeplitz complexo simétrico sobre o espaço de Hardy $\mathcal{H}^2$ no seu artigo 'A canonical decomposition of complex symmetric operators', ver [11].

Recentemente E. Ko e J. Lee no ano 2016 escreveram o artigo 'On complex symmetric Toeplitz operators', ver [13], sobre o qual se concentra parcialmente o estudo principal deste trabalho, baseado no fato que em geral os operadores Toeplitz sobre $\mathcal{H}^2$ não são geralmente simétrico complexos, explorando então quais são as condições suficientes e necessárias que deve satisfazer o símbolo do operador para ser simétrico complexo, como é mostrado no Capítulo 3.

Em 2017, S. Waleed Noor, escreveu um dos mais atuais estudos sobre os operadores Toeplitz simétrico complexo com símbolo contínuo, ver [16], onde continuando com a ideia anterior está interessado em caracterizar os operadores Toeplitz que são simétrico complexos, mas desta vez, seu símbolo de representação é contínuo, descrevendo ao mesmo tempo resultados sobre o espectro e invertibilidade de tais operadores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, se introduz algumas definições e propriedades fundamentais do espaço de Hardy-Hilbert e alguns conceitos e resultados importantes da análise funcional para os estudos dos capítulos posteriores.

1.1 O espaço de Hardy-Hilbert

Primeiro define-se um dos espaços de Hilbert mais conhecidos: l^2.

Definição 1.1. *O espaço l^2 consiste de todas as sequências quadrado somáveis de números complexos, ou seja*

$$l^2 = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Define-se a norma do vetor $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ como

$$||(a_n)_{n=0}^{\infty}|| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

e o produto interno dos vetores $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ como

$$\langle (a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Definição 1.2. *O espaço de Hardy-Hilbert $\mathcal{H}^2$ consiste de todas as funções analíticas que tem representação em séries de potências com coeficientes complexos quadrado somáveis, ou seja,*

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Define-se o produto interno e a norma dos vetores em $\mathcal{H}^2$ da seguinte maneira

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{b_n},\ \|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2},\ onde$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ \ e\ g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

A aplicação $(a_n)_{n=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é um isomorfismo isométrico de l^2 sobre $\mathcal{H}^2$. Portanto, $\mathcal{H}^2$ é um espaço de Hilbert.

Notação 1.3. *O disco aberto unitário sobre o plano complexo é denotado como $\mathbb{D}$ e o círculo unitario por S^1.*

Teorema 1.4. *Cada função em $\mathcal{H}^2$ é analítica sobre $\mathbb{D}$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

e $z_0 \in \mathbb{D}$, ou seja $|z_0| < 1$. O objetivo é provar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge.
Como $|z_0| < 1$, a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n$ converge e como $(a_n)_n \in l^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, assim existe k tal que $|a_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n {z_0}^n| \leq k \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^n < \infty.$$

Daí, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge absolutamente, logo converge.

□

Exemplo 1.5. *A função $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ é analítica sobre $\mathbb{D}$ mas não pertence a $\mathcal{H}^2$.*

Demonstração. Note que $1 - z^{n+1} = (1-z)(1 + z + ... + z^n)$, logo

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + ... + z^n,$$

como $|z| < 1$, pois $z \in \mathbb{D}$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Daí

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

assim, claramente a função é analítica mas os seus coeficientes não são quadrado somáveis. $\square$

Teorema 1.6. *Para cada $z_0 \in \mathbb{D}$, a aplicação $f \longmapsto f(z_0)$ é um funcional linear limitado sobre $\mathcal{H}^2$.*

Demonstração. Note que dados $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se

$$(f_1 + \lambda f_2)(z_0) = f_1(z_0) + \lambda f_2(z_0).$$

Assim, a aplicação é linear.

Agora fixando $z_0 \in \mathbb{D}$, note que

$$|f(z_0)| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{1/2}$$

$$= \|f\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{1/2}.$$

Assim a aplicação de $\mathcal{H}^2$ sobre $\mathbb{C}$ é um funcional linear limitado de norma menor ou igual a $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n}\right)^{1/2}$. $\square$

Definição 1.7. *Para $z_0 \in \mathbb{D}$, a função k_{z_0} definida por*

$$k_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_0}^n z^n = \frac{1}{1 - \overline{z_0} z}$$

*é chamada **Kernel de reprodução** para z_0 em $\mathcal{H}^2$.*

Da Definição 1.7, tem-se $k_{z_0} \in \mathcal{H}^2$, pois como $|z_0| < 1$ segue que $|z_0|^2 = |{z_0}^2| < |z_0|$ e como $|\overline{z}| = |z|$ tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}^n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}|^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{z_0}|^n < \infty.$$

Assim, $k_{z_0} \in \mathcal{H}^2$.

Teorema 1.8. *Para $z_0 \in \mathbb{D}$ e $f \in \mathcal{H}^2$, $f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle$ e $\|k_{z_0}\| = (1 - |z_0|^2)^{-1/2}$.*

Demonstração. Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tem-se $\langle f, k_{z_0} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = f(z_0)$ e consequentemente

$$||k_{z_0}||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |z_0|^{2n} = \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

$\square$

Teorema 1.9. *Se $f_n \to f$ em $\mathcal{H}^2$, então $f_n \to f$ uniformemente sobre um subconjunto compacto de $\mathbb{D}$.*

Demonstração. Dado $z_0 \in \mathbb{D}$, usando o teorema anterior junto com a desigualdade de Cauchy Schwarz tem-se

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| = |(f_n - f)(z_0)| = |\langle f_n - f, k_{z_0}\rangle| \leq ||f_n - f||||k_{z_0}||.$$

Se K é um compacto em $\mathbb{D}$, então existe uma constante real positiva M tal que

$$||k_{z_0}|| = \frac{1}{(1 - |z_0|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq M,$$

para todo $z_0 \in K$. Portanto,

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq M||f_n - f||$$

para todo $z_0 \in K$, concluindo o teorema. □

Denotando $L^2 = L^2(S^1)$ o espaço de funções quadrado integráveis sobre o círculo unitário com respeito a medida de Lebesgue e onde o produto interno e a norma para $f, g \in L^2$ são dados por

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta,$$

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

tem-se a seguinte definição.

Definição 1.10. *Seja $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ o espaço definido por*

$$\widetilde{\mathcal{H}}^2 = \left\{\tilde{f} \in L^2 : \langle \tilde{f}, e_n\rangle = 0, \forall n < 0\right\}.$$

Assim, se $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ sua série de Fourier tem a seguinte forma

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \text{ com } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Teorema 1.11. *$\widetilde{\mathcal{H}}^2$ é um subespaço fechado de L^2 .*

Demonstração. De fato, seja $\tilde{f}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$. Dado j fixo inteiro, note que

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{f}_n, e_j\rangle - \langle \tilde{f}, e_j\rangle| &= |\langle \tilde{f}_n - \tilde{f}, e_j\rangle| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\tilde{f}_n - \tilde{f})(e^{i\theta})e^{-ij\theta}\mathrm{d}\theta\right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(\tilde{f}_n - \tilde{f})(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |(\tilde{f}_n - \tilde{f})(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |(\tilde{f}_n - \tilde{f})(e^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|.$$

Portanto, para todo $j \in \mathbb{Z}^-$, tomando $c = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$ tem-se

$$|\langle \tilde{f}, e_j\rangle| \leq c||\tilde{f}_n - \tilde{f}||.$$

Como $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, $||\tilde{f}_n - \tilde{f}|| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, ou seja,

$$0 \leq |\langle \tilde{f}, e_j\rangle| \leq c \lim_{n\to\infty} ||\tilde{f}_n - \tilde{f}|| = 0,$$

logo $|\langle \tilde{f}, e_j\rangle| = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}^-$, daí $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ e assim $\widetilde{\mathcal{H}}^2 = \overline{\widetilde{\mathcal{H}}^2}$. □

Observação 1.12. *Há uma identificação natural entre* $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ *e* $\mathcal{H}^2$ *dada por*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{H}}^2 & \longrightarrow & \mathcal{H}^2 \\ \tilde{f}(e^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} & \longmapsto & f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{array}$$

Tal aplicação é um isomorfismo isométrico. De fato, note primeiro que a aplicação é claramente linear e $||\tilde{f}||_{L^2} = ||f||_{\mathcal{H}^2}$ *pois,*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\overline{\tilde{f}(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)\overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{im\theta}\right)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_m} e^{-im\theta}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} e^{i(n-m)\theta}\right)\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a_m}\left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{a_n}(2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\overline{a_n} = \langle f, f\rangle.$$

Deste modo, a aplicação é contínua e também da forma como ela foi definida, resulta ser sobrejetora. E mais,

$$f \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; ||f||_{\mathcal{H}^2} = 0 = ||\tilde{f}||_{L^2} \;\Leftrightarrow\; \tilde{f} \equiv 0.$$

Logo, o único elemento do seu kernel é o elemento nulo, e portanto a aplicação acima é injetiva e admite inversa contínua.

Definição 1.13. *Dada $f \in \mathcal{H}^2$, para $0 < r < 1$, seja f_r definida por*

$$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Note que $f_r \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ para todo r em $(0,1)$. De fato, como $f \in \mathcal{H}^2$ e $0 < r < 1$ tem-se $0 < a_n r < a_n$ assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Teorema 1.14. *Dada $\tilde{f} \in \widetilde{H}^2$ e f_r definida como antes, então $\lim\limits_{r\to 1^-} \|\tilde{f} - f_r\| = 0$ em $\widetilde{\mathcal{H}}^2$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, pode-se escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomando $0 < \delta < 1$, tal que para cada $r \in (\delta, 1)$ tem-se

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n|^2(1 - r^n)^2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{f}-f_r\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n-a_nr^n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2(1-r^n)^2\\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n|^2(1-r^n)^2+\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|^2(1-r^n)^2\\
&< \frac{\epsilon}{2}+\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n|^2<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}
$$

□

Corolário 1.15. *Para cada $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, existe uma sequência $(r_n)_n$ crescente de números positivos que convergem para 1 tais que*

$$\lim_{n\to\infty} f(r_ne^{i\theta})=\tilde{f}(e^{i\theta})$$

para quase todo θ.

Demonstração. Segue do fato que a convergência em L^2 implica na existência de uma subsequência que converge pontualmente para quase todo ponto (q.t.p). □

Teorema 1.16. *Seja f analítica sobre $\mathbb{D}$. Então, $f \in \mathcal{H}^2$ se, e somente se,*

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta<\infty.$$

Demonstração. Seja f uma função analítica sobre $\mathbb{D}$ com a série de potência $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, então para $0<r<1$,

$$|f(re^{i\theta})|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_n\overline{a_m}r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}.$$

Como

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta=\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & \text{se } n=m\\ 0, & \text{se } n\neq m\end{cases}$$

obtém-se

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

Se $f\in\mathcal{H}^2$, então $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}\leq\|f\|^2$ para todo $r\in[0,1)$, portanto,

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\leq\|f\|^2<\infty.$$

Reciprocamente, suponha que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta < \infty.$$

Como mostrou-se antes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

assim, se $f \notin \mathcal{H}^2$, o lado direito pode ser arbitrariamente grande tomando r próximo de 1, o qual contradiz a hipótese. $\square$

Observe que na prova do Teorema 1.16 conclui-se que

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Corolário 1.17. *Para qualquer função f analítica sobre $\mathbb{D}$, a função* $M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$ *é crescente, portanto,*

$$\lim_{r\to 1^-} M(r) = \sup_{0<r<1} M(r),$$

logo a função $f \in \mathcal{H}^2$ se, e somente se,

$$\lim_{r\to 1^-} M(r) < \infty.$$

Nesse caso

$$\lim_{r\to 1^-} M(r) = \|f\|^2.$$

Demonstração. A prova decorre da fórmula

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

estabelecida na prova do teorema anterior. $\square$

Definição 1.18. *O espaço de todas as funções que são analíticas e limitadas sobre $\mathbb{D}$ denota-se por $\mathcal{H}^\infty$. Define-se a norma de uma função $f \in \mathcal{H}^\infty$ como*

$$||f||_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}.$$

Teorema 1.19. *$\mathcal{H}^\infty$ é um espaço Banach.*

Demonstração. Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}^\infty$, então dados $\epsilon > 0$ e $n, m \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty < \epsilon \quad \text{para todo}\, n, m \geq N.$$

Defina

$$\begin{aligned} f: \ & \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longrightarrow f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z). \end{aligned}$$

Note que f está bem definida, pois dado $z \in \mathbb{D}$, tem-se

$$|(f_n - f_m)(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |(f_n - f_m)(z)| < \epsilon \quad \text{para todo}\, n, m \geq N,$$

ou seja, $(f_n(z))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$, como $\mathbb{C}$ é completo então $f(z) \in \mathbb{C}$.

Por outro lado,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |(f_n - f)(z)| < \epsilon \quad \text{sempre que}\, n \geq N,$$

assim $(f_n)_n$ converge uniformemente para f em $\mathbb{D}$ e $f_n - f \in \mathcal{H}^\infty$ para n suficientemente grande. Daí, pelo fato de $\mathcal{H}^\infty$ ser espaço vetorial e $f = f_n - (f_n - f)$, segue que $f \in \mathcal{H}^\infty$. □

Corolário 1.20. $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}^2$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}^\infty$, do Teorema 1.16 é suficiente mostrar que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta < \infty.$$

Note que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta < \int_0^{2\pi} ||f||_\infty^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi ||f||_\infty^2,$$

então,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta < ||f||_\infty^2,$$

daí pelo fato de $f \in \mathcal{H}^\infty$

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta < ||f||_\infty^2 < \infty.$$

Logo $f \in \mathcal{H}^2$. □

Teorema 1.21. *Se $f \in \mathcal{H}^\infty$ e f não é constante então $|f(z)| < ||f||_\infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Demonstração. Segue do Teorema do módulo máximo, veja Conway [6], pág.79. □

Exemplo 1.22. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, a função $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{it}$ pertence a $\mathcal{H}^\infty$.*

Demonstração. Como a transformação de Möbius envia círculos em círculos (lembre que uma reta é um círculo no plano complexo), para cada $z \in \mathbb{D}$ a parte real do número $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ é positiva, pois

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \underbrace{\frac{1}{1+|z|^2}}_{>0} \underbrace{\mathrm{Re}[(1+z)^2]}_{>0} > 0.$$

Assim o número $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ está no semiplano aberto direito.

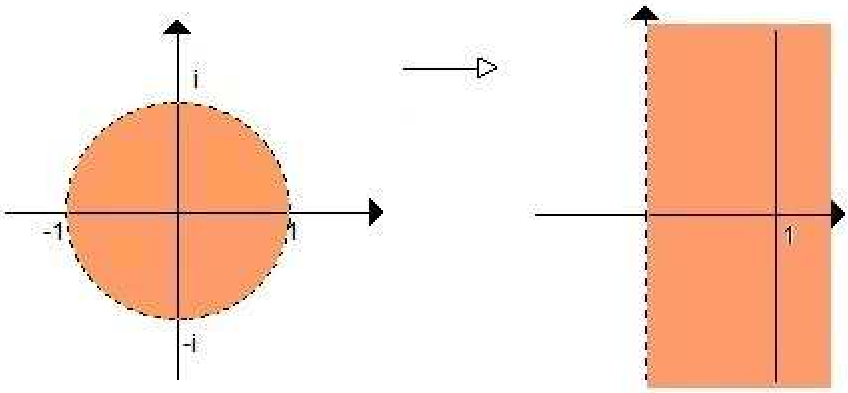

Figura 1.1: $T(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$

Para cada w considerado como acima, $w^{it} = e^{it\, log\, w} = e^{it(\, log\, r + i\theta)} = e^{it\, log\, r} e^{i^2 t\theta}$, onde *log* é o logaritmo principal e escrevendo na forma polar $w = re^{i\theta}$ com $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, tem-se

$$|w^{it}| = e^{-t\theta} \leq e^{\frac{|t|\pi}{2}}.$$

Portanto, $\left|\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{it}\right| \leq e^{|t|\frac{\pi}{2}}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Teorema 1.23. ***(Fórmula Integral de Cauchy).*** *Se f é analítica sobre um conjunto aberto que contém $\overline{\mathbb{D}}$ e $z_0 \in \mathbb{D}$ então,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Demonstração. Como f é analítica sobre $\overline{\mathbb{D}}$ o Corolário 1.15 implica que $\tilde{f}(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ para todo θ. Note que pelo mesmo fato, k_{z_0} é contínua sobre $\overline{\mathbb{D}}$ e portanto $\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{1 - \overline{z_0} e^{i\theta}}$.

Afirmação: $\langle f, k_{z_0} \rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{k}_{z_0} \rangle$ para todo $z_0 \in \mathbb{D}$.

De fato, basta notar

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}, \tilde{k}_{z_0} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \overline{\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta})} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right) \overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{z_0}^m (e^{im\theta}) \right)} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_0{}^m (e^{-im\theta}) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n z_0^m e^{i(n-m)\theta} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n z_0^m \left(\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n (2\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \langle f, k_{z_0} \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, dado $z_0 \in \mathbb{D}$ e usando a afirmação anterior tem-se

$$\begin{aligned}
f(z_0) = \langle f, k_{z_0} \rangle &= \langle \tilde{f}, \tilde{k}_{z_0} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \overline{\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta})} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) \frac{1}{1 - z_0 e^{-i\theta}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z_0} i e^{i\theta} \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Fazendo $z = e^{i\theta}$, tem-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0} dz.$$

Portanto,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{\tilde{f}(z)}{z - z_0} dz.$$

Como $f(z) = \tilde{f}(z)$ quando $|z| = 1$, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

□

Definição 1.24. *Para $0 \leq r < 1$ e $\psi \in [0, 2\pi]$. O **Kernel de Poisson** é definido* *por*

$$P_r(\psi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi + r^2}.$$

Note que $P_r(\psi) > 0$ para todo $r \in [0,1)$ e para todo ψ pois, $1 - r^2 > 0$ e $1 - 2r\cos\psi + r^2 \geq (1-r)^2 > 0$.

Teorema 1.25. ***(Fórmula integral de Poisson).*** *Se $f \in \mathcal{H}^2$ e $re^{it} \in \mathbb{D}$, então*

$$f(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)\mathrm{d}\theta.$$

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{D}$. Como $\tilde{k}_{z_0}(e^{i\theta}) = \dfrac{1}{1-\overline{z_0}e^{i\theta}}$, tem-se

$$f(z_0) = \langle f, k_{z_0}\rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{k}_{z_0}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - z_0e^{-i\theta}}\mathrm{d}\theta,$$

onde

$$\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty}(z_0e^{-i\theta})^n = 1 + z_0e^{-i\theta} + {z_0}^2e^{-2i\theta} + \ldots$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{f}(e^{i\theta}), \frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}} - 1\rangle &= \langle \tilde{f}(e^{i\theta}), \sum_{n=1}^{\infty} {z_0}^n e^{-in\theta}\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\langle \tilde{f}(e^{i\theta}), {z_0}^n e^{-in\theta}\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_0}^n \langle \tilde{f}(e^{i\theta}), e^{-ni\theta}\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois como $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}^2$, $\langle \tilde{f}, e_n\rangle = 0$ para todo $n < 0$. Ou seja,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\overline{\left(\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}} - 1\right)}\mathrm{d}\theta = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1-z_0e^{-i\theta}}\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\overline{\left(\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}} - 1\right)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})\left(\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}} + \frac{1}{1-\overline{z_0}e^{i\theta}} - 1\right)\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Substituindo z_0 por re^{it} em um termo do integrando da igualdade acima tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z_0e^{-i\theta}}+\frac{1}{1-\overline{z_0}e^{i\theta}}-1 &= \frac{1}{1-re^{-i(\theta-t)}}+\frac{1}{1-re^{i(\theta-t)}}-1\\
&= \frac{1-re^{i(\theta-t)}+1-re^{-i(\theta-t)}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^2}-1\\
&= \frac{2-2r\cos(\theta-t)}{(1-r\cos(\theta-t))^2+(r\sin(\theta-t))^2}-1\\
&= \frac{2-2r\cos(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}-1\\
&= \frac{2-2r\cos(\theta-t)-1+2r\cos(\theta-t)-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}=P_r(\theta-t).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(re^{it})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta-t)\mathrm{d}\theta.$$

□

Corolário 1.26. *Para $r\in[0,1)$ e $t\in\mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-t)\mathrm{d}\theta=1.$$

Demonstração. Basta considerar $f\equiv 1$ no Teorema 1.25. □

Definição 1.27. *A função mensurável ϕ sobre S^1 é **essencialmente limitada** se existe uma constante M_0 real positiva, tal que a medida do conjunto*

$$\{e^{i\theta}:|\phi(e^{i\theta})|>M_0\}.$$

seja nula. Sendo L^∞ o conjunto de funções mensuráveis essencialmente limitadas, define-se a norma da função $\phi\in L^\infty$ como

$$||\phi||_\infty=\inf\left\{M : A\ medida\ de\left\{e^{i\theta}:|\phi(e^{i\theta})|>M\right\}=0\right\}.$$

Note que se $\phi\in L^\infty$ então $|\phi(e^{i\theta})|\leq||\phi||_\infty$ para quase todo θ.

