

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

JHENIPHER CLEYTON FAGNER TEIXEIRA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $M^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022

JHENIPHER CLEYTON FAGNER TEIXEIRA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $M^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

Coorientador: Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

T266s
2022
Teixeira, Jhenipher Clayton Fagner, 1994-
Superfícies mínimas em $M^2 \times \mathbb{R}$ / Jhenipher Clayton Fagner
Teixeira. – Viçosa, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (70 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Ady Cambraia Junior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2022.

Referências bibliográficas: f. 69-70.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.706>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria riemanniana. 2. Geometria hiperbólica.
3. Curvas em superfícies. 4. Superfícies mínimas. 5. Funções
especiais. I. Cambraia Junior, Ady, 1980-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 516.373

Bibliotecário(a) responsável: Euzébio Luiz Pinto CRB-6/3317


JHENIPHER CLEYTON FAGNER TEIXEIRA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $M^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$


Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 02 de setembro de 2022.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
 JHENIPHER CLEYTON FAGNER TEIXEIRA
Data: 01/12/2022 10:01:15-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Jhenipher Cleyton Fagner Teixeira
Autor

Documento assinado digitalmente
 ADY CAMBRAIA JUNIOR
Data: 01/12/2022 09:55:29-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Ady Cambraia Junior
Orientador

Agradecimentos

Para começar quero agradecer a Deus pela força que me deu para conseguir finalizar meu mestrado.

Aos meus pais José Teixeira e Luciana Moreira, que sempre estiveram ao meu lado apoiando ao longo de toda minha trajetória. Sou grato por me incentivarem e acreditarem que seria capaz de superar os obstáculos. Obrigado por todo o esforço investido na minha educação, confiança no meu progresso e apoio emocional.

As minhas irmãs, Ariele, Beatriz e Dillian, por estarem ao meu lado e me ajudarem sempre que precisei.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação. Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelos conhecimentos compartilhados e serviços prestados.

Em especial quero agradecer aos meus orientadores Ady(UFV) e Carlos(UFRJ) por todo o profissionalismo, disponibilidade e prontidão para me ajudar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Por fim, agradeço À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pela concessão da bolsa de estudos.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

(Jacques Bernoulli)

Resumo

TEIXEIRA, Jhenipher Cleyton Fagner Teixeira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2022. **Superfícies Mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$** . Orientador: Ady Cambraia Junior. Coorientador: Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel.

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de uma família de superfícies rotacionais mínimas imersas no produto distorcido (warped product) $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ é uma forma espacial de curvatura não positiva, \mathbb{R} é o conjunto dos números reais e f a função de deformação conhecida como warping function. Mais precisamente, apresentamos uma descrição completa da curva geradora de cada superfície rotacional mínima quando a warping function satisfaz alguns dados admissíveis.

Palavras-chave: Warped products. Superfícies rotacionais. Superfícies invariantes. Superfícies de Weingarten.

Abstract

TEIXEIRA, Jhenipher Cleyton Fagner Teixeira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September 2022. **Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$** . Advisor: Ady Cambraia Junior. Co-advisor: Carlos Diosdado Espinoza Peñafiel.

In this work we study the existence and uniqueness of a family of minimal rotational surfaces immersed in the warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, where $\mathbb{M}^2(\kappa)$ is a space form of non-positive curvature, \mathbb{R} is the set of real numbers and f is the warping function. More precisely, we present a complete description of the generating curve of each minimal rotational surface when the warping function satisfies some admissible data.

Keywords: Warped products. Rotational surfaces. Invariant surfaces. Weingarten surfaces.

Lista de Figuras

1.1	Semiplano de Poincaré.	26
1.2	Inversão pelo círculo C	35
1.3	Geodésica de \mathbb{H}^2	38
1.4	Exemplos de geodésicas completas.	39
1.5	Exemplos de geodésicas paralelas.	39
1.6	Horociclos de \mathbb{H}^2	41
1.7	Isometria hiperbólica	43
1.8	Isometria parabólica com $x_1 = \infty$	45
1.9	Isometria parabólica com $x_1 \in \mathbb{R}$	46
1.10	Isometria elíptica	46
2.1	Curva γ que gera uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}$	66
2.2	Curva γ que gera uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{H}^2 \times_f \mathbb{R}$	67

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
Preliminares	11
1.1 Teoria geral da geometria Riemanniana	11
1.1.1 Imersão Isométricas	20
1.2 Warped Products	23
1.3 Geometria Hiperbólica Plana	26
1.3.1 Inversão	34
1.3.2 Isometrias de \mathbb{H}^2	35
1.3.3 Classificação das isometrias positivas de \mathbb{H}^2	41
1.4 Preliminares	48
2 Superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$	49
2.1 O espaço ambiente $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$	49
2.2 Teorema de existência e unicidade	51
2.3 Geometria da curva $\gamma(s)$ e sua completude	56
Considerações Finais	68
Referências Bibliográficas	70

Introdução

As superfícies de Weingarten imersas em variedades tridimensionais é um tema de grande interesse entre os matemáticos. É um caso interessante quando a superfície de Weingarten é uma superfície especial de Weingarten de tipo minimal. Por exemplo, em [7] os autores provaram a existência e unicidade de f_0 superfícies simétricas rotacionais imersas no espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , e mais recentemente no artigo [11] o estudo de tais f_0 superfícies rotacionais foi estendido para as variedades $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}^2 são o espaço hiperbólico bidimensional e a esfera unitária euclidiana bidimensional.

Nosso interesse pelas superfícies rotacionais mínimas vem, além de sua naturalidade, do fato que existem muito poucos exemplos explícitos de tais superfícies imersas em warped products em geral.

Nesta dissertação, para uma warping function f iremos considerar o warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ com coordenadas $(x, y, t) \in \mathbb{M}^2 \times_f \mathbb{R}$ e métrica $\bar{g} = dx^2 + dy^2 + e^{2f(x,y)} dt^2$. Observe que quando $f \equiv 0$ o espaço ambiente é o \mathbb{R}^3 , onde as superfícies mínimas rotacionais são parte integrante das superfícies especiais de Weingarten de tipo minimal, que foram apresentadas em [7]. Portanto, os resultados apresentados no capítulo 2 deste trabalho, seguem, a menos das peculiaridades de cada espaço ambiente, as ideias apresentadas em [7].

Considere coordenadas polares em $\mathbb{M}^2(\kappa)$, ou seja,

$$\begin{cases} x &= \rho_{(\kappa)} \cos(\omega) \\ y &= \rho_{(\kappa)} \sin(\omega) \end{cases}$$

onde

- se $\kappa = -1$ temos $\rho_{(\kappa)} = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)$;
- se $\kappa = 0$ temos $\rho_{(\kappa)} = \rho$.

com $\rho \in (0, +\infty)$ e $\omega \in [0, 2\pi)$. Nessas coordenadas a métrica \bar{g} passa a ser dada por $\bar{g} = d\rho^2 + h^2(\rho)d\omega^2 + e^{2f(\rho_{(\kappa)} \cos(\omega), \rho_{(\kappa)} \sin(\omega))} dt^2$

Nosso objetivo é trabalhar com a família de warped product onde f é admissível. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição. Para o warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ dizemos que a warping function $f : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ é admissível se é limitada e existe $c, d \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $0 < c < f_\rho(s) < d$ para todo $s \in \mathbb{M}^2(\kappa)$.

O teorema principal afirma que se existir $\rho_0 > 0$ um número real positivo que verifica $f_\rho(\rho_0) + \frac{h_\rho(\rho_0)}{h(\rho_0)} > 0$, então existe uma única superfície mínima Σ cuja a curva geradora é o gráfico de uma função suave.

Teorema (Teorema Principal). *Seja $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde a função warping $f : \mathbb{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é admissível e para cada ρ_0 satisfazendo $f_\rho(\rho_0) + \frac{h_\rho(\rho_0)}{h(\rho_0)} > 0$, existe uma superfície mínima Σ_γ imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ gerada por uma curva γ que é o gráfico de uma função positiva $\rho = \rho(t)$ e $\rho(0) = \rho_0$. A função $\rho(t)$ é definida no intervalo (\hat{t}_0, \hat{t}_1) para algum número $\hat{t}_0 < 0 < \hat{t}_1$ e tem as seguintes propriedades geométricas:*

1. *O gráfico $\rho(t)$ tem um mínimo global em $t = 0$ e não tem um máximo local;*
2. *A função $\rho(t)$ é estritamente crescente em $(0, \hat{t}_1)$ e estritamente decrescente em $(\hat{t}_0, 0)$;*
3. *O gráfico $\rho(t)$ converge para a reta $t = \hat{t}_1$ e $t = \hat{t}_0$ quando t converge para \hat{t}_1 e \hat{t}_0 , respectivamente;*
4. *O gráfico $\rho(t)$ é concavo para cima em (\hat{t}_0, \hat{t}_1) .*

O presente trabalho está dividido em duas partes. No capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre geometria Riemanniana, uma breve apresentação sobre warped products e uma revisão detalhada sobre geometria hiperbólica plana. No capítulo 2 apresentamos as superfícies mínimas rotacionais em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ e resultados sobre a geometria da curva e sua completude.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão da teoria básica da geometria Riemanniana, definimos os warped products e enunciamos algumas propriedades e resultados destes ambientes e finalizamos o capítulo com uma revisão detalhada sobre a geometria hiperbólica plana. Os livros utilizados como referências e as demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas em [1], [3], [4], [5], [8], [10], [12] e [13].

1.1 Teoria geral da geometria Riemanniana

Nesta seção apresentamos a definição de variedade diferenciável, campos de vetores, métricas Riemanniana, conexão afim e conexão Riemannianas.

A noção de variedades diferenciáveis é necessária para estender os métodos do cálculo diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n . Antes de definir as variedades diferenciáveis vamos relembrar a definição de superfície regular do \mathbb{R}^3 :

Definição 1.1. *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para todo ponto $p \in S$ existem uma vizinhanças V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$, tais que:*

1. *x é um homeomorfismo diferenciável;*
2. *A diferencial $(dx)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva para todo $q \in U$.*

A consequência mais importante da definição de superfície regular é o fato que as mudanças de parametrizações é um difeomorfismo, mais precisamente, se $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \subset S$ e $x_\beta : U_\beta \rightarrow x_\beta(U_\beta) \subset S$ são duas parametrizações tais que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ então as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{R}^2$ são diferenciáveis. Mas, o defeito de tal definição é a dependência da relação ao \mathbb{R}^3 . Então precisamos de uma definição mais geral, que é dada a seguir:

Definição 1.2. Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações bijetivas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_\alpha(U_\alpha) \subset M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ é diferenciável;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições 1 e 2.

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização de M em p , $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada de vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo as condições 1 e 2 da Definição 1.2 é chamada de estrutura diferenciável em M . De agora em diante, quando indicarmos uma variedade por M^n , o índice superior n indicará a dimensão de M . Precisamos estender a noção de diferencialidade de aplicações entre variedades.

Definição 1.3. Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x(U) \subset M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Diremos que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se ela é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Gostaríamos ainda de estender às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente. Para tal, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de \mathbb{R}^n com $\alpha(0) = p$, escreva $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, assim $\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$ e considere f uma função real diferenciável definida numa vizinhança de p . Podemos restringir f a curva α e escrever a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \cdot \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

onde $x'_i(0) = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0}$. Portanto, a derivada direcional segundo v é um operador sobre as funções diferenciáveis que dependem unicamente de v . Esta propriedade será usada para definirmos vetor tangentes em variedades.

Definição 1.4. Seja M uma variedade diferenciável. Uma curva diferenciável em M é uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$. Suponha que $\alpha(0) = p$ e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto de vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM .

Em coordenadas, seja $x : U \rightarrow M^n$ uma parametrização em $p = x(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ e } x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Restringindo f à α obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \right|_{t=0} \cdot \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{t=0} f, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização x por

$$\alpha'(0) = \sum x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{t=0}.$$

Note que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{t=0}$ é o vetor tangente a p à curva coordenada $x_i \rightarrow x(0, 0, \dots, x_i, \dots, 0)$.

A expressão $\alpha'(0) = \sum x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{t=0}$ mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Ainda, o conjunto T_pM com as operações usuais de funções forma um espaço vetorial de dimensão n , e que a escolha de uma parametrização $x : U \rightarrow M$ determina uma base coordenada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{t=0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_{t=0} \right\}$.

Com a noção do espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Defina $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α*

Demonstração. Ver [4], pág 10.

Definição 1.5. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição 1.1 é chamada de diferencial de φ em p .*

Definição 1.6. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo ponto $p \in M$.*

Definição 1.7. *Seja M uma variedade diferenciável. Dizemos que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que para todo α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ a diferencial da mudança de coordenada $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo. Caso contrário, dizemos que M é não orientável.*

Definição 1.8. *Um campo de vetores de X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$, isto é, X é uma aplicação de M no fibrado tangente $TM = \{(p, v), p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$. Dizemos que o campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ for diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é a base associada x , com $i = 1, \dots, n$.

Podemos olhar o campo de vetores como uma aplicação de $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, onde \mathcal{D} é o conjunto das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M definida como

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f \in \mathcal{D} \tag{1.1}$$

É válido observar que a função Xf obtida na equação (1.1) não depende da escolha da parametrização x . A interpretação de X com um operador de \mathcal{D} permite considerar os iterados de X . Se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais por envolverem derivadas de ordem superior a primeira, porém podemos afirmar o seguinte:

Lema 1.1. *Sejam X, Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Demonstração. Ver [4], pág 28.

Definição 1.9. *O campo vetorial Z dado pelo Lema 1.1 é chamado de colchete $[X, Y]$.*

A operação colchete goza das seguintes propriedades:

Proposição 1.2. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais e f, g funções diferenciáveis então:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*);
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*);
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*);
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Ver [4], pág 29.

Como uma variedade diferenciável é localmente difeomorfa a um \mathbb{R}^n , o teorema fundamental de dependências das condições iniciais das equações diferenciais ordinárias se estende naturalmente a variedades e, para uso posteriores, iremos enunciar abaixo:

Teorema 1. *Seja X um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável M e $p \in M$. Então existem uma vizinhança $U \subset M$ de p , um intervalo $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, e uma aplicação diferenciável $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$ tais que a curva $t \rightarrow \varphi(t, q)$, $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in U$, é a única curva que satisfaz $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$ e $X(\varphi(0, q)) = q$.*

Precisamos agora introduzir a cada ponto de uma variedade diferenciável M uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que varia diferenciavelmente. Começemos introduzindo a noção de medida:

Definição 1.10. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_p M$ que varia de forma diferenciável, ou seja, se $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno do ponto p , com $\Phi(x_1, \dots, x_n) = q \in \Phi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\Phi(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

É válido notar que tal definição não depende da escolha do sistema de coordenadas. As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e ainda uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.

Agora que definimos tal estrutura, precisamos estabelecer uma noção de equivalência para tais estruturas.

Definição 1.11. *Sejam M, N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo (isto é, uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) $f : M \rightarrow N$ é chamado de isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

Definição 1.12. *Sejam M, N variedades Riemannianas. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo a equação (1.2).*

Definição 1.13. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dizemos que V é diferenciável se para todo $f \in \mathcal{F}$ a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

Agora que temos uma métrica Riemanniana podemos induzir uma conexão afim na variedade. De agora em diante consideraremos $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel de funções reais de classe C^∞ definida em M .

Definição 1.14. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

que indicaremos por $\nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

A próxima proposição deixará mais claro o conceito de conexão:

Proposição 1.3. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c tal que:*

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$;

3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, ou seja, $V(t) = Y(c(t))$ então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla \frac{dc}{dt} Y$$

Demonstração. Ver [4], pág 57.

Note que o vetor $\nabla_X Y(p)$ depende apenas de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p . Com efeito, considere sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em torno de $p \in M$, assim

$$X = \sum_i x_i X_i \text{ e } Y = \sum_j y_j X_j$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Usando as propriedades da Definição 1.14 temos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \\ &= \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j. \end{aligned}$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k$, temos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k;$$

o que implica que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo p .

Portanto noção de conexão fornece uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas.

Definição 1.15. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado de campo paralelo quando $\frac{D}{dt} V = 0$, para todo $t \in I$.*

Definição 1.16. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita ser compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando para toda curva diferenciável c e quaisquer campos de vetores paralelos P e Q ao longo de c tivermos $\langle P, Q \rangle = \text{constante}$.*

A Definição 1.16 é justificada pela proposição seguinte que mostra que se ∇ for compatível com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então podemos diferenciar o produto interno pela "regra do produto" usual.

Proposição 1.4. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campo de vetores ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \quad t \in I. \quad (1.2)$$

Demonstração. Ver [4], pág 59.

Corolário 1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle \quad \text{onde } X, Y, Z \in \mathcal{X}(M) \quad (1.3)$$

Demonstração. Ver [4], pág 60.

Definição 1.17. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (1.4)$$

Observe que em um sistema de coordenadas locais (U, x) , o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j \in 1, \dots, n$ temos $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$.

Teorema 2 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

1. ∇ é simétrica;
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Inicialmente suponha a existência de tal ∇ . Então:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (1.5)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (1.6)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \quad (1.7)$$

Somando (1.5) e (1.6) e subtraindo (1.7), temos usando a simetria de ∇ que:

$$\begin{aligned}
X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= (\langle Y, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle) + (\langle \nabla_Y Z, X \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle) + \\
&+ (\langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Z, \nabla_Y X \rangle) + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \\
&= \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle =
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \\
&- \langle [X, Y], Z \rangle \}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

A equação 1.9 é chamada de fórmula de Koszul e mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ portanto, caso exista, será única. Para mostrar a existência basta definir ∇ por (1.9), e claramente satisfaz as propriedades e está bem definida. \square

Observação 1.1 (Símbolos de Christoffel). *A conexão dada pelo Teorema 2 é chamada de conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M . Vamos calculá-los em um sistema de coordenadas (U, x) . Note que o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \text{ com } X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.10}$$

As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão. Da fórmula de Koszul, temos

$$\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \text{ onde } g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle. \tag{1.11}$$

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}) , teremos

$$\Gamma_{ij}^m = \sum_k \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \tag{1.12}$$

Definição 1.18. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada*

por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.5. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

1. R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$;
2. Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear.

Demonstração. Ver [4], pág 101.

Proposição 1.6 (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Demonstração. Ver [4], pág 101.

