

PEDRO CARLOS BARBOSA JUNIOR

TEOREMAS GAUSS-BONNET E POINCARÉ-HOPF PARA
 ∂ -VARIEDADES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Diogo da Silva Machado

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2021

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

B238t
2021
Barbosa Junior, Pedro Carlos, 1995-
Teoremas Gauss-Bonnet e Poincaré-Hopf para
\partial-variedades / Pedro Carlos Barbosa Junior. – Viçosa, MG,
2021.
80 f. ; 29 cm.

Orientador: Diogo da Silva Machado.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 79-80.

1. Espaços fibrados (Matemática). 2. Geometria algébrica.
3. Índices. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 516.35

Bibliotecário(a) responsável: Renata de Fatima Alves CRB6/2578

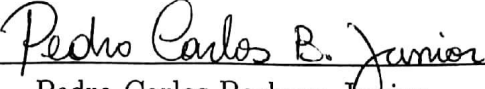
PEDRO CARLOS BARBOSA JUNIOR

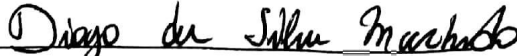
TEOREMAS GAUSS-BONNET E POINCARÉ-HOPF PARA
 ∂ -VARIEDADES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 19 de maio de 2021.

Assentimento:


Pedro Carlos Barbosa Junior
Autor


Diogo da Silva Machado
Orientador

“O momento mais assustador é sempre logo antes de começar”

Stephen King

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer a todas as pessoas que caminharam comigo e me permitiram chegar até aqui. Esse trabalho não seria o mesmo se eu estivesse sozinho em toda essa jornada.

Agradeço à minha mãe, Maria Célia, por sempre estar comigo, acompanhando cada passo que tomei e me ajudando a manter a calma desde sempre.

À minha família, por todo o apoio nas minhas decisões e, em especial, aos meus sobrinhos pelas boas risadas e por me trazerem alegria inúmeras vezes.

Aos meus amigos, em especial, Eduardo, Mauro, Carol e Túlio. Vocês são muito importantes pra mim, e a vida de mestrando foi muito mais leve e bem melhor com vocês, mesmo que fisicamente distantes.

A todos os professores do DMA-UFV que tive a oportunidade de ser aluno. Cada estudo feito para essa dissertação tem um pouco do conhecimento que adquiri com vocês, tanto na graduação, quanto no mestrado. Em especial, sou muito grato ao professor Diogo, pela dedicação e por todos os ensinamentos que foram fundamentais para a conclusão desse trabalho.

Por fim, agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro indispensável. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

BARBOSA JUNIOR, Pedro Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2021. **Teoremas Gauss-Bonnet e Poincaré-Hopf para ∂ -Variedades**. Orientador: Diogo da Silva Machado.

O Teorema Gauss-Bonnet é um clássico resultado da geometria diferencial, que nos dá a característica de Euler de uma variedade complexa compacta. Neste trabalho, estudaremos uma versão desse teorema para variedades não necessariamente compactas, e utilizaremos o que foi desenvolvido para também apresentar uma outra versão de mais um resultado clássico: o Teorema de Poincaré-Hopf.

Palavras-chave: Teorema Gauss-Bonnet. Teorema de Poincaré-Hopf. Fibrados Vetoriais. Classes de Chern.

Abstract

BARBOSA JUNIOR, Pedro Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2021.
Gauss-Bonnet and Poincaré-Hopf Theorems for ∂ -Manifolds. Advisor: Diogo da Silva Machado.

The Gauss-Bonnet Theorem is a classic result from differential geometry, which gives us the Euler characteristic of a complex compact manifold. In this work, we will study a version of this theorem for not-necessarily compact manifolds, and we will use what has been developed to also present another version of one more classic result: the Poincaré-Hopf theorem.

Keywords: Gauss-Bonnet Theorem. Poincaré-Hopf Theorem. Vector Bundles. Chern Classes.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	11
1.1 Fibrados Vetoriais	11
1.1.1 Definições Iniciais	11
1.1.2 Algumas Construções Envolvendo Fibrados	23
1.2 Classes de Chern	29
1.2.1 Conexões e Curvaturas	29
1.2.2 Polinômios Invariantes	37
1.2.3 Classes Características	42
1.2.4 Propriedades das Classes de Chern	48
1.3 Feixes	51
1.4 Feixes Localmente Livres e Fibrados Holomorfos	56
1.5 O índice de Poincaré-Hopf	59
1.6 Formas e Campos Logarítmicos	60
1.7 O Número de Milnor	61
1.8 O índice GSV	62
2 Resultados Principais	65
2.1 O Teorema Gauss-Bonnet para ∂ -variedades	65
2.2 O Teorema de Poincaré-Hopf para ∂ -variedades	77
Referências Bibliográficas	79

Introdução

Os teoremas Gauss-Bonnet e Poincaré-Hopf figuram na literatura matemática como dois dos resultados clássicos da Geometria.

Dada uma superfície complexa X , compacta, o Teorema Gauss-Bonnet estabelece uma fórmula que relaciona o número top de Chern do feixe de 1-formas holomorfas sobre X e a sua característica de Euler. Mais precisamente:

Teorema (Gauss-Bonnet): *Seja X uma variedade complexa compacta de dimensão n . Então*

$$\int_X c_n(\Omega_X^1) = (-1)^n \chi(X),$$

onde Ω_X^1 denota o feixe de 1-formas holomorfas sobre X e $\chi(X)$ denota a característica de Euler de X .

Essa versão do Teorema Gauss-Bonnet foi provada em 1944 por S. S. Chern ([5]).

Em 1979, S. Iitaka ([16]) propôs a seguinte versão do Teorema Gauss-Bonnet para ∂ -variedades, isto é, variedades complexas não compactas do tipo $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa compacta e D é uma hipersuperfície analítica em X do tipo cruzamento normal. Tal versão foi provada independentemente por Y. Norimatsu ([22]), R. Silvotti ([29]) e P. Aluffi ([2]):

Teorema (Norimatsu-Silvotti-Aluffi): *Seja $\tilde{X} = X - D$ uma variedade complexa não compacta, onde X é uma variedade complexa n -dimensional compacta e D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal. Então*

$$\int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) = (-1)^n \chi(\tilde{X}).$$

onde $\Omega_X^1(\log D)$ denota o feixe de 1-formas logarítmicas ao longo de D e $\chi(\tilde{X})$ é a característica de Euler de \tilde{X} .

Aqui pesa o fato da hipersuperfície compactificante D possuir singularidades do tipo cruzamentos normais, uma vez que, neste caso, o feixe de 1-formas logarítmicas $\Omega_X^1(\log D)$ constitui um feixe localmente livre (ver [26]), ou seja, trata-se essencialmente é um fibrado vetorial holomorfo.

Mais recentemente, M. Corrêa, F. Lourenço, D. Machado e A. Ferreira (ver [6]), obtiveram uma nova versão do Teorema de Gauss-Bonnet para ∂ -variedades, considerando

o caso em que a hipersuperfície compactificante D tem singularidades isoladas (e não do tipo cruzamentos normais).

Por outro lado, dado $v \in H^0(X, T_X)$ um campo de vetores holomorfos, sobre a variedade complexa compacta X , v com singularidades isoladas, então o Teorema de Poincaré-Hopf estabelece uma fórmula que relaciona a característica de Euler de X com a soma total dos índices de Poincaré-Hopf de v :

Teorema (Poincaré-Hopf): *Sejam X uma variedade complexa compacta de dimensão n e $v \in H^0(X, T_X)$ um campo de vetores holomorfos sobre X , com singularidades isoladas. Então,*

$$\chi(X) = \sum_{p \in \text{Sing}(v)} PH(v, p),$$

onde $PH(v, p)$ denota o índice de Poincaré-Hopf de v em p .

Em 2018, M. Corrêa e D. Machado (ver [8]), realizaram um estudo sobre fórmulas de resíduos de folheações logarítmicas e obtiveram uma versão do Teorema Poincaré-Hopf para ∂ -variedades do tipo $\tilde{X} = X - D$, onde D é uma hipersuperfície com singularidades do tipo cruzamentos normais. Mais precisamente:

Teorema (M. Corrêa e D. Machado): *Seja $\tilde{X} = X - D$ uma variedade complexa, onde X é uma variedade complexa n -dimensional compacta e D é uma hipersuperfície do tipo cruzamento normal. Seja $v \in H^0(X, T_X)$ um campo de vetores holomorfos, com singularidades isoladas (não-degeneradas) e logarítmico ao longo de D . Então,*

$$\chi(\tilde{X}) = \sum_{p \in \text{Sing}(v) \cap \tilde{X}} PH(v, p)$$

M. Corrêa, F. Lourenço, D. Machado e A. Ferreira (ver [6]), obtiveram uma nova versão do Teorema Poincaré-Hopf para ∂ -variedades, considerando o caso em que a hipersuperfície compactificante D tem singularidades isoladas (e não do tipo cruzamentos normais).

No presente trabalho de dissertação, seguindo [6], iremos estudar as versões dos Teoremas Gauss-Bonnet e Poincaré-Hopf para ∂ -variedades, considerando o caso em que a hipersuperfície compactificante tenha singularidades isoladas.

No primeiro capítulo, desenvolveremos os conceitos preliminares necessários desta dissertação. Assim, começaremos com o estudo da *Teoria Chern-Weil de Classes Características*, inicialmente definindo *fibrados vetoriais*, e seus principais exemplos. A partir disso, seguiremos com o conceito de *classes de Chern*, que é fundamental para o desenvolvimento dos principais resultados que serão apresentados aqui. Ao final da seção, ainda daremos algumas propriedades que as classes de Chern satisfazem, principalmente em relação aos fibrados já previamente apresentados.

Logo na sequência, definiremos *feixes* de grupos abelianos, definição essa que pode ser estendida para outras estruturas algébricas. Após isso, definiremos um tipo especial de

feixes, *feixes localmente livres*, e mostraremos como os mesmos se relacionam com fibrados vetoriais holomorfos. Para encerrar o capítulo, definiremos o *número de Milnor*, o *índice de Poincaré-Hopf* e o *índice GSV*, e iremos apresentar ainda uma relação entre os dois últimos. Ainda nesses estudos, iremos definir brevemente *formas* e *campos logarítmicos*.

Por fim, encerramos este trabalho com os resultados principais: demonstraremos algumas importantes proposições para finalmente enunciar e apresentar a prova de um Teorema *do tipo Gauss-Bonnet*, para as ∂ -variedades já comentadas anteriormente e, em seguida, utilizaremos principalmente os índices apresentados para também apresentar um Teorema *do tipo Poincaré-Hopf* para ∂ -variedades.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos importantes definições que serão necessárias para o desenvolvimento deste estudo.

Inicialmente, falaremos de fibrados vetoriais, uma estrutura algébrica definida por dois espaços topológicos e uma aplicação contínua entre eles, que chamaremos de *projeção*. No decorrer dos estudos, iremos definir, a partir dos conceitos anteriores, as suas *funções de transição*. Em seguida, mostraremos que é possível caracterizar um fibrado utilizando tais funções de transição, quando as mesmas satisfazem as *condições de cociclo*. Por fim, com essa caracterização, iremos construir alguns exemplos importantes.

Em seguida, apresentaremos o conceito de *classes de Chern*. Para esse desenvolvimento, iremos passar pelas construções de uma *conexão* e, a partir dela, sua *curvatura* e também classes características. Após definir as classes de Chern, apresentaremos algumas propriedades e exemplos relevantes nesse contexto.

Logo após, apresentaremos o conceito de feixes de grupos abelianos, e algumas estruturas relacionadas aos mesmos, como *talos*, *morfismos* e *sequências exatas* de feixes. A seção seguinte desse estudo definirá o conceito de feixes *localmente livres*, o que nos dá, por consequência, uma relação direta entre feixes e fibrados.

Por fim, definiremos três importantes índices: o *número de Milnor*, o *índice de Poincaré-Hopf* e o *índice GSV*, que iremos retomar no último Teorema a ser apresentado nessa dissertação.

1.1 Fibrados Vetoriais

1.1.1 Definições Iniciais

Para os próximos resultados, iremos considerar um espaço topológico X como um espaço de Hausdorff - ou um espaço separado, visto que todo par de pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas -, com base enumerável e conexo.

Definição 1.1.1 *Seja X um espaço topológico. Um **fibrado vetorial** real de posto n sobre X é um espaço topológico E , juntamente com uma projeção, uma função contínua $\pi : E \rightarrow X$ satisfazendo*

- (i) Para cada $x \in X$, o conjunto $\pi^{-1}(x) := E_x$ - que chamamos de fibra de E sobre $x \in X$ - tem estrutura de espaço vetorial real de dimensão n ;
- (ii) Existem $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cobertura por abertos de X , com $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, e homeomorfismos

$$\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

tais que, se $x \in U_\alpha$, então

$$\theta_{\alpha x} := \theta_\alpha|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais reais, para todo $\alpha \in A$.

Também é comum denotarmos o fibrado E munido da projeção π por $E \xrightarrow{\pi} X$.

Consideramos então, a partir da definição, as seguintes notações:

- E é chamado o *espaço total* do fibrado;
- X é a *base* do fibrado;
- As funções θ_α são as *trivializações locais* de E .

Definição 1.1.2 Uma **seção** de $E \xrightarrow{\pi} X$ é uma aplicação contínua $s : X \rightarrow E$ tal que, dado $x \in X$, então $(\pi \circ s)(x) = x$, ou seja, $s(x) \in E_x$.

Exemplo 1.1.3 Considere $\underline{\mathbb{R}^n} = X \times \mathbb{R}^n$ e a projeção $\pi : \underline{\mathbb{R}^n} \rightarrow X$ dada por $\pi(x, v) = x$. Sob essas condições, $\underline{\mathbb{R}^n}$ é um fibrado vetorial sobre X , de posto n . De fato, as duas condições são satisfeitas:

- (i) Para cada $x \in X$, temos

$$E_x = \pi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

e, sendo $\{x\} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, fica claro que E_x possui a estrutura de espaço vetorial real de dimensão n ;

- (ii) Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de X . Como $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, tomamos

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto \theta_\alpha(x, v) = (x, v) \end{aligned}$$

Sendo θ_α a identidade em $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, é imediato que cada θ_α é um homeomorfismo. Quando restrita a E_x , a função também é, em particular, um isomorfismo, pois

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha x} : E_x &\longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto \theta_{\alpha x}(x, v) = (x, v) \end{aligned}$$

também representa a identidade (dessa vez, em $\{x\} \times \mathbb{R}^n$).

Exemplo 1.1.4 Para definirmos um importante fibrado, chamado fibrado tangente, inicialmente iremos lembrar algumas definições envolvendo variedades topológicas.

Seja X uma variedade n -dimensional de classe C^k e $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura de abertos de X . Da definição de variedades, existem homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

onde o conjunto V_α é um aberto de \mathbb{R}^n , para cada α .

Mais ainda, em cada ponto p de X , sendo $p \in U_\alpha$, o espaço tangente a X em p é definido como

$$T_p X = \langle \varphi'_\alpha(p) \cdot e_1, \dots, \varphi'_\alpha(p) \cdot e_n \rangle,$$

onde $\varphi'_\alpha(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Com isso, definimos

$$TU_\alpha = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p X = \{(p, v_\alpha) : p \in U_\alpha, v_\alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

como a união dos espaços tangentes dos pontos em U_α . Assim, definimos o **fibrado tangente de X** por

$$T_X = \bigcup_{\alpha \in A} TU_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

Desse modo, T_X (também denotado por TX) possui estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X . Consideremos então a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \pi : T_X &\longrightarrow X \\ (p, v) &\longmapsto \pi(p, v) = p \end{aligned}$$

a qual é contínua. Assim, as fibras de T_X são dadas por

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x) &= \{(p, v); \pi(p, v) = x\} \\ &= \{(x, v); v \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{x\} \times \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

e $\pi^{-1}(x)$ também possui estrutura de espaço vetorial real n -dimensional.

Para as trivializações locais, definimos

$$\begin{aligned} \theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto \theta_\alpha(x, v) = (x, v) \end{aligned}$$

e note que θ_α é um isomorfismo. Com isso, T_X munido de π é um fibrado de posto n sobre X .

Agora, seja $s : X \rightarrow E$ uma seção do fibrado E . Então a aplicação

$$\begin{aligned} \theta_\alpha \circ s|_{U_\alpha} : U_\alpha &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \theta_\alpha(s(x)) = (x, S_\alpha(x)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

representa o gráfico de $S_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$. Com isso, podemos dizer que as seções de um fibrado são, localmente, funções de U_α com valores em \mathbb{R}^n .

Mais ainda, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^0 então seu gráfico

$$g(x) = (x, f(x)) \in X \times \mathbb{R}^n$$

é, claramente, uma seção do fibrado trivial $\underline{\mathbb{R}^n}$.

Consideramos agora $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado de posto n , $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora e $\{\theta_\alpha\}$ trivializações locais de E . Para cada $x \in U_\alpha$ note que $\theta_{\alpha x} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, por ser uma restrição de θ_α a E_x . Isso implica na existência do isomorfismo inverso $\theta_{\alpha x}^{-1} : \{x\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow E_x$.

Denotando $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, definimos

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \approx GL(n, \mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto \theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha x} \circ \theta_{\beta x}^{-1} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço de isomorfismos de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n e $GL(n, \mathbb{R}^n)$ o grupo de matrizes inversíveis de ordem $n \times n$. As funções $\theta_{\alpha\beta}$ são chamadas de **funções de transição de E** e obedecem o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\theta_{\beta}^{-1}} \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\theta_\alpha} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) & \longmapsto & (x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v) \end{array}$$

Note que, por definição, as funções de transição são contínuas, já que, para cada α , θ_α é um isomorfismo.

Antes de demonstrarmos a próxima proposição, estabeleceremos a seguinte notação

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = [\theta_{\alpha x}] \cdot [\theta_{\beta x}]^{-1}$$

com $[\theta_{\alpha x}], [\theta_{\beta x}] \in GL(n, \mathbb{R})$, visto que $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $GL(n, \mathbb{R}^n)$ são isomorfos. Além disso, as matrizes $[\theta_{\alpha x}]$ e $[\theta_{\beta x}]$ representam as matrizes de seus respectivos isomorfismos escritas na base canônica.

Proposição 1.1.5 *Seja $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado de posto n e $\theta_{\alpha\beta}$ suas funções de transição. Então são válidas as seguintes condições:*

- (i) $\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha} = \text{Id}$ em $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$;
- (ii) $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}^{-1}$ em $U_{\alpha\beta}$.

Tais condições são chamadas condições de cociclo.

Demonstração:

(i) Seja $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$. Então temos

$$\begin{aligned}
 \theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha}(x) &= [\theta_{\alpha\beta}(x)] [\theta_{\beta\gamma}(x)] [\theta_{\gamma\alpha}(x)] \\
 &= \left([\theta_{\alpha x}] [\theta_{\beta x}]^{-1}\right) \left([\theta_{\beta x}] [\theta_{\gamma x}]^{-1}\right) \left([\theta_{\gamma x}] [\theta_{\alpha x}]^{-1}\right) \\
 &= [\theta_{\alpha x}] \left([\theta_{\beta x}]^{-1} [\theta_{\beta x}]\right) \left([\theta_{\gamma x}]^{-1} [\theta_{\gamma x}]\right) [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\theta_{\alpha x}] [\text{Id}] [\text{Id}] [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\theta_{\alpha x}] [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\text{Id}]
 \end{aligned}$$

(ii) Seja $x \in U_{\alpha\beta}$. Com isso,

$$\begin{aligned}
 \theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha}(x) &= [\theta_{\alpha\beta}(x)] [\theta_{\beta\alpha}(x)] \\
 &= \left([\theta_{\alpha x}] [\theta_{\beta x}]^{-1}\right) \left([\theta_{\beta x}] [\theta_{\alpha x}]^{-1}\right) \\
 &= [\theta_{\alpha x}] \left([\theta_{\beta x}]^{-1} [\theta_{\beta x}]\right) [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\theta_{\alpha x}] [\text{Id}] [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\theta_{\alpha x}] [\theta_{\alpha x}]^{-1} \\
 &= [\text{Id}]
 \end{aligned}$$

Desse modo, como $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo, segue da unicidade do inverso multiplicativo que $\theta_{\alpha\beta} = \theta_{\beta\alpha}^{-1}$. ■

No nosso próximo resultado, mostraremos uma relação entre as funções de transição e as seções de um fibrado vetorial.

Proposição 1.1.6 *Seja $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de posto n e sejam também $S_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $S_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ seções de E . Então, em $U_{\alpha\beta}$ vale a seguinte relação*

$$\theta_{\alpha\beta} \cdot S_\beta = S_\alpha$$

Demonstração: Em $U_{\alpha\beta}$, segue de (1.1) que temos as seguintes composições

$$\begin{aligned}
 \theta_\alpha \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) &= (x, S_\alpha(x)) \\
 \theta_\beta \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) &= (x, S_\beta(x))
 \end{aligned}$$

vindo diretamente da caracterização de seções serem localmente funções em $U_{\alpha\beta}$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}
(x, S_\alpha(x)) &= \theta_\alpha \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) \\
&= \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1} \circ \theta_\beta \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x) \\
&= (\theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1})|_{U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n} \circ (\theta_\beta \circ s|_{U_{\alpha\beta}}(x)) \\
&= (\theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1})|_{U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n}(x, S_\beta(x)) \\
&= \theta_\alpha|_{\pi^{-1}(U_{\alpha\beta})} \circ \theta_\beta^{-1}|_{U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n}(x, S_\beta(x)) \\
&= (x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot S_\beta(x))
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue da construção feita sobre as funções de transição de E . Igualando termo a termo, obtemos

$$S_\alpha = \theta_{\alpha\beta} \cdot S_\beta$$

■

Definição 1.1.7 *Sejam E e F fibrados vetoriais sobre X . Definimos um morfismo $\varphi : E \rightarrow F$ como uma aplicação contínua tal que o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\varphi} & F \\
\pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\
X & \xrightarrow{\text{Id}} & X
\end{array}$$

e, em cada fibra de E , a restrição $\varphi|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$ é linear, para todo $x \in X$. Se φ é uma bijeção e φ^{-1} é um morfismo, então dizemos que φ é um isomorfismo.

