

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

MICHELE GOMES GONÇALVES LAMAS

O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE PEIXOTO NA
VERSÃO UNIDIMENSIONAL E O PROJETO KLEIN

VIÇOSA – MINAS GERAIS
2026

MICHELE GOMES GONÇALVES LAMAS

O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE PEIXOTO NA
VERSÃO UNIDIMENSIONAL E O PROJETO KLEIN

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura em Matemática da Univer-
sidade Federal de Viçosa como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Walter Teófilo
Huaraca Vargas.

VIÇOSA – MINAS GERAIS
2026

MICHELE GOMES GONÇALVES LAMAS

O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE PEIXOTO NA
VERSÃO UNIDIMENSIONAL E O PROJETO KLEIN

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura em Matemática da Univer-
sidade Federal de Viçosa como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Licenciada em Matemática.

APROVADO:

ASSENTIMENTO:

MICHELE GOMES GONÇALVES LAMAS

Autora

Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas

Orientador

MICHELE GOMES GONÇALVES LAMAS

O TEOREMA DA ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE PEIXOTO NA
VERSÃO UNIDIMENSIONAL E O PROJETO KLEIN

Monografia apresentada ao Curso de
Licenciatura em Matemática da Univer-
sidade Federal de Viçosa como parte
dos requisitos para obtenção do título
de Licenciado em Matemática.

Documento assinado digitalmente
 MICHELE GOMES GONCALVES LAMAS
Data: 14/07/2026 10:30:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

BANCA AVALIADORA:

Documento assinado digitalmente
 ALEXANDRE MIRANDA ALVES
Data: 13/07/2026 08:50:31-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves
(UFV)

Documento assinado digitalmente
 POUYA MEHDIPOUR
Data: 13/07/2026 14:40:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Pouya Mehdipour
(UFV)

Documento assinado digitalmente
 WALTER TEOFILO HUARACA VARGAS
Data: 13/07/2026 17:27:42-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder coragem, disciplina, resiliência e força ao longo desses quatro anos para que eu concluísse o curso dos meus sonhos.

Aos meus pais, familiares e amigos, sou muito grata pelo apoio e fé que tiveram em mim ao longo dessa trajetória.

Agradeço, também, ao meu orientador, Walter Huaraca, pela dedicação, paciência e valiosas contribuições durante o desenvolvimento deste trabalho, sempre conduzindo com compromisso e incentivo à pesquisa.

Aos professores da banca de avaliação deste trabalho, Pouya Mendiphour e Alexandre Miranda, pelas valiosas contribuições, disponibilidade e avaliação criteriosa.

A todos os professores que participaram da minha formação, pelo conhecimento, sabedoria e ensinamentos compartilhados na trajetória acadêmica.

RESUMO

LAMAS, Michele Gomes Gonçalves. Universidade Federal de Viçosa, 2026. **ESTABILIDADE ESTRUTURAL EM SISTEMAS DINÂMICOS UNIDIMENSIONAIS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO TEOREMA DE PEIXOTO.** Orientador: Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas.

Este trabalho teve como objetivo estudar o Teorema de Peixoto para sistemas dinâmicos unidimensionais definidos sobre o círculo $\mathbb{S}^1$, buscando compreender os conceitos matemáticos envolvidos em sua demonstração e investigar possíveis contribuições desse estudo para a formação de professores de Matemática sob a perspectiva de Felix Klein. Inicialmente, foram apresentados conceitos fundamentais de Topologia a partir da obra *Introduction to Smooth Manifolds*, de John M. Lee. Também foram estudados resultados de Análise, Geometria Diferencial e Equações Diferenciais Ordinárias utilizando principalmente os livros *Equações Ordinárias e Aplicações*, de Scardua, e *Equações Diferenciais Ordinárias*, de Viana e Espinar. Os conceitos introdutórios de Sistemas Dinâmicos foram desenvolvidos com base em *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, de Yuri Lima. Esses resultados serviram de base para o desenvolvimento do trabalho. Em seguida, foi estudada a demonstração do Teorema de Peixoto em sua versão unidimensional, tomando como referência principal o artigo *The One-dimensional Version of Peixoto's Structural Stability Theorem: A Calculus-based Proof*, de Rahman e Blackmore., caracterizando os sistemas estruturalmente estáveis em $\mathbb{S}^1$ como aqueles que possuem um número finito de pontos de equilíbrio hiperbólicos. A pesquisa também discutiu o significado intuitivo da estabilidade estrutural por meio de interpretações geométricas e analisou como ideias provenientes de resultados matemáticos avançados podem contribuir para a formação docente. Como aplicação educacional, foi proposta uma atividade voltada ao Ensino Médio utilizando o software GeoGebra para explorar conceitos relacionados à estabilidade e perturbações em sistemas matemáticos. Os resultados evidenciam que o estudo de temas avançados pode contribuir não apenas para o aprofundamento matemático do futuro professor, mas também para o desenvolvimento de novas formas de interpretar e apresentar conceitos da Matemática escolar.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Estabilidade Estrutural. Teorema de Peixoto. Formação de Professores. Felix Klein.

ABSTRACT

LAMAS, Michele Gomes Gonçalves. Federal University of Viçosa, 2026. **STRUCTURAL STABILITY IN ONE-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS: AN APPROACH THROUGH PEIXOTO'S THEOREM.** Advisor: Prof. Dr. Walter Teofilo Huaraca Vargas.

This work aimed to study Peixoto's Theorem for one-dimensional dynamical systems defined on the circle $\mathbb{S}^1$, seeking to understand the mathematical concepts involved in its proof and to investigate possible contributions of this study to the education of Mathematics teachers from the perspective of Felix Klein. Initially, fundamental concepts of Topology were presented based on John M. Lee's book *Introduction to Smooth Manifolds*. Results from Analysis, Differential Geometry, and Ordinary Differential Equations were also studied, mainly using the books *Ordinary Differential Equations and Applications*, by Scardua, and *Ordinary Differential Equations*, by Viana and Espinar. Introductory concepts of Dynamical Systems were developed following the approach presented in Yuri Lima's *Introduction to Dynamical Systems*. These results provided the theoretical foundation for the development of this work. Subsequently, the proof of Peixoto's Theorem in its one-dimensional version was studied, taking as its main reference the article *The One-dimensional Version of Peixoto's Structural Stability Theorem: A Calculus-based Proof*, by Rahman and Blackmore., characterizing structurally stable systems on $\mathbb{S}^1$ as those possessing a finite number of hyperbolic equilibrium points. The research also discussed the intuitive meaning of structural stability through geometric interpretations and analyzed how ideas arising from advanced mathematical results can contribute to teacher education. As an educational application, an activity aimed at high school students was proposed using the GeoGebra software to explore concepts related to stability and perturbations in mathematical systems. The results indicate that the study of advanced mathematical topics can contribute not only to the mathematical development of future teachers but also to the creation of new ways of interpreting and presenting school mathematics concepts.

Keywords: Dynamical Systems. Structural Stability. Peixoto's Theorem. Teacher Education. Felix Klein.

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos e resultados preliminares	3
2.1	Variedades Diferenciáveis	5
2.2	Sistemas Dinâmicos	7
3	Teorema de Peixoto Unidimensional	12
4	O Teorema de Peixoto sob a perspectiva do Projeto Klein	35
4.1	Proposta de atividade para educação básica	36
4.2	Desenvolvimento da atividade	37
5	Considerações finais	40
6	Referências	42

1 Introdução

No século XIX, Henri Poincaré dedicou-se ao estudo do problema dos três corpos na mecânica celeste, cujo objetivo era descrever o movimento de três massas — como o Sol, a Terra e a Lua — sob o efeito da gravidade mútua. Diante das limitações das ferramentas matemáticas de sua época para encontrar uma solução analítica exata, Poincaré propôs uma mudança de paradigma: em vez de buscar equações exatas para as trajetórias, passou a analisar o comportamento qualitativo do sistema ao longo do tempo. Esse enfoque pioneiro deu origem à Teoria dos Sistemas Dinâmicos que, em linhas gerais, consiste no desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrever a evolução temporal do estado de um sistema.

A partir dessa abordagem qualitativa, Poincaré introduziu representações gráficas do espaço de estados, permitindo o estudo de direções, órbitas e pontos de equilíbrio, isto é, pontos nos quais o sistema permanece estacionário, classificando-os como estáveis ou instáveis.

Foi nesse contexto que o matemático brasileiro Maurício Peixoto passou a investigar questões relacionadas à estabilidade dos sistemas dinâmicos. Em seu artigo clássico *On Structural Stability*, publicado em 1959, Peixoto introduziu conceitos fundamentais que dariam origem à moderna teoria da estabilidade estrutural. Seu questionamento central era simples, mas profundo: o que ocorre com a dinâmica de um sistema quando ele sofre pequenas perturbações? Seu comportamento qualitativo permanece inalterado? A partir dessas indagações, Peixoto deslocou o foco da análise de pontos singulares isolados para a robustez global do sistema dinâmico, estabelecendo as bases da teoria que culminaria no teorema que hoje leva seu nome.

Para compreender a fundamentação pedagógica deste trabalho, é necessário recorrer à figura de Felix Klein. O matemático alemão defendeu ativamente, ao longo de sua carreira, reformas no sistema educacional de seu país, sustentando que a Matemática deve ser vista como uma ciência viva e em constante evolução — uma perspectiva que, segundo ele, deveria nortear também o Ensino Básico. Inspirado por esse ideal, surgiu o Projeto Klein, cujo propósito é traduzir a linguagem e os conceitos da Matemática superior em abordagens acessíveis, permitindo que estudantes e professores da Educação Básica compreendam suas ideias centrais.

No contexto deste projeto, essa articulação divide-se em duas frentes. Embora o estudo da estabilidade estrutural exija um arcabouço teórico altamente avançado — evidenciado pelo fato de que o Teorema de Peixoto demandou cerca de dez anos para alcançar sua formulação completa —, ele fundamenta-se em noções intuitivas, tais como estabilidade, mudança e evolução temporal. Tais conceitos possuem forte apelo visual e geométrico, tornando-os passíveis de exploração educacional. Assim, a imersão em um tema dessa complexidade técnica contribui significativamente para o amadurecimento e o

crescimento acadêmico do pesquisador.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo central estudar o Teorema de Estabilidade Estrutural de Peixoto em sua versão unidimensional, compreendendo os principais conceitos envolvidos em sua demonstração. Paralelamente, busca-se investigar as relações possíveis entre esse resultado da Teoria dos Sistemas Dinâmicos e a formação de professores de Matemática, sob a ótica das diretrizes do Projeto Klein.

Para além do rigor estritamente matemático, a investigação desse teorema permite refletir sobre como a Matemática avançada pode enriquecer a prática do futuro docente. Desse modo, o intuito não é apenas compreender sua demonstração formal, mas também propor caminhos para transpor suas ideias essenciais para contextos didáticos próximos à realidade da Educação Básica.

2 Conceitos e resultados preliminares

Apresentamos a seguir os principais conceitos e resultados teóricos utilizados ao longo deste trabalho. As demonstrações omitidas nesta seção podem ser encontradas nas referências bibliográficas adotadas, em especial nos textos *Introduction to Smooth Manifolds*, de John M. Lee [4], *Equações Ordinárias e Aplicações*, de Bernardo Scardua [1], *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, de Yuri Lima [2], e *Equações Diferenciais Ordinárias*, de Marcelo Viana e José Espinar [3]. Embora os conceitos sejam apresentados em sua generalidade, alguns exemplos serão discutidos no caso unidimensional, por este constituir o principal objeto de estudo deste trabalho.

Topologia

Definição 1. Uma topologia num conjunto M é uma coleção τ de subconjuntos de M , chamados de subconjuntos abertos, que satisfaz as seguintes condições:

- M e o conjunto vazio $\emptyset$ são abertos;
- a união arbitrária de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
- e a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos também é um subconjunto aberto.

Definição. Um espaço topológico é um par (M, τ) , onde M é um conjunto e τ é uma topologia em M .

Definição 2. Se $N \subset M$ e (M, τ) é um espaço topológico, então diremos que N é um subespaço topológico de M se considerarmos a topologia τ_1 em N como:

$$\tau_1 = \{A \cap N; A \in \tau\}$$

Definição 3. Consideraremos em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana definida por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Essa norma induz a métrica

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

a qual, por sua vez, induz a topologia euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

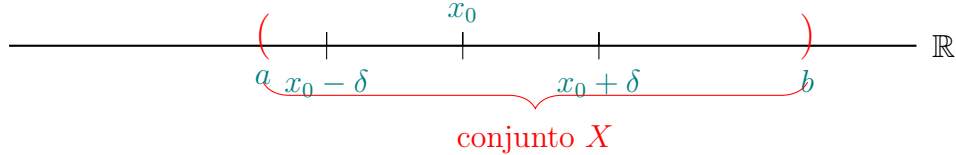
Exemplo 1. Considere $M = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ e com a condição seguinte $A \in \tau$ se e somente se para cada $a \in A$ existe $B(a, r) \subseteq A$.

Onde $B(a, r) = \{p \in \mathbb{R}^n; \|a - p\| < r\}$ e $\|\cdot\|$ representa, por exemplo, a distância euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Em particular intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são exemplos de conjuntos abertos. A topologia $(\mathbb{R}^n, \tau)$ é chamada Topologia Euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado podemos verificar que $\mathbb{R}$ é um subespaço topológico de $\mathbb{R}^2$ usando a identificação $\mathbb{R} \rightarrow \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, de forma análoga temos que $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ pode ser considerado com um subespaço topológico de $\mathbb{R}^2$.

Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Seja X um conjunto tal que $X \subset M$. Dizemos que $x_0 \in X$ é ponto interior de X quando existe $A \subset M$ aberto com $x_0 \in A$ e tal que $A \subset X$.

Na seguinte figura consideramos X como sendo um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, então nele apresentamos uma ideia de como provar que o interior de um intervalo aberto coincide com ele, para isso basta tomar $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$.