De agora em diante, escreveremos por conveniência, $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$.

Proposição 1.7. 1. $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$;

2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$;
3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$;
4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Demonstração. Ver [4], pág 102.

1.1.1 Imersão Isométricas

Seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão igual a $k = n + m$. A métrica Riemanniana de \overline{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M da seguinte forma:

$$\text{se } v_1, v_2 \in T_p M \text{ defina } \langle v_1, v_2 \rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle.$$

Portanto, vamos definir primeira forma fundamental como $\langle v, v \rangle = I_p$, com $v \in T_p M$.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Isto quer dizer que existe uma vizinhança de $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$, com V é um aberto de \mathbb{R}^k , tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõem na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp \quad (1.13)$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Assim, se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM \text{ e } v^N \in (T_pM)^\perp$$

tal que v^T , v^N são as componentes tangente e normal de v , respectivamente.

A conexão Riemanniana de \overline{M} será indicada por $\overline{\nabla}$. Sejam X e Y campos de vetores em M , \overline{X} e \overline{Y} extensões locais a \overline{M} , definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T \quad (1.14)$$

que é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M . Nosso objetivo é definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \rightarrow \overline{M}$, para tal, precisamos definir a seguinte forma bilinear.

Definição 1.19. *Sejam X e Y campos locais em M . A forma bilinear $B(X, Y) = \nabla_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em \overline{M} normal a M .*

Observe que $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. Denotaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.8. *Sejam $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação*

$$B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow (\mathcal{X}(U))^\perp$$

definida por

$$B(X, Y) = \nabla_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que B é bilinear.

Sejam $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(U)$, $f \in \mathcal{D}(U)$. Usando a propriedade de linearidade da conexão, temos

$$\begin{aligned} B(X_1 + X_2, Y) &= \nabla_{\overline{X_1 + X_2}} \overline{Y} - \nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{\overline{X_1}} \overline{Y} + \nabla_{\overline{X_2}} \overline{Y} - \nabla_{X_1} Y - \nabla_{X_2} Y = \\ &= (\nabla_{\overline{X_1}} \overline{Y} - \nabla_{X_1} Y) + (\nabla_{\overline{X_2}} \overline{Y} - \nabla_{X_2} Y) = B(X_1, Y) + B(X_2, Y) \end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos que $B(X, Y_1 + Y_2)$, e portanto, B é aditiva. Agora

$$B(fX, Y) = \nabla_{\overline{fX}}\overline{Y} - \nabla_{fX}Y = f\nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_XY = fB(X, Y).$$

Seja \overline{f} uma extensão de f a U , temos

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \nabla_{\overline{X}}(\overline{fY}) - \nabla_X(fY) = \{\overline{f}\nabla_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{X}(\overline{f})\overline{Y}\} - \{f\nabla_XY + X(f)Y\} = \\ &= \{\overline{f}\nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X(Y)\} - \{\overline{X}(\overline{f})\overline{Y} - X(f)Y\} \end{aligned}$$

e em M temos $f = \overline{f}$ e $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$. Assim as duas últimas parcelas se anulam donde $B(X, fY) = f(B(X, Y))$. Logo, B é bilinear. Resta mostrar que B é simétrica. Com efeito,

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_XY = \nabla_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_XY + (\nabla_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y\overline{X}) + (\nabla_YX - \nabla_YX) = \\ &= (\nabla_{\overline{Y}}\overline{X}) + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_YX - [X, Y]. \end{aligned}$$

Como em M $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$ concluímos que $B(X, Y) = B(Y, X)$. \square

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas que o valor $B(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Logo, podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, a aplicação

$$H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

onde $x, y \in T_pM$ é, pela Proposição 1.8 uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.20. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η .

Observe que a aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear autoadjunta

$$S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM \text{ dada por } \langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = B\langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.9. Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, N uma extensão local de η normal a M . Então

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Ver [4], pág 142.

Observação 1.2 (Primeira e segunda forma fundamental em coordenadas locais). *Se consideramos o sistema de coordenadas locais (U, X) , temos*

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \end{aligned}$$

tais que os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \bar{g}(X_u, X_u) & e &= \bar{g}(-\bar{\nabla}_{X_u} N, X_u) = \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{X_u} X_u) \\ F &= \bar{g}(X_u, X_v) & e &= \bar{g}(-\bar{\nabla}_{X_u} N, X_v) = \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{X_u} X_v) \\ G &= \bar{g}(X_v, X_v) & e &= \bar{g}(-\bar{\nabla}_{X_v} N, X_v) = \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{X_v} X_v) \end{aligned}$$

onde $\bar{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.2 Warped Products

Nesta seção apresentamos a definição de warped products bem como suas principais propriedades. Todas as provas aqui omitidas podem ser encontradas em [2] e [12].

Considere o produto Riemanniano $B \times F$ com a métrica dada por $\pi(g_B) + \sigma(g_F)$, onde π e σ são as projeções de $B \times F$ sobre B e F , respectivamente.

Definição 1.21. *Sejam B e F variedades Riemannianas e $f > 0$ uma função suave em B . O warped product $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ com a métrica*

$$g = \pi(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma(g_F).$$

Explicitamente, se x é tangente a $B \times F$ em (p, q) então

$$g(x, x) = g(d\pi(x), d\pi(x)) + f^2(p)g(d\sigma(x), d\sigma(x)).$$

Na literatura, B é chamado de base de $M = B \times_f F$ e F a fibra. Nosso objetivo é expressar a geometria de M em termos da warping function f e a geometria de B e F .

Observemos que a fibra $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ e os slice $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$ são subvariedades Riemannianas de M e a warped métrica é caracterizada por

1. Para cada $q \in F$, a aplicação $\pi|(B \times \{q\})$ é uma isometria em B ;
2. Para cada $p \in B$, a aplicação $\sigma|(\{p\} \times F)$ é uma homotetia positiva em F , com fator de escala $\frac{1}{f(p)}$;

3. Para cada $(p, q) \in M$, o slice $B \times \{q\}$ e a fibra $\{p\} \times F$ são ortogonais em (p, q) .

Os vetores tangentes a base e a fibras são horizontais e verticais, respectivamente. A relação do warped product com a base B é relativamente simples, no entanto a relação da fibra F geralmente envolve a warping function f .

Vamos denotar por $\nabla^1, \nabla^2, \bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de B, F , e $B \times_f F$, respectivamente, onde $B \times_f F = (B \times F, \bar{g})$, $\bar{g} = g_1 + f^2 g_2$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Os tensores de curvatura de $B \times_f F, B$ e F são \bar{R}, R^1 e R^2 , respectivamente. Considere os campos de vetores A, B e $C \in \mathcal{X}(B \times_f F)$ e defina o tensor de curvatura por

$$\bar{R}(A, B)C = \bar{\nabla}_B \bar{\nabla}_A C - \bar{\nabla}_A \bar{\nabla}_B C + \bar{\nabla}_{[A, B]} C$$

Para relacionar campos de vetores em B, F e $B \times_f F$ precisamos de algumas definições:

Definição 1.22. *Seja $\phi : N_1 \rightarrow N_2$ uma aplicação suave entre duas variedades diferenciáveis. Os campos de vetores $X \in \mathcal{X}(N_1)$ e $Y \in \mathcal{X}(N_2)$ são ϕ -relacionados se*

$$d\phi(X(p)) = Y(\phi(p)), \text{ para todo } p \in N_1.$$

Definição 1.23. *O levantamento de um campo vetorial $X \in \mathcal{X}(B)$ é o único campo vetorial $\bar{X} \in \mathcal{X}(B \times_f F)$ que está π -relacionado a X e σ -relacionado a zero no campo vetorial $\mathcal{X}(F)$, onde π e σ são as projeções canônicas. Vamos denotar por $\mathcal{L}(B) \subset \mathcal{X}(B \times_f F)$ o conjunto de todos esses levantamentos. Da mesma forma, $\mathcal{L}(F) \subset \mathcal{X}(B \times_f F)$ denota o conjunto de todas os levantamentos de campos vetoriais $\bar{V} \in \mathcal{X}(B \times_f F)$ que são σ -relacionados ao campo vetorial $V \in \mathcal{X}(F)$ e π -relacionados a zero no vetorial zero em $\mathcal{X}(B)$.*

Observação 1.3. *Quando não houver confusão, por abuso de notação usaremos a mesma notação para um campo vetorial e para o seu levantamento. Se necessário, usaremos a barra superior para enfatizar o levantamento de um campo vetorial.*

Proposição 1.10. *Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$ e $V, W, U \in \mathcal{L}(F)$, então*

1. $\bar{\nabla}_X Y = \overline{\nabla_X^1 Y}$;
2. $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = (Xf/f)V$;
3. $\bar{\nabla}_V W = \overline{\nabla_V^2 W} - (\langle V, W \rangle / f) \text{ grad} f$;
4. $\bar{R}(X, Y)Z = \overline{R^1(X, Y)Z}$;

$$5. \bar{R}(V, X)Y = (\text{Hess}^f(X, Y)/f)V;$$

$$6. \bar{R}(X, Y)V = \bar{R}(V, W)X = 0;$$

$$7. \bar{R}(X, V)W = (\langle V, W \rangle f)\bar{\nabla}_X \text{grad}f;$$

$$8. \bar{R}(V, W)U = \overline{R^2(V, W)U} - (\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle / f^2)\{\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V\};$$

onde $\text{Hess}^f(X, Y) = XYf - (\bar{\nabla}_X Y)f = \langle \bar{\nabla}_X \text{grad}f, Y \rangle$ e $g = \langle, \rangle$.

Demonstração. Ver [12].

Corolário 1.2. *O slice $B \times \{q\}$ do warped product são totalmente geodésicos; as fibras $\{p\} \times F$ são totalmente umbílicos.*

Demonstração. Ver [12], pág 207.

Lema 1.2. *Sejam $\partial_\rho, \partial_\omega$ e ∂_t o referencial adaptado de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde \mathbb{M} é uma variedade bidimensional com curvatura constante não positiva com métrica $\bar{g} = d\rho^2 + h^2(\rho)d\omega^2 + e^{2f}dt^2$, h um função suave e $\bar{\nabla}$ a conexão Riemannina de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ então*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\omega &= -hh_\rho \partial_\rho, \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= -e^{2f} f_\rho \partial_\rho, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_\omega &= \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\rho = \frac{h_\rho}{h} \partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_t &= \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_\rho = f_\rho \partial_t, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_\rho &= \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_t = \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_\omega = 0, \end{aligned}$$

onde h_ρ e f_ρ denota a derivada de $h = h(\rho)$ e $f = f(\rho)$ com respeito a variável ρ .

Demonstração. Vimos na Observação 1.1 que $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, onde $X_1 = \partial_\rho, X_2 = \partial_\omega$ e $X_3 = \partial_t$ é o referencial adaptado de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Precisamos calcular os símbolos de Christoffel.

Como $\bar{\nabla}$ é uma conexão afim então $\bar{\nabla}$ é simétrica e $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, onde Γ_{ij}^k é dado pela equação (1.12). Assim os símbolos de Christoffel não nulos são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{h_\rho}{h} \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = f_\rho \\ \Gamma_{22}^1 &= -hh_\rho \\ \Gamma_{33}^1 &= -e^{2f} f_\rho. \end{aligned}$$

e portanto, obtemos o resultado. □

Exemplo 1.1. $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é um warped product. Se considerarmos coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi), \\z &= r \cos(\theta),\end{aligned}$$

com $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$. A métrica $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ em coordenadas esféricas passa a ser dada por $ds^2 = dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2(\theta)d\theta^2)$.

Se $r = 1$ então ds^2 fornece elementos de linha da esfera \mathbb{S}^2 . É fácil verificar que $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$ com a aplicação $\varphi(t, \rho) \longleftarrow t\rho$. Assim ds^2 mostra que $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ pode ser identificado como o produto $\mathbb{R}^+ \times_r \mathbb{S}^2$.

1.3 Geometria Hiperbólica Plana

Nesta seção fizemos uma revisão detalhada de geometria hiperbólica plana e apresentamos sua métrica, isometrias e geodésicas. A principal referência utilizada é [8].

Considere o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

O bordo assintótico é a reunião do eixo x com o infinito ∞ e será denotado por $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

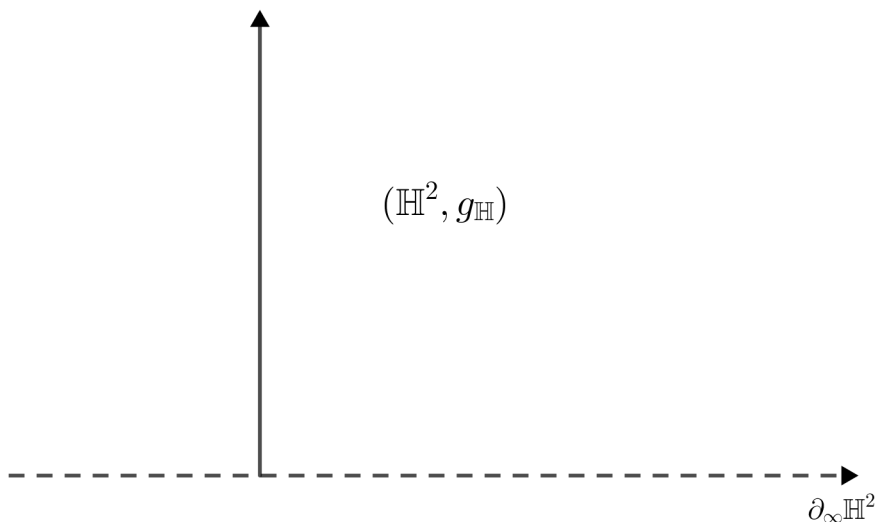


Figura 1.1: Semiplano de Poincaré.

A seguir apresentamos algumas definições.

Definição 1.24. Seja $T_{z_0} \mathbb{H}^2$ o espaço tangente de \mathbb{H}^2 no ponto z_0 . O produto escalar hiperbólico é dado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2(z_0)}$, onde $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ é o produto escalar euclidiano.

Definição 1.25. A norma hiperbólica de \mathbb{H}^2 é denotada por $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ e dada por

$$\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{H}}} = \frac{\|\vec{u}\|}{\operatorname{Im}(z_0)} = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{y_0}.$$

Definição 1.26. O ângulo hiperbólico $\theta \in [0, \pi]$ entre os vetores $\vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ é definido por

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}}}{\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}} \cdot \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}}}.$$

Definição 1.27. O ângulo orientado hiperbólico denotado por $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ é dado por

$$\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}}}{\|\vec{u}\|_{\mathbb{H}} \cdot \|\vec{v}\|_{\mathbb{H}}}.$$

Definição 1.28. O comprimento hiperbólico de $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, onde α é uma curva C^1 é definido por

$$L_{\mathbb{H}}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} dt$$

Observação 1.4. O comprimento de arco hiperbólico independe da parametrização. De fato, sejam $\alpha(t) : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva dada por $t \mapsto \alpha(t)$ e $\beta(t) = \alpha \circ h(t)$ onde $h(t) : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é um difeomorfismo. Note que:

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\beta) &= \int_c^d \|\beta'(t)\|_{\mathbb{H}} dt = \int_c^d \|\alpha'(h(t))\|_{\mathbb{H}} h'(t) dt = \int_{h(c)}^{h(d)} \|\alpha'(u)\|_{\mathbb{H}} du = \\ &= \int_a^b \|\alpha'(u)\|_{\mathbb{H}} du = L_{\mathbb{H}}(\alpha) \end{aligned}$$

□

Para melhor entender a geometria hiperbólica plana, apresentamos alguns resultados sobre funções de uma variável complexa, transformações conformes e funções holomorfas que podem ser encontradas em [3].

Teorema 3. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ dada por $f(z) = (P(z), Q(z))$ é holomorfa se, e somente se, f satisfaz as condições de Cauchy-Riemann, isto é, $P_x = Q_y$ e $P_y = -Q_x$.

Demonstração. Ver [1], pág 62.

Definição 1.29. Seja $f : U \rightarrow V$ uma função complexa onde U, V são abertos de \mathbb{C} . Dizemos que f é uma aplicação conforme se ela preserva ângulos, ou seja,

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(D_{z_0}f(\vec{u}), D_{z_0}f(\vec{v})),$$

para todo $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$. No caso em que $U = V$ e $f : U \rightarrow U$ for bijeção conforme então f é chamada de transformação conforme.

Proposição 1.11. *Se $f : W \rightarrow W$ é transformação conforme, então $f^{-1} : W \rightarrow W$ também o é.*

Demonstração. Sejam $\vec{U}, \vec{V} \in T_{f(z_0)}W$, como f é sobrejetora existem $\vec{u}, \vec{v} \in T_{z_0}W$ tais que $D_{z_0}f(\vec{u}) = \vec{U}$ e $D_{z_0}f(\vec{v}) = \vec{V}$. Logo

$$\begin{aligned} \angle(D_{f(z_0)}f^{-1}(\vec{U}), D_{f(z_0)}f^{-1}(\vec{V})) &= \angle(D_{f(z_0)}f^{-1}(D_{z_0}f(\vec{u})), D_{f(z_0)}f^{-1}(D_{z_0}f(\vec{v}))) = \\ &= \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(D_{z_0}f(\vec{u}), D_{z_0}f(\vec{v})) = \angle(\vec{U}, \vec{V}). \end{aligned}$$

Portanto, f^{-1} também é conforme. □

Teorema 4. *Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é conforme se, e somente se, f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $f(z) = P(z) + iQ(z)$ uma aplicação conforme, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ vetores ortogonais. Como f é conforme, $D_{z_0}f$ leva e_1 e e_2 em vetores ortogonais. Seja L a rotação que leva $D_{z_0}f(e_1)$ sobre e_1 (consequentemente $D_{z_0}f(e_2)$ sobre e_2), ou seja, $L(D_{z_0}f(e_1)) = \lambda e_1$ e $L(D_{z_0}f(e_2)) = \alpha e_2$.

