

RAFAEL VENÂNCIO CACILHAS

**DINÂMICA E NUCLEAÇÃO DE SÓLITONS MAGNÉTICOS EM
GEOMETRIAS CURVAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

Orientador: Vagson L. Carvalho Santos

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2021**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

C568d
2021

Cacilhas, Rafael Venâncio, 1992-
Dinâmica e nucleação de sólitons magnéticos em geometrias
curvas / Rafael Venâncio Cacilhas. - Viçosa, MG, 2021.
1 tese eletrônica (80 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.
Orientador: Vagson Luiz de Carvalho Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento
de Física, 2021.
Referências bibliográficas: f. 68-80.
DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2021.206>
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Sólitons. 2. Magnetismo. 3. Skyrme, Modelo de. 4. Curvas. I.
Santos, Vagson Luiz de Carvalho, 1977-. II. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em
Física. III. Título.

CDD 22. ed. 538

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto CRB6 2323

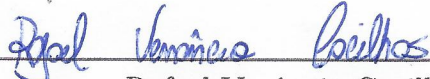
RAFAEL VENÂNCIO CACILHAS

**DINÂMICA E NUCLEAÇÃO DE SÓLITONS MAGNÉTICOS EM
GEOMETRIAS CURVAS**

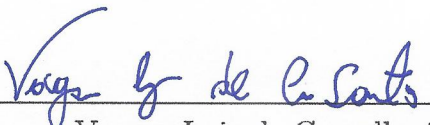
Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

APROVADA: 17 de setembro de 2021

Assentimento:



Rafael Venâncio Cacilhas
Autor



Vagson Luiz de Carvalho Santos
Orientador

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Este documento simboliza o fim de um ciclo que começou há dez anos e seis meses. Muitas pessoas ajudaram neste caminho e é uma tarefa difícil agradecer à todos como merecem.

Gostaria de começar agradecendo à minha mãe, Berenice, que me ajudou de diversas maneiras nesta caminhada. Não foi fácil, mas conseguimos.

Agradeço também aos amigos que tornaram os últimos anos mais agradáveis. Um obrigado ao César, que esteve do meu lado em grande parte desse tempo e mais do que todos sabe como foi essa jornada. Um obrigado à Valéria, por tudo que fez por mim nos últimos anos e por ter me ajudado a virar uma pessoa da qual eu tenho orgulho. Um obrigado também aos amigos da sala da pós, que sempre tornaram as horas de trabalho mais divertidas e que nunca recusaram uma voltinha no supermercado para descansar. E um obrigado aos amigos de VRB e aos amigos da física que sempre me ajudaram quando precisei e me deram todo o apoio necessário.

Um obrigado especial e mais do que gigante ao prof. Vagson, que me acolheu em um momento em que não sabia o que fazer e me mostrou que eu sou capaz de muito mais do que eu imaginava. Por nunca ter perdido a paciência (mesmo que eu tivesse dado motivos), por nunca ter me cobrado (mesmo que eu estivesse atrasado) e por sempre ter respeitado o meu tempo (mesmo quando precisei de um grande descanso), o meu eterno obrigado. Me lembro de assistir seu seminário em 2017 e ficar fascinado com a área, apesar de imaginar que jamais ia ser capaz de entender aquele conteúdo; Você me mostrou que não só sou capaz de entender como fui capaz de ajudar no desenvolvimento da área. Muito obrigado.

Por fim, gostaria de agradecer ao Departamento pela minha formação. Em particular, um grande obrigado ao prof. Clodoaldo por toda a orientação que me deu, por tudo que me ensinou e, principalmente, pela paciência que teve com um aluno que fazia bem menos do que deveria. Um obrigado aos profs. Jakson, Marcelo e Sílvio, que me ensinaram grande parte do que aprendi. E um obrigado a todos os funcionários que permitem que o departamento funcione como deveria.

*"Tenho sangrado demais
Tenho chorado pra cachorro
Ano passado eu morri
Mas esse ano eu não morro"*

Sujeito de sorte (Belchior, 1976)

Resumo

CACILHAS, Rafael, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2021. **Dinâmica e nucleação de sólitons magnéticos em geometrias curvas**. Orientador: Vagson Luiz de Carvalho Santos.

Este trabalho tem como objetivo estudar a nucleação, estabilidade e dinâmica de sólitons magnéticos em materiais ferromagnéticos, com especial interesse no efeito que a curvatura produz sobre as propriedades destes modos coletivos da magnetização. Iniciamos o o trabalho com um estudo de dois skyrmions em camadas ferromagnéticas separadas, acoplados por interação RKKY. Mostramos que este acoplamento permite estados ligados entre os dois skyrmions, o que pode afetar suas propriedades, como o raio. Em seguida passamos para estudar o efeito da curvatura sobre a magnetização, onde escolhemos estudar a dinâmica de uma parede de domínio em um fio magnético cilíndrico curvo, descrito como a seção de um toroide. Mostramos que a presença da curvatura reintroduz o limite de Walker e obtivemos uma previsão analítica do seu valor para o limite de pequenas curvaturas. Foi estudado também os mecanismos de reversão magnética em superfícies toroidais, onde mostramos que um dos modos de reversão é através da nucleação de hópions. Por fim, buscamos uma maneira de descrever as propriedades magnéticas de uma superfície com curvatura arbitrária.

Palavras-chave: Sólitons magnéticos. Magnetismo. Skyrmions. Geometrias curvas.

Abstract

CACILHAS, Rafael, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2021. **Dynamics and nucleation of magnetic solitons in curved geometries.** Adviser: Vagson Luiz de Carvalho Santos.

This work aims to study nucleation, stability, and dynamics of magnetic solitons in ferromagnetic materials, with a particular interest in describing curvature effects on the properties of such magnetization collective modes. We start by studying two skyrmions in separated layers coupled by RKKY interaction, and we show that this coupling enables a bound state between them, which can affect properties like their radius. After this, we started analyzing the curvature-induced effects on the magnetization by analyzing the dynamics of a domain wall displacing in a bent cylindrical wire, described as a torus section. We show that the curvature brings back the Walker limit and obtain an analytical expression for it in the limit of small curvatures. We also study the magnetization reversal mechanisms in toroidal structures, where we show that one of the reversal modes consists of the nucleation of a hopfion. Finally, we conclude by describing the magnetic properties of a surface with an arbitrary curvature.

Keywords: Magnetic solitons. Magnetism. Skyrmions. Curved geometries.

Publicações e apresentações de trabalho

Artigos publicados ao longo da tese

1. **Título:** Coupling of skyrmions mediated by the RKKY interaction;
R. Cacilhas, V. L. Carvalho-Santos, S. Vojkovic, E. B. Carvalho, A. R. Pereira, D. Altbir e Á. S. Núñez , Applied Physics Letters 113, 212406 (2018).
2. **Título:** Controlling domain wall oscillations in bent cylindrical magnetic nanowires;
R. Cacilhas, R. Moreno, C.I.L Araujo, O. Chubykalo-Fesenko, D. Altbir e V.L. Carvalho-Santos, Physical Review B (2019).
3. **Título:** Curvature-induced emergence of a second critical field for domain wall dynamics in bent nanostripes;
G. H. R. Bittencourt, R. Moreno, R. Cacilhas, S. Castillo-Sepúlveda, O. Chubykalo-Fesenko, D. Altbir e V. L. Carvalho-Santos, Applied Physics Letters (2021).
4. **Título:** Scattering modes of skyrmions in a bilayer system with ferromagnetic coupling;
S. Vojkovic, R. Cacilhas, A. R. Pereira, D. Altbir, Á. S. Nunez e V. L. Carvalho-Santos, Nanotechnology (2021).

Apresentações de trabalhos

1. **Apresentação de Pôster:** Coupling of skyrmions mediated by RKKY interaction;
Evento: I Simpósio da Pós-Graduação em Física (Universidade Federal de Viçosa).
2. **Apresentação Oral:** RKKY Interaction between skyrmions in multilayers;
Evento: VII Workshop da Pós-Graduação em Física (Universidade Federal de Juiz de Fora);.
3. **Apresentação Oral:** Domain Wall motion and Walker breakdown in bent nanowires;
Evento: II Simpósio da Pós-Graduação em Física (Universidade Federal de Viçosa).

Sumário

Introdução	10
2 Revisão de Literatura	12
2.1 Sólitons	12
2.2 Magnetismo	16
2.3 Hamiltoniana de Heisenberg	17
2.3.1 Interação de troca e micro-magnetismo	20
2.4 Outras interações magnéticas	21
2.4.1 Interação de Dzyaloshinskii-Moriya	21
2.4.2 Interação Dipolar	22
2.5 Paredes de domínio	23
2.6 Skyrmions	25
2.7 Dinâmica da magnetização	25
3 Acoplamento de skyrmions em bicamadas	27
3.1 Introdução	27
3.2 Interação RKKY	28
3.3 Resultados	29
4 Oscilação de paredes de domínio em um nanofio curvo	36
4.1 Introdução	36
4.2 Contribuições de energia	37
4.3 Resultados numéricos	39
4.4 Resultados analíticos	42
4.5 Estudo da velocidade da PD	44
4.6 Fio de seção reta retangular	46
5 Reversão magnética em um torus	50
5.1 Introdução	50
5.2 Modelagem do sistema	52
5.3 Resultados	52

6	Perspectivas Futuras	56
6.1	Introdução	56
6.1.1	Curva unidimensional	56
6.1.2	Superfícies bidimensionais	58
6.2	Conclusões	61
	Apêndices	63
.1	Interação de troca em coordenadas curvilíneas	63
.2	Interação de troca para uma parametrização específica	64

Introdução

O estudo do magnetismo é algo milenar e está associado com eventos marcantes da história humana, como a expansão marítima da Europa após o século XV. Desde então nunca deixou de ser uma área importante na física, sendo o estudo da relação entre correntes elétricas e campos magnéticos uma parte fundamental de quase todo estudo em física. Apesar de inicialmente a humanidade entender a eletricidade e o magnetismo como fenômenos distintos, experimentos e trabalhos teóricos desenvolvidos no final do século XIX levaram a descoberta que o campo magnético também pode ser gerado à partir de um campo elétrico variável e que esta relação permite descrever os campos eletromagnéticos como uma função de onda que se move na velocidade da luz. À partir disto, ao considerar a (falta de) simetria entre os campos elétricos e magnéticos Einstein propôs a teoria da relatividade restrita. Além da clara inspiração para a teoria da relatividade vemos que o estudo do magnetismo também foi de grande importância no desenvolvimento da mecânica quântica. Dentre as descobertas mais fundamentais sobre as propriedades quânticas da matéria e sistemas magnéticos, podemos citar o experimento de Stern-Gerlach e a descoberta de que o elétron possui um momento angular intrínseco, que independe de sua órbita.

Nos dias atuais há um grande interesse em estudar o comportamento magnético de sistemas em nanoescala devido à promessas de aplicações práticas na chamada spintrônica, isto é, usar o spin do elétron como um grau de liberdade a mais em dispositivos eletrônicos. Tais aplicações demandam um controle preciso sobre as propriedades estáticas e dinâmicas da magnetização em estruturas cujas dimensões reduzidas produzem efeitos associados ao aumento da relação superfície por volume do corpo.

Este trabalho foca então no estudo de materiais ferromagnéticos e, em particular, em estruturas magnéticas que podem funcionar como transmissores de informação. Buscamos então configurações de magnetização que são mensuravelmente diferentes do estado fundamental e que não decaem nele com facilidade; além disso, gostaríamos que estas configurações possam se mover ao longo do material ferromagnético sem perder suas propriedades magnéticas.

Felizmente as soluções que cumprem estas exigências são estudadas há algum tempo em teorias de campo. Configurações de campo que são localizadas e se movem sem dispersão são chamadas de sólitons e aparecem como soluções de diversos sistemas. Se aproximarmos

a magnetização como sendo uma função contínua que só depende da posição dentro do corpo magnético (o que é uma boa aproximação caso o sistema não possua poucos átomos) chegamos ao modelo σ não-linear. Neste modelo foi possível demonstrar que existem diversas soluções para sólitons, como os skyrmions e os *kinks*, que foram posteriormente detectados experimentalmente.

No entanto estes sólitons magnéticos são muitas vezes difíceis de serem criados, estabilizados e movimentados. Com isto chegamos ao tema principal deste trabalho: realizar um estudo sistemático das propriedades estáticas e dinâmicas dos sólitons magnéticos e estudar como a presença de uma curvatura local nos permite controlar estas propriedades. Para tal fim, iremos utilizar parametrizações conhecidas destes sólitons de modo a obter a energia e as propriedades destas configurações e compara-las ao estado fundamental. Dividimos esta tese em cinco capítulos; começamos com uma revisão de literatura para explicitar os conceitos fundamentais que serão utilizados. No capítulo 2 foi estudado um sistema de dois skyrmions em camadas ferromagnéticas planas separadas e que interagem através da interação RKKY. Introduzimos os efeitos de curvatura no capítulo 3, onde estudamos a dinâmica de uma parede de domínio em um fio cilíndrico curvo, que descrevemos como a seção de um torus. No capítulo 4 também estudamos um sistema toroidal, mas nos focamos nas estruturas magnéticas que aparecem no processo de reversão da magnetização em um ciclo de histerese. Por fim, no capítulo 5, fizemos uma generalização do nosso ferramental teórico para permitir que curvaturas mais arbitrárias sejam estudadas.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

2.1 Sólitons

Desde Gauss e Kelvin, campos localizados com propriedades de partículas têm atraído a atenção de matemáticos e físicos [1, 2]. Hopf demonstrou que o espaço 3D pode ser preenchido de maneira suave com círculos interligados ou nós toroidais [3] e Heisenberg considerou tais configurações ao discutir a natureza das partículas contáveis em campos contínuos[4].

Por volta da década de 70 surgiu uma tendência no estudo da área de teoria quântica de campos, onde físicos e matemáticos estudavam as equações de campos clássicas e passaram a interpretar algumas soluções como candidatas a partículas da teoria. Estas partículas, que não haviam sido reconhecidas anteriormente, são diferentes das partículas elementares que surgem da quantização das excitações do campo, como os fótons e fônons. Uma característica importante desse novo tipo de solução é o fato de que, como partículas, elas apresentam uma estrutura topológica que as diferem do estado de vácuo. As excitações quânticas do vácuo mais triviais não alteram a topologia do sistema, o que implica que as partículas elementares, como os fótons, não possuem estrutura topológica. Este novo tipo de partícula deve sua estabilidade à sua proteção topológica, visto que apesar de tipicamente possuir uma energia mais alta que o estado fundamental ela não pode decair em estados de menor energia que possuem uma topologia diferente. Podemos caracterizar esta topologia através de um número inteiro \mathcal{Q} , que chamaremos de carga topológica. Esta carga \mathcal{Q} identifica o tipo de partícula que é estudada e a sua energia é proporcional ao seu módulo. As partículas mais básicas possuem $\mathcal{Q} = 1$, que são soluções classicamente estáveis e que não pode decair em um campo topologicamente trivial [5].

O exemplo de sóliton topológico mais comumente estudado é atribuído à Skyrme [6]. Chamado de skyrmion em sua homenagem, ele surgiu do modelo de Yukawa, uma teoria de campos para núcleons de spin $\frac{1}{2}$ e de píons sem spin. Num primeiro momento Skyrme encontrou desafios em analisar os resultados em três dimensões e propôs um modelo de teoria de campo invariante de Lorentz unidimensional ao longo de um círculo,

o que é conhecido como teoria de sine-Gordon, um (excelente) trocadilho com a teoria de Klein-Gordon. Mesmo neste tipo de modelo simplificado foram encontrados sólitons topológicos.

O nome sóliton se refere a certas soluções especiais de equações de onda não-lineares. De modo a entender os casos mais complicados vamos fazer uma analogia com o caso mais simples possível, que é dado pela equação de Klein-Gordon com massa nula:

$$\square\phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (2.1)$$

onde $\phi(x, t)$ representa um campo real escalar em (1+1) dimensões e c é a velocidade da luz. As propriedades desta equação, que é linear e sem dispersão, são bem conhecidas e chamamos a atenção para duas características interessantes: **(i)** qualquer função bem comportada da forma $f(x \pm ct)$ é uma solução e se escolhermos uma função f que é localizada nós podemos construir um pacote de ondas que viaja com velocidade uniforme c e não tem distorção em sua forma **(ii)** o fato da equação ser linear implica que dois pacotes de ondas $f_1(x - ct)$ e $f_2(x + ct)$ tem necessariamente $f_3(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ como solução. A solução $f_3(x, t)$ tem como características o fato de que em um tempo t que tende a menos infinito consiste em dois pacotes de onda muito separados que se aproximam sem se distorcer. Em algum tempo t elas colidem e irão assintoticamente ($t \rightarrow \infty$) separar nos mesmos dois pacotes de onda originais, mantendo suas formas e velocidades originais.

No entanto, essas duas características ocorrem na Eq. 2.1 devido ao fato deste sistema ser linear e sem dispersão. Com isto, desejamos saber se é possível existir sistemas com equações não-lineares e com termos dispersivos que ainda permitam soluções que possuam as características **(i)** e **(ii)**. É interessante notar que a adição de termos dispersivos necessariamente impede as características **(i)** e **(ii)**, assim como a adição de termos não-lineares; No entanto é possível que a adição de termos não-lineares e dispersivos simultaneamente compensem uns aos outros, de forma que algumas soluções especiais apresentem a característica **(i)**. Os casos onde isto acontecem são chamados de ondas solitárias e dentro deste conjunto de soluções existe um subconjunto onde a característica **(ii)** também ocorre; estas soluções são chamadas de sólitons.

É possível também formalizar estes conceitos analisando a densidade de energia $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ ao invés dos campos $\phi(\mathbf{x}, t)$. A densidade de energia é uma função do campo e sua integral espacial nos dá o funcional da energia total $E[\phi_i]$, que é uma grandeza conservada. Consideraremos então que uma onda solitária é uma solução não singular de qualquer equação de campo não-linear cuja densidade de energia é localizada e possui uma dependência espaço-temporal da forma:

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \quad (2.2)$$

onde \mathbf{v} é um vetor velocidade. Em outras palavras, a densidade de energia deve se mover sem distorções e com velocidade constante. Definiremos então os sólitons como sendo ondas solitárias que ao interagirem tem que suas densidades de energia vão assintoticamente

($t \rightarrow \infty$) à forma e velocidade iniciais.

Dito isto, fica claro que o estudo de sólitons é extremamente complicado e uma área de grande interesse e em constante evolução em teoria de campos, o que não é o foco desta tese. Trabalharemos aqui com sólitons magnéticos, onde consideraremos que o sistema estudado é um campo vetorial magnético cujo estado de vácuo é o estado fundamental descrito por uma magnetização uniforme. Buscamos então por soluções de campos $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ que sejam topologicamente diferentes do estado de vácuo.

Grandes avanços aconteceram no estudo de sólitons em matéria condensada, uma área fundamentalmente quântica, usualmente não-relativística, e que tipicamente envolve estados complicados de muitos elétrons. Dado este pano de fundo, diversos modelos para descrever estes sistemas foram desenvolvidos baseados em teoria de campos clássicas, onde o campo normalmente representa a densidade de férmions e é assumido que varia de maneira lenta tanto no espaço quanto no tempo. É importante notar que as teorias de campos normalmente trabalham com infinitos graus de liberdade, o que não é verdade nos sistemas finitos de matéria condensada; no entanto, o número de graus de liberdade em um sistema real é muito grande e a aplicação das teorias de campo são boas aproximações.

Tratando então de sistemas magnéticos temos um exemplo clássico de sóliton na parede de domínio (PD), que é amplamente estudada desde a década de 70. Estas soluções também são amplamente conhecidas em teoria de campos, onde são chamadas de *kinks*, que são soluções relativamente semelhantes do modelo de sine-Gordon [7]. Mais recentemente temos os estudos de skyrmions magnéticos, que foram previstos teoricamente [8, 9] e descobertos experimentalmente poucos anos depois [10]. O estudo destes sistemas caracteriza estas estruturas através da topologia, como discutido acima. No caso dos skyrmions, definimos a carga topológica como sendo:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.3)$$

onde \mathbf{M} é o campo vetorial da magnetização. Este índice pode ser pensado fisicamente como descrevendo quantas vezes a magnetização no plano percorre uma esfera unitária. Na Fig. 2.1 representamos um skyrmion magnético no plano e no *inset*, a esfera unitária S^2 . Podemos ver que existe uma ligação direta entre cada vetor do skyrmion com um vetor na esfera, indicando que a carga topológica deste skyrmion é $\mathcal{Q} = 1$. Caso o skyrmion apresentasse cada ponto da esfera S^2 duas vezes diríamos que a sua carga topológica é $\mathcal{Q} = 2$

Os sólitons bidimensionais (2D) atraem um grande interesse em pesquisa nos dias de hoje e formam a base de diversas propostas tecnológicas. Podemos descreve-los como sendo um campo vetorial $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ espacialmente localizado imerso em um campo uniforme, mas sendo topologicamente não-trivial, de modo que não pode ser eliminado através de deformações contínuas. As orientações locais dos vetores $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ mapeiam completamente e unicamente uma esfera unitária 2D S^2 , o que é consistente com a proteção topológica

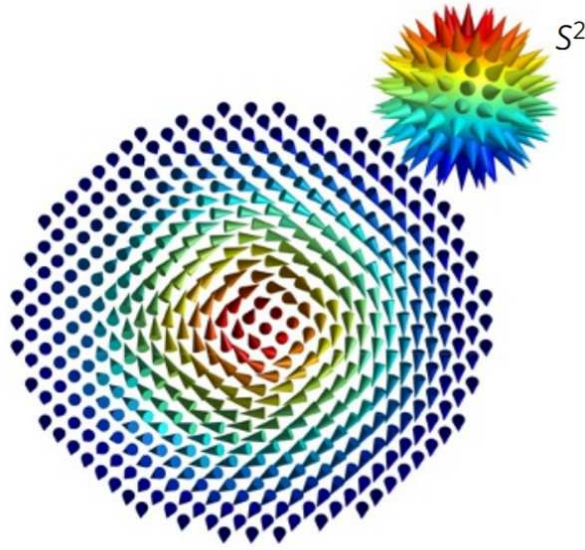


Figura 2.1: Skyrmion magnético e uma esfera unitária S^2 . Note que cada vetor do skyrmion pode ser mapeado em um vetor idêntico na esfera.

deste sóliton. A Fig. 2.1, retirada e adaptada da referência [11], mostra um exemplo de sóliton bidimensional e em seu *inset* temos a esfera unitária S^2 , onde é possível ver, ao menos de maneira qualitativa, que a magnetização $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ mapeia toda a esfera.

Além disso temos também a existência de sólitons tridimensionais (3D) que naturalmente são muito mais difíceis de serem estudados, tanto teoricamente quanto experimentalmente. Um exemplo em particular de um sóliton tridimensional é o hópffion, nomeado em homenagem a Hopf, que é considerado a contraparte tridimensional do skyrmion e está representado na Fig. 2.2. A carga topológica do hópffion é tipicamente chamada de índice de Hopf H e é definida de maneira diferente da carga topológica do skyrmion por ser uma estrutura tridimensional [12] e é definida como:

$$H = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_V \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} dV \quad (2.4)$$

onde $F_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{m} \cdot (\partial_j \mathbf{m} \times \partial_k \mathbf{m}) / 2$, sendo ϵ o tensor de Levi-Civita e \mathbf{A} um potencial vetor que satisfaz $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$. As componentes de \mathbf{F} são densidades de ângulo sólido e podem ser interpretadas como densidades do girovetor [13], campo magnético emergente [14] ou carga topológica [15].

Apesar das dificuldades técnicas para a criação, estabilização e caracterização destes sólitons a área de fabricação de amostras, em particular em geometrias curvas, se tornou uma área independente e permitiu diversas previsões interessantes. A fabricação destas estruturas curvas não é trivial e como o foco deste trabalho é teórico não entraremos em detalhes, mas na literatura encontramos diversos exemplos de métodos físicos e químicos para a construção de estruturas magnéticas com o formato de hastes [16, 17, 18, 19, 20], tubos [21, 22, 23, 24], cilindros [25], esferas [26, 27, 28, 29, 30] e hemisférios [31], para citar alguns exemplos mais simples. Também é possível criar estruturas magnéticas mais

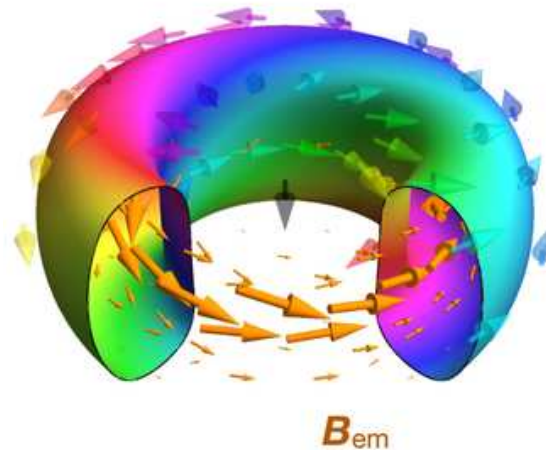


Figura 2.2: Representação esquemática de um hópfião.

complexas, como em formato de mola [32], hélices [33, 34] e tubos enrolados [35, 36, 37, 38, 39]

Note que até o presente momento apenas apresentamos que estas estruturas foram previstas e observadas. Nas seções posteriores temos como objetivo entender porque tais estruturas aparecem nestes sistemas magnéticos e como podemos estudar e manipular suas características estáticas e dinâmicas.