Corolário 1.28. *Seja $f\in\mathcal{H}^2$ e suponha $|\tilde{f}(e^{i\theta})|\leq k$ q.t.p (quase todo ponto), então $|f(z)|\leq k$ para todo $z\in\mathbb{D}$.*

Demonstração. Lembrando que $P_r(\theta)>0$ para todo θ e $0\leq r<1$, para $re^{it}\in\mathbb{D}$, aplicando a Fórmula integral de Poisson e o Corolário 1.26 tem-se

$$\begin{aligned} |f(re^{it})| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta})P_r(\theta - t)\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(e^{i\theta})|P_r(\theta - t)\mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\mathrm{d}\theta = k. \end{aligned}$$

Portanto, $|f(z)| \leq k$ para todo $z \in \mathbb{D}$. □

Agora, para esclarecer a relação entre f e $\tilde{f}$ é preciso falar do Teorema de Fatou, para isto, se introduz as seguintes definições.

Definição 1.29. *Seja α uma função complexa de variável real. A **derivada simétrica** de α em t está definida por*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t-h)}{2h},$$

se o limite existe.

Observação 1.30. *Se α é diferenciável em t a derivada simétrica existe e é igual a $\alpha'(t)$, pois,*

$$\begin{aligned} 2\alpha'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t-h)-\alpha(t)}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h\alpha(t+h)+h\alpha(t)+h\alpha(t-h)-h\alpha(t)}{-h^2} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t-h)}{h} \\ &= 2\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(t+h)-\alpha(t-h)}{2h}. \end{aligned}$$

Definição 1.31. *Seja α uma função complexa definida em $[a,b]$.
Se $P = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ é uma partição de $[a,b]$, escrevendo $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, .., n$. Se existe um número positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta\alpha_k| \leq M$$

*para toda partição de $[a,b]$, então α é de **variação limitada** em $[a,b]$.*

Teorema 1.32. ***(Teorema de Fatou's).*** *Seja α uma função complexa de variação limitada sobre $[0,2\pi]$ e u uma função definida sobre $\mathbb{D}$ por*

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\, d\alpha(\theta).$$

Se a derivada simétrica de α existe em $t_0 \in (0, 2\pi)$ então,

$$\lim_{r \to 1^-} u(re^{it_0})$$

existe e é igual a derivada simétrica de α em t_0.

Demonstração. Ver [14],pág.15. □

Corolário 1.33. *Seja ϕ uma função em $L^1(S^1, \mathrm{d}\theta)$. Defina u como*

$$u(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\phi(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

então,

$$\lim_{r \to 1^-} u(re^{it})$$

existe q.t.p de t e é igual a $\phi(e^{it})$ q.t.p.

Demonstração. Defina α sendo a seguinte aplicação

$$\alpha(\theta) = \int_0^{\theta} \phi(e^{ix})dx \quad \text{onde} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Note que α está bem definida pois $\phi \in L^1(S^1, \mathrm{d}\theta)$. Além disso, é uma função de variação limitada, pois dado uma partição $P = \{0 = \theta_0, \theta_1, ..., \theta_n = 2\pi\}$ de $[0, 2\pi]$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\alpha(\theta_k) - \alpha(\theta_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_0^{\theta_k} \phi(e^{ix})\ \mathrm{d}x - \int_0^{\theta_{k-1}} \phi(e^{ix})\ \mathrm{d}x \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \phi(e^{ix})\ \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} |\phi(e^{ix})|\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} |\phi(e^{ix})|\ \mathrm{d}x < M,
\end{aligned}$$

já que $\phi \in L^1(S^1, \mathrm{d}\theta)$. E mais, $\alpha'(\theta) = \phi(e^{i\theta})$ q.t.p. Logo, o resultado decorre do Teorema 1.32 (Teorema de Fatou's). □

O seguinte corolário mostra uma identificação das funções de $\mathcal{H}^2$ com as funções de $\tilde{\mathcal{H}}^2$. Nesta prova usa-se o Corolário 1.33, sendo assim uma aplicação importante do Teorema de Fatou's.

Corolário 1.34. *Se $f \in \mathcal{H}^2$ então $\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta}) = \tilde{f}(e^{i\theta})$ q.t.p.*

Demonstração. Lembrando o Teorema 1.25 (Fórmula integral de Poisson)

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\tilde{f}(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Agora, pelo Corolário 1.33 tem-se

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = \tilde{f}(e^{i\theta})\ q.t.p.$$

□

Daqui a diante, denota-se $L^1(S^1, \mathrm{d}\theta)$ e $L^2(S^1, \mathrm{d}\theta)$ respectivamente por L^1 e L^2.

Observação 1.35. *Da Definição 1.10 e de $L^2 \subset L^1$ segue que $\widetilde{\mathcal{H}}^2 \subset L^1$.*

Corolário 1.36. *Se $f \in \mathcal{H}^\infty$ então $\tilde{f} \in L^\infty$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}^\infty$, pelo Corolário 1.20, sabe-se que $f \in \mathcal{H}^2$, assim, usando o corolário anterior

$$\lim_{r\to 1^-} |f(re^{i\theta})| = |\tilde{f}(e^{i\theta})| \quad q.t.p.$$

Logo, como

$$|f(re^{i\theta})| \leq \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|$$

segue que,

$$|\tilde{f}(e^{i\theta})| = \lim_{r\to 1^-} |f(re^{i\theta})| \leq \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|\ q.t.p,$$

ou seja,

$$|\tilde{f}(e^{i\theta})| \leq \sup_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|\ q.t.p.$$

Consequentemente, o supremo essencial de $\tilde{f}$ é no máximo o $\sup\limits_{0<r<1} |f(re^{i\theta})|$, assim $||\tilde{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{\mathcal{H}^\infty}$. Portanto $f \in L^\infty$. □

Definição 1.37. *O espaço $\widetilde{\mathcal{H}}^\infty$ é definido como $\widetilde{\mathcal{H}}^2 \cap L^\infty$.*

Observação 1.38. *Note que $f \in \mathcal{H}^\infty$ se e somente se $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$.*

De fato, dada $f \in \mathcal{H}^\infty$ tem-se do corolário anterior $\tilde{f} \in L^\infty$. E mais, pelo Corolário 1.20 $f \in \mathcal{H}^2$, daí $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$. Portanto $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$.

Por outro lado, se $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$, por definição tem-se $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ (o que equivale dizer que $f \in \mathcal{H}^2$) e $\tilde{f} \in L^\infty$, logo pelo Corolário 1.28 $f \in \mathcal{H}^\infty$.

Teorema 1.39. ***(O teorema de F. e M.Riesz).****Se $f \in \mathcal{H}^2$ e o conjunto*

$$\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\}$$

tem medida de Lebesgue positiva, então f é identicamente nula sobre $\mathbb{D}$.

Demonstração. Ver [14],pág.50. □

1.2 Alguns fatos da análise funcional

Nesta seção se introduz alguns fatos da análise funcional que são de muita importância e usados em estudos posteriores no trabalho, como por exemplo o espectro de um operador linear limitado $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert.

É importante ressaltar que, daqui um diante, denota-se o espaço de Hilbert por $\mathcal{H}$ e o operador $A - \lambda I$ como $A - \lambda$.

Definição 1.40. *Se A é um operador linear limitado sobre $\mathcal{H}$, o **espectro** de A denotado como $\sigma(A)$ é o conjunto de números complexos λ tal que $A - \lambda$ é não inversível.*

Definição 1.41. *Seja A um operador linear limitado, o **espectro radial** de A denotado por $r(A)$ é definido como*

$$r(A) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definição 1.42. *O número complexo λ é um **autovalor** de A se $Af = \lambda f$ para algum f não nulo, o vetor f é dito **autovetor** de A.*

*O conjunto de todos os autovalores de A é chamado **espectro pontual** de A, denotado por $\Pi_0(A)$.*

*O **espectro pontual aproximado** $\Pi(A)$ é o conjunto de todos os números complexos λ tais que existe uma sequência $(f_n)_n$ de vetores unitários onde*

$$||(A - \lambda)f_n||_n \to 0 \quad quando\, n \to \infty.$$

Teorema 1.43. *Seja A um operador linear limitado sobre $\mathcal{H}$.*

1. Se $\|I - A\| < 1$então A é inversível.

2. O espectro de A é um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{C}$.

3. Se A é um operador inversível, então $\sigma(A^{-1}) = \left\{ \dfrac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}$.

4. Se A^* denota o operador adjunto de A então

$$\sigma(A^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

5. O número $\lambda \in \Pi(A)$ se, e somente se, $A - \lambda$ não é limitado inferiormente, ou seja, não existe $c > 0$ tal que $\|(A - \lambda)f\| \geq c\|f\|$, para toda $f \in \mathcal{H}$.

Além disso, $A - \lambda$ é limitado inferiormente se, e somente se, $A - \lambda$ é injetiva e a imagem de $A - \lambda$ é fechada. Em particular, $\Pi_0(A) \subset \Pi(A)$ e $\Pi(A) \subset \sigma(A)$.

6. $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$. Em particular $r(A) \leq ||A||$.

Demonstração. Ver [14], pág.21. □

Definição 1.44. *O **espectro de compressão**, $\Gamma(A)$, é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A - \lambda$ não tem imagem densa.*

Teorema 1.45. *Para todo operador linear limitado $\sigma(A) = \Pi(A) \cup \Gamma(A)$.*

Demonstração. Como $\Pi(A) \subset \sigma(A)$ e $\Gamma(A) \subset \sigma(A)$, então $\Pi(A) \cup \Gamma(A) \subset \sigma(A)$. Resta mostrar que $\sigma(A) \subset \Pi(A) \cup \Gamma(A)$, para isso, seja $\lambda \notin \Pi(A) \cup \Gamma(A)$. A ideia é provar que $\lambda \notin \sigma(A)$.

Se $\lambda \notin \Pi(A)$, então pelo Teorema 1.43 $A - \lambda$ é limitada inferiormente, o que é equivalente a dizer que $A - \lambda$ é injetiva e $\overline{Im(A - \lambda)} = Im(A - \lambda)$. Além disso, $\lambda \notin \Gamma(A)$ então $\overline{Im(A - \lambda)} = \mathcal{H}$, sendo assim $A - \lambda$ sobrejetor. Portanto $A - \lambda$ é bijetiva ,logo $\lambda \notin \sigma(A)$. $\square$

Teorema 1.46. *Para todo operador linear limitado A, a fronteira de $\sigma(A)$ está contido em $\Pi(A)$. Em particular, $\Pi(A)$ é não vazio.*

Demonstração. Seja λ na fronteira de $\sigma(A)$ e suponha que $\lambda \notin \Pi(A)$. Escolha $(\lambda_n)_n$, tal que, $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ e $\lambda_n \notin \sigma(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: Com as hipóteses acima, existem uma constante $k > 0$ e $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(A - \lambda_n)f\| \geq k\|f\| \text{ para todo } f \in \mathcal{H} \text{ sempre que, } n \geq M.$$

De fato, suponha que não existe dita constante, então, para todo $\epsilon > 0$ e para todo $M \in \mathbb{N}$, existe um $n \geq M$ e f_n de norma 1 tal que

$$\|(A - \lambda_n)f_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado $\epsilon > 0$ escolha um número natural M tal que $|\lambda_n - \lambda| < \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq M$. Com este ϵ e M, escolha n e f_n como acima então,

$$\|(A - \lambda)f_n\| \leq \|(A - \lambda_n)f_n\| + \|(\lambda_n - \lambda)f_n\| < \epsilon,$$

que implica $\lambda \in \Pi(A)$, o que é uma contradição.

A ideia é provar que $\lambda \notin \Gamma(A)$, pois como $\lambda \in \sigma(A) = \Pi(A) \cup \Gamma(A)$ e por hipótese $\lambda \notin \Pi(A)$, então tem-se uma contradição.

Seja $g \in \mathcal{H}$ um vetor diferente de zero qualquer, deve-se provar que

$$g \in \overline{Im(A - \lambda)}.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolha N suficientemente grande (de fato maior que M) tal que, se $n \geq N$ então,

$$|\lambda_n - \lambda| < \frac{k}{\|g\|}\epsilon.$$

Como $\lambda_n \notin \sigma(A)$, existe $f_n \in \mathcal{H}$ com $(A - \lambda_n)f_n = g$. A afirmação implica que

$$\|g\| = \|(A - \lambda_n)f_n\| \geq k\|f_n\| \text{ para todo } n \geq N.$$

Então,

$$\begin{aligned} \|(A-\lambda)f_n - g\| &= \|((A-\lambda_n)f_n - g) + (\lambda_n - \lambda)f_n\| \\ &= |\lambda_n - \lambda|\|f_n\| \leq \tfrac{\|g\|}{k}|\lambda_n - \lambda| < \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, $g \in \overline{Im(A-\lambda)}$. Portanto, a imagem de $A-\lambda$ é densa, já que, g é arbitrário, logo $\lambda \notin \Gamma(A)$. □

Definição 1.47. *A **imagem numérica** de A, denotado por $W(A)$, é o seguinte subconjunto do plano complexo:*

$$\{\langle Af, f\rangle : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}.$$

Exemplo 1.48. *Se A é uma matriz diagonal finita*

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix},$$

então $W(A)$ é a envoltória convexa de $\{d_1, d_2, d_3, ..., d_n\}$.

Demonstração. Dado $f = (f_1, f_2, .., f_n)$ de norma 1,

$$\begin{aligned} \langle Af, f\rangle &= \langle (d_1 f_1, d_2 f_2, .., d_n f_n), (f_1, f_2, .., f_n)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i |f_i|^2 \\ &= Env(\{d_1, d_2, .., d_n\}), \end{aligned}$$

pois $\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 = 1$. □

Teorema 1.49. *Para todo operador A, $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, onde $\overline{W(A)}$ denota o fecho da imagem numérica.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.45 tem-se que $\sigma(A) = \Pi(A) \cup \Gamma(A)$ assim, se prova primeiro que $\Pi(A) \subset \overline{W(A)}$.

Seja $\lambda \in \Pi(A)$, ou seja existe uma sequência $(f_n)_n$ em $\mathcal{H}$ tal que $||f_n|| = 1$ para todo n e $||(A-\lambda)f_n||_n \to 0$ quando $n \to \infty$. E mais, note que

$$\begin{aligned} |\langle Af_n, f_n\rangle - \lambda| &= |\langle Af_n, f_n\rangle - \lambda\langle f_n, f_n\rangle| \\ &= |\langle (A-\lambda)f_n, f_n\rangle| \\ &\leq ||(A-\lambda)f_n||, \end{aligned}$$

implica que $\langle Af_n, f_n\rangle_n \to \lambda$, quando $n \to \infty$, ou seja, $\lambda \in \overline{W(A)}$ e portanto $\Pi(A) \subset \overline{W(A)}$.

Por último, prova-se que $\Gamma(A) \subset W(A)$.
Seja $\lambda \in \Gamma(A)$. Como $A - \lambda$ não tem imagem densa segue que existe um vetor $g \in \mathcal{H}$ não nulo com $||g|| = 1$, tal que, $\langle (A - \lambda)f, g\rangle = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}$, pois lembre que

$$\overline{Im(A-\lambda)} \cup \overline{Im(A-\lambda)}^{\perp} = \mathcal{H}.$$

Em particular tomando $f = g$ tem-se

$$0 = \langle (A-\lambda)g, g\rangle = \langle Ag, g\rangle - \lambda\langle g, g\rangle = \langle Ag, g\rangle - \lambda,$$

logo $\langle Ag, g\rangle = \lambda$ e assim $\lambda \in W(A)$. □

Teorema 1.50. ***(Toeplitz-Hausdorff).*** *A imagem numérica de um operador linear limitado é um subconjunto convexo do plano complexo.*

Demonstração. Para esta prova se usa a seguinte afirmação.
Afirmação: Dados $x, y \in \mathbb{C}$, se $\overleftrightarrow{xy}$ (a reta que passa por x e y) intersectado com $W(A)$ for conexo, para todo x, y então, $w(A)$ é convexo.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{C}$, suponha que $\overleftrightarrow{xy} \cap W(A)$ é conexo.
Denotando $[x', y'] = \overleftrightarrow{xy} \cap W(A)$, obtém-se que $[x', y'] \subset W(A)$, como x', y' são arbitrários (pela arbitrariedade de x e y) $W(A)$ resulta ser convexo.

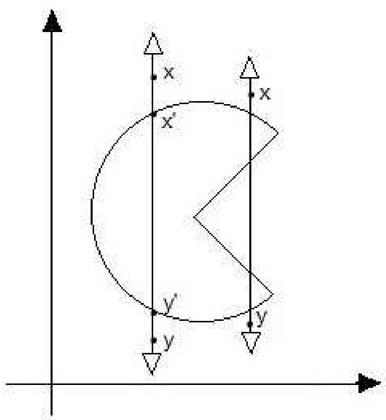

Figura 1.2: Esta figura mostra uma ideia geométrica da contrapositiva do Teorema 1.50.

A ideia agora é provar que dados $x, y \in \mathbb{C}$, $\overleftrightarrow{xy} \cap W(A)$ é conexo.
Considere então a reta que tem por equação (real) $px + qy + r = 0$, onde (x, y) denota o complexo $x + iy$. Note que todo operador linear limitado pode-se decompor como

$$A = B + iC,$$

com B e C operadores hermitianos (ver exercício 20.4 em [15](Cézar), pág.148), assim dado $f \in \mathcal{H}$ unitário

$$\langle Af, f\rangle = \langle (B + iC)f, f\rangle = \langle Bf, f\rangle + i\langle Cf, f\rangle.$$

Como $\langle Bf, f\rangle$ e $\langle Cf, f\rangle$ são reais pelo fato de B e C serem operadores hermitianos, chame $\langle Bf, f\rangle = x$ e $\langle Cf, f\rangle = y$ em $\mathbb{R}$, daí a interseção em questão é o conjunto

$$N = \{f \in \mathcal{H} : \langle (pB + qC + r)f, f\rangle = 0 \; e \; ||f|| = 1\}.$$

O seguinte passo então é provar que N é conexo ou equivalentemente, que o conjunto

$$N = \{f \in \mathcal{H} : \langle Lf, f\rangle = 0 \,,\; ||f|| = 1 \text{ e } L \text{ hermitiano}\}$$

é conexo, pelo fato que a soma de operadores hermitianos é hermitiano.
Para isto, se faz dois passos:

Passo 1: Provar que N é conexo no caso especial quando a dimensão do espaço de Hilbert é 2.

Passo 2: Reduzir o teorema geral Toeplitz-Hausdorff a seu caso especial 2-dimensional.

Demonstração do passo 1: Sem perda de generalidade pode-se assumir que L está definido em $\mathbb{C}^2$ pela matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

ver [4], pág.228. Note que tais α e β são reais distintos e não nulos pelo fato de L ser hermitiano assim, N se transforma no seguinte conjunto

$$N = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 : \alpha|\xi|^2 + \beta|\eta|^2 = 0 \text{ e } |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1\}.$$

Note também que $|\xi|$ oscila entre 0 e 1 e α e β não podem ter o mesmo sinal. Logo, o conjunto de (ξ, η) que pertencem a N soluciona o seguinte sistema de equações:

$$|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1. \tag{1.1}$$

$$\alpha|\xi|^2 + \beta|\eta|^2 = 0. \tag{1.2}$$

Isolando $|\xi|^2$ na equação (1.1) para logo substituir na equação (1.2) obtém-se

$$\alpha - \alpha|\eta|^2 + \beta|\eta|^2 = 0,$$

equivalentemente, $\alpha + (\beta - \alpha)|\eta|^2 = 0$ daí,

$$|\eta|^2 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \quad \text{e} \quad |\xi|^2 = \frac{\beta}{\beta - \alpha}.$$

Isto motiva a definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} f : N \quad &\longrightarrow \quad S^1 \times S^1 \\ (\xi, \eta) \quad &\longmapsto \quad f((\xi, \eta)) = \left(\sqrt{\tfrac{\beta-\alpha}{\beta}}\, \xi, \sqrt{\tfrac{\alpha-\beta}{\alpha}}\, \eta\right). \end{aligned}$$

Claramente f está bem definida e é contínua.