Afirmação: Como f é conforme então $\lambda = \alpha$. Com efeito, sejam e_1 e e_2 como na demonstração e sejam $u = u_1e_1 + u_2e_2 = (u_1, u_2)$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 = (v_1, v_2)$ e

$$\angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}}\|v\|_{\mathbb{H}}}.$$

E assim

$$L \circ D_z(u) = L \circ D_z(u_1e_1 + u_2e_2) = u_1L \circ D_z(e_1) + u_2L \circ D_z(e_2) = \lambda u_1 + \alpha u_2 \text{ e}$$

$$L \circ D_z(v) = L \circ D_z(v_1e_1 + v_2e_2) = v_1L \circ D_z(e_1) + v_2L \circ D_z(e_2) = \lambda v_1 + \alpha v_2.$$

Daí

$$\angle(L \circ D_z(u), L \circ D_z(v)) = \frac{\alpha^2 u_1 v_1 + \lambda^2 u_2 v_2}{\sqrt{(\alpha^2 u_1^2 + \lambda^2 u_2^2)(\alpha^2 v_1^2 + \lambda^2 v_2^2)}}.$$

Como f é conforme

$$\angle(u, v) = \angle(L \circ D_z(u), L \circ D_z(v)) \quad \forall u, v \in U,$$

em particular para $u = (1, 1)$ e $v = (0, 1)$ temos

$$\frac{1.0 + 1.1}{\sqrt{2}.1} = \frac{\alpha^2.1.0 + \lambda^2.1.1}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \Leftrightarrow 2\lambda^2 = \alpha^2 + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \lambda = \alpha,$$

pois supomos $\alpha, \lambda > 0$. Portanto $\alpha = \lambda$, como queríamos.

Logo $L(D_{z_0}f(\vec{u})) = \lambda\vec{u}$. Assim

$$\begin{aligned} D_{z_0}f(\vec{u}) = \lambda L^{-1}(\vec{u}) &= \lambda \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \\ &= (\lambda \cos(\theta)u_1 - \lambda \sin(\theta)u_2, \lambda \sin(\theta)u_1 + \lambda \cos(\theta)u_2). \end{aligned}$$

Por outro lado

$$D_z f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}u_1 + \frac{\partial P}{\partial y}u_2, \frac{\partial Q}{\partial x}u_1 + \frac{\partial Q}{\partial y}u_2 \right).$$

Comparando as igualdades acima, concluímos

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \lambda \cos(\theta) = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\lambda \sin(\theta) = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}.$$

Logo $f(z) = (P(z), Q(z))$ satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. Portanto f é holomorfa e $D_z f(\vec{u}) = f'(z) \cdot \vec{u} \Rightarrow f'(z) \neq 0 \forall z \in U$.

(\Leftarrow) Seja $f : U \rightarrow V$ holomorfa e $f'(z) \neq 0$ temos

$$\angle(D_z f(\vec{u}), D_z f(\vec{v})) = \frac{\langle f'(z) \cdot \vec{u}, f'(z) \cdot \vec{v} \rangle}{|f'(z)|^2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{|f'(z)|^2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|f'(z)|^2 \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Portanto, f é uma aplicação conforme. □

Apresentamos a seguir um outro modelo da geometria hiperbólica plana, a saber, o modelo do disco de Poincaré. Seja $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Enunciaremos a seguir o conjunto das transformações conformes de \mathbb{D} , o qual denotamos por $\mu_{\mathbb{D}}$.

Proposição 1.12. *Se $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ é uma transformação conforme então*

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{D}$. Na verdade

$$\mu_{\mathbb{D}} = \left\{ e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1} \mid \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{D} \right\}$$

é um grupo com a operação de composição.

Para demonstrar a Proposição 1.12 precisaremos das seguintes proposições.

Proposição 1.13. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas em $z_0 \in U$. Então $f + g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(z_0) \neq 0$) são holomorfas em z_0 .*

Demonstração. Ver [1], pág 48.

Proposição 1.14. *Sejam U, V abertos de \mathbb{C} . Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $z_0 \in U$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em $f(z_0) \in V$ e $f(U) \subset V$. Então $g \circ f$ é holomorfa em z_0 .*

Demonstração. Ver [3], pág 34.

Proposição 1.15. *Sejam U, V abertos de \mathbb{C} . Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função conforme em $z_0 \in U$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ conforme em $f(z_0) \in V$ e $f(U) \subset V$. Então $g \circ f$ é conforme em z_0 .*

Demonstração. Ver [3], pág 34.

Lema 1.3 (Lema de Schwarz). *Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ uma função holomorfa em \mathbb{D} tal que $|f(z)| < 1$ e $f(0) = 0$. Então $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ e $|f'(0)| \leq 1$. Além disso, se existe $z_0 \in \mathbb{D}^*$ tal que $|f(z)| = |z_0|$ ou se $|f'(0)| = 1$ então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda z, \forall z \in \mathbb{D}$.*

Demonstração. Ver [3], pág 130.

Provemos a Proposição 1.12.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que T está bem definida. Com efeito, $T(z) \in \mathbb{D}$, visto que

$$|T(z)|^2 = \left| \frac{e^{i\theta}(z - z_0)}{z\bar{z}_0 - 1} \right|^2 = \left| \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1} \right|^2 = \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z\bar{z}_0 - 1} < 1 \Leftrightarrow (z\bar{z} - 1) \cdot (1 - z_0\bar{z}_0) < 0,$$

pois $(z\bar{z} - 1) < 1$ e $(1 - z_0\bar{z}_0) > 1$ e $z, z_0 \in \mathbb{D}$. Logo $T(z) \in \mathbb{D}$.

Resta mostrar que $\mu_{\mathbb{D}}$ é um grupo em relação a composição. De fato, uma condição suficiente para que T seja conforme é que ela seja holomorfa e $T'(z_0) \neq 0$ para todo

$z \in \mathbb{D}$. Agora, como T é uma composição de produtos e quocientes de função polinomiais (portanto holomorfas) segue que T é holomorfa. Calculando $T'(z)$ obtemos

$$T'(z) = \frac{e^{i\theta}(\bar{z}_0 z_0 - 1)}{z\bar{z}_0 - 1} \neq 0 \text{ (pois } z_0 \in \mathbb{D}\text{)}.$$

Logo T é holomorfa e $T'(z_0)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Portanto T é conforme.

Reciprocamente, seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ uma transformação conforme. Considere a seguinte função em $\mu_{\mathbb{D}}$,

$$h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ definida por } h(z) = \frac{z - f(0)}{z\bar{f}(0) - 1}.$$

Pela Proposição 1.15 $g = h \circ f$ é conforme, do Lema 1.3 temos $|g(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ e pelo Teorema 4 g é holomorfa e $g(0) = 0$. Ainda $|g^{-1}(z)|$ é conforme e $g^{-1}(0) = 0$. Aplicando o Lema 1.3 para g^{-1} , existe $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$ tal que $g(z) = \lambda z = e^{i\theta} z$.

Assim

$$h \circ f(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow f(z) = h^{-1}(e^{i\theta} z) \Rightarrow f(z) = \frac{e^{i\theta} z - f(0)}{e^{i\theta} \bar{f}(0) - 1} \in \mu_{\mathbb{D}}.$$

Por último, a associatividade da composição de funções, a Proposição 1.15, a Proposição 1.11 somado ao último resultado provado garantem que $\mu_{\mathbb{D}}$ é grupo. \square

Observação 1.5. Se $T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}$ então existem $a, c \in \mathbb{C}$ tais que $T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$. Portanto

$$\mu_{\mathbb{D}} = \left\{ T(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \mid a, c \in \mathbb{C} \text{ e } a\bar{a} - c\bar{c} = 1 \right\}.$$

Teorema 5. (Transformação de Cayley) A aplicação $\psi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$ é uma bijeção conforme.

Demonstração. Note que $\psi(z) \in \mathbb{D}$. Com efeito

$$|\psi(z)|^2 = \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{\overline{z - i}}{\overline{z + i}} = \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} = \frac{z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 1}{z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + 1} = \frac{|z|^2 + 1 - 2\text{Im}(z)}{|z|^2 + 1 + 2\text{Im}(z)} < 1, \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

Logo $\psi(z) \in \mathbb{D}$.

Afirmção: $\psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$ é conforme. Para provarmos a afirmação usaremos o Teorema 4. Temos

$$\psi'(z) = \frac{(z + i) - (z - i)}{(z + i)^2} = \frac{2i}{(z + i)^2} \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Por outro lado

$$\psi(z) = \frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2} = \frac{|z|^2 - 1 - 2\operatorname{Re}(z)}{|z+i|^2} = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2} \right),$$

onde $z = x + iy$ e assim $P_x = Q_y$ e $P_y = -Q_x$, logo ψ é holomorfa e $\psi'(z) \neq 0$, portanto ψ é conforme.

A inversa de ψ é dada por

$$\psi^{-1}(z) = \frac{i(z+i)}{1-z}.$$

De modo análogo prova-se que $\psi^{-1}(z) = \frac{i(z+i)}{1-z}$ é conforme. \square

Enunciamos a seguir o conjunto das transformações conforme de \mathbb{H}^2 , o qual denotamos por $\mu_{\mathbb{H}}$.

Teorema 6. *O conjunto $\mu_{\mathbb{H}} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$ é um grupo com a operação de composição, formado por transformações conformes de \mathbb{H}^2 em \mathbb{H}^2 , chamado de grupo de Moebius de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

está bem definida, pois $\operatorname{Im}(T(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ visto que $z \in \mathbb{H}^2$. De fato

$$2i\operatorname{Im}(T(z)) = T(z) - \overline{T(z)} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{2i\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Usando o Teorema 3 prova-se que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1$$

é conforme. Falta provar que se f é transformação conforme de \mathbb{H}^2 em \mathbb{H}^2 então

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

Para isto considere $\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$, com $\psi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$. Através de um simples cálculo mostramos que

$$f(z) = (\psi^{-1} \circ F \circ \psi)(z) \text{ onde } F(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}.$$

E por último, não é difícil verificar que $\mu_{\mathbb{H}}$ é grupo. □

A seguir apresentamos a definição de transformação de Moebius

Definição 1.30. *Uma transformação de Moebius é uma aplicação*

$$T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ dada por } T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Observação 1.6. *Em particular, as transformações de \mathbb{H}^2 em \mathbb{H}^2 e as de \mathbb{D} em \mathbb{D} são transformações de Moebius.*

Vejamos algumas propriedades das transformações de Moebius.

Proposição 1.16. 1. *Toda Moebius leva círculo ou reta em círculo ou reta.*

2. *Toda Moebius possui pelo menos um ponto fixo. Além disso, a única transformação de Moebius que possui três pontos fixos é a identidade.*

Com efeito, seja $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ uma transformação de Moebius com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Vamos dividir nossa demonstração em dois casos.

CASO 1: Se $c = 0$ então $T(z) = \frac{az + b}{d}$. Neste caso, $T(\infty) = \infty$;

CASO 2: Se $c \neq 0$ então T tem um ponto fixo em z se, e somente se, $T(z) = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Como $cz^2 + (d - a)z - b$ é um polinômio complexo de grau dois, segue que existe pelo menos uma raiz complexa. Além disso, como $(T(\infty) \neq \infty)$, concluímos que T tem no máximo 2 pontos fixos.

Falta concluir que se T fixa 3 pontos então $T \equiv Id$. Do exposto acima temos $T(z) = az + b$. Suponha que fixe z , daí $T(z) = z \Leftrightarrow (a - 1)z + b = 0$, assim $z = -\frac{b}{a - 1}$ é um ponto fixo.

Se $a = 1$ então $T(\infty) = \infty$ e ∞ é um ponto fixo.

Se $a \neq 1$ então $z = -\frac{b}{a - 1}$ é um ponto fixo e $T(z) = az + b$ tem somente dois pontos fixos.

Se $b = 1$ e $a = 0$, temos que $T(z) = z$ e todo ponto é ponto fixo.

Portanto, a única Moebius que fixa 3 pontos é a identidade.

3. *Sejam (z_1, z_2, z_3) , (z'_1, z'_2, z'_3) duas ternas de números complexos distintos em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, então existe uma única transformação de Moebius que leva (z_1, z_2, z_3) em (z'_1, z'_2, z'_3) , respectivamente.*

De fato, note que (z_1, z_2, z_3) é levado em $(0, 1, \infty)$ pela transformação

$$\frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}.$$

Resta verificar se tal transformação é única. Com efeito, sejam T_1 e T_2 duas transformações de Moebius que leva (z_1, z_2, z_3) em $(0, 1, \infty)$. Note $T_2^{-1} \circ T_1$ está bem definida e $T_2^{-1}(T_1(z_1)) = T_2^{-1}(0) = z_1$, $T_2^{-1}(T_1(z_2)) = T_2^{-1}(1) = z_2$ e $T_2^{-1}(T_1(z_3)) = T_2^{-1}(\infty) = z_3$. Logo $T_2^{-1} \circ T_1 \equiv Id$ e assim $T_2 = T_1$. Agora $T_1(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$ e $T_2(z'_1, z'_2, z'_3) = (0, 1, \infty)$ assim $T_2^{-1} \circ T_1(z_1, z_2, z_3) = (z'_1, z'_2, z'_3)$. Portanto, $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (z'_1, z'_2, z'_3)$.

1.3.1 Inversão

Nesta seção definimos as inversões por círculos ou retas e apresentamos as principais propriedades das inversões. Veremos mais adiante que as inversões têm um papel fundamental na descrição das isometrias positivas da geometria hiperbólica plana.

Definição 1.31. *Seja $C = C(z_0, R)$ o círculo de \mathbb{C} de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e raio $R > 0$. A inversão em relação ao círculo $C(z_0, R)$ denotada por I_C é uma aplicação que envia um ponto $z \neq z_0$ em $z^* \in \mathbb{C}$, onde z^* é um ponto sobre a semirreta que passa pelo centro do círculo no ponto z e verifica*

$$|z^* - z_0||z - z_0| = R^2.$$

Por definição $(z^* - z_0) = \lambda(z - z_0)$, logo

$$I_C(z) = z^* = z_0 + \frac{R^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2}(z - z_0) = z_0 + \frac{R^2}{|\bar{z} - \bar{z}_0|}.$$

Observação 1.7. *Se $z \in \partial C$ então $I_C(z) = z$, se $z = z_0$ então $I_C(z_0) = \infty$ e $I_C(\infty) = z_0$.*

Observação 1.8. *Caso C seja uma reta então a inversão por C será a reflexão pela reta.*

Propriedade 1.1. *Seja $I_C : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por $I_C(z)$ então*

1. $I_C(C) = C$;

De fato, se $z \in \mathbb{C}$ então $|z - z_0|^2 = R^2$. Daí

$$I_C(z) = z_0 + \frac{R^2(z - z_0)}{|z - z_0|^2} = z_0 + \frac{R^2(z - z_0)}{R^2} = z.$$

2. $I_C \circ I_C = Id_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$;

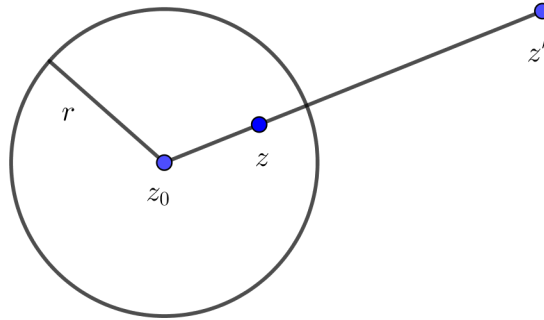


Figura 1.2: Inversão pelo círculo C .

3. $\overline{I_C}$ é uma transformação conforme;

4. I_C leva círculos ou retas em círculos ou reta;

5. $I_C(C_1) = C_1$ se C_1 é ortogonal a C ;

Com efeito, seja $C_1 = C_1(z, r)$ um círculo ortogonal a $C = C(z_0, R)$. Vamos mostrar que $I_C(C_1) = C_1$. Sejam w_1 e w_2 as intersecções de C_1 com C , e w_3 e w_4 as intersecções da reta que liga os centros dos círculos C_1 e C . Afirmamos que $I_C(w_1) = w_1, I_C(w_2) = w_2$ e $I_C(w_3) = w_4$. De fato, as duas primeiras seguem do item 1 acima, resta mostrar que $I_C(w_3) = w_4$. Note que $w_3 = z_1 + \frac{r(z_1 - z_0)}{|z_1 - z_0|}$, $w_4 = z_1 - \frac{r(z_1 - z_0)}{|z_1 - z_0|}$ e $\frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}$ é um vetor unitário. Através de alguns cálculos verificamos que $|w_3 - z_0||w_4 - z_0| = R^2$, o que prova nossa afirmação. Como w_1, w_2 e w_3 não são colineares e I_C leva círculos ou reta em círculo ou reta, segue que $I_C(C_1)$ é um círculo que passa por w_1, w_2 e w_3 , ou seja, $I_C(C_1) = C_1$.

6. $I_C : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é um difeomorfismo.

Observação 1.9. Como $\overline{I_C}$ preserva orientação segue que I_C inverte orientação.

1.3.2 Isometrias de \mathbb{H}^2

Como visto na Definição 1.2, as isometrias são difeomorfismos que preservam a métrica. Nesta seção vamos explicitar as isometrias positivas e negativas de \mathbb{H}^2 .

Definição 1.32. Dizemos que uma isometria $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é positiva se ela preserva orientação, isto é, $\det[\vec{u} \ \vec{v}] > 0 \Rightarrow \det[D_{z_0}(\varphi(\vec{u})) \ D_{z_0}(\varphi(\vec{v}))] > 0$, para todo $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$. Caso contrário, a isometria é dita negativa.

Para provarmos o próximo resultado precisamos da seguinte observação.

Observação 1.10. *Sejam $f, g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ isometrias:*

1. *Se f, g são isometrias positivas então $f \circ g$ é uma isometria positiva;*
2. *Se f, g são isometrias negativas então $f \circ g$ é uma isometria positiva;*
3. *Se f é uma isometria positiva e g é uma isometria negativa então $f \circ g$ é uma isometria negativa.*

Proposição 1.17. $Isom^+(\mathbb{H}^2) = \mu_{\mathbb{H}}$.