2.2 Magnetismo

Daremos agora um passo atrás e estudaremos os fundamentos dos materiais magnéticos. Todo material que é colocado em um campo magnético \mathbf{H} adquire um momento magnético. Este momento magnético por unidade de volume é chamado de magnetização do material \mathbf{M} . Para uma grande quantidade de materiais a magnetização é proporcional ao campo externo aplicado, de modo que podemos escrever esta relação como

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (2.5)$$

onde χ é chamado de susceptibilidade magnética do material. No entanto existem diversos materiais que não obedecem esta relação, dentre os quais destacamos uma classe que chamaremos de ferromagnetos. Nestes materiais a magnetização pode ser não nula em $\mathbf{H} = 0$ ou nem mesmo ser uma função de \mathbf{H} , sendo dependente de toda a história do campo aplicado.

Nestes materiais existem algumas grandezas úteis de se definir. A primeira delas é a magnetização de saturação M_s , que definiremos simplesmente como sendo \mathbf{M}_H para um campo magnético \mathbf{H} muito intenso. Esta grandeza representa a magnetização máxima que o material pode suportar, sendo o caso onde todos os momentos magnéticos estão apontando na mesma direção do campo. A outra grandeza de interesse é a coercividade

H_c , que é o valor de \mathbf{H} para o qual temos $M_H = 0$. Paralelamente temos a magnetização remanente (ou espontânea) M_r que é o valor da magnetização quando o campo externo é nulo.

Estes fatos podem ser entendidos qualitativamente com uma explicação dada por Weiss em 1907, onde foram assumidas duas hipóteses: a primeira é de que existe um campo magnético interno em materiais ferromagnéticos que tende a alinhar os dipolos magnéticos em uma mesma direção e a segunda é que a magnetização de uma amostra é dividida em regiões onde a magnetização é uniforme, chamadas de domínios magnéticos. Apesar desta explicação não ser muito precisa para os padrões atuais, ainda é útil para entender intuitivamente os processos relacionados à magnetização, visto que podemos entender este campo interno de Weiss como uma aproximação do um acoplamento entre os spins, como demonstraremos adiante. A existência dos domínios magnéticos, no entanto, foi diretamente observada por diversas técnicas e sua existência hoje é considerada um fato experimental.

2.3 Hamiltoniana de Heisenberg

Classificamos um material como ferromagnético quando sua magnetização tende a se alinhar espontaneamente, fato que tem sua origem na sobreposição das funções de onda dos íons [40] e descreve a tendência que os íons possuem de manter sua magnetização paralela ou antiparalela ao seu vizinho mais próximo. Apesar de ser uma interação puramente quântica e ser de relativa complexidade podemos descrever esta propriedade de alinhamento da magnetização de forma simplificada através da Hamiltoniana de Heisenberg, que é dada por:

$$H_x = -J \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (2.6)$$

onde os vetores \mathbf{S} representam a magnetização dos íons magnéticos e J é uma grandeza denominada de integral de troca que, para os interesses deste trabalho, consideraremos ser uma constante e chamaremos de constante de troca. Esta hamiltoniana descreve tanto sistemas ferromagnéticos quanto sistemas antiferromagnéticos, a depender do sinal de J . Caso o material possua uma constante $J > 0$ a configuração de menor energia ocorre quando momentos magnéticos S_1 e S_2 estão alinhados, ao passo que se $J < 0$ temos que a menor energia é obtida com os momentos S_1 e S_2 apontando em sentidos opostos.

Tentaremos agora entender as origens desta interação, que não possui nenhum análogo clássico. Para tal, considere um sistema de N elétrons ligados à M átomos. Definiremos as autofunções de um elétron i ligado ao átomo j , quando este está isolado do resto do sistema, como sendo $\varphi_i(\boldsymbol{\rho}_j)$, onde $\boldsymbol{\rho}$ representa todas as coordenadas do elétron, incluindo o spin. Queremos então construir uma função de onda para todos os elétrons quando os

átomos não estão isolados um dos outros e para isto utilizaremos o seguinte ansatz:

$$\psi = \frac{\det[\varphi_k]}{\sqrt{N!}} \quad (2.7)$$

onde $\det \varphi_k$ é uma notação para:

$$\det \varphi_k = \begin{vmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{\rho}_1) & \varphi_1(\boldsymbol{\rho}_2) & \dots & \varphi_1(\boldsymbol{\rho}_N) \\ \varphi_2(\boldsymbol{\rho}_1) & \varphi_2(\boldsymbol{\rho}_2) & \dots & \varphi_2(\boldsymbol{\rho}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_N(\boldsymbol{\rho}_1) & \varphi_N(\boldsymbol{\rho}_2) & \dots & \varphi_N(\boldsymbol{\rho}_N) \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Utilizamos este ansatz porque sabemos que a função de onda ψ deve ser necessariamente antissimétrica, o que significa que trocar dois elétrons de posição deve inverter o sinal de ψ . Construindo ψ através desta matriz temos que a troca de dois elétrons é equivalente à trocar a posição de duas colunas, o que inverte o sinal do determinante e implica que ψ é uma função de onda antissimétrica.

Assumiremos agora que os elétrons das camadas mais internas possuem uma interação intensa com o núcleo do átomo e, portanto, somente os elétrons das camadas mais externas interagem entre si. Assim, consideraremos que os elétrons internos e os núcleos constituem íons que criam um potencial V_i na posição do i -ésimo elétron. Assim, a Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{e^2}{r_{ij}} + \mathcal{H}_N \quad (2.9)$$

onde o primeiro termo representa a Hamiltoniana do i -ésimo elétron isolado, o segundo termo representa a interação Coulombiana do elétron i com o elétron j separados por uma distância r_{ij} e o terceiro termo são os termos relacionados aos íons das camadas internas.

O primeiro termo é dado por:

$$\mathcal{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 + V_i, \quad (2.10)$$

onde m_e é a massa do elétron. Aplicando a Hamiltoniana da Eq. 2.9 em ψ , definido na Eq. 2.7, podemos obter a energia do sistema, dada por:

$$\mathcal{E} = \int \psi^* \mathcal{H} \psi d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N = \frac{1}{N!} \int \det[\varphi_{k'}^*] \mathcal{H} \det[\varphi_k] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \quad (2.11)$$

Como o operador é linear, podemos dividir esta expressão nos três termos da Eq. 2.9:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i + \sum_{i,j=1}^N \mathcal{E}_{ij} + \mathcal{E}_N \quad (2.12)$$

onde os termos são definidos como:

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{N!} \int \det[\varphi_{k'}^*] \mathcal{H}_i \det[\varphi_k] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \quad (2.13)$$

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{N!} \int \det[\varphi_{k'}^*] \frac{e^2}{r_{ij}} \det[\varphi_k] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \quad (2.14)$$

$$\mathcal{E}_N = \frac{1}{N!} \int \det[\varphi_{k'}^*] \mathcal{H}_N \det[\varphi_k] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \quad (2.15)$$

Note que o termo \mathcal{E}_N depende unicamente dos íons internos e portanto não é relevante em nosso estudo de magnetismo.

O primeiro termo pode ser escrito como:

$$\mathcal{E}_i = (N-1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{N!} \int \varphi_k^*(\boldsymbol{\rho}_i) \mathcal{H}_i \varphi(\boldsymbol{\rho}_i) d\tau_i = \mathcal{E}_e \quad (2.16)$$

que representa a energia do i -ésimo elétron quando não interage com os outros. Com um argumento semelhante podemos avaliar o segundo termo como sendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'=1}^N \int |\varphi_k(\boldsymbol{\rho}_1)|^2 \frac{e^2}{r_{ij}} |\varphi_{k'}(\boldsymbol{\rho}_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 \\ - \frac{1}{2} \sum_{k,k'=1}^N \int \varphi_k^*(\boldsymbol{\rho}_1) \varphi_{k'}^*(\boldsymbol{\rho}_2) \frac{e^2}{r_{ij}} \varphi_k(\boldsymbol{\rho}_2) \varphi_{k'}(\boldsymbol{\rho}_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

No primeiro termo temos que $|e||\varphi_k(\boldsymbol{\rho}_1)|^2$ é a probabilidade de que o elétron está na coordenada $\boldsymbol{\rho}_1$, de modo que ele representa a interação de Coulomb entre um par de elétrons, somada para todos os pares. A segunda soma, no entanto, não possui uma interpretação clássica tão simples. Sabemos que este termo vem do potencial de Coulomb e do uso dos determinantes, que é uma exigência do princípio de Pauli. Isto nos induz a interpretar este termo como uma “correção” para a interação de Coulomb clássica, que não leva em conta o princípio de Pauli. As integrais do segundo termo são chamadas de integrais de troca e o somatório delas é chamado de termo de energia de troca. É relevante notar que neste termo a integração também é feita sobre as funções de spin, que são ortogonais. Isto significa que as integrais se anularão se os spins não são paralelos e este termo representa, simplesmente, a diferença de energia entre o estado com dois spins paralelos e dois spins antiparalelos.

É útil então separarmos esta dependência do spin. Faremos isto escrevendo uma

Hamiltoniana efetiva que explicita a diferença relativa entre as orientações dos spins:

$$\mathcal{H}_{ef} = - \sum_{i,j=1}^M J_{i,j} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (2.18)$$

onde

$$J_{i,j} = 2 \int \varphi_i^*(\mathbf{r}_1) \varphi_j^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \varphi_i(\mathbf{r}_2) \varphi_j(\mathbf{r}_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.19)$$

é o que chamamos de termo da energia de troca. Note que é um termo complicado de ser calculado e é fortemente dependente da sobreposição das funções de onda de $\varphi_i^*(\mathbf{r}_1)$ e $\varphi_j^*(\mathbf{r}_2)$ (e também de $\varphi_i(\mathbf{r}_2)$ e $\varphi_j(\mathbf{r}_1)$), de modo que podemos assumir que ele rapidamente tende a zero para distâncias longas. Em termos práticos esta integral possui um valor não-nulo apenas para os átomos mais próximos e é usual aproximarmos esta integral complicada por uma constante para primeiros vizinhos e zero para outros pares. Com isto, recuperamos finalmente a expressão 2.6, com a única diferença que explicitamos um sinal negativo em J de modo que valores positivos representam um material ferromagnético.

2.3.1 Interação de troca e micro-magnetismo

Note que a hamiltoniana de Heisenberg se baseia na soma de pares de vizinhos. No entanto, para muitas aplicações práticas, é mais interessante trabalhar com um modelo contínuo, uma aproximação válida quando as dimensões da estrutura magnética estudada são muito maiores do que as distâncias intermoleculares. Neste modelo, a magnetização é representada por um vetor contínuo \mathbf{m} dentro do corpo magnético e a hamiltoniana de Heisenberg pode ser escrita da seguinte forma [41]:

$$H_x = A \int_V [(\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2] dV \quad (2.20)$$

onde A representa a constante de troca no modelo contínuo. É importante notar que as Eqs. 2.6 e 2.20 não são diretamente comparáveis; os valores de energia possíveis na hamiltoniana de Heisenberg são limitados ao intervalo $[-J, J]$, ao passo de que no modelo contínuo as energias podem variar no intervalo $[0, \infty[$. A possibilidade de se obter um infinito nesta aproximação contínua se deve ao fato de que a energia cresce indefinidamente caso a magnetização varie de maneira abrupta, o que não acontece na hamiltoniana de Heisenberg discreta.

É muito comum escrever a magnetização parametrizada em coordenadas cartesianas, uma estratégia que utilizaremos no próximo capítulo. Assim, podemos escrever a magnetização como $\mathbf{M} = M_s \mathbf{m}$, onde M_s é a magnetização de saturação e \mathbf{m} é dado por:

$$\mathbf{m} = \sin \Theta \cos \Phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \Theta \sin \Phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \Theta \hat{\mathbf{z}} \quad (2.21)$$

onde vemos que o vetor \mathbf{m} é unitário e a sua direção é dada pelas funções Θ e Φ , que são funções das coordenadas cartesianas. Como estamos interessados em calcular as contribuições de energia em sistemas descritos desta maneira é útil escrever a Eq. 2.20 neste sistema de coordenadas. Resolvendo a equação explicitamente neste sistema, chegamos no seguinte resultado:

$$H_x = Al \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\sin^2 \Theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\sin^2 \Theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (2.22)$$

onde assumimos que a textura magnética está localizada apenas na superfície de uma amostra de espessura l .

2.4 Outras interações magnéticas

Os sistemas magnéticos são governados por diversas interações além da interação de troca e muitos fenômenos surgem da competição entre estas várias interações. Nesta seção iremos discutir as principais interações que serão relevantes nos trabalhos discutidos nesta tese.

Iniciaremos com a interação entre a magnetização e um campo magnético externo aplicado, conhecido como interação Zeeman. A energia de um dipolo em um campo magnético é dada por $dE_Z = \mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$, do qual podemos obter a energia total ao integrarmos em todo o espaço:

$$E_Z = -\mu_0 \int_V \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} dV \quad (2.23)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética. Vemos que esta interação simplesmente tende a alinhar os dipolos magnéticos \mathbf{m} com o campo externo \mathbf{H} e penaliza os desvios com um termo proporcional ao cosseno do ângulo entre eles. As outras interações são um pouco mais complicadas e serão discutidas em maiores detalhes nas subseções à seguir.

2.4.1 Interação de Dzyaloshinskii-Moriya

Além da interação de troca temos a interação de Dzyaloshinskii-Moriya (DMI), uma interação microscópica entre os íons magnéticos que ocorre em sistemas com forte acoplamento spin-órbita e que não possuem simetria de inversão [42]. Foi descoberta por Dzyaloshinskii [43] em 1960 ao introduzir um termo assimétrico em seu modelo para descrever o ferromagnetismo fraco. Mais tarde, Moriya contribuiu com o trabalho ao descobrir que a origem da interação é em parte devido ao acoplamento spin-órbita [44]. A

DMI entre dois íons pode ser descrita por [15]:

$$H_{DMI} = D \int_V \mathbf{m} \cdot (\nabla \times \mathbf{m}) dV \quad (2.24)$$

onde D representa a constante de DMI. Resolvendo esta equação utilizando a parametrização da magnetização em coordenadas cartesianas obtemos a expressão abaixo:

$$E_{DMI} = \int_V \left[- \left(\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right) \cdot \hat{x} + \left(\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \right) \cdot \hat{y} \right] \quad (2.25)$$

2.4.2 Interação Dipolar

A interação dipolar também é conhecida como interação desmagnetizante, pois ela tende a fazer com que a magnetização total da amostra tenda a zero de modo a diminuir a energia associada a interação do campo dipolar gerado pela amostra com sua própria magnetização. No entanto o cálculo deste campo desmagnetizante é extremamente complicado, pois é um campo não uniforme, de longa distância onde todos os momentos magnéticos interagem entre si.

Em sistemas pequenos temos que esta interação é consideravelmente menos intensa do que a interação de troca, mas ainda assim o seu efeito é extremamente relevante. Como a interação de troca é completamente isotrópica geralmente é a interação magneto-cristalina e dipolar que definem a direção da magnetização do material.

Uma das maneiras de descrever a relação entre a magnetização \mathbf{M} e o campo desmagnetizante \mathbf{H}_D é através do tensor desmagnetizante \mathbf{N} . A expressão:

$$\mathbf{H}_D = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{M} \quad (2.26)$$

é válida de maneira exata para um elipsoide, onde \mathbf{N} depende apenas dos comprimentos e orientações dos eixos principais. Para uma geometria diferente temos que o tensor \mathbf{N} passa a ser uma função da posição e o campo gerado não é uniforme, o que torna a obtenção de soluções analíticas para os tensores uma tarefa muito mais complicada. Além dos elipsoides, que foram calculados por Maxwell [45], também são conhecidas soluções para blocos retangulares [46], blocos de seção reta triangular [47] e, recentemente, também para cilindros [47, 48].

Mesmo considerando este ferramental matemático o cálculo da energia dipolar ainda é muito complicado. Felizmente, um efeito conhecido do campo desmagnetizante é favorecer certas direções preferenciais para as quais a magnetização deve apontar, fato que nos permite tratar esta interação complicada de uma forma similar à outras interações anisotrópicas [49]. Há diversas formas de interações anisotrópicas, sendo a mais comum a anisotropia magneto cristalina. Esta interação tem sua origem na interação spin-órbita, visto que a órbita dos elétrons está intimamente relacionada à estrutura cristalina do material e que portanto a interação entre os íons pode fazer com que a magnetização prefira certos eixos



Figura 2.3: A magnetização na direção alongada é energeticamente favorável devido à interação dipolar.

cristalográficos [40].

Um exemplo típico da energia desmagnetizante funcionando como uma anisotropia de forma é a magnetização de uma barra alongada, que possui um mínimo na energia dipolar quando a magnetização aponta na direção alongada. A Fig. 2.3 apresenta uma representação esquemática deste sistema, onde fica claro que quando a magnetização aponta ao longo da maior dimensão ela se alinha mais com o campo dipolar gerado pelos vizinhos do que quando aponta na direção menos alongada. Nestes casos, ao invés de realizar os cálculos complicados dos tensores desmagnetizantes podemos escrever uma hamiltoniana do tipo

$$H_D = -\lambda \cos^2 \theta \quad (2.27)$$

onde o ângulo θ define uma direção específica e a constante λ define o quão favorável (se $\lambda < 0$) ou desfavorável (se $\lambda > 0$) esta direção é. Naturalmente o cálculo da energia aproximada pela Eq. 2.27 é muito mais simples que o cálculo exato da Eq. 2.26 e este fato será muito útil nos casos onde sabemos que podemos aproximar a interação dipolar simplesmente à uma interação anisotrópica. Se outras interações anisotrópicas estão presentes isto normalmente se apresenta simplesmente com uma redefinição do valor de λ .

2.5 Paredes de domínio

Com um entendimento das principais contribuições de energia é possível agora entender como é possível a criação e estabilização de estruturas magnéticas que se comportam como partículas. Nesta seção temos como objetivo entender a existência dos domínios magnéticos em uma amostra e a estrutura da parede de domínio.

Primeiramente é importante dizer que três artigos de revisão foram extensivamente utilizados para estudar e entender os desenvolvimentos históricos e construir o conteúdo desse capítulo. Gostaria então de chamar atenção para os seguintes artigos, que merecem um destaque especial: "Physical Theory of Ferromagnetic Domains", escrito por Kittel em 1949 [50], "Domains, micromagnetics, and beyond: Reminiscences and assessments" por Brown em 1978 [51] e "Dynamic properties of magnetic domain walls and magnetic bubbles", escrito por Leeuw, Doel e Enz em 1980 [52].

A ideia de que um material ferromagnético está subdividido em vários domínios de

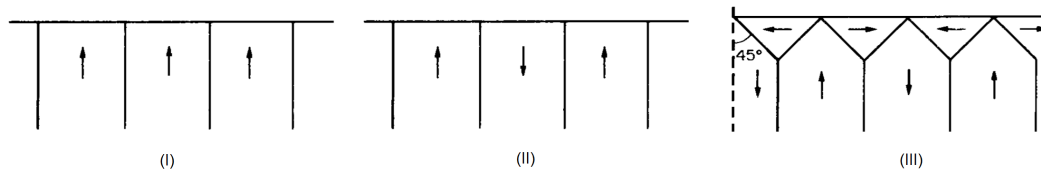


Figura 2.4: Representação esquemática de diferentes domínios magnéticos. Retirado e adaptado de [57].

magnetização uniforme surgiu no começo do século passado proposto Weiss [53] de modo a explicar como um material ferromagnético pode apresentar magnetização total nula e uma magnetização local diferente de zero. Nos anos posteriores diversas técnicas experimentais diferentes comprovaram a existência dos domínios magnéticos, como microscopia eletrônica com elétrons polarizados [54], microscopia de força magnética [55] e até mesmo microscopia ótica [56].

A estrutura de domínios magnéticos pode ser entendida ao se considerar a diferença de energia entre uma amostra que possui uma magnetização uniforme e uma amostra cuja magnetização total é nula, como representado na Fig. 2.4. Considerando um modelo simplificado onde temos apenas a interação de troca e dipolar é simples ver que a Fig. 2.4 (I) possui o menor valor para a energia de troca, mas o maior valor da energia dipolar e a Fig. 2.4 (III) possui o maior valor da energia de troca e o menor valor para a interação dipolar. Assim sendo, a existência e propriedades destes domínios pode ser entendida como uma estrutura que minimiza a energia total.

De maneira um pouco mais quantitativa, comparando as Figs. 2.4 (I) e (II), vemos que inverter o domínio central causa uma diminuição da energia dipolar, mas causa um aumento da energia de troca proporcional à área das duas paredes de domínio criadas. Assim, concluímos que domínios serão criados sempre que a perda da energia dipolar compensar o ganho de criação da parede de domínio. No entanto, a criação, dimensão e forma destes domínios depende de muitos fatores e é difícil tirar qualquer informação mais específica sem entrar em detalhes.

Como dito acima, a região de transição entre dois domínios magnéticos adjacentes é chamada de parede de domínio. Esta região apresenta uma magnetização que varia de forma contínua, ou seja, os domínios magnéticos não apresentam um salto abrupto de magnetização. Ao invés disto as paredes possuem uma estrutura interna que minimizam a energia total, como demonstrado por Bloch[58] em 1932. O motivo para isto é que a energia de troca é menor quando a mudança é feita ao longo de muitos átomos, como pode ser visto ao se considerar a energia de troca de uma parede de domínio no modelo contínuo [40]:

$$E_{ex} = \frac{JS^2\phi_0^2}{N} \quad (2.28)$$

De acordo com a equação 2.28 vemos que para minimizar a energia, uma parede de

domínio idealmente teria $N \rightarrow \infty$ átomos. Outras contribuições de energia impedem que este seja o caso, como por exemplo a energia anisotrópica: os domínios usualmente estão na direção do eixo fácil de magnetização e a região de transição da parede de domínio está necessariamente apontando em outras direções. Este fato faz com que mais energia seja necessária para manter os íons nesta posição devido a anisotropia cristalina, o que torna energeticamente favorável que a PD possua uma largura finita, sendo que o tamanho final da PD depende do balanço entre estas duas contribuições de energia (troca e anisotropia).

2.6 Skyrmions

No contexto de física do estado sólido, skyrmions são texturas magnéticas com estabilidade topológica cujo comportamento se assemelha ao de partículas. Eles são definidos por uma quantidade topológica denominada número de skyrmion e que não pode ser alterada com deformações contínuas dada pela Eq.2.3 e que representa quantas vezes o vetor unitário $\mathbf{m}(r)$ dá a volta em uma esfera unitária [59].

A existência dos skyrmions tem sido comprovada por diversos trabalhos utilizando-se de diversas técnicas experimentais diferentes, como espalhamento de nêutrons [60], microscopia eletrônica por transmissão de Lorentz (LTEM) [61] e microscopia por escaneamento túnel (srSTM) [62].

Skyrmions aparecem como o estado fundamental de diversos sistemas para certos intervalos de temperatura e campos magnéticos [63, 64]. O tamanho do skyrmion depende da razão da intensidade entre a interação de troca e as outras interações responsáveis por estabilizar o skyrmion.

Grande parte do interesse em skyrmions se deve ao fato de que são candidatos promissores para serem usados em dispositivos lógicos e de memória [65, 66], visto que a densidade de corrente elétrica necessária para movê-los é por volta de seis ordens de grandeza menor do que a corrente necessária para mover paredes de domínio [67] que são utilizadas nos dispositivos atualmente [68].

2.7 Dinâmica da magnetização

Baseado no que foi descrito anteriormente, estamos preparados para estudar a dinâmica da magnetização $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ em sistemas magnéticos. A equação que descreve a dinâmica da magnetização é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) \quad (2.29)$$

onde γ é a razão giromagnética e \mathbf{T} é a densidade do torque resultante, tendo como causa contribuições da interação de troca, anisotrópica, dos campos externos, da temperatura e de qualquer outra fonte relevante para o problema estudado. Assumiremos que o torque é

dado por $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef}$, onde \mathbf{H}_{ef} representa um campo magnético efetivo causado por todas as contribuições consideradas relevantes. Além disso, adicionaremos um termo dissipativo da forma $\mathbf{M} \times \partial\mathbf{M}/\partial t$, o que nos permite escrever a equação dinâmica para a magnetização, também conhecida como equação de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG):

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef} + \frac{\alpha}{M_s}\mathbf{M} \times \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} \quad (2.30)$$

onde α é a constante de amortecimento de Gilbert e M_s é a magnetização de saturação do material. A equação de LLG é extremamente poderosa para estudar as propriedades magnéticas de um sistema, sendo uma ferramenta muito utilizada em programas de cálculos micro-magnéticos, que usualmente se utilizam de métodos de diferenças finitas para resolver a equação numericamente [69]. No entanto trata-se de uma equação cujas soluções são extremamente complicadas de se obter analiticamente, em particular fora dos casos mais simples possíveis.

Este trabalho tem como foco principal o estudo analítico de sistemas magnéticos e portanto torna-se útil tentar buscar alguma aproximação que nos permita obter resultados fora das situações mais triviais. Como estamos tipicamente interessados em texturas magnéticas rígidas, podemos descrever a dinâmica da estrutura a partir de um único ponto de referência $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, como o centro de um vórtice ou da parede de domínio, por exemplo. Para que a estrutura seja um corpo rígido temos que a dinâmica de um ponto $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ qualquer em relação ao ponto de referência é dada por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \quad (2.31)$$

A derivada temporal da magnetização pode ser obtida utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{d\mathbf{M}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{dX} \frac{dX}{dt} + \frac{d\mathbf{M}}{dY} \frac{dY}{dt} + \frac{d\mathbf{M}}{dZ} \frac{dZ}{dt} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{M}(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t)) \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{v} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ é a velocidade da estrutura magnética. Substituindo as Eqs. 2.31 e 2.32 na Eq. 2.30 é possível transformar a equação de LLG no que é conhecido como a Equação de Thiele:

$$-g\hat{z} \times \mathbf{v}(t) + \alpha D\mathbf{v}(t) = -\nabla U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.33)$$

onde g é o giro-tensor, D é o tensor de dissipação e U é o potencial das interações relevantes. Estas grandezas possuem uma forma complicada, mas o fato de trabalharmos com skyrmions perfeitamente simétricos fazem com que assumam uma forma mais simples. Para os nossos casos de interesse temos que $g = 4\pi M_s/\gamma$, onde γ é a razão giromagnética e $D = 5.557\pi$ [70]. Um estudo mais detalhado e geral pode ser encontrado na referência [71].