Definindo também

$$\begin{aligned} g : S^1 \times S^1 &\longrightarrow N \\ (\theta_1, \theta_2) &\longmapsto g((\theta_1, \theta_2)) = \left(\sqrt{\tfrac{\beta}{\beta - \alpha}}\, \theta_1, \sqrt{\tfrac{\alpha}{\alpha - \beta}}\, \theta_2 \right), \end{aligned}$$

onde g está bem definida, é contínua e além disso $f \circ g = Id = g \circ f$, ou seja, $g = f^{-1}$, tem-se que N é homeomorfo a $S^1 \times S^1$ logo, N é conexo.

Demonstração do passo 2: Suponha que A se encontra definido sobre um espaço $\mathcal{H}$ de Hilbert qualquer.

Sejam f, g vetores unitários em $\mathcal{H}$ e seja $P : \mathcal{H} \longrightarrow K$ a projeção de $\mathcal{H}$ sobre o espaço $K = \overline{f \vee g}$ (fecho do espaço gerado por f e g).

Note que se o espaço gerado de f e g for 1-dimensional, então $f = \lambda g$ com $|\lambda| = 1$ assim, $\langle Af, f \rangle = \langle Ag, g \rangle$ e a conclusão segue.

Aplicando o Teorema de Toeplitz-Hausdorff caso 2-dimensional ao operador PAP, agindo sobre K, se deduz que cada z complexo sobre o segmento que une

$$\langle Af, f \rangle = \langle PAPf, f \rangle \ \text{ e } \ \langle Ag, g \rangle = \langle PAPg, g \rangle \tag{1.3}$$

corresponde a um vetor $h \in K$ tal que $z = \langle PAPh, h \rangle = \langle Ah, h \rangle$, logo $W(A)$ é convexo.

A fórmula (1.3) segue do seguinte argumento.

Como a projeção ortogonal satisfaz $P^2 = P$, $Pf = f$ pelo fato de $f \in K$ e P ser uma projeção sobre K e é autoadjunta, então

$$\langle PAPf, f \rangle = \langle PAPf, Pf \rangle = \langle APf, P^2 f \rangle = \langle APf, Pf \rangle = \langle Af, f \rangle.$$

□

Definição 1.51. *Um operador linear limitado A entre espaços de Hilbert é dito **normal** quando ele comuta com o seu adjunto*

$$AA^* = A^*A.$$

Definição 1.52. *Dois operadores A e B são **unitariamente equivalentes** se existe um operador S unitário ($SS^* = I = S^*S$) tal que*

$$SAS^* = B.$$

Definição 1.53. *Seja $\phi \in L^\infty$. O **operador de multiplicação** por ϕ, denotado por M_ϕ, está definido por $M_\phi f = \phi f$, para todo $f \in L^2$.*

Teorema 1.54. *Se A é um operador normal sobre $\mathcal{H}$, então existe um espaço mensurável (X, ω, μ) e uma função $\phi \in L^\infty(X, \omega, \mu)$ tal que A é unitariamente equivalente a M_ϕ sobre $L^2(X, \omega, \mu)$.*

Demonstração. Ver [5](Conway), pág.272. □

Teorema 1.55. *Se A é normal, então $\overline{W(A)}$ é a envoltória convexa de $\sigma(A)$, ou seja*

$$\overline{W(A)} = Env(\sigma(A)).$$

Demonstração. Inicialmente prova-se que $Env(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}$.

Pelo Teorema 1.49 sabe-se que $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ e pelo Teorema de Toeplitz-Hausdorff $W(A)$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{C}$.

Como $Env(\sigma(A))$ é o menor convexo que contém a $\sigma(A)$, então

$$Env(\sigma(A)) \subset \overline{W(A)}.$$

Falta provar que $\overline{W(A)} \subset Env(\sigma(A))$, para isto, é suficiente demonstrar que todo semiplano fechado em $\mathbb{C}$, que contém $\sigma(A)$, também contém $W(A)$.

Por rotação e traslação, assuma que $\sigma(A)$ está contido no semiplano direito $Re(z) \geq 0$.

A ideia é observar que $W(A)$ está contido neste semiplano. Do Teorema 1.54, se pode assumir que A é a multiplicação de um $\phi \in L^\infty(X, \mu)$ agindo sobre $L^2(X, \mu)$ para algum subconjunto mensurável X do plano complexo e alguma medida μ sobre ele, assim escrevendo $A = M_\phi$,

$$\sigma(A) = \sigma(M_\phi) = ess\, Im(\phi) \quad \text{pelo Teorema 2.7(próximo capítulo).}$$

Daí que $Re\, \phi \geq 0$ q.t.p.
Portanto, para $\lambda \in W(A)$ e $\lambda \in \sigma(A)$ tem-se

$$\langle Af, f\rangle = \langle M_\phi f, f\rangle = \int_X \phi |f|^2 d\mu,$$

Logo $Re\, \langle Af, f\rangle \geq 0$.

Agora, para $\lambda \in W(A)$ e $\lambda \notin \sigma(A)$,

$$\begin{aligned} \langle Af, f\rangle &= \langle AS^*(Sf), S^*(Sf)\rangle = \langle SAS^*(Sf), (Sf)\rangle \\ &= \langle M_\phi(S(f)), S(f)\rangle = \int_X \phi |S(f)|^2 d\mu, \end{aligned}$$

onde S é o operador unitário que existe do Teorema 1.54, obtendo também que $Re\langle Af, f\rangle \geq 0$, concluindo que $W(A)$ está contido no semiplano direito como se desejava. □

Os operadores de posto finito tem uma relação notável com operadores sobre espaços de dimensão finita que são usados frequentemente neste trabalho.

Definição 1.56. *O **posto** do operador A é a dimensão de sua imagem.*

Notação 1.57. *Dados $f, g \in \mathcal{H}$, define-se o operador $f \otimes g$ como*

$$\begin{aligned} f \otimes g: \ & \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ & h \longmapsto (f \otimes g)h = \langle h, g \rangle f \end{aligned}$$

Note que se $f \neq 0$ e $g \neq 0$, então $f \otimes g$ tem posto 1, pois a imagem consiste na multiplicação por f fixo.

Teorema 1.58. 1. *Se A é um operador de posto 1, então existe f e g em $\mathcal{H}$ com $A = f \otimes g$.*

2. $||f \otimes g|| = ||f||\,||g||$.

3. *Para operadores limitados A e B , $A(f \otimes g)B = (Af) \otimes (B^* g)$.*

4. *Dois operadores não nulos de posto 1 $f_1 \otimes g_1$ e $f_2 \otimes g_2$ são iguais se, e somente se, existe um número complexo c diferente de zero tal que $f_1 = cf_2$ e $g_2 = \bar{c} g_1$.*

Demonstração. 1. Seja f um vetor não nulo na imagem de A, como a imagem de A tem dimensão 1 existe um funcional linear limitado λ tal que $Ah = \lambda(h)f$ para todo $h \in \mathcal{H}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet [1], pág.127 (Botelho), existe $g \in \mathcal{H}$ tal que $\lambda(h) = \langle h, g \rangle$ para todo $h \in \mathcal{H}$, assim $Ah = \langle h, g \rangle f = (f \otimes g)h$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

2. Seja $h \in \mathcal{H}$.

   Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$||(f \otimes g)h|| = ||\langle h, g \rangle f|| \leq ||h||||g||||f||$$

   então,

$$||f \otimes g|| \leq ||f||||g||.$$

   Agora, se $g \neq 0$

$$\left|\left|(f \otimes g)\frac{g}{||g||}\right|\right| = \left|\left|\langle \frac{g}{||g||}, g \rangle f\right|\right| = \frac{|\langle g, g \rangle|}{||g||}||f|| = ||g||||f||.$$

   Portanto, $||f \otimes g|| = ||f||||g||$.

3. Sejam A e B operadores limitados. Se $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (A(f \otimes g)B)h \ &= (A(f \otimes g)(B(h))) = A(\langle B(h), g \rangle f) \\ &= \langle Bh, g \rangle A(f) = \langle h, B^* g \rangle A(f) \\ &= (Af \otimes B^* g)(h). \end{aligned}$$

   Logo, $A(f \otimes g)B = (Af) \otimes (B^* g)$.

4. Assuma que os operadores

$$f_1 \otimes g_1, \quad f_2 \otimes g_2,$$

de posto 1 não nulos são iguais, isso implica que nenhum dos quatro vetores f_1, g_1, f_2, g_2 são nulos.

Note que

$$(f_1 \otimes g_1)\frac{g_1}{||g_1||^2} = f_1 \quad \text{e} \quad (f_2 \otimes g_2)\frac{g_1}{||g_1||^2} = \frac{\langle g_1, g_2\rangle}{||g_1||^2} f_2,$$

portanto, $f_1 = cf_2$ com $c = \dfrac{\langle g_1, g_2\rangle}{||g_1||^2}$, isto implica que $(cf_2) \otimes g_1 = f_2 \otimes g_2$. Daí, para todo $h \in \mathcal{H}$

$$\langle h, g_1\rangle c f_2 = \langle h, g_2\rangle f_2,$$

ou seja, $\langle h, \bar{c} g_1\rangle = \langle h, g_2\rangle$ para todo h, assim $\bar{c} g_1 = g_2$.

Para provar a outra implicação basta notar que para cada $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} (f_1 \otimes g_1)(h) &= (cf_2 \otimes g_1)(h) = \langle h, g_1\rangle c f_2 \\ &= \langle h, \bar{c} g_1\rangle f_2 = (f_2 \otimes \bar{c} g_1)(h) \\ &= (f_2 \otimes g_2)(h). \end{aligned}$$

Logo os operadores são iguais.

□

1.3 Os operadores shift e comutador

Nesta seção, é abordado o estudo do espectro dos operadores shift unilateral e bilateral, observando a representação de tais operadores agindo sobre $\mathcal{H}^2$ e L^2, respectivamente. É importante conhecer o comutador do operador shift bilateral, pois ele da informação sobre quando o operador é normal, ou seja, quando ele comuta com o seu adjunto.

1.3.1 Os operadores Shift

Definição 1.59. *Sobre l^2 o operador* ***shift unilateral*** *U está definido por*

$$U(a_0, a_1, a_2, ..) = (0, a_0, a_1, ..)$$

para $(a_0, a_1, a_2, ..) \in l^2$.

Teorema 1.60. *1. O shift unilateral é uma isometria ($||Uf|| = ||f||$), para todo $f \in l^2$.*

2. *O operador adjunto U^* de U tem a seguinte forma*

$$U^*(a_0, a_1, a_2, ..) = (a_1, a_2, a_3, ..)$$

para $f \in l^2$, chamado também de ***shift unilateral para trás****.*

Demonstração. 1. O objetivo é provar que

$$||(a_0, a_1, a_2, ..)|| = ||(0, a_0, a_1, a_2, ..)||,$$

mas isto se tem trivialmente pois $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 = |0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k-1}|^2$.

2. Sejam A o operador definido por

$$A(a_0, a_1, a_2, ..) = (a_1, a_2, a_3, ..)$$

e $x = (a_0, a_1, a_2, ..)$ e $y = (b_0, b_1, b_2, ..)$ dois vetores.
Note que

$$\langle Ux, y\rangle = \langle (0, a_0, a_1, a_2, ..), (b_0, b_1, b_2, ..)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}\overline{b_k}$$

e

$$\langle x, Ay\rangle = \langle (a_0, a_1, a_2, ..), (b_1, b_2, b_3, ..)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\overline{b_{k+1}},$$

logo, como estas duas somas são iguais segue que $A = U^*$.

□

Definição 1.61. *O espaço* $\boldsymbol{l^2(\mathbb{Z})}$ *está definido como o espaço de todas as sequências quadrado somáveis duplas, ou seja*

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{(.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Definição 1.62. *O* ***shift bilateral*** *é o operador W sobre $l^2(\mathbb{Z})$ definido por*

$$W(.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..) = (.., a_{-3}, a_{-2}, \boldsymbol{a_{-1}}, a_0, a_1, ..),$$

onde o negrito indica a posição zero-ésima.

Teorema 1.63. *1. O shift bilateral é um operador unitário.*

2. *O adjunto do shift bilateral, chamado shift bilateral para trás é dado por*

$$W^*(.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..) = (.., a_{-1}, a_0, \boldsymbol{a_1}, a_2, ..).$$

Demonstração. Claramente $||Wx|| = ||x||$ para todo $x \in l^2(\mathbb{Z})$, logo W é uma isometria.

Defina o operador linear limitado A por

$$A(..,a_{-2},a_{-1},\boldsymbol{a_0},a_1,a_2,..) = (..,a_{-1},a_0,\boldsymbol{a_1},a_2,..).$$

Claramente $AW = WA = I$, assim W é uma isometria inversível.

O objetivo é provar que $A = W^*$ para logo concluir que W é um operador unitário.

Sejam $x = (..,a_{-2},a_{-1},\boldsymbol{a_0},a_1,a_2,..)$ e $y = (..,b_{-2},b_{-1},\boldsymbol{b_0},b_1,b_2,..)$ em $l^2(\mathbb{Z})$, observe que

$$\langle Wx, y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1}\overline{b_n}, \quad \langle x, Ay\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_{n+1}},$$

pelo fato de estas somas serem iguais obtém-se que $A = W^*$. □

Teorema 1.64. *Seja U o operador shift unilateral sobre l^2 e U^* o seu adjunto, então*

$$\Pi_0(U^*) = \mathbb{D}.$$

Além disso, para $\lambda \in \mathbb{D}$, $(U^* - \lambda)f = 0$ para um f em l^2 se, e somente se, existe uma constante c tal que $f = c(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,..)$.

Demonstração. Primeiro observe que $||U^*|| = ||U|| = 1$, pois

$$||U|| = \sup_{||f||=1} ||U(f)|| = \sup_{||f||=1} ||f|| = 1$$

e dado $f = (a_0,a_1,a_2,..)$ em l^2

$$||U^*|| = \sup_{||f||=1} ||U^*(f)|| = \sup_{||(a_0,a_1,a_2,..)||=1} ||(a_1,a_2,a_3,..)|| \leq 1,$$

mas note que para $f = (0,1,0,..)$, tem-se $||f|| = 1$, donde

$$||U^*(f)|| = ||(1,0,0,..)|| = 1,$$

assim o supremo é atingido logo,

$$||U^*|| = 1 = ||U||.$$

Agora, o raio espectral $r(U^*) = \lim\limits_{n\to\infty} ||U^{*n}||^{\frac{1}{n}}$, e em particular $r(U^*) \leq ||U^*|| = 1$, então,

$$\Pi_0(U^*) \subset \sigma(U^*) \subset \overline{\mathbb{D}}.$$

Dado λ com $|\lambda| < 1$, então $f = (1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,..) \in l^2$, assim

$$U^*(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,..) = (\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\lambda^4..) = \lambda(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,..),$$

portanto λ é um valor próprio de U^* e como consequência,

$$\mathbb{D} \subset \Pi_0(U^*).$$

O seguinte passo é tomar $e^{i\theta} \in S^1$ e mostrar que $e^{i\theta} \notin \Pi_0(U^*)$.
Seja $f = (f_0, f_1, f_2, ..)$ um vetor em l^2 e suponha que $U^* f = e^{i\theta} f$, então

$$(f_1, f_2, f_3, ..) = (e^{i\theta} f_0, e^{i\theta} f_1, e^{i\theta} f_2, ..)$$

daí, $f_{n+1} = e^{i\theta} f_n$ para todo $n = 0, 1, 2, ..$, consequentemente $f_n = e^{in\theta} f_0$.
Como $f \in l^2$ a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |e^{in\theta} f_0|^2 < \infty$, assim

$$\lim_{n\to\infty} |e^{in\theta} f_0|^2 = \lim_{n\to\infty} |f_0|^2 = 0,$$

isto se, e somente se, $f_0 = 0$, logo $f = 0$, consequentemente $e^{i\theta}$ não pode ser valor próprio. Juntando os resultados anteriores obtém-se que $\Pi_0(U^*) = \mathbb{D}$.

Por último, se estabelece a caracterização dos valores próprios do adjunto do operador Shift unilateral.

Seja $\lambda \in \mathbb{D}$ e suponha que $U^* f = \lambda f$ para algum $f \neq 0$.

Se $f = (f_0, f_1, f_2, ..)$ tem-se

$$(f_1, f_2, f_3, ..) = U^* f = \lambda f = \lambda(f_0, f_1, f_2, ..),$$

então $f_{n+1} = \lambda f_n$ para todo $n = 0, 1, 2, ..$, consequentemente $f_n = \lambda^n f_0$ para todo $n = 0, 1, 2, ..$, logo $f = f_0(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..)$.

Para a implição contrária, suponha que existe uma constante c tal que $f = c(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..)$ com $|\lambda| < 1$, então

$$U^*(c(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..)) - \lambda c(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..) = c(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..) - c(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, ..) = 0,$$

como se desejava. □

Teorema 1.65. *Se U é o operador shift unilateral sobre l^2 e U^* o seu adjunto, W é o shift bilateral sobre $l^2(\mathbb{Z})$ e W^* o seu adjunto, então*

1. $\sigma(U) = \overline{\mathbb{D}}$, $\Pi(U) = S^1$ *e* $\Pi_0(U) = \emptyset$.
2. $\sigma(U^*) = \Pi(U^*) = \overline{\mathbb{D}}$ *e* $\Pi_0(U^*) = \mathbb{D}$.
3. $\sigma(W) = \Pi_0(W) = S^1$, *e* $\Pi_0(W) = \emptyset$.
4. $\sigma(W^*) = \Pi_0(W^*) = S^1$, *e* $\Pi_0(W^*) = \emptyset$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.64 sabe-se que $\sigma(U^*) \subset \overline{\mathbb{D}}$ e $\boldsymbol{\Pi_0(U^*) = \mathbb{D}}$, portanto

$$\mathbb{D} = \Pi_0(U^*) \subset \Pi(U^*) \subset \sigma(U^*) \subset \overline{\mathbb{D}}.$$

Como $\sigma(U^*)$ é fechado e $S^1 \subset \Pi(U^*)$ pelo Teorema 1.46

$$\boldsymbol{\overline{\mathbb{D}} = \Pi(U^*) = \sigma(U^*)}.$$

Agora, como $\sigma(U^*) = \overline{\mathbb{D}}$,

$$\boldsymbol{\sigma(U) = \overline{\mathbb{D}}}. \tag{1.4}$$

Seja $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, o próximo objetivo é provar que $\lambda \notin \Pi_0(U)$.
Seja $f = (f_0, f_1, f_2, ..) \in l^2$, suponha que $\lambda \in \Pi_0(U)$, ou seja, $Uf = \lambda f$, então

$$(0, f_0, f_1, ..) = (\lambda f_0, \lambda f_1, \lambda f_2, ..).$$

Se $\lambda = 0$, o lado esquerdo da fórmula anterior é zero e assim $f = 0$.

Se $\lambda \neq 0$, $f_n = (\frac{1}{\lambda})^n f_0$ para todo n e $\lambda f_0 = 0$, daí que $f_0 = 0$, logo $f_n = 0$ para todo n, consequentemente λ não pode ser valor próprio. Portanto, $\boldsymbol{\Pi_0(U) = \emptyset}$.

O seguinte passo é mostrar que $\Pi(U) = S^1$ usando algumas propiedades do espectro de W.

Como $||W|| = 1$, pelo fato de W ser isométria a fórmula do raio espectral implica que $\sigma(W) \subset \overline{\mathbb{D}}$ pois $r(W) \leq ||W|| = 1$, em outras palavras como W é inversível e $W^{-1} = W^*$ tem-se

$$\sigma(W^*) = \left\{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(W)\right\} \subset \left\{\frac{1}{\lambda} : 0 \leq |\lambda| \leq 1\right\} = \{\lambda : |\lambda| \geq 1\},$$

mas como $\sigma(W^*) \subset \overline{\mathbb{D}}$, então $\sigma(W^*) \subset S^1$ e portanto,

$$\sigma(W) \subset S^1. \tag{1.5}$$

Afirmação: $\Pi(U) \subset \Pi(W)$.