Demonstração. Como isometrias preservam produto interno segue que as isometrias positivas preservam ângulos orientados, e portanto são transformações conformes. Logo

$$Isom^+(\mathbb{H}^2) \subset \mu_{\mathbb{H}}.$$

Para concluir a igualdade falta mostrar que

$$Isom^+(\mathbb{H}^2) \supset \mu_{\mathbb{H}}, \text{ isto é, } T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ é isometria de } \mathbb{H}^2.$$

De fato, sejam $z \in \mathbb{H}^2$, $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$ temos

$$\begin{aligned} \langle D_z T(\vec{u}), D_z T(\vec{v}) \rangle_{\mathbb{H}} &= \langle T'(z)\vec{u}, T'(z)\vec{v} \rangle_{\mathbb{H}} = \\ &= |T'(z)|^2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2(T(z))} = \dots = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2(T(z))} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

□

Para determinamos as isometrias negativas de \mathbb{H}^2 , observe que $h(z) = -\bar{z}$ é uma isometria negativa de \mathbb{H}^2 e pela Proposição 1.10 segue

$$Isom^-(\mathbb{H}^2) = h\mu_{\mathbb{H}}.$$

Portanto

$$Isom(\mathbb{H}^2) = \mu_{\mathbb{H}} \cup h\mu_{\mathbb{H}}.$$

A seguir definiremos distância entre dois pontos de \mathbb{H}^2 . Dados dois pontos quaisquer de \mathbb{R}^2 , a distância euclidiana entre eles é igual ao comprimento do segmento de reta ligando estes pontos, ou seja, ao mínimo dos comprimentos das curvas ligando aqueles pontos. Dessa forma, definimos a distância hiperbólica entre dois pontos $x, y \in \mathbb{H}^2$ denotado por $d_{\mathbb{H}}(p, q)$.

Definição 1.33. Dados $p, q \in \mathbb{H}^2$, a distância hiperbólica entre p e q é definida por

$$d_{\mathbb{H}}(p, q) = \inf\{L_{\mathbb{H}}(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2 \text{ suave por partes } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma(1) = q\}.$$

Definição 1.34. Uma curva $c : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{H}^2$ C^1 por partes é uma geodésica de \mathbb{H}^2 se para cada par de pontos sobre $c(I)$ a curva é minimizante, ou seja, para todo $t_1, t_2 \in I$

$$d_{\mathbb{H}}(c(t_1), c(t_2)) = L_{\mathbb{H}}[c(t_1), c(t_2)].$$

Nos próximos resultados explicitaremos as geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Lema 1.4. As semirretas verticais são geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$, ou seja, se $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\gamma(t) = x_0 + it$, com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $t > 0$ são geodésicas de \mathbb{H}^2 . Além disso, se p e q estão na mesma reta vertical geodésica ligando p e q é única.

Demonstração. Vamos mostrar que para todo $t_1, t_2 \in (0, +\infty)$ tem-se

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L_{\mathbb{H}}[\gamma(t_1), \gamma(t_2)],$$

ou seja, se $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma curva suave por parte definida por $c(t) = (x(t), y(t))$ que liga os pontos $\gamma(t_1)$ e $\gamma(t_2)$ então $d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \geq L_{\mathbb{H}}[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$ com $c(0) = \gamma(t_1)$ e $c(1) = \gamma(t_2)$. De fato

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}[\gamma(t_1), \gamma(t_2)] &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\|y'(t)\|}{y(t)} dt \geq \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| = L_{\mathbb{H}}[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]. \end{aligned}$$

A unicidade da geodésica vem pela definição de ínfimo. □

Lema 1.5. Os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico são geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Considere dois semicírculos $C = (x_0, r)$ e $C' = (x_0 = r, 2r)$ tangentes ao bordo de \mathbb{H}^2 . Note que $I_{C'}C = L$ é uma semirreta vertical. De fato

$$\begin{aligned} I_{C'}(x_0 - r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 - r - (x_0 + r)} = x_0 - r \\ I_{C'}(x_0 + r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 + r - (x_0 + r)} = \infty \end{aligned}$$

Como $I_{C'}$ por definição leva círculos em círculos ou retas temos que $I_{C'}(C) = L$. Assim, como $I_{C'}$ é uma isometria e L é uma geodésica de \mathbb{H}^2 segue $I^{-1}(L)_{C'} = C$ também é geodésica de \mathbb{H}^2 . □

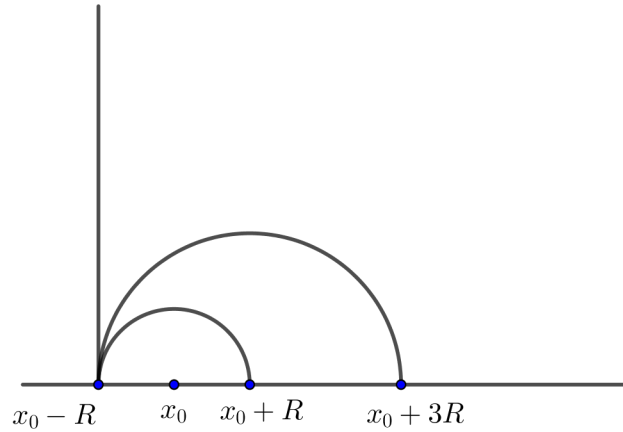


Figura 1.3: Geodésica de \mathbb{H}^2 .

Teorema 7. *Por dois pontos de \mathbb{H}^2 passa uma, e somente uma geodésica. Além disso, as únicas geodésicas de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ são as semirretas verticais e os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico.*

Demonstração. Vimos que se os dois pontos estão numa reta vertical, então a geodésica que liga é a semirreta vertical. Além disso, se p e q não estão na mesma reta vertical existe uma geodésica (semicírculo) que liga p e q , digamos que o semicírculo γ . Falta prova a unicidade de γ . De fato, suponha que γ_1 seja outra geodésica ligando p e q . Seja $C = C(x_0 + R, 2R)$ o semicírculo ortogonal ao $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ de centro $x_0 + R$ e raio $2R$. A inversão por C é uma isometria de \mathbb{H}^2 que leva C na semirreta vertical passando por $x_0 - R$, ou seja, $I_C(\gamma) = L$. De mesma forma, como γ_1 é geodésica ligando p e q , $I_C(\gamma_1)$ é uma geodésica ligando $I_C(p)$ e $I_C(q)$ (que estão na mesma reta vertical L). Logo, $I_C(\gamma_1) \subset I_C(\gamma) = L$. Isto implica $\gamma_1 \subset \gamma$, pois I_C é bijeção. De modo análogo prova-se que $\gamma \subset \gamma_1$. Portanto, $\gamma_1 = \gamma$. \square

Para a próxima proposição, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.35. *Dizemos que uma geodésica γ é completa se suas extremidades estão em $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$.*

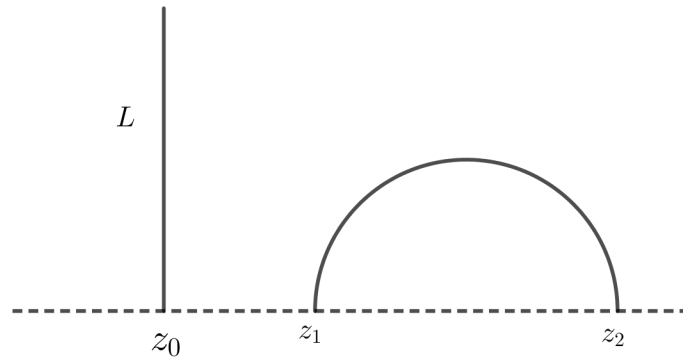


Figura 1.4: Exemplos de geodésicas completas.

- Proposição 1.18.**
1. Se γ é geodésica de \mathbb{H}^2 , $p \in \mathbb{H}^2$ e $p \notin \gamma$ então existe uma única geodésica passando por p e ortogonal a γ ;
 2. Se γ_1 e γ_2 são duas geodésicas completas de \mathbb{H}^2 com $p_1 \in \gamma_1$ e $p_2 \in \gamma_2$, então existe $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tal que $f(p_1) = p_2$ e $f(\gamma_1) = \gamma_2$;
 3. Dados $p \in \mathbb{H}^2$ e $v \in T_p\mathbb{H}^2$, existe uma única geodésica de \mathbb{H}^2 passando por p e tangente a v .

Demonstração. Ver [8], pág 66.

Definição 1.36. Dizemos que duas geodésicas de \mathbb{H}^2 são paralelas se elas têm um único ponto em comum no bordo assintótico.

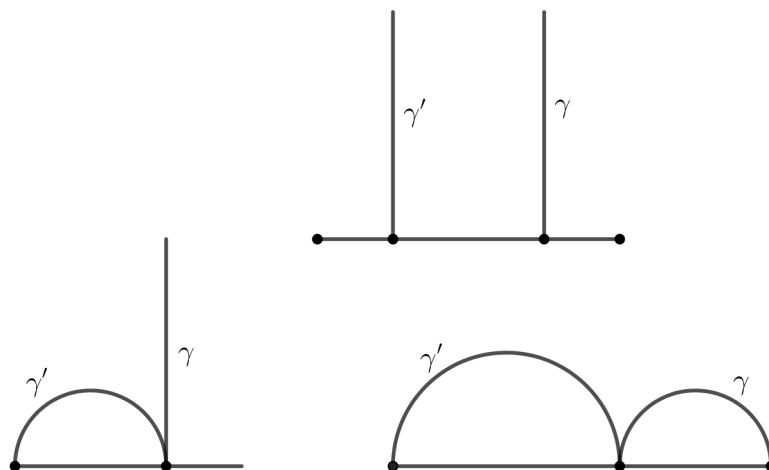


Figura 1.5: Exemplos de geodésicas paralelas.

Observação 1.11. *A partir desta definição, fica claro que o quinto postulando de Euclides não é atendido nesta geometria, já que dado um ponto fora de uma “reta” existe mais de uma “reta” paralela à ela.*

Seja \mathbb{D} o disco unitário aberto. Seja $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$ dado por $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ o difeomorfismo conforme de \mathbb{H}^2 sobre \mathbb{D} . Vamos definir uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ em \mathbb{D} . Para isso, vamos assumir que a transformação de Cayley seja uma isometria entre $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.

Lema 1.6. *A métrica $g_{\mathbb{D}}$ definida sobre \mathbb{D} com φ uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ em $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é*

$$g_{\mathbb{D}}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{(1-|w|^2)^2} \quad \forall w \in \mathbb{D} \text{ e } u, v \in T_w\mathbb{D}.$$

Demonstração. Suponha que exista uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ em \mathbb{D} tal que φ seja uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ em $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$. Por definição, para todo $w \in \mathbb{D}$ e para todos os vetores $u, v \in T_w\mathbb{D}$ temos

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{D}}(\vec{u}, \vec{v}) &= g_{\mathbb{H}}(D_w\varphi^{-1}(\vec{u}), D_w\varphi^{-1}(\vec{v})) = \frac{\langle D_w\varphi^{-1}(\vec{u}), D_w\varphi^{-1}(\vec{v}) \rangle}{\text{Im}^2\varphi^{-1}(\vec{w})} = \frac{\langle \varphi^{-1}(\vec{w})\vec{u}, \varphi^{-1}(\vec{w})\vec{v} \rangle}{\text{Im}^2\varphi^{-1}(\vec{w})} \\ &= \frac{|\varphi^{-1}(\vec{w})|^2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\text{Im}^2\varphi^{-1}(\vec{w})} = \frac{\frac{4}{|w-1|^4} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\frac{(1-|w|^2)^2}{|w-1|^4}} = \frac{4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{(1-|w|^2)^2}. \end{aligned}$$

□

Definição 1.37. *O disco \mathbb{D} munido com a métrica $g_{\mathbb{D}}$ é chamado de disco unitário de Poincaré. O bordo assintótico de \mathbb{D} é denotado por $\partial_{\infty}\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$.*

Como temos a métrica $g_{\mathbb{D}}$ de \mathbb{D} podemos descrever as geodésicas e isometrias de \mathbb{D} , que será feito abaixo.

Proposição 1.19. *As geodésicas de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais ao $\partial_{\infty}\mathbb{D}$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Como φ é uma isometria entre $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ então preserva distância hiperbólica entre os comprimentos de curvas hiperbólicas. Seja $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{D}$ de classe C^1 por partes a geodésica de \mathbb{D} . Observe que c é geodésica de \mathbb{D} se, e somente se, $\varphi^{-1} \circ c$ é geodésica de \mathbb{H}^2 . Como φ é uma transformação de Moebius ela envia $\varphi(\partial_{\infty}\mathbb{H}^2)$ em $\partial_{\infty}\mathbb{D}$, leva semirretas ou semicírculos ortogonais a $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ em semirretas ou semicírculos ortogonais à $\partial_{\infty}\mathbb{D}$. Portanto, as geodésicas de \mathbb{D} ou são arcos de círculos ortogonais ao $\partial_{\infty}\mathbb{D}$ ou diâmetros ortogonais a $\partial_{\infty}\mathbb{D}$. □

Observação 1.12. *Seja $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, ou seja*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

Note que $\varphi(z)$ é uma isometria positiva (pois é Moebius com $a = 1, b = -1, c = 1, d = 1$). Segue que, se T é uma isometria de \mathbb{D} , então

$$T = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \text{ dada por } T(z) = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}} \text{ e } a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

Assim, $T(z) \in \mu_{\mathbb{D}}$ e é fácil verificar que $T(z) \in \mu_{\mathbb{D}}$ então $T \in \text{Isom}^+(\mathbb{D})$, logo $\text{Isom}^+(\mathbb{D}) = \mu_{\mathbb{D}}$ e sendo $g(z) = \bar{z}$ isometria negativa de \mathbb{D} então $\text{Isom}^-(\mathbb{D}) = g\mu_{\mathbb{D}}$. Portanto

$$\text{Isom}(\mathbb{D}) = \mu_{\mathbb{D}} \cup g\mu_{\mathbb{D}}.$$

1.3.3 Classificação das isometrias positivas de \mathbb{H}^2

Nesta seção vamos descrever as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 examinando sua ação sobre as geodésicas e os horociclos, que é definido a seguir.

Definição 1.38. Chamamos de horociclos de \mathbb{H}^2 os círculos tangentes ao bordo assintótico e as retas horizontais contidas em \mathbb{H}^2 .

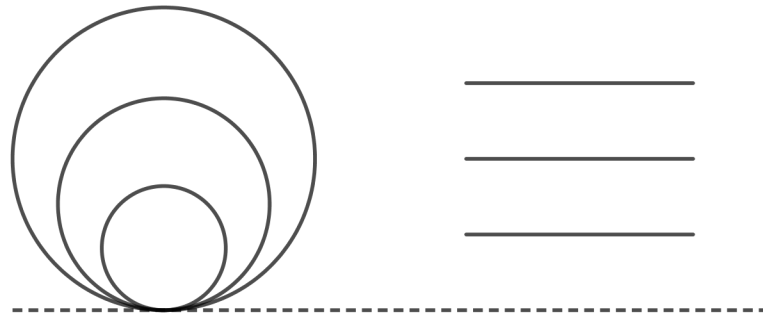


Figura 1.6: Horociclos de \mathbb{H}^2

Proposição 1.20. A imagem de todo horociclo de \mathbb{H}^2 por uma isometria qualquer de \mathbb{H}^2 é um horociclo de \mathbb{H}^2 .

Demonstração. Seja f uma isometria e C um horociclo de \mathbb{H}^2 . Temos que f leva círculos ou retas de \mathbb{H}^2 em círculos ou retas de \mathbb{H}^2 . Suponhamos que C seja um círculo tangente ao bordo assintótico em um ponto x_0 . Daí se $f(C)$ for um círculo ele deve interceptar o bordo assintótico em um ponto $f(x_0)$, além disso, $f(C) \setminus \{f(x_0)\}$ está em \mathbb{H}^2 , segue que $f(C)$ é tangente ao bordo assintótico e portanto um horociclo. Por outro lado, se $f(C)$ for uma reta ela deve estar contida em \mathbb{H}^2 , logo é uma reta horizontal e portanto um horociclo. O caso em que C é uma reta horizontal é provado de forma análoga. \square

Para descrevermos geometricamente as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 , vamos classificá-las de acordo com o número de pontos fixos, isto é, $f(x) = x$. Seja T uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 diferente da identidade, então T é da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1.$$

Suponha $c \neq 0$ e seja $z \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}$, assim

$$\begin{aligned} T(z) = z &\Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow az + b = z(cz + d) \Leftrightarrow az + b - cz^2 - dz = 0 \\ &\Leftrightarrow -cz^2 + (a - d)z + b \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4(ad - 1)}}{2c} \end{aligned}$$

Se $c = 0$, T então é da forma $T(z) = az + b$ e ∞ é um ponto fixo de T . Se $a = 1$ T não possui outros pontos fixos já que $T \neq Id_{\mathbb{H}}$ e se $a \neq 1$, T fixa apenas um outro ponto (necessariamente sobre o bordo assintótico). Isso motiva as seguintes classificações:

1. Transformação hiperbólica ou isometria hiperbólica : Quando T possui dois pontos fixos distintos no bordo assintótico e nenhum em \mathbb{H}^2 . Note que isto ocorre caso $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 > 0$ ou caso T seja da forma $T(z) = az + b$ e $a \neq 1$;
2. Transformação parabólica ou isometria parabólica: Quando T possui um único ponto fixo no bordo assintótico. Note que isto ocorre caso $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 = 0$ ou se T for da forma $T(z) = z + b$;
3. Transformação elíptica ou isometria elíptica: Quando T possui um único ponto fixo em \mathbb{H}^2 . Note que isto ocorre caso $c \neq 0$ e $(a + d)^2 - 4 < 0$ (neste caso T fixa dois pontos em \mathbb{C} , conjugados entre si, logo apenas um deles está em \mathbb{H}^2).

A seguir descrevemos geometricamente as isometrias positivas de \mathbb{H}^2 examinando como atua as geodésicas e horociclos de \mathbb{H}^2

Isometrias hiperbólicas

Sejam f uma isometria hiperbólica de \mathbb{H}^2 , $x_1, x_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ tais que $f(x_1) = x_1$ e $f(x_2) = x_2$ e γ a geodésica completa de \mathbb{H}^2 com extremidades x_1 e x_2 . Note que se ambos forem reais, γ é o semicírculo ortogonal ao bordo que conecta esses pontos. Se, por outro lado, um deles for ∞ (suponhamos sem perda de generalidade que $x_2 = \infty$), γ é a semirreta vertical de \mathbb{H}^2 que começa no ponto x_1 .