Capítulo 3

Acoplamento de skyrmions em bicamadas

3.1 Introdução

Neste capítulo discutiremos o estudo das propriedades estáticas e dinâmicas de skyrmions acoplados mediante interações de troca indiretas. O desenvolvimento deste trabalho teve como principal motivação resultados de simulação obtidos pelo nosso grupo de pesquisa, os quais demandavam uma explicação teórica robusta.

O sistema estudado nas micro-simulações consiste de duas camadas de um material ferromagnético separadas por um material que permite o acoplamento indireto entre as duas capas. Em cada camada foi estabilizado um skyrmion e uma corrente elétrica foi aplicada no skyrmion da camada superior com o objetivo de estudar a sua dinâmica e possível interação com o skyrmion da camada inferior. Os resultados estão resumidos na Fig. 3.1, onde podemos ver que o skyrmion superior se move quase livremente até passar exatamente acima do skyrmion na camada inferior, momento no qual eles passam a se mover de maneira conjunta e há um súbito aumento do raio de ambos os skyrmions. Foi verificado também que a remoção da energia dipolar não afetava os resultados de maneira significativa, de modo que o acoplamento entre os skyrmions tem como fonte alguma outra interação.

Baseado no sistema simulado inicialmente, propusemos um modelo analítico no qual a interação de Ruderman–Kittel–Kasuya–Yosida (RKKY) [72, 73, 74] poderia ser uma possível forma de acoplar skyrmions. Nesse caso, assumimos que as camadas magnéticas são separadas por um material condutor não-magnético.

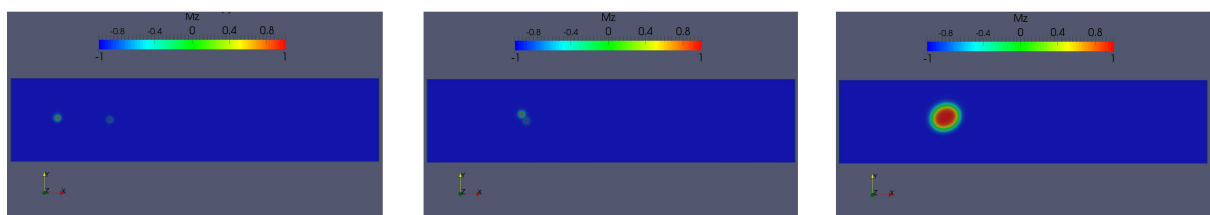


Figura 3.1: Simulação computacional mostrando a dinâmica de dois skyrmions separados por uma camada não magnética.

3.2 Interação RKKY

A interação RKKY se refere ao acoplamento dos íons magnéticos através dos elétrons de condução, sendo particularmente relevante quando temos um sistema composto de materiais magnéticos separados por um metal condutor. Foi originalmente proposta por Ruderman e Kittel [72] em 1954 e posteriormente complementada por Kasuya [73] em 1956 e Yosida [74] em 1957. Esta interação é de grande relevância em estudos de spintrônica pois nos permite ajustar a intensidade do acoplamento entre duas camadas magnéticas, sendo possível até mesmo escolher entre ferromagnético ou antiferromagnético, através de um parâmetro facilmente controlável em laboratório. O estudo desse acoplamento levou, por exemplo, à descoberta do efeito de magnetorresistência gigante [75, 76], ideia que ganhou o prêmio Nobel de física no ano seguinte.

A interação RKKY entre dois momentos magnéticos \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 é dada por:

$$E_{RKKY} = F(d) (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) \quad (3.1)$$

onde $F(d)$ é uma função que depende da distância d entre os dois momentos dada por [76]:

$$F(d) = C_3 \left(\frac{2k_f d \cos(2k_f d) - \sin(2k_f d)}{k_f^4 d^4} \right) \quad (3.2)$$

onde k_f é o vetor de onda de Fermi do material e C_3 é uma constante que depende do material [76]. A interação RKKY em função da distância possui um comportamento muito interessante, onde, dependendo da distância entre dois momentos magnéticos, a interação oscila entre favorecer que os momentos fiquem alinhados paralelamente ou favorecer que fiquem alinhados antiparalelamente enquanto vai ficando progressivamente menos intensa, como esquematizado na Fig. 3.2. Estes mínimos de energia para longas distâncias fazem com que esta interação seja uma boa candidata para ser responsável pelo acoplamento dos skyrmions nas simulações, nos permitindo inclusive inferir que diferentes espessuras do material não-magnético podem produzir uma interação nula entre os skyrmions ou até mesmo repulsiva.

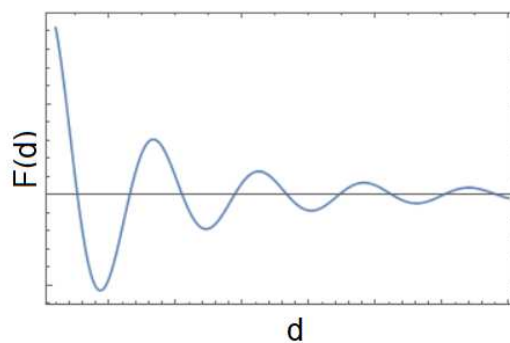


Figura 3.2: Representação esquemática da energia de interação RKKY entre dois momentos magnéticos em função da distância.

Com o objetivo de modelar a interação RKKY para um sistema contínuo iremos usar a Eq. 3.1 para dois momentos e integrar para todos os pares \mathbf{m}_1 da camada inferior com \mathbf{m}'_2 da camada superior, onde introduzimos a linha apenas para diferenciar as camadas. Com isto, temos a expressão:

$$E_{RKKY} = \int F(d) (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}'_2) dV_1 dV'_2 \quad (3.3)$$

Em nossa aproximação consideramos que as camadas ferromagnéticas são suficientemente finas de modo que a magnetização \mathbf{m} seja uniforme ao longo da espessura. Desta maneira podemos realizar as integrais apenas na superfície.

3.3 Resultados

Consideraremos um sistema constituído de duas camadas de material magnético de dimensões $2\ell_1$ e $2\ell_2$ separadas por uma camada de um material condutor não magnético de espessura d , como representado na Fig. 3.3. Como as camadas ferromagnéticas estão separadas, é possível estabilizar skyrmions em cada uma delas independentemente, visto que elas não interagem por interação de troca ou DMI, que são de curta distância. Definiremos a origem do sistema de coordenadas como sendo o centro do skyrmion da camada inferior e como condição inicial colocaremos o skyrmion superior na coordenada $(-\xi, \zeta, d)$. Trabalharemos em coordenadas polares, onde descreveremos os skyrmions utilizando a variável ρ com o seguinte ansatz:

$$M(\Theta, \Phi) = \begin{cases} \Theta_j = \arccos\left(\frac{\lambda^2 - \rho_j^2}{\lambda^2 + \rho_j^2}\right) \\ \Phi = \phi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde λ é o raio do skyrmion e ρ_j é a posição do centro do skyrmion da camada j .

O principal objetivo deste trabalho é entender a interação responsável pelo acoplamento entre os skyrmions em diferentes camadas. Assim, utilizaremos um modelo simples de energia neste sistema, com apenas três contribuições: a energia de troca e energia de Dzyaloshinskii-Moriya para estabilizar os skyrmions e a energia RKKY sendo a única responsável pela interação entre as camadas. Interações de anisotropia ou dipolar não foram calculadas no modelo analítico proposto porque não trariam mudanças qualitativas

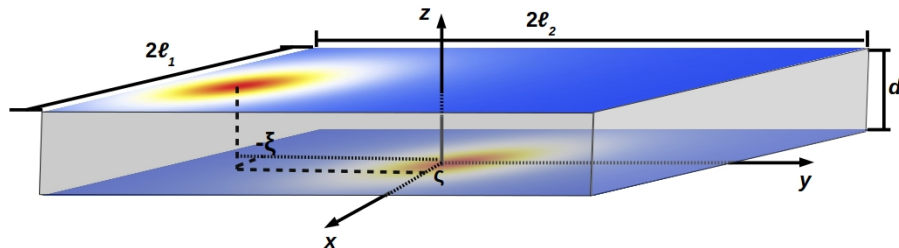


Figura 3.3: Representação do sistema estudado e definição do sistema de coordenadas.

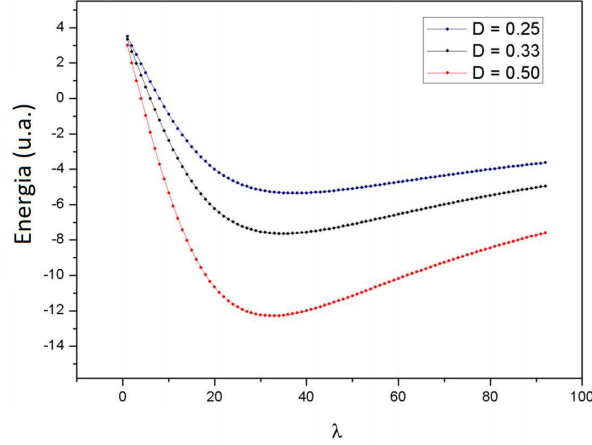


Figura 3.4: Soma das energias de troca ($A = 1$) e DMI ($D = 0.25$, $D = 0.33$ e $D = 0.50$) em função do raio λ do skyrmion.

significativas em nossos resultados. De fato, os resultados preliminares da simulação mostraram que a inclusão da interação dipolar não afetou a dinâmica de modo significativo.

Dessa forma, nosso objetivo é calcular os três termos de energia dados pelas Eq. 2.22, Eq. 2.25 e Eq. 3.3, assumindo que a magnetização está parametrizada em coordenadas cartesianas como na Eq. 3.4. Nesse caso, temos que a energia de troca, DMI e RKKY são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 E_x &= A l \int \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \\
 E_{DMI} &= D \int \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos \phi \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \left[\cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx dy \\
 E_{RKKY} &= \int F(\rho) (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}'_2) dS_1 dS'_2
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A interação de troca e a interação DMI podem ser integradas analiticamente, o que nos leva à:

$$\begin{aligned}
 E_x &= 4\pi\lambda^2 J \mathcal{G}_j \\
 E_{DMI} &= 2\pi\lambda^3 D \mathcal{G}_j
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\mathcal{G}_j = (\mathcal{L}_j + \lambda^2)^{-1} - (R_j + \lambda^2)^{-1}$, sendo $\mathcal{L}_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$ e $R_j^2 = \min [(\ell_1 - x_j)^2 + (\ell_1 - y_j)^2, (\ell_2 - x_j)^2 + (\ell_2 - y_j)^2]$. Desta forma compactada podemos ver que, no limite $R_j \gg \lambda$, temos que $E_x \approx 8\pi J$ e $E_{DMI} \approx 4\pi\lambda D$, resultados que estão de acordo com as soluções solitônicas do modelo σ não-linear e dão robustez ao modelo.

Estas duas energias são responsáveis por estabilizar cada skyrmion em sua respectiva camada. Para garantir que este é o caso iremos somar estas duas contribuições e verificar que existe um raio λ que minimiza as duas energias. O resultado pode ser visto na Fig. 3.4, onde fixamos $A = 1$ e verificamos que para diversos valores distintos de D é possível obter um valor de λ que minimiza a energia.

Apesar de ser possível obter soluções analíticas para a interação de troca e DMI

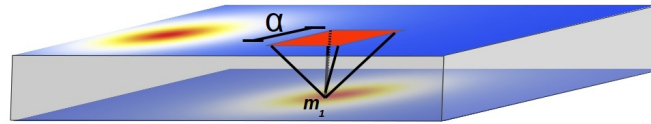


Figura 3.5: Representação esquemática da aproximação utilizada no cálculo numérico. Somente os momentos dentro do quadrado vermelho foram considerados na interação RKKY.

o mesmo não ocorre com a interação RKKY dada na Eq. 3.5, visto que se trata de duas integrais duplas acopladas. Assim sendo buscamos soluções numéricas. No entanto verificou-se que realizar o cálculo numérico em toda a região do espaço demanda muito tempo computacional, sendo necessário então realizar alguma aproximação. Tendo em vista que a interação RKKY é proporcional à $(k_f \rho)^{-4}$ e que portanto deve cair rapidamente para $\rho > k_f$, foi escolhido que para cada momento magnético da camada inferior a integração na camada superior seria feita apenas nos momentos magnéticos vizinhos que se encontrassem dentro de um quadrado de lado α do momento magnético mais próximo, como representado na Fig. 3.5.

Para garantir a validade da aproximação, realizamos o cálculo numérico do valor total da interação em função do lado α do quadrado, cujo resultado é mostrado na Fig. 3.6. Como pode ser visto, o comportamento qualitativo da energia segue o comportamento da Eq. 3.2, tendo um comportamento oscilatório que rapidamente converge para um valor fixo. Assumiremos em nossos cálculos valores de α próximos a 1, visto que neste valor já estamos bem próximos do valor de convergência.

Com isto estamos prontos para estudar o comportamento da energia RKKY neste sistema. Para as integrações numéricas utilizamos uma unidade de energia normalizada por C_3 . Assim sendo, todos os resultados apresentados abaixo representam a energia dividida por C_3 .

Sabendo que a interação RKKY entre dois momentos é oscilatória buscamos inicialmente verificar se é possível obter uma interação atrativa e uma repulsiva. Para tanto, calculamos

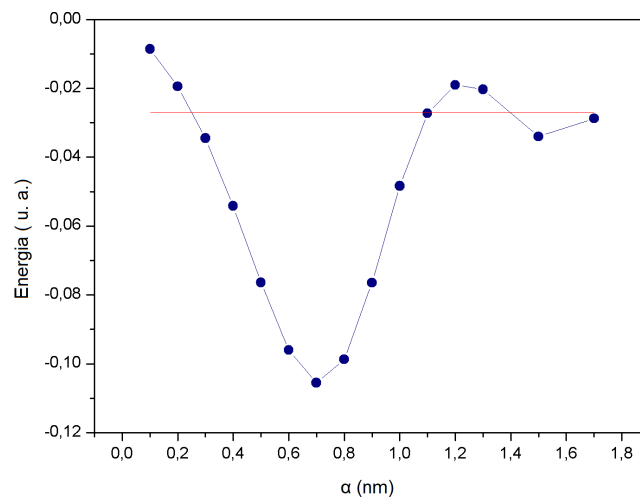


Figura 3.6: Energia RKKY em função do parâmetro α .

a energia RKKY do sistema com o skyrmion inferior na origem e o skyrmion superior localizado em $(x, 0, d)$, de modo que $x = 0$ representa os skyrmions na menor distância possível, quando o skyrmion da capa superior está exatamente acima do skyrmion na capa inferior.

Para uma distância de separação $d = 2,5$ nm obtemos o resultado da Fig. 3.7. Podemos ver que a energia RKKY possui um comportamento semelhante ao de uma parábola com um valor máximo em $x = 0$. Com isto, devido ao comportamento da energia como uma função da distância, quando o skyrmion da camada superior se aproxima do skyrmion inferior não ocorre um acoplamento e sim um espalhamento.

Para uma distância de separação $d = 4,0$ nm temos um comportamento diferente. No resultado apresentado na Fig. 3.8 vemos que a energia de interação apresenta um comportamento semelhante ao de parábola para valores pequenos de x e uma eventual saturação para valores maiores. No entanto, neste caso vemos que $x = 0$ representa um mínimo da energia e conseqüentemente um acoplamento entre os skyrmions se torna possível.

Tendo obtido o comportamento da energia como uma função da distância, podemos estudar qual a relação do raio do skyrmion com a energia RKKY. Na Fig. 3.9 mantivemos a espessura $d = 4.0$ nm obtivemos um gráfico da energia em função da posição do skyrmion superior para diferentes raios, onde é possível ver que quando os skyrmions estão logo acima um do outro, o raio não interfere na energia. Entretanto, quando o skyrmion superior se afasta raios menores são favorecidos energeticamente. Com isto, é possível entender o súbito aumento do raio dos skyrmions observado nas micro-simulações magnéticas quando eles se acoplam, visto que neste caso, quando distantes um do outro, a interação RKKY entre o skyrmion em uma camada e a configuração ferromagnética na outra força uma

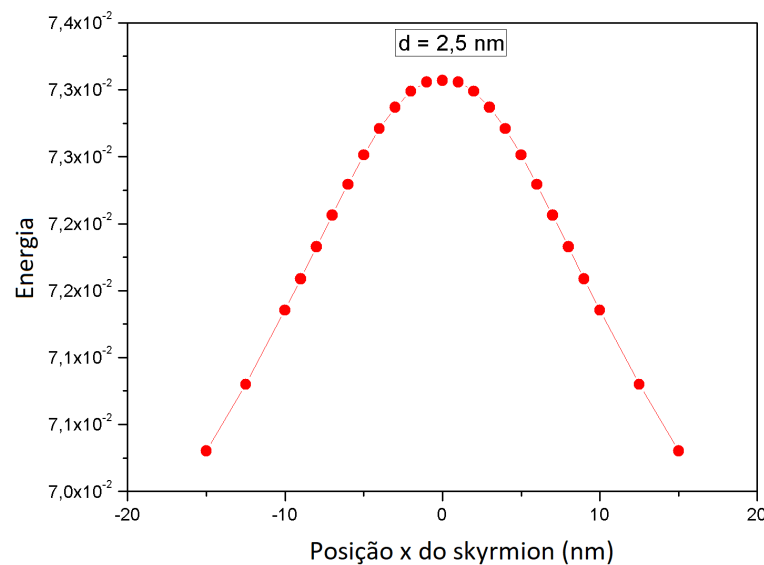


Figura 3.7: Energia de interação em função da posição do skyrmion superior para uma distância de separação $d = 2,5$ nm.

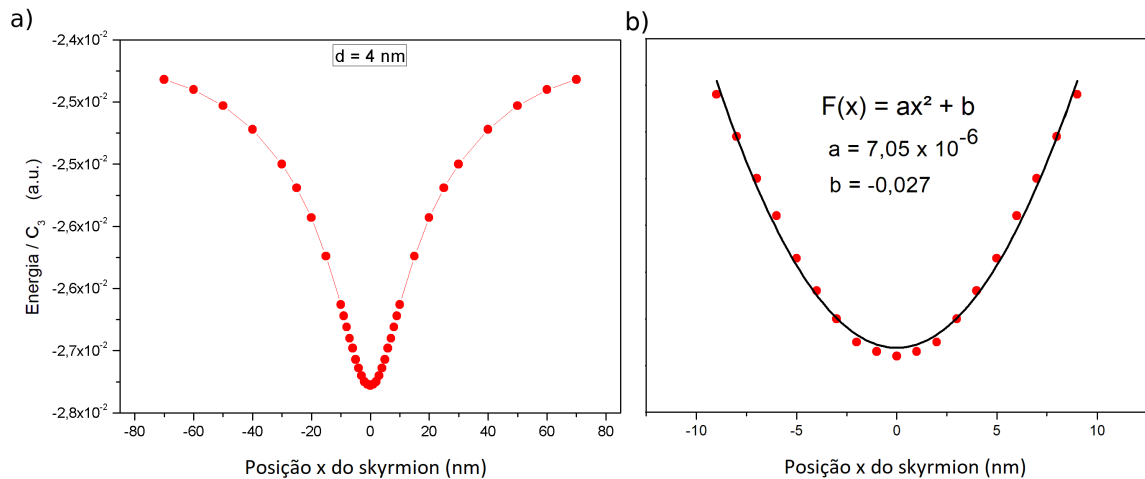


Figura 3.8: a) Energia de interação em função da posição do skyrmion superior para uma distância de separação $d = 4 \text{ nm}$ e b) Aproximação quadrática para pequenas distâncias.

redução do raio dos skyrmions. Entretanto, quando estão acima um do outro, os skyrmions podem finalmente voltar aos seus raios originais (definidos apenas pela interação de troca e DMI na Fig. 3.4).

Por fim, vamos estudar a dinâmica entre esses dois skyrmions. Apesar de não estarmos estudando estruturas rígidas, visto que o raio não é constante, utilizaremos a equação de Thiele com o argumento de que estamos estudando os momentos imediatamente anterior e posterior à mudança nos raios. Com isto, temos que

$$-g\hat{z} \times \mathbf{v}_j(t) + \alpha D \mathbf{v}_j(t) = \nabla U(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)) \quad (3.7)$$

onde o subscripto j se refere à cada camada do sistema. Na equação acima $g = 4\pi M_s / \gamma$,

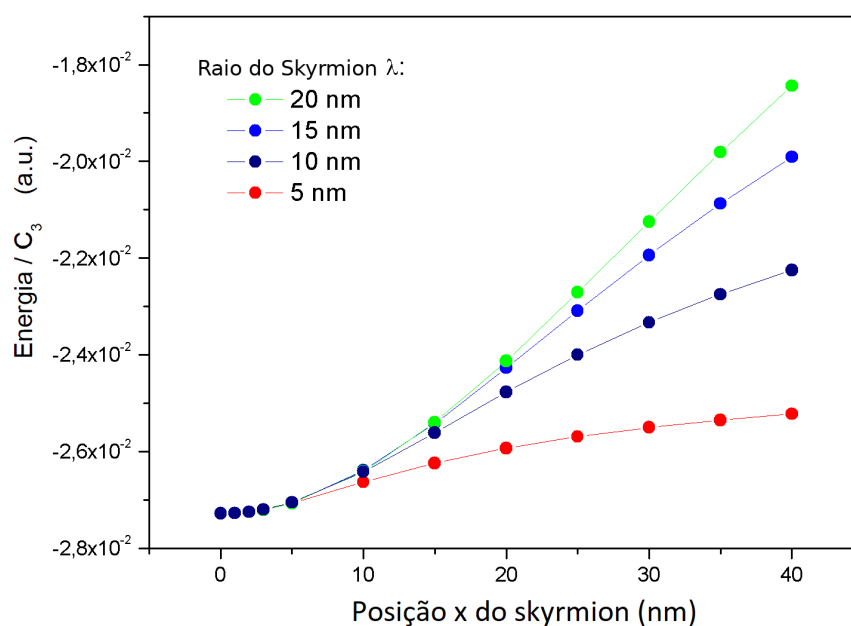


Figura 3.9: Energia RKKY em função da posição do skyrmion superior para diferentes raios.

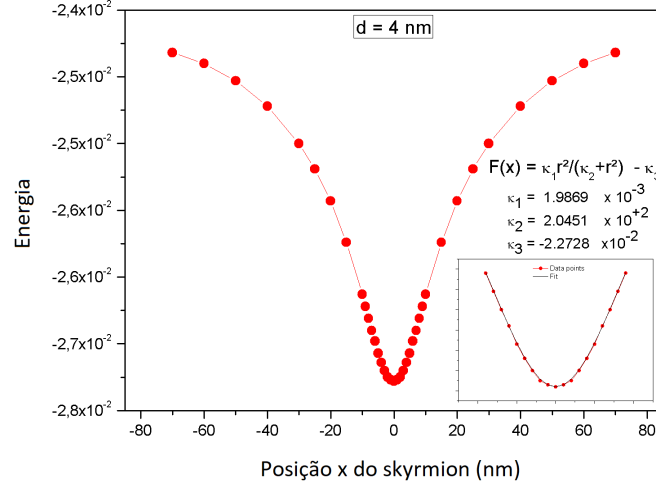


Figura 3.10: Pontos numéricos e *fit* da função $F(x)$.

onde γ é a razão giromagnética,

O termo $U(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))$ consiste do potencial de interação entre os skyrmions, de tal forma que, no caso do presente estudo, advém puramente da interação RKKY. Como discutido acima, não foi possível obter uma expressão analítica para este potencial, dado a complexidade da interação e ao fato de ser de longa distância. No entanto, os resultados apresentados na Fig. 3.7 deixam claro que para distâncias pequenas (menores que 20 nm, no nosso caso) podemos considerar nosso potencial como sendo da forma $U_{\rho \rightarrow 0} = k_1 \rho^2$, onde k_1 é uma constante que depende dos parâmetros do espaçador d e ρ é a distância entre os skyrmions no plano xy . Para skyrmions muito afastados ($\rho \gg \lambda$) a energia de interação é basicamente constante, tendendo ao valor da interação entre um skyrmion e uma camada ferromagnética. Temos então que $U_{\rho \rightarrow \infty} = k_3$. Nestes limites assintóticos é possível obter uma solução analítica para as equações dinâmicas dos dois skyrmions. Dessa forma, ao se aproximarem um do outro, a posição do skyrmion na camada inferior é dada por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \left(\zeta + e^{\frac{-4k_1 \alpha t}{16\pi^2 + \alpha^2}} \left[\zeta \cos\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) - \xi \sin\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) \right] \right) \\ y_1 = \frac{1}{2} \left(-\xi - e^{\frac{-4k_1 \alpha t}{16\pi^2 + \alpha^2}} \left[\zeta \sin\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) + \xi \cos\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) \right] \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

enquanto as componentes x e y do vetor posição do skyrmions na camada superior são, respectivamente:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2} \left(\zeta + e^{\frac{-4k_1 \alpha t}{16\pi^2 + \alpha^2}} \left[-\zeta \cos\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) + \xi \sin\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) \right] \right) \\ y_2 = \frac{1}{2} \left(\xi + e^{\frac{-4k_1 \alpha t}{16\pi^2 + \alpha^2}} \left[\zeta \sin\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) + \xi \cos\left(\frac{16k_1 \pi t}{16\pi^2 + \alpha^2}\right) \right] \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

onde ξ e ζ são as coordenadas da posição inicial do skyrmion superior, como definido na Fig. 3.3. Para determinar completamente a dinâmica é necessário buscar uma forma simples de descrever a função mostrada na Fig. 3.8. Como discutido sabemos que para pequenas distâncias ela se comporta como uma função quadrática e para grandes distâncias

temos um valor de saturação, o que nos permite propor que a função pode ser aproximada pelo ansatz $U(\rho) = \frac{k_1\rho^2}{k_2+\rho^2} + k_3$, que claramente satisfaz os limites assintóticos. Na Fig. 3.10 podemos ver que este ansatz corresponde extremamente bem à curva obtida numericamente para todos os valores de x considerados.