De fato, seja $\lambda \in \Pi(U)$, então existe uma sequência de vetores unitários f_n em l^2 tal que $||(U - \lambda)f_n||_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Cada vetor f_n em l^2 corresponde a um vetor g_n em $l^2(\mathbb{Z})$ o qual possui as coordenadas $0, 1, 2, ..$ iguais a f_n e o resto são zero, assim claramente

$$||(U - \lambda)f_n|| = ||(W - \lambda)g_n|| \text{ e } ||g_n|| = ||f_n|| = 1 \text{ para todo } n,$$

de onde obtém-se que $\lambda \in \Pi(W)$.

Juntando esta afirmação com os resultados obtidos em (1.4), (1.5) e Teorema 1.46 obtém-se

$$S^1 \subset \Pi(U) \subset \Pi(W) \subset \sigma(W) \subset S^1.$$

Portanto, $\boldsymbol{\sigma(W) = \Pi(W) = S^1}$ e além disso $\boldsymbol{\Pi(U) = S^1}$.

Como $\sigma(W) = S^1$ então $\boldsymbol{\sigma(W^*) = S^1}$. Observe que isto implica que $\Pi(W^*) \subset S^1$ pois $\Pi(W^*) \subset \sigma(W^*)$. Para mostrar a inclusão contraria, seja $e^{i\theta} \in S^1$, como $\Pi(W) = S^1$ e $e^{-i\theta} \in S^1$, segue que existe uma sequência de vetores f_n em $l^2(\mathbb{Z})$, de norma 1, tal que $||(W - e^{-i\theta})f_n||_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como para qualquer $f \in l^2(\mathbb{Z})$

$$||(W - e^{-i\theta})f|| = ||(W^* - e^{i\theta})f||,$$

pois lembrando que $WW^* = Id = W^*W$,

$$\begin{aligned}
\langle Wf - e^{-i\theta}f, Wf - e^{-i\theta}f\rangle &= \langle Wf, Wf\rangle + \langle Wf, -e^{-i\theta}f\rangle + \langle -e^{-i\theta}f, Wf\rangle \\
&\quad + \langle -e^{-i\theta}f, -e^{-i\theta}f\rangle \\
&= \langle f, f\rangle + \langle f, -e^{-i\theta}W^*f\rangle + \langle -e^{-i\theta}W^*f, f\rangle + \langle f, f\rangle \\
&= \langle W^*f, W^*f\rangle + \langle -e^{i\theta}f, W^*f\rangle + \langle W^*f, -e^{i\theta}f\rangle + \langle f, f\rangle \\
&= \langle W^*f - e^{i\theta}f, W^*f - e^{i\theta}f\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $||(W^* - e^{i\theta})f_n||_n \to 0$ quando $n \to \infty$, assim $e^{i\theta} \in \Pi(W^*)$ e logo, $\boldsymbol{\Pi(W^*) = S^1}$.

Agora, considere $e^{i\theta} \in S^1$ e seja $x = (.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..)$.

Se $Wx = e^{i\theta}x$, segue que $a_{n-1} = e^{i\theta}a_n$ para todo n, consequentemente

$$a_n = e^{-in\theta}a_0 \text{ para todo } n.$$

Como $x \in l^2(\mathbb{Z})$ a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{-in\theta}a_0|^2 < \infty$, então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_0|^2 = 0$, assim $a_0 = 0$, implicando que $x = 0$.

Como $\Pi_0(W)$ está contido em S^1, segue que $\boldsymbol{\Pi_0(W) = \emptyset}$.

Da mesma maneira obtém-se que $\boldsymbol{\Pi_0(W^*) = \emptyset}$. $\square$

O próximo resultado mostra uma representação do operador shift unilateral como operador sobre $\mathcal{H}^2$ e do operador shift bilateral como operador sobre o espaço L^2.

Definição 1.66. *Defina $\boldsymbol{M_z}$ (operador multiplicação por z) sobre $\mathcal{H}^2$ por*

$$(M_zf)(z) = zf(z).$$

Note que se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ então

$$(M_zf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}.$$

Portanto, M_z age da mesma maneira que um operador Shift unilateral.

Teorema 1.67. *O operador M_z sobre $\mathcal{H}^2$ é unitariamente equivalente ao shift unilateral.*

Demonstração. Defina o seguinte operador

$$\begin{array}{rccl}
V: & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2 \\
& (a_0, a_1, a_2, ..) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.
\end{array}$$

Calculando o operador adjunto de V é fácil notar que V é unitário.
Dado $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ em $\mathcal{H}^2$ tem-se

$$\begin{aligned} V^* : \ \mathcal{H}^2 \quad & \longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ \varphi \quad & \longmapsto V^*(\varphi) : \ \begin{aligned} l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow \ \mathbb{K} \\ (a_n)_n & \longmapsto \ V^*(\varphi)\left((a_n)_n\right) \ = \varphi(V\left((a_n)_n\right)), \end{aligned} \end{aligned}$$

onde $\varphi(V\left((a_n)_n\right)) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{a_n}$, assim

$$V^*(\varphi) = (b_0, b_1, b_2, ..),$$

onde claramente $VV^* = Id = V^*V$, portanto V é unitário.

Finalmente, prova-se que $VU = M_z V$. De fato, dado $a = (a_0, a_1, a_2, ..)$ em $l^2(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} V(U(a)) & = V(0, a_0, a_1, ..) \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \\ & = z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ & = zV(a) = M_z V(a). \end{aligned}$$

Assim, o operador M_z sobre $\mathcal{H}^2$ é unitariamente equivalente ao shift unilateral. $\square$

Portanto, M_z é uma representação do operador shift unilateral como operador sobre $\mathcal{H}^2$.

Observação 1.68. *Dado* $e_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{k,n} z^n$ *tem-se*

$$\begin{aligned} M_z e_k(z) & = z e_k(z) = z\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{k,n} z^n \\ & = z z^k = z^{k+1} \\ & = e_{k+1}(z). \qquad \textit{para todo}\, k = 0, 1, 2, .. \end{aligned}$$

O operador shift bilateral tem uma representação análoga sobre L^2.

Definição 1.69. *Os operadores* $\boldsymbol{M_{e^{i\theta}}}$ *e* $\boldsymbol{M_{e^{-i\theta}}}$ *são definidos sobre* L^2 *por*

$$(M_{e^{i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{i\theta} f(e^{i\theta}) \quad e \quad (M_{e^{-i\theta}} f)(e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta}).$$

Teorema 1.70. *O operador $M_{e^{i\theta}}$ sobre L^2 é unitariamente equivalente ao shift bilateral W sobre $l^2(\mathbb{Z})$ e o operador $M_{e^{-i\theta}}$ é unitariamente equivalentemente a W^*.*

Demonstração. Defina o seguinte operador

$$\begin{array}{rcl} V: l^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & L^2 \\ (.., a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, ..) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}. \end{array}$$

Calculando o operador adjunto de V é fácil notar que V é unitário.
Dado $\varphi = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}$ em $(L^2)^*$, tem-se

$$\begin{array}{llllll} V^*: & (L^2)^* & \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})^* & & & \\ & \varphi & \longmapsto V^*(\varphi): & l^2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & (a_n)_n & \longmapsto & V^*(\varphi)((a_n)_n) \quad = \varphi(V((a_n)_n)). \end{array}$$

Onde $\varphi(V((a_n)_n)) = \varphi\left(\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \overline{a_n}$, assim

$$V^*(\varphi) = (.., b_{-2}, b_{-1}, \boldsymbol{b_0} b_1, b_2, ..),$$

onde claramente $VV^* = Id = V^*V$, portanto V resulta ser unitário. Lembre que o espaço dual de L^2 e de $l^2(\mathbb{Z})$ são eles mesmos respectivamente.

Afirmação 1: $VW = M_{e^{i\theta}} V$.

De fato, dado $a = (.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..)$ em $l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} V(W(a)) &= V(.., a_{-3}, a_{-2}, \boldsymbol{a_{-1}}, a_0, a_1, ..) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n+1)\theta} \\ &= e^{i\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \\ &= e^{i\theta} V(a) = M_{e^{i\theta}} V(a). \end{aligned}$$

Afirmação 2: $V^* M_{e^{-i\theta}} = W^* V^*$ ou equivalentemente $V^* M_{e^{-i\theta}} V = W^*$.

De fato, dado $a = (.., a_{-2}, a_{-1}, \boldsymbol{a_0}, a_1, a_2, ..)$ em $l^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} V^* M_{e^{-i\theta}} V(a) &= V^* M_{e^{-i\theta}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right) \\ &= V^* \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} \right) \\ &= (.., a_{-1}, a_0, \boldsymbol{a_1}, a_2, a_3, ..) = W^*(a). \end{aligned}$$

Das Afirmações 1 e 2, obtém-se o desejado. □

1.3.2 Comutador

Definição 1.71. *O* ***comutador*** *de um operador linear limitado A é o conjunto de todos os operadores lineares limitados que comutam com A.*

O seguinte teorema é muito importante, pois é usado no capítulo seguinte para estudos espectrais de um determinado operador.

Teorema 1.72. *Se $\phi \in L^\infty$, então $||M_\phi|| = ||\phi||_\infty$.*

Demonstração. Seja $f \in L^2$ tal que $||f|| = 1$, como $|\phi(e^{i\theta})| \leq ||\phi||_\infty$ q.t.p tem-se

$$||M_\phi f||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta}) f(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{2\pi} ||\phi||_\infty^2 \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta,$$

então $||M_\phi|| \leq ||\phi||_\infty$.

O próximo passo é provar a desigualdade contrária.

Seja $\lambda = ||\phi||_\infty$. Se $\lambda = 0$ não há nada que provar, assuma então que $\lambda \neq 0$.

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \left\{ e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > \lambda - \frac{1}{n} \right\}$$

tem medida positiva. Se χ_n é a função característica sobre este conjunto e m a medida de Lebesgue sobre S^1, tem-se que quando n é suficientemente grande

$$\begin{aligned} ||M_\phi \chi_n||^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{E_n} (\lambda - \frac{1}{n})^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \left(\lambda - \tfrac{1}{n}\right)^2 m(E_n). \end{aligned}$$

Note que como $||\chi_n||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |\chi_n(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = m(E_n)$, considerando $f_n = \dfrac{\chi_n}{||\chi_n||}$,

$$||M_\phi f_n|| \geq \lambda - \frac{1}{n}$$

para n suficientemente grande, portanto

$$||M_\phi|| = \sup_{||f||=1} ||M_\phi f|| \geq ||M_\phi f_n|| \geq \lambda - \frac{1}{n},$$

ou seja, $||M_\phi|| \geq \lambda = ||\phi||_\infty$. □

Teorema 1.73. *O comutador de W (considerado como um operador sobre L^2) é*

$$\{M_\phi : \phi \in L^\infty\}.$$

Demonstração. Lembrando que $W = M_{e^{i\theta}}$(Unitariamente equivalente).
Se $\phi \in L^\infty$, então $M_\phi M_{e^{i\theta}} = M_{e^{i\theta}} M_\phi$, assim $\{M_\phi : \phi \in L^\infty\}$ está contido no comutador de W.

Para provar a inclusão contrária assuma que A é um operador linear limitado sobre L^2 pertecente ao comutador de W.

Defina $\phi = Ae_0$, onde $\phi \in L^2$. A meta é mostrar que $\phi \in L^\infty$ e que $A = M_\phi$.

Como A comuta com W, A comuta com W^n pois para $n = 2$

$$AW = WA \quad \text{daí} \quad AW^2 = AWW = WAW = W^2 A,$$

o qual ajuda a deduzir que é válido para todo n natural. Segue que

$$Ae^{in\theta} = AW^n e_0 = W^n A e_0 = e^{in\theta} A e_0 = \phi e^{in\theta} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, ..$$

Como W é inversível $AW = WA$ se, e somente se, $W^{-1}AW = A$, daí que $AW^{-1} = W^{-1}A$ e assim $Ae^{in\theta} = \phi e^{in\theta}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Pela linearidade segue que $Ap = \phi p$ para todo polinômio trigonométrico p. Se f é alguma função em L^2, então existe uma sequência de polinômios trigonométricos $(p_n)_n$ tal que $p_n \to f$ em L^2 quando $n \to \infty$.

Como A é contínua, $Ap_n \to Af$, consequentemente, $\phi p_n \to Af$ sobre L^2. Agora, como $p_n \to f$ em L^2, existe uma subsequência $p_{n_i} \to f$ q.t.p sobre S^1, assim $\phi p_{n_i} \to \phi f$ q.t.p, e como $\phi p_{n_i} \to Af$ sobre L^2 então $Af = \phi f$ q.t.p. Portanto $A = M_\phi$.

Falta provar que $\phi \in L^\infty$. Fixe n natural e seja $E_n = \{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta})| > n\}$, a ideia é mostrar que $m(E_n) = 0$ para n muito grande e com m a medida de Lebesgue.

Seja χ_n a função característica sobre E_n, tal função pertence a L^2, então

$$||A\chi_n||^2 = ||\phi\chi_n||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} |\phi(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \geq n^2 m(E_n).$$

Além disso, $||\chi_n||^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{E_n} 1\mathrm{d}\theta = m(E_n)$, então

$$||A\chi_n||^2 \geq n^2||\chi||^2.$$

Portanto, se $n > ||A||$ tem-se $||\chi_n|| = 0$, logo $m(E_n) = 0$, isto é, $\phi \in L^\infty$. $\square$

Capítulo 2

Operadores Toeplitz

O operador mais conhecido e estudado sobre os espaços de Hardy-Hilbert é o operador Toeplitz, como exemplo pode-se citar os operadores shifts unilaterais.

Neste capítulo estuda-se resultados sobre o espectro e outros aspectos do operador Toeplitz.

2.1 Matrizes Toeplitz

Dada uma base ortonormal de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, cada operador linear limitado sobre $\mathcal{H}$ tem uma matriz de representação com respeito a esta base.

Definição 2.1. *Se A é um operador linear limitado sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $(e_n)_{n\in I}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$, então a matriz de A com respeito à base dada é a matriz cujas entradas na posição (m,n) são $\langle Ae_n, e_m\rangle$, com $m,n \in I$.*

Lembrando que M_ϕ denota o operador sobre L^2 que consiste da multiplicação pela função ϕ de L^∞ e tomando a base padrão $(e^{in\theta})_{n=-\infty}^{\infty}$ para L^2 como referência, o seguinte teorema é enunciado .

Teorema 2.2. *Seja $\phi \in L^\infty$ com série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\theta}$, então a matriz de M_ϕ com respeito à base ortonormal $(e^{in\theta})_{n=-\infty}^{\infty}$ de L^2 é*

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & \\ & \phi_2 & \phi_1 & \boldsymbol{\phi_0} & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \\ & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \\ & & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde $\boldsymbol{\phi_0}$ representa a posição $(0,0)$.

Demonstração. Fazendo o cálculo para cada par de inteiros (m, n),

$$\begin{aligned}
\langle M_\phi e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{in\theta}e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{-i(m-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_l e^{il\theta}\right) e^{-i(m-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_l e^{i[l-(m-n)]\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \phi_{m-n}.
\end{aligned}$$

Portanto, para cada inteiro k, a entrada da matriz M_ϕ na posição (m, n) é ϕ_k com $m - n = k$. Daí, obtém-se o resultado. □

Definição 2.3. *Uma matriz finita, ou matriz infinita dupla(ou seja,matriz com entradas nas posições (m,n) para $m, n \in \mathbb{Z}$) ou uma matriz infinita individual (ou seja, matriz com entradas nas posições (m,n) para m e n inteiros não negativos) é chamada* ***matriz Toeplitz****, se suas entradas são constante ao longo de cada diagonal. Isto é, a matriz $(a_{m,n})$ é Toeplitz se*

$$a_{m_1,n_1} = a_{m_2,n_2} \text{ onde } m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

Observação 2.4. *As matrizes que representam operadores de multiplicação com respeito a base padrão de L^2 são matrizes duplamente infinitas cujas diagonais são constantes. Cada uma dessas matrizes é um exemplo de uma matriz Toeplitz.*

Teorema 2.5. *Um operador linear limitado sobre L^2 é multiplicação por uma função de L^∞ se, e somente se, sua matriz com respeito à base padrão de L^2 é uma matriz Toeplitz.*

Demonstração. Foi mostrado no Teorema 2.2 que cada operador multiplicação sobre L^2 tem como matriz de representação associada uma matriz Toeplitz.

Supondo agora que A tem associada uma matriz Toeplitz, a ideia é mostrar que $A = M_\phi$ para algum $\phi \in L^\infty$, pelo Teorema 1.73 é suficiente mostrar que $AW = WA$ ou equivalentemente, que para todos os inteiros m, n

$$\langle AWe_n, e_m \rangle = \langle WAe_n, e_m \rangle.$$

Observe que $\langle AWe_n, e_m \rangle = \langle Ae_{n+1}, e_m \rangle = \langle Ae_n, e_{m-1} \rangle$ pela hipótese que a matriz A tem diagonais constantes, mas $\langle Ae_n, e_{m-1} \rangle = \langle Ae_n, W^* e_m \rangle = \langle WAe_n, e_m \rangle$ portanto,

$$\langle AWe_n, e_m \rangle = \langle WAe_n, e_m \rangle.$$

□

O espectro e o espectro pontual aproximado das matrizes Toeplitz sobre L^2 podem ser agora calculados, com ajuda da seguinte definição.

Definição 2.6. *Para $\phi \in L^\infty$, a imagem essencial de ϕ é definida como*

$$ess\,ran\phi = \{\lambda : m\{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta}) - \lambda| < \epsilon\} > 0, \, para\, todo\, \epsilon > 0\},$$

onde m é a medida de Lebesgue.

⋆ *Note que a norma essencial de uma função ϕ em L^∞ é igual a*

$$||\phi||_\infty = sup\{|\lambda| : \lambda \in ess\,ran\phi\},$$

por equivalência com a Definição 1.27.

Teorema 2.7. *Se $\phi \in L^\infty$ então $\sigma(M_\phi) = \Pi(M_\phi) = ess\,ran\phi$.*

Demonstração. Prova-se inicialmente que $ess\,ran\phi \subset \Pi(M_\phi)$ para logo mostrar que $\sigma(M_\phi) \subset ess\,ran\phi$, note que as duas inclusões implicam o resultado desejado.

Seja $\lambda \in ess\,ran\phi$. Para cada número natural n defina

$$E_n = \left\{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta}) - \lambda| < \frac{1}{n}\right\},$$

e seja χ_n a função característica sobre E_n. Note que $m(E_n) > 0$, então

$$||(M_\phi - \lambda)\chi_n||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(\phi(e^{i\theta}) - \lambda)\chi_n(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{E_n} |\phi(e^{i\theta}) - \lambda|^2 \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{n^2} m(E_n).$$

Portanto, definindo $f_n = \dfrac{\chi_n}{||\chi_n||}$, $(f_n)_n$ é uma sequência de vetores unitários tais que

$$||(M_\phi - \lambda)f_n|| \leq \frac{1}{n},$$

logo $\lambda \in \Pi(M_\phi)$.

Suponha agora que $\lambda \notin ess\,ran\phi$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$m\{e^{i\theta} : |\phi(e^{i\theta}) - \lambda| < \epsilon\} = 0,$$

isso implica que a função $\frac{1}{\phi - \lambda}$ está definida q.t.p e de fato $\frac{1}{|\phi - \lambda|} \leq \frac{1}{\epsilon}$ q.t.p, portanto, $\frac{1}{\phi - \lambda} \in L^\infty$, logo o operador $M_{\frac{1}{\phi-\lambda}}$ é limitado e também o seu inverso $M_\phi - \lambda$, assim $\lambda \notin \sigma(M_\phi)$. □

2.2 Propriedades básicas do operador Toeplitz

Os operadores Toeplitz são compressões do operador multiplicação no subespaço $\tilde{\mathcal{H}}^2$, definido como segue.

Definição 2.8. *Para cada $\phi \in L^\infty$, o **operador Toeplitz** com símbolo ϕ, é o operador T_ϕ definido por*

$$T_\phi f = P(\phi f),$$

para cada $f \in \tilde{\mathcal{H}}^2$, *onde* P *é a projeção ortogonal de* L^2 *sobre* $\tilde{\mathcal{H}}^2$.

Teorema 2.9. *A matriz do operador Toeplitz com símbolo* ϕ *com respeito a base* $(e^{in\theta})_{n=0}^{\infty}$ *de* $\tilde{\mathcal{H}}^2$ *é*

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \phi_{-3} & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde ϕ_k *é o k-ésimo coeficiente de Fourier de* ϕ.