Denotamos como $\text{int}(X)$ o conjunto de todos os pontos interiores de X . Sendo assim, é fácil verificar que o conjunto X é aberto se e somente se $X = \text{int}(X)$.

Definição 4. Diremos que X é um conjunto fechado de M se e somente se $X^c = M - X$ for um conjunto aberto de M .

Definição 5. Diremos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.

Definição 6. Sejam (X, τ) e (Y, τ_1) dois espaços topológicos.

- Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \in \tau_1$ contido em Y é um aberto em X , isto é $f^{-1}(B) \in \tau$.
- Uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ bijetiva, diz-se homeomorfismo se f e f^{-1} são aplicações contínuas.

Definição 7. Uma família $B \subset \mathcal{P}(M)$ é uma base para uma topologia τ em M se satisfaz:

- Para todo $x \in X$, existe B tal que $x \in B$
- Se $B_1, B_2 \in B$ e $x \in B_1 \cap B_2$ então existe $B_3 \in B$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Em $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual o conjunto B formado por todas as bolas abertas é uma base desta topologia.

Se uma topologia τ sobre M admite uma base enumerável, diremos que ela é segundo contável. Em todo o que segue o nosso trabalho, sempre consideraremos espaços topológicos segundo contável e de Hausdorff; esta última afirmação significa que dado dois pontos distintos no espaço topológico existem dois abertos disjuntos, cada um contendo um dos pontos.

Definição 8. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset X$. Dizemos que Y é denso em X quando

$$\overline{Y} \cap X = X,$$

isto é,

$$X \subset \overline{Y}.$$

Equivalentemente, Y é denso em X se, e somente se, toda bola aberta com centro em um ponto de X contém pontos de Y .

Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações contínuas e seja $Y \subset X$ um subconjunto denso. Se $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$, então $f = g$ isto é, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$

Definição 9. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial. Isto é, se $X = A \cup B$, com A e B abertos em X e disjuntos, então necessariamente $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

Teorema 1. A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.

2.1 Variedades Diferenciáveis

Variedades Topológicas

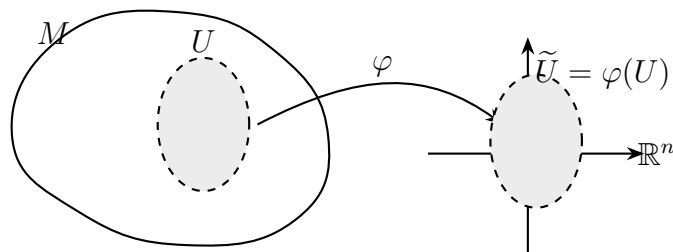
Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n ou uma n -variedade topológica quando M é localmente euclidiano na dimensão n , ou seja, todo ponto $x \in M$ possui vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, isto é, para todo ponto $x \in M$, existem um aberto $U \subset M$ contendo x e um homeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow \tilde{U}$$

onde $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é aberto.

Cartas de coordenadas

Seja M uma variedade topológica de dimensão n . Uma carta de coordenadas em M é um par (U, φ) onde U é um subconjunto aberto de M e $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.



Exemplo 1. Seja S^n a n -esfera unitária, definida como o conjunto dos vetores de norma 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. Vamos mostrar que S^n é uma variedade topológica. Devemos mostrar que todo ponto $x \in S^n$ possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$. Fixe um ponto $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$. Como

$$\|x\| = 1,$$

segue que existe pelo menos uma coordenada $x_i \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha $x_{n+1} > 0$. Considere o hemisfério superior $U = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in S^n; y_{n+1} > 0\}$. Definimos a aplicação $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\varphi(y_1, \dots, y_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n)$. Como os pontos de U satisfazem

$$y_{n+1} = \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2}$$

a aplicação inversa é dada por

$$\varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(y_1, \dots, y_n, \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2} \right),$$

definida no aberto $B^n = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; y_1^2 + \dots + y_n^2 < 1\}$. Assim, φ é um homeomorfismo entre U e o aberto $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Como todo ponto de S^n pertence a algum hemisfério aberto, concluímos que cada ponto de S^n possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$. Portanto, S^n é localmente euclidiana de dimensão n ; em particular $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica.

Logo, S^n satisfaz as três propriedades da definição e, portanto, é uma variedade topológica de dimensão n .

Variedades diferenciáveis

Suponha que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ são duas cartas da Variedade topológica M , direms que elas são C^∞ -compatíveis se as aplicações entre abertos

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

são C^∞ . Uma variedade diferenciável suave e dimensão n é uma variedade topológica munido de uma estrutura diferenciável de dimensão n e classe C^k ; isto é uma coleção de cartas tal que a união dos domínios cubrem M e são dois a dois C^∞ -compatíveis. Usando o exemplo anterior e com o auxílio de 4 cartas, podemos provar que S^1 é uma variedade suave.

Definição 10. *Uma superfície M é uma variedade diferenciável de dimensão 2. Dizemos que uma superfície é suave quando é munida de uma estrutura diferenciável, isto é, quando admite um atlas cujas aplicações de transição são diferenciáveis. Dizemos ainda que uma superfície é fechada quando é compacta e não possui bordo. Além disso, M é dita orientável quando é possível escolher uma orientação contínua em todos os seus pontos, isto é, não ocorre inversão de orientação ao percorrer a superfície.*

Derivada de uma aplicação entre duas variedades

Sejam M e N variedades diferenciáveis e

$$f : M \rightarrow N$$

uma aplicação C^k com $k \geq 1$. Fixe $x \in M$. Considere $C_x(M)$ o conjunto de todas as curvas C^∞ . Considere

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

com $\varepsilon > 0$ e $\alpha(0) = x$. Dada uma carta

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tem-se $x \in U$, as curvas $\alpha_u(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tu)$ com $u \in \mathbb{R}^m$ estão em $C_x(M)$. No conjunto $C_x(M)$ defina a relação $\alpha \sim \beta$ se para alguma carta (U, φ) , $x \in U$ tem-se

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t) \right|_{t=0}$$

O quociente $\frac{C_x(M)}{\sim}$ é chamado de **espaço tangente** a M em x e é denotado por $T_x M$. Assim, seja $f : \tilde{M} \rightarrow N$ diferenciável. A derivada de f em x é a aplicação linear

$$Df(x) : T_x M \rightarrow T_y N, \quad y = f(x)$$

Em que $Df(x)$ é definida por:

$$Df(x)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

Em que $Df(x) : T_x M \rightarrow T_y N$ é uma aplicação linear. Onde $u = [\alpha] \in T_x M$

$$Df(x) : T_x M \rightarrow T_y N,$$

$$u = [\alpha] \mapsto Df(x)u = [f \circ \alpha]$$

Temos um vetor tangente u em x representado por uma curva $\alpha(t)$.

2.2 Sistemas Dinâmicos

Dedicamos esta seção à introdução dos sistemas dinâmicos, conceito que constitui o pilar fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Equações Diferenciais

Definição 11. Uma equação diferencial ordinária é uma expressão da forma

$$x^{(k)} = F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

onde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$ em que a variável $t \in \mathbb{R}$ e as variáveis $x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ tomam valores em $\mathbb{R}^d$. Em que $k \geq 1$ e $d \geq 1$ são chamados de ordem e dimensão da equação diferencial.

Definição 12. Uma solução dessa equação é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^k , tal que I é um intervalo aberto, o vetor $v(t) = \left(t, \gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\gamma}{dt^{k-1}}(t)\right)$ pertence a U para todo $t \in I$ e $\frac{d^k \gamma}{dt^k}(t) = F(v(t))$ para todo $t \in I$. No caso particular da equação diferencial

autônoma

$$x' = f(x)$$

uma solução é uma função diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ para todo $t \in I$.

Uma equação diferencial autônoma é uma equação da forma $x' = f(x)$, onde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Associado a essa equação, podemos considerar um campo de vetores, isto é, uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, que define a EDO autônoma $x' = X(x)$. Além disso, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma solução da equação $x' = f(x)$, então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a função $\gamma^a : I - a \rightarrow \mathbb{R}^d$, definida por $\gamma^a(t) = \gamma(t + a)$, também é solução da mesma equação, onde $I - a = \{s - a; s \in I\}$.

Uma trajetória ou órbita de um ponto $x \in U$ é a solução $\gamma_x : I_x \rightarrow U$ que satisfaz a condição inicial $\gamma_x(0) = x$, sendo I_x o intervalo maximal de existência da solução. A partir das trajetórias, definimos o fluxo associado à EDO $x' = f(x)$ como a família de aplicações $\varphi^t : \{x \in U; t \in I_x\} \rightarrow U$, dada por $\varphi^t(x) = \gamma_x(t)$.

As trajetórias de uma EDO autônoma podem ser classificadas de diferentes maneiras. Dizemos que x é um ponto **periódico** se $I_x = \mathbb{R}$ e existe $l > 0$ tal que $\varphi^t(x) = \varphi^{t+l}(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é um ponto **regular** não periódico se $\varphi^s(x) \neq \varphi^t(x)$ para quaisquer $s, t \in I_x$ com $s \neq t$. Por fim, dizemos que x é um ponto **singular** se $I_x = \mathbb{R}$ e $\varphi^t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, um ponto $x \in U$ é singular se, e somente se, $f(x) = 0$, enquanto x é um ponto regular quando $f(x) \neq 0$. Observemos que um ponto singular é precisamente um ponto fixo do sistema dinâmico, pois, se $f(x) = 0$, então a solução da EDO com condição inicial x é constante, isto é,

$$\gamma_x(t) = x, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Reciprocamente, se a trajetória permanece constante, necessariamente $f(x) = 0$.

Equações lineares autônomas

Agora, vamos lidar com equações da forma

$$x' = Ax$$

em que $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma transformação linear. Em que o fluxo de uma equação diferencial linear é dado por

$$\varphi^t(x) = e^{tA} \cdot x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Mas, o que nos interessa é em $d = 1$. Daí, a solução da equação

$$x' = ax$$

com condição inicial $y(0) = x_0$ é dada por $\gamma(t) = e^{ta}x_0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Sistemas dinâmicos

Definição 13. *Seja M um espaço topológico. Um sistema dinâmico contínuo, ou fluxo, em M é uma aplicação contínua $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, \cdot) = id_M$ e $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in M$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\varphi_t : M \rightarrow M$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, de modo que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$. Dizemos que $x \in M$ é um ponto periódico se existe $t > 0$ tal que $\varphi_t(x) = x$. O menor $t > 0$ com essa propriedade é chamado período de x .*

Definição 14. *Seja $p \in U$ tal que a trajetória $\varphi^t(p)$ esteja definida para todo $t \in (-\infty, 0]$. O conjunto α -limite de p é o conjunto dos pontos de acumulação de $\varphi^t(p)$ quando $t \rightarrow -\infty$, isto é, $\alpha(p) = \{x \in U; (\varphi^{t_n}(p))_n \rightarrow x \text{ para alguma sequência } (t_n)_n \rightarrow -\infty\}$.*

Definição 15. *Seja $p \in U$ tal que a trajetória $\varphi^t(p)$ esteja definida para todo $t \in [0, +\infty)$. O conjunto ω -limite de p é o conjunto dos pontos de acumulação de $\varphi^t(p)$ quando $t \rightarrow +\infty$, isto é, $\omega(p) = \{x \in U; (\varphi^{t_n}(p))_n \rightarrow x \text{ para alguma sequência } (t_n)_n \rightarrow +\infty\}$.*

Definição 16. *Um ponto $x \in M$ é dito recorrente se, para toda vizinhança V de x e todo $t > 0$, existe $k > t$ tal que $\varphi_k(x) \in V$. Em outras palavras, a trajetória de x retorna arbitrariamente próxima do ponto inicial infinitas vezes.*

Atrator e repulsor

Um atrator é um conjunto que atrai todas as órbitas de sua vizinhança. A é atrator do sistema dinâmico $\varphi_t : M \rightarrow M$, com $t \geq 0$ se existe U aberto com $U \subset M$ tal que

- (i) $A \subset U$
- (ii) $\varphi_t(\overline{U}) \subset U, \quad \forall t > 0.$
- (iii) $A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U).$

Um conjunto B é dito repulsor do sistema dinâmico $\varphi_t : M \rightarrow M$ se B é atrator de φ_t^{-1} .

Estabilidade estrutural em sistemas dinâmicos contínuos

Definição 17. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada um campo vetorial de classe C^1 se f é continuamente diferenciável, isto é,*

$$f \in C^1(U, \mathbb{R}^n).$$

Um sistema dinâmico contínuo autônomo pode ser descrito por uma equação diferencial da forma

$$x' = f(x)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suficientemente regular.

Um pouco de estabilidade estrutural

Definição 18. *Sejam*

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*campos vetoriais com fluxos locais φ_t e ψ_t , respectivamente. Dizemos que os sistemas dinâmicos determinados por f e g são **topologicamente conjugados** se existe um homeomorfismo $h : U \longrightarrow V$ tal que*

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_t(h(x)), \quad (1)$$

para todo $x \in U$ e para todo t para o qual ambos os lados da igualdade estejam definidos.

Definição 19. *Dizemos que um campo vetorial $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset C^1(U, \mathbb{R}^n)$ de f tal que, para todo $g \in \mathcal{V}$, os sistemas dinâmicos determinados por f e g são topologicamente conjugados.*

Definição 20. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^1 . Um ponto $p \in U$ é chamado de **ponto singular** de f se $f(p) = 0$.*

Definição 21. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^1 definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e seja $p \in U$ um ponto singular de f . Dizemos que p é um **ponto singular simples** se a aplicação linear derivada $Df(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um isomorfismo. Equivalentemente, p é um ponto singular simples quando 0 não é autovalor de $DF(p)$.*

Ponto singular hiperbólico

Dizemos que $p \in U$ é um ponto estacionário hiperbólico se $f(p) = 0$ e a derivada

$$Df(p) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

é um campo de vetores linear hiperbólico, ou seja, se todos os seus autovalores têm parte real não nula. No ponto de vista contínuo, podemos classificar pontos singulares hiperbólicos em:

(i) **atratores:** se todos os autovalores de $Df(p)$ têm parte real negativa, então todas as soluções da EDO $x' = Ax$ convergem para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

(ii) **repulsores:** se todos os autovalores de $Df(p)$ têm parte real positiva, então todas as soluções da EDO $x' = Ax$ convergem para zero quando $t \rightarrow -\infty$.