Tendo definido a função $U(r)$ podemos resolver a Eq. de Thiele e determinar a dinâmica do sistema. Consideramos que inicialmente os skyrmions estão em repouso separados de uma distância $d \approx \lambda$. Vemos na Fig. 3.11 que o resultado disso é que os skyrmions são atraídos um em direção ao outro e fazem um movimento de precessão de poucos nanômetros em torno do centro. Podemos entender esta precessão como sendo o deslocamento em direção ao centro provocado pela interação RKKY somado com a deflexão causada pelo efeito Magnus, que faz com que eles se desloquem lateralmente. Verificamos que a precessão possui uma frequência bem definida dada por $\omega = 4k_1g/(g^2 + \alpha^2)$.

Os resultados aqui obtidos foram publicados na revista Applied Physics Letters, com o artigo tendo recebido destaque como a escolha do editor [77].

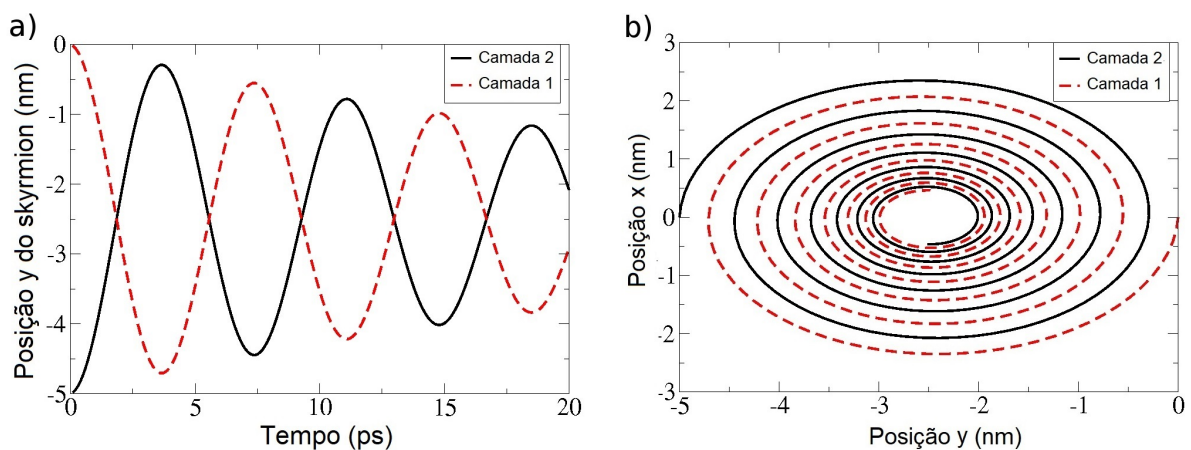


Figura 3.11: Posição dos skyrmions em função do tempo (a) e mapa de posição dos skyrmions (b).

Capítulo 4

Oscilação de paredes de domínio em um nanofio curvo

4.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos as propriedades dinâmicas e estáticas de um sóliton no plano. Neste capítulo começaremos a estudar como a curvatura do substrato afeta estas propriedades. Para tal fim, estudaremos a dinâmica de uma parede de domínio (PD) em um fio curvo, visto que estes sistemas tem sido amplamente estudados [78] e apresentam PDs que podem apresentar massa efetiva nula e velocidades que variam linearmente como campo aplicado, não apresentando um limite de Walker [79, 80, 81]. Neste trabalho continuaremos a investigação iniciada na Ref. [82], com a diferença que aplicaremos um campo magnético na direção poloidal, de modo que este é tangente ao fio em todos os pontos. Além disso, analisaremos detalhadamente os efeitos da curvatura e campo externo sobre a frequência e amplitude da oscilação de PDs quando estas se deslocam acima do limite de Walker. Faremos isto descrevendo o fio como a seção de um torus e utilizaremos as coordenadas esquematizadas na Figura 4.1.

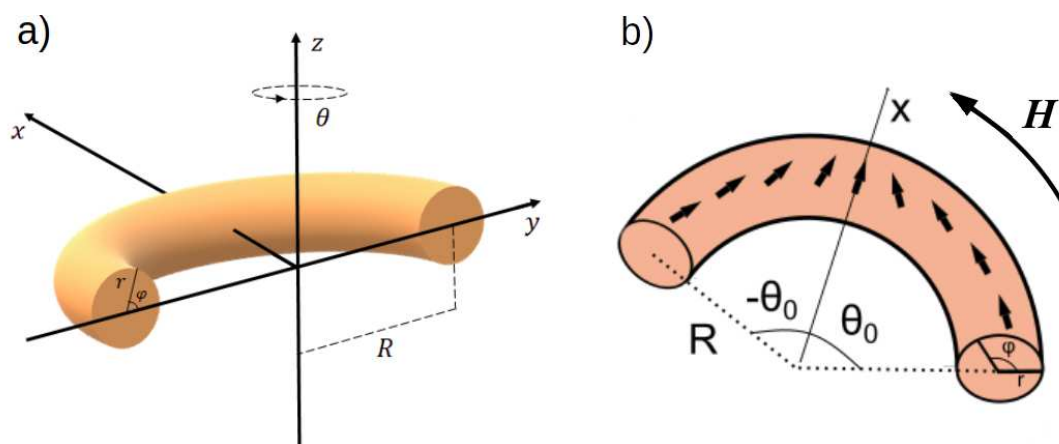


Figura 4.1: Representação esquemática do sistema de coordenadas utilizado.

Definiremos o comprimento do fio como sendo L e seus raios interno e externo dados

por r e R , respectivamente, e ângulos toroidal e poloidal dados por ϕ e θ . Neste contexto, onde fixamos o comprimento L e o raio de curvatura R , podemos controlar a curvatura do fio escolhendo o ângulo de abertura θ_0 , visto que estas três grandezas estão diretamente relacionadas através da expressão $L = 2R\theta_0$. Assim sendo, definindo a curvatura como $\mathcal{K} = 1/R$, e tomando o fato de que $R = L/2\theta_0$, podemos obter um fio reto no limite onde $\theta_0 \rightarrow 0$. Além disso, maiores curvaturas são obtidas à medida em que aumentamos θ_0 .

Assim como na seção anterior, vamos descrever a magnetização através de uma parametrização do tipo $\mathbf{m} = \sin \Theta \cos \Phi \mathbf{e}_r + \sin \Theta \sin \Phi \mathbf{e}_z + \cos \Theta \mathbf{e}_\theta$, onde os vetores direcionais estão definidos na Fig 4.1. A magnetização normalizada $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$ da PD "cabeça-com-cabeça"(head-to-head) pode ser descrita pelo seguinte ansatz [83, 84]:

$$\mathbf{m}(\Theta, \Phi) = \begin{cases} \Theta = 2 \arctan \left[\exp \left(\frac{R\theta - q(\tau)}{\Delta} \right) \right] \\ \Phi = \phi(\tau) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $q(\tau)$ e $\phi(\tau)$ são as variáveis coletivas descrevendo a posição e a fase do centro da parede de domínio, respectivamente, e Δ define a largura da PD. Definimos também $\tau = (\gamma_0 M_s) t$ como sendo um parâmetro de tempo adimensional. Com esta parametrização podemos reescrever a equação de Landau-Lifshitz-Gilbert na seguinte forma:

$$\begin{cases} -\sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi} + \alpha \sin^2 \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \\ \sin \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \Theta} + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $\epsilon = E/(\mu_0 M_s^2 V)$ é a energia adimensional, μ_0 é a permeabilidade magnética, α é o parâmetro de amortecimento de Gilbert e $\gamma_0 = \mu_0 |\gamma|$ é o fator giromagnético.

Aplicando o ansatz definido na Eq. 4.1 na equação 4.2 chegamos às seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{2S} \frac{\partial \epsilon}{\partial \phi} + \alpha \Delta \dot{\phi} \\ \dot{\phi} = -\frac{1}{2S} \frac{\partial \epsilon}{\partial q} + \frac{\alpha}{\Delta} \dot{q} \end{cases} \quad (4.3)$$

onde S é a área de seção reta do fio, dada por $S = \pi r^2$. Para prosseguirmos é necessário discutir os termos que compõe a energia ϵ , que faremos na seção à seguir.

4.2 Contribuições de energia

Assim como no capítulo anterior, vemos nas Eqs. 4.3 que a energia total é uma peça chave na dinâmica das paredes de domínio. Assim sendo, é necessário buscar um modelo para a energia e possivelmente calcular as contribuições relevantes.

Consideramos um modelo simplificado onde as contribuições de energia para a dinâmica da PD são da interação de troca, dipolar e de Zeeman. Assim sendo, nessa seção temos como objetivo calcular estas densidades de energia e a energia total.

Consideraremos que o fio magnético é fino, de modo que o perfil da magnetização é uniforme em toda a seção reta do fio, variando apenas ao longo de θ . Com isso, podemos escrever a energia como sendo $E = SR \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [\xi_x + \xi_d + \xi_z] d\theta$, onde os termos entre colchete são, respectivamente, a densidade das energias de troca, dipolar e Zeeman.

A energia de troca, como discutido nos capítulos anteriores, é definida como $\xi_x = l^2 (\nabla \mathbf{m})^2$, onde $l = \sqrt{A/(\mu_0 M_s^2)}$, sendo A a constante de troca no regime contínuo. Em nosso sistema de coordenadas a densidade energia de troca assume a seguinte forma:

$$\xi_x = \frac{l^2}{R^2} \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \cos \Phi \right)^2 + \left(\sin \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \cos \Theta \sin \Phi \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

Substituindo Θ e Φ definidos na Eq. 4.1, podemos calcular a energia de troca. A integração deste termo ao longo de θ é:

$$E_x = \frac{\ell^2 S}{R^2} [L + 4R\mathcal{A}(q, \phi) + \mathcal{B}(q, \phi)], \quad (4.5)$$

onde os termos $\mathcal{A}(q, \phi)$ e $\mathcal{B}(q, \phi)$ estão definidos a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}(q, \phi) = \left(\arctan \left[\exp \left(\frac{-q+L/2}{\Delta} \right) \right] - \operatorname{arccot} \left[\exp \left(\frac{q+L/2}{\Delta} \right) \right] \right) \cos \phi \\ \mathcal{B}(q, \phi) = \frac{[2R^2 + \Delta^2 (\cos[2\phi] - 1)] \sinh \left[\frac{L}{\Delta} \right]}{\Delta (\cosh \left[\frac{2q}{\Delta} \right] + \cosh \left[\frac{L}{\Delta} \right])} \end{array} \right.$$

Para modelar a energia dipolar é necessário algumas considerações. Como este sistema é constituído por um fio fino ele possui um eixo fácil de magnetização ao longo do fio. Assim sendo, podemos modelar a energia magnetostática como uma forma de interação anisotrópica local que favorece a magnetização ao longo do eixo, evitando assim os complexos cálculos decorrentes da interação de longa distância. Escrevemos então:

$$\xi_d = -\lambda \cos^2 \theta, \quad (4.6)$$

onde temos que $\lambda > 0$ é uma constante de anisotropia que favorece a magnetização ao longo do eixo do fio. Como estamos considerando um fio fino esta constante independe de ϕ e θ e o fator desmagnetizante é dado por $\lambda = 1/4$ [85, 86, 87]. Esta densidade de energia, ao ser integrada, nos fornece o seguinte resultado:

$$E_d = -S\lambda \left(L - \frac{2\Delta \sinh \left(\frac{L}{\Delta} \right)}{\left[\cosh \left(\frac{2q}{\Delta} \right) + \cosh \left(\frac{L}{\Delta} \right) \right]} \right). \quad (4.7)$$

Temos por fim a energia da interação Zeeman. Ela é definida por $\xi_z = -\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}$, onde \mathbf{H} é o campo magnético aplicado. Integrando este termo como os outros chegamos na

expressão abaixo.

$$E_z = -HS \left[L - \Delta \ln \left(\frac{1 + e^{-\frac{2q+L}{\Delta}}}{1 + e^{-\frac{2q-L}{\Delta}}} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Neste ponto, se relembrarmos as Eqs. 4.3, vemos que a dinâmica da PD é dada por duas EDOs acopladas que dependem, entre outras coisas, das derivadas da energia total em relação a q e θ . Os resultados obtidos nas equações 4.5, 4.7 e 4.8 são extremamente complicados e dificilmente permitirão que resultados analíticos sejam obtidos. Tentaremos então obter uma solução aproximada que nos permita obter uma solução analítica. Consideraremos o movimento de uma PD em um fio de curvatura pequena ($R \rightarrow \infty$) quando esta está em uma posição longe das bordas ($q \ll L$). Expandindo as expressões em séries de potência e mantendo apenas os termos de menor ordem podemos obter as expressões abaixo:

$$\begin{cases} E_x \approx & 2\pi l^2 SK \cos \phi \\ E_d \approx & \frac{2S\lambda^2 \Delta \sinh(\frac{L}{\Delta})}{1 + \cosh(\frac{L}{\Delta})} = cte \\ E_z \approx & \left[H\Delta \ln \left(\frac{(\Delta - bR) - q}{(\Delta + bR) - q} \right) \right] = \frac{2bRH\Delta}{b^2R^2 - \Delta^2} q \end{cases} \quad (4.9)$$

As equações acima serão usadas mais adiante neste texto para obter soluções analíticas para a dinâmica de PDs em nanofios com curvatura pequena.

4.3 Resultados numéricos

Nesta seção temos como objetivo verificar numericamente a dinâmica de PDs, resultante das equações de movimento das Eqs. 4.3 quando são utilizados as energias dadas nas equações 4.5, 4.7 e 4.8. Naturalmente, devido à complexidade do problema, os resultados apresentados nessa seção foram obtidos numericamente.

Foi escolhido realizar os cálculos para um fio com 15 nm de raio e 1 μm de comprimento feito de Permalloy, caracterizado pela constante de troca $A = 1.3 \times 10^{-11}$ J/m e $\mu_0 M_s = 1\text{T}$. Além disso, fixamos $\alpha = 0.01$ e a largura Δ da parede de domínio em 30 nm.

Primeiramente vamos comparar com os resultados da Ref. [82]. É importante ressaltar que o trabalho da referência citada é diferente deste trabalho pois o campo magnético é aplicado na direção z ao invés da direção θ . Na Fig. 4.2 temos à esquerda os da referência e à direita os resultados obtidos em neste trabalho, onde fica evidente que os resultados estão em excelente acordo. A única diferença clara é no fato de que a dinâmica de uma PD apresentada neste trabalho possui uma velocidade média aproximadamente 3 vezes maior, efeito que é esperado tendo em vista que no nosso caso o campo está sempre tangente ao fio. Assim sendo, vemos que o trabalho feito até o momento está coerente com os

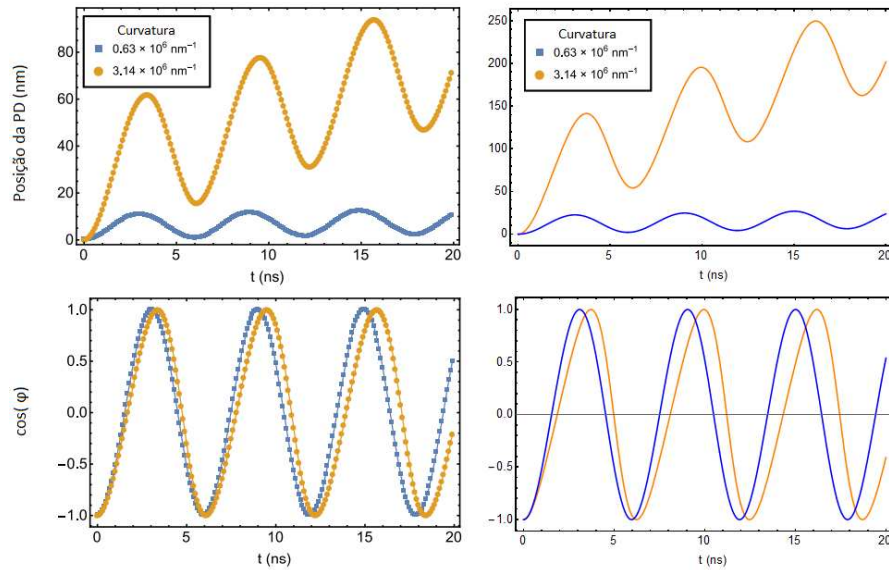


Figura 4.2: Comparação entre os resultados obtidos na Ref. [82] e o trabalho atual.

resultados esperados e publicados na literatura.

Analisamos à seguir como a curvatura do fio afeta a dinâmica da PD. Como discutido no começo do capítulo, fixamos o valor do ângulo poloidal θ_0 e controlamos a curvatura ajustando o comprimento do fio, visto que a curvatura é dada por $\mathcal{K} = 2\theta_0/L$. Até o final deste capítulo o valor de θ_0 será fixado em $\pi/2$, a não ser que explicitamente se diga o contrário.

Na Fig. 4.3 temos o resultado obtido da dinâmica da PD sob um campo de 3 mT para os comprimentos $L = 500$ nm, 1000 nm e 2000 nm, respectivamente. Vemos que para o menor comprimento (ou maior curvatura) a PD parece ter uma dinâmica diferente dos outros casos, visto que a sua fase não oscila e a velocidade, após um transiente inicial, é aproximadamente constante. Para valores maiores de comprimento (menor curvatura) vemos que há uma mudança abrupta na dinâmica da PD, que apresenta uma oscilação de

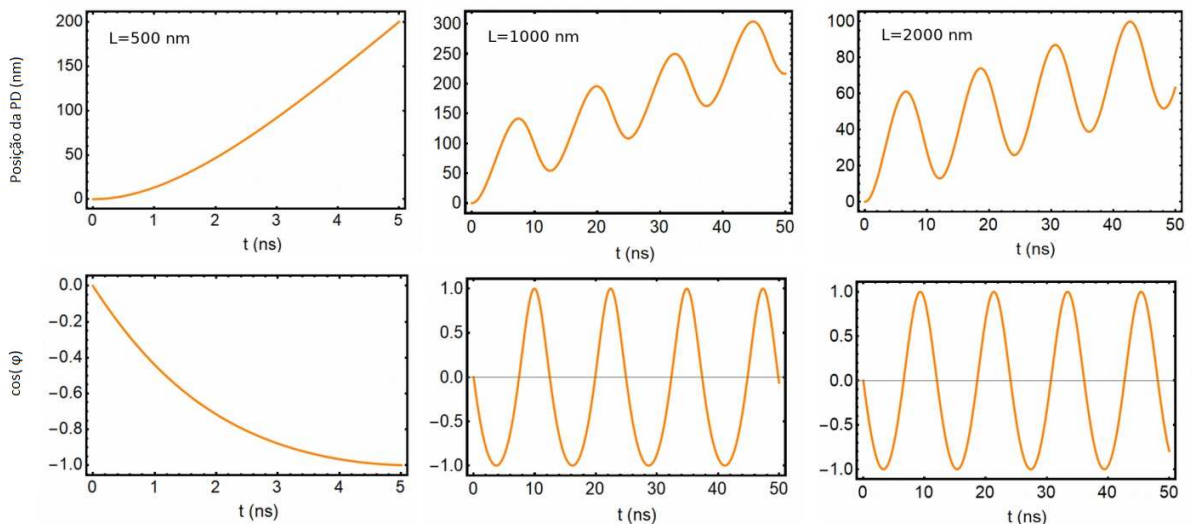


Figura 4.3: Dinâmica da PD para vários comprimentos sob um campo de 3mT.

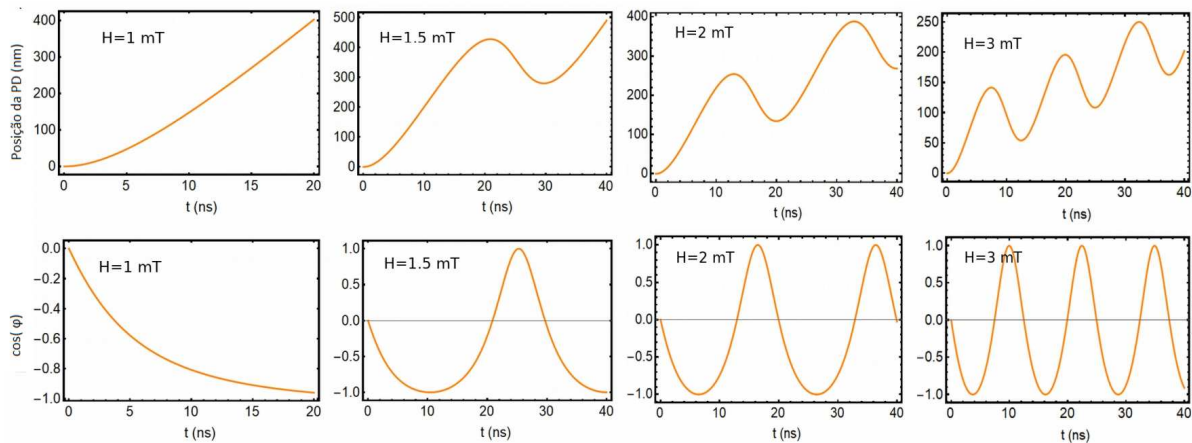


Figura 4.4: Dinâmica da PD para vários campos magnéticos para um comprimento $L = 2\mu\text{m}$.

frequência bem definida na fase e na velocidade.

Note que os valores dos eixos variam de maneira significativa para cada resultado. A escala de tempo é diferente em cada caso pois a dinâmica obrigatoriamente termina quando a PD chega ao final do fio, dada pelo valor $q = L/2$. Além disso podemos ver de maneira qualitativa que as velocidades das PDs são drasticamente diferentes, em particular para o primeiro caso.

Tendo o resultado da dinâmica em diferentes curvaturas o próximo resultado de interesse é a dinâmica em função do campo magnético externo aplicado. Na Fig. 4.4 temos os resultados da dinâmica para um fio de $2\mu\text{m}$ com campos magnéticos aplicados $H = 1\text{ mT}$, 1.5 mT , 2 mT e 3 mT , respectivamente.

É possível notar um comportamento semelhante ao comportamento para diferentes comprimentos mostrados na Fig. 4.4. O caso de menor campo possui um comportamento diferente dos outros, onde a fase não apresenta um comportamento oscilatório e a velocidade da PD, após um transiente inicial, parece ser constante. Além disso, vemos que o aumento do campo também afeta o comportamento da velocidade da PD e está relacionado com o aumento da frequência de oscilação. Ao se comparar os resultados obtidos para $H = 1\text{ mT}$ e $H = 1.5\text{ mT}$, podemos ser induzidos a pensar que o comportamento para campos (e comprimentos) pequenos não são comportamentos fundamentalmente diferente dos outros, se tratando apenas de um caso onde a PD não teve tempo suficiente para realizar uma oscilação completa antes de atingir o final do fio; no entanto, podemos demonstrar que essa suposição não é verdadeira.

Considere a dinâmica da PD para um campo aplicado de 1 mT . Caso esse movimento fosse oscilatório e apenas não tivesse tido tempo de realizar uma oscilação completa certamente veríamos um comportamento oscilatório se dobrássemos o comprimento do fio mantendo a curvatura constante e aplicássemos o mesmo campo magnético, visto que a fase aparenta estar próxima do valor de saturação. Na Fig 4.5 é possível ver que dobrando o comprimento do fio a PD não possui uma solução oscilatória, o que confirma a ideia de que se tratam de soluções fundamentalmente diferentes. Com o objetivo de entender

melhor as diferenças vamos fazer um estudo analítico.

4.4 Resultados analíticos

Nosso objetivo agora é estudar analiticamente a dinâmica que resulta das EDOs 4.3. Como EDOs apresentam termos do tipo $\frac{\partial \epsilon}{\partial q}$ e $\frac{\partial \epsilon}{\partial \phi}$ vamos estudar a dinâmica de um fio com pequena curvatura ($\mathcal{K} \approx 0$) e cuja PD está longe da borda ($q \ll L$), de modo que a energia é dada pela expressão calculada na Eq. 4.9. Neste caso as Eqs. 4.3 podem ser escritas na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = a + b \sin \phi \\ \dot{q} = \alpha \Delta a - \frac{\Delta}{\alpha} b \sin \phi \end{cases} \quad (4.10)$$

onde definimos, por conveniência, $a = H/(1 + \alpha^2)$ e $b = \pi \alpha l^2 \mathcal{K} / [\Delta(1 + \alpha^2)]$. É possível obter uma solução analítica, mas ela é complicada e não nos oferece uma perspectiva clara da dinâmica do sistema. No entanto esta equação é conhecida no estudo de sistemas dinâmicos [88] e muitas informações podem ser obtidas apenas analisando a forma da equação. Analisaremos o primeiro termo da Eq. 4.10 em detalhes e, naturalmente, uma análise semelhante pode ser feita para o segundo termo.