Vamos olhar a definição anterior com mais detalhes. Sejam E e F fibrados vetoriais sobre X de posto n e m , respectivamente. Consideremos também $\{U_\alpha\}$ uma cobertura trivializadora comum a ambas e $\{\theta_\alpha\}$ e $\{\eta_\alpha\}$ as trivializações locais de E e F , respectivamente. Se φ é um morfismo de E em F , então φ induz uma aplicação $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$. De fato, pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc}
U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\theta_\alpha} & \pi_E^{-1}(U_\alpha) \\
\downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \varphi \\
U_\alpha \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\eta_\alpha} & \pi_F^{-1}(U_\alpha)
\end{array}$$

basta tomarmos $\varphi_\alpha = \eta_\alpha \circ \varphi \circ \theta_\alpha^{-1}$.

Para os próximos estudos, vamos apresentar um resultado fundamental para a caracterização de um fibrado vetorial. Esta caracterização permite a construção de novos

fibrados a partir de dados mais simples, como veremos no próximo resultado. Para isso, utilizaremos um espaço topológico quociente, e por consequência, é preciso definir uma relação de equivalência.

Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta para X . Vamos tomar $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ aplicações contínuas satisfazendo as condições de cociclo, com $\theta_{\alpha\alpha} = \text{Id}$. Consideremos

$$E = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

como a união disjunta dos conjuntos $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Esse conjunto pode ser visto como um espaço topológico com a topologia canônica τ_E .

Definimos então

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \Leftrightarrow x = y, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u \text{ e } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$$

que é uma relação de equivalência em E . De fato

- (i) (REFLEXIVA) É imediato que $x = x$ e $U_{\alpha\alpha} = U_\alpha \neq \emptyset$, pois $x \in U_\alpha$. Mais ainda, sendo $\theta_{\alpha\alpha} = \text{Id}$, então

$$\theta_{\alpha\alpha}(x) \cdot v = \text{Id}(x) \cdot v = v$$

Logo, $(\alpha, x, v) \sim (\alpha, x, v)$.

- (ii) (SIMÉTRICA) Considere $(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v)$. Daí,

$$x = y, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u \text{ e } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$$

ou seja, $y = x$ e $U_{\beta\alpha} = U_\beta \cap U_\alpha = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Mais ainda

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u &\Rightarrow \theta_{\alpha\beta}^{-1}(x) \circ \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = \theta_{\alpha\beta}^{-1}(x) \cdot u \\ &\Rightarrow \theta_{\beta\alpha}^{-1}(x) \cdot u = v \\ &\Rightarrow \theta_{\beta\alpha}(y) \cdot u = v \end{aligned}$$

já que $y = x$ e $\theta_{\beta\alpha}$ satisfaz a segunda condição de cociclo. Portanto, $(\beta, y, v) \sim (\alpha, x, u)$.

- (iii) (TRANSITIVA) Suponha $(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v)$ e $(\beta, y, v) \sim (\gamma, z, w)$. Isso nos dá

$$x = y, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v = u \text{ e } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset \quad (1)$$

$$y = z, \theta_{\beta\gamma}(y) \cdot w = v \text{ e } U_{\beta\gamma} \neq \emptyset \quad (2)$$

Assim, sendo $x = y = z$, $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, e daí, $U_{\alpha\beta\gamma} \subset U_{\alpha\gamma} \neq \emptyset$. Mais ainda, como as funções $\theta_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo,

$$\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha} = \text{Id} \Rightarrow \theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} = \theta_{\alpha\gamma} \quad (3)$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\theta_{\alpha\gamma}(x) \cdot w &\stackrel{(3)}{=} \theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\gamma}(x) \cdot w \\
&\stackrel{x=y}{=} \theta_{\alpha\beta}(x) \circ \theta_{\beta\gamma}(y) \cdot w \\
&= \theta_{\alpha\beta}(x)(\theta_{\beta\gamma}(y) \cdot w) \\
&\stackrel{(2)}{=} \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v \\
&\stackrel{(1)}{=} u
\end{aligned}$$

e daí $(\alpha, x, u) \sim (\gamma, z, w)$.

Finalmente, podemos demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema 1.1.8 *Sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta para X , $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ as aplicações contínuas satisfazendo as condições de cociclo - com $\theta_{\alpha\alpha} = \text{Id}$ - e seja também o espaço $E = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ com a relação de equivalência \sim definida acima. Então, o quociente E/\sim tem a estrutura de fibrado vetorial de posto n sobre X , a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Inicialmente, para caracterizarmos um fibrado, precisamos de uma projeção. Consideremos então a aplicação

$$\begin{aligned}
\pi : E/\sim &\longrightarrow X \\
(\alpha, x, v) &\longmapsto \pi(\alpha, x, v) = x
\end{aligned}$$

onde aqui denotamos por (α, x, v) a classe de equivalência de $[(\alpha, x, v)] \in E/\sim$. Vamos verificar que π está bem definida.

Considere $(\alpha, x, v), (\beta, y, w) \in E/\sim$, com $(\alpha, x, v) = (\beta, y, w)$. Ou seja, $(\alpha, x, v) \in E$ e $(\beta, y, w) \in E$ se relacionam, e daí, $x = y$. Portanto,

$$\pi(\alpha, x, v) = x = y = \pi(\beta, y, w)$$

e daí, π está bem definida.

Vamos verificar agora que π é contínua. Para isso, iremos utilizar a definição de continuidade em espaços topológicos, ou seja, a pré-imagem da função em um aberto da imagem é um aberto do domínio. Ou seja, considerando os espaços topológicos $(E/\sim, \tilde{\tau})$ e (X, τ_X) , então, para verificarmos que π é contínua, é suficiente mostrar que $U \in \tau_X \Rightarrow \pi^{-1}(U) \in \tilde{\tau}$. Dessa forma, é necessário definir a topologia $\tilde{\tau}$, pois já sabemos que X é um espaço topológico. A construção que faremos abaixo, assim como as demonstrações de algumas topologias dadas abaixo, podem ser vistas com mais detalhes em [28].

Inicialmente, considere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura por abertos de X , com $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, como visto na Definição 1.1.1. Como, para cada $\alpha \in A$, $U_\alpha \subset X$, podemos tomar a topologia induzida por τ_X sobre U_α , dada por

$$\tilde{\tau}_\alpha = \{G \cap U_\alpha : G \in \tau_X\} \tag{1.2}$$

que, de fato, é uma topologia, como visto em [11]. Assim, consideremos $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \tau_\alpha)$ um espaço topológico, onde τ_α é a topologia produto, induzida pelas topologias de U_α e \mathbb{R}^n .

Agora, sendo $E = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ uma união disjunta, existe uma família de funções injetivas

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow E \\ (x, v) &\longmapsto (\alpha, x, v) \end{aligned}$$

Sendo $(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \tau_\alpha)$ uma família de espaços topológicos, (E, τ_E) também é um espaço topológico, munido da seguinte topologia:

$$\tau_E = \{U \subset E : \varphi_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in A\}$$

e, a partir dela, a topologia $\tilde{\tau}$ de E/\sim , dada por

$$\tilde{\tau} = \{U \subset E/\sim : \mathbf{p}^{-1}(U) \in \tau_E\},$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : E &\longrightarrow E/\sim \\ (\alpha, x, v) &\longmapsto \mathbf{p}(\alpha, x, v) = (\alpha, x, v) \in E/\sim \end{aligned}$$

Então, voltemos ao nosso objetivo, que é mostrar que $U \in \tau_X \Rightarrow \pi^{-1}(U) \in \tilde{\tau}$. Inicialmente, note que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) \in \tilde{\tau} &\Leftrightarrow \mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) \in \tau_E \\ &\Leftrightarrow \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))) \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in A \end{aligned} \tag{1.3}$$

Escrevendo $A' = \{\alpha \in A; U \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$, temos

$$\pi^{-1}(U) = \{(\alpha, x, v) \in E/\sim : \alpha \in A', (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\}$$

e daí,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) &= \{(\alpha, x, v) \in E : \mathbf{p}(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U)\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in A', (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Com isso, para verificar (1.3), dado $\alpha_0 \in A$ qualquer, temos duas possibilidades:

- se $\alpha_0 \notin A'$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_0}^{-1}(\mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))) &= \{(x, v) \in U_{\alpha_0} \times \mathbb{R}^n : \varphi_{\alpha_0}(x, v) \in \mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\} \\ &= \{(x, v) \in U_{\alpha_0} \times \mathbb{R}^n : (\alpha_0, x, v) \in \mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

- se $\alpha_0 \in A'$, então escrevemos, de (1.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) &= \{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in A' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\} \cup \\ &\quad \{(\alpha_0, x, v) \in E : (x, v) \in (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

e como

$$\varphi_{\alpha_0}^{-1}(\{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in A' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\}) = \emptyset,$$

pois $\alpha_0 \notin A' \setminus \{\alpha_0\}$, e

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_0}^{-1}(\{(\alpha_0, x, v) \in E : (x, v) \in (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\}) \\ = \{(x, v) \in U_{\alpha_0} \times \mathbb{R}^n : (x, v) \in (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\} \\ = (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U)) &= \{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in A' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\} \cup \\ &\quad \{(\alpha_0, x, v) \in E : (x, v) \in (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\} \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_0}^{-1}(\mathfrak{p}^{-1}(\pi^{-1}(U))) &= \varphi_{\alpha_0}^{-1}(\{(\alpha, x, v) \in E : \alpha \in A' \setminus \{\alpha_0\}, (x, v) \in (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{R}^n\}) \\ &\quad \cup \varphi_{\alpha_0}^{-1}(\{(\alpha_0, x, v) \in E : (x, v) \in (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n\}) \\ &= \emptyset \cup (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n \\ &= (U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para o primeiro caso, sendo τ_{α_0} uma topologia, então $\emptyset \in \tau_{\alpha_0}$, por definição.

Já para o segundo caso, note que, de (1.2), $U \cap U_{\alpha_0} \in \tilde{\tau}_{\alpha_0}$, já que, por hipótese, $U \in \tau_X$. Da topologia produto, como já dito anteriormente, então $(U \cap U_{\alpha_0}) \times \mathbb{R}^n \in \tau_{\alpha_0}$.

Como tomamos α_0 arbitrário, a condição (1.3) é satisfeita, ou seja, $\pi^{-1}(U)$ é um aberto de E/\sim . Portanto, π é contínua.

Agora, munidos de uma projeção contínua, podemos verificar as duas condições para que E/\sim seja um fibrado.

- (i) Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x) = E_x$ possui estrutura de fibrado vetorial. De fato, dado $x_0 \in X$, temos

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x_0) &= \{(\alpha, x, v) \in E/\sim ; \pi(\alpha, x, v) = x_0\} \\ &= \{(\alpha, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in A_0\} \end{aligned}$$

onde $A_0 = \{\alpha \in A; U_\alpha \cap \{x_0\} \neq \emptyset\}$.

Agora, sejam $\beta, \gamma \in A_0$, com $\beta \neq \gamma$. Assim, $U_{\beta\gamma} \neq \emptyset$, já que $x_0 \in U_{\beta\gamma}$. Mais ainda, se dado $w \in \mathbb{R}^n$, tomarmos $v = \theta_{\beta\gamma}(x) \cdot w$, então (β, x_0, v) e (γ, x_0, w) representam a mesma classe de equivalência, visto que $(\beta, x_0, v) \sim (\gamma, x_0, w)$, isto é, $(\beta, x_0, v) = (\gamma, x_0, w) \in E/\sim$. Com isso, se fixarmos $\beta \in A_0$, temos a seguinte inclusão

$$\{(\gamma, x_0, w) \in E/\sim ; w \in \mathbb{R}^n\} \subset \{(\beta, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.5)$$

Como tomamos $\gamma \neq \beta$ arbitrário, temos então que, fixado $\beta \in A_0$:

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(x_0) &= \{(\alpha, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in A_0\} \\
&= \left[\bigcup_{\gamma \in A_0 \setminus \{\beta\}} \{(\gamma, x_0, w) \in E/\sim ; w \in \mathbb{R}^n\} \right] \cup \{(\beta, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \bigcup_{\gamma \in A_0 \setminus \{\beta\}} \left[\{(\gamma, x_0, w) \in E/\sim ; w \in \mathbb{R}^n\} \cup \{(\beta, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n\} \right] \\
&\stackrel{(1.5)}{=} \bigcup_{\gamma \in A_0 \setminus \{\beta\}} \{(\beta, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{(\beta, x_0, v) \in E/\sim ; v \in \mathbb{R}^n\} \approx \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

visto que o parâmetro β é fixo. Logo, cada fibra E_{x_0} possui estrutura de espaço vetorial real.

(ii) Vamos agora definir as trivializações locais de E . Inicialmente, vamos mostrar que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \{(\alpha, x, v) \in E/\sim ; x \in U_\alpha \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\}$$

Tome $(\beta, y, w) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$. Assim, $\pi(\beta, y, w) = y \in U_\alpha$. Se tomarmos $v_0 = \theta_{\beta\alpha}(y) \cdot w$, então (β, y, w) representa a mesma classe de equivalência de (α, y, v_0) e, como $y \in U_\alpha$ e $v_0 \in \mathbb{R}^n$, então $(\beta, y, w) = (\alpha, y, v_0) \in \{(\alpha, x, v) \in E/\sim ; x \in U_\alpha \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\}$. Portanto, $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset \{(\alpha, x, v) \in E/\sim ; x \in U_\alpha \text{ e } v \in \mathbb{R}^n\}$.

A inclusão contrária é imediata, visto que $\pi(\alpha, x, v) = x \in U_\alpha \Rightarrow (\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$.

Com isso, definimos

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\
(\alpha, x, v) &\longmapsto \psi_\alpha(\alpha, x, v) = (x, v)
\end{aligned}$$

Vamos verificar que ψ_α é um homeomorfismo. Para isso, observe que ψ_α pode ser vista como duas funções coordenada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha_1} : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha & \text{e} & & (1.6) \\
(\alpha, x, v) &\longmapsto \psi_{\alpha_1}(\alpha, x, v) = x \\
\psi_{\alpha_2} : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(\alpha, x, v) &\longmapsto \psi_{\alpha_2}(\alpha, x, v) = v
\end{aligned}$$

Com isso, ψ_{α_1} está bem definida - a demonstração é análoga a feita para a projeção π -, assim como ψ_{α_2} , pois

$$\begin{aligned}
(\alpha, x, u) = (\alpha, y, v) \text{ em } E/\sim &\Rightarrow x = y \text{ e } \theta_{\alpha\alpha} \cdot v = u \\
&\Rightarrow u = \theta_{\alpha\alpha} \cdot v = \text{Id} \cdot v = v \\
&\Rightarrow \psi_{\alpha_2}(\alpha, x, u) = u = v = \psi_{\alpha_2}(\alpha, x, v).
\end{aligned}$$

Dessa forma, ψ_α está bem definida.

Agora, iremos verificar que ψ_α é contínua, olhando novamente para (1.6).

Como $U_\alpha \subset X$ e $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E/\sim$, a continuidade de ψ_{α_1} segue diretamente da continuidade de π .

Para a continuidade de ψ_{α_2} , utilizaremos a mesma caracterização feita para demonstrar a continuidade de π , ou seja, dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, queremos mostrar que $\psi_{\alpha_2}(U)$ é um aberto de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, ou então, em E/\sim , já que $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é um aberto de E/\sim (pois π é contínua). Ou seja, como visto em (1.3), basta mostrar que

$$\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{p}^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U))) \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in A,$$

isto é, $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{p}^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U)))$ é aberto em $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Com isso, note que

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_2}^{-1}(U) &= \{(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha); \psi_{\alpha_2}^{-1}(\alpha, x, v) \in U\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha); v \in U\} \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U)) &= \{(\alpha, x, v) \in E; \mathbf{p}(\alpha, x, v) \in \psi_{\alpha_2}^{-1}(U)\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in E; (\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ e } v \in U\} \\ &= \{(\alpha, x, v) \in E; x \in U_\alpha \text{ e } v \in U\} \end{aligned}$$

já que $(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ nos dá $\pi(\alpha, x, v) = x \in U_\alpha$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{p}^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U))) &= \{(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n; \varphi_\alpha(x, v) \in \mathbf{p}^{-1}(\psi_{\alpha_2}^{-1}(U))\} \\ &= \{(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n; x \in U_\alpha \text{ e } v \in U\} \\ &= U_\alpha \times U. \end{aligned}$$

Sendo U aberto em \mathbb{R}^n , da topologia produto, é imediato que $U_\alpha \times U$ é um aberto de $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$. Portanto, ψ_{α_2} é contínua, o que nos dá também a continuidade de ψ_α .

Por fim, verificamos que ψ_α é uma bijeção:

– ψ_α é injetiva, pois

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\alpha, x_1, v_1) &= \psi_\alpha(\alpha, x_2, v_2) \\ \Rightarrow (x_1, v_1) &= (x_2, v_2) \\ \Rightarrow (\alpha, x_1, v_1) &= (\alpha, x_2, v_2) \end{aligned}$$

– Dado $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ arbitrário, basta tomar $(\alpha, x, v) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, e daí, $\psi_\alpha(\alpha, x, v) = (x, v)$. Portanto, ψ_α é sobrejetora.

Logo, ψ_α é um homeomorfismo e, quando restrita a uma fibra E_x ,

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha x} : \quad E_x &\rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\ (\alpha, x, v) &\mapsto \psi_{\alpha x}(\alpha, x, v) = (x, v) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Como foram satisfeitas as condições (i) e (ii) da Definição 1.1.1, portanto, E/\sim é um fibrado vetorial real de posto n sobre X . ■

Observação 1.1.9 *Em todas as construções feitas nessa seção, se trocarmos \mathbb{R} por \mathbb{C} obtemos a noção de fibrados vetoriais complexos.*

Além disso, as trivializações também caracterizam a construção do fibrado, isto é, se X é uma variedade complexa e as funções de transição forem de classe C^∞ ou holomorfas, teremos fibrados vetoriais complexos de classe C^∞ ou holomorfos, respectivamente.

1.1.2 Algumas Construções Envolvendo Fibrados

Para esse tópico, construiremos alguns importantes, exemplos de fibrados vetoriais. O Teorema 1.1.8 nos permite fazer isso já que, a menos de isomorfismo, basta verificarmos se a família de funções de transição do fibrado satisfazem as condições de cociclo.

O Produto Tensorial

Consideremos as seguintes estruturas algébricas

- E fibrado vetorial de posto n , cujas funções de transição são $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$;
- E' fibrado vetorial de posto m , cujas funções de transição são $\theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$.

Note que $\{U_\alpha\}$ é uma cobertura trivializadora comum a ambos fibrados, e que as funções de transição $\theta_{\alpha\beta}$ e $\theta'_{\alpha\beta}$ são contínuas e satisfazem as condições de cociclo. Desse modo, o *produto tensorial* $E \otimes E'$ é um fibrado de posto $n \cdot m$, cujas funções de transição são dadas por

$$\psi_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \otimes \theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \otimes GL(m, \mathbb{R}) \approx GL(nm, \mathbb{R})$$

Vamos verificar que, de fato, as funções $\psi_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo. Definindo

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \\ u \otimes v &\longmapsto \psi_{\alpha\beta}(x)(u \otimes v) = \theta_{\alpha\beta} \cdot u \otimes \theta'_{\alpha\beta} \cdot v \end{aligned}$$

temos então

- (i) Sejam $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ quaisquer. Note que

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x) \circ \psi_{\gamma\alpha}(x) \cdot u \otimes v &= \psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x)(\theta_{\gamma\alpha} \cdot u \otimes \theta'_{\gamma\alpha} \cdot v) \\ &= \psi_{\alpha\beta}(x) [(\theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha} \cdot u) \otimes (\theta'_{\beta\gamma} \circ \theta'_{\gamma\alpha} \cdot v)] \\ &= (\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} \circ \theta_{\gamma\alpha} \cdot u) \otimes (\theta'_{\alpha\beta} \circ \theta'_{\beta\gamma} \circ \theta'_{\gamma\alpha} \cdot v) \\ &= (\text{Id}(x) \cdot u) \otimes (\text{Id}(x) \cdot v) \\ &= u \otimes v \end{aligned}$$

utilizando o fato das funções de E e E' satisfazerem a primeira condição de cociclo.

Portanto, $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha} = \text{Id}$;

(ii) Sejam $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, $x \in U_{\alpha\beta}$ e $u \otimes v \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ quaisquer. Com isso,

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}(x) \circ \psi_{\beta\gamma}(x) \cdot u \otimes v &= \psi_{\alpha\beta}(x)(\theta_{\beta\alpha} \cdot u \otimes \theta'_{\beta\alpha} \cdot v) \\ &= (\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\alpha} \cdot u) \otimes (\theta'_{\alpha\beta} \circ \theta'_{\beta\alpha} \cdot v) \\ &= (\text{Id}(x) \cdot u) \otimes (\text{Id}(x) \cdot v) \\ &= u \otimes v \end{aligned}$$

utilizando o fato das funções de E e E' satisfazerem a segunda condição de cociclo.

Logo, $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = \text{Id}$, o que implica em $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}^{-1}$.

Portanto, como a família de funções de transição $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo, $E \otimes E'$ é um fibrado vetorial de posto nm sobre X .