(iii) **sela:** se $Df(p)$ possui pelo menos um autovalor com parte real positiva e pelo menos um autovalor com parte real negativa.

Definição: Denota a classe de aplicações de classe C^1 do intervalo unitário com extremos identificados por $C^1(\mathbb{S}^1)$. Então:

$$\|f\|_1 := \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{S}^1\} + \sup\{|f'(x)|; x \in \mathbb{S}^1\}.$$

define uma norma em $C^1(\mathbb{S}^1)$, chamada de norma C^1 . Essa norma gera uma topologia,

chamada de topologia C^1 , por meio de intervalos abertos:

$$B_\varepsilon^1(f) = \{g \in C^1(\mathbb{S}^1); \|g - f\|_1 < \varepsilon\}.$$

A ideia aqui é criar uma estrutura no conjunto de funções de classe $C^1(\mathbb{S}^1)$, ou seja, do conjunto de funções que são contínuas e têm derivadas contínuas em $\mathbb{S}^1$. A norma $\|\cdot\|_1$ induz a métrica d definida por:

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

para quaisquer $f, g \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Dados $f, g \in C^1(\mathbb{S}^1)$, a proximidade entre essas funções é medida pela métrica d . Assim, quando

$$d(f, g) = \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

significa dizer que tanto a imagem quanto a inclinação dessas funções estão bem próximas, ou seja, apresentam um comportamento semelhante em $\mathbb{S}^1$. A métrica d induz uma topologia em $C^1(\mathbb{S}^1)$, denominada topologia C^1 . Assim, as bolas abertas

$$B_\varepsilon^1(f) = \{g \in C^1(\mathbb{S}^1); d(f, g) < \varepsilon\}$$

formam uma base para essa topologia.

Mais pra frente em nosso estudo, será importante pois queremos estudar como o sistema se comporta após pequenas perturbações. Essa topologia C^1 vai garantir que a perturbação não altera a imagem das funções e nem sua dinâmica local, por causa da derivada. Agora vamos associar nossa definição geral ao contexto do nosso estudo. Na definição geral, trabalhamos com campos vetoriais, vizinhança na topologia C^1 , conjugação topológica e fluxos. A partir de agora, vamos adicionar uma definição de nosso espaço de fases $\mathbb{S}^1$ e o campo vetorial será representado por uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ visto que estamos com foco no contexto unidimensional.

No caso geral, tratamos com um campo vetorial $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Como o foco deste trabalho é o caso unidimensional, consideramos $n = 1$, de modo que podemos escrever $X : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotando esse campo por f , obtemos uma função $f : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o sistema dinâmico associado pode ser descrito pela EDO

$$x' = f(x).$$

Por outro lado, como definimos a topologia C^1 em $\mathbb{S}^1$, queremos considerar o espaço de fases $\mathbb{S}^1$. Nesse caso, tomamos uma aplicação $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, podemos formular uma definição equivalente no contexto unidimensional.

Definição 22. *Seja o sistema dinâmico*

$$x' = f(x)$$

com $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Dizemos que f é estruturalmente estável se para todo $\varepsilon > 0$ e toda função $g \in B_\varepsilon^1(f)$, os sistemas

$$x' = f(x) \quad e \quad y' = g(y)$$

são topologicamente equivalentes, ou seja, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ com $h(O_f(x)) = O_g(h(x))$. Em que, $O_f(x) = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ com $x(t)$ solução da EDO. E $O_g(y) = \{y(t); t \in \mathbb{R}\}$ onde $y(t)$ é a solução da EDO $y' = g(y)$. Onde $O_g(h(x)) = \{y(t); t \in \mathbb{R}, y(0) = h(x)\}$. Além disso,

$$B_\varepsilon^1(f) = \{g \in C^1(\mathbb{S}^1); \|g - f\|_1 < \varepsilon\}.$$

3 Teorema de Peixoto Unidimensional

Nos trabalhos [8, 9], o matemático brasileiro Maurício Peixoto desenvolveu a teoria da estabilidade estrutural e estabeleceu resultados que se tornaram marcos na Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Em particular, apresentou uma caracterização dos sistemas estruturalmente estáveis por meio de propriedades locais dos seus pontos de equilíbrio, resultado que ficou conhecido como Teorema de Peixoto.

Teorema 2 (Teorema da Estabilidade estrutural e Densidade de Peixoto). *Se $x' = f(x)$ é um sistema dinâmico de classe $\mathcal{C}^1$ sobre uma superfície fechada e suave. Então o sistema dinâmico é estruturalmente estável se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Todo comportamento recorrente é limitado a um número finito de pontos singulares hiperbólicos e órbitas periódicas.*
2. *Não existem separatrizes, isto é, não existem órbitas conectando pontos singulares do tipo sela.*

Além disso, se M é orientável, o conjunto de sistemas $\mathcal{C}^1$ -estruturalmente estáveis é um conjunto aberto e denso no conjunto de todos os sistemas dinâmicos de classe $\mathcal{C}^1$ definidos sobre M .

Nesta seção apresentaremos uma condição necessária e suficiente para que um homeomorfismo do círculo seja uma conjugação topológica entre dois sistemas $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$, para posteriormente apresentar a prova de uma versão do Teorema de Peixoto para campos de vetores definidos no círculo.

Teorema 3. *Sejam os sistemas:*

$$x' = f(x) \quad e \quad y' = g(y)$$

com $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$. Um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma equivalência topológica entre estes sistemas se, e somente se

- (a) *Há uma correspondência dos pontos de equilíbrio, ou seja,*

$$h(\{x \in \mathbb{S}^1; f(x) = 0\}) = g^{-1}(0) = h(f^{-1}(0)) = \{y \in \mathbb{S}^1; g(y) = 0\}.$$

(b) tem preservação do sinal, ou seja:

- Se h é crescente,

$$h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x)) \text{ e } h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x))$$

- Se h é decrescente

$$h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x)) \text{ e } h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x))$$

Demonstração:

Suponhamos que h é uma equivalência topológica entre os sistemas

$$x' = f(x) \text{ e } y' = g(y)$$

isto é, h é um homeomorfismo e preserva as órbitas de ambos os sistemas.

- (a) Seja $x_0 \in f^{-1}(0)$. Então $\mathcal{O}_f(x_0) = x_0$. Como h é uma equivalência topológica, temos que $\mathcal{O}_g(h(x_0)) = h(\mathcal{O}_f(x_0)) = h(x_0)$, o que implica que $h(x_0) \in g^{-1}(0)$. Isso prova que $h(f^{-1}(0)) \subset g^{-1}(0)$.

Por outro lado, se $y_0 \in g^{-1}(0)$, então $g(y_0) = 0$ e, como h é uma equivalência topológica, existe um único $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $h(x_0) = y_0$. Além disso, $\mathcal{O}_f(x_0) = \mathcal{O}_f(h^{-1}(y_0)) = h^{-1}(\mathcal{O}_g(y_0)) = h^{-1}(y_0) = x_0$. Então $x_0 \in f^{-1}(0)$, o que finalmente implica que $y_0 = h(x_0) \in h(f^{-1}(0))$.

- (b) Como $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo, então h é crescente ou decrescente. Fixemos $x \in \mathbb{S}^1 \setminus f^{-1}(0)$. Como h é uma equivalência topológica, temos que $\mathcal{O}_g(h(x)) = h(\mathcal{O}_f(x))$. Lembremos também que $\mathcal{O}_f(x) \setminus \{x\} = \mathcal{O}_f^+(x) \sqcup \mathcal{O}_f^-(x)$, onde $\sqcup$ denota a união disjunta.

Por outro lado, como h é contínua e os conjuntos $h(\mathcal{O}_f^+(x))$ e $h(\mathcal{O}_f^-(x))$ são conexos, então:

$$(b.1) \text{ ou } h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x)) \text{ ou } h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x)); \text{ e}$$

$$(b.2) \text{ ou } h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x)) \text{ ou } h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x)).$$

- Se h é crescente, tome $t_1 > 0$ tal que $x(t_1) \in \mathcal{O}_f^+(x)$, então $h(x(t_1)) \in \mathcal{O}_g^+(h(x))$, logo, por conexidade temos que $h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x))$ de forma análoga temos que $h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x))$
- Se h é decrescente, tome $t_1 > 0$ tal que $x(t_1) \in \mathcal{O}_f^+(x)$, então $h(x(t_1)) \in \mathcal{O}_g^-(h(x))$, logo, por conexidade temos que $h(\mathcal{O}_f^+(x)) = \mathcal{O}_g^-(h(x))$ de forma análoga temos que $h(\mathcal{O}_f^-(x)) = \mathcal{O}_g^+(h(x))$

■

Funções bump e partição da unidade

As partições da unidade são ferramentas essenciais na teoria das variedades suaves, utilizadas para colar ou estender objetos matemáticos locais em estruturas globais. Essa

técnica fundamenta-se na existência de funções suaves de suporte compacto — ou seja, funções que assumem valores positivos em regiões específicas da variedade e tornam-se identicamente nulas fora delas. A seguir apresentaremos um resultado útil para a nossos propósitos.

Definição 23. *Seja M uma variedade suave e seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de M , isto é, uma família de conjuntos abertos cuja união é toda a variedade M , ou seja, $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Uma **partição da unidade subordinada** a $\mathcal{U}$ é uma família de funções suaves $\{\varphi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i) $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$ para todo $\alpha \in A$ e todo $x \in M$;
- (ii) $\text{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$;
- (iii) a família de suportes $\{\text{supp}(\varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é localmente finita, isso significa que, para cada ponto $x \in M$, existe uma vizinhança V de x que intersecta apenas um número finito de suportes $\text{supp}(\varphi_\alpha)$. Embora os conjuntos da cobertura possam possuir interseções, apenas um número finito das funções da partição da unidade é diferente de zero em qualquer vizinhança de um ponto de M .
- (iv) $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in M$.

Proposição 1. *Seja M uma variedade suave. Para qualquer conjunto fechado $A \subset M$ e qualquer aberto U contendo A , existe uma função suave:*

$$\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\varphi \equiv 1$ em A e $\text{supp}(\varphi) \subset U$, em que

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in M : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Demonstração:

Seja $U_0 = U$ e $U_1 = M/A$ e seja $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta $\{U_0, U_1\}$, isto é, $M = U_0 \cup U_1$. e a partição subordinada a $\{U_0, U_1\}$ é um par de funções suaves

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que

- (i) $0 \leq \varphi_i \leq 1$, para todo $i = 0, 1$
- (ii) $\text{supp}(\varphi_i) \subset U_i$, para todo $i = 0, 1$
- (iii) $\varphi_0(x) + \varphi_1(x) = 1$, para todo $x \in M$.

Como $\varphi_1 = 0$ em A , temos que

$$\varphi_0 = \sum_i \varphi_i = 1 \quad \text{em } A$$

Logo, φ_0 possui as propriedades desejadas, porque $\text{supp } \varphi_0 \subset U$ pela definição de partição subordinada. Assim, chamamos de função bump para A suportada em U qualquer função com as propriedades descritas acima. ■

Exemplo 2. Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{se } x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{se } x \notin (-1, 1). \end{cases}$$

Vamos mostrar que ψ é uma função bump. Ou seja, precisamos mostrar que ψ é de classe C^∞ e supp ser compacto. Note que para todo $x \notin (-1, 1)$ temos que $\psi(x) = 0$. Mas,

$$\text{supp}(\psi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}.$$

Então,

$$\text{supp } \psi = [-1, 1].$$

Por outro lado, quando $x \in (-1, 1)$, a função é dada por

$$\psi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

que é composta de funções de classe C^∞ , logo, é de classe C^∞ em $(-1, 1)$. Fora desse intervalo, ψ é identicamente nula e portanto é suave. Basta verificar para os pontos $x = -1$ e $x = 1$. Assim, vamos mostrar que as derivadas laterais existem e vale zero.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\psi(x) - \psi(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}} - 0}{x + 1} \\ &\stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}} \left(-\frac{1}{1-x^2}\right)'}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \left(\frac{2x}{(1-x^2)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \frac{2x}{(1-x^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\psi(x) - \psi(1)}{x - 1} = 0.$$

Portanto,

$$\psi'(-1) = 0 \quad \text{e} \quad \psi'(1) = 0.$$

Logo, $\psi(x)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. E portanto é uma função bump. Podemos restringir a função para o intervalo de raio r ,

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < r\}$$

Daí,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{r^2}{r^2 - (x-x_0)^2}}, & \text{se } x \in B_r(x_0), \\ 0, & \text{se } x \notin B_r(x_0), \end{cases}$$

E podemos especificar para qualquer intervalo $[a, b]$ centrado em

$$\frac{a+b}{2}$$

com raio

$$\frac{b-a}{2}.$$

Donde,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}, & \text{se } x \in (a, b), \\ 0, & \text{se } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Agora, sabemos que a norma em C^1 , está definida como:

$$\|\psi\|_1 = \sup |\psi(x)| + \sup |\psi'(x)|$$

Como $\psi(x) = 0$ se $x \notin (a, b)$, então o supremo está em (a, b) . Para $x \in (a, b)$, tem-se

$$\psi(x) = e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}}$$

Vamos encontrar os pontos críticos de $\psi(x)$ em (a, b) . Ou seja, $x \in (a, b)$ tal que $\psi'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2} \right) \\ \psi'(x) &= e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \right]^2} \right] \\ \psi'(x) &= e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{b+a}{2}\right)}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \right]^2} \right) \end{aligned}$$

Mas,

$$e^{-\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2}} \neq 0$$

para todo $x \in (a, b)$. Então, $\psi'(x) = 0$ somente quando

$$\frac{-2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{b+a}{2}\right)}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \right]^2} = 0$$

Donde,

$$-2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{b+a}{2}\right) = 0$$

Então,

$$\left(x - \frac{b+a}{2}\right) = 0$$

$$x = \frac{b+a}{2}$$

Substituindo $x = \frac{a+b}{2}$ na expressão de ψ , obtemos $\psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{-1}$. Como esse é o único

ponto crítico de ψ e $\psi(a) = \psi(b) = 0$, segue que ψ atinge seu valor máximo em $x = \frac{a+b}{2}$. Portanto,

$$\sup |\psi(x)| \leq e^{-1}$$

Agora, queremos encontrar $\sup |\psi'(x)|$. Sabemos que

$$\psi'(x) = \psi(x) \cdot P(x)$$

em que

$$P(x) = \frac{-2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(x - \frac{b+a}{2}\right)}{\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2\right]^2}.$$

Quando $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow b^-$, vimos que o expoente tende a $-\infty$. Donde

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \psi(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \psi(x) = 0.$$

Porém, quando

$$\lim_{x \rightarrow a^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} P(x) = +\infty$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \psi(x) \cdot P(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\psi(x)}{\frac{1}{P(x)}}.$$

Donde temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e podemos aplicar L'Hôpital e obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \psi(x)P(x) = 0$$

analogamente, temos o mesmo resultado quando $x \rightarrow b^-$. Donde existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\psi'(x)| \leq M$. E portanto,

$$\|\psi\|_1 = \sup |\psi(x)| + \sup |\psi'(x)| \leq M \cdot e^{-1}$$

Assim, fixando o intervalo da função bump, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\theta > 0$ tal que $\|\theta\psi(x)\| < \varepsilon$.