Ao se analisar sistemas dinâmicos é de grande interesse entender quando a condição $\dot{\phi} = 0$ é satisfeita, pois ela determina o fim da dinâmica de rotação da PD. No nosso caso vemos que esta condição acontece quando $\sin \phi = -a/b$, ou seja, só é possível se $a \leq b$, conforme a Fig 4.6. Conforme veremos a seguir os casos $a \leq b$ e $a > b$, que podem ser entendidos como uma relação direta entre o campo magnético e a curvatura ($H \leq \frac{\pi \alpha l^2}{\Delta} \mathcal{K}$ e $H > \frac{\pi \alpha l^2}{\Delta} \mathcal{K}$), produzem uma dinâmica completamente diferente. Iremos, então, analisar os dois casos separadamente.

Começando pelo caso onde $a > b$ ($H > \frac{\pi \alpha l^2}{\Delta} \mathcal{K}$), que chamaremos de campo magnético forte, vemos que a função $\dot{\phi} = a + b \sin \phi$ é sempre maior do que zero. Assim sendo, ϕ possui uma taxa de crescimento que, apesar de não ser constante, é sempre positiva. Sendo

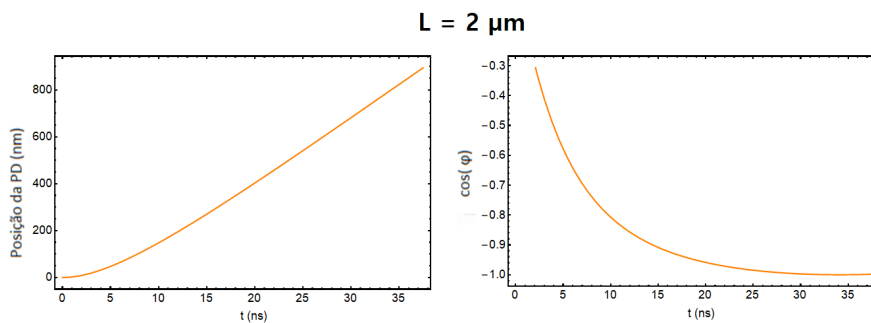


Figura 4.5: Dinâmica da PD para um comprimento de $1 \mu m$ com a curvatura e campo do caso anterior.

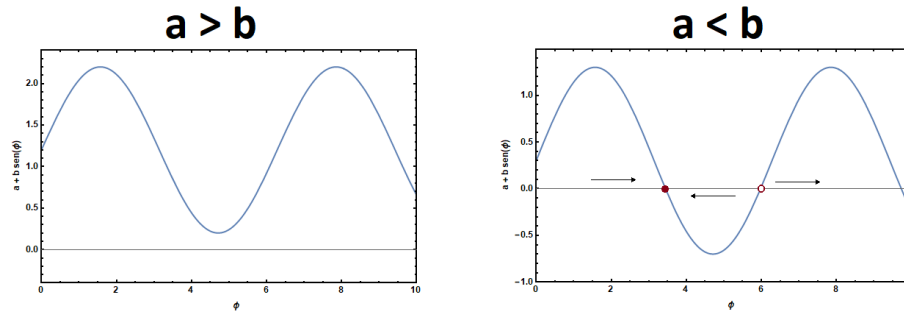


Figura 4.6: Gráficos da função $y = a + b \sin \phi$ para os casos $a > b$ e $a < b$. Note que somente o segundo caso possui raízes reais.

ϕ uma variável cíclica isto implica que a sua dinâmica é, de fato, cíclica. Os pontos de mínimo da função $\dot{\phi}$ são chamados de gargalo, pois por serem pontos onde a taxa de variação é muito menor do que comparado ao resto, a dinâmica tende a ficar muito tempo próxima à estes pontos.

O caso $a < b$ é um pouco mais complicado. Vemos imediatamente que neste caso que $\dot{\phi}$ possui raízes reais. A primeira raiz é chamada de ponto fixo estável, visto que perto deste ponto a dinâmica naturalmente tende a fazer ϕ convergir para este valor, já que $\dot{\phi}$ é maior que zero se ϕ é menor do que este valor e menor do que zero se ϕ for maior. A segunda raiz é o caso oposto: apesar de ser um ponto fixo ($\dot{\phi} = 0$), é um ponto fixo instável, pois qualquer desvio infinitesimal deste valor faz com que ϕ se afaste ainda mais deste ponto fixo, visto que $\dot{\phi}$ é positivo para desvios à direita e $\dot{\phi}$ é negativo para desvios à esquerda. Assim, vemos que a dinâmica para este caso é completamente diferente do caso $a > b$ onde ϕ cresce indefinidamente; quando $a < b$, ϕ necessariamente converge para um ponto fixo estável próximo da condição inicial. Em nosso estudo usamos condições iniciais $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, que trazem um resultado similar para a dinâmica de ϕ fazendo ϕ convergir monotonicamente até o ponto fixo estável dado pelo menor valor de ϕ que satisfaça $\phi = \arcsin(a/b)$.

Assim, prevemos com esta análise que a dinâmica terá dois comportamentos bem diferentes dependendo da relação entre o campo magnético externo e a curvatura do fio. É importante notar que esta análise mostra que a equivalência entre campo magnético e curvatura é direta, através da relação $H = \frac{\pi \alpha^2}{\Delta} \mathcal{K}$. Dessa forma, toda análise feita para campos baixos também deve ser válida para curvaturas altas e vice-versa. Esperamos então duas dinâmicas distintas: para campos altos (e/ou curvatura baixa) estamos no caso $a > b$ e esperamos uma dinâmica onde ϕ é cíclico. Para campos baixos (e/ou curvatura alta) estamos no caso $a < b$ e é esperado uma dinâmica onde ϕ cresce monotonicamente até o valor de convergência dado por $\phi = \arcsin(a/b)$.

Tendo compreendido as duas fases da dinâmica podemos agora plotar as soluções das EDOs e verificar se as soluções são coerentes com a discussão apresentada. Na Fig. 4.7 temos as soluções para a fase e para a posição para uma curvatura $\mathcal{K} = 5 \times 10^{-3} m^{-1}$ para diversos valores de campo magnético e é possível observar que as soluções para os menores

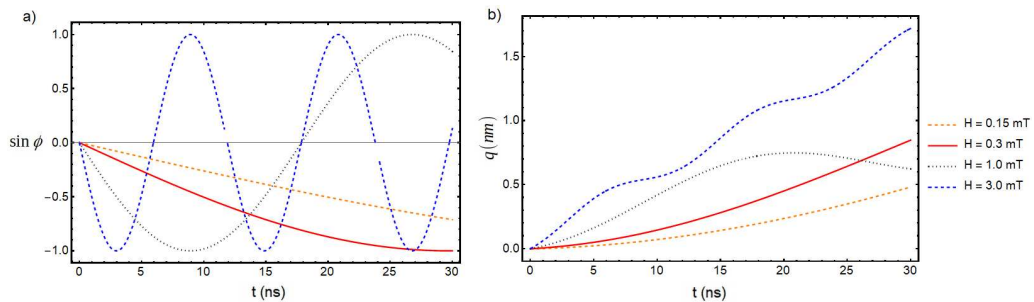


Figura 4.7: Soluções da Eq.4.10 para diferentes valores de a e b.

valores de campo ($H = 0.15 \text{ mT}$ e $H = 0.30 \text{ mT}$) apresentam uma solução monotônica que converge para um valor e as soluções com campo maiores são oscilatórias e com uma frequência de precessão da PD sendo função do campo magnético externo. A consequência disso para a dinâmica da posição estão na Fig. 4.7b), onde vemos que em campos altos a posição possui uma velocidade não monotônica, o que não ocorre em campos baixos.

Vemos então que esta análise reproduz muito bem os resultados numéricos obtidos. Ela mostra que de fato a dinâmica possui duas fases distintas e a curvatura e/ou o campo magnético externo são parâmetros que podem controlar a fase no qual o sistema se encontra.

4.5 Estudo da velocidade da PD

Tendo entendido a origem da mudança de comportamento da dinâmica, nos resta entender como é o comportamento da velocidade da PD. Tanto na análise em função do campo quanto na análise em função do comprimento é possível ver que a velocidade média da PD possui um comportamento não trivial, sendo desejável então entender o comportamento da velocidade média em função do campo magnético para diferentes curvaturas. No entanto, como queremos comparar comportamentos oscilatórios de diferentes frequências e comportamentos não oscilatórios, não é fácil definir a velocidade média de modo a comparar diretamente todos os resultados. De fato, o resultado obtido varia bruscamente se escolhermos como ponto final o topo ou a base da oscilação. Foram testadas diversas opções, como definir a posição final como sendo o topo da primeira oscilação, definir o tempo final como uma posição arbitrária (150 nm, por exemplo) ou definir um tempo final arbitrário. Todas estas tentativas apresentam um resultado que é qualitativamente semelhante, diferindo apenas no valor absoluto dos eixos. Por fim, foi decidido definir a velocidade média como sendo $v_m = x_{5ns}/5ns$, onde x_5 é a posição da PD após um tempo de 5 nanosegundos. Os resultados obtidos estão resumidos na Fig. 4.8.

Podemos ver que o comportamento da velocidade em função do campo magnético não é trivial, sendo inicialmente uma função crescente até um valor máximo seguido de uma queda abrupta e um novo aumento. A curvatura do fio não altera de maneira significativa o valor do campo externo para o qual estes comportamentos ocorrem, mas possuem um efeito notável no valor da velocidade para um determinado valor de campo, possuindo

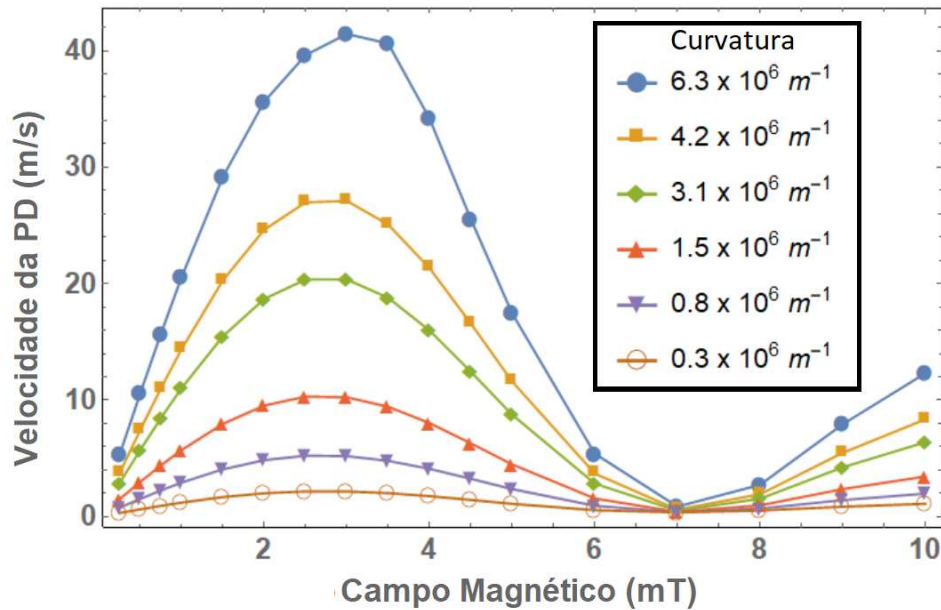


Figura 4.8: Velocidade média da PD em função do campo magnético para diferentes curvaturas.

uma relação aproximadamente linear com o valor máximo da velocidade, como pode ser observado na Fig. 4.9.

Nas seções anteriores percebemos que o campo magnético externo altera a amplitude e a frequência de oscilação da PD, enquanto a curvatura altera somente a amplitude. Fizemos então um estudo mais sistemático de como a amplitude e a frequência dependem do campo e da curvatura, cujo resultado está representado na Fig. 4.10.

Como pode ser visto, a competição entre os torques causados pela interação de troca e pela interação Zeeman faz com que tanto a curvatura quanto o campo afetem a amplitude. Como o campo magnético externo faz com que a frequência de precessão seja maior, observa-se que um aumento do campo produz uma redução na amplitude de oscilação, visto que os avanços e recuos da PD estão diretamente relacionados com a precessão da fase. O fato da amplitude aumentar com o aumento da curvatura pode ser entendido ao se considerar que a anisotropia causada pela curvatura gera um torque extra que faz com

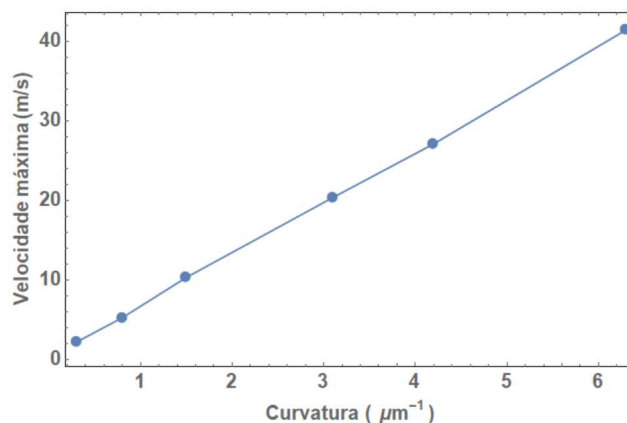


Figura 4.9: Valor máximo da velocidade em função da curvatura

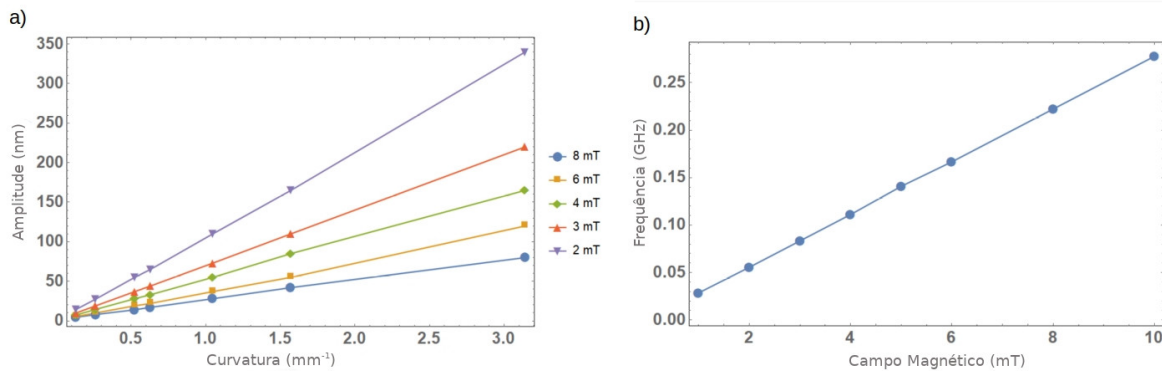


Figura 4.10: a) Amplitude em função da curvatura para vários campos magnéticos e b) frequência em função do campo magnético.

que a PD se desloque por uma distância maior até completar uma oscilação completa. Para uma curvatura $\mathcal{K} = 0$ temos que a amplitude de oscilação é zero, o que impede a existência de uma quebra de Walker, o que está de acordo com a literatura [89]. Na Fig. 4.10b) podemos ver que a frequência varia linearmente com o campo magnético aplicado.

Os resultados obtidos neste capítulo foram publicados na revista *Physical Review B* [90].

4.6 Fio de seção reta retangular

Nesta seção apresentaremos os principais resultados ao estudo de fios curvos com seção reta retangular. É importante deixar claro que os estudos desta seção foram feitos em sua maioria por Bittencourt, G. H. e meu trabalho consistiu em fornecer ajuda e conselhos quando necessário. Estes resultados estão sendo apresentados aqui apenas por completeza do assunto aos interessados, visto que grande parte dos métodos são semelhantes aos discutidos neste capítulo e os resultados obtidos nos permitem entender melhor a relação entre magnetismo, curvatura e geometria. Maiores detalhes podem ser conferidos na publicação original [91].

Para descrever a dinâmica de uma PD em um nanofio de seção reta retangular, utilizamos um sistema de coordenadas semelhante ao do início do capítulo que pode ser visto na Fig 4.11, onde descrevemos os fios retangulares como tendo espessura Δr e altura Δz , um comprimento total $L = R\theta$, onde θ é o ângulo máximo de abertura e R é a distância da origem até o centro do fio. Definiremos a curvatura como na seção anterior, onde temos $\mathcal{K} = 1/R$ e definiremos também $\eta = \Delta r/\Delta z$, onde temos dois casos de interesse quando $\eta < 1$ e $\eta > 1$, que estão representados na 4.11a) e 4.11b), respectivamente.

A magnetização é parametrizada como:

$$\mathbf{m} = \sin \Omega \sin \phi \mathbf{r} + \cos \Omega \boldsymbol{\theta} + \sin \Omega \cos \phi \mathbf{z} \quad (4.11)$$

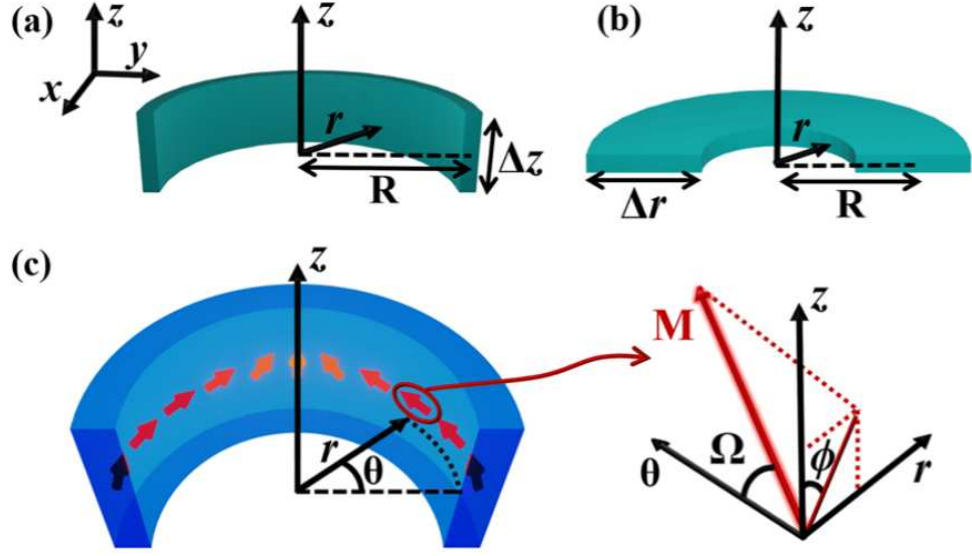


Figura 4.11: Sistema de coordenadas utilizado. Retirado de [91] e adaptado.

onde a função Ω é dada por:

$$\Omega = 2 \arctan [\exp [R(\theta - \theta_0)] / \delta] \quad (4.12)$$

onde $\pi\delta$ é o comprimento da PD.

A dinâmica da magnetização sob uma corrente elétrica spin polarizada é dada pela equação LLG, adicionada dos termos de torque de spin adiabáticos e não-adiabáticos:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef} + \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} + \frac{\beta u}{M_s R} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta} \quad (4.13)$$

onde γ é a razão giromagnética, α é a constante de amortecimento de Gilbert, β é o parâmetro de transferência de spin não-adiabático e $u = gJ_e\mu_B P/2eM_s$, que tem dimensão de velocidade e depende da corrente elétrica J_e que é injetada no sistema. Além disso, g é o fator de Landé e μ_B é o magneton de Bohr.

No primeiro termo do lado direito da Eq. 4.13 temos o termo \mathbf{H}_{ef} representado o campo magnético efetivo, que em nosso modelo simplificado possui contribuições do campo externo aplicado, do campo dipolar \mathbf{H}_D e do campo de troca \mathbf{H}_X :

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ef} = \mathbf{\Gamma}_Z + \mathbf{\Gamma}_D + \mathbf{\Gamma}_X \quad (4.14)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_Z$, $\mathbf{\Gamma}_D$ e $\mathbf{\Gamma}_X$ representam, respectivamente, o torque causado pela interação Zeeman, dipolar e de troca.

Assumiremos um campo magnético externo azimutal, como na seção anterior, ou seja, $\mathbf{H} = H\boldsymbol{\theta}$. Com isto, podemos calcular todos os torques envolvidos e temos que o torque

total Γ é dado por:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_x(\phi) + \Gamma_d(\phi) + \frac{\alpha M_s}{\gamma} \frac{d\phi}{dt} + \frac{u M_s}{\gamma \delta} \\ -M_s \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{d\Omega}{dt} + H + \frac{\beta u}{\gamma \delta} \right) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

de onde podemos obter as equações para a velocidade e a fase do centro da PD:

$$v = \frac{\gamma \delta}{1 + \alpha^2} \left[\alpha H + \frac{u(1 + \alpha \beta)}{\gamma \delta} + \frac{\Gamma_d(\phi) + \Gamma_x(\phi)}{M_s} \right] \quad (4.16)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \left[H + \frac{u(\beta - \alpha)}{\gamma \delta} - \alpha \frac{\Gamma_d(\phi) + \Gamma_x(\phi)}{M_s} \right] \quad (4.17)$$

De maneira similar à seção anterior é útil buscarmos a solução para $\dot{\phi} = 0$. Analisando a Eq. 4.17 vemos que os dois primeiros termos dentro dos colchetes se referem à estímulos externos e portanto definiremos a grandeza $\mathcal{H} \equiv H + \frac{u(\beta - \alpha)}{\gamma \delta}$ para representar os estímulos externos totais. Assim, vemos que a condição de equilíbrio para ϕ é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{M_s} [\Gamma_d(\phi_0) + \Gamma_x(\phi_0)] \quad (4.18)$$

O que significa que a PD se move com velocidade $v = (\gamma \delta H + \beta u) / \alpha$. Além disso, a análise da Eq. 4.18 mostra a existência de dois valores críticos para o estímulo externo:

$$\mathcal{H}_W^\pm = \frac{\alpha \beta}{2\sqrt{2}\chi} \sqrt{\chi^2 - 1 \pm \sqrt{1 + 2\chi^2}} \left[\pm 3 + \sqrt{1 + 2\chi^2} \right] \quad (4.19)$$

onde $\chi = 2|\mathcal{C}|/\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = 2AK/(M_s \delta)$ e $\mathcal{C} = AK^2/M_s + 2\pi M_s \Delta N$.

Na região $\chi < 2$ é possível observar apenas um máximo de \mathcal{H}_W , enquanto para $\chi \geq 2$ dois máximos diferentes são observados, tal que $\mathcal{H}_W^- \leq \mathcal{H}_W^+$. Na Fig.4.12 a) temos o comportamento do campo crítico com a curvatura, onde podemos notar que \mathcal{H}_W^+ cresce linearmente com a curvatura, semelhante aos resultados obtidos na seção 3.4. Além disso, vemos que um fio de seção reta quadrada possui apenas um campo crítico \mathcal{H}_W , assim como sua correspondente cilíndrica, e que para $\mathcal{K} \rightarrow 0$ temos que $\mathcal{H}_W^- = \mathcal{H}_W^+ = 2\pi\alpha M_s |\Delta N|$, de acordo com a referência [92].

Vemos então que em um caso geral existem três regimes distintos para a dinâmica da PD: **i)** $H < H_W^-$, onde a fase da PD tende a um valor estacionário, **ii)** $H > H_W^+$, onde a fase da PD apresenta uma dinâmica oscilatória e **iii)** $H_W^- < H < H_W^+$, onde a fase da PD se reorienta para uma nova posição de equilíbrio. Estes três comportamentos distintos podem ser vistos na Fig. 4.12b) e c) onde temos que a curva verde segue o caso **i)**, a curva azul segue o caso **ii)** e a curva vermelha segue o caso **iii)**.

Assim, vemos que a presença de curvatura traz à tona três regimes dinâmicos distintos e é possível generalizar vários resultados conhecidos da literatura que foram obtidos para sistemas sem curvatura. No caso dos fios retangulares vemos que a curvatura é capaz de

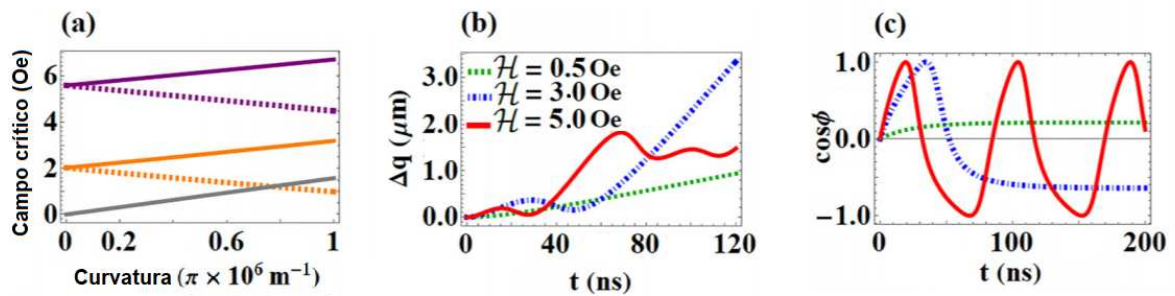


Figura 4.12: (a) Campo crítico em função da curvatura \mathcal{K} para $\eta = 1.33$ (roxo), $\eta = 1.11$ (laranja) e $\eta = 1$ (cinza) (b) posição em função do tempo e (c) fase em função do tempo, ambos com $\eta = 0.9$ e campos críticos $\mathcal{H}_{\text{W}}^- \approx 1 \text{ Oe}$ e $\mathcal{H}_{\text{W}}^+ \approx 3.2 \text{ Oe}$.

introduzir um novo campo de Walker que decresce com a curvatura e é capaz de realinhar a fase para um novo valor estável, o que é uma descoberta com um potencial gigantesco para aplicações. Neste sistema com curvatura é possível, com uma escolha adequada do estímulo externo \mathcal{H} , escolher uma dinâmica na qual a fase da PD é constante, trocá-la de um valor meta-estável para um valor estável ou promover uma rotação da fase.

Os resultados apresentados aqui foram publicados na Applied Physics Letters, onde foi escolhido como *featured article* [93].