Antes da próxima construção, apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.1.10 *Seja (E, π) um fibrado vetorial sobre X . Um **subfibrado** de E é um conjunto F tal que $F \subset E$ e a projeção e as trivializações locais de E dão à F estrutura de fibrado vetorial real de posto $m \leq n$.*

Sendo θ_α as trivializações de E , então

- $\pi_F = \pi|_F$ é a projeção de F ;
- para cada $x \in X$, as fibras de F , denotadas por F_x , são subespaços vetoriais de E_x ;
- as trivializações locais de F são dadas por $\eta_\alpha = \theta_\alpha|_F : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$.

O Fibrado Quociente

Dados um fibrado E e seu subfibrado $F \subset E$, o *fibrado quociente* é definido por E/F . Suas fibras são E_x/F_x e, dadas $\{U_\alpha\}$ trivializações de E , o diagrama abaixo é satisfeito

$$\begin{array}{ccccc} U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\theta_\beta} & \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\theta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\eta_\beta} & \pi_F^{-1}(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\eta_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde as flechas verticais representam as respectivas aplicações de inclusão. Assim, temos aplicações que levam $(x, v) \in U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m$ em $(x, \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$ e $(x, v) \in U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m$ em $(x, \eta_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$, onde

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto \theta_{\alpha\beta}(x) \cdot v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto \eta_{\alpha\beta}(x) \cdot v \end{aligned}$$

Como, das construções de subfibrados, η_α é restrição de θ_α , então escrevemos $\theta_{\alpha\beta}(x)|_{\mathbb{R}^m} = \eta_{\alpha\beta}(x)$, para cada $v \in \mathbb{R}^m$. Assim, podemos expressar $\theta_{\alpha\beta}$ como

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta}(x) & \rho_{\alpha\beta} \\ \mathbf{0} & \zeta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}(x) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \rho_{\alpha\beta}(x) &: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{0}(x) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \\ \zeta_{\alpha\beta}(x) &: \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \end{aligned}$$

Com isso, temos uma família de funções $\{\zeta_{\alpha\beta}\}$ satisfazendo as condições de cociclo. Desse modo, as funções $\{\zeta_{\alpha\beta}\}$ serão as funções de transição que definem o fibrado quociente E/F .

O Fibrado Soma Direta

Novamente, consideremos as seguintes estruturas algébricas

- E fibrado vetorial de posto n sobre X , cujas funções de transição são dadas por $\theta_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Suas fibras são E_x e suas trivializações locais são dadas por θ_α ;
- E' fibrado vetorial de posto m sobre X , cujas funções de transição são dadas por $\theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$. Suas fibras são E'_x e suas trivializações locais são dadas por θ'_α .

Com isso, a *soma direta* $E \oplus E'$ é um fibrado de posto $n + m$ cujas funções de transição são dadas por

$$\varphi_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} \oplus \theta'_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \oplus GL(m, \mathbb{R}) \approx GL(n + m, \mathbb{R})$$

Vamos verificar que, de fato, as funções $\varphi_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo. Definindo

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \\ (u, v) &\longmapsto \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot (u, v) = \begin{pmatrix} \theta_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} (u, v) \end{aligned}$$

verifiquemos então as duas condições:

(i) Sejam $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ quaisquer. Com isso,

$$\begin{aligned} & \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \varphi_{\beta\gamma}(x) \circ \varphi_{\gamma\alpha}(x) \cdot (u, v) \\ &= \begin{pmatrix} \theta_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{\beta\gamma}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\beta\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{\gamma\alpha}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\gamma\alpha} \end{pmatrix} \cdot (u, v) \\ &= \begin{pmatrix} \theta_{\alpha\beta}(x)\theta_{\beta\gamma}(x)\theta_{\gamma\alpha}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\alpha\beta}(x)\theta'_{\beta\gamma}(x)\theta'_{\gamma\alpha}(x) \end{pmatrix} \cdot (u, v) \\ &= [\text{Id}] \cdot (u, v) = (u, v) \end{aligned}$$

visto que as famílias $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ e $\{\theta'_{\alpha\beta}\}$ satisfazem as condições de cociclo.

Assim, $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = \text{Id}$;

(ii) Sejam $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, $x \in U_{\alpha\beta}$ e $(u, v) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ quaisquer. Com isso,

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \varphi_{\beta\alpha}(x) \cdot (u, v) &= \begin{pmatrix} \theta_{\alpha\beta}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{\beta\alpha}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \cdot (u, v) \\ &= \begin{pmatrix} \theta_{\alpha\beta}(x)\theta_{\beta\alpha}(x) & 0 \\ 0 & \theta'_{\alpha\beta}(x)\theta'_{\beta\alpha}(x) \end{pmatrix} \cdot (u, v) \\ &= [\text{Id}] \cdot (u, v) = (u, v) \end{aligned}$$

utilizando novamente o fato das famílias de funções de transição satisfazerem as condições de cociclo. Desse modo, $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \text{Id} \implies \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}$.

Portanto, como a família $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo, $E \oplus E'$ é, de fato, um fibrado de posto $n + m$ sobre X .

Mais ainda, as fibras de $E \oplus E'$, para cada $x \in X$, são dadas por $E_x \oplus E'_x$ e suas trivializações locais são induzidas pelas trivializações de E e E' :

$$\theta_\alpha \oplus \theta'_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$$

O Fibrado Dual

Inicialmente, recordamos que uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ induz uma aplicação linear definida nos espaços duais de V e W , definida por

$$\begin{array}{ccc} f_T : W^* & \longrightarrow & V^* \\ \alpha & \longmapsto & f^T(\alpha) : V \rightarrow \mathbb{R} \\ & & v \mapsto (\alpha \circ f)(v) \end{array}$$

Mais ainda, a matriz de f^T é a transposta da matriz de f .

Agora, seja $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de posto n com trivializações $\{\theta_\alpha\}$. Para cada $\theta_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, definimos então

$$(\theta_\alpha^T)^{-1} : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{n^*}$$

dada pela inversa da aplicação induzida por θ_α . Tais aplicações serão as trivializações do *fibrado dual* E^* . Antes de demonstrarmos que as aplicações satisfazem as condições de cociclo, note que

$$(\theta_\alpha^T)^{-1}(\theta_\beta^T) = ((\theta_\beta^T)^{-1}\theta_\alpha^T)^{-1} = ((\theta_\alpha\theta_\beta^{-1})^T)^{-1} = (\theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}$$

Assim, a família das funções de transição de E^* é dada por $\{\psi_{\alpha\beta}\}$, onde $\psi_{\alpha\beta} = (\theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}$. Agora, olhando para as matrizes das trivializações, temos que:

(i) Dado $x \in U_{\alpha\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned} & (\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha})(x) \\ &= (\theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}(\theta_{\beta\gamma}^T)^{-1}(\theta_{\gamma\alpha}^T)^{-1}(x) \\ &= \left(([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1}[\theta_\beta(x)]^T \right) \left(([\theta_\beta(x)]^T)^{-1}[\theta_\gamma(x)]^T \right) \left(([\theta_\gamma(x)]^T)^{-1}[\theta_\alpha(x)]^T \right) \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} \left([\theta_\beta(x)]^T ([\theta_\beta(x)]^T)^{-1} \right) \left([\theta_\gamma(x)]^T ([\theta_\gamma(x)]^T)^{-1} \right) [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} [\text{Id}(x)] [\text{Id}(x)] [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= [\text{Id}(x)] = x \end{aligned}$$

(ii) Dado $x \in U_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned} (\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha})(x) &= (\theta_{\alpha\beta}^T)^{-1}(\theta_{\beta\alpha}^T)^{-1}(x) \\ &= \left(([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1}[\theta_\beta(x)]^T \right) \left(([\theta_\beta(x)]^T)^{-1}[\theta_\alpha(x)]^T \right) \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} \left([\theta_\beta(x)]^T ([\theta_\beta(x)]^T)^{-1} \right) [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} [\text{Id}(x)] [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= ([\theta_\alpha(x)]^T)^{-1} [\theta_\alpha(x)]^T \\ &= [\text{Id}(x)] = x \end{aligned}$$

ou seja, $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha} = \text{Id}$ e, da unicidade do inverso multiplicativo em $GL(n, \mathbb{R})$, $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}^{-1}$.

Portanto, a família $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ satisfaz as condições de cociclo e E^* é, de fato, um fibrado vetorial de posto n .

O Fibrado Gerado por uma Hipersuperfície

Para apresentarmos o último exemplo dessa seção, inicialmente precisamos apresentar a seguinte definição:

Definição 1.1.11 (i) *Seja X uma variedade complexa e W um subconjunto aberto de X . Uma **hipersuperfície** $D \subset W$ é uma subvariedade analítica localmente definida por uma única função holomorfa não-nula, ou seja, para cada $p \in W$, existe uma vizinhança U de p e h holomorfa tal que*

$$D \cap U = \{q \in U \mid h(q) = 0\}.$$

(ii) *Um **divisor** é uma combinação linear formal*

$$D = \sum a_i [D_i],$$

onde $D_i \subset X$ são hipersuperfícies irredutíveis - ou seja, a função que define a hipersuperfície é dada por um polinômio irredutível - e $a_i \in \mathbb{Z}$.

Agora, considere X uma variedade complexa e $D \subset X$ uma hipersuperfície analítica. Como para cada $p \in X$ podemos tomar um aberto U_α , considere a família de funções $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de abertos para X . Assim, em $U_{\alpha\beta}$, temos $h_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} h_\beta$, onde $\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma aplicação holomorfa que não se anula em nenhum ponto de $U_{\alpha\beta}$.

Definimos então o fibrado associado à hipersuperfície D , denotado por $[D]$, pelas funções de transição $\varphi_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}$ (não é difícil verificar que tais funções satisfazem as condições de cociclo).

Observe que $[D]$ é um fibrado de posto 1.

O Fibrado Virtual

Nesta seção vamos apresentar o conceito de Fibrado Virtual. Para mais detalhes, a referência para esta seção é [3] e [20].

Sejam $\{E_i\}$ fibrados vetoriais C^∞ em uma variedade X , com $i = 0, \dots, q$. Definimos o **Fibrado Virtual** $\xi = \sum_{i=0}^q (-1)^i E_i$ como um elemento do K -grupo $K(X)$ de X , onde $K(X)$ denota um grupo abeliano, chamado *grupo de Grothendieck de X* (ver página 158 de [20]).

Aqui nos interessa o caso em que $i = 1$, ou seja, os fibrados virtuais da forma $L = E - F$.

1.2 Classes de Chern

Para a construção que desenvolveremos nessa seção, seguimos a referência [20].

1.2.1 Conexões e Curvaturas

Inicialmente, fixemos algumas notações importantes. Considere E um espaço topológico, X uma variedade complexa e $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial complexo de posto n . Sendo $U \subset X$ aberto, considere que:

- $\mathcal{A}^0(U)$ é a \mathbb{C} -álgebra $C^\infty(U, \mathbb{C})$, ou seja, funções complexas em U , de classe C^∞ ;
- $\mathcal{A}^p(U)$ é o $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo de p -formas complexas de classe C^∞ sobre U ;
- $\mathcal{A}^*(U)$ é a álgebra graduada de formas diferenciais complexas C^∞ sobre U , dadas por

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{p=0}^{\dim X} \mathcal{A}^p(U);$$

- $\mathcal{A}^p(U, E)$ é o $\mathcal{A}^0(U)$ -módulo $C^\infty(U, \bigwedge^p TX^{\mathbb{C}*} \otimes E)$ de seções de $\bigwedge^p TX^{\mathbb{C}*} \otimes E$ sobre U . Em particular, quando $p = 0$, $\mathcal{A}^0(U, E)$ é o módulo de seções C^∞ de E sobre U .

Definição 1.2.1 *Uma conexão em E é uma aplicação \mathbb{C} -linear*

$$\nabla : \mathcal{A}^0(X, E) \longrightarrow \mathcal{A}^1(X, E)$$

satisfazendo a regra de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \quad \forall f \in \mathcal{A}^0(X), \forall s \in \mathcal{A}^0(X, E)$$

Note que, na definição acima, o produto tensorial $df \otimes s$ não é feito em \mathbb{C} , e sim em $\mathcal{A}^0(X)$, visto que $\mathcal{A}^1(X, E)$ é um $\mathcal{A}^0(X)$ -módulo.

Proposição 1.2.2 *O conceito de conexão é um conceito local.*

Demonstração: Queremos mostrar que, se s é uma seção identicamente nula num aberto U , então $\nabla(s) \in \mathcal{A}^1(X, E)$ também é identicamente nula em U . Seguiremos a demonstração por absurdo.

Suponha que exista $x_0 \in U$ tal que $\nabla(s)(x_0) \neq 0$. Tomando uma função $\rho \in \mathcal{A}^0(U)$ com suporte compacto, e que vale 1 numa vizinhança $V \subset U$ de x_0 , definimos $\bar{\rho}$ como

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in U \\ 0, & x \in X \setminus U \end{cases}$$

Com isso, $\bar{\rho}s \in \mathcal{A}^0(X, E)$ é identicamente nula - já que s é identicamente 0 em U . Com isso, como a conexão é \mathbb{C} -linear,

$$\nabla(\bar{\rho}s) = \nabla(0) = \nabla(0_{\mathbb{C}} \cdot 0) = 0_{\mathbb{C}} \cdot \nabla(0) = 0$$

onde $0_{\mathbb{C}}$ é o número complexo nulo. Mais ainda, da regra de Leibniz,

$$\nabla(\bar{\rho}s) = d\bar{\rho} \otimes s + \bar{\rho}\nabla(s) = \bar{\rho}\nabla(s),$$

já que s se anula em U e, $\bar{\rho}$ se anula em $X \setminus U$.

Assim, por definição, $\bar{\rho}(x) = \rho(x) \equiv 1$, para todo $x \in V$. Porém, como $\bar{\rho}\nabla(s) = 0$ para todo elemento de X , então $\bar{\rho}\nabla(s) = 0 \Rightarrow \nabla(s) = 0$ em V . Em particular, $\nabla(s)(x_0) = 0$, uma contradição à hipótese inicial. ■

Como as conexões possuem um caráter local, podemos restringi-las a abertos de X . Assim, sendo $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X , então uma conexão em E fica completamente determinada pelas suas restrições $\nabla|_{U_\alpha}$.

A seguir, mostraremos a existência dessas aplicações.

Lema 1.2.3 *Existem conexões.*

Demonstração: Seja $\{U_\alpha\}$ cobertura aberta de X , trivializadora de ambos E e $TX^{\mathbb{C}}$.

Para cada α , tome $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha)$ um referencial para $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, ou seja, $s_i^\alpha \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$. Mais ainda, para cada $x \in U_\alpha$, $\{s_1^\alpha(x), \dots, s_n^\alpha(x)\}$ é uma base de E_x . Consideramos também então $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$.

Assim, definimos ∇^α em U_α por $\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Com essa definição, para $f \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$, vale

$$\nabla^\alpha(f s_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha + f \nabla^\alpha(s_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha$$

Note que, sendo s^α um referencial para $\pi^{-1}(U_\alpha)$, é possível reescrevermos uma seção $s \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$ em função dos termos da base de E_x , ou seja,

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha, \quad f_i \in \mathcal{A}^0(U_\alpha) \quad (1.7)$$

e então, podemos estender ∇^α para uma seção qualquer, da seguinte forma

$$\nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \nabla^\alpha\left(\sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha\right) = \sum_{i=1}^n \nabla^\alpha(f_i s_i^\alpha) = \sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha$$

Com isso, definimos

$$\nabla = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha$$

que é uma conexão. De fato, como

$$\nabla(s) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \nabla^\alpha(s|_{U_\alpha}) = \sum_{\alpha} \rho_\alpha \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^\alpha \right) \quad (1.8)$$

então ∇ é linear, o que segue diretamente da linearidade do produto tensorial. Por fim, dado $g \in \mathcal{A}^0(X)$, temos

$$\begin{aligned}
\nabla(gs) &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla^{\alpha}(gs) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla^{\alpha} \left(g \sum_{i=1}^n f_i s_i^{\alpha} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nabla^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n g f_i s_i^{\alpha} \right) \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n \nabla^{\alpha}(g f_i s_i^{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n d(g f_i) \otimes s_i^{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n (f_i dg + g df_i) \otimes s_i^{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n (f_i dg \otimes s_i^{\alpha} + g df_i \otimes s_i^{\alpha}) \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n f_i dg \otimes s_i^{\alpha} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n g df_i \otimes s_i^{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \sum_{i=1}^n dg \otimes f_i s_i^{\alpha} + g \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n df_i \otimes s_i^{\alpha} \right) \\
&\stackrel{(1.8)}{=} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \left(dg \otimes \sum_{i=1}^n f_i s_i^{\alpha} \right) + g \nabla(s) \\
&\stackrel{(1.7)}{=} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \left(dg \otimes s|_{U_{\alpha}} \right) + g \nabla(s) \\
&= \sum_{\alpha} dg \otimes \rho_{\alpha} s|_{U_{\alpha}} + g \nabla(s) \\
&= dg \otimes \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} s|_{U_{\alpha}} + g \nabla(s) \\
&= dg \otimes s + g \nabla(s)
\end{aligned}$$

■

Mantendo as notações do Lema anterior, podemos expressar ∇ no aberto U_{α} através de s_i^{α} como

$$\nabla(s_i^{\alpha}) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}, \quad (1.9)$$

onde θ_{ij}^{α} são as 1-formas de classe C^{∞} sobre U_{α} . Vamos olhar com mais detalhes como expressar essas formas θ_{ij}^{α} .

Como $\nabla(s_i^{\alpha}) \in \mathcal{A}^1(U_{\alpha}, E)$, podemos reescreve-lo como um produto tensorial $u \otimes v$. Sendo $\mathcal{A}^1(U_{\alpha}, E) = C^{\infty}(U, TX^{\mathbb{C}^*} \otimes E)$, então $u \in C^{\infty}(U_{\alpha}, TX^{\mathbb{C}^*})$ e $v \in C^{\infty}(U_{\alpha}, E)$ e,

utilizando a notação de (1.7), escrevemos $v = \sum_{j=1}^n f_j s_j^\alpha$, com $f_j \in \mathcal{A}^0(U_\alpha)$. Daí,

$$\begin{aligned} \nabla(s_i^\alpha) &= u \otimes v \\ &= u \otimes \sum_{j=1}^n f_j s_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n u \otimes f_j s_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n f_j u \otimes s_j^\alpha \end{aligned}$$

Desse modo, a matriz de 1-formas $\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$ é a matriz de ∇ em U_α , onde $\theta_{ij}^\alpha = f_j u$.

Nosso próximo objetivo é construir uma relação entre as matrizes da conexão ∇ em abertos U_α e U_β .

Sejam s^α e s^β referenciais sobre U_α e U_β , respectivamente. Assim, considerando $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, existe uma matriz inversível $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ tal que $s_i^\alpha = \sum_{j=1}^n g_{ij} s_j^\beta$. Isso nos permite definir $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\tilde{g}_{ij}]$, com

$$s_k^\beta = \sum_{l=1}^n \tilde{g}_{kl} s_l^\alpha. \quad (1.10)$$

Com essas notações, temos

$$\begin{aligned} \nabla(s_i^\alpha) &= \nabla\left(\sum_{j=1}^n g_{ij} s_j^\beta\right) = \sum_{j=1}^n \nabla(g_{ij} s_j^\beta) \\ &= \sum_{j=1}^n [dg_{ij} \otimes s_j^\beta + g_{ij} \nabla(s_j^\beta)] = \sum_{j=1}^n dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_{j=1}^n g_{ij} \nabla(s_j^\beta) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \sum_{j=1}^n dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum_{j=1}^n g_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta\right) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \sum_{j=1}^n \left[dg_{ij} \otimes \left(\sum_{l=1}^n \tilde{g}_{jl} s_l^\alpha\right) \right] + \sum_{j=1}^n g_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes s_k^\beta\right) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n dg_{ij} \otimes \tilde{g}_{jl} s_l^\alpha + \sum_{j=1}^n g_{ij} \left[\sum_{k=1}^n \theta_{jk}^\beta \otimes \left(\sum_{l=1}^n \tilde{g}_{kl} s_l^\alpha\right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n dg_{ij} \tilde{g}_{jl} \otimes s_l^\alpha + \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij} \theta_{jk}^\beta \tilde{g}_{kl} \right) \otimes s_l^\alpha \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n dg_{ij} \tilde{g}_{jl} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij} \theta_{jk}^\beta \tilde{g}_{kl} \right) \otimes s_l^\alpha \end{aligned}$$

Assim, se compararmos o resultado encontrado com (1.9), ou seja,

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \otimes s_l^\alpha,$$

concluimos que

$$\theta_{il}^\alpha = \sum_{j=1}^n dg_{ij} \tilde{g}_{jl} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ij} \theta_{jk}^\beta \tilde{g}_{kl},$$

onde a igualdade acima representa o seguinte produto matricial

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}$$

A partir do conceito de conexão, estenderemos tal noção definindo um operador que também possui caráter local.

Definição 1.2.4 Dada uma conexão ∇ em E , definimos

$$\bar{\nabla} : \mathcal{A}^1(X, E) \rightarrow \mathcal{A}^2(X, E)$$

onde, para $\omega \in \mathcal{A}^1(X)$ e $s \in \mathcal{A}^0(X, E)$, temos

$$\bar{\nabla}(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s) \quad (\text{regra de Leibniz})$$

Proposição 1.2.5 Seja $f \in \mathcal{A}^0(X)$. Então, a aplicação $\bar{\nabla}$ satisfaz a seguinte relação

$$\bar{\nabla}(f(\omega \otimes s)) = df \wedge (\omega \otimes s) + f \bar{\nabla}(\omega \otimes s)$$

Demonstração: Basta observarmos que

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}(f(\omega \otimes s)) &= \bar{\nabla}(f\omega \otimes s) = d(f\omega) \otimes s - (f\omega) \wedge \nabla(s) \\ &= (fd\omega + df \wedge \omega) \otimes s - (f\omega) \wedge \nabla(s) \\ &= (df \wedge \omega) \otimes s + f(d\omega \otimes s) - f(\omega \wedge \nabla(s)) \\ &= df \wedge (\omega \otimes s) + f(d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla(s)) \\ &= df \wedge (\omega \otimes s) + f \bar{\nabla}(\omega \otimes s) \end{aligned}$$

■

Definição 1.2.6 Definimos a **curvatura** de uma conexão ∇ por

$$K_\nabla = \bar{\nabla} \circ \nabla$$

A curvatura de uma conexão também é linear, o que é verificado no resultado abaixo.