Teorema de Peixoto em $\mathbb{S}^1$

A seguir apresentaremos a prova do Teorema Principal do nosso trabalho. Inicialmente apresentaremos dois resultados, que em conjunto implica o resultado principal.

Teorema 4. *Considere o sistema $x' = f(x)$ com $f \in C^1$. Se o sistema possui um número finito de pontos singulares sendo todos hiperbólicos então ele é estruturalmente estável.*

Demonstração: Denotemos por $Sing(f)$ ao conjunto de pontos singulares do sistema $x' = f(x)$ com $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Então temos dois casos:

- $Sing(f) = \emptyset$:

Como o sistema dinâmico não possui ponto fixo, significa que não existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = 0$, logo, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Pelo Exemplo 3.47 de Lee [10], o

espaço quociente

$$[0, 1] / \sim$$

onde a relação de equivalência é dada por $0 \sim 1$ é homeomorfo à circunferência $\mathbb{S}^1$. Assim, ao longo desta demonstração identificaremos $\mathbb{S}^1$ com o intervalo $[0, 1]$ cujos extremos são identificados. Portanto, f possui sinal constante em $\mathbb{S}^1$. Sem perda de generalidade, suponhamos

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$$

Como estamos trabalhando em $\mathbb{S}^1$, a trajetória percorre a circunferência em sentido antihorário definindo uma órbita periódica, já que f é positiva, logo $x(t)$ é crescente. Note que isso acontece para qualquer condição inicial x_0 e a solução $x(t)$ associada a ela, então cada solução percorre a mesma circunferência, só que começando em pontos distintos, portanto, o espaço de fases consiste em uma única órbita periódica.

Como f é contínua e positiva em $\mathbb{S}^1$, que é compacto, então existe $m > 0$ tal que $f(x) > m$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < m$ e a bola aberta

$$B_\varepsilon^1(f) = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1); \|g - f\|_1 < \varepsilon\}.$$

Seja $g \in B_\varepsilon^1(f)$ Como $f(x) > m$, $x \in \mathbb{S}^1$, segue que $\|g - f\|_1 < \varepsilon < m$. Em particular, significa que

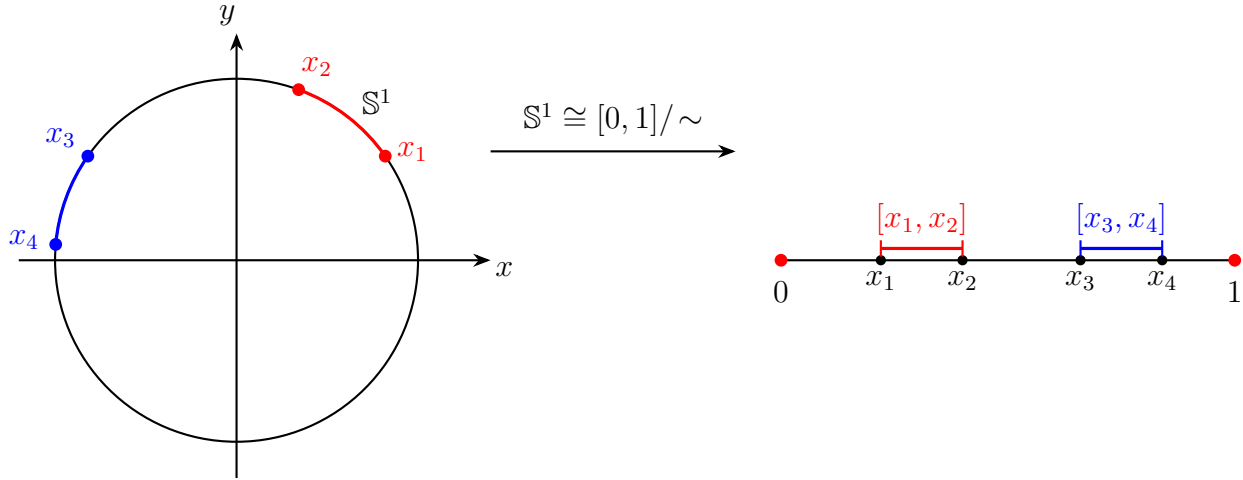
$$\sup_{x \in \mathbb{S}^1} |g(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Logo, $|g(x) - f(x)| < \varepsilon < m$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Mas, tem-se

$$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) \geq f(x) - |g(x) - f(x)| \geq m - \varepsilon > 0$$

Observe que aqui usamos o fato de que $a \geq -|a|$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$; logo $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Logo, basta tomar $h = Id$ como a equivalência topológica, o que implica que o sistema é estruturalmente estável.

- $Sing(f) \neq \emptyset$ Suponhamos que $Sing(f) \{x_1 < x_2 < \dots, x_m\}$ então $f(x_k) = 0$ e $f'(x_k) \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots, m$. Além disso, por uma rotação simples, podemos assumir que nenhum x_k coincide com os extremos do intervalo I e também notemos que existem arcos em $\mathbb{S}^1$ correspondentes aos intervalos $[x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ e também um arco correspondente ao intervalo $[x_m, 1] \cup [0, x_1]$ que será denotado por $[x_m, x_1]$.



Agora, queremos entender como f se comporta nesses intervalos determinados pelos pontos fixos hiperbólicos. Como f é contínua, segue que em cada intervalo aberto $(x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, x_m)$, f não muda de sinal, caso contrário existiriam pontos fixos no interior destes intervalos

Por outro lado, como os pontos fixos são todos hiperbólicos, então $f'(x_k) \neq 0$ para cada $k = 1, 2, \dots, m$, existe $\varepsilon_0 > 0$, pela continuidade de f' , existem $\delta_k > 0$ tal que $x \in [x_k - \delta_k, x_k + \delta_k]$ então $|f'(x)| > 2\varepsilon_0$. Tomando $\delta = \min\{\delta_k; k = 1, 2, \dots, m\}$ então temos que:

$$|f'(x)| > 2\varepsilon_0 \text{ para todo } x \in I_k = [x_k - \delta, x_k + \delta] \text{ e para todo } k = 1, 2, \dots, m$$

Observe que os intervalos I_k podem ser tomados dois a dois disjuntos, assim f é monótona em cada um destes intervalos e possui uma única singularidade em cada um destes intervalos.

Agora estudaremos o comportamento de f fora destes intervalos. Defina $K(\delta)$ como o fecho do complementar desses intervalos, então $K(\delta)$ é uma união disjunta de intervalos fechados. Como f é contínua e f não muda de sinal entre dois pontos singulares, então pela continuidade de f , f não se anula em $K(f)$, segue que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $|f(x)| > 2\varepsilon_1$, para todo $x \in K(f)$.

Seja $\|f - g\|_1 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, agora construiremos o homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ que satisfaz as condições do Teorema 3 entre os sistemas $x' = f(x)$ e $x'g(x)$, isto é, h mapeia órbitas orientadas de um sistema ao outro; e assim provaremos a estabilidade estrutural.

* Fixando um intervalo I_k , podemos assumir que $f'(x_k) > 0$, então:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) + g'(x) - f'(x) = \\ &= f'(x) - (f'(x) - g'(x)) \geq f'(x) - |f'(x) - g'(x)| > 2\varepsilon_0 - \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Assim, g é crescente no intervalo I_k .

** Em $K(\delta)$, pelo mesmo raciocínio em g no lugar de f temos que f e g tem o mesmo sinal.

Estas duas afirmações permitem concluir que g possui exatamente um zero em cada intervalo I_k e f e g possuem o mesmo sinal sobre $K(\delta)$. Assim, g também possui m zeros denotados por $y_1 < y_2 < \dots < y_m$

Agora, precisamos mostrar a equivalência topológica, ou seja, mostrar que existe um homeomorfismo h que preserva as órbitas entre f e g . Para construir esse homeomorfismo, precisamos que h seja uma função contínua, bijetora, h^{-1} contínua e que leve cada

$$x_k \longmapsto y_k$$

Como particionamos os intervalos em que os extremos são pontos fixos hiperbólicos, vamos definir h em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ Para fazer isso, vamos construir h sendo linear por partes, ou seja, em cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ Vamos construir uma “reta” que irá ligar os pontos

$$(x_k, y_k) \quad \text{e} \quad (x_{k+1}, y_{k+1})$$

Que aí teremos $h(x_k) = y_k$ Quando fazemos uma reta passando entre dois pontos

$$(x_1, y_1) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2)$$

Escrevemos

$$h(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Então, vamos aplicar essa ideia em cada intervalo.

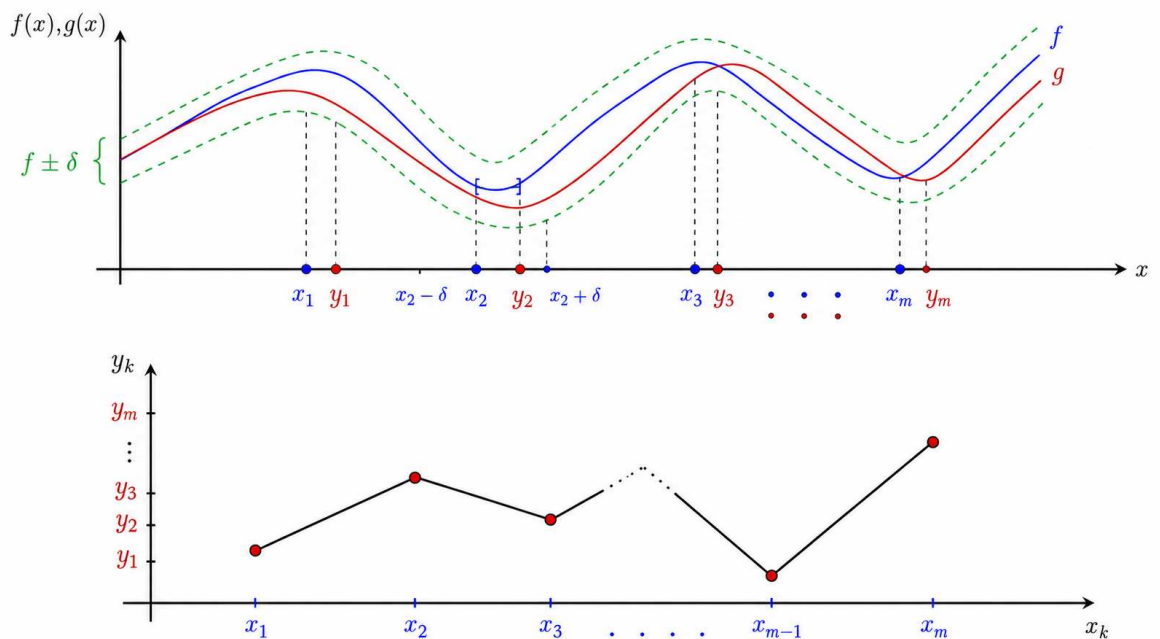


Figura 1. Perturbação em f por g pertencente à vizinhança $B_\varepsilon^1(f)$. Os pontos singulares x_k de f e y_k de g permanecem próximos, permitindo estabelecer uma correspondência entre eles. **Figura 2.** Associação entre cada ponto singular x_k do sistema original e o correspondente ponto singular y_k do sistema perturbado. Essa correspondência será utilizada para definir o homeomorfismo h .