Demonstração. Dado $n, m \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} \langle PM_\phi e_n, e_m\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\phi(e^{i\theta})e^{in\theta}\right)e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\phi_l\, e^{i\theta(l+n)}\right)e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-n}^{\infty}\phi_l\, e^{i\theta(l+n)}\right)e^{-im\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-n}^{\infty}\phi_l\left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(l+n-m)}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \phi_{m-n}. \end{aligned}$$

Assim,

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \phi_{-3} & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

ou seja, se

$$M_\phi = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & \\ \hline & \phi_2 & \phi_1 & \boldsymbol{\phi_0} & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \\ & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \\ & & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right],$$

T_ϕ é uma submatriz de M_ϕ. $\square$

Assim, os operadores Toeplitz tem matrizes Toeplitz infinitas individuais.

Definição 2.10. *O operador Toeplitz T_ϕ é um operador Toeplitz analítico se $\phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$.*

Observação 2.11. *Se ϕ pertence a $\widetilde{\mathcal{H}}^\infty$, então $T_\phi f = P\phi f = \phi f$ para todo $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, pois $\widetilde{\mathcal{H}}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{H}}^2$.*

O seguinte resultado mostra que a matriz de representação padrão do operador Toeplitz analítico são matrizes triangulares inferiores.

Teorema 2.12. *Se T_ϕ é um operador Toeplitz analítico, então a matriz de T_ϕ com respeito a base $(e^{in\theta})_{n=0}^\infty$ é*

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \phi_1 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & 0 & 0 & \ddots \\ \phi_3 & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & 0 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde $\phi(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{ik\theta}$.

Demonstração. Como $\phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, os coeficientes de fourier de ϕ com índice negativo são zero. $\square$

Teorema 2.13. *O comutador do operador shift unilateral agindo sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ é*

$$\left\{ T_\phi : \phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty \right\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.67 ou Teorema 1.70 se deduz que o operador $M_{e^{i\theta}}$ é uma representação do operador shift unilateral agindo sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, assim é equivalente provar que o comutador do operador multiplicação $M_{e^{i\theta}}$ agindo sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ é

$$\left\{ T_\phi : \phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty \right\}.$$

Cada operador Toeplitz analítico comuta com $M_{e^{i\theta}}$, pois para cada $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$,

$$T_\phi M_{e^{i\theta}} f = P\phi M_{e^{i\theta}} f = \phi e^{i\theta} f = e^{i\theta}\phi f = M_{e^{i\theta}} T_\phi f.$$

Para provar a implicação contrária é só agir de forma similar ao Teorema 1.73. Suponha que $AU = UA$. Seja $\phi = Ae_0$, então $\phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ e pela hipótese tem-se que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$Ae_n = AU^n e_0 = U^n A e_0 = U^n \phi = e^{in\theta}\phi.$$

Portanto, pela linearidade $Ap = \phi p$, para todo polinômio $p \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$.

Para $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ arbitrário, escolha $(p_n)_n$ tal que $p_n \longrightarrow f$ em $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, então pela continuidade e pelo fato de $Ap_n = \phi p_n$, tem-se $\phi p_n \longrightarrow Af$.

Além disso existe uma sequência $(p_{n_j})_j$ tal que $p_{n_j} \longrightarrow f$ q.t.p portanto, $\phi p_{n_j} \longrightarrow \phi f$ q.t.p logo, $Af = \phi f$ q.t.p.

Falta mostrar que ϕ é essencialmente limitada.
Se $A = 0$, segue trivialmente. Pode-se asumir que $||A|| \neq 0$.
Defina a função mensurável ψ por $\psi = \dfrac{\phi}{||A||}$ e assim $\psi \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ então,

$$\psi f = \frac{\phi f}{||A||} = \frac{Af}{||A||}$$

para toda $f \in \widetilde{H}^2$, segue que $||\psi f|| \leq ||f||$ para toda $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$.
Tomando $f \equiv 1$,

$$\psi^n = \frac{\phi^n}{||A||^n} \Longrightarrow \psi^n f = \frac{\phi^n f}{||A||^n} = \frac{A^n f}{||A||^n} \Longrightarrow ||\psi^n f|| \leq ||f||$$

para toda $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, assim $||\psi^n|| \leq 1$ para $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que existe $\epsilon > 0$ tal que $E = \{e^{i\theta} : |\psi(e^{i\theta})| \geq 1 + \epsilon\}$ tem medida positiva então,

$$\begin{aligned} ||\psi^n|| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(e^{i\theta})|^n \mathrm{d}\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_E |\psi(e^{i\theta})|^n \mathrm{d}\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_E (1+\epsilon)^n \mathrm{d}\theta = (1+\epsilon)^n m(E). \end{aligned}$$

Portanto, $1 \geq ||\psi||^n \geq (1+\epsilon)^n m(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição, assim ψ e ϕ pertencem a L^∞. □

Observação 2.14. *Pela correspondência de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ e $\mathcal{H}^2$ pode-se considerar o operador Toeplitz analítico sobre $\mathcal{H}^2$. Como $\widetilde{\mathcal{H}}^\infty \subset \widetilde{\mathcal{H}}^2$, pela Definição 1.37 cada função $\phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$ corresponde a uma função ϕ analítica sobre $\mathbb{D}$, então pelo Corolário 1.34*

$$\lim_{r \to 1^-} \phi(re^{i\theta}) = \phi(e^{i\theta}) \text{ q.t.p.}$$

Assim, considerando T_ϕ como um operador sobre $\mathcal{H}^2$ segue que,

$$(T_\phi f)(z) = \phi(z) f(z) \qquad \text{para } f \in \mathcal{H}^2 \text{ e } z \in \mathbb{D}.$$

Isto é, o operador Toeplitz analítico T_ϕ é simplesmente a multiplicação pela função analítica ϕ sobre $\mathcal{H}^2$.

Segue agora que todas as matrizes Toeplitz limitadas com respeito à base padrão de $\mathcal{H}^2$ são as matrizes dos operadores Toeplitz.

Teorema 2.15. *Os operadores Toeplitz sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ são os operadores cujas matrizes com respeito a base $(e^{in\theta})_{n=0}^{\infty}$ de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ são matrizes Toeplitz.*

Demonstração. O fato que cada operador Toeplitz tem uma matriz Toeplitz foi provado no Teorema 2.9.

Agora prova-se o contrário.

Seja A um operador limitado sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ cuja matriz com respeito à base padrão é uma matriz Toeplitz. Seja P a projeção ortogonal de L^2 sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, assim AP é um operador limitado sobre L^2 e para n natural defina A_n sobre L^2 como

$$A_n = W^{*n} APW^n.$$

O objetivo é mostrar que $(A_n)_n$ converge a um operador multiplicação e que A é o operador Toeplitz cujo símbolo é o correspondente a uma função em L^∞.

Note que $||A_n|| \leq ||A||$, pois $||W|| = ||W^*|| = ||P|| = 1$, adicionalmente como $(W^*)^{-1}A_n(W_n)^{-1}P^{-1} = A$, então $||A_n|| = ||A||$.

Agora, para cada par (s,t) de inteiros, tem-se

$$\begin{aligned} \langle A_n e_s, e_t \rangle &= \langle W^{*n} APW^n e_s, e_t \rangle \\ &= \langle APe_{s+n}, W^n e_t \rangle \\ &= \langle APe_{s+n}, e_{t+n} \rangle. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, sendo mais preciso, para $n \geq -s$ esta expressão é igual a $\langle Ae_{s+n}, e_{t+n} \rangle$ pois $Pe_{s+n} = e_{s+n}$ para $n \geq -s$ e pela hipótese $\langle Ae_{s+n}, e_{t+n} \rangle$ é constante respeito a n, para $n \geq -s$. Pela linearidade, segue que para cada par (p,q) de polinômios trigonométricos, $\langle A_n p, q \rangle$ é constante para n suficientemente grande.

Definindo a forma bilinear ψ sobre polinômios trigonométricos da seguinte forma

$$\psi(p,q) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle A_n p, q \rangle,$$

como $|\psi(p,q)| \leq ||A||\,||p||\,||q||$ para todo polinômio p, q, $\psi(p,q)$ é uma forma bilinear limitada sobre o subconjunto dos polinômios trigonométricos de L^2, portanto ψ pode-se estender a uma forma bilinear limitada sobre L^2 e assim existe um operador linear limitado A_0 sobre L^2 tal que

$$\psi(f,g) = \langle A_0 f, g \rangle$$

para todo $f, g \in L^2$.

Segue que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle A_n f, g \rangle = \langle A_0 f, g \rangle$, para todo $f, g \in L^2$.

Falta provar que A_0 é um operador multiplicação e que $PA_0|_{\widetilde{\mathcal{H}}^2} = A$.

Observe que pelo fato de $A_n = W^{*n}APW^n$,

$$\langle W^* A_n W f, g\rangle = \langle A_{n+1} f, g\rangle,$$

e mais

$$\langle W^* A_n W f, g\rangle = \langle A_n W f, W g\rangle.$$

Quando n tender para infinito obtém-se

$$\langle A_0 f, g\rangle = \langle A_0 W f, W g\rangle = \langle W^* A_0 W f, g\rangle$$

portanto, $A_0 = W^* A_0 W$ ou equivalentemente $W A_0 = A_0 W$.

Como A_0 comuta com W, pelo Teorema 1.73 tem-se que $A_0 = M_\phi$ para algum $\phi \in L^\infty$.

Agora, para provar que $A = PM_\phi|_{\widetilde{\mathcal{H}}^2}$, note primeiro que para s e t em $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$\begin{aligned}\langle PM_\phi e_s, e_t\rangle &= \langle PA_0 e_s, e_t\rangle \\ &= \langle A_0 e_s, e_t\rangle \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle A_n e_s, e_t\rangle.\end{aligned}$$

Como $\langle A_n e_s, e_t\rangle = \langle A e_{s+n}, e_{t+n}\rangle$ para n suficientemente grande e A é uma matriz Toeplitz tem-se $\langle A e_{s+n}, e_{t+n}\rangle = \langle A e_s, e_t\rangle$, daí

$$\langle PM_\phi e_s, e_t\rangle = \langle A e_s, e_t\rangle.$$

Portanto, $A = PM_\phi|_{\widetilde{\mathcal{H}}^2}$, ou seja, A é o operador Toeplitz T_ϕ. □

Observação 2.16. *O operador shift Unilateral U é o operador Toeplitz $T_{e^{i\theta}}$.*

Uma caracterização alternativa dos operadores Toeplitz é dada no seguinte corolário a partir do teorema anterior.

Corolário 2.17. *O operador T é um operador Toeplitz se, e somente se, $U^*TU = T$, onde U é o shift unilateral.*

Demonstração. Note que para $n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

$$\langle U^*TU e_n, e_m\rangle = \langle TU e_n, U e_m\rangle = \langle T e_{n+1}, e_{m+1}\rangle.$$

Portanto, se T é um operador Toeplitz, pelo Teorema 2.15, T tem matriz Toeplitz associada, assim

$$\langle U^*TU e_n, e_m\rangle = \langle T e_n, e_m\rangle,$$

logo,

$$U^*TU = T.$$

Reciprocamente, se $U^*TU = T$ então,

$$\begin{aligned}\langle Te_n, e_m\rangle &= \langle U^*TUe_n, e_m\rangle\\ &= \langle TUe_n, Ue_m\rangle\\ &= \langle Te_{n+1}, e_{m+1}\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle Te_n, e_m\rangle &= \langle U^*TUe_n, e_m\rangle\\ &= \langle U^*(U^*TU)Ue_n, e_m\rangle\\ &= \langle Te_{n+2}, e_{m+2}\rangle\\ &\vdots\end{aligned}$$

Assim $\langle Te_n, e_m\rangle = \langle Te_{n+k}, e_{m+k}\rangle$ para todo $k = 1, 2, ...$ então T tem matriz Toeplitz e portanto, é um operador Topelitz pelo Teorema 2.15. $\square$

Teorema 2.18. *A aplicação $\phi \longmapsto T_\phi$ que vai de L^∞ sobre o espaço dos operadores Toeplitz, considerado como um subespaço da álgebra dos operadores lineares limitados $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, é injetiva, limitada, linear e preserva adjunta (ou seja, $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$).*

Demonstração. A aplicação é linear pois dado $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e ϕ_1, ϕ_2 em L^∞,

$$T_{\alpha\phi_1+\beta\phi_2} = \alpha T_{\phi_1} + \beta T_{\phi_2}.$$

Como

$$||T_\phi|| = ||PM_\phi|| \leq ||M_\phi|| = \sup_{||f||=1} ||\phi f|| \leq ||\phi||_\infty,$$

$||T_\phi|| \leq ||\phi||_\infty$, ou seja, a aplicação é limitada.

Se T_ϕ e T_ψ são iguais, então comparando suas matrizes obtém-se que ϕ e ψ tem os mesmos coeficientes de Fourier, portanto a aplicação é injetiva.

Preserva a adjunta, pois dados $f, g \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$

$$\begin{aligned}\langle T_\phi^* f, g\rangle &= \langle f, T_\phi g\rangle = \langle f, PM_\phi g\rangle = \langle f, \phi g\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{\phi(e^{i\theta})g(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\phi(e^{i\theta})}f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta = \langle\overline{\phi}f, g\rangle\\ &= \langle PM_{\overline{\phi}}f, g\rangle = \langle T_{\overline{\phi}}f, g\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Mostra-se mais adiante que a aplicação anterior é uma isométria linear, ou seja, $||T_\phi|| = ||\phi||_\infty$.

Note que a soma de dois operadores Toeplitz é um operador Toeplitz, pois somando duas matrizes infinitas duplas constantes obtém-se outra matriz a qual será também infinita dupla constante. Para o produto nem sempre é verdade, um caso no qual isto mantem-se é quando $\phi \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$, aqui T_ϕ é a restrição de M_ϕ a $\widetilde{H}^2$, assim

$$\begin{aligned} T_\psi T_\phi g &= T_\psi P M_\phi g = P M_\psi P M_\phi g \\ &= P M_\psi \phi g = P M_{\psi\phi} g = T_{\psi\phi} \end{aligned}$$

para todo $\psi \in L^\infty$.

Lema 2.19. *Se T_ψ e T_ϕ são operadores Toeplitz e U é o shift unilateral, então*

$$U^* T_\psi T_\phi U - T_\psi T_\phi = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi}),$$

ver Notação 1.57, onde P é a projeção ortogonal de L^2 sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$.

Demonstração. Note que $I = UU^* + e_0 \otimes e_0$, onde $e_0 \otimes e_0$ é a projeção ortogonal de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ sobre as constantes. Portanto,

$$\begin{aligned} U^* T_\psi T_\phi U &= U^* T_\psi (UU^* + e_0 \otimes e_0) T_\phi U \\ &= U^* T_\psi U U^* T_\phi U + U^* T_\psi (e_0 \otimes e_0) T_\phi U \\ &= T_\psi T_\phi + U^* T_\psi (e_0 \otimes e_0) T_\phi U. \qquad \text{(Pelo Corolário 2.17)} \end{aligned}$$

Mas, $U^* T_\psi (e_0 \otimes e_0) T_\phi U = U^* T_\psi e_0 \otimes U^* T_{\overline{\phi}} e_0$, pelo Teorema 1.58, e considerando $U = T_{e^{i\theta}}$

$$\begin{aligned} U^* T_\psi e_0 &= (T_{\overline{\psi}} U)^* e_0 = (T_{e^{i\theta}\overline{\psi}})^* e_0 \\ &= T_{e^{-i\theta}\psi} e_0 = P(e^{-i\theta}\psi). \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} U^* T_{\overline{\phi}} e_0 &= (T_\phi U)^* e_0 = (T_{e^{i\theta}\phi})^* e_0 \\ &= T_{e^{-i\theta}\overline{\phi}} e_0 = P(e^{-i\theta}\overline{\phi}). \end{aligned}$$

Assim, $U^* T_\psi T_\phi U = T_\psi T_\phi + P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi})$ □

Definição 2.20. *O operador Toeplitz T_ϕ é dito coanalítico se T_ϕ^* é analítico (o que equivale a dizer que $\overline{\phi} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$).*

Teorema 2.21. *Para ψ e ϕ em L^∞, $T_\psi T_\phi$ é um operador Toeplitz se, e somente se, T_ψ é coanalítico ou T_ϕ é analítico. Em qualquer destes casos, $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.*

Demonstração. Se T_ϕ é analítica, então claramente $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$.

Se T_ψ é coanalítica, ou seja, $T_{\overline{\psi}}$ é analítica, então

$$(T_\psi T_\phi)^* = T_\phi^* T_\psi^* = T_{\overline{\phi}} T_{\overline{\psi}} = T_{\overline{\phi\psi}},$$

portanto, $T_\psi T_\phi = (T_{\overline{\phi\psi}})^* = T_{\psi\phi}$, ou seja, $T_\psi T_\phi$ é Toeplitz.

Suponha agora que $T_\psi T_\phi$ é um operador Toeplitz, pelo Lema 2.19

$$U^* T_\psi T_\phi U - T_\psi T_\phi = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi})$$

e pelo Corolário 2.17

$$U^* T_\psi T_\phi U = T_\psi T_\phi,$$

daí $P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$, logo $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$ ou $P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$.

Se $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$, então $e^{-i\theta}\psi \perp \widetilde{\mathcal{H}}^2$, ou seja, os coeficientes dos índices positivos de Fourier de ψ são zero e T_ψ é coanalítico.

Se $P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$, então $e^{-i\theta}\overline{\phi} \perp \widetilde{\mathcal{H}}^2$, ou seja os coeficientes de índices positivos de Fourier de $\overline{\phi}$ são zero e T_ϕ é analítica. $\square$

Corolário 2.22. *O produto de dois operadores Toeplitz é zero se, e somente se, um dos fatores é zero.*

Demonstração. Se um dos fatores é zero, é claro que o produto dos dois operadores Toeplitz é zero.

Agora se $T_\psi T_\phi = 0$, como 0 é um operador Toeplitz o teorema anterior implica que T_ψ é coanalítica ou T_ϕ é analítica e que $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi} = 0$.

Portanto, $\psi\phi = 0$.

Se T_ϕ é analítica e não é nulo, então $m(\{e^{i\theta} : \phi(e^{i\theta}) = 0\}) = 0$ pelo Teorema 1.39, implicando que $\psi = 0$ q.t.p, logo $T_\psi = 0$.

Se $T_{\overline{\psi}}$ é analítica e não é nula, então $m(\{e^{i\theta} : \overline{\psi(e^{i\theta})} = 0\}) = 0$ pelo Teorema 1.39, implicando que $\phi = 0$ q.t.p, logo $T_\phi = 0$. $\square$

Sabe-se então que se T_ψ e T_ϕ são operadores Toeplitz analíticos eles comutam, assim $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi} = T_{\phi\psi} = T_\phi T_\psi$, da mesma forma se os dois operadores são coanalíticos. Mas não são os únicos casos.

Teorema 2.23. *Sejam ϕ e ψ em L^∞ então $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$ se, e somente se, uma das seguintes condições se mantém*

(i) *T_ψ e T_ϕ são analíticas.*

(ii) *T_ψ e T_ϕ são coanalíticas.*

(iii) *Existem a, b complexos, não nulos tal que $a\phi + b\psi$ é constante.*

Demonstração. É claro que (i) e (ii) implicam comutatividade. Suponha que existem a, b números complexos não zero tal que $a\phi + b\psi = k$, k constante, então $\psi = \frac{k-a\phi}{b}$, assim

$$\begin{aligned}
T_\phi T_\psi &= T_\phi T_{\frac{k-a\phi}{b}} = P\phi P\frac{(k-a\phi)}{b} = P\phi(\tfrac{k}{b} + \tfrac{P(-a\phi)}{b}) \\
&= P\phi\tfrac{k}{b} + P\phi P(\tfrac{-a\phi}{b}) = P\phi\tfrac{k}{b} - \tfrac{a}{b}P\phi P\phi \\
&= P\phi P\tfrac{k}{b} - \tfrac{a}{b}P\phi P\phi \\
&= P\tfrac{k}{b}P\phi - \tfrac{a}{b}P\phi P\phi = (P\tfrac{k}{b} - \tfrac{a}{b}P\phi)P\phi \\
&= P(\tfrac{k-a\phi}{b})P\phi = T_\psi T_\phi.
\end{aligned}$$

Agora suponha que $T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi$. Pelo Lema 2.19

$$U^* T_\phi T_\psi U - T_\phi T_\psi = P(e^{-i\theta}\phi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\psi})$$

e

$$U^* T_\psi T_\phi U - T_\psi T_\phi = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi}),$$

portanto,

$$P(e^{-i\theta}\phi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi}). \tag{2.1}$$

Existem dois casos, quando pelo menos um dos vetores de (2.1) é zero ou nenhum destes é zero.