Proposição 1.2.7 A curvatura K_∇ de uma conexão é uma aplicação $\mathcal{A}^0(X)$ -linear.

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{A}^0(X)$ e $s \in \mathcal{A}^0(X, E)$. Dessa forma, se escrevermos $\nabla(s) = \omega \otimes v \in \mathcal{A}^1(X, E)$, temos

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(fs) &= \bar{\nabla} \circ \nabla(fs) = \bar{\nabla}(df \otimes s + f\nabla(s)) \\ &= \bar{\nabla}(df \otimes s) + \bar{\nabla}(f\nabla(s)) \\ &= d^2f \otimes s - df \wedge \nabla(s) + \bar{\nabla}(f(\omega \otimes v)) \\ &= d^2f \otimes s - df \wedge \nabla(s) + df \wedge (\omega \otimes v) + f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= d^2f \otimes s + f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos que $df \wedge \nabla(s) = df \wedge (\omega \otimes v)$. Antes de concluirmos, note que

$$\begin{aligned} d^2f &= d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i\right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} dz_j \wedge dz_i, \end{aligned}$$

e, sendo f de classe C^∞ , então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \quad \text{e} \quad dz_j \wedge dz_i = -dz_i \wedge dz_j,$$

ou seja, $d^2f = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(fs) &= d^2f \otimes s + f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= f\bar{\nabla}(\omega \otimes v) \\ &= f\bar{\nabla}(\nabla(s)) = fK_{\nabla}(s) \end{aligned}$$

■

Ainda sobre a curvatura de uma conexão, a próxima Proposição nos dá outro importante resultado sobre K_{∇} :

Proposição 1.2.8 *O valor de K_{∇} em um ponto $x \in X$ depende apenas do valor da seção s no ponto x , independentemente da seção tomada.*

Demonstração: Seja $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha)$ um referencial local de E em U_α , com $x \in U_\alpha$. Consideremos também s e s' seções de E sobre U_α , tais que $s(x) = s'(x)$.

Então, como $s - s' \in \mathcal{A}^0(U_\alpha, E)$, podemos escrever

$$s - s' = \sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha$$

e como $s(x) - s'(x) = 0$, então $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Assim, utilizando o fato de K_{∇} ser linear, temos

$$K_{\nabla}(s - s') = K_{\nabla}\left(\sum_{i=1}^n f_i s_i^\alpha\right) = \sum_{i=1}^n f_i K_{\nabla}(s_i^\alpha),$$

ou seja,

$$K_{\nabla}(s)(x) - K_{\nabla}(s')(x) = K_{\nabla}(s - s')(x) = \sum_{i=1}^n f_i K_{\nabla}(s_i^{\alpha}(x)) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot K_{\nabla}(s_i^{\alpha}(x)) = 0$$

e, portanto,

$$K_{\nabla}(s)(x) = K_{\nabla}(s')(x).$$

■

Podemos expressar a curvatura de uma conexão através de uma matriz, de maneira análoga como fizemos com a conexão. Tomando novamente $s^{\alpha} = (s_1^{\alpha}, \dots, s_n^{\alpha})$ referencial local para E sobre U_{α} , temos

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(s_i^{\alpha}) &= \overline{\nabla}(\nabla(s_i^{\alpha})) \\ &= \overline{\nabla}\left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha}\right) \\ &= \sum_{l=1}^n \overline{\nabla}(\theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha}) \\ &= \sum_{l=1}^n [d\theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha} - \theta_{il}^{\alpha} \wedge \nabla(s_l^{\alpha})] \\ &= \sum_{l=1}^n d\theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha} - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^{\alpha} \wedge \nabla(s_l^{\alpha}) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \sum_{l=1}^n d\theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha} - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^{\alpha} \wedge \left(\sum_{j=1}^n \theta_{lj}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Agora, reescrevendo os índices do primeiro somatório, temos

$$\begin{aligned} K_{\nabla}(s_i^{\alpha}) &= \sum_{l=1}^n d\theta_{il}^{\alpha} \otimes s_l^{\alpha} - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^{\alpha} \wedge \left(\sum_{j=1}^n \theta_{lj}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n d\theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha} - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^{\alpha} \wedge \left(\sum_{j=1}^n \theta_{lj}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n d\theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha} - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (\theta_{il}^{\alpha} \wedge \theta_{lj}^{\alpha}) \otimes s_j^{\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(d\theta_{ij}^{\alpha} - \sum_{l=1}^n (\theta_{il}^{\alpha} \wedge \theta_{lj}^{\alpha})\right) \otimes s_j^{\alpha} \end{aligned}$$

Ou seja, escrevemos

$$K_{\nabla}(s_i^{\alpha}) = \sum_{j=1}^n \Theta_{ij}^{\alpha} \otimes s_j^{\alpha}$$

onde

$$\Theta_{ij}^\alpha = d\theta_{ij}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha$$

Assim, a matriz $\Theta^\alpha = [\Theta_{ij}^\alpha]$, com $\Theta_{ij}^\alpha = d\theta_{ij}^\alpha - \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha$ é a matriz de K_∇ em U_α . Note que seus coeficientes são 2-formas em U_α e, dessa forma, concluímos que

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha, \quad (1.11)$$

onde θ^α representa a matriz da conexão ∇ em U_α .

Novamente, podemos relacionar matrizes Θ^α e Θ^β de curvaturas em U_α e U_β , respectivamente. Tomando s^α e s^β referenciais locais sobre os abertos U_α e U_β e as matrizes $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$ e $g_{\alpha\beta}^{-1} = [\tilde{g}_{ij}]$, tais que

$$s_i^\alpha = \sum_{j=1}^n g_{ij} s_j^\beta \quad \text{e} \quad s_k^\beta = \sum_{l=1}^n \tilde{g}_{kl} s_l^\alpha$$

como já visto, então é válido, em $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} K_\nabla(s_i^\alpha) &= K_\nabla\left(\sum_{l=1}^n g_{il} s_l^\beta\right) = \sum_{l=1}^n g_{il} K_\nabla(s_l^\beta) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \sum_{l=1}^n g_{il} \sum_{k=1}^n \theta_{lk}^\beta \otimes s_k^\beta \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (g_{il} \theta_{lk}^\beta \otimes s_k^\beta) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left[g_{il} \theta_{lk}^\beta \otimes \left(\sum_{j=1}^n \tilde{g}_{kj} s_j^\alpha \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{il} \theta_{lk}^\beta \tilde{g}_{kj} \otimes s_j^\alpha \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n (g_{il} \theta_{lk}^\beta \tilde{g}_{kj}) \right] \otimes s_j^\alpha \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Theta_{ij}^\alpha = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n g_{il} \theta_{lk}^\beta \tilde{g}_{kj}$$

que, escrevendo da forma matricial, se expressa como

$$\Theta = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (1.12)$$

1.2.2 Polinômios Invariantes

Para essa seção, considere $M(n, \mathbb{C})$ sendo a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{C} .

Definição 1.2.9 *Um polinômio invariante sobre $M(n, \mathbb{C})$ é uma função*

$$P : M(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

que é polinomial nas entradas de uma matriz e satisfaz

$$P(g^{-1}Ag) = P(A),$$

para todo $A \in M(n, \mathbb{C})$ e para todo $g \in GL(n, \mathbb{C})$.

O conjunto de polinômios invariantes sobre $M(n, \mathbb{C})$ também é uma álgebra, que denotamos por $I(n, \mathbb{C})$.

A seguinte proposição nos dá uma condição equivalente para trabalharmos com polinômios invariantes.

Proposição 1.2.10 *São equivalentes:*

- (i) $P(g^{-1}Ag) = P(A)$, para todo $A \in M(n, \mathbb{C})$ e para todo $g \in GL(n, \mathbb{C})$;
- (ii) $P(XY) = P(YX)$, para todos $X, Y \in M(n, \mathbb{C})$.

Demonstração:

- (ii) \Rightarrow (i) Sejam $A \in M(n, \mathbb{C})$ e $g \in GL(n, \mathbb{C})$. Tomando $X = g^{-1}A$ e $Y = g$, da condição (ii), temos

$$\begin{aligned} P(XY) &= P(YX) \\ \Rightarrow P(g^{-1}Ag) &= P(gg^{-1}A) = P(\text{Id} \cdot A) = P(A), \end{aligned}$$

onde Id é a matriz identidade $n \times n$;

- (i) \Rightarrow (ii) Vamos separar essa demonstração em dois casos.

Inicialmente, considere $Y \in GL(n, \mathbb{C}) \subset M(n, \mathbb{C})$. Então, tomando $g = Y$ e $A = YX$ na condição (i), então

$$\begin{aligned} P(A) &= P(g^{-1}Ag) \\ \Rightarrow P(YX) &= P(Y^{-1}(YX)Y) = P(\text{Id} \cdot XY) = P(XY). \end{aligned}$$

Para o caso em que $X \in GL(n, \mathbb{C})$, a demonstração é análoga.

Suponhamos agora $X, Y \in M(n, \mathbb{C}) \setminus GL(n, \mathbb{C})$.

Inicialmente, lembramos que o conjunto $GL(n, \mathbb{C})$ é denso em $M(n, \mathbb{C})$, ou seja, dado $r > 0$, existe uma matriz $X_0 \in B(X, r)$ tal que $X_0 \in GL(n, \mathbb{C})$.

Mais ainda, sendo P polinomial, então P é contínua. Em particular, também são contínuas as aplicações

$$\begin{aligned} W \in M(n, \mathbb{C}) &\mapsto P(WY) \\ W \in M(n, \mathbb{C}) &\mapsto P(YW) \end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda matriz $W \in B(X, \delta)$, então

$$\begin{aligned} |P(XY) - P(WY)| &< \frac{\varepsilon}{2} \\ |P(YX) - P(YW)| &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Assim, tomando $r = \delta$, existe $W_0 \in B(X, \delta)$ tal que $W_0 \in GL(n, \mathbb{C})$ e, do caso anterior, $P(W_0Y) = P(YW_0)$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, temos

$$\begin{aligned} |P(XY) - P(YX)| &= |P(XY) - P(W_0Y) + P(YW_0) - P(YX)| \\ &\leq |P(XY) - P(W_0Y)| + |P(YW_0) - P(YX)| \\ &\stackrel{(1.13)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ou seja, $|P(XY) - P(YX)| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Logo, $|P(XY) - P(YX)| = 0 \Rightarrow P(XY) = P(YX)$.

■

Abaixo, daremos alguns exemplos de polinômios invariantes

Exemplo 1.2.11 Em $M(n, \mathbb{C})$ podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \det : M(n, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

que é um polinômio invariante, visto que já é conhecida a relação

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA).$$

O próximo exemplo nos dará uma construção que utilizaremos novamente ao final dessa seção.

Exemplo 1.2.12 Sejam $A \in M(n, \mathbb{C})$ e Id a matriz identidade $n \times n$ em $M(n, \mathbb{C})$. Os polinômios C_i , definidos por

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i,$$

são polinômios invariantes.

De fato, dada $g \in GL(n, \mathbb{C})$, é válida a relação $\det g^{-1} = \frac{1}{\det g}$, visto que $\det g \neq 0$.

Mais ainda, note que

$$\begin{aligned}
\det(tI + A) &= \det(g^{-1}) \cdot \det(tI + A) \cdot \det g \\
&= \det[g^{-1}(tI + A)g] \\
&= \det(g^{-1}tIg + g^{-1}Ag) \\
&= \det(t \cdot g^{-1}Ig + g^{-1}Ag) \\
&= \det(tI + g^{-1}Ag)
\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\det(tI + A) &= \det(tI + g^{-1}Ag) \\
\Rightarrow \sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i &= \sum_{i=0}^n C_{n-i}(g^{-1}Ag)t^i \\
\Rightarrow C_{n-i}(A) &= C_{n-i}(g^{-1}Ag), \quad i = 0, \dots, n
\end{aligned}$$

onde, no último passo, utilizamos igualdade de polinômios. Observe ainda que o termo $\det(tI + A)$ nos leva diretamente ao cálculo de autovalores de A .

Consideramos $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial complexo C^∞ de posto n , ∇ uma conexão em E e K_∇ a curvatura de ∇ . Em um aberto trivializador U_α , K_∇ é dado por uma matriz $n \times n$ de 2-formas Θ^α , como visto anteriormente. Em $U_{\alpha\beta}$, de (1.12), temos

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1},$$

onde $g_{\alpha\beta} \in GL(n, \mathbb{C})$. Assim, se P é um polinômio invariante,

$$P(\Theta^\alpha) = P(g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta)$$

Com isso, se P tem grau k , definindo

$$P(K_\nabla)|_{U_\alpha} = P(\Theta^\alpha)$$

temos que $P(K_\nabla)$ é uma 2-forma global em X , independente das trivializações.

Lema 1.2.13 *Se P é um polinômio invariante, então $dP(K_\nabla) = 0$.*

Demonstração: Seja P um polinômio invariante. Escrevendo $P(A) = P([a_{ij}])$, considere $B = \left[\frac{\partial P}{\partial a_{ij}} \right]$ a matriz de derivadas de P . Assim, escrevemos a derivada de P como

$$dP([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{ij}} da_{ij} \quad (1.14)$$

Mostraremos duas identidades:

- $dP(A) = \text{tr}(B^T dA)$

Como os termos da matriz $B^T dA$ podem ser expressos por $(B^T dA)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik}^T da_{kj}$, temos então

$$\begin{aligned} \text{tr}(B^T dA) &= \sum_{i=1}^n (B^T dA)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n B_{ik}^T da_{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial P}{\partial a_{ki}} \right) da_{ki} \\ &\stackrel{(1.14)}{=} dP([a_{ij}]) = dP(A) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\text{tr}(B^T dA) = dP(A) \quad (1.15)$$

- $AB^T = B^T A$

Inicialmente, considere a matriz $E_{ji} = [e_{rs}]$, onde $e_{rs} = \delta_{jr}\delta_{is}$ - aqui, as funções δ representam o *delta de Kronecker* -, ou seja

$$e_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = j \text{ e } s = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Isso nos diz que E_{ji} tem entrada 1 na posição (i, j) e 0 nas demais. Com isso

$$(E_{ji}A)_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq j \\ a_{is} & \text{se } r = j \end{cases} \quad \text{e} \quad (AE_{ji})_{rs} = \begin{cases} 0 & \text{se } s \neq i \\ a_{rj} & \text{se } s = i \end{cases} \quad (1.16)$$

Agora, como P é invariante, da Proposição 1.2.10, vale

$$P((I + tE_{ji})A) = P(A(I + tE_{ji}))$$

e derivando essa expressão em relação a t , temos

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (E_{ji}A)_{rs} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial P}{\partial a_{rs}} (AE_{ji})_{rs}$$

Agora, substituindo (1.16), temos

$$\sum_{s=1}^n a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}} = \sum_{r=1}^n a_{rj} \frac{\partial P}{\partial a_{ri}}$$

Por fim, como $(AB^T)_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \frac{\partial P}{\partial a_{js}}$ e $(B^T A)_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{rj} \frac{\partial P}{\partial a_{ri}}$, segue o resultado:

$$AB^T = B^T A \quad (1.17)$$

Tomamos agora U_α um aberto trivializador de E e sejam θ^α e Θ^α as matrizes da conexão ∇ e da curvatura K_∇ , respectivamente (ambos em relação a U_α). Então, escrevemos

$$B = \left[\frac{\partial P}{\partial \Theta_{ij}^\alpha} \right]$$

onde as entradas da matriz B são formas de grau par. De (1.15), temos

$$dP(\Theta^\alpha) = \text{tr}(B^T \wedge d\Theta^\alpha) \quad (1.18)$$

Mais ainda, estudando o termo $B^T \wedge d\Theta^\alpha$, temos

$$\begin{aligned} d\Theta_{ij}^\alpha &= d\left(d\theta_{ij}^\alpha - \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha\right) \\ &= d(d\theta_{ij}^\alpha) - d\left(\sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha\right) \\ &= -d\left(\sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha\right) \\ &= -\sum_{k=1}^n d(\theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha) \\ &= -\sum_{k=1}^n (d\theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha - \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha) \\ &= -\sum_{k=1}^n d\theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= -\sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha + \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha\right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\ &= -\sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha\right) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha\right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \end{aligned}$$

Note que podemos reescrever a segunda parcela acima como

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha\right) \wedge \theta_{kj}^\alpha \\ &= \sum_{k=1}^n \theta_{kj}^\alpha \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha\right) \\ &= \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \left(\sum_{k=1}^n \theta_{lk}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta_{kl}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha\right) \end{aligned}$$

visto que, na última igualdade, trocamos apenas os parâmetros k e l . Assim,

$$\begin{aligned}
d\Theta_{ij}^\alpha &= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha - \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \left(\sum_{l=1}^n \theta_{kl}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha \right) + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge d\theta_{kj}^\alpha \\
&= - \sum_{k=1}^n \left(d\theta_{ik}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{il}^\alpha \wedge \theta_{lk}^\alpha \right) \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \left(d\theta_{kj}^\alpha - \sum_{l=1}^n \theta_{kl}^\alpha \wedge \theta_{lj}^\alpha \right) \\
&= - \sum_{k=1}^n \Theta_{ik}^\alpha \wedge \theta_{kj}^\alpha + \sum_{k=1}^n \theta_{ik}^\alpha \wedge \Theta_{kj}^\alpha
\end{aligned}$$

que, reescrita na forma matricial, é dada por

$$d\Theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha$$

e é chamada *identidade de Bianchi*. Assim, substituindo esse resultado em (1.18), temos

$$\begin{aligned}
dP(\Theta^\alpha) &= \text{tr}(B^T \wedge d\Theta^\alpha) \\
&= \text{tr}(B^T \wedge (\theta^\alpha \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)) \\
&= \text{tr}[(B^T \wedge \theta^\alpha) \wedge \Theta^\alpha - \Theta^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha)] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [(B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik} \wedge \Theta_{ki}^\alpha - \Theta_{ki}^\alpha \wedge (B^T \wedge \theta^\alpha)_{ik}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois Θ_{ki}^α é uma 2-forma, que comuta com qualquer outra forma. Logo, $dP(K_\nabla) = 0$. ■

1.2.3 Classes Características

Na seção anterior, vimos que, se P é um polinômio invariante de grau k , então $P(K_\nabla)$ define uma classe em $H_{DR}^{2k}(X, \mathbb{C})$.

Nosso objetivo é mostrar que tal classe depende apenas da classe de isomorfismo de E , e não da conexão ∇ . Para isso, utilizaremos uma operação na comologia de De Rham chamada *integração ao longo das fibras*, que descreveremos a seguir.

Seja $X \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{p} X$ o fibrado trivial. Localmente, uma forma $C^\infty\omega$ sobre $X \times \mathbb{R}^q$ se escreve como uma combinação linear de formas dos seguintes tipos:

- Tipo (I) : $\omega = f(x^\alpha, t) dt_I \wedge dx_j^\alpha$, com $|I| < q$
- Tipo (II) : $\omega = f(x^\alpha, t) dt_{I_q} \wedge dx_j^\alpha = f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha$

onde $t = (t_1, \dots, t_q)$, $dt_I = dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_r}$, $i_1 < \dots < i_r$, $|I| = r$, $dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q$ determina a orientação de \mathbb{R}^q e x^α são as coordenadas locais de X .

Definimos então o operador linear $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(X \times \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathcal{A}^{*-q}(X)$ por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \wp_*^{\Delta^q} \omega = 0 & \text{se } \omega \text{ é do Tipo (I)} \\ \wp_*^{\Delta^q} \omega = \left(\int_{\Delta^q} f(x^\alpha, t) dt_{I_q} \right) dx_j^\alpha & \text{se } \omega \text{ é do Tipo (II)} \end{array} \right.$$

onde Δ^q é o q -simplexo padrão, dado por

$$\Delta^q = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

Dadas as notações, enunciamos a seguinte Proposição:

Proposição 1.2.14 *Seja $i : \partial(X \times \Delta^q) \rightarrow X \times \Delta^q$ o operador inclusão. Então*

$$\wp_*^{\Delta^q} \circ d + (-1)^{q+1} d \circ \wp_*^{\Delta^q} = \wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^* \quad (1.19)$$

Demonstração: Separemos a demonstração em dois casos.

(i) ω é do Tipo (I);

Seja $\omega = f(x^\alpha, t) dt_I \wedge dx_j^\alpha$, com $|I| < q - 1$. Nesse caso, $d(\wp_*^{\Delta^q} \omega) = d(0) = 0$ e $\wp_*^{\Delta^q}(d\omega) = 0$, já que $d\omega$, já que $d\omega$ também é uma forma do Tipo (I).

Mais ainda, como $i^*\omega$ também é do Tipo (I), então $\wp_*^{\partial\Delta^q} \circ i^*(\omega) = 0$, e daí, o resultado também é válido, visto que a igualdade (1.19) se torna nula.