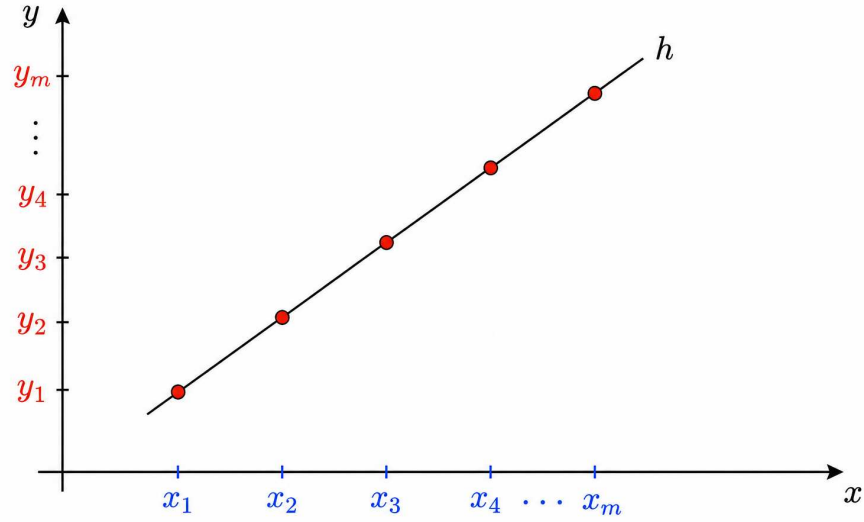


Figura 3. Construção do homeomorfismo h , que envia cada ponto singular x_k em y_k e é posteriormente estendido linearmente aos intervalos entre pontos consecutivos.

Com essa ideia, vamos definir h da tal maneira

$$h(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) + y_k$$

$$h(x) = \frac{(y_{k+1} - y_k)x + (y_k x_{k+1} - x_k y_{k+1})}{x_{k+1} - x_k}$$

Mas, no intervalo inicial, que é $[0, x_1]$, a expressão fica

$$h(x) = \frac{y_1}{x_1}x$$

E, o último intervalo, que é $[x_m, 1]$, teremos

$$h(x) = \left(\frac{y_m}{x_m - 1} \right) (x - 1)$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) x, & \text{se } 0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) + y_k, & \text{se } x_k < x \leq x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ \left(\frac{y_m}{x_m - 1} \right) (x - 1), & \text{se } x_m < x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos provar que h é contínua em cada x_k com $k = 1, 2, \dots, m$.

1º)

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{y_1}{x_1} x = y_1 = h(x_1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + y_k \quad \text{com } x \rightarrow x_1, \quad k = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 = y_1$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} h(x) = y_1 = h(x_1).$$

Portanto, h é contínua em x_1 . Analogamente será contínua em cada x_k .

2º)

$$\lim_{x \rightarrow x_m^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_m^-} \left(\frac{y_{m+1} - y_m}{x_{m+1} - x_m} \right) (x - x_m) + y_m = y_m = h(x_m)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_m^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_m^+} \frac{y_m}{x_m - 1} (x - 1) = y_m$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_m^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_m^+} h(x) = y_m = h(x_m).$$

Portanto h é contínua em x_m . Logo, h é contínua em $[0, 1]$. Pelo jeito que construímos h , tem-se que h é bijetora e possui inversa contínua. Portanto, h é um homeomorfismo. ■

Teorema 5. *Considere o sistema $x' = f(x)$ com $f \in C^1$. Se o sistema dinâmico é C^1 -estruturalmente estável então ele possui um número finito de pontos singulares sendo todos hiperbólicos.*

Demonstração:

Observe que, assumindo a estabilidade estrutural, queremos que a partir dela, deduzir propriedades específicas sobre os pontos fixos. Mas, a estabilidade estrutural é uma propriedade global do sistema, isso sugere que uma demonstração mais natural seria pela contrapositiva.

Caso I.A: Suponha que x_0 é um ponto singular não hiperbólico e isolado e tal que numa vizinhança não muda de sinal.

Suponha que existe x_0 tal que

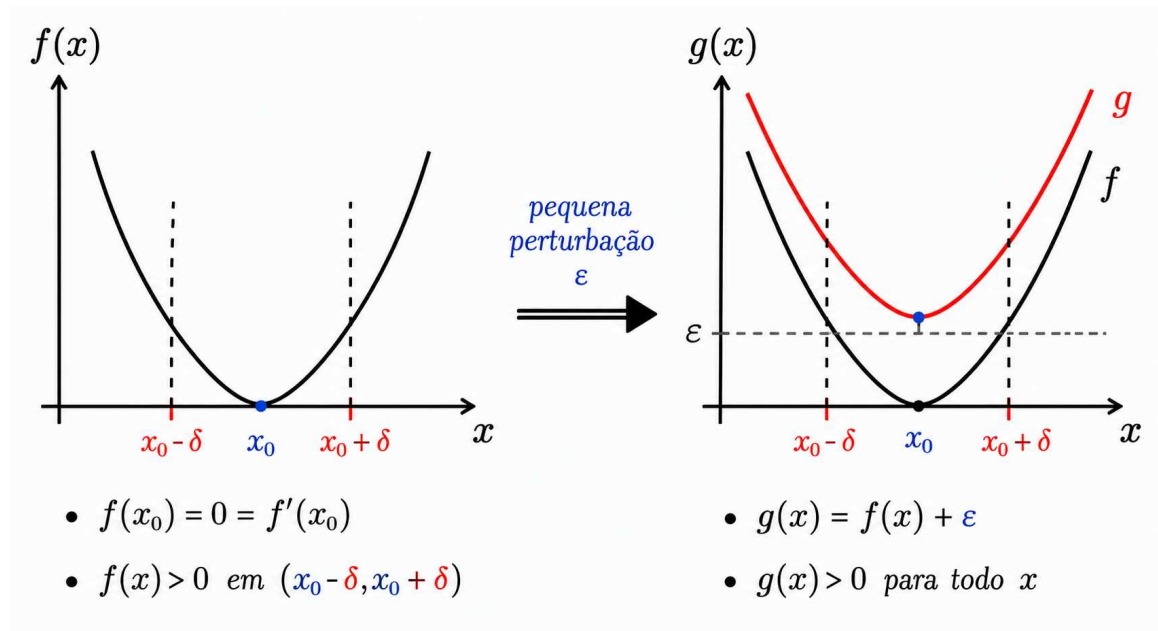
$$f'(x_0) = 0$$

Ou seja, x_0 não é hiperbólico. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(x) > 0$ em alguma vizinhança

$$\delta > 0 \quad \text{com} \quad B_\delta(x_0) = V_\delta(x_0) - \{x_0\}.$$

(i) Se x_0 é o único ponto fixo do sistema, então o conjunto de zeros de f é $f^{-1}(0) = \{x_0\}$. Como estamos supondo que $f(x) > 0$ perto de x_0 , considerando $\varepsilon > 0$ uma constante suficientemente pequena, segue que estamos causando uma pequena perturbação em f , dada por

$$g(x) = f(x) + \varepsilon.$$



Analisemos como essa g se comporta. Em x_0 , que é o ponto fixo não hiperbólico, teremos

$$g(x) = f(x) + \varepsilon$$

$$g(x_0) = 0 + \varepsilon$$

$$g(x_0) = \varepsilon > 0$$

Então, $g(x) > 0$ para todo x , donde $g^{-1}(0) = \emptyset$. Assim, obtemos um sistema com uma pequena perturbação que não possui ponto fixo. Mas, no teorema da equivalência topológica, os pontos fixos de um sistema devem corresponder aos pontos fixos do outro. Então os conjuntos dos pontos fixos não podem ser

colocados em correspondência por um homeomorfismo e, portanto, pelo teorema da equivalência topológica, esses sistemas não são topologicamente equivalentes. Logo, o sistema não é C^1 estruturalmente estável. Observe que nessa demonstração supomos que x_0 era o único ponto fixo do sistema. Porém, pode ser que ele não seja único, ou seja, que existam $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos fixos hiperbólicos e somente x_0 um ponto fixo não hiperbólico. Assim, será necessário localizar esse ponto no sistema para analisar a pequena perturbação que vamos fazer neste sistema.

Então, vamos escolher uma função que tenha esse comportamento e analisar perturbações sobre ela. Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2, & \text{se } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ f_{out}, & \text{se } x \in \mathbb{S}^1 - (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Pois, no ponto fixo, f não muda de sinal e $f'(x_0) = 0$, como desejamos. Além disso, f_{out} é uma função qualquer que satisfaz as hipóteses do nosso teorema, ou seja, f_{out} é uma função de classe C^1 em $\mathbb{S}^1$ que satisfaz as condições assumidas neste caso da demonstração.

Agora, queremos provar o caso em que o sistema não possui um único ponto fixo, mas sim outros finitos pontos fixos hiperbólicos. Se fizermos a mesma perturbação do caso anterior, deslocaremos todos os outros pontos e alteraremos todo o comportamento do sistema em $\mathbb{S}^1$. Então, vamos construir uma função bump que é zero fora da vizinhança de x_0 , isto é, vamos criar uma perturbação no sistema somente em uma vizinhança do ponto fixo não hiperbólico e, assim, todo o restante do comportamento do sistema será preservado. Defina:

$$\beta(x) = \begin{cases} -\left(\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right), & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & \text{se } x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Construímos uma função dessa forma porque queremos que ela seja positiva perto do ponto fixo não hiperbólico, para não interferir na perturbação que faremos. Além disso, queremos que ela seja arbitrariamente pequena ao ser multiplicada por uma constante e que seja diferenciável nas bordas.

Na expressão

$$-\left(\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right)$$

observe que o denominador explode nas bordas. Ou seja, nas proximidades de

$$x_0 - \delta, \quad x_0 + \delta$$

temos

$$\left(\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right) \rightarrow +\infty.$$

Donde,

$$- \left(\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right) \rightarrow -\infty$$

e, portanto,

$$e^{-\left(\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(x - x_0 + \frac{\delta}{2}\right)^2} \right)} \rightarrow 0.$$

Como no interior de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a função bump é composta por funções C^∞ , pela propriedade de função bump demonstrada nas páginas anteriores, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|\alpha\beta\|_1 < \varepsilon.$$

Com isso, podemos definir a nossa pequena perturbação em f . Defina

$$g(x) = f(x) + \alpha\beta(x).$$

Como $\beta(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $\beta(x)$ é contínua, segue que o fecho do conjunto em que β é diferente de zero é dado por

$$\bar{A} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

Agora, como $\beta(x) = 0$ para todo $x \notin \bar{A}$, segue que $g(x) = f(x)$ para todo $x \notin \bar{A}$. Dessa forma, causamos uma pequena perturbação apenas em uma vizinhança do ponto fixo não hiperbólico x_0 , preservando o comportamento de f fora dessa vizinhança.

A partir disso, vamos analisar o comportamento de g . Como $\beta(x) > 0$ nessa vizinhança $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, temos que

$$g(x) = f(x) + \alpha\beta(x) > 0$$

em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Mas, e em x_0 ? Como g se comporta?

$$g(x_0) = f(x_0) + \alpha\beta(x_0)$$

Como $f(x_0) = 0$, pois x_0 é ponto fixo, tem-se

$$g(x_0) = \alpha\beta(x_0) > 0$$

Então, ao fazermos uma pequena perturbação em f , x_0 deixa de ser ponto fixo. E já vimos que $\beta(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então com essa pequena perturbação, $g(x)$ não admite zero nessa vizinhança, e fora de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a função g possui o mesmo comportamento da f . O que significa que o conjunto de

pontos fixos da g possui um elemento a menos que o de f . Assim,

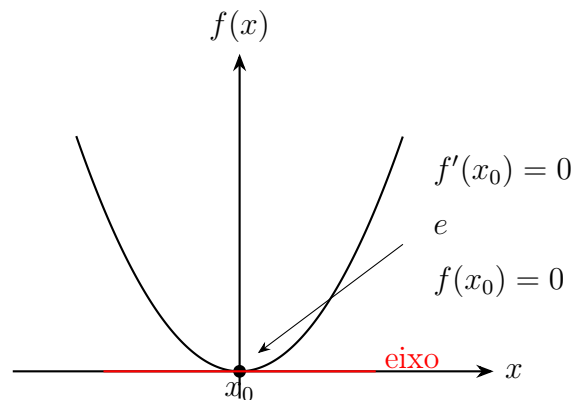
$$f^{-1}(0) \quad \text{e} \quad g^{-1}(0)$$

não são homeomorfos. Pelo Teorema da Equivalência Topológica, o conjunto de pontos fixos de um sistema deve ser levado ao conjunto de pontos fixos do outro sistema e isso não é possível entre f e g . Portanto, f e g não são topologicamente equivalentes.

Além disso, esse tipo de perturbação que criamos só é possível porque x_0 é um ponto fixo não hiperbólico. Ou seja,

$$f'(x_0) = 0 = f(x_0)$$

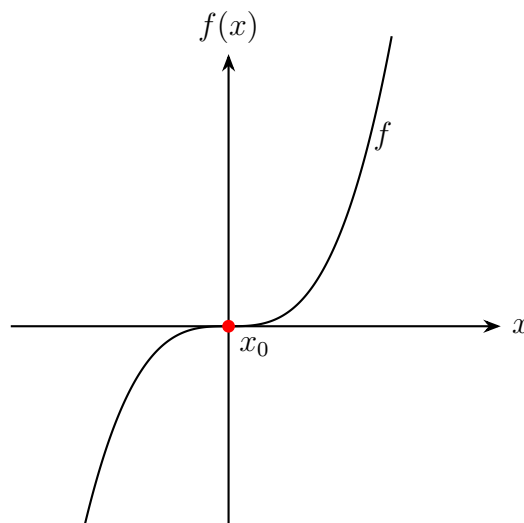
Nesse caso, nossa curva está tangenciando o eixo em x_0 .



Então, ao deslocar um pouco para cima, a curva deixa de ter contato com o eixo. Agora vamos ver o caso que f muda de sinal em x_0 .

Caso I.B: Suponha que x_0 é um ponto singular não hiperbólico e isolado e tal que numa vizinhança muda de sinal.

Seja x_0 um ponto fixo no qual f troca de sinal, mas $f'(x_0) = 0$. Estamos lidando com uma função cujo comportamento é semelhante a:



Considere $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno tal que em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ o sistema não possua outro ponto fixo além de x_0 . Vamos analisar o efeito de uma pequena perturbação em f . Como f muda de sinal em x_0 , definimos

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^3, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ f_{out}, & x \in \mathbb{S}^1 - (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

em que f_{out} é uma função arbitrária que satisfaz todas as hipóteses do teorema.