Capítulo 5

Reversão magnética em um torus

5.1 Introdução

Neste capítulo temos como objetivo estudar as propriedades magnéticas de uma geometria toroidal. Apesar de ser uma geometria difícil de ser conseguida experimentalmente vemos que o desenvolvimento de novas técnicas experimentais faz com que seja possível criar estruturas cada vez mais complexas e permite o estudo de sólitons em estruturas tridimensionais, como skyrmions confinados em tubos [94], a formação de anéis de vórtices magnéticos [95], o aparecimento de defeitos topológicos em nanofios com a forma de hélice dupla [96] e a nucleação de pontos de Bloch [97, 98].

Parte do nosso interesse na geometria toroidal se deve ao fato de que há um grande interesse no estudo de nano-anéis, tanto experimentalmente quanto teoricamente. Parte do interesse é devido ao fato de que o buraco central permite que eles estabilizem vórtices magnéticos para tamanhos menores que os nano-discos [99]. No entanto, apesar da geometria de um anel cilíndrico e de um toroide possuir semelhanças topológicas (visto que um pode ser continuamente deformado no outro) eles também apresentam uma diferença crucial na curvatura Gaussiana \mathcal{K} . Em um nano-anel a curvatura Gaussiana é nula em todas as superfícies e não é bem definida nas bordas, ao passo de que no torus ela varia continuamente de negativa na borda interna para positiva na borda externa, o que facilita os cálculos analíticos e evita problemas de bordas.

O estudo da magnetização em geometrias toroidais tem mostrado que estes objetos são muito promissores para aplicações práticas, em particular por apresentarem vórtices como estado fundamental para tamanhos menores que um nano-anel [99, 100, 101]. Também foi mostrado que a geometria curva gera uma frustração geométrica que leva à uma instabilidade dos sólitons [102, 103]. Como estados puramente superficiais não podem ser estabilizados em cascas ferromagnéticas [104] o desvio de uma configuração de vórtice planar resulta na criação do núcleo do vórtice fora do plano [105].

Ao se estudar o processo de reversão magnética por um campo magnético uniaxial foi descoberto que a reversão magnética ocorre por dois modos diferentes: rotação coerente e

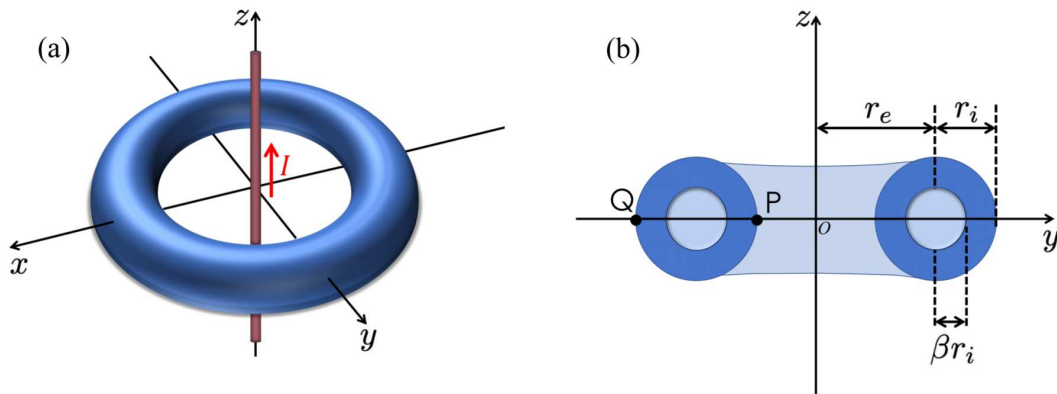


Figura 5.1: a) Representação esquemática do tubo toroidal com um fio ao longo do eixo z . b) Plano yz do torus, ilustrando os pontos P e Q que representam os raios internos e externos do torus, respectivamente.

nucleação de vórtice [100]. Mais tarde, verificou-se que se a casca toroidal possui uma razão grande de $\xi = r/R$ então o processo de reversão também pode ocorrer através da formação de um par vórtice e anti-vórtice como estado remanente, que são nucleados nas regiões de máxima curvatura positiva e negativa, respectivamente [106]. Esta seleção do número de circulação pela curvatura está intrinsecamente relacionada às interações induzidas pela geometria [104, 86, 107, 108, 109] que serão amplamente discutidas no próximo capítulo.

Neste trabalho temos como objetivo estudar, através de simulações micro-magnéticas, os modos de reversão magnética de uma superfície toroidal sob a ação de um campo magnético azimuthal. Nestes processos de reversão buscamos, em particular, procurar pela existência de hópions, que são configurações de campo tridimensionais localizadas que mapeiam uma três-esfera S^3 para o espaço do parâmetro de ordem S^2 , pertencendo então ao terceiro grupo de homotopia $\pi_3(S_2) = \mathbb{Z}$ [110, 111]. Para tal, utilizaremos o software Object Oriented MicroMagnetic Framework (OOMMF) [112] que se utiliza do método de diferenças finitas para resolver a equação de Landau-Lifshitz-Gilbert:

Nosso sistema de interesse consiste em um torus oco que é caracterizado pelos raios toroidal (r_e) e poloidal (r_i). Além disso, descreveremos a espessura do tubo de seção reta como $t = (1 - \beta)r_i$, onde $\beta \in [0, 1)$ define a espessura relativa, podendo variar de uma casca fina ($\beta \rightarrow 1$) até um toroide completamente preenchido ($\beta = 0$). Este sistema e todas as grandezas relevantes estão esquematizados na Fig 5.1, onde também definimos como P o ponto mais próximo do eixo z e como Q o ponto mais distante, o que se mostrará útil mais adiante. Além disso, A reversão da magnetização será feita através de um campo magnético de Oersted, que pode ser gerado experimentalmente através de uma corrente elétrica aplicada em um fio condutor orientado paralelamente ao eixo do torus.

5.2 Modelagem do sistema

Modelamos o nosso sistema no OOMMF fixando o raio toroidal em $r_e = 100$ nm e variando o raio poloidal r_i entre 20 e 80 nm em intervalos de 10 nm, ao passo que β varia entre 0.0 e 0.8. Os tamanhos de células da simulação foram de $2 \times 2 \times 2$ nm³, o que é pequeno o suficiente comparado ao comprimento de troca do Py e já nos permite construir uma estrutura com curvatura suave de modo que os efeitos de bordas não são relevantes. Os parâmetros magnéticos utilizados na simulação são a constante de troca $A = 13 \times 10^{-12}$ J m⁻¹ e a magnetização de saturação $M_s = 860 \times 10^3$ A m⁻¹, que caracterizam o Permalloy (Py), um material magnético que nos permite desprezar contribuições da interação de anisotropia magneto-cristalinas. Consideraremos então um modelo de energia dado por $E = E_{\text{ex}} + E_{\text{ms}} + E_Z$, onde E_{ex} , E_{ms} e E_Z representam, respectivamente, as energias advindo das interações de troca, magnetostática e de Zeeman. Por fim, consideramos que a constante de amortecimento vale $\alpha = 0.5$.

O campo magnético gerado por um fio (infinito) é radialmente não-homogêneo, com sua magnitude sendo descrita por $B = \mu_0 I / 2\pi R$, onde R representa a distância radial em coordenadas cilíndricas. A corrente elétrica I foi variada entre -0.125 A e 0.125 A, o que induz um campo de Oersted na direção azimutal entre os valores de $\mu_0 H_{\text{max}} = -350$ mT e $\mu_0 H_{\text{max}} = 350$ mT.

5.3 Resultados

Começaremos analisando as curvas de histerese do torus para vários valores de β e para os raios poloidais de $r_i = 20$, 40 e 80 nm. Definiremos que $m_\phi = +1$ quando a magnetização gira no sentido anti-horário e $m_\phi = -1$ quando é no sentido horário. Os resultados obtidos estão representados na Fig. 5.2, onde vemos que todos os ciclos possuem um formato bem retangular com um único salto abrupto. Vemos também que o campo coercivo depende fortemente tanto de β quanto de r_i . Como a área do ciclo de histerese

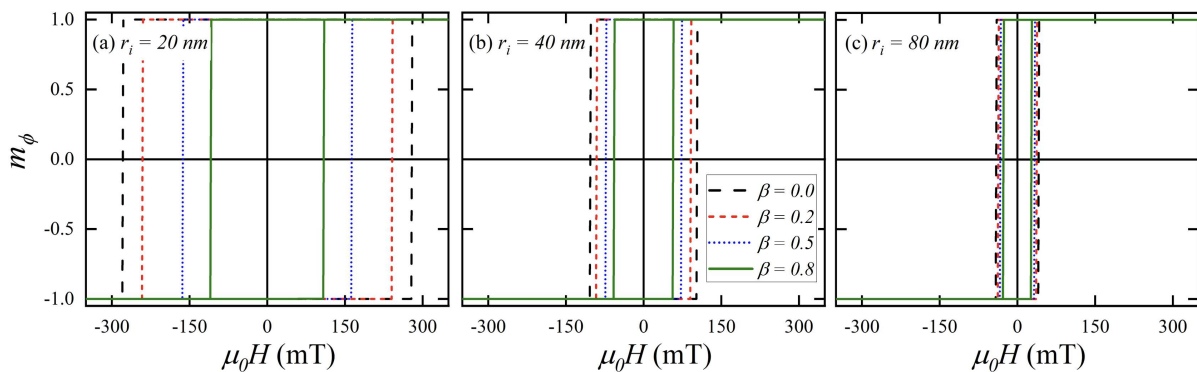


Figura 5.2: Curvas de histerese para valores de $\beta = 0.0, 0.2, 0.5$ e 0.8 para **a)** $r_i = 20$ nm, **b)** $r_i = 40$ nm e **c)** $r_i = 80$ nm.

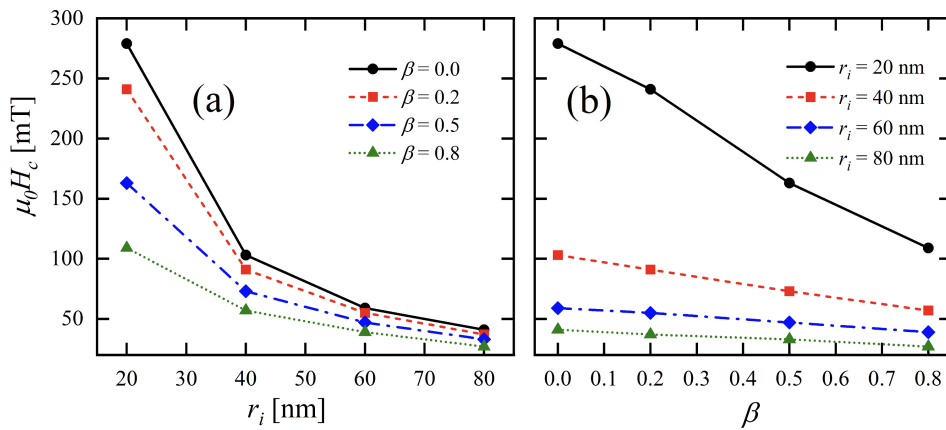


Figura 5.3: Campos coercitivos em função de **a)** β para valores fixos de r_i e **b)** r_i para valores fixos de β .

está relacionada com o trabalho necessário para a reversão dos momentos [113] podemos ver que a reversão em um toroide sólido com raio poloidal pequeno necessita de muito mais energia que um tubo toroidal fino com raio poloidal grande.

Das curvas de histerese é possível determinar os campos coercitivos de um tubo toroidal em função de β e de r_i , resultados que estão resumidos na Fig. 5.3. Vemos que o campo coercitivo possui um decaimento não-linear com β para r_i fixo e um decaimento linear com r_i para um valor de β fixo. No primeiro caso é possível observar que os campos coercivos praticamente convergem para $r_i = 80$ nm e se tornam quase independentes de β .

Para entender melhor este comportamento vamos analisar o processo de reversão da magnetização no tubo toroidal. Nas Fig. 5.4 e Fig. 5.5 temos algumas imagens selecionadas do processo de reversão, onde é possível ver que nos sistemas estudados a reversão acontece por meio de quatro mecanismos diferentes dependendo dos parâmetros β e r_i :

a) O primeiro deles, e o principal foco deste trabalho, é a reversão ocorrendo com a nucleação de um hópfião, estado que consiste de um skyrmion em um tubo que fecha em si mesmo. É importante notar que a nucleação do hópfião acontece mesmo que não exista uma interação DMI intrínseca, assim como a nucleação de skyrmions em nano-anéis também é possível mesmo sem DMI [114]. Para garantir que o estado observado é um hópfião fizemos uma imagem do padrão de magnetização de um disco fino retirado da seção reta do torus e pode ser verificado na Fig. 5.4b) que o padrão observado é um skyrmion bidimensional, como esperado.

b) O segundo mecanismo consiste de um hópfião preso, apresentando um índice topológico que não é um número inteiro. Neste caso, o centro do skyrmion tridimensional fica preso no centro do buraco central do toroide, formando um skyrmion com carga topológica não inteira no tubo, que se fecha em si mesmo. Fig. 5.5a)

c) Temos também a reversão quase-coerente, mediada pela formação de um vórtice quase-tangencial na direção poloidal como representado na Fig. 5.5b). Vemos que os momentos magnéticos rotacionam ao longo da direção poloidal, mas de maneira que não é

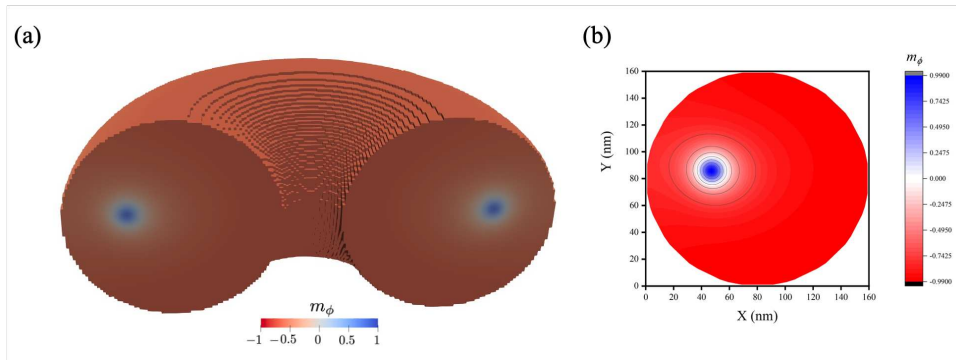


Figura 5.4: Imagens do processo de reversão com nucleação de um hópfiõ. As regiões de azul representam $m_\phi = 1$ e as regiões em vermelho representam a direção oposta $m_\phi = -1$.

completamente tangente à superfície pois isto não é possível em uma superfície curva [104].

d) Por último temos a nucleação de duas paredes de domínio transversais que se propagam radialmente ao longo da seção transversal do torus, como representado na Fig.5.5c).

De modo a determinar o espaço de fase geométrico em que os hópfiõs podem ser nucleados foram feitas diversas simulações micro-magnéticas, que nos permitiram obter um mapa dos mecanismos de reversão em função de β e r_i . Estes resultados estão apresentados na Fig. 5.6, onde os círculos azuis indicam as regiões onde existe nucleação de hópfiõs, quadrados verdes representam os hópfiõs presos no centro, as estrelas rosas representam a rotação quase coerente e os diamantes laranjas representam a nucleação transversal das paredes de domínio.

A análise da dependência dos parâmetros geométricos mostra que os toroides com valores grandes de β fazem a reversão através das paredes de domínio transversais, que são nucleadas no ponto P e se movem em direções opostas até se aniquilarem no ponto Q . Este modo de reversão ocorre quando não existe material magnético o suficiente para permitir a nucleação de estruturas magnéticas com rotação. No entanto, podemos observar que ao aumentar o valor de r_i e diminuir o valor de β aumenta a quantidade de material magnético a ponto de permitir que estruturas mais complexas se formem. Os resultados obtidos mostram que é possível nuclear hópfiõs (e hópfiõs presos ao centro do toroide) para $\beta \lesssim 0.4$, sendo que é necessário valores maiores de r_i para valores maiores de β .



Figura 5.5: Imagens do processo de reversão mediado por a) hópfiõ preso, b) parede de domínio transversais e c) rotação quase coerente. As regiões de azul representam $m_\phi = 1$ e as regiões em vermelho representam a direção oposta $m_\phi = -1$.

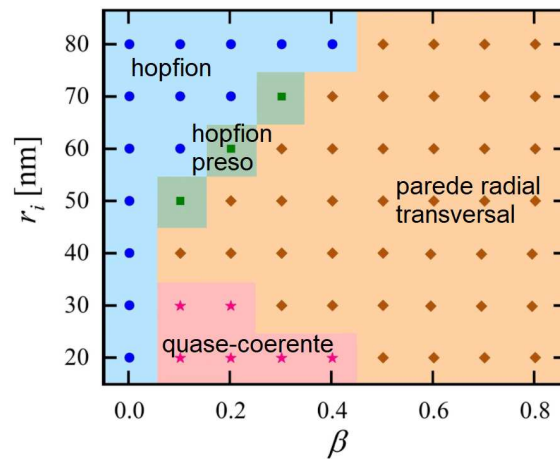


Figura 5.6: Diagrama de fases da reversão para diferentes valores de r_i e β .

Para entender a necessidade de mais material magnético para possibilitar a formação de hópfiões podemos pensar que esta configuração magnética diminui a energia dipolar à custa de um aumento da energia de troca, tornando razoável que esta configuração apareça em raios poloidais maiores, que aumentam o benefício da interação dipolar e diminuem o custo da interação de troca. Além disso, o hópfião preso acontece quando o buraco central prende o núcleo do vórtice, não permitindo que a estrutura se mova. Se imaginarmos nossa estrutura tridimensional como sendo constituída de diversos nano-anéis em série que se fecham em si mesmo temos que estas duas situações são análogas à presença de skyrmions. Sabemos que nestes nano-anéis existe um raio crítico que permite a nucleação e estabilização de skyrmions [114] e que eles podem ser presos por um buraco no centro [115] para valores grandes do raio interno [116, 117]. Podemos ver o aumento da energia necessária para nuclear os hópfiões e os hópfiões ao observar como a área da histerese aumenta para valores grandes de r_i e valores pequenos de β na Fig. 5.2.

Nossos resultados mostram que dependendo da geometria do torus a reversão da magnetização pode ocorrer através de quatro mecanismos diferentes, envolvendo a nucleação e propagação de modos coletivos tridimensionais: um hópfião, um hópfião fixo no centro, uma reversão quase coerente [105] e paredes de domínio transversais. É interessante notar que os hópfiões observados são obtidos mesmo na ausência da interação de Dzyaloshinskii-Moriya e resultam puramente da competição entre a interação magnetostática e a interação de troca, assim como skyrmions são observados em *nanodots* mesmo sem DMI [114]. Estes modos de reversão com hópfiões são objetos interessantes de serem estudados em magnetismo 3D pois estes objetos pertencem a grupos de homotopia muito específicos, o que garante que eles possuem estabilidade topológica e podem ser considerados para transmitir informações em sistemas spintrônicos [12].

Estes resultados foram utilizados para escrever um artigo que atualmente se encontra em processo de publicação.

Capítulo 6

Perspectivas Futuras

6.1 Introdução

Neste capítulo iremos desenvolver um modelo teórico robusto para que possamos estudar as propriedades estáticas e dinâmicas de sólitons em uma superfície curva arbitrária. Para isto utilizaremos alguns conceitos de geometria diferencial, para melhor descrever as superfícies, e também de tensores.

Este capítulo é baseado nos trabalhos recentes do grupo formado pelos Drs. Sheka, Kravchuk e Gaididei [104, 118] e, particularmente, no trabalho da referência [119], onde o formalismo é discutido em maiores detalhes. Foi utilizado também a referência [120] para o estudo dos conceitos básicos de geometria diferencial. Ao longo do texto utilizaremos a convenção de Einstein para tensores, onde qualquer índice que aparece repetidas vezes está sendo somado implicitamente, ou seja, $A_\mu B_\mu = \sum_\mu A_\mu B_\mu$.

Na próxima seção introduziremos o formalismo em uma curva unidimensional e na seção 5.1.2 expandiremos o formalismo para uma superfície bidimensional.

6.1.1 Curva unidimensional

Para estudarmos uma curva unidimensional utilizaremos a parametrização de Frenet-Serret. Considere uma curva unidimensional descrita por $\gamma(s)$ escrita na base cartesiana como $\gamma = \gamma_i \hat{x}_i$, onde estamos usando a convenção de Einstein para a soma dos índices. Podemos então construir uma base ortonormal definida por:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \gamma' \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

onde as derivadas são feitas com relação ao parâmetro s . Podemos identificar \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 como sendo, respectivamente, a tangente, a normal e a binormal da curva $\gamma(s)$, como representado na Fig. 6.1. Com isto, um fio curvo de seção reta retangular pode ser

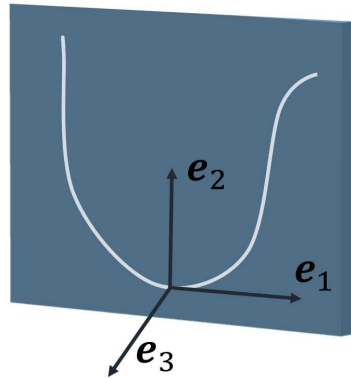


Figura 6.1: Coordenadas de Frenet.

parametrizado como $\mathbf{r}(s, \epsilon_2, \epsilon_3) = \gamma(s)\mathbf{e}_1 + \epsilon_2\mathbf{e}_2 + \epsilon_3\mathbf{e}_3$, sendo s um parâmetro medido ao longo do fio e ϵ_i relacionado com a espessura do fio na direção i .

Naturalmente as propriedades diferenciais desta base são um pouco mais complicadas do que a do sistema cartesiano. Note que a taxa de crescimento de um vetor unitário \mathbf{e}_i deve ser nula na direção i , o que nos permite escrever a sua derivada pela combinação linear dos outros dois vetores da base. De uma maneira geral podemos escrever isto como

$$\mathbf{e}'_i = F_{ij} \mathbf{e}_j \quad (6.2)$$

onde F_{ij} é uma matriz com diagonal nula. No nosso caso unidimensional temos que esta matriz possui como componentes a curvatura $\kappa \equiv \|\mathbf{e}'_2\|$ e a torsão $\tau \equiv \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3$ da curva $\gamma(s)$:

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Tendo definido como descreveremos as propriedades geométricas estamos prontos para estudar as propriedades magnéticas. Em coordenadas cartesianas sabemos que a interação de troca é dada por:

$$E_{ex} = (\nabla m_i) (\nabla m_i) \quad (6.4)$$

Podemos escrever a magnetização em coordenadas cartesianas em função das suas componentes curvilíneas com a expressão $m_i = m_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{x}_i)$. Com isto, e sabendo que $\nabla = \mathbf{e}_1 ds$ temos que a interação de troca pode ser escrita como:

$$E_{ex} = (m_\alpha \mathbf{e}_\alpha) (m_\beta \mathbf{e}_\beta) = E_{ex}^0 + E_{ex}^A + E_{ex}^D \quad (6.5)$$

onde temos uma expressão que dividiremos em três termos. O primeiro termo, E_{ex}^0 é a interação de troca isotrópica:

$$E_{ex}^0 = m'_i m'_i = |\mathbf{m}'|^2 \quad (6.6)$$

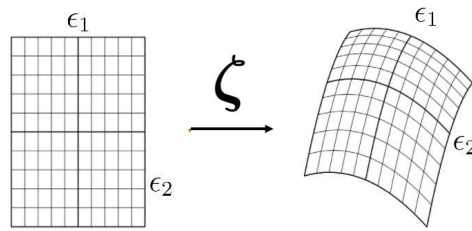


Figura 6.2: Coordenadas locais ϵ_α e aplicação da parametrização ζ .

o segundo termo é uma interação anisotrópica:

$$E_{ex}^A = K_{ij} m_i m_j \quad (6.7)$$

sendo

$$K_{ij} = F_{ik} F_{jk} = \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 & -\kappa\tau \\ 0 & \kappa^2 + \tau^2 & 0 \\ -\kappa\tau & 0 & \tau^2 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

e o terceiro termo é uma combinação dos invariantes de Lifshitz, que pode ser interpretado como uma interação do tipo Dzyaloshinskii-Moriya:

$$E_{ex}^D = F_{ij} (m_i m'_j - m'_i m_j) \quad (6.9)$$

A dedução detalhada destas expressões será feita apenas para o caso bidimensional, que é de maior interesse para este trabalho.

Por fim, podemos parametrizar a magnetização \mathbf{m} com a expressão $\mathbf{m} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3$ o que nos permite escrever a interação de troca como:

$$E_{ex}^{1D} = [\theta' - \tau \sin \varphi]^2 + [\sin \theta (\varphi + \kappa) - \tau \cos \theta \cos \varphi]^2 \quad (6.10)$$

6.1.2 Superfícies bidimensionais

Seguindo a mesma linha da seção anterior vamos agora desenvolver o formalismo para a magnetização em uma superfície bidimensional. Procuraremos utilizar letras latinas (i, j, k) como subíndices para variáveis no sistema cartesiano, que podem valer 1, 2 e 3, e letras gregas ($\mu, \nu, \theta, \varphi$) para variáveis curvilíneas locais da superfície, que valem 1 e 2.