Note que a imagem de γ por f é uma geodésica que possui x_1 e x_2 como extremidades. Assim γ é a única geodésica dessa forma, logo a imagem de γ por f é a própria γ , ou seja

$$f(\gamma) = \gamma$$

Seja p um ponto qualquer γ , sua imagem por f é então um outro ponto de γ e tome a orientação de γ no sentido $p \rightarrow f(p)$ sendo a mesma que a dada por $x_1 \rightarrow x_2$. Seja q um ponto de γ situado entre p e $f(p)$. Como f é injetora (f é Moebius, logo uma bijeção), a imagem do arco geodésico $(x_1, p]$ de γ deve ser disjunto à imagem do arco geodésico $[q, x_2)$. Portanto a orientação dada por $q \rightarrow f(q)$ é a mesma de $x_1 \rightarrow x_2$. Conseqüentemente, $f(q)$ está situada entre $f(p)$ e x_2 . Como a distância hiperbólica entre dois pontos é igual ao comprimento do arco da geodésica limitada por eles, temos

$$d_{\mathbb{H}}(p, f(q)) = d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, f(q)) = d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) + d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q)).$$

Note que $d_{\mathbb{H}}(p, q) = d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q))$ pois f é uma isometria, logo $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = d_{\mathbb{H}}(q, f(q))$.

Estudemos agora a imagem de um ponto qualquer de γ . Seja x um ponto qualquer de γ tal que $x \neq f^n(p)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo existe um único inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que x se encontre entre $f^n(p)$ e $f^{n+1}(p)$. Com o mesmo argumento usado anteriormente é possível concluir que $d_{\mathbb{H}}(x, f(x)) = d_{\mathbb{H}}(f^n(p), f^{n+1}(p)) = d_{\mathbb{H}}(p, f(p))$. Assim a distância hiperbólica entre um ponto qualquer de γ e sua imagem pela f é constante. Seja $\lambda > 0$ tal constante. Concluimos então que f envia cada ponto p de γ em um ponto de γ situado entre p e x_2 e tal que $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = \lambda$. Resta descrever geometricamente a imagem de um ponto qualquer de \mathbb{H}^2 por f .

Sejam $z_0 \in \mathbb{H}^2$ um ponto qualquer, α a única geodésica completa passando por z_0 e ortogonal a γ e p a interseção de α com γ . A geodésica completa que passa por $f(z_0), f(p)$ e é ortogonal a γ será $f(\alpha)$, pois $f(\alpha)$ é uma geodésica que passa por $f(z_0)$ e $f(p)$ que é única. Como f preserva ângulos, $f(\alpha)$ também será ortogonal a γ .

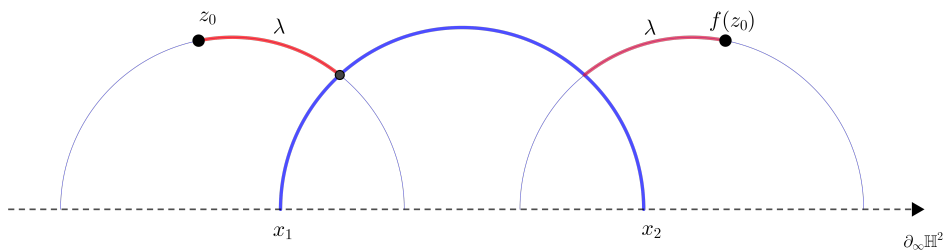


Figura 1.7: Isometria hiperbólica

Observação 1.13. A isometria hiperbólica f também é conhecida como translação hiperbólica de comprimento λ ao longo de γ no sentido de $x_1 \rightarrow x_2$, com λ, γ e $x_1 \rightarrow x_2$ descritos anteriormente. Note que é geometricamente claro que f^{-1} também é uma translação hiperbólica de mesmo comprimento λ ao longo da mesma geodésica γ , mas de sentido $x_2 \leftarrow x_1$.

Uma fórmula explícita para uma isometria hiperbólica arbitrária é dada por

$$g_s(z) = \frac{\cosh(s).z + \sinh(s)}{\sinh(s).z + \cosh(s)}.$$

Observação 1.14. Se $f(z) = az + b$, com $a \neq 1$ o ponto fixo real de f é $x_1 = \frac{b}{1-a}$ e f pode ser escrita como $f(z) = a(z - x_1) + x_1$. Ou seja, neste caso f é uma homotetia de centro x_1 e razão a .

Isometrias Parabólicas

Sejam f uma isometria parabólica e $x_1 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ seu único ponto fixo. Temos duas possibilidades: $x_1 = \infty$ ou $x_1 \in \mathbb{R}$.

Se $x_1 = \infty$ então $f(z) = z + b$, ou seja, f é uma translação horizontal euclidiana. Resta analisar o caso em que $x_1 \in \mathbb{R}$. Do fato de $ad - bc = 1$, $(a + d)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow |a + d| = 2$ e $f(x_1) = x_1$, temos

$$f(z) = \frac{(1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}$$

com $c \in \mathbb{R}^*$. Consideremos a isometria positiva $g(z) = \frac{1}{x_1 - z}$. Note que $g(x_1) = \infty$ e

$$g(z) = \frac{1}{x_1 - z} \Leftrightarrow g(z)z = g(z)x_1 - 1 \Leftrightarrow z = \frac{g(z)x_1 - 1}{g(z)} \Rightarrow g^{-1}(z) = -\frac{1}{z} + x_1.$$

Seja $R = g \circ f \circ g^{-1}$ a composta de isometrias positivas de \mathbb{H}^2 , logo R é uma isometria positiva. Considere z um ponto fixo de R , temos

$$R(z) = z \Leftrightarrow (g \circ f \circ g^{-1})(z) = z \Leftrightarrow f(g^{-1}(z)) = g^{-1}(z),$$

como o único ponto fixo de f é x_1 , $g^{-1}(z) = x_1 \Leftrightarrow z = \infty$. Logo R é uma isometria parabólica cujo ponto fixo é ∞ . Decorre disto que R é uma translação horizontal e para todo $z \in \mathbb{H}^2$, temos

$$R(0) = (g \circ f \circ g^{-1})(0) = g \circ f(\infty) = g\left(\frac{1 + cx_1}{c}\right) = \frac{1}{x_1 - \frac{1 + cx_1}{c}}$$

$$R(0) = -c \Rightarrow R(z) = z - c.$$

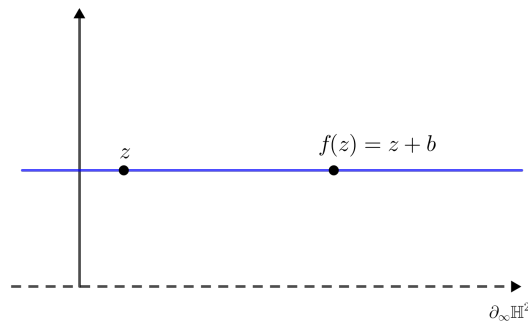


Figura 1.8: Isometria parabólica com $x_1 = \infty$

Seja C um horociclo tangente a \mathbb{R} no ponto x_1 . Como $f = g^{-1} \circ R \circ g$ segue que $f(C) = g^{-1}(R(g(C)))$, com $g(C)$ um horociclo tangente a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ no ponto $g(x_1) = \infty$, logo $g(C)$ é uma reta horizontal, ou seja, $y = k$ com $k \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$g(x + ki) = \frac{1}{x_1 - x - ki} = \frac{1}{x_1 - x - ki} \frac{x_1 - x + ki}{x_1 - x + ki} = \frac{(x_1 + x)}{(x_1 - x)^2 + k} + \frac{ki}{(x_1 - x)^2 + k},$$

e concluímos que $g(C)$ é invariante por R e, como $f = g^{-1} \circ R \circ g$ temos $f(C) = C$. Portanto f fixa todo horociclo tangente a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ no ponto x_1 .

Resta determinar a imagem de um ponto qualquer de \mathbb{H}^2 . Seja $p \in \mathbb{H}^2$ e seja C_p o horociclo que passa por p e tangente ao bordo assintótico no ponto x_1 . Das considerações anteriores concluímos que $f(p)$ é novamente um ponto de C_p .

Avaliemos o comprimento hiperbólico do arco de C_p limitado por p e $f(p)$. Como g é isometria, temos

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(C_p)[p, f(p)] &= L_{\mathbb{H}}(C_p)[g(p), R(g(p))] = \frac{|R(g(p)) - g(p)|}{\mathcal{I}\mathfrak{m}(g(p))} = \frac{|c|}{\mathcal{I}\mathfrak{m}\left(\frac{1}{x_1 - p}\right)} \\ &= \frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{\mathcal{I}\mathfrak{m}(p)}. \end{aligned}$$

Portanto f envia cada ponto p de \mathbb{H}^2 em um dos dois pontos que se encontram no mesmo horociclo C_p que p e tem distância $\frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{\mathcal{I}\mathfrak{m}(p)}$ de p .

Qual das duas opções será a imagem de p depende do sinal de c .

Isometrias Elípticas

Seja f uma isometria elíptica qualquer e considere $z_0 \in \mathbb{H}^2$ o ponto fixo de f . Como a imagem de um vetor tangente $\vec{u} \in T_{z_0} \mathbb{H}^2$ por $D_{z_0} f$ é $f'(z_0) \cdot \vec{u}$, se γ é a geodésica que passa por z_0 e é tangente a \vec{u} , sua imagem por f , $(f(\gamma))$, deve ser a geodésica passando por z_0 e tangente a $e^{i\theta} \cdot \vec{u}$, com $\theta = \arg(f'(z_0))$. Com isso, descreveremos f geometricamente.

Sejam $z \in \mathbb{H}^2$ um ponto qualquer tal que $z \neq z_0$, γ a única geodésica passando por z e z_0 e $\vec{u} \in T_{z_0} \mathbb{H}^2$ um vetor não-nulo tangente a γ em z_0 . Defina γ^+ a componente conexa de

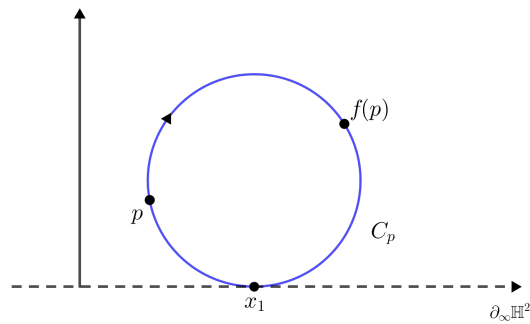


Figura 1.9: Isometria parabólica com $x_1 \in \mathbb{R}$

$\gamma \setminus \{z_0\}$ contendo z . Podemos supor, sem perda de generalidade, que a orientação de γ dada por \vec{u} é a mesma que foi dada por $z_0 \rightarrow z$. Assim, a imagem de γ^+ , $(f(\gamma^+))$, é a semi-geodésica (saindo de z_0) cujo vetor tangente unitário faz um ângulo $\theta = \arg f'(z_0)$ com \vec{u} . Por consequência, $f(z)$ é necessariamente o único ponto de $f(\gamma^+)$ tal que a distância hiperbólica a z_0 é a igual a distância hiperbólica entre z_0 e z ($d_{\mathbb{H}}(z_0, z) = d_{\mathbb{H}}(z_0, f(z))$), o que determina completamente $f(z)$. Note que, desta forma, f se comporta como uma rotação hiperbólica de centro z_0 do ângulo $\theta = \arg f'(z_0)$.

Uma fórmula explícita para uma isometria elíptica arbitrária é dada por

$$f_{(i,\theta)}(z) = \frac{\cos(\alpha) \cdot z + \sin(\alpha)}{-\sin(\alpha) \cdot z + \cos(\alpha)}.$$

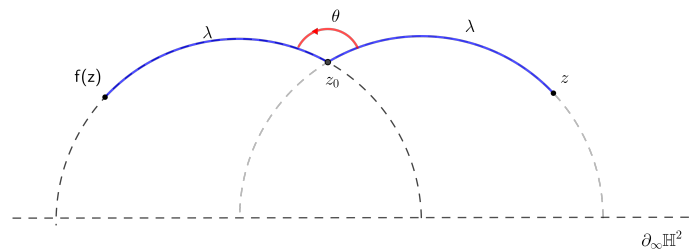


Figura 1.10: Isometria elíptica

O estudo das isometrias positivas de \mathbb{H}^2 vai nos permitir demonstrar uma propriedade das isometrias de \mathbb{H}^2 análogo ao caso das isometrias do plano euclidiano, que será apresentado a seguir.

Teorema 8. *Toda isometria de \mathbb{H}^2 é uma composição de uma ou mais inversões de \mathbb{H}^2 . Mais precisamente, seja $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria,*

1. *Se g é uma isometria positiva, existem duas inversões I_1, I_2 de \mathbb{H}^2 tais que $g = I_1 \circ I_2$;*

2. Se g é uma isometria negativa diferente de uma inversão, existem três inversões I_1, I_2, I_3 de \mathbb{H}^2 tais que $g = I_1 \circ I_2 \circ I_3$.

Demonstração. Inicialmente, consideremos g uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 . De acordo com os resultados anteriores, temos três possibilidades a considerar:

CASO 1: g é uma isometria hiperbólica.

Podemos considerar então g uma translação hiperbólica ao longo de uma geodésica $\gamma \in \mathbb{H}^2$. Assim, sejam $p_2 \in \gamma$ e $g(p_2) \in \gamma$. Considere p_1 como o ponto que divide o segmento de γ limitado por p_2 e $g(p_2)$ em duas partes iguais, ou seja, $p_1 \in \gamma$ e $d_{\mathbb{H}}(p_1, p_2) = d_{\mathbb{H}}(p_1, g(p_2))$. Considere γ_1 e γ_2 as geodésicas de \mathbb{H}^2 passando por, respectivamente, p_1 e p_2 e considere ambas geodésicas ortogonais a γ . Sejam também I_1 a inversão por γ_1 e I_2 a inversão por γ_2 .

A isometria $I_1 \circ I_2$ preserva orientação e fixa a geodésica γ , ou seja, $I_1 \circ I_2$ também é uma translação hiperbólica ao longo de γ , assim como g . Mais ainda, por essa construção $g(p_2) = I_1(p_2) = I_1(I_2(p_2)) = (I_1 \circ I_2)(p_2)$. Assim, $(I_1 \circ I_2) \circ g^{-1}$ é uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 (por ser uma composição de isometrias positivas) com um ponto fixo em $\mathbb{H}^2 - p_2$ - e dois pontos fixos em $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$, que são os pontos assintóticos de γ . Como tal isometria possui três pontos fixos, ela deve ser a identidade e, por consequência, $I_1 \circ I_2 = g$.

CASO 2: g é uma isometria parabólica.

Seja $p_0 \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ o ponto fixo de g . Seja então C um horociclo de \mathbb{H}^2 tangente a $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ em p_0 , isto é, $\partial_{\infty}C = p_0$. Seja $p_2 \in C$ um ponto qualquer de C . Por hipótese, $g(C) = C$ e, portanto, $g(p_2) \in C$. Observe que os pontos p_2 e $g(p_2)$ delimitam um arco C' de C , com $C' \subset C$ e $\partial C' = \{p_2, g(p_2)\}$. Consideremos então o ponto p_1 de C' de modo que $d_{\mathbb{H}}(p_1, p_2) = d_{\mathbb{H}}(p_1, g(p_2))$.

Como no caso anterior, considere γ_1 e γ_2 as geodésicas de \mathbb{H}^2 passando por, respectivamente, p_1 e p_2 (ambas geodésicas ortogonais a C). Sejam também I_1 a inversão por γ_1 e I_2 a inversão por γ_2 . Note que ambas as inversões fixam C e, além disso, $p_0 \in \partial_{\infty}\gamma_1 \cap \partial_{\infty}\gamma_2$. De nossas construções, $g(p_2) = I_1(p_2) = I_1(I_2(p_2)) = (I_1 \circ I_2)(p_2)$. Assim, $(I_1 \circ I_2) \circ g^{-1}$ é uma isometria positiva de \mathbb{H}^2 (por ser uma composição de isometrias positivas) com um ponto fixo em $\mathbb{H}^2 - p_2$ - e um ponto fixo em $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2 - p_0$. Como tal isometria positiva possui um ponto fixo no bordo e um em \mathbb{H}^2 , ela deve ser a identidade e, novamente, $I_1 \circ I_2 = g$.

CASO 3: g é uma isometria elíptica.

Como já descrito anteriormente, podemos pensar em g como uma rotação hiperbólica. Seja então $p_0 \in \mathbb{H}^2$ o ponto fixo de tal rotação e $\theta \in (-\pi, \pi)$ seu argumento. Sejam então \vec{u}_1 e \vec{u}_2 vetores não nulos em p_0 , de modo que o ângulo orientado entre tais vetores é $\frac{\theta}{2}$, ou seja $\angle(\vec{u}_2, \vec{u}_1) = \frac{\theta}{2}$. Seja então γ_1 (respectivamente γ_2) a geodésica passando por p_0 e

tangente a \vec{u}_1 (respectivamente \vec{u}_2) e também I_1 (respectivamente I_2) a inversão que fixa γ_1 (respectivamente γ_2).

Note que $(I_1 \circ I_2)(p_0) = p_0$. Mais ainda, sendo $I_1 \circ I_2$ uma isometria positiva, $I_1 \circ I_2$ e uma rotação hiperbólica com ponto fixo p_0 e, mais ainda, o ângulo entre \vec{u}_2 e $D_{p_0}(I_1 \circ I_2)(\vec{u}_2)$ é θ . Logo, $I_1 \circ I_2$ também e a rotação do ponto fixo p_0 por θ , assim como g e, daí, $I_1 \circ I_2 = g$.

Por fim, suponha agora g uma isometria negativa diferente de uma inversão e considere I_3 uma inversão qualquer de \mathbb{H}^2 . Note que $g \circ I_3$ e uma isometria positiva e, da primeira parte da demonstração, sabemos que existem I_1, I_2 isometrias de \mathbb{H}^2 tais que $g \circ I_3 = I_1 \circ I_2$. Compondo ambos os lados com I_3 , temos que $g = I_1 \circ I_2 \circ I_3^{-1} = I_1 \circ I_2 \circ I_3$, o que conclui a prova \square

Observação 1.15. *Para explicitar as isometrias de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é suficiente explicitar as isometrias $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ e usarmos o fato que $\varphi = \frac{z-i}{z+i}$ é uma isometria de $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}^2})$ em $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.*

1. *As isometrias hiperbólicas, que só admitem dois pontos fixos distintos em $\partial_{\infty}\mathbb{D}$. Tais isometrias são chamadas as translações hiperbólicas ao longo de uma geodésica que liga dois pontos fixos;*
2. *As isometrias parabólicas, que só admitem um ponto fixo duplo em $\partial_{\infty}\mathbb{D}$. Tais isometrias fixam cada horociclo tangente ao ponto fixo em questão;*
3. *As isometrias elípticas, que só admitem um ponto fixo em \mathbb{D} . Tais isometrias são chamadas rotações hiperbólicas.*

Em cada um dos três casos, a descrição geométrica das isometrias são exatamente as mesmas para as isometrias do semiplano hiperbólico.