Nosso objetivo é construir uma pequena perturbação que não altere o comportamento de f fora da vizinhança de x_0 . Para isso, utilizaremos novamente uma função bump. Defina

$$\beta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(\frac{\delta}{2})^2}{(\frac{\delta}{2})^2 - (x - x_0 + \frac{\delta}{2})^2}}, & \text{se } x_0 - \delta < x \leq x_0 - \frac{\delta}{2}, \\ e^{-1}, & \text{se } x_0 - \frac{\delta}{2} < x \leq x_0 + \frac{\delta}{2}, \\ e^{-\frac{(\frac{\delta}{2})^2}{(\frac{\delta}{2})^2 - (x - x_0 - \frac{\delta}{2})^2}}, & \text{se } x_0 + \frac{\delta}{2} < x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & \text{se } x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Observe que β é de classe C^∞ em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e de classe C^1 nas extremidades. De fato, no interior do intervalo ela é composta por funções de classe C^∞ , enquanto sua construção garante a diferenciabilidade nas bordas.

Agora, vamos pensar se somente essa construção vai funcionar como da outra vez. No caso 1, no ponto fixo não hiperbólico, f não mudava de sinal, pois o comportamento era semelhante a

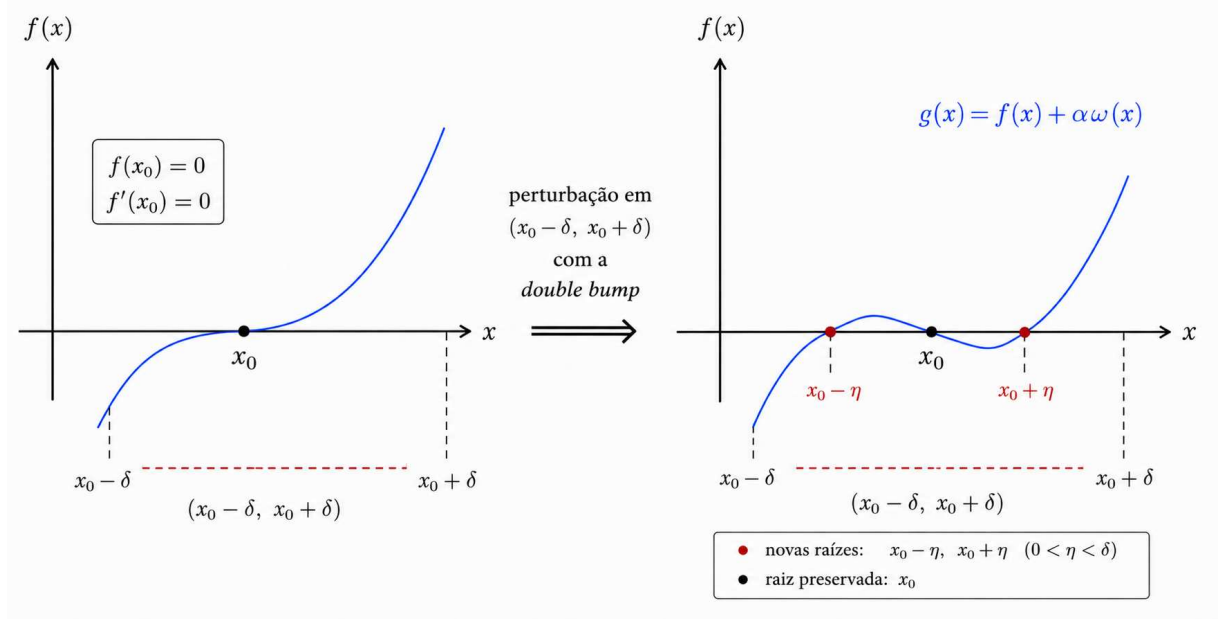
$$f(x) = (x - x_0)^2.$$

Então bastava deslocar essa curva para cima. Nesse caso, a f muda de sinal no ponto fixo não hiperbólico, então o comportamento é semelhante a

$$f(x) = (x - x_0)^3$$

Então, só deslocar o gráfico pra cima, não vai adiantar. A perturbação tem que ser um pouco diferente, já que esses sistemas se comportam de maneira diferente. De qualquer forma, precisamos da bump function para garantir o bom comportamento da nossa função perturbada. Então a ideia vai ser criar uma leve perturbação, mas agora linear, e somente na vizinhança de x_0 , que é o que a bump function faz. Defina

$$w(x) = \frac{-2(x - x_0)\beta(x)}{\delta}$$



Pela mesma justificativa do caso 1, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|\alpha w(x)\|_1 < \varepsilon$$

Definimos nossa pequena perturbação no sistema como:

$$g(x) = f(x) + \alpha w(x)$$

Vamos analisar como se comporta o sistema após uma pequena perturbação. Observe que estamos considerando f da tal maneira

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0)^3, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ f_{out}, & x \in \mathbb{S}^1 - (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Como definimos

$$g(x) = f(x) + \alpha w(x)$$

em $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, g se comporta de tal maneira:

$$g(x) = (x - x_0)^3 + \alpha \left(\frac{-2(x - x_0)\beta(x)}{\varepsilon\delta} \right)$$

Mas, em

$$x \in \left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2} \right),$$

$\beta(x) = e^{-1}$. Daí,

$$g(x) = (x - x_0)^3 - \frac{2\alpha(x - x_0)e^{-1}}{\varepsilon\delta} = (x - x_0)^3 - \frac{2\alpha}{e\varepsilon\delta}(x - x_0).$$

Tome

$$\lambda = \frac{2\alpha}{e\varepsilon\delta}.$$

Então,

$$g(x) = (x - x_0)^3 - \lambda(x - x_0) = (x - x_0)((x - x_0)^2 - \lambda).$$

Em que

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff x = x_0 \\ (x - x_0)^2 - \lambda = 0 &\iff x = x_0 \\ (x - x_0)^2 = \lambda &\iff x = x_0 \\ x - x_0 &= \pm\sqrt{\lambda}. \end{aligned}$$

Que está bem definida pois

$$\lambda = \frac{2\alpha}{e^2\delta} > 0,$$

donde

$$g(x) = 0 \iff x = x_0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\lambda} + x_0.$$

Vamos definir como $d = \pm\sqrt{\lambda}$. Que é a distância do zero de g ao ponto fixo x_0 . Então, g tem três pontos fixos nessa vizinhança $g(x_0) = g(-d) = g(d) = 0$. Assim,

$$f^{-1}(0) \quad \text{e} \quad g^{-1}(0)$$

não são homeomorfos. Como $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ Pelo Teorema da Equivalência Topológica, o sistema não é C^1 -estruturalmente estável.

Caso II.A: Suponha que x_0 é um ponto singular não hiperbólico e existe um intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$ de pontos singulares tal que $x_0 \in [a, b]$.

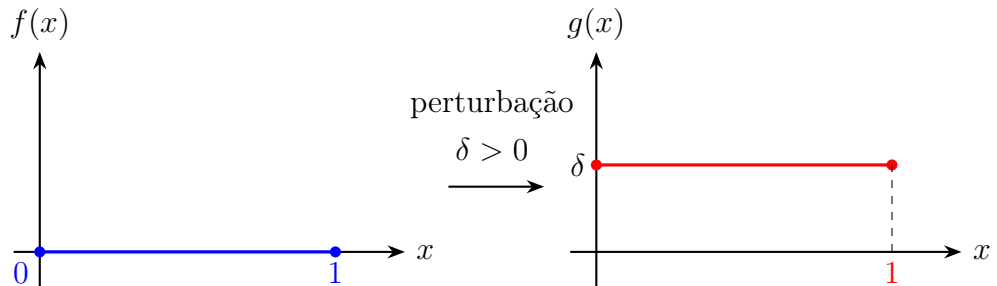
Vamos tratar de um caso em que no sistema existe um intervalo inteiro de pontos fixos, ou seja,

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b] \subset [0, 1].$$

Em outras palavras, o sistema possui uma infinidade de pontos fixos. Se $[a, b] = [0, 1]$, fazer qualquer perturbação em f , todo o conjunto de pontos fixos se tornam vazio, ou seja, para todo $\delta > 0$, a perturbação

$$g(x) = f(x) + \delta$$

não possui pontos fixos em $[a, b]$.



Tal sistema não pode ser C^1 -estruturalmente estável. Agora suponha que $[a, b] \subset (0, 1)$, existe $\delta > 0$ tal que $[a - \delta, b + \delta] \subset (0, 1)$ temos

$$[a - \delta, b + \delta] \cap f^{-1}(0) = [a, b]$$

Assim como anteriormente, podemos separar em dois casos, quando muda de sinal e quando não muda.

- (i) f tem mesmo sinal em $(a - \delta, a)$ e $(b, b + \delta)$
- (ii) f tem sinais opostos em $(a - \delta, a)$ e $(b, b + \delta)$

Sem perda de generalidade, em (ii) podemos assumir que o sinal seja positivo e em (i) que passa de negativo para positivo. Analogamente, usamos a mesma ideia de bump function

$$\widehat{\beta}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(\frac{\delta}{2})^2}{(\frac{\delta}{2})^2 - (x - a + \frac{\delta}{2})^2}}, & \text{se } a - \delta < x \leq a - \frac{\delta}{2}, \\ e^{-1}, & \text{se } a - \frac{\delta}{2} < x \leq b + \frac{\delta}{2}, \\ e^{-\frac{(\frac{\delta}{2})^2}{(\frac{\delta}{2})^2 - (x - b - \frac{\delta}{2})^2}}, & \text{se } b - \frac{\delta}{2} < x \leq b + \delta, \\ 0, & \text{se } x \notin (a - \delta, b + \delta). \end{cases}$$

Donde para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\alpha \widehat{\beta}\|_1 < \varepsilon$$

Para o subcaso (i), definimos

$$g = f + \alpha \widehat{\beta}(x)$$

Que não tem ponto fixo em $[a - \delta, b + \delta]$ e $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Donde o sistema não pode ser topologicamente equivalente e no subcaso (ii),

$$w(x) = \frac{2\widehat{\beta}(x)}{e(a+b)} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$$

com

$$g(x) = f(x) + \alpha w(x).$$

No qual a pequena perturbação possui mais pontos fixos, donde esses sistemas não podem ser topologicamente equivalentes. E portanto, o sistema não é C^1 -estruturalmente estável.

Caso II.B: Suponha que x_0 é um ponto singular não hiperbólico e existem (x_n) sequencia de pontos singulares tal que $x_n \rightarrow x_0$.

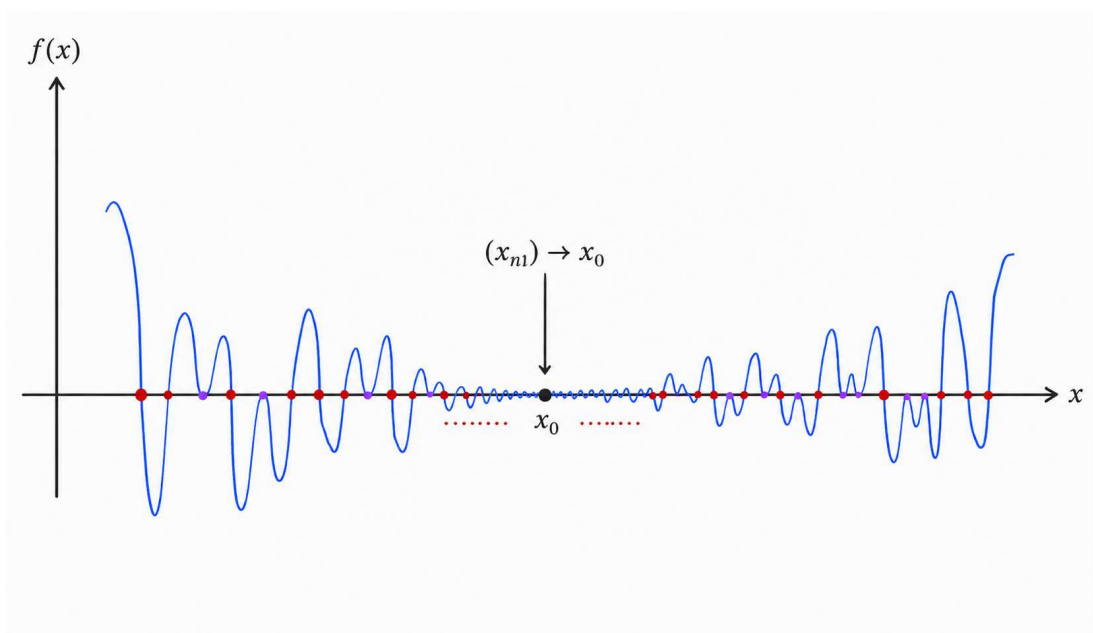
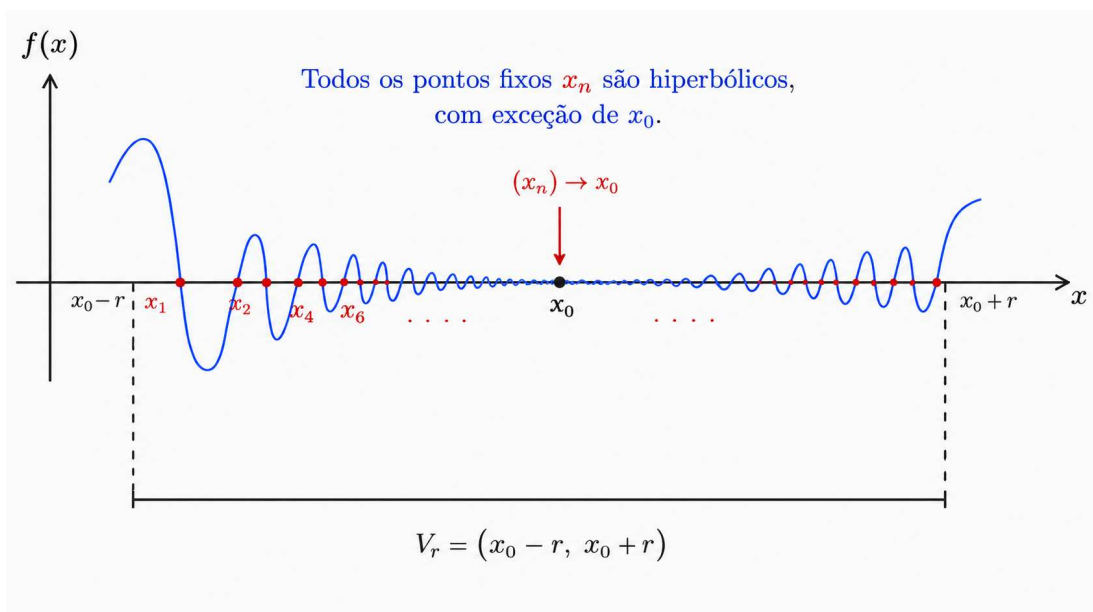
Esse vai ser o ultimo caso que vamos analisar, e quando existe uma quantidade infinita de pontos fixos isolados se acumulando em uma região. Suponha que o sistema