Assuma que um dos vetores é zero, suponha

(1) $P(e^{-i\theta}\phi) = 0$.

Então, pelo Teorema 1.58 $||P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi})|| = ||P(e^{-i\theta}\psi)||||P(e^{-i\theta}\overline{\phi})|| = 0$

Tem-se aqui dois subcasos:

(1.1) Se $P(e^{-i\theta}\phi) = P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = 0$.
Nesse caso, os coeficientes de Fourier de ϕ e ψ que correspondem aos índices positivos são zero, e assim T_ϕ e T_ψ são coanalíticas e satisfazem (ii).

(1.2) Se $P(e^{-i\theta}\phi) = P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$.
Aqui ϕ é constante e satisfaz (iii) escolhendo $a = 1$ e $b = 0$.

Assuma agora que

(2) $P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = 0$.

Então novamente pelo Teorema 1.58, tem-se dois subcasos

(2.1) Se $P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = P(e^{-i\theta}\psi) = 0$.
Aqui ψ é constante e satisfaz (iii) escolhendo $a = 0$ e $b = 1$.

(2.2) Se $P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$.
Nesse caso os coeficientes de Fourier de ϕ e ψ que corresponden aos índices negativos são nulos, e assim T_ϕ e T_ψ são analíticos e satisfaz em (i).

No caso onde (3) $P(e^{-i\theta}\psi) = 0$ e (4)$P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = 0$ o resultado é análogo.

Asuma agora que nenhum dos quatro são zero.

Como $P(e^{-i\theta}\phi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\psi}) = P(e^{-i\theta}\psi) \otimes P(e^{-i\theta}\overline{\phi})$, pelo Teorema 1.58, existe $b \neq 0$ tal que

$$P(e^{-i\theta}\phi) = bP(e^{-i\theta}\psi) \text{ e } P(e^{-i\theta}\overline{\phi}) = \overline{b}P(e^{-i\theta}\overline{\psi})$$

então,

$$P(e^{-i\theta}(\phi - b\psi)) = 0 \;\text{ e }\; P(e^{-i\theta}(\overline{\phi} - \overline{b\psi})) = 0,$$

implica que $\phi - b\psi$ é constante, portanto a condição (iii) é satisfeita. $\square$

Corolário 2.24. *Se dois operadores Toeplitz comutam entre eles e não satisfazem a condição (iii) do teorema anterior, então seu produto é um operador Toeplitz.*

Demonstração. Segue do teorema anterior que o primeiro operador é analítico ou o segundo operador é coanalítico, daí pelo Teorema 2.21 o produto é um operador Toeplitz. $\square$

Teorema 2.25. *Um operador Toeplitz é autoadjunto se, e somente se, o seu símbolo é de valor real q.t.p.*

Demonstração. Segue do fato que $T_\phi = T_\phi^*$ se, e somente se, $\phi = \overline{\phi}$. $\square$

Corolário 2.26. *O operador Toeplitz T_ϕ é normal se, e somente se, existem números complexos c e d, e uma função de valor real ψ em L^∞ tal que $\phi = c\psi + d$ q.t.p.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.25, $T_\psi^* = T_\psi$, então

$$\begin{aligned} T_\phi T_\phi^* &= T_{c\psi+d}T_{\overline{c\psi+d}} = (cT_\psi + d)(\overline{c}T_{\overline{\psi}} + \overline{d}) \\ &= cT_\psi\overline{c}T_{\overline{\psi}} + cT_\psi\overline{d} + d\overline{c}T_{\overline{\psi}} + d\overline{d} \\ &= \overline{c}T_{\overline{\psi}}cT_\psi + \overline{d}cT_\psi + \overline{c}T_{\overline{\psi}}d + \overline{d}d \\ &= (\overline{c}T_{\overline{\psi}} + \overline{d})(cT_\psi + d) = T_\phi^*T_\phi. \end{aligned}$$

Agora, suponha que T_ϕ é normal, ou seja, que T_ϕ comuta com $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$ e como pelo menos um dos três casos do Teorema 2.23 se cumpre:

Se (i) ou (ii) é verdadeiro, tem-se que ϕ é constante e o resultado segue.

Se (iii) é verdadeira, então

$$a\phi + b\overline{\phi} = k \tag{2.2}$$

para k constante, tomando conjugados e somando as duas tem-se

$$2Re((a + \overline{b})\phi) = k + \overline{k}.$$

Seja ψ a parte imaginária da função $(a + \overline{b})\phi$, note que

$$(a + \overline{b})\phi = \frac{k + \overline{k}}{2} + i\psi.$$

Se $a + \overline{b} \neq 0$, segue o resultado.
Se $a = -\overline{b}$, segue de (2.2) que $a\phi - \overline{a}\overline{\phi} = k$, daí $(2i)Im\, a\phi = k$ logo, $Im\, \phi =$ Constante.

Segue que ϕ tem a forma desejada com $\psi = Re\, \phi$. □

Teorema 2.27. *O único operador Toeplitz compacto é* 0*.*

Demonstração. Seja T_ϕ um operador compacto.

Lembre que os operadores compactos enviam sequências fracamente convergentes em sequências fortemente convergentes. Portanto, como $(e_{s+n})_n \rightharpoonup 0$ quando $n \to \infty$, $(T_\phi(e_{s+n}))_n \to 0$.

Lembrando também que toda sequência que converge fraca é limitada, tem-se que $(e_{s+n})_n$ é limitada logo,

$$\langle T_\phi(e_{s+n}), e_{t+n}\rangle \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Como T_ϕ é Toeplitz $\langle T_\phi(e_{s+n}), e_{t+n}\rangle = \phi_{s-t}$, onde ϕ_k é o k-ésimo coeficiente de Fourier de ϕ, portanto $\phi_{s-t} = 0$ para todo $s, t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, ou seja $\phi_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, daí $\phi = 0$ q.t.p, assim $T_\phi = 0$. □

De fato, os operadores Toeplitz não podem ser obtidos através da aproximação de operadores compactos, como será mostrado na seguinte seção.

2.3 Estrutura espectral

Nesta seção faz-se o estudo do espectro do operador Toeplitz em termos de seu símbolo ϕ geral, pelo qual ele está determinado.

Para começar é mostrado que o espectro pontual aproximado de T_ϕ sempre contém imagem essencial de ϕ.

Teorema 2.28. ***(Teorema da inclusão espectral).***
Para todo $\phi \in L^\infty$, o espectro de M_ϕ está contido no espectro de T_ϕ. Mais precisamente,

$$ess\ ran\phi = \Pi(M_\phi) = \sigma(M_\phi) \subset \Pi(T_\phi) \subset \sigma(T_\phi).$$

Demonstração. O Teorema 2.7 mostrou que $\sigma(M_\phi) = \Pi(M_\phi) = ess\,ran\phi$.
Assuma agora que $\lambda \in \Pi(M_\phi)$, então existe uma sequência $(f_n)_n$ de funções em L^2 com $||f_n|| = 1$ tal que,

$$||(M_\phi - \lambda)f_n||_n \to 0$$

quando $n \to \infty$. Removendo os termos quando n for suficientemente grande de cada f_n e renormalizando, para cada n existe um g_n de norma 1 que tem só um número finito de coeficientes de Fourier não nulos correspondentes aos índices negativos, que satisfaz

$$||f_n - g_n|| \leq \frac{1}{n}.$$

Segue que $||(M_\phi - \lambda)g_n||_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Como o operador shift bilateral W tem a propriedade de mover os coeficientes de Fourier das funções em L^2 a direita, para cada n existe $M_n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $W^{M_n}g_n \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ e como W é unitário e comuta com M_ϕ tem-se,

$$\begin{aligned}
||(M_\phi - \lambda)W^{M_n}g_n|| &= ||W^{M_n}(M_\phi - \lambda)g_n|| \\
&= \langle W^{M_n}(M_\phi - \lambda)g_n, W^{M_n}(M_\phi - \lambda)g_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle (M_\phi - \lambda)g_n, W^{M_n*}W^{M_n}(M_\phi - \lambda)g_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle (M_\phi - \lambda)g_n, (M_\phi - \lambda)g_n\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= ||(M_\phi - \lambda)g_n||.
\end{aligned}$$

Além disso, $||W^{M_n}g_n|| = ||g_n|| = 1$, pelo mesmo fato de W ser unitário.

Para cada n defina $h_n = W^{M_n}g_n$, então cada $h_n \in \mathcal{H}^2$,$||h_n|| = 1$ e

$$||(M_\phi - \lambda)h_n||_n \to 0$$

quando $n \to \infty$ mas,

$$||(T_\phi - \lambda)h_n|| = ||P(M_\phi - \lambda)h_n|| \leq ||(M_\phi - \lambda)h_n||,$$

portanto,

$$||(T_\phi - \lambda)h_n||_n \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo $\lambda \in \Pi(T_\phi)$, assim $\Pi(M_\phi) \subset \Pi(T_\phi)$. □

Corolário 2.29. *Para $\phi \in L^\infty$, $||\phi||_\infty = ||M_\phi|| = ||T_\phi|| = r(T_\phi)$, donde $r(T_\phi)$ é o raio espectral.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.72 tem-se $||\phi||_\infty = ||M_\phi||$ e pela pág.207 de [15](Cézar), o raio espectral de um operador normal é igual a sua norma assim,

$$||M_\phi|| = r(M_\phi).$$

Pelo Teorema 2.28 (Inclusão espectral) $r(M_\phi) \leq r(T_\phi)$, além disso, o espectro de todo operador é no máximo sua norma pelo Teorema 1.43, então $r(T_\phi) \leq ||T_\phi||$, juntando todas essas informações

$$||M_\phi|| = r(M_\phi) \leq r(T_\phi) \leq ||T_\phi||.$$

Mas como $T_\phi = PM_\phi|_{\widetilde{\mathcal{H}}^2}$ tem-se

$$||T_\phi|| \leq ||P||||M_\phi|| = ||M_\phi||.$$

Portanto, se conclui $||M_\phi|| = ||T_\phi|| = r(T_\phi)$. $\square$

Lembrando que um operador é dito quasenilpotente se o seu espectro é 0, segue o seguinte corolário.

Corolário 2.30. *O único operador quasenilpotente Toeplitz é o operador* 0.

Demonstração. Se $r(T_\phi) = 0$, o corolário anterior diz que $||\phi||_\infty = 0$, então $\phi = 0$ q.t.p, ou seja $T_\phi = 0$. $\square$

Corolário 2.31. *Se ϕ pertence a L^∞ e K um operador compacto, então* $||T_\phi - K|| \geq ||T_\phi||$.

Demonstração. Como $||T_{e^{-in\theta}}|| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||T_\phi - K|| &\geq ||T_{e^{-in\theta}}(T_\phi - K)|| \\ &= ||T_{e^{-in\theta}\phi} - T_{e^{-in\theta}}K|| \quad \text{(Pelo Teorema 2.21)} \\ &\geq ||T_{e^{-in\theta}\phi}|| - ||T_{e^{-in\theta}}K||. \end{aligned}$$

Note que pelo fato de $e^{-in\theta} \in \widetilde{\mathcal{H}}^\infty$ e pelo Corolário 2.29

$$||T_{e^{-in\theta}\phi}|| = ||e^{-in\theta}\phi||_\infty = ||\phi||_\infty = ||T_\phi||,$$

para todo n.

Além disso, $T_{e^{-in\theta}}$ é simplesmente U^{*n}, portanto, $(T_{e^{-in\theta}}f)_n \to 0$ para cada $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$.
Como K é compacto, segue do exercício 1.19 de [14], pág.32, que

$$(T_{e^{-in\theta}}K)_n \to 0,$$

quando $n \to \infty$. $\square$

Assim, como consequência, os operadores Toeplitz não podem ser obtidos através da aproximação de operadores compactos.

Exemplo 2.32. *Existe um operador K de posto 1, tal que, $||S^* - K|| = ||S^*||$, onde S^* é o shift unilateral para trás.*

Demonstração. Seja $K = e_0 \otimes e_1$, note que dada

$$f = (f_0, f_1, f_2, ...) \in l^2,\ e_0 = (1, 0, 0, ..) \quad \text{e} \quad e_1 = (0, 1, 0, ..),$$

$$K(f) = (e_0 \otimes e_1)f = \langle f, e_1 \rangle e_0 = f_1 e_0 = (f_1, 0, 0, ...)$$

e

$$S^*(f) = (f_1, f_2, f_3, ...)$$

assim,

$$(S^* - K)f = S^*(f) - K(f) = (f_1, f_2, ...) - (f_1, 0, ...) = (0, f_2, f_3, ...),$$

logo,

$$||S^* - K|| = ||S^*|| = 1.$$

□

Teorema 2.33. *Para $\phi \in L^\infty$ e lembrando que $Env\ A$ significa envoltória convexa de um determinado conjunto A, os seguintes conjuntos são idênticos:*

(i) $\overline{Env\ \sigma(T_\phi)}$

(ii) $\overline{Env\ \sigma(M_\phi)}$

(iii) $\overline{W(T_\phi)}$

(iv) $\overline{W(M_\phi)}$

(v) $\overline{Env(ess\ ran\phi)}$.

Demonstração. Como M_ϕ é normal, $\overline{W(M_\phi)} = Env(\sigma(M_\phi))$ pelo Teorema 1.55 e pelo Teorema 2.28 (Inclusão espectral)

$$\overline{Env(\sigma(M_\phi))} \subset \overline{Env\sigma(T_\phi)} \subset \overline{W(T_\phi)}.$$

Como $\langle T_\phi f, f\rangle = \langle M_\phi f, f\rangle$ para $f \in \mathcal{H}^2$,

$$W(T_\phi) \subset W(M_\phi),$$

e assim $\overline{W(T_\phi)} \subset \overline{W(M_\phi)}$.

Logo $\overline{W(M_\phi)} = \overline{Env(\sigma(M_\phi))} = \overline{Env\sigma(T_\phi)} = \overline{W(T_\phi)}$.
Mas como $ess\,ran\phi = \sigma(M_\phi)$, então

$$\overline{Env(ess\,ran\phi)} = \overline{Env\sigma(M_\phi)}.$$

□

Corolário 2.34. *Para cada $\phi \in L^\infty$, ess ran$\phi \subset \sigma(T_\phi)$ e $\sigma(T_\phi) \subset \overline{Env(ess\ ran\phi)}$. Em particular, se ess ranϕ é convexo então $\sigma(T_\phi) = ess\ ran\phi$.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.28 (Inclusão espectral) que

$$ess\,ran\phi = \sigma(M_\phi) \subset \sigma(T_\phi)$$

e pelo teorema anterior tem-se

$$\overline{Env(ess\,ran\phi)} = \overline{Env\sigma(T_\phi)},$$

assim claramente

$$\sigma(T_\phi) \subset \overline{Env(ess\ ran\phi)}.$$

Agora, se $ess\,ran\phi$ é convexo, então $Env(ess\,ran\phi) = ess\,ran\phi$, assim

$$\sigma(T_\phi) \subset \overline{ess\ ran\phi}$$

e pelo Teorema 2.28

$$\overline{ess\ ran\phi} \subset \sigma(T_\phi),$$

assim

$$\sigma(T_\phi) = ess\ ran\phi.$$

□

O espectro dos operadores Toeplitz pode ser calculado em alguns casos quando $ess\ ran\phi$ não é convexo. Em particular, $\sigma(T_\phi)$ pode ser obtido se T_ϕ for operador Toeplitz analítico.

Teorema 2.35. *Se $\phi \in \mathcal{H}^\infty$, então $\sigma(T_\phi) = \overline{\phi(\mathbb{D})}$.*

Demonstração. Considere T_ϕ agindo sobre $\mathcal{H}^2$ em vez de $\widetilde{\mathcal{H}}^2$. Suponha que $\lambda = \phi(z_0)$ para $z_0 \in \mathbb{D}$, então

$$((T_\phi - \lambda)f)(z_0) = (\phi(z_0) - \lambda)f(z_0) = 0,\ \forall f \in \mathcal{H}^2,$$

logo $T_\phi - \lambda$ não é injetora e $T_\phi - \lambda$ não pode ser inversível, isto prova que $\phi(\mathbb{D}) \subset \sigma(T_\phi)$ e assim $\overline{\phi(\mathbb{D})} \subset \sigma(T_\phi)$.

Agora assuma que $\lambda \notin \overline{\phi(\mathbb{D})}$.

Defina $\delta = dist(\lambda, \overline{\phi(\mathbb{D})})$, sendo assim $\delta > 0$. Como $|\phi(z) - \lambda| \geq \delta$ para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{1}{\phi(z) - \lambda}$$

é analítica e limitada por $\frac{1}{\delta}$ sobre $\mathbb{D}$, logo

$$(T_\phi - \lambda)^{-1} = T_{\frac{1}{\phi - \lambda}}$$

implica que $\lambda \notin \sigma(T_\phi)$. □

Analogamente, tem-se um resultado para operadores Toeplitz coanalíticos.

Corolário 2.36. *Se T_ϕ é um operador Toeplitz coanalítico, e se $\overline{\phi} \in \mathcal{H}^\infty$ cuja função limitada é o conjugado complexo de ϕ q.t.p., então $\sigma(T_\phi^*)$ é o fecho do conjunto complexo de conjugados complexos de $\overline{\phi}(\mathbb{D})$.*

Demonstração. Lembrando que $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$, como $\overline{\phi} \in \mathcal{H}^\infty$, o resultado segue do teorema anterior e do fato que

$$\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

□

Teorema 2.37. ***(Alternativa de Coburn).*** *Se $\phi \in L^\infty$ e não é nulo, então pelo menos um de T_ϕ e T_ϕ^* é injetivo.*

Demonstração. Suponha que $T_\phi f = 0$ para algum $f \neq 0$, e suponha também que

$$T_\phi^*(g) = P(\overline{\phi} g) = 0.$$

Deve-se provar que $g = 0$.

Tem-se que $P(\phi f) = 0$, onde P é a projeção de L^2 sobre $\widetilde{\mathcal{H}}^2$, então $\phi f, \overline{\phi} g \in (\widetilde{\mathcal{H}}^2)^\perp$, daí os coeficientes de $\overline{\phi f}$ e $\phi \overline{g}$ que podem ser diferentes de zero são aqueles cujas posições são $\{1, 2, ..\}$.

Como $f, g \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, então $\overline{\phi f} g$ e $\phi \overline{g} f$ em $L^1(S^1)$ tem coeficientes de Fourier diferentes de zero no máximo nas posições $\{1, 2, ..\}$, mas

$$\overline{\phi \overline{g} f} = \overline{\phi f} g,$$

então $\phi \overline{g} f$ e seu conjugado tem os coeficientes de Fourier diferentes de zero no máximo nas posições $\{1, 2, ..\}$, portanto, $\phi \overline{g} f \equiv 0$.

Como $f \neq 0$, $m\{e^{i\theta} : \tilde{f}(e^{i\theta}) = 0\} = 0$ pelo Teorema F. e M.Riesz 1.39, logo $\phi \overline{g} = 0$ q.t.p. Como ϕ não é nulo, existe um conjunto de medida positiva sobre o qual $\overline{g}$ se anula, logo g se anula sobre um conjunto de medida positiva, donde se conclui que $g \equiv 0$ usando novamente o Teorema F. e M.Riesz 1.39. □

Corolário 2.38. *Um operador Toeplitz distinto do nulo, tem imagem densa se este não for injetivo.*

Demonstração. Se T_ϕ for não injetivo, segue da Alternativa Coburn que T_ϕ^* é injetivo. Se a imagem de T_ϕ não for densa, existiria $g \neq 0$ tal que $\langle T_\phi f, g\rangle = 0$ para toda $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, mas

$$\langle T_\phi f, g\rangle = \langle f, T_\phi^* g\rangle.$$

Em particular,

$$\langle T_\phi^* g, T_\phi^* g\rangle = 0 \text{ e } T_\phi^* g = 0,$$

isto implica que $g = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 2.39. *Para $\phi \in L^\infty$, não constante,*

$$\Pi_0(T_\phi) \cap \overline{\Pi_0(T_\phi^*)} = \emptyset,$$

onde $\overline{\Pi_0(T_\phi^*)}$ denota o conjunto de conjugados complexos de valores próprios de T_ϕ^*.

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \Pi_0(T_\phi)$, assim existe uma função f diferente da nula tal que $(T_\phi - \lambda)f = (T_{\phi-\lambda})f = 0$.