Observação 1.16. *Note que existem transformações conformes de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que não estão nem no grupo de Moebius de \mathbb{H}^2 nem no grupo de Moebius de \mathbb{D} : são as transformações loxodrômicas. Entre elas estão as isometrias positivas da esfera \mathbb{S}^2 da seguinte forma:*

$$f(z) = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

com $a, c \in \mathbb{C}$ não reais verificando $|a|^2 + |c|^2 = 1$.

1.4 Preliminares

Capítulo 2

Superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$

Neste capítulo apresentamos resultados sobre as superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ é uma variedade bidimensional de curvatura não positiva. Para isso começaremos mostrando o teorema de existência e unicidade de superfícies mínimas no warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, estudaremos resultados sobre a geometria da curva geradora e sua completude. Os livros e artigos utilizados como referências são [6], [7], [9], [13] e [14].

2.1 O espaço ambiente $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$

Nesta seção apresentamos o espaço ambiente $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, sua métrica, provamos que rotações em torno do eixo t é uma isometria desde que a warping function obedeça a relação $f := f(\rho)$, definimos função admissível para o ambiente e apresentamos algumas propriedades de warped product.

Seja $(\mathbb{M}^2(\kappa), g_1)$ o espaço bidimensional de curvatura não positiva com a métrica $g_1 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ onde se $\kappa = -1$ então $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$ e $\lambda(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ e se $\kappa = 0$ então $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$ e $\lambda(x, y) = 1$. Seja (\mathbb{R}, g_2) o espaço euclidiano unidimensional com a métrica $g_2 = dt^2$. Considere o produto $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ com as projeções canônicas

$$\pi_1 : \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2(\kappa) \text{ e } \pi_2 : \mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dada uma função suave arbitrária $f : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ chamada de warping function, vamos definir a métrica Riemanniana \bar{g} em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ por $\bar{g} = g_1 + e^{2f}g_2$.

O par $(\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}, \bar{g})$ é denotado por $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ e chamado de warped product. Portanto, para $v \in T_{((x,y),t)}\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ um vetor tangente de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, temos

$$\bar{g}(v, v) = g_1(d\pi_1(v), d\pi_1(v)) + e^{2f(x,y)}g_2(d\pi_2(v), d\pi_2(v)).$$

Observação 2.1. A fibra $\{t_0\} \times \mathbb{R}$ e o slice $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \{p_0\}$ são subvariedades Riemannianas de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ e são ortogonais em (t_0, p_0) .

No próximo resultado, mostramos que quando a função warping depende somente de ρ , as rotações em torno do eixo t são isometrias do espaço ambiente.

Proposição 2.1. As rotações em torno do eixo t são isometrias de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ quando $f := f(\rho)$.

Demonstração. A rotação em torno do eixo t é dada por

$$A(x, y, t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) & 0 \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = (x \cos(\omega) - y \sin(\omega), x \sin(\omega) + y \cos(\omega), t)$$

e seja

$$dA_{(x,y,t)} : T_{(x,y,t)}\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R} \rightarrow T_{A(x,y,t)}\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$$

Queremos mostrar

$$\bar{g}(dA_{(x,y,t)}(v), dA_{(x,y,t)}(w)) = \bar{g}(v, w)$$

em que $\bar{g} = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2) + e^{2f}dt^2$ e $\lambda(x, y) = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}$ se $\kappa = -1$ e $\lambda(x, y) = 1$ se $\kappa = 0$. De fato

$$\bar{g}(dA_{(x,y,t)}(v), dA_{(x,y,t)}(w)) = \lambda(x, y)(v_1w_1 + v_2w_2) + e^{2f(\rho_k \cos(\omega), \rho_k \sin(\omega))}v_3w_3 = \bar{g}(v, w)$$

Isso só ocorre quando $f(x, y) = \zeta(x^2 + y^2)$, onde ζ é uma função suave. De fato, fazendo $X = x \cos(\omega) - y \sin(\omega)$ e $Y = x \sin(\omega) + y \cos(\omega)$ temos

$$X^2 + Y^2 = (x \cos(\omega) - y \sin(\omega))^2 + (x \sin(\omega) + y \cos(\omega))^2 = x^2 + y^2.$$

Assim, como $f(x, y) = \zeta(x^2 + y^2)$, temos $f(X, Y) = f(x, y)$. Portanto A é isometria de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. \square

Observação 2.2. Se considerarmos coordenadas polares em $\mathbb{M}^2(\kappa)$, ou seja

$$\begin{cases} x &= \rho_k \cos(\omega) \\ y &= \rho_k \sin(\omega) \end{cases}$$

onde

- se $\kappa = -1$ temos $\rho_k = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right)$;

- se $\kappa = 0$ temos $\rho_k = \rho$.

com $\rho \in (0, +\infty)$ e $\omega \in [0, 2\pi)$, temos que a métrica \bar{g} passa a ser dada em coordenadas polares por $\bar{g} = d\rho^2 + h^2(\rho)d\omega^2 + e^{2f(\rho_k \cos(\omega), \rho_k \sin(\omega))} dt^2$, onde $h(\rho) = \rho$ se $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$ e $h(\rho) = \sinh(\rho)$ se $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$.

Nosso objetivo é estudar superfícies mínimas rotacionais em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ no qual f é admissível. Mais precisamente, temos a seguinte definição

Definição 2.1. Para o warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, dizemos que a warping function $f : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ é admissível se é limitada e existe $c, d \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $0 < c < f_\rho(s) < d$ para todo $s \in \mathbb{M}^2(\kappa)$.

Uma superfície mínima Σ imersa no warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ é uma superfície tal que suas curvaturas principais k_1 e k_2 satisfazem a relação $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$.

Para uma superfície mínima Σ imersa no warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, a função curvatura extrínseca $K_e = k_1 k_2$ é não positiva, isto é, $K_e \leq 0$ para todo $p \in \Sigma$. Mais ainda, $K_e = 0$ se, e somente se, as curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são identicamente nula em p .

Observação 2.3. A fim de obtermos barreira para nosso estudo de superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ lembre-se:

- Os slices de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ são totalmente geodésicos e naturalmente isometria de $\mathbb{M}^2(\kappa)$;
- Cada fibra vertical é uma superfície totalmente umbílica.

2.2 Teorema de existência e unicidade

Nesta seção, enunciamos o teorema de existência e unicidade de superfícies mínimas imersas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$.

Sejam $\rho : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$ uma função suave estritamente positiva e Σ uma superfície rotacional em torno do eixo t no espaço $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ obtida a partir do gráfico da função $\rho = \rho(t)$ dada pela parametrização

$$\psi(t, \omega) = \{(\rho(t), \omega, t), t \in J \subset \mathbb{R}, \omega \in [0, 2\pi) \text{ com } \rho(t) > 0\}$$

e $H = H(N)$ a função curvatura média onde N é o campo de vetor normal, unitário e que aponta na direção oposta do eixo de revolução.

Nosso objetivo é verificar sob que condições Σ é uma superfície mínima, para isso precisamos calcular as curvaturas principais k_1 e k_2 . Segue do Lema 1.2 que em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$,

os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{h_\rho}{h}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = f_\rho, \\ \Gamma_{22}^1 &= -hh_\rho, \\ \Gamma_{33}^1 &= -e^{2f}f_\rho.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, as conexões de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ são

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\omega &= -hh_\rho \partial_\rho, \\ \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t &= -e^{2f}f_\rho \partial_\rho, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_\omega &= \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_\rho = \frac{h_\rho}{h} \partial_\omega, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_t &= \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_\rho = f_\rho \partial_t, \\ \bar{\nabla}_{\partial_\rho} \partial_\rho &= \bar{\nabla}_{\partial_\omega} \partial_t = \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_\omega = 0.\end{aligned}$$

Os campos tangentes ψ_t e ψ_ω no referencial adaptado $\{\partial_\rho, \partial_\omega, \partial_t\}$ são dados por $\psi_t = \rho_t \partial_\rho + \partial_t$ e $\psi_\omega = \partial_\omega$. Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados

$$\begin{aligned}E &= \bar{g}(\psi_t, \psi_t) = e^{2f} + \rho_t, \\ F &= \bar{g}(\psi_t, \psi_\omega) = 0, \\ G &= \bar{g}(\psi_\omega, \psi_\omega) = h^2(\rho).\end{aligned}$$

O vetor normal unitário em Σ é dado por $N = \frac{\psi_t \bar{\times} \psi_\omega}{(\bar{g}(\psi_t \bar{\times} \psi_\omega, \psi_t \bar{\times} \psi_\omega))^{\frac{1}{2}}}$ onde $\bar{\times}$ é o produto vetorial associado a métrica em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ e definido a seguir.

Definição 2.2 (Produto vetorial em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$). *Sejam $\bar{g} = d\rho^2 + h^2(\rho)d\omega^2 + e^{2f}dt^2$ a métrica e $\{\partial_\rho, \partial_\omega, \partial_t\}$ é o referencial adaptado de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Considere $u = u_1 \partial_\rho + u_2 \partial_\omega + u_3 \partial_t$, $v = v_1 \partial_\rho + v_2 \partial_\omega + v_3 \partial_t \in T_{(\rho, \omega, t)} \mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Definimos o produto vetorial de u por v como*

$$u \bar{\times} v := \det \begin{pmatrix} \partial_\rho & \frac{\partial_\omega}{h^2(\rho)} & \frac{\partial_t}{e^{2f}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Logo

$$N = \frac{\psi_t \bar{\times} \psi_\omega}{(\bar{g}(\psi_t \bar{\times} \psi_\omega, \psi_t \bar{\times} \psi_\omega))^{\frac{1}{2}}} = -\frac{e^f}{(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_\rho + \frac{e^{-f} \rho_t}{(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{1}{2}}} \partial_t.$$

Para encontrarmos os coeficientes da segunda forma fundamental, precisaremos calcular as conexões sobre os campos tangentes à superfície, que são dadas por

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\psi_t}\psi_t &= \bar{\nabla}_{\psi_t}\rho_t\partial_\rho + \partial_t = \bar{\nabla}_{\psi_t}\rho_t\partial_\rho + \bar{\nabla}_{\psi_t}\partial_t = \\
&= \rho_{tt}\partial_\rho + \rho_t\bar{\nabla}_{\psi_t}\partial_\rho + \bar{\nabla}_{\psi_t}\partial_t = \\
&= \rho_{tt}\partial_\rho + \rho_t\bar{\nabla}_{\rho_t\partial_\rho+\partial_t}\partial_t + \bar{\nabla}_{\rho_t\partial_\rho+\partial_t}\partial_t = \\
&= \rho_{tt}\partial_\rho + \rho_t^2\bar{\nabla}_{\partial_\rho}\partial_\rho + 2\rho_t\bar{\nabla}_{\partial_\rho}\partial_t + \bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \\
&= (\rho_{tt} - e^{2f}f_\rho)\partial_\rho + 2f_\rho\rho_t\partial_t.
\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_{\psi_t}\psi_\omega = \bar{\nabla}_{\rho_t\partial_\rho+\partial_t}\partial_\omega = \rho_t\bar{\nabla}_{\partial_\rho}\partial_\omega + \bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_\omega = \rho_t\frac{h_\rho}{h}\partial_\omega.$$

$$\bar{\nabla}_{\psi_\omega}\psi_\omega = \bar{\nabla}_{\partial_\omega}\partial_\omega = -hh_\rho\partial_\rho.$$

Logo, os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}
e &= \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{\psi_t}\psi_t) = \frac{e^f(e^{2f}f_\rho + 2f_\rho\rho_t^2 - \rho_{tt})}{(e^{2f} + \rho_t)^{\frac{1}{2}}}, \\
f &= \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{\psi_t}\psi_\omega) = 0, \\
g &= \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{\psi_\omega}\psi_\omega) = hh_\rho\frac{e^f}{(e^{2f} + \rho_t)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Como Σ é uma superfície duplamente ortogonal (isto é, $f = F = 0$), temos que as curvaturas principais são facilmente calculadas por

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{e}{E} = \frac{e^f(e^{2f}f_\rho + 2f_\rho\rho_t^2 - \rho_{tt})}{(e^{2f} + \rho_t)^{\frac{3}{2}}} \\
k_2 &= \frac{g}{G} = \frac{h_\rho}{h}\frac{e^f}{(e^{2f} + \rho_t)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Portanto, Σ é uma superfície de revolução mínima, se e somente se, a função $\rho = \rho(t)$ verifica

$$\frac{e^f(e^{2f}f_\rho + 2f_\rho\rho_t^2 - \rho_{tt})}{(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h_\rho}{h}\frac{e^f}{(e^{2f} + \rho_t)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ_t denota a derivada da função $\rho = \rho(t)$ com respeito a variável t .

Para provarmos alguns de nossos resultados precisaremos dos famosos teoremas da Apli-

cação Inversa e da Aplicação Implícita, e para fins posteriores os enunciaremos a seguir.

Teorema 9 (Teorema da Aplicação Inversa). *Sejam $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diferenciável no ponto $a \in U$ e $d\varphi_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. Então φ é um homeomorfismo de um aberto V contendo a sobre um aberto W contendo $\varphi(a)$. O homeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável no ponto $\varphi(a)$ e sua derivada nesse ponto é $[\varphi'(a)]^{-1}$. Se $\varphi \in C^k$ ($k \geq 1$) então V pode ser tomado de modo que φ seja um difeomorfismo de V sobre W .*

Demonstração. Ver [9], pág 282. □

Teorema 10 (Teorema da Aplicação Implícita). *Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, diferenciável no ponto $a \in U$, com $\varphi(a) = c$. Se $d\varphi_a : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva, ou mais precisamente, se $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n$ é uma decomposição em soma direta tal que $a = (a_1, a_2)$ e a derivada $\partial_2\varphi(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, então existem abertos V, Z (onde $a_1 \in V \subset \mathbb{R}^m$, $a \in Z \subset U$) com a seguinte propriedade: para cada $x \in V$ há um único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$ tal que $(x, \xi(x)) \in Z$ e $\varphi(x, \xi(x)) = c$. A aplicação $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ assim definida é diferenciável no ponto a_1 e sua derivada nesse ponto é $\xi'(a_1) = -[\partial_2\varphi(a)]^{-1} \circ [\partial_1\varphi(a)]$. Se $\varphi \in C^k$ ($k \geq 1$), então $\xi \in C^k$ e sua derivada num ponto $x \in V$ qualquer é*

$$\xi'(x) = -[\partial_2\varphi(x, \xi(x))]^{-1} \circ [\partial_1\varphi(x, \xi(x))]$$

Demonstração. Ver [9], pág 295. □

Apresentamos abaixo o teorema de existência e unicidade de superfícies mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$.

Teorema 11. *Seja $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ o warped product onde $f = f(\rho)$ é uma função suave definida em $(0, +\infty)$. Seja $\rho_0 > 0$ um número real positivo que verifica*

$$f_\rho(\rho_0) + \frac{h_\rho(\rho_0)}{h(\rho_0)} > 0.$$

Então existe uma única superfície mínima Σ_{ρ_0} cuja a curva geradora é o gráfico de uma função suave $\rho = \rho(t)$ definida no domínio maximal $Dom(\rho(t)) \subset \mathbb{R}$. O gráfico da função ρ tem um ponto crítico em $t = 0$. Mais precisamente, a função $\rho(t)$ verifica

$$\rho(t) > 0, \rho(0) = \rho_0 \text{ e } \rho_t(0) = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos construir a solução da equação (2.1) satisfazendo $\rho(0) = \rho_0$ e $\rho_t(0) = 0$. Defina a função

$$F(t, u_1, u_2, u_3) = \frac{e^{f(u_1)}(e^{2f(u_1)}f_{u_1} + 2f_{u_1}u_2^2 - u_3)}{(e^{2f(u_1)} + u_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h_\rho}{h} \frac{e^{f(u_1)}}{u_1(e^{2f(u_1)} + u_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde $u_1 > 0$, $u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ e $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Assim, a equação (2.1) é equivalente a

$$F(t, \rho, \rho_t, \rho_{tt}) = 0. \quad (2.2)$$

Por hipótese

$$F(0, \rho_0, 0, 0) = f_\rho(\rho_0) + \frac{h_\rho(\rho_0)}{h(\rho_0)} > 0$$

Logo

$$\lim_{u_3 \rightarrow +\infty} F(0, \rho_0, 0, u_3) < 0.$$

Por outro lado

$$\frac{\partial F}{\partial u_3}(0, \rho_0, 0, u_3) = -e^{-2f(\rho_0)} < 0$$

isto é, $F(0, \rho_0, 0, u_3)$ é uma função estritamente decrescente na variável u_3 . Logo, existe um único número $\bar{\rho}_0$ satisfazendo $F(0, \rho_0, 0, \bar{\rho}_0) = 0$. Além disso, como

$$\frac{\partial F}{\partial u_3}(0, \rho_0, 0, \bar{\rho}_0) < 0$$

temos pelo Teorema 10 que existe uma vizinhança U de $(0, \rho_0, 0)$ em \mathbb{R}^3 e uma vizinhança V de $\bar{\rho}_0$ em \mathbb{R} e uma única função η de classe C^1 de U em V verificando

$$\forall (t, u_1, u_2) \in U, \forall u_3 \in V, F(t, u_1, u_2, u_3) = 0 \Leftrightarrow u_3 = \eta(t, u_1, u_2) \text{ e } \eta(0, \rho_0, 0) = \bar{\rho}_0.$$

Portanto, pelo Teorema 1, garantimos a existência e unicidade da função $\rho = \rho(t)$ de classe C^3 definida no intervalo $(-\delta, \delta)$ com $\delta > 0$ que verifica a equação

$$\rho_{tt} = \eta(t, \rho(t), \rho_t(t)), \quad \text{com } \rho(0) = \rho_0 \text{ e } \rho_t(0) = 0.$$

que por construção é solução de (2.2). Para obter o resultado, considere a solução maximal sobre o domínio maximal $Dom(\rho(t))$. \square

O Teorema 11 nos dá a existência de superfície mínima rotacional Σ_{ρ_0} a um parâmetro (dependendo do parâmetro ρ_0), cuja curva geradora é localmente um gráfico da função $\rho = \rho(t)$ e tendo um ponto crítico. Para classificarmos tais superfícies, precisamos estudar a completude da curva e seu comportamento geométrico. Para isso, a fim de simplificar os cálculos, ao invés de considerarmos a curva geradora como um gráfico, vamos considerar a curva parametrizada pelo comprimento de arco.