$$x' = f(x)$$

possui pontos fixos distintos $x_1, x_2, x_3, \dots$. E que essa sequência de pontos converge para x_0 , de modo que x_0 seja um ponto fixo não hiperbólico, ou seja,

$$f(x_0) = 0 = f'(x_0)$$

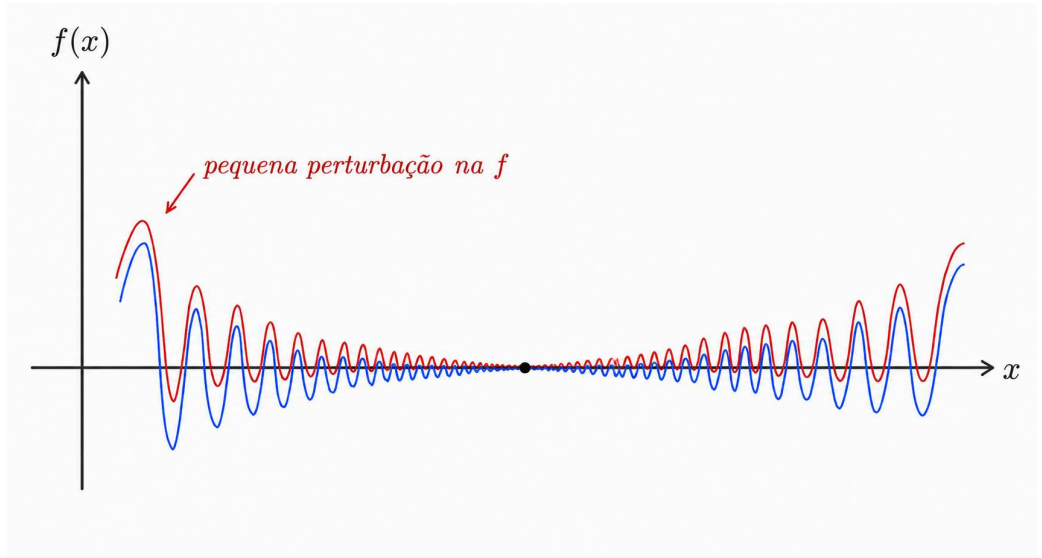
Existe $r > 0$ tal que toda essa sequência de pontos está contida em $V_r = (x_0 - r, x_0 + r)$. A qual contém apenas os pontos fixos dessa sequência. Pois x_0 é um ponto de acumulação isolado do conjunto de pontos fixos. Essa sequência pode se comportar inteiramente por pontos fixos hiperbólicos ou pode ser formada por alguma combinação de pontos fixos hiperbólicos e não hiperbólicos como tratado nos casos 1 e 2.



Para esse caso, vamos pensar em uma função que se comporta da tal forma:

$$f(x) = \begin{cases} (x - x_0) \sin\left(\frac{1}{(x - x_0)^2}\right), & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ f_{out}, & x \notin (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Onde f_{out} é uma função arbitrária cujas propriedades satisfazem as hipóteses do teorema. Vamos fazer uma pequena perturbação na f e analisar como se comporta. Como esse sistema original possui infinitos pontos fixos, caso a perturbação que fizermos mudar para finitos pontos fixos, esses sistemas não vão ser topologicamente equivalentes. Assim, a ideia comentada acima pode ser visualmente representada no desenho abaixo.



Considere a bump function

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2 - (x - x_0)^2}}, & \text{se } x \in \left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right), \\ 0, & \text{se } x \notin \left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right). \end{cases}$$

E, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\|f - g\|_1 = \|f - (f + \alpha\omega)\|_1 < \varepsilon.$$

Sabemos que $f \in C^1$ e $f(x_0) = 0 = f'(x_0)$ para um ponto fixo não hiperbólico. Pela definição de derivada isso significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < \varepsilon$$

Donde,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$$

Como $f(x_0) = 0$, tem-se, $|f(x)| < \varepsilon|x - x_0|$. Como $\omega(x) > 0$ para todo

$$x \in \left(x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + \frac{r}{2}\right)$$

, tem-se

$$g(x) = f(x) + \alpha\omega(x)$$

estritamente positiva em alguma vizinhança suficientemente próxima de x_0 . Por outro lado, $\omega(x_0) = e^{-1} > 0$, então nessa vizinhança suficientemente pequena, ω é limitada inferiormente, donde existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \omega(x) > \frac{1}{2e}$$

Assim, tome $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_0\}$. Então, se $0 < |x - x_0| < \delta_0$ então

$$|f(x)| < \frac{\alpha}{2e} < \alpha\omega(x).$$

Como $g(x) = f(x) + \alpha\omega(x)$ Tem-se,

$$g(x) \geq -|f(x)| + \alpha\omega(x) > -\alpha\omega(x) + \alpha\omega(x) = 0$$

$$g(x) > 0.$$

para todo $|x - x_0| < \delta_0$. Portanto, g não possui zeros em $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Assim, com essa pequena perturbação, todos os pontos fixos suficientemente próximos de x_0 desapareceram. Onde g e f não são topologicamente equivalentes. ■

Como consequencias dos dois teoremas anteriores, temos a prova do primeiro teorema principal do trabalho.

Teorema 6 (Teorema de Estabilidade de Peixoto). *Considere o sistema $x' = f(x)$ com $f \in C^1$. Então, o sistema dinâmico é C^1 -estruturalmente estável se e somente se possui um número finito de pontos singulares sendo todos hiperbólicos.*

Seja $\mathcal{S}^1(\mathbb{S}^1)$ o conjunto dos sistemas estruturalmente estáveis de classe C^1 . A seguir apresentaremos a prova do segundo Teorema principal do trabalho.

Teorema 7. *O conjunto dos sistemas dinâmicos $\mathcal{S}^1(\mathbb{S}^1)$ é um subconjunto aberto e denso de $C^1(\mathbb{S}^1)$.*

Demonstração:

Seja $g \in C^1(\mathbb{S}^1)$ suficientemente próxima de f . Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $g \in B_\varepsilon^1(f)$. Logo, $\|g - f\|_1 < \varepsilon$. No Teorema 5 provamos que g possui o mesmo número de pontos fixos hiperbólicos que f e que os sistemas são topologicamente equivalentes. Logo, $B_\varepsilon^1(f) \subset SS^1(\mathbb{S}^1)$. Portanto, $SS^1(\mathbb{S}^1)$ é aberto. Para a densidade, considere $f \in C^1(\mathbb{S}^1)$. Se $f \in SS^1(\mathbb{S}^1)$, não há nada a provar. Se $f \notin SS^1(\mathbb{S}^1)$, então ou f possui um ponto fixo não hiperbólico ou f possui infinitos pontos fixos. Nos casos I e II vimos que, ao realizar uma pequena perturbação nessa função, conseguimos obter uma função g estruturalmente

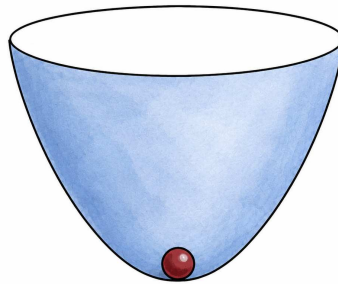
estável. Como essa perturbação pode ser tomada arbitrariamente pequena, segue que toda vizinhança de f contém um elemento de $SS^1(\mathbb{S}^1)$. Logo, $SS^1(\mathbb{S}^1)$ é denso. ■

Comentarios finais

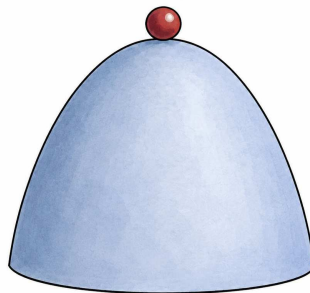
Agora que terminamos a teoria matemática a respeito do Teorema de Peixoto em $\mathbb{S}^1$ olhando toda a demonstração e suas ideias como um todo, sempre falamos sobre duas coisas:

pequena perturbação e estabilidade.

É com essas palavras chave, conseguimos construir uma ideia intuitiva sobre o que fizemos. Pense em uma tigela e uma bola no fundo dessa tigela:



Se empurrarmos essa bolinha um pouquinho, a bolinha volta para o fundo da tigela depois de um tempo, ou seja, causar uma pequena perturbação no nosso sistema, não mudou o comportamento qualitativo dele. E se fizermos o contrário? Imagine uma tigela com o fundo pra baixo e uma bolinha equilibrada nesse topo:



Dessa vez, ao empurrar só um pouquinho essa bolinha ela cai e não volta para o lugar onde estava. Ou seja, uma pequena perturbação no sistema muda completamente o

comportamento qualitativo do sistema. A ideia que tentamos trabalhar nesse exemplo é uma ideia semelhante ao que aparece no Teorema de Peixoto. Observe que, durante toda a demonstração do teorema, estudamos somente o que acontece com nosso sistema ao provocar pequenas perturbações sobre ele. Vimos que, quando esse sistema possui um número finito de pontos fixos e hiperbólicos (claro, além das outras hipóteses fundamentais), ao realizar pequenas perturbações, o comportamento qualitativo desse sistema se mantinha. Porém, no caso contrário, quando existia ponto fixo não hiperbólico ou infinitos pontos fixos, pequenas perturbações mudava completamente a dinâmica do sistema.

O que o Teorema de Peixoto faz é fornecer uma caracterização matemática sobre isso. Essa caracterização envolve conceitos matemáticos avançados, já que o teorema original em dimensão dois, Peixoto demorou cerca de 10 anos para finalizá-lo.

Porém, em suas obras, Felix Klein tinha uma perspectiva diferente sobre a matemática avançada com a matemática básica. Muito pelo contrário, ele defende que ao conhecer e entender a matemática avançada contribui para uma melhor compreensão da matemática elementar.

Gostaria de enfatizar que, em hipótese alguma, a interpretação apresentada anteriormente pretende substituir o rigor matemático inerente ao Teorema de Peixoto. Seu propósito é, antes, oferecer uma compreensão intuitiva de suas ideias centrais, servindo como uma ponte entre a formalização matemática e a percepção conceitual do resultado.

Nessa perspectiva, vale recordar a proposta de Felix Klein, que defendia uma aproximação entre a matemática desenvolvida na universidade e aquela ensinada na escola. Inspirados por essa visão, discutiremos, no próximo capítulo, algumas de suas ideias e suas possíveis relações com os conceitos abordados ao longo deste trabalho.

4 O Teorema de Peixoto sob a perspectiva do Projeto Klein

Logo na introdução de sua obra *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Felix Klein evidencia sua preocupação com o distanciamento entre a matemática acadêmica e a escolar, defendendo uma aproximação entre ambas. Ao tratar dessa ruptura — frequentemente associada ao fenômeno conhecido como dupla descontinuidade — o autor observa:

Os universitários se preocuparam exclusivamente com suas ciências, sem nem se importar em estabelecer uma conexão com a matemática escolar.

Essa observação sintetiza uma das principais teses da obra de Klein. Para o autor, o conhecimento universitário e o saber escolar não devem ser tratados como domínios independentes ou estanques; ao contrário, ele sustenta que:

O verdadeiro objetivo do estudo acadêmico é a habilidade de desenhar o grande corpo de conhecimento que lhe foi apresentado, para que seja um estímulo vivo para seu ensino.

Fica evidente, portanto, que, para Klein, a matemática estudada no ensino superior desempenha um papel fundamental na formação docente. Nessa perspectiva, coloca-se o seguinte questionamento:

Qual seria, afinal, a contribuição do estudo de um resultado avançado em Sistemas Dinâmicos, como o Teorema de Peixoto, para a formação de um professor de Matemática?

Ao longo deste trabalho, exploramos conceitos que não integram diretamente o currículo da Educação Básica, como estabilidade estrutural, hiperbolicidade e equivalência topológica. No entanto, as ideias centrais subjacentes a esses conceitos podem ser reinterpretadas de forma intuitiva. A noção de estabilidade, por exemplo, pode ser associada ao comportamento de um sistema que preserva suas características qualitativas diante de pequenas perturbações. Nesse sentido, a teoria desenvolvida por Maurício Peixoto oferece uma compreensão profunda acerca da estrutura e da estabilidade dos sistemas dinâmicos, permitindo que tais ideias sejam reinterpretadas e apresentadas aos estudantes de maneira acessível. Assim, o valor do Teorema de Peixoto não se restringe à sua relevância matemática, mas também se manifesta na formação do educador, ao proporcionar novas formas de compreender, interpretar e comunicar conceitos matemáticos. Sob essa perspectiva, o estudo de resultados avançados pode contribuir não apenas para o aprofundamento conceitual do futuro professor, mas também para o enriquecimento de sua prática docente.