Suponha também que $(T_\phi^* - \overline{\lambda})g = 0$, o objetivo é mostrar que $g = 0$, mas note que $T_\phi^* - \overline{\lambda} = T_{\phi-\lambda}^*$ assim pela Alternativa de Coburn $g = 0$. $\square$

Corolário 2.40. *Se $\phi \in L^\infty$ é não constante de valor real, então $\Pi_0(T_\phi) = \emptyset$.*

Demonstração. Nesse caso $T_{\overline{\phi}} = T_\phi$, ou seja, T_ϕ é autoadjunto, implicando que o seu espectro é real. Portanto, se $\lambda \in \Pi_0(T_\phi)$, $\lambda = \overline{\lambda}$ e $\lambda \in \Pi_0(T_\phi^*)$ o que contradiz o corolário anterior. $\square$

A seguinte definição permite o estudo do último corolário do Teorema Alternativa Coburn apresentado neste trabalho.

Definição 2.41. *Um operador limitado T sobre um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ é Fredholm se sua imagem é fechada e se*

$$j(T) = dim\, ker\, T - dim\, ker\, T^*$$

é finito.

Corolário 2.42. *Se $\phi \in L^\infty(S^1)$ tal que T_ϕ é um operador de Fredholm então T_ϕ é inversível se, e somente se, $j(T_\phi) = 0$.*

Demonstração. Seja T_ϕ um operador de Fredholm e suponha T_ϕ inversível.
Note que

$$T_\phi = T_\phi + 0,$$

onde zero é o único operador Toeplitz compacto, então pelo exercício 6 [3](Brezis),pág.494, obtém-se que $j(T_\phi) = 0$.

Agora, se $j(T_\phi) = 0$, dim ker $T_\phi = dim$ ker T_ϕ^* e pela Alternativa de Coburn ou $\ker(T_\phi) = \{0\}$ ou $\ker(T_\phi^*) = \{0\}$, implicando que

$$dim \text{ ker } T_\phi = 0 \quad ou \quad dim \text{ ker } T_\phi^* = 0,$$

daí dim ker $T_\phi = dim$ ker $T_\phi^* = 0$, logo $ker\, T_\phi = \{0\} = \ker T_\phi^*$, portanto T_ϕ é injetivo.

Como

$$ran\, T_\phi = (\text{ker } T_\phi^*)^\perp = \{0\}^\perp = L^2,$$

então T_ϕ é sobrejetor, logo T_ϕ é inversível. $\square$

O próximo passo é determinar o espectro de um operador Toeplitz autoadjunto, para isto a seguinte definição.

Definição 2.43. *Para $\phi \in L^\infty$ de valor real, o* ***ínfimo essencial*** *de ϕ, denotado por $ess\,inf\phi$, é a maior das cotas inferiores da imagem essencial de ϕ, e o* ***supremo essencial*** *de ϕ, denotado por $ess\,sup\phi$, é a menor das cotas superiores da imagem essencial de ϕ.*

Teorema 2.44. *Se T_ϕ é autoadjunto, então*

$$\sigma(T_\phi) = \{t : ess\,inf\,\phi \leq t \leq ess\,sup\,\phi\}.$$

Demonstração. Lembre que se T_ϕ é autoadjunto, então ϕ é de valor real q.t.p, ver Teorema 2.25. Claramente $[ess \inf \phi, ess \sup \phi] = \overline{Env(ess\,ran\phi)}$, o qual contém o $\sigma(T_\phi)$ pois pelo Teorema 1.49, $\sigma(T_\phi) \subset \overline{W(T_\phi)}$ e pelo Teorema 2.33 $\overline{W(T_\phi)} = \overline{Env(ess\,ran\phi)}$.

Para provar a inclusão contrária, note que pelo Teorema 2.28 (Inclusão espectral) $ess\,ran\phi \subset \sigma(T_\phi)$ e pelo fato de $ess\,ran\phi$ ser fechado, $ess\,ran\phi$ contém $ess\,inf\phi$ e $ess\,sup\phi$ então,

$$ess\,inf\phi\,, ess\,sup\phi \in \sigma(T_\phi).$$

Seja $\lambda \in (ess\,inf\phi, ess\,sup\phi)$, a ideia é provar que $T_\phi - \lambda$ não é inversível provando que $T_\phi - \lambda$ não é sobrejetora. Para provar isto mostra-se que não existe $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ tal que $(T_\phi - \lambda)f = 1$, agindo por contradição.

Suponha que dita f existe, então

$$P((\phi - \lambda)f) = 1,$$

equivalentemente,

$$P((\phi - \lambda)f) - 1 = 0,$$

o que quer dizer que

$$(\phi - \lambda)f - 1 \in \widetilde{\mathcal{H}^2}^{\perp} = L^2 \ominus \widetilde{\mathcal{H}}^2,$$

onde $L^2 \ominus \widetilde{\mathcal{H}}^2 = L^2 \cap (\widetilde{\mathcal{H}}^2)^c$, mas $\overline{(\phi - \lambda)f - 1} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$. Como $\phi = \overline{\phi}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\phi - \lambda)\overline{f} - 1 \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$, portanto, $(\phi - \lambda)\overline{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$.

Além disso, $f \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$ implica que $\overline{f}e_n \in L^2 \ominus \widetilde{\mathcal{H}}^2$ para $n = -1, -2, -3, ...$ assim,

$$\begin{aligned} 0 = \langle (\phi - \lambda)\overline{f}, \overline{f}e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(e^{i\theta}) - \lambda)\overline{f(e^{i\theta})} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\phi(e^{i\theta}) - \lambda)|f(e^{i\theta})|^2 e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

para $n = -1, -2, -3, ...$

Tomando conjugado

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(e^{i\theta}) - \lambda)|f(e^{i\theta})|^2 e^{in\theta}\mathrm{d}\theta, \quad \text{para}\, n = -1, -2, ..,$$

então

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi(e^{i\theta}) - \lambda)|f(e^{i\theta})|^2 e^{in\theta}\mathrm{d}\theta, \quad \text{para}\, n = \pm 1, \pm 2, ..$$

Segue que $(\phi-\lambda)|f|^2$ deve ser uma constante c(real), pois todos os seus coeficientes de Fourier, exceto possivelmente o zero, são zero.

Note que $(\phi - \lambda)f \neq 0$, pois $P((\phi - \lambda)f) = 1$, portanto $c \neq 0$.

Deste modo, $(\phi - \lambda)|f|^2$ é uma constante não nula, mas isto é impossível. De fato, como $\lambda \in (ess\, inf\phi, ess\, sup\phi)$ tem-se

$$(\phi(e^{i\theta}) - \lambda) > 0$$

para $e^{i\theta}$ em um conjunto de medida positiva e também

$$(\phi(e^{i\theta}) - \lambda) < 0$$

sobre um conjunto de medida positiva, portanto $(\phi-\lambda)|f|^2$ toma valores positivos e negativos sobre conjuntos diferentes de medida positiva, mas isto não pode ocorrer, pois $(\phi - \lambda)|f|^2$ é uma constante não nula. □

Prosseguindo a descrição do espectro de um operador Toeplitz T_ϕ, no caso que ϕ for uma função contínua sobre $\mathbb{D}$, para isto, se introduz o conceito de índice de uma função.

Definição 2.45. *Seja γ uma função contínua de valor complexo sobre S^1 (ou seja, γ é uma curva fechada), e seja a um ponto que não está na imagem de γ.*
O índice do ponto a, com respeito a γ (também chamado número de enrolamento de γ ao redor de a) é definido como

$$Ind_a\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz.$$

Teorema 2.46. *Se ϕ é contínua sobre S^1, então T_ϕ é um operador de Fredholm se, e somente se, ϕ não se anula e $-j(T_\phi)$ é o número de voltas da curva ϕ com respeito à origem.*

Demonstração. Ver [7], pág.165. □

Corolário 2.47. *Se ϕ é contínua sobre S^1, então T_ϕ é inversível se, e somente se, ϕ não se anula e o número de voltas da curva determinada por ϕ com respeito à origem é zero.*

Demonstração. Seja ϕ um símbolo contínuo sobre S^1. Se T_ϕ é inversível, seguindo o mesmo esboço da prova do Corolário 2.42 onde

$$T_\phi = T_\phi + 0,$$

é a soma de um operador inversível mais um operador compacto, segue que T_ϕ é de Fredholm, logo usando o Teorema 2.46 tem-se que ϕ não se anula e pelo Corolário 2.42 segue que o número de voltas de ϕ com respeito da origem é zero.

Para provar a implicação contrária basta usar diretamente o Teorema 2.46 e Corolário 2.42, respectivamente. □

Teorema 2.48. *Seja ϕ uma função contínua sobre S^1. Então,*

$$\sigma(T_\phi) = ran\phi \bigcup \{a \in \mathbb{C} : a \notin ran\,\phi \text{ e } Ind_a\phi \neq 0\},$$

onde $ran\,\phi$ é a imagem de ϕ.

Demonstração. Note que $ess\,ran\,\phi = ran\,\phi$ pois ϕ é uma função contínua. Segue do Teorema 2.28 (Inclusão espectral) que $ran\phi \subset \sigma(T_\phi)$. Assim, tem-se que provar que para $a \notin ran\phi$, $T_\phi - a$ é inversível se, e somente se, $Ind_a\phi = 0$.

Como $a \notin ran\,\phi$ se, e somente se, $0 \notin ran(\phi - a)$, $T_\phi - a = T_{\phi - a}$, e

$$Ind_a\phi = Ind_0(\phi - a).$$

Pode-se assumir que $a = 0$ e que $\phi(e^{i\theta}) \neq 0$ para todo θ. Neste caso deve-se mostrar que T_ϕ é inversível se, e somente se, $Ind_0\phi = 0$, o qual é uma implicação direta do corolário anterior.

□

Capítulo 3

Sobre Operadores Toeplitz simétricos complexos

Como os operadores Toeplitz sobre $\mathcal{H}^2$ não são em geral simétrico complexos, neste capítulo tem-se como objetivo a caracterização dos operadores Toeplitz que são simétricos complexos com uma conjugação determinada, para logo caracterizar também quais são normais através de seu símbolo.

3.1 Operadores Toeplitz simétricos complexos

Dada $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a álgebra dos operadores lineares limitados definidos no espaço de Hilbert complexo e separável $\mathcal{H}$ tem-se as seguintes definições:

Definição 3.1. *Uma* ***conjugação*** *é um operador antilinear*

$$C : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

que satisfaz as seguintes duas condiçoes:

(i) $\langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$*, para todo* $x, y \in \mathcal{H}$ *(*C *é isométrico).*

(ii) $C^2 = I$ *(*C *é involutivo).*

Definição 3.2. *Dado* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *e* C *um operador antilinear,* T *é dito* ***C-simétrico*** *se* $CT = T^*C$*, e* ***simétrico complexo*** *se existe uma conjugação* C *com a qual* T *é* C*-simétrico.*

Teorema 3.3. *Para* $\varphi \in L^\infty$*, seja* T_φ *um operador simétrico complexo sobre* $\mathcal{H}^2$*. Se* T_φ *é analítico ou coanalítico, então* φ *é identicamente nula sobre* $\mathbb{D}$ *ou é uma função constante sobre* $\mathbb{D}$*.*

Demonstração. Suponha que T_φ é analítica e seja φ uma função não identicamente zero sobre $\mathbb{D}$. Se $\varphi(\lambda) = 0$ para algum λ em $\mathbb{D}$, então $\varphi(z) \neq 0$ para todo z em algum conjunto aberto U de $\mathbb{D}$ o qual não contém λ.

Note que $T^*_\varphi K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda$. De fato, dada $f \in \mathcal{H}^2$ e lembrando que $\langle f, K_\lambda\rangle = f(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \langle T^*_\varphi K_\lambda - \overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda, f\rangle &= \langle T^*_\varphi K_\lambda, f\rangle - \langle \overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda, f\rangle = \langle K_\lambda, T_\varphi f\rangle - \overline{\varphi(\lambda)}\langle K_\lambda, f\rangle \\ &= \overline{T_\varphi f(\lambda)} - \overline{\varphi(\lambda)}\,\overline{f(\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $T^*_\varphi K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda = 0$, que implica

$\langle T^*_\varphi K_\lambda f, T^*_\varphi K_\lambda f\rangle = \langle CT_\varphi CK_\lambda f, CT_\varphi CK_\lambda f\rangle = \langle T_\varphi CK_\lambda f, T_\varphi CK_\lambda f\rangle$,

daí $||T_\varphi CK_\lambda|| = ||T^*_\varphi K_\lambda|| = 0$, logo $T_\varphi CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Mais ainda, como $\varphi \in \mathcal{H}^\infty$, por T_φ ser analítica, $\varphi(z)CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, tem-se que $CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in U$ e portanto, $CK_\lambda \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}$ (Ver [6], pág. 78), o que é uma contradição. Portanto, φ anula-se sobre $\mathbb{D}$.

Agora, fixando $\alpha \in \mathbb{D}$, tem-se $CT^*_\varphi K_\alpha - T_\varphi CK_\alpha = C\overline{\varphi(\alpha)}K_\alpha - T_\varphi CK_\alpha$ e como $CT^*_\varphi = T_\varphi C$, então

$$\begin{aligned} 0 &= CT^*_\varphi K_\alpha - T_\varphi CK_\alpha = \quad C\overline{\varphi(\alpha)}K_\alpha - T_\varphi CK_\alpha \\ &= \varphi(\alpha)CK_\alpha - P(\varphi CK_\alpha) \\ &= [\varphi(\alpha) - \varphi]CK_\alpha, \end{aligned}$$

onde P é a projeção ortogonal, ver Definição 2.8. Como K_α não se anula sobre $\mathbb{D}$, segue que CK_α também não se anula sobre $\mathbb{D}$. Assim $\varphi \equiv \varphi(\alpha)$ para α fixo que pertence a $\mathbb{D}$ e portanto, φ é uma função constante não zero sobre $\mathbb{D}$.

Agora, se T_φ for coanalítica e φ não for identicamente zero, fazendo de forma análoga tem-se que:

Se $\varphi(\lambda) = 0 = \overline{\varphi(\lambda)}$ para algum λ em $\mathbb{D}$, então $\overline{\varphi(z)} \neq 0$ para todo z em algum conjunto aberto V de $\mathbb{D}$ o qual não contém λ.

Note que $T_\varphi K_\lambda = \varphi(\lambda)K_\lambda$ pois dada $f \in \mathcal{H}^2$ e lembrando que $\langle f, K_\lambda\rangle = f(\lambda)$,

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi K_\lambda - \varphi(\lambda)K_\lambda, f\rangle &= \langle T_\varphi K_\lambda, f\rangle - \langle \varphi(\lambda)K_\lambda, f\rangle = \langle K_\lambda, T^*_\varphi f\rangle - \varphi(\lambda)\langle K_\lambda, f\rangle \\ &= \overline{T^*_\varphi f(\lambda)} - \varphi(\lambda)\,\overline{f(\lambda)} \\ &= \overline{\overline{\varphi(\lambda)}}\,\overline{f(\lambda)} - \varphi(\lambda)\overline{f(\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $T_\varphi K_\lambda = \varphi(\lambda)K_\lambda = 0$, e como

$\langle T_\varphi K_\lambda f, T_\varphi K_\lambda f\rangle = \langle CT^*_\varphi CK_\lambda f, CT^*_\varphi CK_\lambda f\rangle = \langle T^*_\varphi CK_\lambda f, T^*_\varphi CK_\lambda f\rangle$,

então $||T^*_\varphi CK_\lambda|| = ||T_\varphi K_\lambda|| = 0$, logo $T^*_\varphi CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Mais ainda, como $\overline{\varphi} \in \mathcal{H}^\infty$, por T_φ ser coanalítica, $\overline{\varphi(z)}CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, o qual significa que $CK_\lambda(z) = 0$ para todo $z \in V$ e portanto, $CK_\lambda \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}$ (Ver [6], pág. 78), o que é uma contradição. Daí, φ se anula sobre $\mathbb{D}$.

Agora, fixando $\alpha \in \mathbb{D}$. Como $CT_\varphi = T_\varphi^* C$ tem-se

$$
\begin{aligned}
0 &= CT_\varphi K_\alpha - T_\varphi^* CK_\alpha = \quad C\varphi(\alpha)K_\alpha - T_\varphi^* CK_\alpha \\
&= \overline{\varphi(\alpha)}CK_\alpha - P(\overline{\varphi}CK_\alpha) \\
&= [\overline{\varphi(\alpha)} - \overline{\varphi}]CK_\alpha.
\end{aligned}
$$

Como K_α não se anula sobre $\mathbb{D}$, segue que CK_α também não se anula sobre $\mathbb{D}$, assim $\overline{\varphi} \equiv \overline{\varphi(\alpha)}$ para α fixo que pertence a $\mathbb{D}$ e portanto, $\overline{\varphi}$ é uma função constante não nula sobre $\mathbb{D}$, e isto implica φ é uma função constante não nula sobre $\mathbb{D}$. □

Definição 3.4. *Uma função $\phi \in \mathcal{H}^\infty$ que satisfaz $|\tilde{\phi}(e^{i\theta})| = 1$ q.t.p é uma* ***função interna****.*

Corolário 3.5. *Se φ é uma função interna não constante sobre $\mathbb{D}$, então T_φ não é um operador simétrico com conjugação C.*

Demonstração. Note que φ já é uma função analítica pelo fato de ser interna, assim T_φ é analítica. Portanto, se φ é não constante, pelo Teorema 3.3 T_φ não é um operador simétrico complexo com conjugação C. □

Observação 3.6. *Se φ é uma função constante analítica sobre $\mathbb{D}$, então T_φ é um operador simétrico complexo. De fato,*

$$CT_\varphi f = C\varphi f = \overline{\varphi}Cf = T_\varphi^* Cf.$$

Notação 3.7. *Daqui em diante, dado $\theta \in [0, 2\pi]$*

$$\{e^{in\theta}(z) = z^n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..\}$$

denota uma base ortonormal para L^2. Assim, se $\varphi \in L^2$, φ é expressada como $\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) z^n$, onde $\widehat{\varphi}(n)$ denota o n-ésimo coeficiente de Fourier de φ.

Denota-se por φ_+ e φ_- as partes positiva e negativa de φ, respectivamente

$$\varphi_+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) z^n, \ \varphi_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\widehat{\varphi}(-n)} z^n, \ e\ \varphi_0(z) = \widehat{\varphi}(0) e_0,$$

Portanto, $\varphi = \varphi_+ + \varphi_0 + \overline{\varphi_-}$.