Observação 2.4. *Note que no Teorema 11, obtivemos a existência e unicidade (localmente) de superfícies rotacionais mínimas em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, para uma warping function geral. Ou seja, para provar o teorema consideramos apenas que a warping function fosse suave.*

2.3 Geometria da curva $\gamma(s)$ e sua completude

Nesta seção, para entender a geometria da curva geradora, mostramos que função altura $t(s)$, além de ser limitada, nunca se anula num ponto interior de uma superfície rotacional mínima Σ_γ imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Além disso, mostramos que a curva geratriz não toca o eixo de revolução e também explicamos o comportamento da função ρ .

Observação 2.5. *A função altura da superfície mínima rotacional Σ imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ é a restrição da projeção*

$$\pi_2 : \mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \pi_2(\rho, \omega, t) = t$$

a Σ . Ou seja, a função altura de Σ é $\pi_2|_\Sigma$.

Assumiremos que $f = f(\rho)$. Considere no plano $\Pi = \{(\rho, \omega, t) \in \mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}; \omega = 0\}$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco

$$\gamma(s) = (\rho(s), 0, t(s)) \text{ e } \rho_s(s) + e^{2f(\rho)} t_s^2 = 1$$

onde $f(s) = f|_{\gamma(s)}$. Considere a superfície gerada pela rotação em torno do eixo t , dada pela parametrização

$$\psi(s, \omega) = \{(\rho(s), \omega, t(s)), s \in J \subset \mathbb{R}, \omega \in [0, 2\pi) \text{ com } \rho(s) > 0\}.$$

Do exposto acima obtemos que as curvaturas principais em respeito ao vetor normal unitário

$$N = -e^f t_s \partial_\rho + e^{-f} \rho_s \partial_t$$

são

$$k_1 = e^f (f_\rho t_s (1 + \rho_s^2) + \rho_s t_{ss} - t_s \rho_{ss}) \text{ e } k_2 = \frac{h_\rho}{h} e^f t_s$$

Nessas condições, Σ é uma superfície mínima de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ se, e somente se, a função $\rho = \rho(s)$ verifica

$$e^f (f_\rho t_s (1 + \rho_s^2) + \rho_s t_{ss} - t_s \rho_{ss}) + \frac{h_\rho}{h} e^f t_s = 0 \tag{2.3}$$

Observação 2.6. *O slice $S_{t_0}(s, w) = \{(s, w, t_0), s, w \in \mathbb{R}, t_0 \in \mathbb{R} \text{ fixo}\}$ é uma superfície totalmente umbílica para f uma warping function não constante, e suas curvaturas principais são dadas por $k_1(s, w) = k_2(s, w) = 0$.*

Observação 2.7. *Uma enorme diferença entre os estudos de superfícies rotacionais mínimas imersas no warped product $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ com espaços produtos, e que o comprimento de arco s em tais espaços satisfaz $\rho_s(s)^2 + t_s(s)^2 = 1$. Em particular, $t_s(s) \rightarrow 0$ se, e somente se, $\rho_s(s) \rightarrow \pm 1$. Para o warped product estudado temos $\rho_s(s)^2 + e^{2f(\rho)}t_s(s)^2 = 1$, tal propriedade não é verdade, ou seja, para uma função warping geral, podemos encontrar uma sequência de pontos $\{s_n\}$ tal que $t_s(s_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\rho_s(s_n)$ não converge para ± 1 quando $n \rightarrow +\infty$.*

Lema 2.1. *Seja Σ_γ uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ que não seja um slice. Assuma que f não seja constante, então a derivada da função altura $t = t(s)$ é sempre não nula em um ponto interior de Σ_γ .*

Demonstração. Suponha que um subintervalo $\bar{J} \subset \text{Dom}(\alpha)$, $t_s(s_0) = 0$. Como s é o parâmetro comprimento de arco temos $e^{2f}t_s^2 + \rho_s^2 = 1$, então $\rho_s(s_0) \neq 0$. Em particular $\rho_s \neq 0$ em $J \subset \bar{J}$.

Derivando $e^{2f}t_s^2 + \rho_s^2 = 1$ e lembrando que $\rho := \rho(s)$ obtemos $e^{2f}t_s(f_\rho t_s + t_{ss}) + \rho_s \rho_{ss} = 0$. A nossa demonstração será dividido em dois casos:

CASO 1) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$

Isolando ρ_{ss} as curvaturas k_1 e k_2 passam a ser

$$k_1 = e^f \left(\frac{t_{ss}}{\rho_s} + 2f_\rho t_s \right) \text{ e } k_2 = \frac{e^f t_s}{\rho}.$$

Para qualquer $s \in J$, considere Σ_γ orientada pelo vetor normal N dado por

$$N = -e^f t_s \partial \rho + e^{-f} \rho_s \partial t.$$

Nessas condições, Σ é uma superfície mínima de $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}$ se, e somente se, $k_1 + k_2 = 0$, isto é

$$\begin{aligned} e^f \left(\frac{t_{ss}}{\rho_s} + 2f_\rho t_s \right) + e^f \frac{t_s}{\rho} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{t_{ss}}{\rho_s} + 2f_\rho t_s + \frac{t_s}{\rho} &= 0. \end{aligned}$$

A equação acima pode ser reescrita como $Q(\rho, \rho_s, t, t_s, t_{ss}) = 0$, onde

$$Q(u, v, m, z, w) = \frac{w}{v} + 2f_u(u)z + \frac{z}{u},$$

e $u > 0$. Derivando Q em relação a w obtemos

$$\frac{dQ}{dw} = \frac{1}{v} \neq 0,$$

logo $Q(u, v, m, z, w)$ é estritamente crescente (ou decrescente) com respeito a w quando $v > 0$ ($v < 0$). Como $\rho_s(s_0) \neq 0$, segue

$$\frac{\partial Q}{\partial w}(\rho(s_0), \rho_s(s_0), t(s_0), t_s(s_0), t_{ss}(s_0)) = \frac{1}{\rho_s(s_0)} \neq 0.$$

Segue do Teorema 10 a existência uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança do ponto $(\rho(s_0), \rho_s(s_0), t(s_0), t_s(s_0)) \in \mathbb{R}^4$ em uma vizinhança de $t_{ss}(s_0) \in \mathbb{R}$ tal que $t_{ss} = h(\rho, \rho_s, t, t_s)$. Fazendo $v_1 = \rho$, $v_2 = \rho_s$, $v_3 = t$ e $v_4 = t_s$, temos

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2, \\ v_2' &= -e^{2f(v_1)} f_{v_1} v_4^2 - \frac{e^{2f(v_1)} v_4}{v_1} h(v_1, v_2, v_3, v_4), \\ v_3' &= v_4, \\ v_4' &= h(v_1, v_2, v_3, v_4), \end{aligned}$$

com as condições iniciais $\rho(s_0) = \rho_0$, $\rho_s(s_0) = \hat{\rho}_0$, $t(s_0) = t_0$ e $t_s(s_0) = 0$, segue do Teorema 1 que existe uma única solução $(\rho(s), t(s))$ para o sistema acima com as condições iniciais dadas no intervalo com $s_0 \in J \subset \bar{J}$.

Observe que

$$\rho(s) = \rho(s_0) + \rho_s(s_0)(s - s_0) \text{ e } t(s) = t_0$$

é solução do sistema acima, logo é única. Assim, uma parte aberta de Σ_α está contida num slice o que contradiz nossa hipótese. Portanto, $t_s \neq 0 \forall s \in \bar{J}$.

CASO 2) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$

Isolando ρ_{ss} as curvaturas k_1 e k_2 passam a ser

$$k_1 = 2e^{2f} f_\rho t_s^3 + 2f_\rho t_s \rho_s^2 + t_{ss} \rho_s + t_{ss} e^{2f} \frac{t_s^2}{\rho_s} \text{ e } k_2 = e^{2f} t_s \frac{1}{\tanh(\rho)}.$$

Para qualquer $s \in J$, considere \sum_γ orientada pelo vetor normal N dado por

$$N = -e^f t_s \partial \rho + e^{-f} \rho_s \partial t$$

Nessas condições, Σ é uma superfície mínima de $\mathbb{H}^2 \times_f \mathbb{R}$ se, e somente se, $k_1 + k_2 = 0$,

isto é

$$2e^{2f} f_\rho t_s^3 + 2f_\rho t_s \rho_s^2 + t_{ss} \rho_s + t_{ss} e^{2f} \frac{t_s^2}{\rho_s} + e^{2f} \frac{t_s}{\tanh(\rho)} = 0.$$

A equação acima pode ser reescrita como $Q(\rho, \rho_s, t, t_s, t_{ss}) = 0$, onde

$$Q(u, v, m, z, w) = 2e^{2f(u)} f_u z^3 + 2f_u z v^2 + wv + we^{2f(u)} \frac{z^2}{v} + e^{2f(u)} \frac{z}{\tanh(u)},$$

e $u > 0$. Derivando Q em relação a w obtemos

$$\frac{dQ}{dw} = v + e^{2f(u)} \frac{z^2}{v},$$

como $\rho_s(s_0) \neq 0$ e $t_s(s_0)$ segue

$$\frac{\partial Q}{\partial w}(\rho(s_0), \rho_s(s_0), t(s_0), t_s(s_0), t_{ss}(s_0)) = \rho_s(s_0) + e^{2f(\rho(s_0))} \frac{t_s(s_0)}{\rho_s(s_0)} \neq 0.$$

Segue do Teorema 10 a existência de uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança de $(\rho(s_0), \rho_s(s_0), t(s_0), t_s(s_0)) \in \mathbb{R}^4$ em uma vizinhança de $t_{ss}(s_0) \in \mathbb{R}$ tal que $t_{ss} = h(\rho, \rho_s, t, t_s)$. Fazendo $v_1 = \rho$, $v_2 = \rho_s$, $v_3 = t$ e $v_4 = t_s$, temos

$$\begin{aligned} v_1' &= v_2, \\ v_2' &= \frac{-e^{2f(v_1)} f_{v_1} v_4^2}{v_2} - \frac{v_4 h(v_1, v_2, v_3, v_4)}{v_2} e^{2f(v_1)}, \\ v_3' &= v_4, \\ v_4' &= h(v_1, v_2, v_3, v_4), \end{aligned}$$

com as condições iniciais $\rho(s_0) = \rho_0$, $\rho_s(s_0) = \hat{\rho}_0$, $t(s_0) = t_0$ e $t_s(s_0) = 0$, segue do Teorema 1 que existe uma única solução $(\rho(s), t(s))$ para o sistema acima com as condições iniciais dadas no intervalo com $s_0 \in J \subset \bar{J}$.

Observe que

$$\rho(s) = \rho(s_0) + \rho_s(s_0)(s - s_0) \text{ e } t(s) = t_0$$

é solução do sistema acima, logo, é única. Assim, uma parte aberta de Σ_α está contida num slice e contradiz a nossa hipótese. Portanto, $t_s \neq 0 \forall s \in \bar{J}$.

Assim, de ambos os casos concluímos que a derivada da função altura $t = t(s)$ é sempre não nula em um ponto interior de Σ_γ . \square

Proposição 2.2. *Seja Σ_γ uma superfície rotacional mínima imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ obtida pela rotação de uma curva γ em torno do eixo t . Então a curva geratriz γ não pode tocar*

o eixo de revolução.

Demonstração. Suponha que γ intercepte o eixo de revolução. Como Σ_γ é uma superfície regular de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, segue que a intersecção com o eixo t deve ocorrer ortogonalmente (caso contrário, não teríamos unicidade dos limites das retas tangentes no ponto que corta o eixo t), logo $t_s(s_0) = 0$. A condição de comprimento de arco ($e^{2f}t_s^2 + \rho_s^2 = 1$) implica que $\rho_s(s_0) = \pm 1$ e $t_{ss}(s_0) \neq 0$ (pois pelo teste da segunda derivada temos que se $t_{ss}(s_0) < 0$ então s_0 é um ponto de máximo global e se $t_{ss}(s_0) > 0$ s_0 é um ponto de mínimo global). Ainda, o ponto de intersecção tem que ser umbílico (visto que é um ponto de máximo ou mínimo), ou seja, $k_1(s_0) = k_2(s_0) = 0$. Para concluir o desejado, vamos dividir nossa demonstração em dois casos.

CASO 1) Se $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$ então

$$k_1 = e^f \left(\frac{t_{ss}}{\rho_s} + 2f_\rho t_s \right) \text{ e } k_2 = \frac{e^f t_s}{\rho}$$

e fixado s_0 temos $k_1(s_0) = t_{ss}(s_0) \neq 0$ e $k_2(s_0) = 0$, o que nos leva a uma contradição. Logo, γ não corta o eixo de revolução.

CASO 2) Se $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$ então

$$k_1 = e^{2f} \left(2e^{2f} f_\rho t_s^3 + 2f_\rho t_s \rho_s^2 + t_{ss} \rho_s + t_{ss} e^{2f} \frac{t_s^2}{\rho_s} \right) \text{ e } k_2 = \frac{e^{2f} t_s}{\tanh(\rho)}$$

temos $k_1(s_0) = e^{2f}(t_{ss}(s_0)) \neq 0$ e $k_2(s_0) = 0$, o que nos leva a uma contradição. Logo, γ não corta o eixo de revolução.

Portanto, de ambos os casos concluímos que γ não corta o eixo de revolução. \square

A partir de agora vamos supor que a função warping f é admissível (ver Definição 2.1) e $t_s > 0 \forall s \in \text{Dom}(f)$.

Lema 2.2. *Seja Σ_γ uma superfície mínima rotacional imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Assuma que exista um $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que a função $\rho(s)$ satisfaça $\rho_s(s_0) = 0$. Então $\rho(s)$ tem um único extremo mínimo global em s_0 .*

Demonstração. A nossa demonstração será dividida em dois casos:

CASO 1) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$

Provemos que $\rho_{ss} \neq 0$. Como $t_s \neq 0$ segue que as curvaturas principais são dadas por $k_1 = e^f f_\rho t_s - e^{-f} \frac{\rho_{ss}}{t_s}$ e $k_2 = e^f \frac{t_s}{\rho}$.

Suponha $\rho_{ss}(s_0) = 0$, como $f_\rho > 0$ segue

$$k_2(s_0) = e^f \frac{t_s}{\rho} > 0 \text{ e } k_1(s_0) = \left(e^f f_\rho t_s - e^{-f} \frac{\rho_{ss}}{t_s} \right) (s_0) > 0,$$

o que contradiz o fato de Σ_γ ser superfície mínima, portanto, $\rho_{ss}(s_0) \neq 0$ e $\rho(s_0)$ é ponto de máximo ou mínimo.

Isolando ρ_{ss} de k_1 temos $\rho_{ss} = -k_1 t_s e^f + e^f f_\rho t_s^2 > 0$. Em particular, para $s = s_0$ (fixo) tem-se $\rho_{ss}(s_0) > 0$ o que implica que $\rho(s_0)$ é um mínimo local. Agora, como ρ_s é uma função estritamente crescente (pois como $\rho(s_0)$ é ponto de mínimo, temos $\rho_s(s) < 0 \forall s \in (-\infty, s_0)$ e $\rho_s(s) > 0 \forall s \in (s_0, +\infty)$) segue que existe um único s_0 tal que $\rho_s(s_0) = 0$. Portanto, $\rho(s)$ é um mínimo global em s_0 .

CASO 2) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$. Provemos que $\rho_{ss} \neq 0$. Como $t_s \neq 0$ segue que as curvaturas principais são dadas por

$$k_1 = e^{2f} \left(e^{2f} f_\rho t_s^3 - \rho_{ss} \left(\frac{e^{-2f} \rho_s}{t_s} + t_s \right) - f_\rho t_s \rho_s^2 \right) \text{ e } k_2 = \frac{e^{2f} t_s}{\tanh(\rho)}.$$

Suponha $\rho_{ss}(s_0) = 0$, como $f_\rho > 0$ segue

$$k_2(s_0) > 0 \text{ e } k_1(s_0) = \left(\frac{e^{2f} (e^{2f} f_\rho t_s^3)}{e^{3f} t_s^3} \right) (s_0) > 0,$$

o que contradiz o fato de Σ_γ ser superfície mínima, portanto, $\rho_{ss}(s_0) \neq 0$ e $\rho(s_0)$ é ponto de máximo ou mínimo.

Isolando ρ_{ss} de k_1 temos

$$\rho_{ss} = \frac{-e^{-2f} k_1 + e^{2f} f_\rho t_s^3 - f_\rho t_s \rho_s^2}{\frac{e^{-2f} \rho_s}{t_s} + t_s}.$$

Em particular, para $s = s_0$ (fixo) temos $\rho_s(s_0) = 0$ e assim $\rho_{ss}(s_0) > 0$ o que implica que $\rho(s_0)$ é um mínimo local. Agora, como ρ_s é uma função estritamente crescente (pois como $\rho(s_0)$ é ponto de mínimo, temos $\rho_s(s) < 0 \forall s \in (-\infty, s_0)$ e $\rho_s(s) > 0 \forall s \in (s_0, +\infty)$) segue que existe um único s_0 tal que $\rho_s(s_0) = 0$. Portanto, $\rho(s)$ é um mínimo global em s_0 . □

A existência do ponto $\rho(s_0)$ dada pelo Lema 2.2 é garantida pelo Teorema 11. Além disso, a condição de $t_s(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ implica que $\rho(s)$ pode ser vista como o gráfico de uma função.

Lema 2.3. *Seja Σ_γ uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ com f admissível, gerada pela rotação da curva γ em torno do eixo t . Suponha que Σ_γ é orientada pelo vetor*

normal N . Então k_1 e k_2 nunca se anula. Além disso:

$$\begin{aligned} k_1 < 0 \text{ e } k_2 > 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \\ k_1 + k_2 = 0, \text{ logo} \\ t_{ss} = -\rho_s \left(2f_\rho t_s + t_s \frac{h_\rho}{h} \right), \\ \rho_{ss} = e^{2f} \left(f_\rho t_s^2 + t_s^2 \frac{h_\rho}{h} \right). \end{aligned}$$

Além disso, temos $t_{ss}(s) < 0$ se $s > s_0$, $t_{ss}(s_0) = 0$ e $t_{ss}(s) > 0$ se $s < s_0$.