4.1 Proposta de atividade para educação básica

Uma possível atividade para alunos do 3º ano do ensino médio seria explorar a ideia de estabilidade por meio de gráficos de funções do segundo grau. Observando sobre o conjunto de zeros dessa função, ou seja,

$$C_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}.$$

E analisar o que acontece com esse conjunto quando fazemos pequenas mudanças na função. Podemos propor comparar duas funções:

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

O conjunto de zeros de f e g é

$$C_f = \{0\} \quad C_g = \{1, 3\}.$$

Utilizando o software geogebra, podemos plotar ambas as funções e adicionar um controle deslizante a , de modo que o incremento seja pequeno e positivo e, adicionar o

mesmo incremento para f e g e mostrar o que acontece ao realizar essa mudança, já que f e g se tornarão:

$$f(x) = x^2 + a \quad g(x) = x^2 - 4x + 3 + a$$

É de se esperar que os alunos percebam que agora a função f com a nova perturbação deixa de ter raízes reais e g continua com a mesma quantidade de zeros da função. Ou seja,

$$C_f = \emptyset \quad e \quad C_g \text{ permanece com 2 elementos.}$$

4.2 Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, solicita-se aos alunos que construam o gráfico da função

$$f(x) = x^2$$

no software GeoGebra e determinem sua raiz, denotada pelo ponto A , conforme ilustrado na Figura 1.

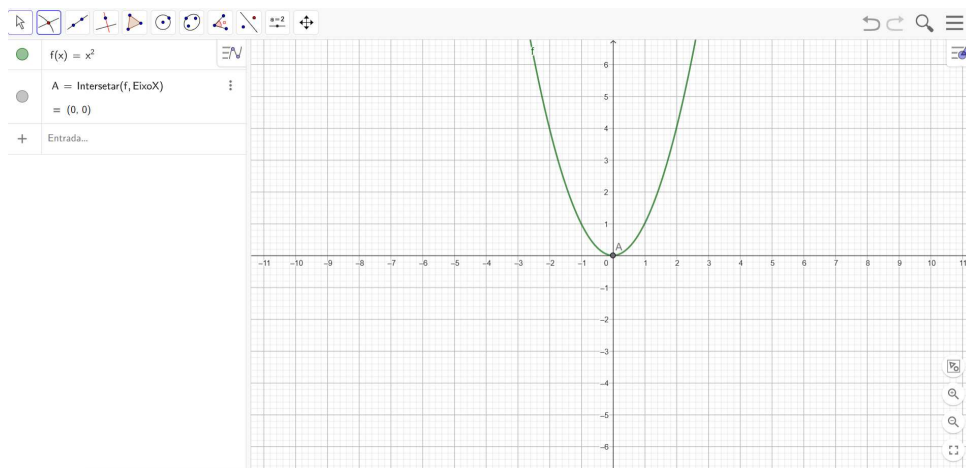


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2$ e sua raiz.

Em seguida, os estudantes devem plotar a função

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

e identificar suas raízes, denotadas pelos pontos B e C , conforme a Figura 2.

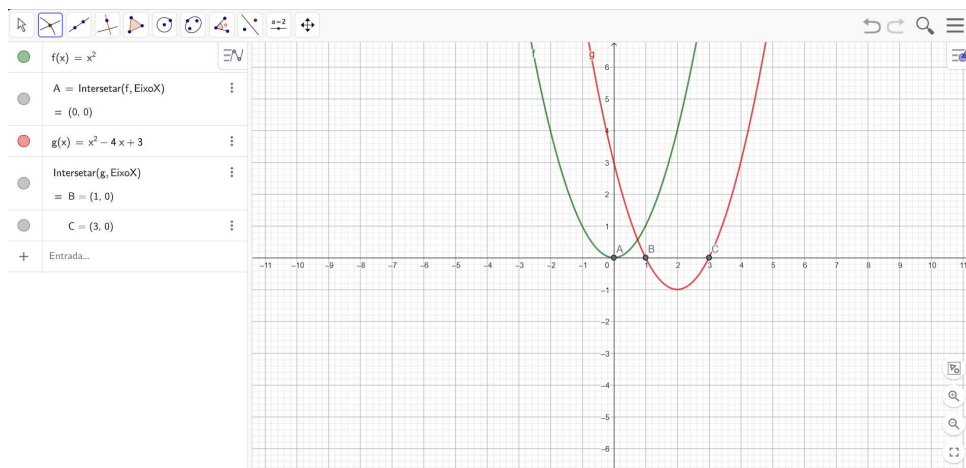


Figura 2: Gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ e suas raízes.

Posteriormente, cria-se um controle deslizante denominado a , conforme ilustrado na Figura 3.



Figura 3: Criação do controle deslizante.

Na configuração do controle deslizante, define-se um intervalo pequeno e positivo para a , como mostrado na Figura 4.

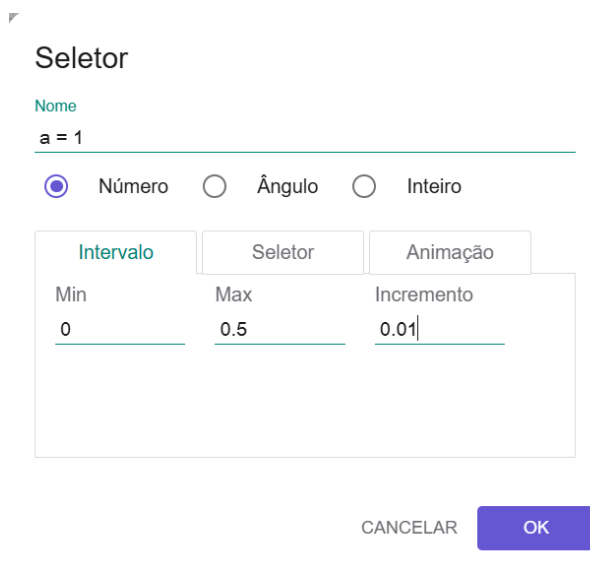


Figura 4: Configuração do parâmetro a .

Em seguida, modifica-se ambas as funções para

$$f(x) = x^2 + a$$

e

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 + a,$$

de modo que o parâmetro a passe a atuar como uma pequena perturbação no sistema, conforme ilustrado na Figura 5.

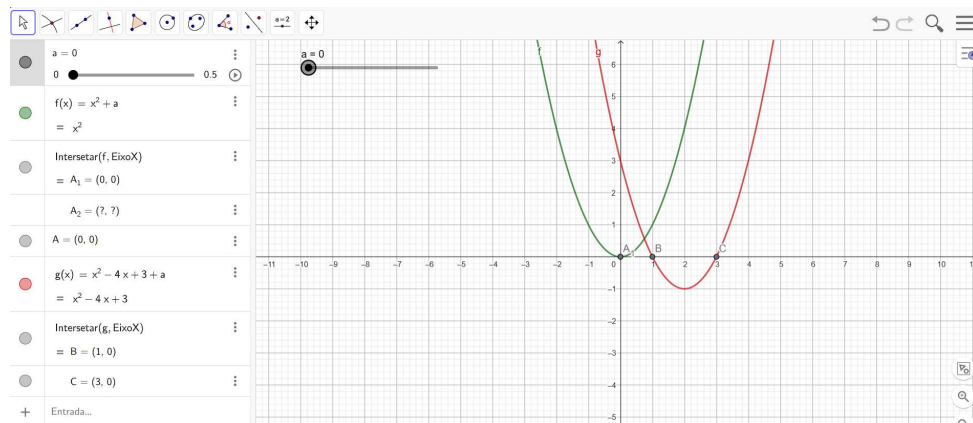


Figura 5: Inclusão do parâmetro a nas funções.

Por fim, anima-se o controle deslizante e observa-se o comportamento das raízes à medida que o valor de a aumenta, conforme mostrado na Figura 6.

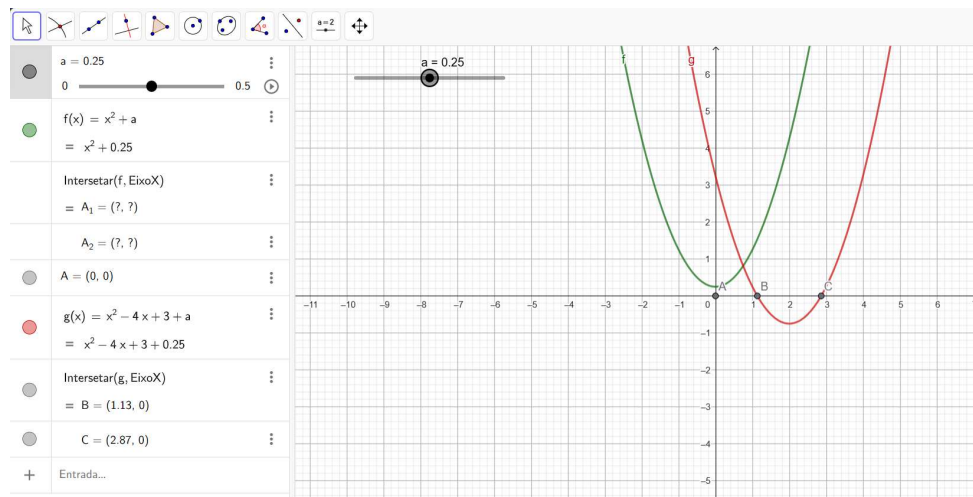


Figura 6: Efeito da perturbação sobre as funções.

Espera-se que os estudantes percebam que a função $f(x) = x^2$ perde sua única raiz quando submetida a uma pequena perturbação positiva, enquanto a função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ continua apresentando duas raízes reais para pequenas variações do parâmetro a .

Dessa forma, a atividade permite discutir intuitivamente a sensibilidade de determinadas funções a pequenas alterações e introduzir a ideia de estabilidade por meio de conceitos já familiares aos alunos do Ensino Médio.

5 Considerações finais

Ao longo deste trabalho, exploramos conceitos que não integram diretamente o currículo da Educação Básica, como estabilidade estrutural, hiperbolicidade e equivalência topológica. No entanto, procuramos mostrar que as ideias centrais subjacentes a esses conceitos podem ser reinterpretadas de forma intuitiva e incorporadas à formação docente. A noção de estabilidade, por exemplo, pode ser associada ao comportamento de um sistema que preserva suas características qualitativas diante de pequenas perturbações. Nesse sentido, a teoria desenvolvida por Maurício Peixoto oferece uma compreensão profunda acerca da estrutura e da estabilidade dos sistemas dinâmicos, permitindo que tais ideias sejam reinterpretadas e apresentadas aos estudantes de maneira acessível.

Do ponto de vista matemático, o desenvolvimento deste trabalho exigiu o estudo de conceitos provenientes de diferentes áreas da Matemática, como Topologia, Equações Diferenciais, Geometria Diferencial e Sistemas Dinâmicos. A articulação entre esses conhecimentos permitiu compreender não apenas a demonstração do Teorema de Peixoto em sua versão unidimensional, mas também a riqueza conceitual envolvida em sua formulação. Esse percurso contribuiu para uma visão mais integrada da Matemática, evidenciando como diferentes áreas se complementam na construção de resultados significativos.

Sob a perspectiva educacional, a investigação reforçou as ideias defendidas por Felix Klein acerca da importância da aproximação entre a Matemática universitária e a Matemática escolar. Ainda que o Teorema de Peixoto constitua um resultado avançado, sua análise possibilita o desenvolvimento de formas de pensar, interpretar e comunicar conceitos matemáticos que podem enriquecer a prática docente. Assim, o valor desse estudo não se limita ao resultado matemático em si, mas também às reflexões que suscita sobre a formação do professor de Matemática.

Por fim, este trabalho abre possibilidades para futuras investigações. Do ponto de vista matemático, seria natural estender o estudo para versões mais gerais do Teorema de Peixoto, em particular para sistemas definidos em superfícies bidimensionais, onde surgem fenômenos dinâmicos mais complexos e ricos. Também seria interessante investigar outros resultados clássicos dos Sistemas Dinâmicos e suas possíveis contribuições para a formação de professores.

No âmbito educacional, trabalhos futuros poderiam desenvolver, aplicar e avaliar em sala de aula as atividades aqui propostas, investigando como conceitos inspirados na estabilidade estrutural podem ser explorados por meio de recursos computacionais, especialmente com o uso do GeoGebra. Além disso, seria possível construir sequências

didáticas que abordem ideias relacionadas a perturbações, estabilidade e comportamento qualitativo de sistemas, aproximando temas da Matemática contemporânea da realidade da Educação Básica. Espera-se, assim, que este trabalho contribua não apenas para a divulgação de um importante resultado dos Sistemas Dinâmicos, mas também para o fortalecimento do diálogo entre a pesquisa matemática e a formação docente.

6 Referências

Referências

- [1] SCARDUA, B. *Equações ordinárias e aplicações*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [2] LIMA, Yuri. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2025.
- [3] VIANA, M.; ESPINAR, J. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2025.
- [4] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. Version 3.0. Seattle: University of Washington, 2000.
- [5] RAHMAN, Aminur; BLACKMORE, Denis. *The One-dimensional Version of Peixoto's Structural Stability Theorem: A Calculus-based Proof*. 2023. 26 p. Disponível em: [arXiv:2302.04941](https://arxiv.org/abs/2302.04941). Acesso em: dia mês abreviado. ano.
- [6] KLEIN, Felix. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Mineola: Dover Publications, 2004. (Reimpressão da edição original de 1908.)
- [7] SAMBARINO, Martín. *Introducción a los Sistemas Dinámicos*. Montevideo: Universidad de la República, [s.d.].
- [8] PEIXOTO, Maurício M. *On Structural Stability*. *Annals of Mathematics*, v. 69, n. 1, p. 199–222, 1959.
- [9] PEIXOTO, Maurício M. *Structural Stability on Two-Dimensional Manifolds*. *Topology*, v. 1, p. 101–120, 1962.
- [10] LEE, John M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2. ed. New York: Springer, 2011.
- [11] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. v. 2. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2014.