Descreveremos uma superfície através da parametrização $\zeta(\epsilon_1, \epsilon_2)$, onde ϵ_α são coordenadas generalizadas locais da superfície e ζ é uma função que pega um elemento desta base e transporta para o \mathbb{R}^3 . A Fig. 6.2 representa este processo

Definimos então $\mathbf{g}_\mu = \partial_\mu \zeta$, onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \epsilon_\mu}$, que são vetores tangentes à superfície, em todos os pontos. Com eles podemos definir o tensor métrico $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}_\mu \cdot \mathbf{g}_\nu$, também chamado de primeira forma fundamental. Podemos representar o tensor métrico através de uma

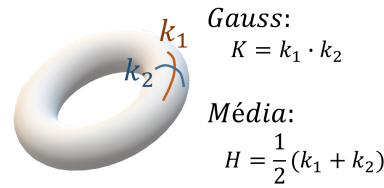


Figura 6.3: Representação geométrica da curvatura média e de Gauss.

matriz quadrada de ordem dois, onde os elementos são dados por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_1}, \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_2}, \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_2}, \frac{\partial \zeta}{\partial \epsilon_2} \right\rangle \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

E através desses parâmetros podemos escrever um deslocamento infinitesimal na superfície:

$$ds^2 = E d\epsilon_1^2 + 2F d\epsilon_1 d\epsilon_2 + G d\epsilon_2^2 \quad (6.12)$$

Tendo definido os nossos vetores \mathbf{g}_α podemos definir uma base conveniente para o estudo de uma superfície:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 / |\mathbf{g}_1| \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{g}_2 / |\mathbf{g}_2| \\ \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (6.13)$$

O vetor normal \mathbf{n} é chamado de mapa de Gauss e é de fundamental importância pois sua variação espacial nos dá informações a respeito da curvatura local. No caso unidimensional vimos que a curvatura estava relacionada com a variação do vetor normal, de modo que é intuitivo esperar que algo semelhante ocorra na superfície. Definiremos então a segunda forma fundamental $b_{\mu\nu} \equiv \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{g}_\mu$ e dela definiremos a matriz Hessiana $H_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} / \sqrt{g_{\mu\mu} g_{\nu\nu}}$. Esta matriz nos dá a curvatura de Gauss $\mathcal{K} = \det(H_{\mu\nu})$ e a curvatura média $\mathcal{H} = \text{tr}(H_{\mu\nu}) / 2$. Na Fig. 6.3 temos uma representação geométrica destas duas curvaturas baseados nas curvaturas principais k_1 e k_2 , onde vemos que a curvatura de Gauss é nula apenas se k_α for nulo e a curvatura média é nula se k_1 e k_2 forem de sinais opostos e de mesmo módulo.

Com isto nos resta definir as propriedades diferenciais. Elas podem ser escritas para os vetores \mathbf{g}_ν , o que é conhecido como fórmula de Gauss

$$\partial_\mu \mathbf{g}_\nu = b_{\mu\nu} \mathbf{n} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \mathbf{g}_\eta \quad (6.14)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\eta$ é conhecido como símbolo de Christoffel do segundo tipo. No entanto, neste

trabalho utilizaremos as propriedades diferenciais já para a base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$:

$$\begin{cases} \nabla_\mu \mathbf{e}_\nu = b_{\mu\nu} \mathbf{n} - \Omega_\mu \epsilon_{\nu\gamma} \mathbf{e}_\gamma \\ \nabla_\mu \mathbf{n} = -b_{\mu\nu} \mathbf{e}_\nu \end{cases} \quad (6.15)$$

onde vemos que o símbolo de Christoffel foi substituído pelo termo $\Omega_\mu \epsilon_{\nu\gamma}$, onde temos o vetor de conexão spin $\Omega_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla_\mu \mathbf{e}_\beta$ e o tensor de Levi-Civita em duas dimensões $\epsilon_{\nu\gamma}$, que podemos escrever como:

$$\epsilon_{\nu\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Com isto podemos parametrizar a nossa superfície. Assim como na seção anterior trabalharemos com o limite de uma casca fina, onde ζ representa o centro da casca. Nossa parametrização fica sendo:

$$\mathbf{r}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \zeta(\epsilon_1, \epsilon_2) + \epsilon_3 \mathbf{n} \quad (6.17)$$

sendo que $\epsilon_3 \in [-h, h]$ é a espessura da casca. Iremos considerar que a magnetização \mathbf{m} independe de ϵ_3 , o que é uma boa aproximação quando a casca é suficientemente fina.

Lembrando que a interação de troca é dada por $E_{ex} = (\nabla m_i)(\nabla m_i)$ temos que a interação de troca pode ser escrita como:

$$E_{ex} = E_{ex}^0 + E_{ex}^A + E_{ex}^D \quad (6.18)$$

$$E_{ex}^0 = \nabla m_i \cdot \nabla m_j \quad (6.19)$$

Onde assim como na seção anterior temos que E_{ex}^0 representa a interação de troca isotrópica, o segundo termo é uma interação anisotrópica:

$$E_{ex}^A = K_{ij} m_i m_j \quad (6.20)$$

onde $K_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla_\gamma \mathbf{e}_\beta$ é um termo bilinear com as componentes da segunda forma fundamental e do vetor de conexão de spin. Esta equação produz um potencial escalar geométrico muito próximo ao potencial obtido ao se estudar o problema quântico de uma partícula presa à superfície de uma esfera, como pode ser visto no trabalho magnífico da Ref.[121]. O terceiro termo é uma interação do tipo Dzyaloshinskii-Moriya dado por:

$$E_{ex}^D = 2D_{ijk} m_j \nabla_k m_i \quad (6.21)$$

onde $D_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \nabla_k \mathbf{e}_j$ é um termo que também é bilinear com os termos da segunda forma fundamental e vetor conexão de spin.

Por fim, podemos parametrizar a magnetização \mathbf{m} com a expressão $\mathbf{m} = \sin \theta \boldsymbol{\epsilon} + \cos \theta \mathbf{n}$,

onde definimos $\epsilon = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$, e isto nos permite escrever a interação de troca como:

$$E_{ex}^{2D} = [\nabla\theta - \mathbf{\Gamma}(\varphi)]^2 + \left[\sin\theta (\nabla\varphi - \Omega) - \cos\theta \frac{\partial \mathbf{\Gamma}(\varphi)}{\partial \varphi} \right]^2 \quad (6.22)$$

onde o vetor $\mathbf{\Gamma}(\varphi)$ é definido por:

$$\mathbf{\Gamma}(\Phi) = H_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{bmatrix} = H_{ij} \cdot \epsilon \quad (6.23)$$

6.2 Conclusões

Este capítulo consiste nos resultados obtidos nos últimos meses da tese e que por questão de tempo não puderam ser concluídos. Até o presente momento foi possível fazer um estudo aprofundado do formalismo apresentado e entender exatamente como a interação de troca foi reescrita, assunto que está exposto no Apêndice. É necessário agora fazer o mesmo estudo para a interação DMI, o que nos dará domínio total do formalismo e nos permitirá investigar diversos sistemas, como por exemplo skyrmions e bimerons em geometrias cilíndricas e esféricas.

Apêndices

.1 Interação de troca em coordenadas curvilíneas

Iniciaremos separando o termo normal do termo na superfície:

$$(\nabla_\alpha \mathbf{m})^2 = (\nabla_\alpha [m_\beta \hat{\mathbf{e}}_\beta + m_n \hat{\mathbf{n}}])^2 \quad (24)$$

de modo que agora podemos aplicar o gradiente em todos os termos:

$$= [(\nabla_\alpha m_\beta) \hat{\mathbf{e}}_\beta + m_\beta \nabla_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\beta + (\nabla_\alpha m_n) \hat{\mathbf{n}} + m_n \nabla_\alpha \hat{\mathbf{n}}]^2 \quad (25)$$

Agora podemos substituir as grandezas $\nabla_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\beta$ e $\nabla_\alpha \hat{\mathbf{n}}$ definidos na Eq. 6.15

$$= [(\nabla_\alpha m_\beta) \hat{\mathbf{e}}_\beta + m_\beta h_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}} - m_\beta \Omega_\alpha \epsilon_{\gamma\beta} \hat{\mathbf{e}}_\gamma + (\nabla_\alpha m_n) \hat{\mathbf{n}} + m_n \nabla_\alpha \hat{\mathbf{n}} - m_n h_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{e}}_\beta]^2 \quad (26)$$

Note que nenhum dos termos na equação acima pode depender de β e γ , que são índices mudos. É possível, portanto, fazer a substituição $\beta \rightarrow \gamma$ e $\gamma \rightarrow \beta$ de modo a unificar os termos $\hat{\mathbf{e}}_\beta$ e $\hat{\mathbf{e}}_\gamma$, resultando em:

$$= [(\nabla_\alpha m_\beta) \hat{\mathbf{e}}_\beta + m_\beta h_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{n}} - m_\gamma \Omega_\alpha \epsilon_{\beta\gamma} \hat{\mathbf{e}}_\beta + (\nabla_\alpha m_n) \hat{\mathbf{n}} + m_n \nabla_\alpha \hat{\mathbf{n}} - m_n h_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{e}}_\beta]^2 \quad (27)$$

$$= [(\nabla_\alpha m_\beta - m_\gamma \Omega_\alpha \epsilon_{\beta\gamma} - m_n h_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{e}}_\beta + (\nabla_\alpha m_n + m_\beta h_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}}]^2 \quad (28)$$

Ao calcular o quadrado desta expressão é importante lembrar que β é um índice mudo e portanto deve ser trocado no segundo termo para o caso mais geral, como escrito abaixo:

$$(\nabla_\alpha \mathbf{m})^2 = (\nabla_\alpha [m_\beta \hat{\mathbf{e}}_\beta + m_n \hat{\mathbf{n}}]) (\nabla_\alpha [m_\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma + m_n \hat{\mathbf{n}}]) \quad (29)$$

$$= [(\nabla_\alpha m_\beta - m_\gamma \Omega_\alpha \epsilon_{\gamma\beta} - m_n h_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{e}}_\beta + (\nabla_\alpha m_n + m_\beta h_{\alpha\beta}) \hat{\mathbf{n}}] \cdot [(\nabla_\alpha m_\sigma - m_\lambda \Omega_\alpha \epsilon_{\lambda\sigma} - m_n h_{\alpha\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_\sigma + (\nabla_\alpha m_n + m_\sigma h_{\alpha\sigma}) \hat{\mathbf{n}}] \quad (30)$$

Como estamos trabalhando com uma base ortonormal temos que $\hat{\mathbf{e}}_\beta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\sigma = g_{\beta\sigma} = \delta_{\beta\sigma}$. Portanto a equação acima pode ser escrita como:

$$= (\nabla_\alpha m_\beta)^2 + (m_n h_{\alpha\beta})^2 + (m_\gamma m_\lambda \Omega_\alpha^2 \epsilon_{\gamma\beta} \epsilon_{\lambda\sigma}) - (2m_n [\nabla_\alpha m_\beta] h_{\alpha\beta}) - (m_\gamma \nabla_\alpha m_\beta \Omega_\alpha \epsilon_{\gamma\beta}) - (m_\lambda \nabla_\alpha m_\beta \Omega_\alpha \epsilon_{\lambda\beta}) + (m_\gamma m_n \Omega_\alpha \epsilon_{\gamma\beta} h_{\alpha\beta}) + (m_\lambda m_n \Omega_\alpha \epsilon_{\gamma\beta} h_{\alpha\beta}) + (\nabla_\alpha m_n)^2 + (m_\beta h_{\alpha\beta})^2 + (2m_\beta [\nabla_\alpha m_n] h_{\alpha\beta}) \quad (31)$$

Note que o termo $h_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}h_{\beta\alpha} = \text{tr}[h^2] = 2(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K})$. Com isto, e renomeando os índices mudos quando necessário, podemos então agrupar todos estes termos em três grandezas como definidas abaixo:

$$E_x^0 \equiv (\nabla_\alpha m_\beta)^2 + (\nabla_\alpha m_n)^2 \quad (32)$$

$$E_x^{DMI} \equiv 2h_{\alpha\beta} (m_\beta \nabla_\alpha m_n - m_n \nabla_\alpha m_\beta) + 2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega_\gamma m_\beta \nabla_\gamma m_\alpha \quad (33)$$

$$E_x^A \equiv (h_{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} + \Omega^2 \delta_{\alpha\beta}) m_\alpha m_\beta + (\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}) m_n^2 + 2\epsilon_{\alpha\gamma} h_{\gamma\beta} \Omega_\beta m_\alpha m_n \quad (34)$$

De modo que temos, por fim, $(\nabla_\alpha \mathbf{m})^2 = E_x^0 + E_x^{DMI} + E_x^A$.

.2 Interação de troca para uma parametrização específica

Queremos saber como é a expressão para a interação de troca para a seguinte parametrização:

$$\mathbf{m} = \sin \Theta \cos \Phi \mathbf{e}_1 + \sin \Theta \sin \Phi \mathbf{e}_2 + \cos \Theta \mathbf{n} \quad (35)$$

Deste modo, avaliaremos cada um dos termos das Eqs. (32 - 34) utilizando a magnetização \mathbf{m} como definida acima. Nossa estratégia será analisar cada termo da equação explicitamente, abrindo as somatórias e substituindo as componentes da magnetização.

Começaremos analisando o termo $(\nabla_\alpha m_\beta)^2 + (\nabla_\alpha m_n)^2$. Explicitando as somas implícitas no primeiro termo obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla_\alpha m_\beta)(\nabla_\alpha m_\beta) &= \sum_\alpha \sum_\beta (\nabla_\alpha m_\beta)(\nabla_\alpha m_\beta), \\ &= (\nabla_1 m_1)^2 + (\nabla_1 m_2)^2 + (\nabla_2 m_1)^2 + (\nabla_2 m_2)^2 \implies \\ (\nabla_\alpha m_\beta)^2 &= \cos^2 \Theta (\nabla \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\nabla \Phi)^2 \end{aligned} \quad (36)$$

De modo semelhante, podemos tratar o termo $(\nabla_\alpha m_n)^2$:

$$\begin{aligned} (\nabla_\alpha m_n)^2 &= (\nabla_1 m_n)^2 + (\nabla_2 m_n)^2 = \sin^2 \Theta [(\nabla_1 \Theta)^2 + (\nabla_2 \Theta)^2] \implies \\ (\nabla_\alpha m_n)^2 &= \sin^2 \Theta (\nabla \Theta)^2 \end{aligned} \quad (37)$$

E temos que o primeiro termo é dado por:

$$(\nabla_\alpha m_\beta)^2 + (\nabla_\alpha m_n)^2 = (\nabla\Theta)^2 + \sin^2\Theta(\nabla\Phi)^2. \quad (38)$$

O segundo termo, $2h_{\alpha\beta}(m_\beta\nabla_\alpha m_n - m_n\nabla_\alpha m_\beta)$, será tratado da mesma maneira:

$$2h_{\alpha\beta}(m_\beta\nabla_\alpha m_n - m_n\nabla_\alpha m_\beta) = 2\sum_\alpha\sum_\beta h_{\alpha\beta}(m_\beta\nabla_\alpha m_n - m_n\nabla_\alpha m_\beta)$$

$$= -2[h_{11}(\cos\Phi\nabla_1\Theta - \sin\Theta\cos\Theta\sin\Phi\nabla_1\Phi) + h_{12}(\sin\Phi\nabla_1\Theta + \sin\Theta\cos\Theta\cos\Phi\nabla_1\Phi) \\ + h_{21}(\cos\Phi\nabla_2\Theta - \sin\Theta\cos\Theta\sin\Phi\nabla_2\Phi) + h_{22}(\sin\Phi\nabla_2\Theta + \sin\Theta\cos\Theta\cos\Phi\nabla_2\Phi)]$$

Nesse ponto é conveniente escrever $\mathbf{\Gamma}$ e calcular sua derivada em relação à Φ :

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} h_{11}\cos\Phi + h_{12}\sin\Phi \\ h_{21}\cos\Phi + h_{22}\sin\Phi \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial\Phi} = \begin{bmatrix} h_{12}\cos\Phi - h_{11}\sin\Phi \\ h_{22}\cos\Phi - h_{21}\sin\Phi \end{bmatrix} \quad (39)$$

de onde podemos obter:

$$2h_{\alpha\beta}(m_\beta\nabla_\alpha m_n - m_n\nabla_\alpha m_\beta) = -2\mathbf{\Gamma} \cdot \nabla\Theta - 2\sin\Theta\cos\Theta\nabla\Phi \cdot \frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial\Phi}. \quad (40)$$

Avaliando o termo $2\epsilon_{\alpha\beta}\Omega_\gamma m_\beta\nabla_\gamma m_\alpha$ de maneira semelhante obtemos:

$$2\epsilon_{\alpha\beta}\Omega_\gamma m_\beta\nabla_\gamma m_\alpha = 2\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta}\Omega_\gamma m_\beta\nabla_\gamma m_\alpha \\ = 2[(\Omega_1 m_2\nabla_1 m_1 + \Omega_2 m_2\nabla_2 m_1) - (\Omega_1 m_1\nabla_1 m_2 + \Omega_2 m_1\nabla_2 m_2)] \\ = -2[\Omega_1\sin^2\Theta\nabla_1\Phi + \Omega_2\sin^2\Theta\nabla_2\Phi].$$

$$2\epsilon_{\alpha\beta}\Omega_\gamma m_\beta\nabla_\gamma m_\alpha = -2\sin^2\Theta(\mathbf{\Omega} \cdot \nabla\Phi). \quad (41)$$

O termo $(h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta} + \Omega^2\delta_{\alpha\beta})m_\alpha m_\beta$ exigirá de nós invocar o fato de $h_{\mu,\nu}$ ser simétrico. Desenvolvendo as somatórias para o primeiro termo:

$$h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta}m_\alpha m_\beta = \sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta}m_\alpha m_\beta, \\ = m_1^2(h_{11}^2 + h_{21}^2) + m_2^2(h_{12}^2 + h_{22}^2) + 2m_1m_2(h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22}).$$

$$= \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi (h_{11}^2 + h_{21}^2) + \sin^2 \Theta \sin^2 \Phi (h_{12}^2 + h_{22}^2) + 2 \sin^2 \Theta \sin \Phi \cos \Phi (h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22}).$$

Nesse momento, é conveniente nos lembrarmos da definição de Γ e notar que

$$\Gamma^2 = \sin^2 \Phi (h_{12}^2 + h_{22}^2) + \cos^2 \Phi (h_{11}^2 + h_{21}^2) + 2 \sin \Phi \cos \Phi (h_{11}h_{12} + h_{21}h_{22}).$$

O que nos permite escrever de forma compacta:

$$h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta}m_\alpha m_\beta = \sin^2 \Theta \Gamma^2.$$

O segundo termo é dado por:

$$\Omega^2 \delta_{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta = \sum_\alpha \sum_\beta \Omega^2 \delta_{\alpha\beta} m_\alpha m_\beta = \Omega^2 (m_1^2 + m_2^2) = \Omega^2 \sin^2 \Theta$$

De modo que temos:

$$h_{\alpha\gamma}h_{\gamma\beta}m_\alpha m_\beta = \sin^2 \Theta (\Gamma^2 + \Omega^2) \quad (42)$$

Avaliando o termo $(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}) m_n^2$ precisamos nos recordar das definições de \mathcal{H} e \mathcal{K} e de $h_{\alpha\beta}^2$, o que nos dá:

$$(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}) m_n^2 = h_{\alpha\beta}^2 m_n^2.$$

$$h_{\alpha\beta}^2 m_n^2 = \sum_\alpha \sum_\beta h_{\alpha\beta}^2 m_n^2 = (h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2) m_n^2$$

$$= (h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2) \cos^2 \Theta.$$

Nesse ponto utilizamos mais uma vez a definição de Γ e verificamos a seguinte igualdade $\Gamma^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi}\right)^2 = h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2 = h_{\alpha\beta}^2 = \mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}$, o que nos permite escrever:

$$(\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}) m_n^2 = \left[\Gamma^2 + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi}\right)^2 \right] \cos^2 \Theta \quad (43)$$

Por fim, temos o termo $2\epsilon_{\gamma\beta}h_{\alpha\beta}\Omega_\alpha m_\gamma m_n$. Lembrando das propriedades do tensor $\epsilon_{\alpha\gamma}$:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{\gamma\beta}h_{\alpha\beta}\Omega_\alpha m_\gamma m_n &= 2 \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\gamma \epsilon_{\gamma\beta}h_{\alpha\beta}\Omega_\alpha m_\gamma m_n \\ &= 2(h_{12}\Omega_1 m_1 m_n + h_{22}\Omega_2 m_1 m_n - h_{21}\Omega_2 m_2 m_n - h_{11}\Omega_1 m_2 m_n) \end{aligned}$$

$$= 2\Omega_1 \sin \Theta \cos \Theta (h_{12} \cos \Phi - h_{11} \sin \Phi) + 2\Omega_2 \sin \Theta \cos \Theta (h_{22} \cos \Phi - h_{21} \sin \Phi).$$

Que podemos escrever em função de Γ e $\Omega = \mathbf{e}_1\Omega_1 + \mathbf{e}_2\Omega_2$:

$$2\epsilon_{\gamma\beta}h_{\alpha\beta}\Omega_\alpha m_\gamma m_n = 2 \sin \Theta \cos \Theta \Omega \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi}. \quad (44)$$

Com isto, podemos finalmente escrever a interação de troca completa, ao somar os termos (38), (40), (41), (42), (43), e (44), de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x = & (\nabla\Theta)^2 + \Gamma^2 - 2\Gamma \cdot \nabla\Theta + \sin^2 \Theta (\Omega^2 + (\nabla\Phi)^2 - 2\Omega \cdot \nabla\Phi) \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} \right)^2 \cos^2 \Theta + 2 \sin \Theta \cos \Theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} \cdot (\Omega - \nabla\Phi) \end{aligned}$$

Ou, escrito de um modo mais compacto,

$$\mathcal{E}_x = (\nabla\Theta - \Gamma)^2 + \left[\sin \Theta (\nabla\Phi - \Omega) - \cos \Theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} \right]^2 \quad (45)$$

Q.E.D.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [2] L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, 3rd ed. WORLD SCIENTIFIC, 2001. [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/4256>
- [3] H. Hopf, “Über die abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die kugelfläche,” *Mathematische Annalen*, vol. 104, no. 1, pp. 637–665, Dec 1931. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01457962>
- [4] W. Heisenberg, “Einführung in die einheitliche feldtheorie der elementarteilchen,” *Hirzel*, 1967.
- [5] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [6] T. H. R. Skyrme, “A unified field theory of mesons and baryons,” *Nuclear Physics*, vol. 31, pp. 556–569, 1961. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90775-7](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90775-7)
- [7] M. A. Lohe, “Soliton structures in $p(\varphi)_2$,” *Phys. Rev. D*, vol. 20, pp. 3120–3130, Dec 1979. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.3120>
- [8] A. N. Bogdanov and U. K. Röbner, “Chiral symmetry breaking in magnetic thin films and multilayers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, p. 037203, Jun 2001. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.037203>
- [9] U. K. Röbner, A. N. Bogdanov, and C. Pfleiderer, “Spontaneous skyrmion ground states in magnetic metals,” *Nature*, vol. 442, no. 7104, pp. 797–801, Aug 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nature05056>
- [10] S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, “Skyrmion lattice in a chiral magnet,” *Science*, vol. 323, no. 5916, pp. 915–919, 2009. [Online]. Available: <https://science.sciencemag.org/content/323/5916/915>

- [11] P. J. Ackerman and I. I. Smalyukh, “Static three-dimensional topological solitons in fluid chiral ferromagnets and colloids,” *Nature Materials*, vol. 16, no. 4, pp. 426–432, Apr 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nmat4826>
- [12] X. S. Wang, A. Qaiumzadeh, and A. Brataas, “Current-driven dynamics of magnetic hopfions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, p. 147203, Sep 2019. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.147203>
- [13] A. A. Thiele, “Steady-State Motion of Magnetic Domains,” *Physical Review Letters*, vol. 30, no. 6, pp. 230–233, Feb. 1973. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.230>
- [14] S. Zhang and S. S.-L. Zhang, “Generalization of the landau-lifshitz-gilbert equation for conducting ferromagnets,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 086601, Feb 2009. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.086601>
- [15] N. Nagaosa and Y. Tokura, “Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions,” *Nature Nanotechnology*, vol. 8, no. 12, pp. 899–911, Dec 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nnano.2013.243>
- [16] D. J. Sellmyer, M. Zheng, and R. Skomski, “Magnetism of fe, co and ni nanowires in self-assembled arrays,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 13, no. 25, pp. R433–R460, jun 2001. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/25/201>
- [17] J.-E. Wegrowe, D. Kelly, A. Franck, S. E. Gilbert, and J.-P. Ansermet, “Magnetoresistance of ferromagnetic nanowires,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 3681–3684, May 1999. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.3681>
- [18] S. Vock, C. Hengst, M. Wolf, K. Tschulik, M. Uhlemann, Z. Sasvári, D. Makarov, O. G. Schmidt, L. Schultz, and V. Neu, “Magnetic vortex observation in feco nanowires by quantitative magnetic force microscopy,” *Applied Physics Letters*, vol. 105, no. 17, p. 172409, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4900998>
- [19] K. Nielsch, R. B. Wehrspohn, J. Barthel, J. Kirschner, U. Gösele, S. F. Fischer, and H. Kronmüller, “Hexagonally ordered 100 nm period nickel nanowire arrays,” *Applied Physics Letters*, vol. 79, no. 9, pp. 1360–1362, 2001. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1399006>
- [20] K. Nielsch, F. Müller, A.-P. Li, and U. Gösele, “Uniform nickel deposition into ordered alumina pores by pulsed electrodeposition,” *Advanced Materials*, vol. 12, no. 8, pp. 582–586, 2000. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291521-4095%28200004%2912%3A8%3C582%3A%3AAID-ADMA582%3E3.0.CO%3B2-3>