Lema 2.4. *Suponha que a função $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seja limitada e $g' \neq 0$ (em particular, vamos supor que $g' > 0$). Então existe $s_n \in [0, +\infty)$ tal que $\lim_{s \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow +\infty} g'(s_n) = 0$*

Demonstração. Como a função g é limitada e $g' > 0$ então g é crescente logo existe $g_0 = \sup g \in \mathbb{R}_*^+$ tal que $g \rightarrow g_0$. Considere uma sequência (s_n) tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. Pelo teorema do valor médio, como g é derivável em $[s_0, +\infty)$ existe um $c_n \in [s_n, s_{n+1}]$ tal que

$$g'(c_n) = \frac{g(s_{n+1}) - g(s_n)}{s_{n+1} - s_n}.$$

Logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(c_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(s_{n+1}) - g(s_n)}{s_{n+1} - s_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(s_{n+1}) - g(s_n)}{n+1 - n} = 0,$$

visto que $g(s_n)$ é uma sequência limitada e crescente, portanto converge para $g_0 = \sup g$. \square

Lema 2.5. *Seja Σ_γ uma superfície mínima rotacional imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde a função warping $f(s)$ e sua derivada $f_\rho(s)$ são funções limitadas. Então a função $\rho(s)$ tem os limites*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) = +\infty \text{ e } \lim_{s \rightarrow -\infty} \rho(s) = +\infty.$$

Demonstração. Suponha que $\rho(s)$ seja monótona e limitada em $(s_0, +\infty)$ (em $(-\infty, s_0)$) tal que $\rho_s(s_0) > 0 \forall s \in (s_0, +\infty)$ ($\rho_s < 0 \forall s \in (-\infty, s_0)$), logo existe ρ_1 positivo tal que $\rho(s) \rightarrow \rho_1$ quando $s \rightarrow \pm\infty$. Segue do Teorema do Valor médio e pelo Lema 2.4 que existe uma sequência $\{s_n\} \subset (s_0, +\infty)$ ($\{s_n\} \subset (-\infty, s_0)$) tal que $\rho_s(s_n) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \pm\infty$. Agora, $\rho_s(s) > 0$, isto é, crescente, ($\rho_s(s) < 0$, isto é, decrescente) o que implica que $\rho_s(s)$ não tende a zero quando s vai para o $\pm\infty$, o que é um absurdo. Logo $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \rho(s) = +\infty$. \square

Lema 2.6. *Seja Σ_γ uma superfície rotacional mínima imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$. Suponha que f é admissível então:*

1. $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} t_s(s) = 0$;
2. $\lim_{s \rightarrow +\infty} t(s) = \hat{t}_1$;
3. $\lim_{s \rightarrow -\infty} t(s) = \hat{t}_0$.

Demonstração. 1. Temos que $t_{ss} > 0$ para $s \in (-\infty, s_0)$ e $t_{ss} < 0$ para $s \in (s_0, +\infty)$. Como t_s é uma função limitada (pois $e^{2f}t_s^2 + \rho_s^2 = 1$) entre 0 e 1, e monótona segue que t_s tem limite quando $s \rightarrow \pm\infty$. Para concluir o resultado dividiremos nossa demonstração em dois casos

CASO 1) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{R}^2$

Como f é limitada existe $M > 0$ tal que $|f(\rho(s))| < M$ e para todo $s \in \mathbb{R}$ e $0 < e^{2f}t_s^2 < 1 \Rightarrow 0 < t_s < e^{-f} < e^{-M} < 1$ e tem um máximo local em s_0 , segue que $t_s(s)$ está longe de 1 quando $s \rightarrow \pm\infty$, logo $\rho_s(s)$ fica longe de zero quando $s \rightarrow \pm\infty$. Temos $\rho_{ss} > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e ρ_s é limitada, logo pela propriedade de zero-convergência existe uma sequência s_n em (s_n) em $(-\infty, s_0)$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_s(s_n) = 0$. Agora, como (s_n) é uma sequência de pontos no intervalo $(-\infty, s_0)$ e as funções f_p e t_s são limitadas segue que as sequências $f_p(s_n)$ e $t_s(s_n)$ são limitadas. Logo, por Bolzano-Weierstrass existem subsequências (s_{n_j}) e (s_{n_k}) de (s_n) tais que $\{f_p(\rho((s_{n_j})))\}$ e $\{t_s(s_{n_k})\}$ são convergentes. Agora,

$k_1(s_{n_j}) = \left(e^f f_p t_s - \frac{e^{-f} \rho_{ss}}{t_s} \right) (s_{n_j})$ e $k_2(s_{n_j}) = \frac{e^f t_s}{\rho}(s_{n_j})$. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_s(s_{n_j}) \neq 0$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_1(s_{n_j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^f f_p t_s)(s_{n_j}) > 0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_2(s_{n_j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^f t_s}{\rho}(s_{n_j}) > 0$, o que é uma contradição ao fato de Σ_γ ser superfície mínima. Logo, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_s(s_{n_j}) = 0$ e pela unicidade de limite tem-se $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} t_s(s) = 0$.

CASO 2) $\mathbb{M}^2(\kappa) = \mathbb{H}^2$

Como f é limitada existe $M > 0$ tal que $|f(\rho(s))| < M$ e para todo $s \in \mathbb{R}$ e $0 < e^{2f}t_s^2 < 1 \Rightarrow 0 < t_s < e^{-f} < e^{-M} < 1$. Temos $t_s(s_0) = 0$, ou seja, $t_s(s_0)$ é um ponto de máximo local em s_0 , segue que $t_s(s)$ está longe de 1 quando $s \rightarrow \pm\infty$, logo $\rho_s(s)$ fica longe de zero quando $s \rightarrow \pm\infty$. Temos $\rho_{ss} > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e ρ_s é limitada, logo pelo Teorema 2.4 existe uma sequência s_n em (s_n) em $(-\infty, s_0)$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_s(s_n) = 0$. Agora, como (s_n) é uma sequência de pontos no intervalo $(-\infty, s_0)$ e as funções f_p e t_s são limitadas segue que as sequências $f_p(s_n)$ e $t_s(s_n)$ são limitadas. Logo, por Bolzano-Weierstrass existem subsequências (s_{n_j}) e (s_{n_k}) de (s_n) tais que $\{f_p(\rho((s_{n_j})))\}$ e $\{t_s(s_{n_k})\}$ são convergentes. Agora

$$k_1(s_{n_j}) = e^{2f} \left(e^{2f} f_\rho t_s^3 - \rho_{ss} \left(\frac{e^{-2f} \rho_s}{t_s} + t_s \right) - f_\rho t_s \rho_s^2 \right) (s_{n_j}) \text{ e } k_2(s_{n_j}) = \frac{e^f t_s}{\tanh(\rho)} (s_{n_j}).$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_s(s_{n_j}) \neq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_1(s_{n_j}) > 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} k_2(s_{n_j}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^f t_s}{\tanh(\rho)} (s_{n_j}) > 0,$$

o que é uma contradição ao fato de Σ_γ ser superfície mínima . Logo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_s(s_{n_j}) = 0$$

e pela unicidade de limite tem-se $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} t_s(s) = 0$.

2. Para demonstrarmos os itens 2 e 3, é suficiente mostrar que $t(s)$ é limitada. Com efeito, como $\rho_s(s_0)$ é um ponto de mínimo global temos, se $s \in (-\infty, s_0)$ então $\rho_s(s) < 0$ e se $s \in (s_0, +\infty)$ segue $\rho_s(s) > 0$. Assuma inicialmente que $s \in (-\infty, s_0)$. Como $k_1 < 0$ segue

$$\frac{t_{ss}}{\rho_s} + 2f_\rho t_s < 0 \Rightarrow \frac{t_{ss}}{t_s} > -2f_\rho \rho_s$$

Como f_ρ, ρ_s são limitadas, existem $\varepsilon, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 < c < f_\rho < d \text{ e } -1 < \rho_s < \varepsilon < 0 \text{ para um } s_1 \ll s_0 \text{ e}$$

$$0 < c < f_\rho < d \Leftrightarrow -d < d\rho_s < f_\rho \rho_s < c\rho_s < c\varepsilon \Leftrightarrow -2c\varepsilon < -2f_\rho \rho_s < 2d.$$

Logo

$$\frac{t_{ss}}{t_s} > -2c\varepsilon.$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_s^{s_1} \frac{t_{ss}}{t_s} ds > \int_s^{s_1} -2c\varepsilon ds &\Leftrightarrow \ln(t_s(s_1)) - \ln(t_s(s)) \geq -2c\varepsilon(s_1 - s) \\ &\Leftrightarrow \frac{t_s(s_1)}{t_s(s)} \geq e^{-2c\varepsilon s_1} e^{2c\varepsilon s} \\ &\Leftrightarrow t_s(s) \leq (e^{2c\varepsilon s_1} t_s(s_1)) e^{-2c\varepsilon s}. \end{aligned}$$

Seja $m = e^{2c\varepsilon s_1} t_s(s_1)$ uma constante positiva. Temos

$$\begin{aligned} t_s(s) \leq m e^{-2c\varepsilon s} &\Leftrightarrow \int_{s_1}^s t_s(s) ds \leq \int_{s_1}^s m e^{2c\varepsilon s} ds \\ &\Leftrightarrow t(s_1) - t(s) \leq -\frac{m}{2c\varepsilon} (e^{-2c\varepsilon s_1} - e^{-2c\varepsilon s}) \\ &\Leftrightarrow t(s) \geq t(s_1) + \frac{m}{2c\varepsilon} (e^{-2c\varepsilon s_1} - e^{-2c\varepsilon s}). \end{aligned}$$

Aplicando limite quando $s \rightarrow -\infty$ na expressão acima, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} t(s) \geq t(s_1) + \frac{m}{2c\varepsilon} e^{-2c\varepsilon s_1}.$$

Agora, se $s \in (s_0, +\infty)$, então $\rho_s > 0$ e como

$$k_1 = e^f \left(\frac{t_{ss}}{p_s} + 2f_\rho t_s \right) < 0 \Rightarrow \frac{t_{ss}}{p_s} < -2f_\rho t_s.$$

Se $s_2 \gg s_0$ então $\varepsilon_1 < \rho_s < 1$ e $0 < c < f_\rho < d$ e assim $\frac{t_{ss}}{t_s} < -2c\varepsilon_1$. Integrando duas vezes obtemos

$$t(s) \leq t(s_2) + t_s(s_2) e^{2c\varepsilon_1 s_2} \left(\frac{e^{-2c\varepsilon_1 s}}{-2c\varepsilon_1} - \frac{e^{-2c\varepsilon_1 s_2}}{-2c\varepsilon_1} \right).$$

Passando o limite

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} t(s) \leq t(s_2) + \frac{t_s(s_2)}{2c\varepsilon_1}.$$

□

Agora, estamos aptos a enunciar o teorema principal, que é uma junção de todos resultados acima.

Teorema 12 (Teorema Principal). *Seja $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde a função warping $f : \mathbb{M}^2(\kappa) \rightarrow \mathbb{R}$ é admissível e para cada ρ_0 satisfazendo $f_\rho(\rho_0) + \frac{h_\rho(\rho_0)}{h(\rho_0)} > 0$, existe uma superfície mínima Σ_γ imersa em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$ gerada por uma curva γ que é o gráfico de uma função positiva $\rho = \rho(t)$ e $\rho(0) = \rho_0$. A função $\rho(t)$ é definida no intervalo (\hat{t}_0, \hat{t}_1) para algum número $\hat{t}_0 < 0 < \hat{t}_1$ e tem as seguintes propriedades geométricas:*

1. *O gráfico $\rho(t)$ tem um mínimo global em $t = 0$ e não tem um máximo local;*
2. *A função $\rho(t)$ é estritamente crescente em $(0, \hat{t}_1)$ e estritamente decrescente em $(\hat{t}_0, 0)$;*
3. *O gráfico $\rho(t)$ converge para a reta $t = \hat{t}_1$ e $t = \hat{t}_0$ quando t converge para \hat{t}_1 e \hat{t}_0 , respectivamente;*

4. O gráfico $\rho(t)$ é concavo para cima em (\hat{t}_0, \hat{t}_1) .

Exemplo 2.1. Considere a função warping $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\rho) = \arctan(\rho)$. Vamos plotar o gráfico da curva γ que gera a superfície rotacional mínima Σ_γ , onde γ é o gráfico da função $\rho = \rho(t)$, onde $\rho(t)$ é a função que resolve a equação 2.1 dada por

$$\frac{(e^{2f} f_\rho + 2f_\rho \rho_t^2 - \rho_{tt})}{(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

com condições iniciais $\rho(0) = 1, \rho_t(0) = 0$. Usando o software Wolfram Mathematica, obtemos que o gráfico da curva geradora é dada por

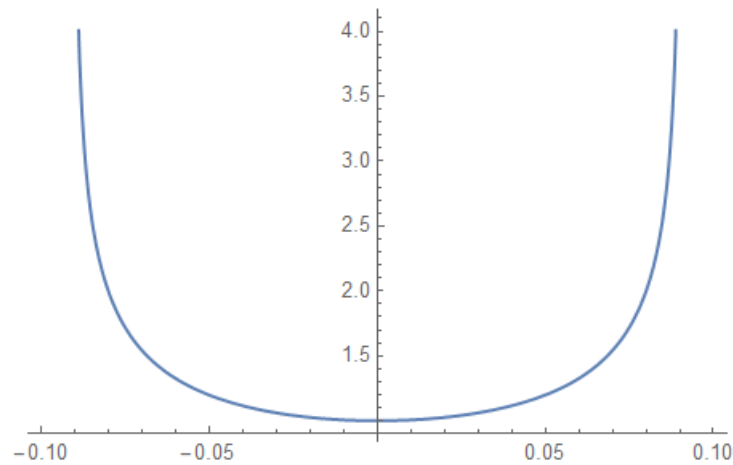


Figura 2.1: Curva γ que gera uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}$

Exemplo 2.2. Considere a função warping $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\rho) = \arctan(\rho)$. Vamos plotar o gráfico da curva γ que gera a superfície rotacional mínima Σ_γ , onde γ é o gráfico da função $\rho = \rho(t)$, onde $\rho(t)$ é a função que resolve a equação 2.1 dada por

$$\frac{(e^{2f} f_\rho + 2f_\rho \rho_t^2 - \rho_{tt})}{(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\rho(e^{2f} + \rho_t^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

com condições iniciais $\rho(0) = 1, \rho_t(0) = 0$. Usando o software Wolfram Mathematica, obtemos que o gráfico da curva geradora é dada por

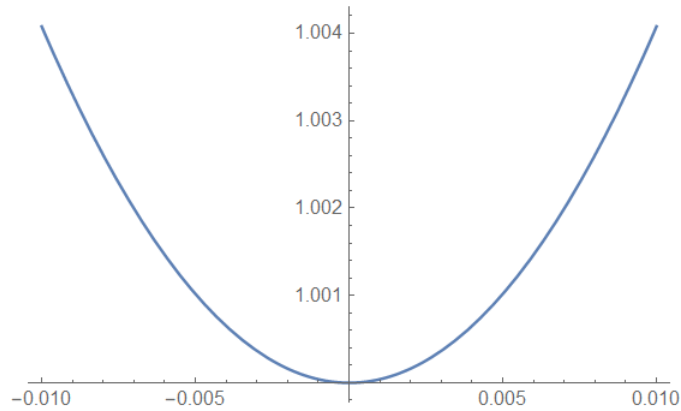


Figura 2.2: Curva γ que gera uma superfície mínima rotacional em $\mathbb{H}^2 \times_f \mathbb{R}$

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos e apresentamos resultados sobre superfícies mínimas rotacionais em $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2(\kappa)$ é uma forma espacial bidimensional podendo ser \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H}^2 . Para que o objetivo fosse alcançado, foi necessário recorrer a diversas literaturas e aprender técnicas de geometria para que o objetivo fosse alcançado. É importante notar que os trabalhos aqui utilizados são recentes, e nos embasou para obter os principais resultados.

Este tipo de trabalho é fundamental para treinamento a nível mestrado, me possibilitou aprendizagem em temas relevantes da geometria e que têm sido focos de diversos geômetras pelo mundo.

No decorrer deste trabalho surgiram alguns questionamentos que estão em fase de desenvolvimento. Por exemplo, estamos verificando se os resultados apresentados são válidos para $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$, quando $\mathbb{M} = \mathbb{S}^2$, ou seja, a esfera bidimensional, isto sob certas condições de admissibilidade sobre a warping function. Um outro questionamento que surgiu foi, sob que condições da warping function, existem superfícies mínimas invariantes por isometrias de $\mathbb{M}^2(\kappa) \times_f \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, J. W., AND CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e aplicações*. McGraw Hill Brasil, 2015.
- [2] CAMBRAIA JR, A., FOLHA, A., AND PEÑAFIEL, C. On totally umbilical surfaces in the warped product $\mathbb{M}(\kappa)_f \times I$. *Pacific Journal of Mathematics* 313, 2 (2021), 343–364.
- [3] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable II*, vol. 159. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [5] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [6] EARP, R. S., AND TOUBIANA, É. A note on special surfaces in \mathbb{R}^3 . *Matemática Contemporânea* 4 (1993), 108–118.
- [7] EARP, R. S., AND TOUBIANA, E. Sur les surfaces de weingarten spéciales de type minimal. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 26, 2 (1995), 129–148.
- [8] EARP, R. S., AND TOUBIANA, E. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Cassini, 2009.
- [9] ELON, L. Curso de análise vol. 2. *Projeto Euclides IMPA* (2009).
- [10] FRALEIGH, J. B. *A first course in abstract algebra*. Pearson Education India, 2003.
- [11] MORABITO, F., AND RODRÍGUEZ, M. M. Classification of rotational special weingarten surfaces of minimal type in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Mathematische Zeitschrift* 273, 1 (2013), 379–399.
- [12] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.

- [13] O'NEILL, B. *Elementary differential geometry*. Elsevier, 2006.
- [14] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7. Springer Science & Business Media, 2013.