Agora, suponhamos $\omega = f(x^\alpha, t) dt_I \wedge dx_j^\alpha$, com $|I| = q - 1$ e, digamos, $dt_I = dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_i} \wedge \dots \wedge dt_q$ - aqui $\widehat{dt_i}$ implica que dt_i não está no produto exterior, já que $|I| = q - 1$. Assim, sendo $dt_l \wedge dt_I \wedge dx_j^\alpha = 0$ quando $l \neq i$, temos

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k \frac{\partial d}{\partial x_k^\alpha} dx_k^\alpha \wedge dt_I \wedge dx_j^\alpha + \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial t_l} dt_l \wedge dt_I \wedge dx_j^\alpha \\ &= \sum_k \frac{\partial d}{\partial x_k^\alpha} dx_k^\alpha \wedge dt_I \wedge dx_j^\alpha + \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i \wedge dt_I \wedge dx_j^\alpha \\ &= (-1)^{q-1} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_I \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha + (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_{I_q} \wedge dx_j^\alpha \end{aligned}$$

Como cada $\frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_I \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha$ é uma forma do Tipo (I) (ou seja, se anula quando aplicamos $\wp_*^{\Delta^q}$), temos

$$\begin{aligned} \wp_*^{\Delta^q}(d\omega) &= \wp_*^{\Delta^q}((-1)^{q-1} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_I \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha + (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_{I_q} \wedge dx_j^\alpha) \\ &= \wp_*^{\Delta^q}((-1)^{q-1} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_I \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha) + \wp_*^{\Delta^q}((-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_{I_q} \wedge dx_j^\alpha) \\ &= \wp_*^{\Delta^q}((-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_{I_q} \wedge dx_j^\alpha) \\ &= (-1)^{i-1} \left(\int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_i \right) dx_j^\alpha \quad (1.20) \end{aligned}$$

Agora, da versão combinatória do Teorema de Stokes, (vista com mais detalhes em

[18]), temos

$$(-1)^{i-1} \int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_i = \sum_{j=0}^q (-1)^j \int_{\Delta^q(j)} f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_q,$$

onde $\Delta^q(j)$ é a j -ésima face de Δ^q .

Assim, retornando a (1.20),

$$\wp_*^{\Delta^q}(d\omega) = \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \int_{\Delta^q(j)} f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dt_j} \wedge \dots \wedge dt_q \right) dx_j^\alpha$$

que é exatamente $\wp_*^{\partial\Delta^q}(i^*\omega)$, visto que $\wp_*^{\partial\Delta^q}$ e $\wp_*^{\Delta^q}$ diferem apenas em suas regiões de integração, o que nos dá o resultado (1.19), já que $\wp_*^{\Delta^q}(\omega) = 0$.

(ii) ω é do Tipo (II);

Seja agora $\omega = f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha$. Assim, $i^*\omega = 0$, o que anula o lado direito da igualdade (1.19). Assim, basta mostrar que

$$\wp_*^{\Delta^q} \circ d = (-1)^q d \circ \wp_*^{\Delta^q} \quad (1.21)$$

Utilizando novamente que $dt_l \wedge dt_l \wedge dx_j^\alpha = 0$, temos

$$\begin{aligned} d\omega &= d(f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha) \\ &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dx_k^\alpha \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha + \sum_{l=1}^q \frac{\partial f}{\partial t_l} dt_l \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha \\ &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dx_k^\alpha \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_j^\alpha \\ &= (-1)^q \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha \end{aligned}$$

e com isso,

$$\begin{aligned} \wp_*^{\Delta^q}(d\omega) &= \wp_*^{\Delta^q} \left((-1)^q \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha \right) \\ &= \left(\int_{\Delta^q} (-1)^q \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \right) dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha \\ &= (-1)^q \sum_k \left(\int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \right) dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha \quad (1.22) \end{aligned}$$

E como

$$\begin{aligned} (-1)^q d(\wp_*^{\Delta^q} \omega) &= (-1)^q d\left(\int_{\Delta^q} f(x^\alpha, t) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q\right) dx_j^\alpha \\ &= (-1)^q \sum_k \left(\int_{\Delta^q} \frac{\partial f}{\partial x_k^\alpha} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q\right) dx_k^\alpha \wedge dx_j^\alpha \end{aligned}$$

então é válido (1.21), o que encerra a demonstração.

■

Iremos recorrer aqui a algumas definições que já apresentamos sobre fibrados vetoriais.

Considere $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial complexo, de posto n , onde X é uma variedade complexa. Então o fibrado vetorial

$$E \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\pi \times \text{id}} X \times \mathbb{R}^q$$

é induzido pelo fibrado (E, π) , e suas fibras tem a mesma dimensão das fibras de E . Se tomarmos uma cobertura trivializadora $\{U_\alpha\}$, comum a E e a $TX^{\mathbb{C}}$, e um referencial local, temos que as seções de $E \times \mathbb{R}^q|_{U_\alpha} \approx U_\alpha \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{C}^n$ podem ser expressas como

$$s(x^\alpha, t) = \sum_{i=1}^n f(x^\alpha, t) s_i^\alpha,$$

onde $t = (t_1, \dots, t_q)$.

Agora tome $q + 1$ conexões $\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q$ sobre E e considere a soma convexa

$$\nabla^{0,1,\dots,q} = (1 - t_1 - t_2 - \dots - t_q) \nabla^0 + t_1 \nabla^1 + t_2 \nabla^2 + \dots + t_q \nabla^q$$

Desse modo, $\nabla^{0,1,\dots,q}$ define uma conexão sobre $E \times \mathbb{R}^q$, cuja matriz sobre U_α é dada por

$$\theta^{0,1,\dots,q,\alpha} = (1 - t_1 - t_2 - \dots - t_q) \theta^{0,\alpha} + t_1 \theta^{1,\alpha} + t_2 \theta^{2,\alpha} + \dots + t_q \theta^{q,\alpha}$$

onde cada $\theta^{i,\alpha}$ é a matriz da conexão ∇^i , $i = 0, 1, \dots, q$, em U_α . Assim, de (1.11), a curvatura $K_{\nabla^{0,1,\dots,q}}$, em U_α , é dada por,

$$\Theta^{0,1,\dots,\alpha} = d\theta^{0,1,\dots,\alpha} - \theta^{0,1,\dots,\alpha} \wedge \theta^{0,1,\dots,\alpha}$$

Definimos então a aplicação $\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) : I(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{A}^*(X)$ da seguinte forma

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\nabla^0)(P) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\text{gr} P} \cdot P(K_{\nabla^0}) & \text{se } q = 0 \\ \mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)(P) = (-1)^{[q/2]} \wp_*^{\Delta^q} (\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\dots,q})) & \text{se } q > 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

onde $\text{gr } P$ denota o grau de P (se $q = 0$) e $\wp_*^{\Delta^q} : \mathcal{A}^*(X \times \mathbb{R}^q) \rightarrow \mathcal{A}^{*-q}(X)$ é a integração ao longo das fibras.

No próximo exemplo, vamos analisar a aplicação \mathcal{P} para o caso em que $q = 1$.

Exemplo 1.2.15 Na definição da aplicação $\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$, quando $q = 1$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P) &= \wp_*^{\Delta^1}(\mathcal{P}(\nabla^{0,1,\dots,q})) \\ &= \wp_*^{\Delta^1} \left(\left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} P(K_{\nabla^{0,1}}) \right) \end{aligned}$$

pois $\nabla^{0,1}$ é uma única conexão, e então vale (1.23) para $q = 0$.

Do Lema 1.2.13, vale

$$dP(K_{\nabla^{0,1}}) = 0, \quad (1.24)$$

já que P é um polinômio invariante. Mais ainda,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) &= d \left(\wp_*^{\Delta^1} \left(\left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} P(K_{\nabla^{0,1}}) \right) \right) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} d(\wp_*^{\Delta^1}(P(K_{\nabla^{0,1}}))) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Utilizando agora a Proposição 1.2.14, com $q = 1$, temos

$$\begin{aligned} \wp_*^{\Delta^1} \circ d + (-1)^2 d \circ \wp_*^{\Delta^1} &= \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* \\ \implies \wp_*^{\Delta^1} \circ d(P(K_{\nabla^{0,1}})) + d \circ \wp_*^{\Delta^1}(P(K_{\nabla^{0,1}})) &= \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*(P(K_{\nabla^{0,1}})) \end{aligned}$$

Assim, unindo os resultados (1.24) e (1.25), temos

$$\begin{aligned} d \circ \wp_*^{\Delta^1}(P(K_{\nabla^{0,1}})) &= \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*(P(K_{\nabla^{0,1}})) \\ \implies \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} d \circ \wp_*^{\Delta^1}(P(K_{\nabla^{0,1}})) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*(P(K_{\nabla^{0,1}})) \\ \implies d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} \wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*(P(K_{\nabla^{0,1}})) \end{aligned}$$

Agora, da versão combinatória do Teorema de Stokes,

$$\wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^* = \sum_{j=0}^1 (-1)^j \wp_*^{\Delta^1(j)} = i_0^* - i_1^*$$

onde $i_j = X \rightarrow X \times [0, 1]$ é a inclusão, dada por $i_j(x) = (x, j)$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P)) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} (\wp_*^{\partial\Delta^1} \circ i^*)(P(K_{\nabla^{0,1}})) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} (i_0^*(P(K_{\nabla^{0,1}})) - i_1^*(P(K_{\nabla^{0,1}}))) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{gr P} (P(K_{\nabla^0}) - P(K_{\nabla^1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\text{gr } P} P(K_{\nabla^0}) - \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\text{gr } P} P(K_{\nabla^1}) \\
&= \mathcal{P}(\nabla^0)(P) - \mathcal{P}(\nabla^1)(P)
\end{aligned}$$

Tais cálculos nos mostram que as formas $P(K_{\nabla^0})$ e $P(K_{\nabla^1})$ diferem, a menos de uma constante $\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\text{gr } P}$, da forma $d(\mathcal{P}(\nabla^0, \nabla^1)(P))$. Mais ainda, a classe $[P(K_{\nabla})]$ depende apenas da classe de isomorfismo (C^∞) de E , e não da conexão ∇ em E .

Em outras palavras, vale o resultado a seguir

Proposição 1.2.16 *A classe $[P(K_{\nabla})] = [P(E)] \in H_{DR}^*(X, \mathbb{C})$ independe da conexão ∇ sobre E . Tal classe é chamada classe característica de E .*

Assim, podemos resumir os estudos dessa seção da seguinte forma: sendo $I(n, \mathbb{C})$ a álgebra graduada de polinômios invariantes e $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial complexo de posto n , obtivemos então um homomorfismo de álgebras, dado por

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{W} : I(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H_{DR}^{2*}(X, \mathbb{C}) \\
P & \longmapsto & [P(K)]
\end{array}$$

onde K é a curvatura de uma conexão qualquer em E . \mathcal{W} é chamado *homomorfismo de Weil*.

Finalmente, podemos enunciar a importante definição a seguir:

Definição 1.2.17 *(i) Sejam $C_i, i = 1, \dots, n$ polinômios simétricos elementares de autovalores de uma matriz $n \times n$. As **formas de Chern** de uma curvatura K_{∇} - essa associada a uma conexão ∇ sobre E - são dadas por*

$$c_i(K_{\nabla}) = C_i\left(\frac{i}{2\pi}K_{\nabla}\right)$$

*(ii) As **classes de Chern** de E são dadas por*

$$\begin{aligned}
&- c_0(E) = 1; \\
&- c_i(E) = \left[C_i\left(\frac{i}{2\pi}K\right) \right] \in H_{DR}^{2i}(X, \mathbb{C}), i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

A soma $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$ é chamada de classe de Chern total de E e $c_n(E)$ é a classe Top de Chern de E .

Observação 1.2.18 *(1) A definição acima possui um pequeno abuso de notação, visto que as classes de Chern c_i são, na verdade, definidas em $H^{2i}(X, \mathbb{Z})$. Porém, essencialmente esses objetos são os memos - segundo a Teoria de Chern-Weil;*

(2) Se X é uma variedade complexa, $c_i(X)$ denota a i -ésima classe de Chern do fibrado tangente holomorfo de X , já definido no Exemplo 1.1.4.

1.2.4 Propriedades das Classes de Chern

Fórmula de Whitney do Produto

Sejam $E \xrightarrow{\pi_E} X$ e $F \xrightarrow{\pi_F} X$ fibrados vetoriais com conexões ∇_E e ∇_F , respectivamente. Assim, tomamos $[\theta_E]$ e $[\theta_F]$ as matrizes de suas respectivas conexões no aberto U_α . Assim, o fibrado $E \oplus F$ assume naturalmente uma conexão $\nabla_{E \oplus F} = \nabla_E \oplus \nabla_F$, cuja matriz $\theta_{E \oplus F}^\alpha = \theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha$ também pode ser expressa por

$$[\theta_{E \oplus F}^\alpha] = \begin{bmatrix} [\theta_E^\alpha] & 0 \\ 0 & [\theta_F^\alpha] \end{bmatrix}$$

da construção já feita para o fibrado soma direta. Assim, sua matriz de curvatura $K_{\nabla_{E \oplus F}}$, de (1.11), se expressa como

$$\begin{aligned} \Theta_{E \oplus F}^\alpha &= d(\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) - (\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) \wedge (\theta_E^\alpha \oplus \theta_F^\alpha) \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - ((\theta_E^\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \theta_F^\alpha)) \wedge ((\theta_E^\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \theta_F^\alpha)) \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - [(\theta_E^\alpha \oplus 0) \wedge (\theta_E^\alpha \oplus 0) + (\theta_E^\alpha \oplus 0) \wedge (0 \oplus \theta_F^\alpha) \\ &\quad + (0 \oplus \theta_F^\alpha) \wedge (\theta_E^\alpha \oplus 0) + (0 \oplus \theta_F^\alpha) \wedge (0 \oplus \theta_F^\alpha)] \\ &= d\theta_E^\alpha \oplus d\theta_F^\alpha - [(\theta_E^\alpha \wedge \theta_E^\alpha) \oplus 0 + 0 \oplus 0 + 0 \oplus 0 + 0 \oplus (\theta_F^\alpha \wedge \theta_F^\alpha)] \\ &= (d\theta_E^\alpha - \theta_E^\alpha \wedge \theta_E^\alpha) \oplus (d\theta_F^\alpha - \theta_F^\alpha \wedge \theta_F^\alpha) \\ &= \Theta_E^\alpha \oplus \Theta_F^\alpha \end{aligned}$$

sendo Θ_E^α e Θ_F^α as matrizes das curvaturas K_{∇_E} e K_{∇_F} , respectivamente.

Representando na forma matricial e, já pensando nas formas de Chern, temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} [\Theta_{E \oplus F}^\alpha] &= \begin{bmatrix} [\Theta_E^\alpha] & 0 \\ 0 & [\Theta_F^\alpha] \end{bmatrix} \Rightarrow \det(tI + \Theta_{E \oplus F}^\alpha) = \det(tI + \Theta_E^\alpha) \cdot \det(tI + \Theta_F^\alpha) \\ &= \left(\sum_{i=0}^n C_{n-i}(\Theta_E^\alpha) t^i \right) \left(\sum_{i=0}^n C_{n-i}(\Theta_F^\alpha) t^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} C'_{n-i}(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) t^i, \end{aligned}$$

onde

$$C'_k(\Theta_{E \oplus F}^\alpha) = \sum_{j=0}^k C_{k-j}(\Theta_E^\alpha) C_j(\Theta_F^\alpha)$$

Assim, as classes de Chern de $E \oplus F$ são dadas por

$$\begin{aligned} c_1(E \oplus F) &= c_1(E) + c_1(F) \\ c_2(E \oplus F) &= c_2(E) + c_1(E)c_1(F) + c_2(F) \\ &\vdots \\ c_k(E \oplus F) &= \sum_{j=0}^k c_{k-j}(E)c_j(F) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Observe que tal relação é a mesma que é satisfeita no produto de formas. Por fim, a classe total de Chern de $E \oplus F$ é dada por

$$\begin{aligned} c(E \oplus F) &= 1 + c_1(E \oplus F) + c_2(E \oplus F) + \dots + c_k(E \oplus F) \\ &= \sum_{r=0}^{m+n} \sum_{j=0}^r c_{r-j}(E)c_j(F) \\ &= (c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_n(E))(c_0(F) + c_1(F) + \dots + c_m(F)) \\ &= c(E)c(F) \end{aligned}$$

Portanto,

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F) \quad (1.27)$$

Classes de Chern do Fibrado Dual

Sejam $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de posto n e $E^* \xrightarrow{\tilde{\pi}} X$ o fibrado dual de E .

Como já vimos, se $\{g_{\alpha\beta}\}$ são os cociclos de transição de E , então $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ são os de E^* , com $\psi_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta}^{-1})$. Dada uma conexão ∇ sobre E , suas matrizes satisfazem

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \quad (1.28)$$

como já visto anteriormente. Transpondo essa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} (\theta^\alpha)^T &= [dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}]^T \\ &= [dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}]^T + [g_{\alpha\beta}\theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}]^T \\ &= (g_{\alpha\beta}^{-1})^T (dg_{\alpha\beta})^T + (g_{\alpha\beta}^{-1})^T (\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ &= (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (dg_{\alpha\beta})^T + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1} (\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \end{aligned}$$

Como $d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1}) = -(g_{\alpha\beta}^T)^{-1} dg_{\alpha\beta}^T (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}$ (utilizando a propriedade da aplicação inversa), então $(g_{\alpha\beta}^T)^{-1} dg_{\alpha\beta}^T = -d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})g_{\alpha\beta}^T$.

Substituindo isso no resultado acima, temos

$$\begin{aligned} (\theta^\alpha)^T &= -d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})g_{\alpha\beta}^T + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}(\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ \Rightarrow (-\theta^\alpha)^T &= d((g_{\alpha\beta}^T)^{-1})g_{\alpha\beta}^T + (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}(-\theta^\beta)^T g_{\alpha\beta}^T \\ \Rightarrow (-\theta^\alpha)^T &= d\psi_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}^{-1} + \psi_{\alpha\beta}(-\theta^\beta)^T \psi_{\alpha\beta}^{-1} \end{aligned}$$

que é a representação de (1.28) para o dual E^* . Desse modo, podemos definir uma conexão ∇^* sobre E^* , cuja matriz será dada por $(-\theta)^T$. Assim, a matriz de K_{∇^*} em U_α satisfaz

$$\begin{aligned} \Theta^{*\alpha} &= d((-\theta)^T) - (-\theta)^T \wedge (-\theta)^T \\ &= -(d\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha)^T \wedge (\theta^\alpha)^T \\ &= -(d\theta^\alpha)^T - (\theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T \\ &= -(d\theta^\alpha + \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha)^T = -(\Theta)^T \end{aligned}$$

Assim, visto que a transposição $A \mapsto A^T$ em $GL(n, \mathbb{C})$ é obtida por conjugação, dado P^i

um polinômio homogêneo de grau i , temos

$$P^i(-(\Theta^\alpha)^T) = (-1)^i P^i(\Theta^\alpha)$$

Assim, as classes de Chern de E e seu dual satisfazem

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E) \quad (1.29)$$

Os dois próximos resultados a serem enunciados serão necessários até o fim desse trabalho. Suas construções podem ser vistas com mais detalhes em [15] e [20], respectivamente.

Classes de Chern do Produto Tensorial

Considere $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de posto n e $F \xrightarrow{p} X$ um fibrado vetorial de posto 1. Assim, as classes de Chern do produto tensorial se expressam da seguinte forma

$$\begin{cases} c_1(E \otimes F) = c_1(E) + n \cdot c_1(F) \\ c_i(E \otimes F) = \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(F)^{i-k}, \quad 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1.30)$$

Classes de Chern do Fibrado Virtual

Considere, novamente, $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial de posto n e $L \xrightarrow{p} X$ um fibrado vetorial de posto 1. Nesse caso, E e L induzem um fibrado, chamado *fibrado virtual* e denotado por $E - L$. Os fibrados virtuais são elementos de $K(X)$, o *grupo de Grothendieck* de X (ver [20]), e suas classes de Chern são dadas por

$$\begin{cases} c_1(E - L) = c_1(E) + c_1(L^*) \\ c_i(E - L) = \sum_{k=0}^i \binom{n-k}{i-k} c_k(E) c_1(L^*)^{i-k}, \quad 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1.31)$$

onde L^* representa o fibrado dual de L .

1.3 Feixes

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que \mathcal{F} é um **pré-feixe** de grupos abelianos sobre X se*

- (a) *para todo subconjunto aberto $U \subset X$ existe um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$*
- (b) *para toda inclusão $V \subseteq U$ de subconjuntos abertos de X , temos um homomorfismo de grupos abelianos $\rho_{uv} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ denominado **mapa restrição**, satisfazendo as seguintes condições:*

- $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;
- $\rho_{uu} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ é a aplicação identidade;
- se $W \subset V \subset U$ são subconjuntos abertos, então $\rho_{uw} = \rho_{vw} \circ \rho_{uv}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{uw}} & \mathcal{F}(W) \\ & \searrow \rho_{uv} & \uparrow \rho_{vw} \\ & & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

A definição apresentada anteriormente pode ser adaptada para outras estruturas algébricas, ou seja, é possível definir, por exemplo, pré-feixes de conjuntos, anéis, módulos, entre outros, de acordo com a necessidade do estudo. A seguir, temos algumas observações quanto as notações utilizadas.

Observação 1.3.2 :

- Se \mathcal{F} é um pré-feixe, então diremos que $\mathcal{F}(U)$ é o conjunto das seções de \mathcal{F} em U ;
- As aplicações ρ_{uv} são chamadas aplicações restrições. Para os próximos resultados, iremos denotar $\rho_{uv}(s) = s|_V$.