Observação 3.8. *A família de operadores $C_{\mu,\lambda}$ sobre $\mathcal{H}^2$ definido por*

$$C_{\mu,\lambda} f(z) = \mu \overline{f(\lambda \overline{z})}, \ com \quad \mu, \lambda \in S^1,$$

são conjugações, pois dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *e* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *em* $\mathcal{H}^2$*, tem-se*

$$\begin{aligned}
\langle C_{\mu,\lambda} f(z), C_{\mu,\lambda} g(z)\rangle &= \left\langle \mu\overline{f(\lambda\overline{z})}, \mu\overline{g(\lambda\overline{z})}\right\rangle = \left\langle \overline{f(\lambda\overline{z})}, \overline{g(\lambda\overline{z})}\right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda\overline{z})^n}, \overline{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda\overline{z})^n}\right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}\overline{\lambda}^n b_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n \\
&= \langle g(z), f(z)\rangle .
\end{aligned}$$

Lema 3.9. *Para cada* ξ *e* θ *em* $[0, 2\pi]$*, seja* $C_{\xi,\theta} : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ *definida por*

$$C_{\xi,\theta} f(z) = e^{i\xi}\overline{f(e^{i\theta}\overline{z})}.$$

Então, $C_{\xi,\theta}$ *é uma conjugação sobre* $\mathcal{H}^2$*. Mais ainda,* $C_{\xi,\theta}$ *e* $C_{\tilde{\xi},\tilde{\theta}}$ *são unitariamente equivalentes, se* (ξ, θ) *e* $(\tilde{\xi}, \tilde{\theta})$ *satisfazem a equação*

$$\tilde{\xi} - k\tilde{\theta} = -\xi + k\theta - 2n\pi$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Demonstração. Defina $V : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$ por $Vh(z) = e^{i\xi}h(e^{i\theta}z)$ para cada ξ e θ, então dadas $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ em $\mathcal{H}^2$

$$\begin{array}{llllll}
V^* : & \mathcal{H}^2 & \longrightarrow & \mathcal{H}^2 & & \\
& f(z) & \longmapsto & V^*f(z): & \mathcal{H}^2 & \longrightarrow \mathbb{C} \\
& & & & l(z) & \longmapsto \langle V^*f(z), l(z)\rangle = \langle f(z), Vl(z)\rangle.
\end{array}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\langle f(z), Vl(z)\rangle &= \langle f(z), e^{i\xi} l(e^{i\theta}z)\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-i\xi}\overline{b_n} e^{-in\theta} \\
&= \langle e^{-i\xi} f(e^{-i\theta}z), l(z)\rangle.
\end{aligned}$$

Daí, $V^*f(z) = e^{-i\xi}f(e^{-i\theta}z)$, assim V é unitário pois

$$V^*Vf(z) = V^*(e^{i\xi}f(e^{i\theta}z)) = e^{-i\xi}e^{i\xi}f(e^{i\theta}e^{-i\theta}z) = f(z) = VV^*f(z).$$

Como $(\tilde{\xi}, \tilde{\theta})$ satisfaz a equação $\tilde{\xi} - k\tilde{\theta} = -\xi + k\theta - 2n\pi$ segue que se

$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_j z^j$,

$$\begin{aligned} \left\langle e^{i\xi}h(e^{-i\theta}\overline{z}) - e^{-i\tilde{\xi}}h(e^{i\tilde{\theta}}\overline{z}), \overline{z}^k \right\rangle &= \left\langle e^{i\xi}\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-ji\theta}\overline{z}^j - e^{-i\tilde{\xi}}\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\tilde{\theta}}\overline{z}^j, \overline{z}^k \right\rangle \\ &= e^{i\xi}a_k e^{-ki\theta} - e^{-i\tilde{\xi}}a_k e^{ik\tilde{\theta}} \\ &= a_k\left(e^{i(\xi - k\theta)} - e^{i(-\tilde{\xi}+k\tilde{\theta})}\right) = 0 \end{aligned}$$

quando $a_k \neq 0$. Então $e^{i\xi}h(e^{-i\theta}\overline{z}) = e^{-i\tilde{\xi}}h(e^{i\tilde{\theta}}\overline{z})$ ou equivalentemente

$$e^{-i\xi}\overline{h(e^{-i\theta}\overline{z})} = e^{i\tilde{\xi}}\overline{h(e^{i\tilde{\theta}}\overline{z})}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V^*C_{\xi,\theta}Vh(z) &= V^*C_{\xi,\theta}(e^{i\xi}h(e^{i\theta}z)) = V^*\left(e^{i\xi}\overline{e^{i\xi}h\left(e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}z}\right)}\right) \\ &= V^*\left(\overline{h\left(\overline{z}\right)}\right) = e^{-i\xi}\overline{h\left(e^{-i\theta}\overline{z}\right)} = e^{i\tilde{\xi}}\overline{h\left(e^{i\tilde{\theta}}\overline{z}\right)} = C_{\tilde{\xi},\tilde{\theta}}h(z), \end{aligned}$$

para todo $h \in \mathcal{H}^2$, assim $C_{\xi,\theta}$ e $C_{\tilde{\xi},\tilde{\theta}}$ são unitariamente equivalentes. $\square$

O seguinte teorema caracteriza os operadores Toeplitz simétricos complexos com respeito à conjugação $C_{\xi,\theta}$.

Teorema 3.10. *Para $\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n)z^n \in L^\infty$, seja T_φ um operador Toeplitz sobre $\mathcal{H}^2$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) T_φ é simétrico complexo com a conjugação $C_{\xi,\theta}$.

(ii) $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $|\lambda| = 1$

Demonstração. Seja $C_{\xi,\theta}f(z) = e^{i\xi}\overline{f(e^{i\theta}\overline{z})}$ para todo ξ e θ. Chamando $\mu = e^{i\xi}$ e $\lambda = e^{i\theta}$ tem-se

$$C_{\xi,\theta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \mu\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \overline{z}^k} = \mu\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k \overline{\lambda}^k,$$

para todo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{H}^2$ com $|\lambda| = |\mu| = 1$. Assuma que T_φ é simétrica complexa com a conjugação $C_{\xi,\theta}$. Tem-se

$$\begin{aligned} C_{\xi,\theta}T_\varphi z^k &= C_{\xi,\theta}P\left(\varphi(z)z^k\right) = C_{\xi,\theta}P\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(n)z^{n+k}\right) \\ &= C_{\xi,\theta}\left(\sum_{n=-k}^{\infty}\widehat{\varphi}(n)z^{n+k}\right) \\ &= \mu\sum_{n=-k}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(n)}z^{n+k}\overline{\lambda}^{n+k}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{aligned} T_\varphi^* C_{\xi,\theta}z^k &= T_{\overline{\varphi}}\left(\mu z^k\overline{\lambda}^k\right) = P\left(\overline{\varphi(z)}\mu z^k\overline{\lambda}^k\right) \\ &= P\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(n)}z^{-n+k}\mu\overline{\lambda}^k\right) \\ &= P\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(-n)}z^{n+k}\mu\overline{\lambda}^k\right) \\ &= \mu\sum_{n=-k}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(-n)}z^{n+k}\overline{\lambda}^k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Assim para todo inteiro k não negativo segue que $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $|\lambda| = 1$.

Suponha agora que $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)\lambda^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $|\lambda| = 1$. Como $|\mu| = 1$ segue que μ é não nulo.

De (3.1) e (3.2) tem-se

$$\begin{aligned} (C_{\xi,\theta}T_\varphi - T_\varphi^*C_{\xi,\theta})z^k &= \sum_{n=-k}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(n)}\mu\overline{\lambda}^{n+k}z^{n+k} - \sum_{n=-k}^{\infty}\overline{\widehat{\varphi}(-n)}\mu\overline{\lambda}^k z^{n+k} \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty}\left(\overline{\widehat{\varphi}(n)}\overline{\lambda}^{n+k} - \overline{\widehat{\varphi}(-n)}\overline{\lambda}^k\right)\mu z^{n+k} \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty}\left(\overline{\widehat{\varphi}(n)}\overline{\lambda}^{n+k} - \overline{\widehat{\varphi}(n)}\overline{\lambda}^{n+k}\right)\mu z^{n+k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, T_φ é um operador simétrico complexo com conjugação $C_{\xi,\theta}$. $\square$

Observação 3.11. *Se ψ é uma função real em L^∞, então $\psi = \overline{\psi}$, assim*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(n)e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(n)}e^{-in\theta}.$$

Daí, $\hat{\psi}(-n) = \overline{\hat{\psi}(n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.12. *Seja $\varphi \in L^\infty$ tal que $\varphi = \varphi_+ + \varphi_0 + \overline{\varphi_-}$, se T_φ é simétrica complexa com a conjugação $C_{\xi,\theta}$, então T_φ é normal se, e somente se, para algum ξ , $\overline{\widehat{\varphi}(n)} = e^{i(\xi+n\theta)}\widehat{\varphi}(n)$ para todo inteiro n diferente de zero.*

Demonstração. Seja $\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}$ a representação em séries de Fourier de φ. Se T_φ é simétrico complexo com conjugação $C_{\xi,\theta}$, segue pelo Teorema 3.10 que

$$\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta} \tag{3.3}$$

para todo n inteiro e algum θ.

Agora, usando o Corolário 2.26 tem-se que T_φ é normal se, e somente se, existe números complexos β e α, e uma função de valor real ψ em L^∞ tal que $\varphi = \beta\psi + \alpha$ q.t.p, o que equivale dizer que

$$\widehat{\varphi}(n) = \beta\widehat{\psi}(n)\; q.t.p \;\text{ para todo n inteiro diferente de zero.} \tag{3.4}$$

Usando a Observação 3.11, a fórmula (3.4) é equivalente a

$$\overline{\widehat{\varphi}(-n)} = \overline{\beta}\overline{\widehat{\psi}(-n)} = \overline{\beta}\widehat{\psi}(n) = \frac{\overline{\beta}}{\beta}\widehat{\varphi}(n),$$

para todo n diferente de zero.

Chamando $\dfrac{\overline{\beta}}{\beta} = \lambda$, note que λ tem módulo 1, assim T_φ é normal se, e somente se,

$$\overline{\widehat{\varphi}(-n)} = \lambda\widehat{\varphi}(n) \tag{3.5}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$.

Logo usando as fórmulas (3.3) e (3.5) obtém-se que T_φ é normal se, e somente se, $\overline{\widehat{\varphi}(n)e^{-in\theta}} = \lambda\widehat{\varphi}(n)$.

Tomando $\lambda = e^{i\xi}$ para algum ξ, T_φ é normal se, e somente se, $\overline{\widehat{\varphi}(n)} = e^{i(n\theta+\xi)}\widehat{\varphi}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. □

3.2 Operadores Toeplitz complexo simétricos com símbolo finito

Para continuar com o estudo dos operadores Toeplitz simétricos complexos, agora com símbolos finitos, se faz necessário enunciar o seguinte lema.

Lema 3.13. *Se* $\varphi(z) = \sum_{n=-m}^{N} \widehat{\varphi}(n)z^n$*, então* T_φ *é normal se, e somente se,* $m = N$*,* $|\widehat{\varphi}(-m)| = |\widehat{\varphi}(m)|$ *e*

$$\overline{\widehat{\varphi}(m)} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(-1) \\ \widehat{\varphi}(-2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(-m) \end{pmatrix} = \widehat{\varphi}(-m) \begin{pmatrix} \overline{\widehat{\varphi}(1)} \\ \overline{\widehat{\varphi}(2)} \\ \vdots \\ \overline{\widehat{\varphi}(m)} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Se T_φ é normal então pelo Corolário 2.26 existem $c, d \in \mathbb{C}$ e uma função de valor real ψ em L^∞ tal que $T_\varphi = cT_\psi + d$ q.t.p.

Com a representação em séries de Fourier de ψ, isto é, $\psi(z) = \sum_{n=-m}^{N} \widehat{\psi}(n)e^{in\theta}$ tem-se que $\widehat{\varphi}(n) = c\widehat{\psi}(n)$ para todo n inteiro diferente de zero.

Pelo fato de ψ ser real q.t.p, os coeficientes de Fourier para ψ satisfazem

$\widehat{\varphi}(n) = \overline{\widehat{\varphi}(-n)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, em particular

$$\overline{\widehat{\varphi}(N)} = \overline{c}\,\overline{\widehat{\psi}(N)} = \overline{c}\,\widehat{\psi}(-N) = \frac{\overline{c}}{c}\,\widehat{\varphi}(-N)$$

e

$$\overline{\widehat{\varphi}(-N)} = \overline{c}\,\overline{\widehat{\psi}(-N)} = \overline{c}\,\widehat{\psi}(N) = \frac{\overline{c}}{c}\,\widehat{\varphi}(N)$$

o que implica

$$|\widehat{\varphi}(N)|^2 = \widehat{\varphi}(N)\overline{\widehat{\varphi}(N)} = \frac{c}{\overline{c}}\,\overline{\widehat{\varphi}(-N)}\frac{\overline{c}}{c}\,\widehat{\varphi}(-N) = \overline{\widehat{\varphi}(-N)}\widehat{\varphi}(-N) = |\widehat{\varphi}(-N)|^2.$$

Assim, $N = m$ e (3.6) é obtido.

Agora, seja a matriz de representação para T_φ e T_φ^*, respectivamente, dada por $(B_{i,j})_{ij} = (\widehat{\varphi}(i-j))_{ij}$ e $(C_{ij})_{ij} = (\overline{\widehat{\varphi}(j-i)})_{ij}$ com $j = 1, .., m+1$ e $i = 1, .., N+1$.

Então,

$$(B_{ij})_{ij}(C_{ij})_{ij} = \sum_{k=1}^{m+1} b_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{m+1} \widehat{\varphi}(i-k)\overline{\widehat{\varphi}(j-k)}.$$

Se $m = N$, $|\widehat{\varphi}(-N)| = |\widehat{\varphi}(N)|$ e

$$\overline{\widehat{\varphi}(N)} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(-1) \\ \widehat{\varphi}(-2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(-N) \end{pmatrix} = \widehat{\varphi}(-N) \begin{pmatrix} \overline{\widehat{\varphi}(1)} \\ \overline{\widehat{\varphi}(2)} \\ \vdots \\ \overline{\widehat{\varphi}(N)} \end{pmatrix}$$

Claramente, obtém-se

$$\sum_{k=1}^{m+1} \widehat{\varphi}(i-k)\overline{\widehat{\varphi}(j-k)} = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\widehat{\varphi}(k-i)}\widehat{\varphi}(k-j) = (c_{ij})_{ij}(b_{ij})_{ij}$$

Logo as matrizes de representação de T_φ e T_φ^* comutam, portanto, T_φ é um operador normal. $\square$

Teorema 3.14. *Seja $\varphi(z) = \sum_{n=-m}^{N} \widehat{\varphi}(n)z^n$ onde $N \geq m > 0$ e $\widehat{\varphi}(n) \in \mathbb{C}$ com $\widehat{\varphi}(-m), \widehat{\varphi}(N)$ diferentes de zero. Então, T_φ é complexo simétrico com a conjugação $C_{\xi,\theta}$ se, e somente se, $m = N$ e para algum θ, $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}$ para todo $n = 1, 2, ..., N$. Em particular, T_φ é normal se, e somente se, $\widehat{\varphi}(-m) = \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta}$ e*
$\overline{\widehat{\varphi}(m)}\widehat{\varphi}(k) = e^{i(m-k)\theta}\widehat{\varphi}(m)\overline{\widehat{\varphi}(k)}$ para todo $k = 1, 2, ..., m-1$.

Demonstração. A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 3.10, aproveita-se então as contas. Seja $C_{\xi,\theta}f(z) = e^{i\xi}\overline{f(e^{i\theta}\overline{z})}$ para todo ξ e θ, então

$$C_{\xi,\theta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right) = \mu\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k \overline{z}^k} = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k \overline{\lambda}^k,$$

para todo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{H}^2$ com $|\lambda| = |\mu| = 1$.

Assuma que T_φ é simétrico complexo com a conjugação $C_{\xi,\theta}$. Tem-se

$$\begin{aligned} C_{\xi,\theta}T_\varphi z^k &= C_{\xi,\theta}P\left(\varphi(z)z^k\right) = C_{\xi,\theta}P\left(\sum_{n=-m}^{N} \widehat{\varphi}(n)z^{n+k}\right) \\ &= C_{\xi,\theta}\left(\sum_{n=-k}^{N} \widehat{\varphi}(n)z^{n+k}\right) \\ &= \mu \sum_{l=0}^{N+k} \overline{\lambda}^l \overline{\widehat{\varphi}(l-k)} z^l \\ &= \mu \sum_{n=-k}^{N} \overline{\lambda}^{n+k} \overline{\widehat{\varphi}(n)} z^{n+k}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned} T_\varphi^* C_{\xi,\theta} z^k &= T_{\overline{\varphi}}\left(\mu z^k \overline{\lambda}^k\right) = P\left(\overline{\varphi(z)}\mu z^k \overline{\lambda}^k\right) \\ &= P\left(\sum_{n=-m}^{N} \overline{\widehat{\varphi}(n)} z^{-n+k} \mu \overline{\lambda}^k\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$= P\left(\sum_{n=-N}^{m} \overline{\widehat{\varphi}(-n)} z^{n+k} \mu \overline{\lambda}^{k}\right)$$

$$= \mu \sum_{n=-k}^{m} \overline{\widehat{\varphi}(-n)} z^{n+k} \overline{\lambda}^{k}.$$

Segue que $N = m$ e $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)\lambda^n$ para $n = 1, 2, .., N$ com $|\lambda| = 1$.

Suponha agora que $N = m$ e $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)\lambda^n$ para todo $n = 1, 2, .., N$ com $|\lambda| = 1$.

Como $|\mu| = 1$ segue que μ é não nulo. De (3.7) e (3.8) tem-se

$$\begin{aligned}
(C_{\xi,\theta}T_{\varphi} - T_{\varphi}^{*}C_{\xi,\theta})z^k &= \sum_{n=-k}^{N} \overline{\widehat{\varphi}(n)} \mu \overline{\lambda}^{n+k} z^{n+k} - \sum_{n=-k}^{m} \overline{\widehat{\varphi}(-n)} \mu \overline{\lambda}^{k} z^{n+k} \\
&= \sum_{n=-k}^{N} \left(\overline{\widehat{\varphi}(n)}\,\overline{\lambda}^{n+k} - \overline{\widehat{\varphi}(-n)}\,\overline{\lambda}^{k}\right) \mu z^{n+k} \\
&= \sum_{n=-k}^{N} \left(\overline{\widehat{\varphi}(n)}\,\overline{\lambda}^{n+k} - \overline{\widehat{\varphi}(n)}\,\overline{\lambda}^{n+k}\right) \mu z^{n+k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, T_{φ} é um operador simétrico complexo com conjugação $C_{\xi,\theta}$.

Agora, usando o Lema 3.13 tem-se T_{φ} é normal se, e somente se, $m = N$, $|\widehat{\varphi}(-m)| = |\widehat{\varphi}(m)|$ e

$$\overline{\widehat{\varphi}(m)} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(-1) \\ \widehat{\varphi}(-2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(-m) \end{pmatrix} = \widehat{\varphi}(-m) \begin{pmatrix} \overline{\widehat{\varphi}(1)} \\ \overline{\widehat{\varphi}(2)} \\ \vdots \\ \overline{\widehat{\varphi}(m)} \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Como T_{φ} é um operador Toeplitz simétrico complexo com a conjugação $C_{\xi,\theta}$, segue como provado anteriormente que $\widehat{\varphi}(-n) = \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta}$ para $n = 1, 2, .., N$, portanto, de (3.9) T_{φ} é normal se, e somente se, $\widehat{\varphi}(-m) = \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta}$ e

$$\overline{\widehat{\varphi}(m)} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(1)e^{i\theta} \\ \widehat{\varphi}(2)e^{i2\theta} \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta} \end{pmatrix} = \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta} \begin{pmatrix} \overline{\widehat{\varphi}(1)} \\ \overline{\widehat{\varphi}(2)} \\ \vdots \\ \overline{\widehat{\varphi}(m)} \end{pmatrix},$$

equivalentemente, é normal se $\widehat{\varphi}(-m) = \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta}$ e

$\overline{\widehat{\varphi}(m)}\widehat{\varphi}(k)e^{ik\theta} = \widehat{\varphi}(m)e^{im\theta}\overline{\widehat{\varphi}(k)}$ para todo $k = 1, 2, ..., m-1$, o que conclui a prova.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] G. Botelho e D. Pelegrino, E. Teixeira. ***Fundamentos de Análise Funcional.*** *Rio de Janeiro: SBM, 2012.*

[2] A. Brown, P.R. Halmos, ***Algebraic properties of Toeplitz operators.*** *J. Reine Angew. Math., 213 (1964), 89-102.*

[3] H. Brezis ***Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.****.Springer, New York, 2011.*

[4] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, ***Um curso de álgebra linear.*** *São Paulo: EdUSP, 2007.*

[5] J. B. Conway, ***A course in Functional Analysis.*** *second edition, Springer, New York, 1990.*

[6] J. B. Conway, ***Functions of One Complex Variable.*** *second edition, Springer, New York, 1978.*

[7] R. G. Douglas, ***Banach Algebra Techniques in Operator Theory.*** *Graduate Texts in Mathematics, vol. 179, Springer-Verlag New York, 1998.*

[8] D.R. Farenick e W.Y. Lee, ***Hyponormality and spectra of Toeplitz operators.*** *Trans. Amer. Math. Soc. 384 (1996) 4153-4174.*

[9] S. R. Garcia e M. Putinar, ***Complex symmetric operators and applications.*** *Trans. Amer. Math. Soc., 358(3): (2006) 1285-1315 (electronic).*

[10] S. R. Garcia e M. Putinar, ***Complex symmetric operators and applications.*** *II. Trans. Amer. Math. Soc., 359(8): (2007) 3913-3931 (electronic).*

[11] K. Guo, S. Zhu, ***A canonical decomposition of complex symmetric operators.*** *J. Operator Theory, 72, (2014) 529-547.*

[12] P. R. Halmos, ***A Hilbert Space Problem Book.*** *second edition, Springer, New York, 1982.*

[13] E. Ko e J. Lee, ***On complex symmetric Toeplitz operators.*** *J. Math. Anal. Appl.,434 (2016), 20-34.*

[14] R. A. Martínez-Avendaño, P. Rosenthal, ***An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space.*** *Graduate Texts in Mathematics, vol. 237, Springer-Verlag New York, 2007.*

[15] C. R. Oliveira ***Introdução À Análise Funcional.****Projeto Euclides, IMPA, 2012.*

[16] S. Waleed Noor ***Complex symmetry of Toeplitz operators with continuous symbols.****Arch. Math. 109 (2017), 455-460.*