- [21] D. P. Weber, D. Ruffer, A. Buchter, F. Xue, E. Russo-Averchi, R. Huber, P. Berberich, J. Arbiol, A. Fontcuberta i Morral, D. Grundler, and M. Poggio, "Cantilever magnetometry of individual ni nanotubes," *Nano Letters*, 2012.
- [22] J. Bachmann, Jing, M. Knez, S. Barth, H. Shen, S. Mathur, U. Gösele, and K. Nielsch, "Ordered iron oxide nanotube arrays of controlled geometry and tunable magnetism by atomic layer deposition," *Journal of the American Chemical Society*, vol. 129, no. 31, pp. 9554–9555, Aug 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/ja072465w>
- [23] A. Buchter, J. Nagel, D. Ruffer, F. Xue, D. P. Weber, O. F. Kieler, T. Weimann, J. Kohlmann, A. B. Zorin, E. Russo-Averchi, R. Huber, P. Berberich, A. Fontcuberta i Morral, M. Kemmler, R. Kleiner, D. Koelle, D. Grundler, and M. Poggio, "Reversal mechanism of an individual ni nanotube simultaneously studied by torque and squid magnetometry," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 067202, Aug 2013. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.067202>
- [24] D. Ruffer, R. Huber, P. Berberich, S. Albert, E. Russo-Averchi, M. Heiss, J. Arbiol, A. Fontcuberta i Morral, and D. Grundler, "Magnetic states of an individual ni nanotube probed by anisotropic magnetoresistance," *Nanoscale*, vol. 4, pp. 4989–4995, 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1039/C2NR31086D>
- [25] R. Streubel, D. J. Thurmer, D. Makarov, F. Kronast, T. Kosub, V. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei, R. Schäfer, and O. G. Schmidt, "Magnetically capped rolled-up nanomembranes," *Nano Letters*, vol. 12, no. 8, pp. 3961–3966, Aug 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/nl301147h>
- [26] M. Albrecht, G. Hu, I. L. Guhr, T. C. Ulbrich, J. Boneberg, P. Leiderer, and G. Schatz, "Magnetic multilayers on nanospheres," *Nature Materials*, vol. 4, no. 3, pp. 203–206, Mar 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nmat1324>
- [27] M. V. Sapozhnikov, O. L. Ermolaeva, B. G. Gribkov, I. M. Nefedov, I. R. Karetnikova, S. A. Gusev, V. V. Rogov, B. B. Troitskii, and L. V. Khokhlova, "Frustrated magnetic vortices in hexagonal lattice of magnetic nanocaps," *Phys. Rev. B*, vol. 85, p. 054402, Feb 2012. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.85.054402>
- [28] M. M. Soares, E. de Biasi, L. N. Coelho, M. C. dos Santos, F. S. de Menezes, M. Knobel, L. C. Sampaio, and F. Garcia, "Magnetic vortices in tridimensional nanomagnetic caps observed using transmission electron microscopy and magnetic force microscopy," *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 224405, Jun 2008. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.224405>
- [29] R. Streubel, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, D. Makarov, F. Kronast, O. G. Schmidt, and Y. Gaididei, "Equilibrium magnetic states in individual hemispherical permalloy

- caps,” *Applied Physics Letters*, vol. 101, no. 13, p. 132419, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4756708>
- [30] L. Baraban, D. Makarov, O. G. Schmidt, G. Cuniberti, P. Leiderer, and A. Erbe, “Control over janus micromotors by the strength of a magnetic field,” *Nanoscale*, vol. 5, pp. 1332–1336, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1039/C2NR32662K>
- [31] C. I. L. de Araujo, J. M. Fonseca, J. P. Sinnecker, R. G. Delatorre, N. Garcia, and A. A. Pasa, “Circular single domains in hemispherical permalloy nanoclusters,” *Journal of Applied Physics*, vol. 116, no. 18, p. 183906, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4901573>
- [32] Y. He, J. Fu, Y. Zhang, Y. Zhao, L. Zhang, A. Xia, and J. Cai, “Multilayered si/ni nanosprings and their magnetic properties,” *Small*, vol. 3, no. 1, pp. 153–160, 2007. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sml.200600375>
- [33] C. Phatak, Y. Liu, E. B. Gulsoy, D. Schmidt, E. Franke-Schubert, and A. Petford-Long, “Visualization of the magnetic structure of sculpted three-dimensional cobalt nanospirals,” *Nano Letters*, vol. 14, no. 2, pp. 759–764, Feb 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/nl404071u>
- [34] B. Dick, M. J. Brett, T. J. Smy, M. R. Freeman, M. Malac, and R. F. Egerton, “Periodic magnetic microstructures by glancing angle deposition,” *Journal of Vacuum Science & Technology A*, vol. 18, no. 4, pp. 1838–1844, 2000. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1116/1.582481>
- [35] F. Balhorn, S. Mansfeld, A. Krohn, J. Topp, W. Hansen, D. Heitmann, and S. Mendach, “Spin-wave interference in three-dimensional rolled-up ferromagnetic microtubes,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 037205, Jan 2010. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.037205>
- [36] C. Müller, C. C. Bof Bufon, M. E. Navarro Fuentes, D. Makarov, D. H. Mosca, and O. G. Schmidt, “Towards compact three-dimensional magnetoelectronics—magnetoresistance in rolled-up co/cu nanomembranes,” *Applied Physics Letters*, vol. 100, no. 2, p. 022409, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.3676269>
- [37] F. Balhorn, S. Jeni, W. Hansen, D. Heitmann, and S. Mendach, “Axial and azimuthal spin-wave eigenmodes in rolled-up permalloy stripes,” *Applied Physics Letters*, vol. 100, no. 22, p. 222402, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.3700809>
- [38] R. Streubel, F. Kronast, P. Fischer, D. Parkinson, O. G. Schmidt, and D. Makarov, “Retrieving spin textures on curved magnetic thin films with full-field soft x-ray

- microscopies,” *Nature Communications*, vol. 6, no. 1, p. 7612, Jul 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/ncomms8612>
- [39] E. B. Ureña, Y. Mei, E. Coric, D. Makarov, M. Albrecht, and O. G. Schmidt, “Fabrication of ferromagnetic rolled-up microtubes for magnetic sensors on fluids,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 42, no. 5, p. 055001, feb 2009. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/42/5/055001>
- [40] A. Aharoni, *Introduction to the Theory of Ferromagnetism*, ser. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1996. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books/about/Introduction_to_the_Theory_of_Ferromagne.html?id=Ru-z9b3WcfMC&redir_esc=y
- [41] L. Landau and E. Lifshitz, “On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies,” *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, vol. 8, pp. 153–169, 1935. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-036364-6.50008-9>
- [42] B. V. Dijk, “Skyrmions and the Dzyaloshinskii-Moriya Interaction,” Master’s thesis, Utrecht University, 2014.
- [43] I. E. Dzyaloshinskii, “On the magneto-electrical effect in antiferromagnets,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 10, p. 628, March 1960. [Online]. Available: <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/10/3/p628?a=list>
- [44] T. Moriya, “Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism,” *Phys. Rev.*, vol. 120, pp. 91–98, Oct 1960. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.120.91>
- [45] E. C. S. S. F.R.S., “Xcvii. the demagnetizing factors for ellipsoids,” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 36, no. 263, pp. 803–821, 1945. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/14786444508521510>
- [46] R. P and R. G, *Proc. Leeds Phil. Soc.*, vol. 6, no. 191, 1954.
- [47] G. Rowlands, “On the calculation of acoustic radiation impedance of polygonal-shaped apertures,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 92, no. 5, pp. 2961–2963, 1992. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1121/1.404360>
- [48] W. Brown, *Magnetostatic Principles in Ferromagnetism*, ser. Selected topics in solid state physics. North-Holland Publishing Company, 1962. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=tiMFAAAAMAAJ>
- [49] J. Dubowik, “Shape anisotropy of magnetic heterostructures,” *Phys. Rev. B*, vol. 54, pp. 1088–1091, Jul 1996. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.1088>

- [50] C. Kittel, “Physical theory of ferromagnetic domains,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, pp. 541–583, Oct 1949. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.541>
- [51] W. F. Brown, “Domains, micromagnetics, and beyond: Reminiscences and assessments,” *Journal of Applied Physics*, vol. 49, no. 3, pp. 1937–1942, 1978. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.324811>
- [52] F. H. D. Leeuw, R. V. D. Doel, and U. Enz, “Dynamic properties of magnetic domain walls and magnetic bubbles,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 43, no. 6, pp. 689–783, jun 1980. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F43%2F6%2F001>
- [53] P. Weiss and J. Kunz, “La variation du ferromagnetisme du temperature,” *Comptes Rendus*, vol. 143, pp. 1136–1149, 1906. [Online]. Available: <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00241064/document>
- [54] M. R. Scheinfein, J. Unguris, M. H. Kelley, D. T. Pierce, and R. J. Celotta, “Scanning electron microscopy with polarization analysis (sempa),” *Review of Scientific Instruments*, vol. 61, no. 10, pp. 2501–2527, 1990. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.1141908>
- [55] C. Schönenberger and S. F. Alvarado, “Understanding magnetic force microscopy,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 80, no. 3, pp. 373–383, 1990. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01323519>
- [56] T. J. Silva, S. Schultz, and D. Weller, “Scanning near-field optical microscope for the imaging of magnetic domains in optically opaque materials,” *Applied Physics Letters*, vol. 65, no. 6, pp. 658–660, 1994. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.112261>
- [57] L. Landau, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed. Pergamon, 1984, vol. Volume 8. [Online]. Available: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1C18827F903907B05F7FDACC38E5E348>
- [58] F. Bloch, “Zur theorie des austauschproblems und der remanenzerscheinung der ferromagnetika,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 74, no. 5, pp. 295–335, 1932. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF01337791>
- [59] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, ser. North-Holland personal library. North-Holland Publishing Company, 1982. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=1XucQgAACAAJ>

- [60] S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, “Skyrmion lattice in a chiral magnet,” *Science*, vol. 323, no. 5916, pp. 915–919, 2009. [Online]. Available: <https://science.sciencemag.org/content/323/5916/915>
- [61] X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, and Y. Tokura, “Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal,” *Nature*, vol. 465, no. 7300, pp. 901–904, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nature09124>
- [62] S. Heinze, K. von Bergmann, M. Menzel, J. Brede, A. Kubetzka, R. Wiesendanger, G. Bihlmayer, and S. Blügel, “Spontaneous atomic-scale magnetic skyrmion lattice in two dimensions,” *Nature Physics*, vol. 7, no. 9, pp. 713–718, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nphys2045>
- [63] A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, “Magnetic skyrmions: advances in physics and potential applications,” *Nature Reviews Materials*, vol. 2, no. 7, p. 17031, Jun 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.31>
- [64] D. A. Gilbert, B. B. Maranville, A. L. Balk, B. J. Kirby, P. Fischer, D. T. Pierce, J. Unguris, J. A. Borchers, and K. Liu, “Realization of ground-state artificial skyrmion lattices at room temperature,” *Nature Communications*, vol. 6, no. 1, p. 8462, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/ncomms9462>
- [65] M. Rahm, J. Stahl, and D. Weiss, “Programmable logic elements based on ferromagnetic nanodisks containing two antidots,” *Applied Physics Letters*, vol. 87, no. 18, p. 182107, 2005. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.2120914>
- [66] K. Bussmann, G. A. Prinz, S.-F. Cheng, and D. Wang, “Switching of vertical giant magnetoresistance devices by current through the device,” *Applied Physics Letters*, vol. 75, no. 16, pp. 2476–2478, 1999. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.125053>
- [67] F. Jonietz, S. Mühlbauer, C. Pfleiderer, A. Neubauer, W. Münzer, A. Bauer, T. Adams, R. Georgii, P. Böni, R. A. Duine, K. Everschor, M. Garst, and A. Rosch, “Spin transfer torques in mnsi at ultralow current densities,” *Science*, vol. 330, no. 6011, pp. 1648–1651, 2010. [Online]. Available: <https://science.sciencemag.org/content/330/6011/1648>
- [68] S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, “Magnetic domain-wall racetrack memory,” *Science*, vol. 320, no. 5873, pp. 190–194, 2008. [Online]. Available: <https://science.sciencemag.org/content/320/5873/190>
- [69] A. Vansteenkiste, J. Leliaert, M. Dvornik, M. Helsen, F. Garcia-Sanchez, and B. Van Waeyenberge, “The design and verification of mumax3,” *AIP Advances*, vol. 4, no. 10, p. 107133, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4899186>

- [70] J. Iwasaki, W. Koshibae, and N. Nagaosa, “Colossal spin transfer torque effect on skyrmion along the edge,” *Nano Letters*, vol. 14, no. 8, pp. 4432–4437, Aug 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/nl501379k>
- [71] B. Krueger, “Current-driven magnetization dynamics : Analytical modeling and numerical simulation,” Ph.D. dissertation, Universität Hamburg, 2012. [Online]. Available: <https://www.semanticscholar.org/paper/Current-Driven-Magnetization-Dynamics-%3A-Analytical-Krueger/48d079642c304ac382024da90da61cc16a039653#paper-header>
- [72] M. A. Ruderman and C. Kittel, “Indirect exchange coupling of nuclear magnetic moments by conduction electrons,” *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 99–102, Oct 1954. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.99>
- [73] T. Kasuya, “A Theory of Metallic Ferro- and Antiferromagnetism on Zener’s Model,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 16, no. 1, pp. 45–57, 07 1956. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1143/PTP.16.45>
- [74] K. Yosida, “Magnetic properties of cu-mn alloys,” *Phys. Rev.*, vol. 106, pp. 893–898, Jun 1957. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.893>
- [75] S. S. P. Parkin and D. Mauri, “Spin engineering: Direct determination of the ruderman-kittel-kasuya-yosida far-field range function in ruthenium,” *Phys. Rev. B*, vol. 44, pp. 7131–7134, Oct 1991. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.44.7131>
- [76] K. Szałowski and T. Balcerzak, “Rkky interaction with diffused contact potential,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 024419, Jul 2008. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.024419>
- [77] R. Cacilhas, V. L. Carvalho-Santos, S. Vojkovic, E. B. Carvalho, A. R. Pereira, D. Altbir, and A. S. Nunez, “Coupling of skyrmions mediated by the rkky interaction,” *Applied Physics Letters*, vol. 113, no. 21, p. 212406, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.5062168>
- [78] M. Stano and O. Fruchart, *Handbook of Magnetic Materials*. Elsevier, 2018, vol. 27.
- [79] M. Yan, A. Kákay, S. Gliga, and R. Hertel, “Beating the walker limit with massless domain walls in cylindrical nanowires,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 057201, 2010.
- [80] M. Yan, C. Andreas, A. Kákay, F. García-Sánchez, and R. Hertel, “Fast domain wall dynamics in magnetic nanotubes: Suppression of walker breakdown and cherenkov-like spin wave emission,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 99, p. 122505, 2011.

- [81] R. Hertel, “Ultrafast domain wall dynamics in magnetic nanotubes and nanowires,” *J. Phys.*, vol. 28, p. 483002, 2016.
- [82] R. Moreno, V. L. Carvalho-Santos, A. P. Espejo, D. Laroze, O. Chubykalo-Fesenko, and D. Altbir, “Oscillatory behavior of the domain wall dynamics in a curved cylindrical magnetic nanowire,” *Phys. Rev. B*, vol. 96, p. 184401, Nov 2017. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.96.184401>
- [83] S. Vojkovic, V. L. Carvalho-Santos, J. M. Fonseca, and A. S. Nunez, “Vortex-antivortex pairs induced by curvature in toroidal nanomagnets,” *Journal of Applied Physics*, vol. 121, no. 11, p. 113906, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4977983>
- [84] J. A. Fernandez-Roldan, R. Perez del Real, C. Bran, M. Vazquez, and O. Chubykalo-Fesenko, “Magnetization pinning in modulated nanowires: from topological protection to the “corkscrew” mechanism,” *Nanoscale*, vol. 10, pp. 5923–5927, 2018. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1039/C8NR00024G>
- [85] P. Landeros and A. S. Nunez, “Domain wall motion on magnetic nanotubes,” *Journal of Applied Physics*, vol. 108, no. 3, p. 033917, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.3466747>
- [86] R. G. Elías, N. Vidal-Silva, and V. L. Carvalho-Santos, “Winding number selection on merons by gaussian curvature’s sign,” *Scientific Reports*, vol. 9, no. 1, p. 14309, Oct 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-50395-7>
- [87] K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, and Y. Gaididei, “Curvature-induced domain wall pinning,” *Phys. Rev. B*, vol. 92, p. 104412, Sep 2015. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.92.104412>
- [88] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., ser. Studies in Nonlinearity. Westview Press, 2014. [Online]. Available: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=93608d1e7d48ff61d25173674af85bd7>
- [89] M. Yan, A. Kákay, S. Gliga, and R. Hertel, “Beating the walker limit with massless domain walls in cylindrical nanowires,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 057201, Feb 2010. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.104.057201>
- [90] R. Cacilhas, C. I. L. de Araujo, V. L. Carvalho-Santos, R. Moreno, O. Chubykalo-Fesenko, and D. Altbir, “Controlling domain wall oscillations in bent cylindrical magnetic wires,” *Phys. Rev. B*, vol. 101, p. 184418, May 2020. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.101.184418>

- [91] G. H. R. Bittencourt, “Emergência de uma dupla ruptura de walker geometricamente induzida em nanofitas magnéticas curvas,” Master’s thesis, 2021.
- [92] A. Mougin, M. Cormier, J. P. Adam, P. J. Metaxas, and J. Ferré, “Domain wall mobility, stability and walker breakdown in magnetic nanowires,” *Europhysics Letters (EPL)*, vol. 78, no. 5, p. 57007, may 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F78%2F57007>
- [93] G. H. R. Bittencourt, R. Moreno, R. Cacilhas, S. Castillo-Sepúlveda, O. Chubykalo-Fesenko, D. Altbir, and V. L. Carvalho-Santos, “Curvature-induced emergence of a second critical field for domain wall dynamics in bent nanostripes,” *Applied Physics Letters*, vol. 118, no. 14, p. 142405, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/5.0046848>
- [94] M. T. Birch, D. C.-O. no, L. A. Turnbull, M. N. Wilson, F. Groß, N. Träger, N. B. A. Laurenson, S. H. Moody, M. Weigand, G. S. utz, H. Popescu, R. Fan, P. Steadman, J. A. T. Verezhak, G. Balakrishnan, J. C. Loudon, A. C. Twitchett-Harrison, O. Hovorka, H. Fangohr, F. Y. Ogrin, J. Gräfe, and P. D. Hatton, “Real-space imaging of confined magnetic skyrmiontubes,” *Nat Comm*, vol. 1726, no. 11, 2020.
- [95] C. Donnelly, K. L. Metlov, V. Scagnoli, M. Guizar-Sicairos, M. Holler, N. S. Bingham, J. Raabe, L. J. Heyderman, N. R. Cooper, and S. Gliga, “Experimental observation of vortex rings in a bulk magnet,” *Nat Phys*, vol. 316, no. 17, 2021.
- [96] D. Sanz-Hernández, A. Hierro-Rodriguez, C. Donnelly, J. Pablo-Navarro, A. Sorrentino, E. Pereiro, C. Magén, S. McVitie, J. M. de Teresa, S. Ferrer, P. Fischer, and A. Fernández-Pacheco, “Artificial double-helix for geometrical control of magnetic chirality,” *ACS Nano*, vol. 8084, no. 14, 2020.
- [97] S. D. Col, S. Jamet, N. Rougemaille, A. Locatelli, T. O. Mentès, B. S. Burgos, R. Afid, M. Darques, L. Cagnon, J. C. Toussaint, and O. Fruchart, “Observation of bloch-point domain walls in cylindrical magnetic nanowires,” *Phys. Rev B*, vol. 180405, no. 89, 2014.
- [98] C. Donnelly, M. Guizar-Sicairos, V. Scagnoli, S. Gliga, M. Holler, J. Raabe, and L. J. Heyderman, “Three-dimensional magnetization structures revealed with x-ray vector nanotomography,” *Nature*, vol. 547, no. 7663, pp. 328–331, Jul 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nature23006>
- [99] V. L. Carvalho-Santos, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira, “Miniaturization of vortex-comprising system using ferromagnetic nanotori,” *Journal of Applied Physics*, vol. 108, no. 9, p. 094310, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.3487924>

- [100] S. Vojkovic, A. S. Nunez, D. Altbir, and V. L. Carvalho-Santos, “Magnetization ground state and reversal modes of magnetic nanotori,” *Journal of Applied Physics*, vol. 120, no. 3, p. 033901, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4958740>
- [101] G. R. Lewis, J. C. Loudon, R. Tovey, Y.-H. Chen, A. P. Roberts, R. J. Harrison, P. A. Midgley, and E. Ringe, “Magnetic vortex states in toroidal iron oxide nanoparticles: Combining micromagnetics with tomography,” *Nano Letters*, vol. 20, no. 10, pp. 7405–7412, 2020, pMID: 32915579. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.0c02795>
- [102] V. L. Carvalho-Santos, A. R. Moura, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira, “Topological spin excitations on a rigid torus,” *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 134450, Apr 2008. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.77.134450>
- [103] J. Benoit and R. Dandoloff, “Heisenberg spins on an elastic torus section,” *Physics Letters A*, vol. 248, no. 5, pp. 439–444, 1998. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960198006574>
- [104] Y. Gaididei, V. P. Kravchuk, and D. D. Sheka, “Curvature effects in thin magnetic shells,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 257203, Jun 2014. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.257203>
- [105] A. Teixeira, S. Castillo-Sepúlveda, S. Vojkovic, J. Fonseca, D. Altbir, A. Nunez, and V. Carvalho-Santos, “Analysis on the stability of in-surface magnetic configurations in toroidal nanoshells,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 478, pp. 253–259, 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885318338940>
- [106] S. Vojkovic, V. L. Carvalho-Santos, J. M. Fonseca, and A. S. Nunez, “Vortex-antivortex pairs induced by curvature in toroidal nanomagnets,” *Journal of Applied Physics*, vol. 121, no. 11, p. 113906, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.4977983>
- [107] K. V. Yershov, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, and U. K. Röbner, “Curvature effects on phase transitions in chiral magnets,” *SciPost Phys.*, vol. 9, p. 43, 2020. [Online]. Available: <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.9.4.043>
- [108] V. L. Carvalho-Santos, R. M. Corona, D. Altbir, and S. Castillo-Sepúlveda, “Shifts in the skyrmion stabilization due to curvature effects in dome- and antidome-shaped surfaces,” *Phys. Rev. B*, vol. 102, p. 024444, Jul 2020. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.024444>

- [109] V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, A. Kákay, O. M. Volkov, U. K. Röbler, J. van den Brink, D. Makarov, and Y. Gaididei, “Multiplet of skyrmion states on a curvilinear defect: Reconfigurable skyrmion lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, p. 067201, Feb 2018. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.067201>
- [110] J.-S. B. Tai and I. I. Smalyukh, “Static hopf solitons and knotted emergent fields in solid-state noncentrosymmetric magnetic nanostructures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 187201, Oct 2018. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.187201>
- [111] P. J. Ackerman and I. I. Smalyukh, “Diversity of knot solitons in liquid crystals manifested by linking of preimages in torons and hopfions,” *Phys. Rev. X*, vol. 7, p. 011006, Jan 2017. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.011006>
- [112] D. M. J. and P. D. G., “Oommf user’s guide, version 1.0,” National Institute of Standards and Technology, Tech. Rep. NISTIR 6376, 1999.
- [113] M. Beg, R. Carey, W. Wang, D. Cortés-Ortuño, M. Vousden, M.-A. Bisotti, M. Albert, D. Chernyshenko, O. Hovorka, R. L. Stamps, and H. Fangohr, “Ground state search, hysteretic behaviour and reversal mechanism of skyrmionic textures in confined helimagnetic nanostructures,” *Scientific Reports*, vol. 5, no. 1, p. 17137, Nov 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/srep17137>
- [114] N. Vidal-Silva, A. Riveros, F. Tejo, J. Escrig, and D. Altbir, “Controlling the nucleation and annihilation of skyrmions with magnetostatic interactions,” *Applied Physics Letters*, vol. 115, no. 8, p. 082405, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.5099898>
- [115] M. A. Castro, Álvaro P. Espejo, N. M. Vargas, D. Altbir, S. Allende, and V. L. Carvalho-Santos, “New magnetic states in nanorings created by anisotropy gradients,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 484, pp. 55–60, 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885318336205>
- [116] W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira, R. L. Silva, and N. M. Oliveira-Neto, “How hole defects modify vortex dynamics in ferromagnetic nanodisks,” *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 12, p. 124306, 2008. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.2939569>
- [117] R. L. Silva, A. R. Pereira, R. C. Silva, W. A. Moura-Melo, N. M. Oliveira-Neto, S. A. Leonel, and P. Z. Coura, “Predicted defect-induced vortex core switching in thin magnetic nanodisks,” *Phys. Rev. B*, vol. 78, p. 054423, Aug 2008. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.78.054423>

- [118] R. Streubel, P. Fischer, F. Kronast, V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. Gaididei, O. G. Schmidt, and D. Makarov, “Magnetism in curved geometries,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 49, no. 36, p. 363001, aug 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/49/36/363001>
- [119] D. D. Sheka, V. P. Kravchuk, and Y. Gaididei, “Curvature effects in statics and dynamics of low dimensional magnets,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 48, no. 12, p. 125202, mar 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/12/125202>
- [120] W. Kuhnel, *Differential Geometry: Curves – Surfaces – Manifolds*, 3rd ed., ser. Student Mathematical Library. Amer Mathematical Society, 2015, vol. 77. [Online]. Available: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D45887D2051B0543011DD3E2FCED2EB5>
- [121] R. C. T. da Costa, “Quantum mechanics of a constrained particle,” *Phys. Rev. A*, vol. 23, pp. 1982–1987, Apr 1981. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.23.1982>