Definição 1.3.3 *Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre um espaço topológico X . Dizemos que \mathcal{F} é um **feixe** se satisfaz as seguintes condições adicionais:*

- (c) [Localização] *se U é um conjunto aberto $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $s \in \mathcal{F}(U)$ é tal que $s|_{V_i} = 0$, para todo i , então $s = 0$;*
- (d) [Globalização] *se U é um conjunto aberto, $\{V_i\}$ é uma cobertura aberta de U e $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ satisfaz, para cada i, j , $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$, para cada i .*

Exemplo 1.3.4 *Seja X uma variedade complexa. Para cada conjunto aberto $U \subset X$, considere*

$$\mathcal{O}(U) = \{f \text{ holomorfa em } U\}, \quad U \neq \emptyset$$

o anel das funções regulares de U em \mathbb{C} e, para cada $V \subset U$, tomamos $\rho_{uv} : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ o mapa restrição. Considerando $\mathcal{O}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$, sendo $\mathbf{0}$ a função identicamente nula, então \mathcal{O} é um feixe de anéis sobre X . De fato, podemos verificar as quatro condições necessárias:

(a) Para cada $U \subset X$, $\mathcal{O}(U)$ é um anel, por definição;

(b) Os dois primeiros itens são imediatos da definição. Para o terceiro item, tomando $f \in \mathcal{O}(U)$, $f|_V \in \mathcal{O}(V)$ e $f|_W \in \mathcal{O}(W)$, com $W \subset V \subset U$ abertos, temos

$$(\rho_{vw} \circ \rho_{uv})(f) = \rho_{vw}(\rho_{uv}(f)) = \rho_{vw}(f|_V) = f|_W = \rho_{uw}(f);$$

(c) Seja $f \in \mathcal{O}(U)$ e $\{V_i\}$ cobertura aberta de U . Se, para cada V_i , $f|_{V_i} = \mathbf{0}$, então

$$\mathbf{0} = f|_{V_i} = \rho_{uv_i}(f) \Rightarrow f(z) = 0, \forall z \in V_i,$$

ou seja, para cada $z \in U$, existe j tal que $z \in V_j$. Sendo f nula em cada V_j , então $f(z) = 0$ e, portanto, $f \equiv \mathbf{0}$;

(d) Novamente, seja $f \in \mathcal{O}(U)$ e $\{V_i\}$ cobertura aberta de U . Tomando $f_i \in \mathcal{O}(V_i)$ e $f_j \in \mathcal{O}(V_j)$ e, para cada i, j , $f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j}$, temos

$$f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j} \Rightarrow \rho_{u, V_i \cap V_j}(f_i) = \rho_{u, V_i \cap V_j}(f_j),$$

ou seja, em $V_i \cap V_j$, f_i e f_j assumem os mesmos valores, para cada par i, j escolhido. Assim, definimos a seguinte função

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto f(x) = f_i(x), x \in V_i \end{aligned}$$

É possível demonstrar, pela hipótese, que tal função está bem definida. Agora, note que, dado $x_0 \in U$ no domínio, existe j_0 tal que $x_0 \in V_{j_0}$, visto que $\{V_i\}$ é uma cobertura de U . Agora, pela definição de f ,

$$f|_{V_{j_0}} = f_{j_0} \in \mathcal{O}(V_{j_0}).$$

Logo, f é holomorfa em V_{j_0} . Ou seja, $f \in \mathcal{O}(U)$ e segue diretamente da definição que $f|_{V_i} = f_i$.

O feixe apresentado no exemplo anterior, \mathcal{O} - às vezes denotado por \mathcal{O}_X , para ilustrar onde o feixe está definido -, é conhecido como o feixe das funções holomorfas. Ao decorrer desse trabalho, veremos algumas propriedades relacionadas a esse feixe.

Exemplo 1.3.5 *Sejam X uma variedade complexa e \mathcal{O}_X o feixe de funções holomorfas sobre X . O feixe tangente de X , denotado por TX é o feixe de \mathcal{O}_X -módulos definido da seguinte forma:*

Para cada aberto $U \subset X$, $TX(U)$ constitui o $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo de campo de vetores holomorfos sobre U .

Iremos agora definir o *talo* de um feixe, dado por um conjunto quociente. Para isso, é necessário definirmos uma relação de equivalência.

Seja $p \in X$ e \mathcal{F} um feixe em X . Considerando o par (U, s) , onde $U \subset X$ é um aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$ uma seção do feixe \mathcal{F} , definimos

” $\langle U, s \rangle \sim \langle V, s' \rangle$ se existe aberto $W \subset U \cap V$ tal que $s|_W = s'|_W$ ”

que é uma relação de equivalência. De fato,

- (REFLEXIVA) Visto que $U \subset U \cap U = U$, e $s|_U = s|_U$, é imediato que $\langle U, s \rangle \sim \langle U, s \rangle$;
- (SIMÉTRICA) Sejam $U, V \subset X$ abertos e s, s' seções de \mathcal{F} . Com isso,

$$\begin{aligned} \langle U, s \rangle \sim \langle V, s' \rangle &\Rightarrow \exists W \text{ aberto, } W \subset U \cap V = V \cap U \text{ tal que } s'|_W = s|_W \\ &\Rightarrow \langle V, s' \rangle = \langle U, s \rangle; \end{aligned}$$

- (TRANSITIVA) Inicialmente, tomamos $U, V, Y \subset X$ abertos e s, s', s'' seções de \mathcal{F} . Note que

$$\begin{aligned} \langle U, s \rangle \sim \langle V, s' \rangle \text{ e } \langle V, s' \rangle \sim \langle Y, s'' \rangle \\ \Rightarrow \exists W_1, W_2 \text{ abertos, } W_1 \subset U \cap V \text{ tal que } s|_{W_1} = s'|_{W_1} \\ W_2 \subset V \cap Y \text{ tal que } s'|_{W_2} = s''|_{W_2} \end{aligned}$$

Assim, tomando $W = W_1 \cap W_2$, que também é um conjunto aberto, onde $W = W_1 \cap W_2 \subset (U \cap V) \cap (V \cap Y) = U \cap V \cap Y \subset U \cap Y$, temos

$$s|_W = s|_{\underbrace{W_1 \cap W_2}_{\subset W_1}} = s'|_{\underbrace{W_1 \cap W_2}_{\substack{\subset W_1 \\ \subset W_2}}} = s''|_{\underbrace{W_1 \cap W_2}_{\subset W_2}} = s''|_W$$

e, portanto, $\langle U, s \rangle \sim \langle Y, s'' \rangle$.

Definição 1.3.6 O **talo** de \mathcal{F} em p , denotado por \mathcal{F}_p , é dado por

$$\mathcal{F}_p = \{ \langle U, s \rangle; U \text{ é um aberto contendo } p, s \text{ é uma seção de } \mathcal{F} \text{ em } U \} / \sim$$

As classes de equivalência são denominadas *germes de \mathcal{F} em p* .

A seguir, iremos definir quando uma aplicação entre pré-feixes é um morfismo. Tal definição será importante para mostrarmos que, caso tenhamos um isomorfismo, é possível induzir, a partir dela, também um isomorfismo entre os talos dos respectivos feixes.

Definição 1.3.7 Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} pré-feixes sobre um espaço topológico X . Um **morfismo de feixes**

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

consiste em um morfismo de grupos abelianos

$$\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

onde U é um aberto do espaço X tal que, sempre que $V \subset U$, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{uv} \downarrow & & \downarrow \rho'_{uv} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Se cada componente do diagrama é bijetora, então temos um isomorfismo em cada componente.

Proposição 1.3.8 *Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes sobre um espaço topológico X . Então φ é um isomorfismo se, e somente se, a aplicação induzida sobre o talo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é um isomorfismo, para todo $p \in X$.*

Demonstração: Inicialmente, note que sendo φ um isomorfismo, então φ é um isomorfismo em cada vizinhança de $p \in X$. Logo, é imediato que φ_p é também um isomorfismo.

Suponha agora que $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ é um isomorfismo, para toda vizinhança $p \in X$. Para mostrar que φ é um isomorfismo, é suficiente mostrar que $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é um isomorfismo para cada U . Consideremos então a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi(U) : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{G}(U) \\ s &\mapsto \varphi(s) \end{aligned}$$

Vamos mostrar a injetividade e a sobrejetividade de $\varphi(U)$ utilizando diretamente as condições da definição de feixes.

Inicialmente, tome $\varphi(s) \in \mathcal{G}(U)$, tal que $\varphi(s) \equiv 0$. Então, para toda vizinhança U_p de p , a imagem de $\varphi(s)$ no talo \mathcal{G}_p - iremos denotar por $\varphi(s)_p$ - é nula. Como, por hipótese, φ_p é injetiva, então $\varphi(s)_p \equiv 0 \Rightarrow s_p = 0$, para cada $p \in U$.

Da Definição 1.3.3, $s_p = 0$ é equivalente a dizer que existe uma vizinhança aberta $W_p \subset U$ tal que $s|_{W_p} = 0|_{W_p} = 0$. Assim, como para cada p tomamos um W_p , podemos tomar a cobertura $\{W_p\}_{p \in U}$ de U . Como $s|_{W_p} = 0$ para cada p , do item (c) da Definição 1.3.3, $s = 0$ em U . Logo, $\varphi(U)$ é injetora.

Por fim, tome $t \in \mathcal{G}(U)$. Para cada vizinhança de p em U , consideremos então o $t_p \in \mathcal{G}_p$ o germe da seção t na vizinhança de p . Como φ_p é, por hipótese, sobrejetora, então existe $s_p \in \mathcal{F}_p$ tal que $\varphi_p(s_p) = t_p$.

Agora, considere $s(p)$ a representação de s_p em uma vizinhança do ponto V_p do ponto p . Desse modo, $\varphi(s(p))$ e $t|_{V_p}$ são dois elementos de \mathcal{G}_p com os mesmos germes em V_p . Caso contrário, é possível escolher $V'_p \subset V_p$ suficientemente pequeno que satisfaça $\varphi(s(p)) = t|_{V'_p}$ em $\mathcal{G}(V'_p)$.

Novamente, é possível cobrir U , dessa vez com a família $\{V_p\}_{p \in U}$ e, para cada V_p , $s(p) \in \mathcal{F}(V_p)$. Agora, tomamos p, q tais que $s(p)|_{V_p \cap V_q}$ e $s(q)|_{V_p \cap V_q}$ são seções de $\mathcal{F}(V_p \cap V_q)$ levadas em $t|_{V_p \cap V_q}$ por φ . Da injetividade, $s(p)|_{V_p \cap V_q} = s(q)|_{V_p \cap V_q}$ e, do item (d) da Definição 1.3.3, então existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_p} = s(p)$, para cada $p \in U$. Assim, sendo $\varphi(s)$ e t seções de $\mathcal{G}(U)$ e, para cada p , $\varphi(s)|_{V_p} = t|_{V_p}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(s)|_{V_p} &= t|_{V_p} \\ \Rightarrow \varphi(s)|_{V_p} - t|_{V_p} &= 0 \\ \Rightarrow \varphi(s) - t &= 0 \Rightarrow \varphi(s) = t, \end{aligned}$$

onde nos últimos dois passos usamos o item (c) da definição de Feixes. Portanto, φ é sobrejetora. ■

Definição 1.3.9 *Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de pré-feixes, onde \mathcal{F} e \mathcal{G} são pré-feixes no espaço topológico X .*

- (i) Para cada aberto $U \subset X$, temos o grupo abeliano $\ker(\varphi(U))$, que definimos como o **pré-feixe núcleo** de φ ;
- (ii) Para cada aberto $U \subset X$, temos o grupo abeliano $\text{Im}(\varphi(U))$, que definimos como o **pré-feixe imagem** de φ ;

Definição 1.3.10 Um **sub-feixe** de um feixe \mathcal{F} é um feixe \mathcal{F}' tal que, para todo conjunto aberto $U \subset X$, então $\mathcal{F}'(U)$ é um subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ e as aplicações restrições do feixe \mathcal{F}' são induzidas pelas aplicações do feixe \mathcal{F} .

Da definição anterior, para qualquer ponto p , o talo \mathcal{F}'_p é um subgrupo de \mathcal{F}_p .

Definição 1.3.11 Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes. Definimos

- (i) o **núcleo de φ** , denotado por $\ker(\varphi)$, o pré-feixe núcleo de φ . Além disso, se $\ker(\varphi) = 0$ e $\ker(\varphi)$ é um feixe, φ é um monomorfismo;
- (ii) a **imagem de φ** , denotada por $\text{Im}(\varphi)$, o feixe associado ao pré-feixe imagem de φ . Além disso, se $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$, φ é um epimorfismo.

Definição 1.3.12 Dizemos que uma sequência de feixes e morfismos

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

é **exata** se em cada etapa temos $\ker(\varphi^i) = \text{Im}(\varphi^{i-1})$.

Exemplo 1.3.13 Das definições anteriores, é fácil verificar que a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

é exata se, e somente se, φ é um monomorfismo. Analogamente, a sequência

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

é exata se, e somente se, φ é um epimorfismo.

As sequências exatas são fundamentais nos cálculos de classes de Chern de várias estruturas algébricas, como ainda veremos no decorrer desse estudo. Mais ainda, note que, como anteriormente já definimos morfismos de fibrados vetoriais, podemos definir, de modo análogo, sequências exatas de fibrados.

Por fim, enunciaremos mais um resultado relacionando as os morfismos de feixes e os morfismos entre os talos desses feixes, agora quando ambos formam sequências exatas. A demonstração de tal resultado por ser vista em [24].

Proposição 1.3.14 Considere a seguinte sequência de feixes de grupos abelianos sobre um espaço topológico X

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \dots$$

Tal sequência é uma sequência exata se, e somente se, em cada $p \in X$ a sequência de talos

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}_p^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1,p}} \mathcal{F}_p^i \xrightarrow{\varphi^{i,p}} \mathcal{F}_p^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1,p}} \dots$$

é uma sequência de homomorfismos de grupos abelianos.

1.4 Feixes Localmente Livres e Fibrados Holomorfos

Nesta seção, estabeleceremos uma importante relação entre dois conceitos já apresentados: *feixes* e *fibrados vetoriais*. Aqui iremos trabalhar com feixes de anéis e de módulos, como já foi dito ser possível na definição de feixes de grupos abelianos. Tal relação nos permitirá calcular as classes de Chern de alguns feixes, já que em essência os mesmos podem ser vistos como fibrados vetoriais.

Definição 1.4.1 *Seja \mathcal{O}_X um feixe de anéis sobre um espaço topológico X e seja \mathcal{F} um feixe de módulos sobre \mathcal{O}_X . O feixe \mathcal{F} é dito um **feixe localmente livre** de posto r sobre \mathcal{O}_X , se é localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ em uma vizinhança de todo ponto de M . Em outras palavras, \mathcal{F} é localmente livre se, para todo $p \in M$, for possível encontrar uma vizinhança U de p e seções $F_1, \dots, F_r \in \mathcal{F}(U)$ tais que o homomorfismo de feixes*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ (w_1, \dots, w_r) & \longmapsto & \sum_{1 \leq j \leq r} w_j F_j \end{array} \quad (1.32)$$

seja um isomorfismo.

Observamos que, sendo \mathcal{F} um feixe localmente livre, segue diretamente da definição que é possível cobrir X com abertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre \mathcal{F} . Note também que, para cada $\alpha \in A$, \mathcal{F} admite geradores livres $F_\alpha^1, \dots, F_\alpha^r \in \mathcal{F}(U_\alpha)$.

Agora, sejam U_α, U_β abertos com $p \in U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$. Como $\mathcal{F}(U_\alpha)$ e $\mathcal{F}(U_\beta)$ são módulos, podemos relacionar seus elementos da base da seguinte forma:

$$F_\beta^k = \sum_{1 \leq j \leq r} F_\alpha^j G_{\alpha\beta}^{jk}.$$

Ou seja, para cada par (α, β) , temos a matriz $r \times r$

$$G_{\alpha\beta} = \left(G_{\alpha\beta}^{jk} \right)_{1 \leq j, k \leq r}, \quad \text{onde } G_{\alpha\beta}^{jk} \in \mathcal{O}(U_{\alpha\beta})$$

que relaciona os geradores livres.

Desse modo, iremos definir a seguinte função

$$\varphi_{\alpha\beta} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta}) \\ w = (w_1, \dots, w_r) & \longmapsto & \varphi_{\alpha\beta}(w) = \begin{bmatrix} G_{\alpha\beta}^{jk} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix} \end{array}$$

e que coincide com $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$, onde F_α e F_β são dadas em (1.32), quando tomamos os abertos U_α e U_β , respectivamente.

Vamos verificar que $\varphi_{\alpha\beta} = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$. De fato, tomando $e_m = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ um dos vetores da base de $\mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta})$, temos

$$\begin{aligned}
(F_\alpha^{-1} \circ F_\beta)(e_m) &= F_\alpha^{-1}(F_\beta(e_m)) \\
&= F_\alpha^{-1}\left(\sum_{1 \leq j \leq r} w_j F_j\right) \\
&= F_\alpha^{-1}(F_\beta^m) \\
&= F_\alpha^{-1}\left(\sum_{1 \leq j \leq r} F_\alpha^j G_{\alpha\beta}^{jm}\right) \\
&= (G_{\alpha\beta}^{1m}, \dots, G_{\alpha\beta}^{rm}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ G_{\alpha\beta}^{jk} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \varphi_{\alpha\beta}(e_m),
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{1}$ representa o elemento neutro de $\mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta})$. Mais ainda, tal demonstração é suficiente para todo elemento do anel pois, dado $w \in \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta})$, vale

$$\varphi(w) = \varphi(w_1, \dots, w_r) = \varphi(w_1 e_1 + \dots + w_r e_r) = w_1 \varphi(e_1) + \dots + w_r \varphi(e_r)$$

pois $\varphi_{\alpha\beta} = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ é um homomorfismo. Com isso, a partir de agora usaremos a notação $G_{\alpha\beta} = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ e, desse modo, as matrizes $G_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de cociclo. De fato, para todo $w \in \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_{\alpha\beta})$,

- $\mathbf{G}_{\alpha\beta}^{-1} = \mathbf{G}_{\beta\alpha}$;

$$\begin{aligned}
(G_{\alpha\beta} \circ G_{\beta\alpha})(w) &= (F_\alpha^{-1} \circ F_\beta) \circ (F_\beta^{-1} \circ F_\alpha)(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ (F_\beta \circ F_\beta^{-1}) \circ F_\alpha(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ (\text{Id}) \circ F_\alpha(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ F_\alpha(w) \\
&= \text{Id}(w) = w
\end{aligned}$$

- $\mathbf{G}_{\alpha\beta} \circ \mathbf{G}_{\beta\gamma} \circ \mathbf{G}_{\gamma\alpha} = \text{Id}$.

$$\begin{aligned}
(G_{\alpha\beta} \circ G_{\beta\gamma} \circ G_{\gamma\alpha})(w) &= (F_\alpha^{-1} \circ F_\beta) \circ (F_\beta^{-1} \circ F_\gamma) \circ (F_\gamma^{-1} \circ F_\alpha)(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ (F_\beta \circ F_\beta^{-1}) \circ (F_\gamma \circ F_\gamma^{-1}) \circ F_\alpha(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ \text{Id} \circ \text{Id} \circ F_\alpha(w) \\
&= F_\alpha^{-1} \circ F_\alpha(w) \\
&= \text{Id}(w) = w
\end{aligned}$$

Agora, chegamos ao nosso objetivo principal que é mostrar a existência de uma correspondência entre feixes de \mathcal{O}_M -módulos localmente livres e fibrados vetoriais holomorfos.

Dada uma coleção de matrizes $G_{\alpha\beta} = \left(g_{\alpha\beta}^{jk}\right) \in GL(\mathcal{O}_X)(U_{\alpha\beta})$ satisfazendo as condições de cociclo, podemos definir um \mathcal{O}_X -fibrado vetorial

$$E = \frac{\coprod_{\alpha \in I} U_{\alpha} \times \mathbb{C}^r}{\sim},$$

onde \sim é a relação de equivalência dada por

$$(x_{\alpha}, \xi_{\alpha}) \sim (x_{\beta}, \xi_{\beta}) \iff x_{\alpha} = x_{\beta} = x \in U_{\alpha} \cup U_{\beta} \text{ e } \xi_{\beta} = G_{\alpha\beta}(x) \cdot \xi_{\alpha}.$$

Do Teorema 1.1.8, tal feixe localmente livre nos dá um fibrado vetorial. Iremos ilustrar tal resultado construindo as fibras desse fibrado.

Para cada $x \in X$, consideremos o mapa

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O}_x &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \omega &\longmapsto \omega(x) \end{aligned}$$

onde \mathcal{O}_x é um talo do feixe \mathcal{O} e, assim, a aplicação ω é contínua. Assim, denotaremos o núcleo de ψ como \mathcal{M}_x , que é um ideal maximal de \mathcal{O}_x . Consequentemente, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo,

$$\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x} \cong \mathbb{C}$$

Agora, sendo \mathcal{F} um feixe localmente livre de posto r , para cada $x \in X$, associaremos um \mathbb{C} -espaço vetorial $E_x = \frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{M}_x}$. De fato, sendo $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{O}_x^{\oplus r}$, podemos ver que

$$E_x = \frac{\mathcal{F}_x}{\mathcal{M}_x} \simeq \left(\frac{\mathcal{O}_x}{\mathcal{M}_x} \right)^{\oplus r} \simeq \mathbb{C}^r.$$

Assim, podemos considerar o conjunto $E = \coprod_{x \in X} E_x$ com a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow X \\ \xi &\longmapsto \pi(\xi) := x, \end{aligned}$$

e então teremos fibras $E_x = \pi^{-1}(x)$ com estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão r .

Reciprocamente, podemos construir um feixe localmente livre a partir de um fibrado vetorial holomorfo.

Seja $E \xrightarrow{\pi} X$ um fibrado vetorial holomorfo, de posto r sobre a variedade complexa X . Definimos o feixe de seções associado a E , denotado por $\mathcal{O}(E)$, da seguinte forma: para cada aberto $U \subset X$, $\mathcal{O}(E)(U)$ constitui o grupo de seções de E sobre U . Mais ainda, para cada aberto trivializador U_{α} , consideremos a trivialização

$$\varphi_{\alpha} : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbb{C}^r,$$

e lembrando que, para cada $x \in U_\alpha$,

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(x) = E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^r$$

é isomorfismo. Por fim, basta tomar a aplicação

$$\begin{array}{ccc} F : \mathcal{O}_X^{\oplus r}(U_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{O}(E)(U_\alpha) \\ w & \longmapsto & F(w) : U_\alpha \longrightarrow E \\ & & x \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x, w(x)) \in E_x \end{array}$$

que também é um isomorfismo, das construções que já conhecemos de fibrados vetoriais. Dessa forma, a partir do fibrado $E \xrightarrow{\pi} X$, é possível construir um feixe localmente livre.

Observação 1.4.2 *Dado um feixe localmente livre, visto nessa seção que o mesmo é, essencialmente, um fibrado vetorial. Dessa forma, dado um feixe localmente livre, é possível encontrar as classes de Chern correspondentes ao mesmo, visto que as construções feitas na seção 1.2.*

Para o caso em que o feixe \mathcal{F} não necessariamente localmente livre, a classe característica de \mathcal{F} é o produto alternado das classes totais de Chern da resolução localmente livre associada a esse feixe, e são válidas as propriedades dadas em 1.2.4 (ver mais detalhes em [13] e [23]).

1.5 O índice de Poincaré-Hopf

Nesta seção, vamos apresentar o conceito de índice de Poincaré-Hopf de campos de vetores e alguns resultados da literatura que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho. A referência para esta seção é [3].

Em $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$, considere um campo de vetores contínuo $v = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Uma *singularidade* p de v é um ponto onde todas as suas componentes se anulam, isto é, $f_i(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. A singularidade é dita *isolada* quando em todo ponto x próximo a p existe pelo menos uma componente de v que não se anula.

Para definir o índice de Poincaré-Hopf, seja v um campo de vetores contínuo no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com uma singularidade isolada em p , e seja S_ε uma pequena esfera de raio ε em U centrada em p . Então o *índice de Poincaré-Hopf de v em p* , denotado por $PH(v, p)$, é definido como sendo o grau da aplicação de Gauss

$$x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

de S_ε na esfera unitária em \mathbb{R}^n .

Agora, seja X uma variedade diferenciável de classe C^∞ . Um campo de vetores em X é uma seção de seu fibrado tangente T_X . Dado um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) em X , um campo de vetores $v \in H^0(X, T_X)$ em X é expressado localmente como acima e a definição do índice de Poincaré-Hopf em uma singularidade isolada se estende de forma natural. O índice não depende do sistema de coordenadas escolhido. Por fim, apresentamos ainda o importante resultado a seguir:

Teorema 1.5.1 (Poincaré-Hopf) *Sejam X uma variedade complexa compacta de dimensão n e $v \in H^0(X, T_X)$ um campo de vetores holomorfos sobre X , com singularidades isoladas. Então,*

$$\chi(X) = \sum_{p \in \text{Sing}(v)} PH(v, p), \quad (1.33)$$

onde $PH(v, p)$ denota o índice de Poincaré-Hopf de v em p .

1.6 Formas e Campos Logarítmicos

O conceito de q -formas logarítmicas remonta o trabalho de P. Deligne ([9]), onde originalmente foi concebido no contexto de formas logarítmicas ao longo de hipersuperfícies com singularidades do tipo cruzamentos normais. Em ([26]), K. Saito desenvolveu uma teoria geral destes feixes apresentando algumas definições alternativas e também diversas propriedades.

Sejam X uma variedade complexa de dimensão n , ω uma q -forma meromorfa em X e D uma hipersuperfície analítica de X . Dado $x \in X$, seja $h_x = 0$ uma equação (reduzida) definindo D , localmente, em x . Dizemos que ω é *logarítmica ao longo de D em x* , se $h_x \omega$ e $h_x d\omega$ são formas holomorfas. Denotando por $\Omega_{X,x}^q(\log D)$ o conjunto de germes de q -formas logarítmicas ao longo de D em x , definimos o feixe de \mathcal{O}_X -módulos das q -formas logarítmicas ao longo de D como sendo

$$\Omega_X^q(\log D) := \bigcup_{x \in X} \Omega_{X,x}^q(\log D).$$

Quando D tem singularidades do tipo cruzamentos normais, então o feixe de 1-formas logarítmicas ao longo de D , $\Omega_X^1(\log D)$, é localmente livre. Além disso, neste caso, existe a seguinte sequência exata de feixes sobre X

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \xrightarrow{\text{Res}} \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0, \quad (1.34)$$

onde Res é o mapa de resíduos de Poincaré e D_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, são as componentes irredutíveis de D . Tal construção é feita com mais detalhes em [26].

No caso em que D é uma hipersuperfície analítica reduzida com $\text{codim}(\text{Sing}(D)) \geq 3$, existe a seguinte sequência exata de feixes sobre X (ver I. Dolgachev [10], Corolário 2.1)

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0. \quad (1.35)$$

Agora, dado $x \in X$, seja $v \in T_{X,x}$ um germe em x de campo de vetores holomorfo em X . Dizemos que v é *logarítmico ao longo de D em x* , se satisfaz a seguinte condição: a derivação $v(h_x)$ de uma equação local para D em x pertence ao ideal $\langle h_x \rangle \mathcal{O}_{X,x}$. Denotemos por $T_{X,x}(-\log D)$ o conjunto de germes de campos de vetores logarítmicos ao longo de D em x . O feixe de \mathcal{O}_X -módulos de campos de vetores logarítmicos ao longo de D é definido

por

$$T_X(-\log D) := \bigcup_{x \in X} T_{X,x}(-\log D).$$

Para encerrar essa seção, daremos aqui a definição e algumas propriedades de formas multi-logarítmicas. A construção desta definição pode ser vista com mais detalhes em [1] e [25].

Considere D uma hipersuperfície sobre uma variedade complexa X , com decomposição dada por $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, onde cada D_i é uma hipersuperfície definida por uma função h_i , com $i = 1, \dots, k$, em um subconjunto aberto $U \subset X$, e seja também $C = D_1 \cap \dots \cap D_k$ uma interseção completa reduzida.

Uma q -forma *multi-logarítmica ao longo de C* em um subconjunto aberto $U \subset X$, é uma q -forma meromorfa ω em U , regular $U - D$ tal que ω possui no máximo pólos simples ao longo de D e

$$dh_i \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega^{q+1}(\widehat{D}_i) \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, k\},$$

onde $\widehat{D}_i = D_1 \cup \dots \cup D_{i-1} \cup D_{i+1} \cup \dots \cup D_k$.

Em particular, quando $q = 1$ e $k = 2$, conhecemos da literatura (ver [25]) a seguinte igualdade

$$\Omega_X^1(\log C) = \Omega_X^1(D_1) + \Omega_X^1(D_2) \quad (1.36)$$

1.7 O Número de Milnor

Nesta seção, vamos apresentar o conceito de Número de Milnor e alguns resultados da literatura que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho. A referência para esta seção é [30].

Sejam $\mathcal{O}_{n,p}$ o anel de germes de funções holomorfas em $p \in \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^n$ uma interseção completa, definida localmente (em p) por $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{n,p}$. Suponhamos que p seja uma singularidade isolada de V . Para cada $i = 1, \dots, k$, vamos considerar a \mathbb{C} -álgebra dada pelo quociente

$$\frac{\mathcal{O}_{n,p}}{\langle J(f_1, \dots, f_i), f_1, \dots, f_{i-1} \rangle},$$

onde o denominador $\langle J(f_1, \dots, f_i), f_1, \dots, f_{i-1} \rangle$ denota o ideal em $\mathcal{O}_{n,p}$ gerado pelos determinantes jacobianos $\det \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_i)}{\partial(z_{\nu_1}, \dots, z_{\nu_i})} \right)$, $1 \leq \nu_1, \dots, \nu_i \leq n$, e f_1, \dots, f_{i-1} .

O *número de Milnor de V em p* , denotado por $\mu_p(V)$, é definido por

$$\mu_p(V) = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{\langle J(f_1, \dots, f_i), f_1, \dots, f_{i-1} \rangle},$$

onde $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{\langle J(f_1, \dots, f_i), f_1, \dots, f_{i-1} \rangle}$ denota a dimensão do quociente como um \mathbb{C} -espaço

vetorial. O número $\mu_p(V)$ não depende da escolha das funções $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{n,p}$ (ver [30]). No caso em que V é uma hipersuperfície ($k = 1$), temos

$$\mu_p(V) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{J(f)},$$

onde $J(f) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) \right\rangle$, $f = f_1$.

Agora, sejam X uma variedade complexa compacta de dimensão n e D uma hipersuperfície reduzida em X com singularidades isoladas. De [30], Teorema 3.9, obtemos a seguinte fórmula

$$\int_D c_{n-1}(T_X - [D]) = \chi(D) + (-1)^{n-1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \mu_p(D). \quad (1.37)$$

Além disso, para qualquer decomposição $D = D_1 \cup D_2$ (não necessariamente irredutível), onde D_1, D_2 têm singularidades isoladas e $C = D_1 \cap D_2$ é uma interseção completa de codimensão 2 com singularidades isoladas, então temos:

$$\int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) = \chi(C) + (-1)^{n-2} \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \mu_p(C). \quad (1.38)$$

1.8 O índice GSV

O índice GSV, definido por X. Gómez-Mont, J. Seade e A. Verjovsky [5], generaliza o índice de Poincaré-Hopf para campos de vetores definidos em ambientes não regulares. Originalmente, o índice GSV foi concebido para campos de vetores sobre hipersuperfícies com singularidades isoladas. J. P. Brasselet, J. Seade e T. Suwa [27], obtiveram uma generalização deste conceito para campos de vetores sobre subvariedades analíticas do tipo interseção completa local, com singularidades isoladas. Em [17], D. Lehmann, M. G. Soares e T. Suwa, introduziram o *índice virtual* que via teoria Chern-Weil pode ser interpretado como o índice GSV e X. Gómez-Mont [12], usando Álgebra Homológica, definiu o *índice homológico* o qual também coincide com o índice GSV. No trabalho de M. Brunella [4], o índice GSV também aparece definido sob outra conotação, mais precisamente, no contexto de superfícies complexas, o índice GSV foi concebido para curvas invariantes por folheações holomorfas. Mais recentemente, M. Corrêa e D. Machado [7] definiram o índice GSV no contexto de sistemas de Pfaff.

Na presente seção, vamos apresentar o conceito de índice GSV de campos de vetores e alguns resultados da literatura que serão importantes no desenvolvimento deste trabalho. A referência para esta seção é [30].

Seja D uma hipersuperfície com singularidades isoladas numa variedade complexa X n -dimensional e seja v um campo de vetores holomorfos em X , com singularidades isoladas e logarítmico ao longo de D - como já visto na Definição 1.3.7. Dado um ponto singular $x_0 \in \text{Sing}(D)$, onde $\text{Sing}(D)$ é o conjunto dos pontos singulares de D , considere então h uma função analítica definindo D numa vizinhança U_0 de x_0 . Assim, o vetor

gradiente $grad(h)$ nunca se anula, exceto em x_0 (já que x_0 é uma singularidade isolada) e é normal a D .

Agora, denotamos por v_* a restrição de v à parte regular de D , denotada por $D_{REG} = D - Sing(D)$. Na vizinhança U_0 , suponhamos que o campo de vetores v seja não-singular nos pontos distintos de x_0 . Como v é logarítmico ao longo de D , temos que os vetores $grad(h)(z)$ e $v_*(z)$ são linearmente independentes em cada ponto $z \in U_0 \cap (D - \{x_0\})$. Assuma que (z_1, \dots, z_n) é um sistema de coordenadas em U_0 e considere também

$$S_\varepsilon = \{z = (z_1, \dots, z_n) : \|z - x_0\| = \varepsilon\}$$

uma esfera de raio $\varepsilon > 0$ (suficientemente pequeno) tal que $K = D \cap D_\varepsilon$ seja o *link* da singularidade de D em x_0 (essa definição pode ser vista com mais detalhes em [19]). K constitui uma variedade real de dimensão $2n - 1$ e, utilizando, se necessário, o método de Gram-Schmidt, os campos v_* e $grad(h)$ definem a aplicação contínua

$$\phi_v := (v_*, grad(h)) : K \longrightarrow W_{2,n+1} \quad (1.39)$$

onde $W_{2,n+1}$ é a variedade Stiefel de 2-frames complexos em \mathbb{C}^{n+1} . Para mais detalhes sobre variedades Stiefel de 2-frames, consultar [14].

Podemos então definir o índice GSV.

Definição 1.8.1 *O índice GSV de v em $x_0 \in D$, denotado por $GSV(v, D, x_0)$ é definido como o grau da aplicação ϕ_v definida em (1.39).*

Agora, sejam X uma variedade complexa compacta de dimensão n e D uma hipersuperfície reduzida em X com singularidades isoladas. Dado v é um campo de vetores holomorfo em X , com singularidades isoladas e logarítmico ao longo de D , temos (ver [30], Teorema 7.16)

$$\int_D c_{n-1}(T_X - [D]) = \sum_{x \in S(v,D)} GSV(v, D, x), \quad (1.40)$$

onde $S(v, D) = [Sing(v) \cap D] \cup Sing(D)$.

Dada uma decomposição (não necessariamente irredutível) $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1, D_2 têm singularidades isoladas e $C = D_1 \cap D_2$ é uma interseção completa de codimensão 2 com singularidades isoladas, seja v é um campo de vetores holomorfo em X , com singularidades isoladas e logarítmico ao longo de C , temos (ver [30], Teorema 7.16)

$$\int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) = \sum_{x \in S(v,C)} GSV(v, C, x), \quad (1.41)$$

onde $S(v, C) = [Sing(v) \cap C] \cup Sing(C)$.

Observação 1.8.2 *Agora que já definimos os três principais índices que usaremos nos resultados principais deste trabalho, fixaremos a seguinte notação em relação aos mesmos:*

seja $W \subset X$ um subespaço e $v \in H^0(X, T_X)$ um campo de vetores holomorfos. Escrevemos então

$$\begin{aligned}PH(v, W) &= \sum_{x \in W} PH(v, x) \\ \mu(D, W) &= \sum_{x \in W} \mu_x(D) \\ GSV(v, D, W) &= \sum_{x \in W} GSV(v, D, x)\end{aligned}$$

Capítulo 2

Resultados Principais

2.1 O Teorema Gauss-Bonnet para ∂ -variedades

Inicialmente, vamos estabelecer algumas notações de importantes objetos abordados nessa seção. Seja X uma variedade complexa n -dimensional, e D uma hipersuperfície analítica (reduzida) em X . Vamos denotar, respectivamente, por Ω_X^1 e $\Omega_X^1(\log D)$ o feixe de 1-formas holomorfas em X e o feixe de 1-formas logarítmicas ao longo de D . O feixe tangente de X será denotado por T_X e corresponde ao dual $(\Omega_X^1)^*$. Os feixes (sobre X) das funções holomorfas em X e das funções holomorfas em D serão denotados, respectivamente, por \mathcal{O}_X e \mathcal{O}_D .

É importante observar que, como iremos calcular as classes de Chern de muitos dos objetos acima mencionados, é necessário que os mesmos sejam fibrados vetoriais. Porém, como já mostrado na seção 1.4, existe uma correspondência entre fibrados vetoriais holomorfos e feixes localmente livres. Quando calcularmos as “classes de Chern do feixe T_X ”, por exemplo, é importante levar em conta que o mesmo é, em sua essência, um fibrado vetorial holomorfo.

Mais ainda, a seguinte definição estabelece, de modo mais formal, o tipo de variedade que nos interessa:

Definição 2.1.1 *Uma ∂ -variedade é uma variedade complexa da forma $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa n -dimensional e $D \subset X$ é um divisor.*

Antes de demonstrarmos nossos principais resultados, enunciaremos algumas proposições. A primeira delas, vista logo abaixo, nos dá uma propriedade já conhecida para o cálculo de classes de Chern em sequências exatas (ver [15]).

Proposição 2.1.2 *Para qualquer sequência exata*

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

de fibrados vetoriais em X , então a classe de Chern de total de E é dada por $c(E) = c(E')c(E'')$.

Tal resultado segue diretamente do fato de que, dada a sequência exata acima, é possível mostrar que $E \simeq E' \oplus E''$, o que nos leva à fórmula de Whitney do produto para classes de Chern (1.27).

Proposição 2.1.3 *Seja X uma variedade complexa n -dimensional e D uma hipersuperfície analítica em X . Então vale a relação*

$$c_k(\mathcal{O}_D) = c_1([D])^k \quad (2.1)$$

para $k = 1, \dots, n$, onde $[D]$ representa o fibrado vetorial associado a hipersuperfície D .

Demonstração: Inicialmente, de [15], tomemos a seguinte sequência exata de feixes sobre X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

onde $\mathcal{O}(-D)$ denota o fibrado associado ao divisor $-D$, o qual satisfaz a relação $\mathcal{O}(-D) \cong [D]^*$ (ver [15], Corolário 2.3.10).

Com isso, temos a seguinte relação entre classes de Chern:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{O}_X) &= c(\mathcal{O}_D)c(\mathcal{O}(-D)) \\ \Rightarrow c(\mathcal{O}_X) &= c(\mathcal{O}_D)c([D]^*) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sendo $[D]^*$ um fibrado vetorial de dimensão 1, segue que $c([D]^*) = 1 + c_1([D]^*)$. Mais ainda, como $c(\mathcal{O}_X) = 1$, substituindo esses resultados em (2.2), temos

$$\begin{aligned} 1 &= c(\mathcal{O}_D)(1 + c_1([D]^*)) \\ &= c(\mathcal{O}_D) + c(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \\ &= (1 + c_1(\mathcal{O}_D) + \dots + c_n(\mathcal{O}_D)) + (1 + c_1(\mathcal{O}_D) + \dots + c_n(\mathcal{O}_D))c_1([D]^*) \end{aligned}$$

Assim, sendo o produto de classes de Chern induzido pelo produto exterior de formas, a igualdade acima nos dá o seguinte conjunto de igualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 0 &= c_1(\mathcal{O}_D) + c_1([D]^*) \\ 0 &= c_2(\mathcal{O}_D) + c_1(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \\ 0 &= c_3(\mathcal{O}_D) + c_2(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \\ &\vdots \\ 0 &= c_n(\mathcal{O}_D) + c_{n-1}(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{O}_D) &= -c_1([D]^*) \\ c_2(\mathcal{O}_D) &= -c_1(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) = c_1([D]^*)^2 \\ c_3(\mathcal{O}_D) &= -c_2(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) = -c_1([D]^*)^3 \\ &\vdots \\ c_n(\mathcal{O}_D) &= -c_{n-1}(\mathcal{O}_D)c_1([D]^*) = (-1)^n c_1([D]^*)^n \end{aligned}$$

e assim, obtemos a seguinte fórmula de recorrência

$$c_k(\mathcal{O}_D) = (-1)^k c_1([D]^*)^k$$

Por fim, utilizando a relação entre a classe de um fibrado e seu dual, temos

$$\begin{aligned} c_k(\mathcal{O}_D) &= (-1)^k c_1([D]^*)^k \\ &= (-1)^k [(-1)^k c_1([D])^k] \\ &= c_1([D])^k \end{aligned}$$

■

Lema 2.1.4 *Seja $D = D_1 \cup D_2$ uma hipersuperfície reduzida em X , onde D_1 e D_2 são hipersuperfícies reduzidas e $C = D_1 \cap D_2$ é uma interseção completa reduzida, então*

$$\Omega_X^1(\log D) \subset \Omega_X^1(\log C) \quad (2.3)$$

Demonstração: Sejam h_1, h_2 e $h = h_1 h_2$ as funções que definem D_1, D_2 e D , respectivamente, em um aberto $U \subset X$. Dado $\omega \in \Omega_X^1(\log D)$, por definição, $dh \wedge \omega$ é holomorfa. Definindo $\theta := dh \wedge \omega$, temos

$$\begin{aligned} \theta &= dh \wedge \omega = d(h_1 h_2) \wedge \omega = h_2 dh_1 \wedge \omega + h_1 dh_2 \wedge \omega \\ \Rightarrow dh_1 \wedge \omega &= \frac{\theta}{h_2} - h_1 \frac{dh_2}{h_2} \wedge \omega \end{aligned}$$

Como θ é holomorfa, note que $\frac{\theta}{h_2} \in \Omega_X^2(D_2)$.

Agora, como $\Omega_X^\bullet(\log D)$ é fechado para a operação \wedge - ver [26] - então $\frac{dh_2}{h_2} \wedge \omega \in \Omega_X^2(\log D)$ e, por consequência

$$h_2 \left(h_1 \frac{dh_2}{h_2} \wedge \omega \right) = h \frac{dh_2}{h_2} \wedge \omega$$

é holomorfa, ou seja, $h_1 \frac{dh_2}{h_2} \in \Omega_X^2(D_2)$. Assim, $dh_1 \wedge \omega \in \Omega_X^2(D_2)$. De forma análoga, é possível mostrar que $dh_2 \wedge \omega \in \Omega_X^2(D_1)$.

Portanto, $\omega \in \Omega_X^1(\log C)$, o que prova a inclusão. ■

Proposição 2.1.5 *Seja $D = D_1 \cup D_2$ uma hipersuperfície reduzida em X , onde D_1 e D_2 são hipersuperfícies reduzidas e $C = D_1 \cap D_2$ uma interseção completa reduzida. Então*

$$\Omega_X^1(\log D) = \Omega_X^1(\log D_1) + \Omega_X^1(\log D_2). \quad (2.4)$$

Demonstração: Para essa demonstração, considere h_i a função holomorfa que define a hipersuperfície D_i , para $i = 1, 2$. Dessa forma, podemos escrever a função h que define D como $h = h_1 h_2$.

Agora, seja $\omega \in \Omega_X^1(\log D_1) + \Omega_X^1(\log D_2)$. Assim, podemos escrever $\omega = \omega_1 + \omega_2$ e, por hipótese, $dh_1 \wedge \omega_1$ e $dh_2 \wedge \omega_2$ são 2-formas holomorfas. Desse modo, temos

$$\begin{aligned} dh \wedge \omega &= dh \wedge (\omega_1 + \omega_2) = dh \wedge \omega_1 + dh \wedge \omega_2 \\ &= d(h_1 h_2) \wedge \omega_1 + d(h_1 h_2) \wedge \omega_2 \\ &= (h_1 dh_2 + h_2 dh_1) \wedge \omega_1 + (h_1 dh_2 + h_2 dh_1) \wedge \omega_2 \\ &= h_1 dh_2 \wedge \omega_1 + h_2 dh_1 \wedge \omega_1 + h_1 dh_2 \wedge \omega_2 + h_2 dh_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Por hipótese, $dh_1 \wedge \omega_1$ e $dh_2 \wedge \omega_2$ são holomorfas. Além disso, $h_1 dh_2 \wedge \omega_1$ e $h_2 dh_1 \wedge \omega_2$ são 2-formas holomorfas, dados os h_i no início de cada expressão, já que $\omega_i \in \Omega_X^1(\log D_i) \subset \Omega_X^1(D_i)$, para $i = 1, 2$. Portanto, $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \Omega_X^1(\log D)$.

Para a inclusão contrária, tomemos agora $\omega \in \Omega_X^1(\log D)$. De acordo com (2.3) e (1.36), temos

$$\begin{aligned} \Omega_X^1(\log D) &\subset \Omega_X^1(\log C) \\ \Omega_X^1(\log C) &= \Omega_X^1(D_1) + \Omega_X^1(D_2) \end{aligned}$$

Ou seja, $\Omega_X^1(\log D) \subset \Omega_X^1(D_1) + \Omega_X^1(D_2)$, e assim escrevemos ω como

$$\omega = \frac{\theta_1}{h_1} + \frac{\theta_2}{h_2}$$

onde θ_1 e θ_2 são 1-formas holomorfas. Como $\omega \in \Omega_X^1(\log D)$, $dh \wedge \omega$ é uma 2-forma holomorfa. Calculando esse produto, temos

$$\begin{aligned} dh \wedge \omega &= d(h_1 h_2) \wedge \omega \\ &= (h_1 dh_2 + h_2 dh_1) \wedge \omega \\ &= h_1 dh_2 \wedge \omega + h_2 dh_1 \wedge \omega \\ &= h_1 dh_2 \wedge \left(\frac{\theta_1}{h_1} + \frac{\theta_2}{h_2} \right) + h_2 dh_1 \wedge \left(\frac{\theta_1}{h_1} + \frac{\theta_2}{h_2} \right) \\ &= h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} + h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} \\ &= dh_2 \wedge \theta_1 + h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} + dh_1 \wedge \theta_2 \end{aligned}$$

E, conseqüentemente, $h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1}$ é holomorfa, visto que

$$h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} = dh \wedge \omega - dh_1 \wedge \theta_2 - dh_2 \wedge \theta_1$$

e as parcelas da direita são 2-formas holomorfas.

Assim, escrevemos $\gamma = h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1}$, e com isso

$$\begin{aligned} \gamma &= h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} + h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} \\ \implies h_1 dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} &= \gamma - h_2 dh_1 \wedge \frac{\theta_1}{h_1} \\ \implies (h_1^2) dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2} &= \gamma \cdot h_1 - h_2 dh_1 \wedge \theta_1 \end{aligned}$$

Note que, como γ é holomorfa, da igualdade acima podemos concluir que $(h_1^2) dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2}$ é uma forma holomorfa - olhando para o lado direito da igualdade.

Como $C = D_1 \cap D_2$ uma interseção completa reduzida, então (h_1, h_2) é uma sequência regular. Dessa forma, a forma $(h_1^2) dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2}$ é holomorfa independentemente do termo (h_1^2) , visto que h_2 não faz parte da decomposição em fatores irredutíveis de $(h_1)^2$.

Com isso, podemos concluir que $dh_2 \wedge \frac{\theta_2}{h_2}$ é holomorfa, o que nos diz que $\frac{\theta_2}{h_2} \in \Omega_X^1(\log D_2)$. De maneira análoga, é possível mostrar que $\frac{\theta_1}{h_1} \in \Omega_X^1(\log D_1)$.

Portanto, $\omega = \frac{\theta_1}{h_1} + \frac{\theta_2}{h_2} \in \Omega_X^1(\log D_1) + \Omega_X^1(\log D_2)$. ■

O resultado anterior será utilizado na demonstração da próxima Proposição, que é uma relação envolvendo classes de Chern de conjuntos já apresentados. Como iremos demonstrar uma fórmula do tipo Gauss-Bonnet para variedades do tipo $\tilde{X} = X - D$, o resultado a seguir será fundamental para o caso em questão.

Proposição 2.1.6 *Sejam X é uma variedade complexa compacta de dimensão n , com $n \geq 3$ e D uma hipersuperfície reduzida em X . Se $D = D_1 \cup D_2$ é uma decomposição (não necessariamente irredutível) onde D_1 e D_2 possuem singularidades isoladas, então*

$$c(\Omega_X^1(\log D)) = c(\mathcal{O}_{D_1})c(\mathcal{O}_{D_2})c(\Omega_X^1). \quad (2.5)$$

Demonstração: Considerando a seguinte sequência exata de feixes (ver [1]):

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D_1) \oplus \Omega_X^1(\log D_2) \longrightarrow \Omega_X^1(\log D_1) + \Omega_X^1(\log D_2) \longrightarrow 0,$$

e a relação $\Omega_X^1(\log D_1) + \Omega_X^1(\log D_2) = \Omega_X^1(\log D)$ obtida na Proposição 2.1.5, obtemos

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D_1) \oplus \Omega_X^1(\log D_2) \longrightarrow \Omega_X^1(\log D) \longrightarrow 0$$

Sendo $\Omega_X^1(\log D_1)$, $\Omega_X^1(\log D_2)$ e $\Omega_X^1(\log D)$ feixes reflexivos (ver [26]), temos que

$$c(\Omega_X^1)c(\Omega_X^1(\log D)) = c(\Omega_X^1(\log D_1) \oplus \Omega_X^1(\log D_2)) \quad (2.6)$$

Para desenvolver essa igualdade, iremos verificar mais algumas propriedades das classes de Chern. De fato, para $i = 1, 2$, temos a seguinte sequência exata (ver [10]):

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1(\log D_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0$$

e, a partir dela, obtemos a igualdade

$$c(\Omega_X^1(\log D_i)) = c(\Omega_X^1)c(\mathcal{O}_{D_i}) \quad (2.7)$$

Daí, utilizando (2.7) em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} c(\Omega_X^1)c(\Omega_X^1(\log D)) &= c(\Omega_X^1(\log D_1) \oplus \Omega_X^1(\log D_2)) \\ &= c(\Omega_X^1(\log D_1))c(\Omega_X^1(\log D_2)) \\ &= c(\Omega_X^1)c(\mathcal{O}_{D_1})c(\Omega_X^1)c(\mathcal{O}_{D_2}) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$c(\Omega_X^1)c(\Omega_X^1(\log D)) = c(\Omega_X^1)c(\mathcal{O}_{D_1})c(\Omega_X^1)c(\mathcal{O}_{D_2}) \quad (2.8)$$

A partir dessa igualdade, concluiremos a demonstração. Como a igualdade trabalha com a classe total de Chern dos feixes, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\sum_{i_1=0}^n c_{i_1}(\Omega_X^1) \sum_{i_2=0}^n c_{i_2}(\Omega_X^1(\log D)) = \sum_{i_3=0}^n c_{i_3}(\Omega_X^1) \sum_{i_4=0}^n c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1}) \sum_{i_5=0}^n c_{i_5}(\Omega_X^1) \sum_{i_6=0}^n c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}),$$

onde cada c_{i_r} representa a i_r -ésima classe de Chern de cada feixe, com $r = 1, \dots, 6$ e $c_0(\Omega_X^1) = c_0(\Omega_X^1(\log D)) = c_0(\mathcal{O}_{D_1}) = c_0(\mathcal{O}_{D_2}) = 1$.

Além disso, como o produto dessas classes é induzido pelo produto exterior de formas, podemos escrever, para $m \geq 1$,

$$\sum_{i_1+i_2=m} c_{i_1}(\Omega_X^1)c_{i_2}(\Omega_X^1(\log D)) = \sum_{\substack{i_3+i_4+ \\ i_5+i_6=m}} c_{i_3}(\Omega_X^1)c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}), \quad (2.9)$$

onde m é o grau das formas de cada igualdade, e a soma dessas igualdades, para cada m , nos dá a igualdade anterior.

Com o auxílio dessas observações, utilizaremos o princípio de indução finita para demonstrar a seguinte relação:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1, \quad c_m(\Omega_X^1(\log D)) = \sum_{j_1+j_2+j_3=m} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}).$$

Com efeito, para $k = 1$, de (2.9), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i_1+i_2=1} c_{i_1}(\Omega_X^1)c_{i_2}(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{i_3+i_4+i_5+i_6=1} c_{i_3}(\Omega_X^1)c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) \\ \implies c_1(\Omega_X^1) + c_1(\Omega_X^1(\log D)) &= c_1(\Omega_X^1) + c_1(\mathcal{O}_{D_1}) + c_1(\Omega_X^1) + c_1(\mathcal{O}_{D_2}) \\ \implies c_1(\Omega_X^1(\log D)) &= c_1(\mathcal{O}_{D_1}) + c_1(\Omega_X^1) + c_1(\mathcal{O}_{D_2}) \\ \implies c_1(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{j_1+j_2+j_3=1} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}) \end{aligned}$$

Agora, suponha que a nossa hipótese, seja válida para qualquer $m \leq k$, ou seja

$$\begin{aligned}
c_1(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{j_1+j_2+j_3=1} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}) \\
c_2(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{j_1+j_2+j_3=2} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}) \\
&\vdots \\
c_{k-1}(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{j_1+j_2+j_3=k-1} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}) \\
c_k(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{j_1+j_2+j_3=k} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2})
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para $m = k + 1$, usando (2.9), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i_1+i_2 \\ =k+1}} c_{i_1}(\Omega_X^1)c_{i_2}(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{\substack{i_3+i_4+i_5 \\ +i_6=k+1}} c_{i_3}(\Omega_X^1)c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) \\
\implies c_{k+1}(\Omega_X^1(\log D)) + c_1(\Omega_X^1)c_k(\Omega_X^1(\log D)) &+ c_2(\Omega_X^1)c_{k-1}(\Omega_X^1(\log D)) + \dots \\
+ c_k(\Omega_X^1)c_1(\Omega_X^1(\log D)) + c_{k+1}(\Omega_X^1) &= \sum_{\substack{i_4+i_5 \\ +i_6=k+1}} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) + \\
+ c_1(\Omega_X^1) \sum_{\substack{i_4+i_5 \\ +i_6=k}} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) &+ c_2(\Omega_X^1) \sum_{\substack{i_4+i_5+ \\ i_6=k-1}} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) \\
+ \dots + c_k(\Omega_X^1) \sum_{i_4+i_5+i_6=1} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) &+ c_{k+1}(\Omega_X^1)
\end{aligned}$$

Substituindo no lado direito da equação os somatórios de acordo com (2.10), temos então

$$\begin{aligned}
c_{k+1}(\Omega_X^1(\log D)) + c_1(\Omega_X^1)c_k(\Omega_X^1(\log D)) &+ c_2(\Omega_X^1)c_{k-1}(\Omega_X^1(\log D)) + \dots + \\
c_k(\Omega_X^1)c_1(\Omega_X^1(\log D)) + c_{k+1}(\Omega_X^1) &= \\
\sum_{i_4+i_5+i_6=k+1} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}) &+ c_1(\Omega_X^1)c_k(\Omega_X^1(\log D)) + c_2(\Omega_X^1)c_{k-1}(\Omega_X^1(\log D)) + \\
\dots + c_k(\Omega_X^1)c_1(\Omega_X^1(\log D)) + c_{k+1}(\Omega_X^1) &
\end{aligned}$$

E, por fim, eliminando os elementos em comum em ambos os lados, obtemos

$$c_{k+1}(\Omega_X^1(\log D)) = \sum_{i_4+i_5+i_6=k+1} c_{i_4}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_5}(\Omega_X^1)c_{i_6}(\mathcal{O}_{D_2}).$$

Daí, pelo princípio de indução finita, está demonstrada a relação

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 1, \quad c_m(\Omega_X^1(\log D)) = \sum_{j_1+j_2+j_3=m} c_{j_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{j_2}(\Omega_X^1)c_{j_3}(\mathcal{O}_{D_2}),$$

da qual obtemos o resultado desejado:

$$c(\Omega_X^1(\log D)) = c(\mathcal{O}_{D_1})c(\mathcal{O}_{D_2})c(\Omega_X^1)$$

■

O Teorema a seguir será fundamental para os últimos resultados que serão apresentados. A partir dele, é possível demonstrar o resultado principal, a fórmula do tipo Gauss-Bonnet, e ainda uma fórmula do tipo Poincaré-Hopf, ambas para ∂ -variedades.

Teorema 2.1.7 *Seja X uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X . Se $D = D_1 \cup D_2$ é uma decomposição - não necessariamente irredutível -, onde D_1 e D_2 são divisores com singularidades isoladas, e $C = D_1 \cap D_2$ é uma subvariedade analítica com codimensão 2 e que possui singularidades isoladas, então*

$$\begin{aligned} \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= (-1)^n \left[\int_X c_n(T_X) - \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]) \right. \\ &\quad \left. - \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2]) + \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Demonstração: Inicialmente, sendo D como na hipótese, podemos utilizar o resultado (2.5):

$$c(\Omega_X^1(\log D)) = c(\mathcal{O}_{D_1})c(\mathcal{O}_{D_2})c(\Omega_X^1)$$

que diz respeito às classes totais de Chern de cada espaço. Assim, podemos trabalhar com a n -ésima classe de Chern de $\Omega_X^1(\log D)$, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= \sum_{i_1+i_2+i_3=n} c_{i_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_2}(\mathcal{O}_{D_2})c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &= c_n(\Omega_X^1) + \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_{i_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &\quad + \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_2 \geq 1}} c_{i_2}(\mathcal{O}_{D_2})c_{i_3}(\Omega_X^1) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_{i_1}(\mathcal{O}_{D_1})c_{i_2}(\mathcal{O}_{D_2})c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &= (-1)^n c_n(T_X) + \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &\quad + \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_2 \geq 1}} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_2([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) \end{aligned}$$

Onde, na última igualdade utilizamos dois resultados envolvendo relação entre classes de Chern:

$$\begin{aligned} c_i(T_X) &= c_i((\Omega_X^1)^*) = (-1)^i c_i(\Omega_X^1) \\ &\Rightarrow c_n(\Omega_X^1) = (-1)^n c_n(T_X), \end{aligned}$$

correspondendo às classes de Chern do espaço e seu dual, como vimos em (1.29), em que denotamos $(\Omega_X^1)^* = T_X$, e

$$c_i(\mathcal{O}_D) = c_1([D])^i \implies c_{i_1}(\mathcal{O}_D) = c_1([D])^{i_1},$$

utilizando a relação entre as classes de Chern de \mathcal{O}_D e do fibrado de posto 1 determinado pela hipersuperfície D , denotado por $[D]$, como visto na Proposição 2.1.3. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= \int_X \left[(-1)^n c_n(T_X) + \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_2 \geq 1}} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_2([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) \right] \\ &= \int_X (-1)^n c_n(T_X) + \int_X \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &\quad + \int_X \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_2 \geq 1}} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) + \int_X \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) \end{aligned}$$

A demonstração se encerra calculando cada parcela do lado direito. Utilizando que, para cada $i = 1, 2$, $c_1([D_i])$ é o dual de Poincaré do ciclo determinado pela classe fundamental de D_i (essa definição é dada com mais detalhes em [20]), e também a classe de Chern do fibrado virtual formado por Ω_X^1 e $[D_i]$ - já apresentada em (1.31) -, obtemos

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_{i_3}(\Omega_X^1) &= \int_{D_1} \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1-1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &= \int_{D_1} \sum_{i=0}^{n-1} c_1([D_1])^i c_{n-1-i}(\Omega_X^1) \\ &= \int_{D_1} c_{n-1}(\Omega_X^1 - [D_1]^*) \\ &= (-1)^{n-1} \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]), \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue novamente da relação entre a classe de Chern do espaço e seu dual. De forma similiar, obtemos também que

$$\int_X \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) = (-1)^{n-1} \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2])$$

Por fim, utilizamos que $c_1([D_1])c_1([D_2])$ é o dual de Poincaré da classe fundamental de $C = D_1 \cap D_2$. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) &= \int_C \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1-1} c_2([D_2])^{i_2-1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &= \int_C c_{n-2}(\Omega_X^1 - [D_2]^* - [D_1]^*) \\ &= (-1)^{n-2} \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]), \end{aligned}$$

novamente utilizando a relação entre as classes de Chern do espaço e seu dual. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= \int_X (-1)^n c_n(T_X) + \int_X \sum_{\substack{i_1+i_3=n \\ i_1 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &\quad + \int_X \sum_{\substack{i_2+i_3=n \\ i_2 \geq 1}} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) + \int_X \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2 \geq 1}} c_1([D_1])^{i_1} c_1([D_2])^{i_2} c_{i_3}(\Omega_X^1) \\ &= \int_X (-1)^n c_n(T_X) + (-1)^{n-1} \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]) \\ &\quad + (-1)^{n-1} \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2]) + (-1)^{n-2} \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) \\ &= (-1)^n \left[\int_X c_n(T_X) - \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]) \right. \\ &\quad \left. - \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2]) + \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) \right] \end{aligned}$$

■

O corolário a seguir segue diretamente do Teorema anterior, quando tomamos $D_1 = D$ e $D_2 = \emptyset$. Os corolários dos próximos resultados seguem uma abordagem parecida, quando na hipótese tomarmos D um divisor com singularidades isoladas.

Corolário 2.1.8 *Seja X uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X . Se D é um divisor com singularidades isoladas, então*

$$\int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) = (-1)^n \left[\int_X c_n(T_X) - \int_D c_{n-1}(T_X - [D]) \right]$$

Utilizaremos diretamente o resultado do Teorema anterior para demonstrar a seguinte fórmula do tipo Gauss-Bonnet:

Teorema 2.1.9 (Teorema do tipo Gauss-Bonnet) *Seja $\tilde{X} = X - D$ uma variedade complexa, onde X é uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X . Se $D = D_1 \cup D_2$ é uma decomposição - não necessariamente*

irredutível -, onde D_1 e D_2 são divisores com singularidades isoladas, e $C = D_1 \cap D_2$ é uma subvariedade analítica com codimensão 2 e que possui singularidades isoladas, então

$$\int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) = (-1)^n \chi(\tilde{X}) + \mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) + \mu(C, S(C)),$$

onde $\mu(D, S(D))$ denota a soma de números de Milnor de pontos singulares de D , ou seja,

$$\mu(D, S(D)) = \sum_{p \in S(D)} \mu_p(D)$$

Demonstração: Aqui, utilizaremos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \int_D c_{n-1}(T_X - [D_i]) &= \chi(D_i) + (-1)^{n-1} \sum_{p \in \text{Sing}(D_i)} \mu_p(D_i), \quad i = 1, 2 \\ \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) &= \chi(C) + (-1)^{n-2} \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \mu_p(C) \end{aligned}$$

que já foram apresentados, em (1.37) e (1.38). Mais ainda, do clássico Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\int_X c_n(T_X) = \chi(X). \quad (2.12)$$

Assim, substituindo essas duas igualdades e (2.12) no resultado (2.11) do Teorema 2.1.7, temos o resultado

$$\begin{aligned} \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= (-1)^n \left[\int_X c_n(T_X) - \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]) \right. \\ &\quad \left. - \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2]) + \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) \right] \\ &= (-1)^n \left[\chi(X) - \chi(D_1) - (-1)^{n-1} \sum_{p \in \text{Sing}(D_1)} \mu_p(D_1) \right. \\ &\quad \left. - \chi(D_2) - (-1)^{n-1} \sum_{p \in \text{Sing}(D_2)} \mu_p(D_2) + \chi(C) + (-1)^{n-2} \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \mu_p(C) \right] \\ &= (-1)^n [\chi(X) - \chi(D_1) - \chi(D_2) + \chi(C)] \\ &\quad + \sum_{p \in \text{Sing}(D_1)} \mu_p(D_1) + \sum_{p \in \text{Sing}(D_2)} \mu_p(D_2) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \mu_p(C) \\ &= (-1)^n \chi(\tilde{X}) + \sum_{p \in \text{Sing}(D_1)} \mu_p(D_1) + \sum_{p \in \text{Sing}(D_2)} \mu_p(D_2) + \sum_{p \in \text{Sing}(C)} \mu_p(C), \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos que

$$\begin{aligned} & \chi(X) - \chi(D_1) - \chi(D_2) + \chi(C) \\ &= \chi(X) - (\chi(D_1) + \chi(D_2) - \chi(D_1 \cap D_2)) \\ &= \chi(X) - \chi(D) \\ &= \chi(\tilde{X}), \end{aligned}$$

já que a união $X = \tilde{X} \cup D$ é disjunta. ■

Corolário 2.1.10 *Seja \tilde{X} uma variedade complexa, com $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X . Se D é um divisor com singularidades isoladas, então*

$$\int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) = (-1)^n \chi(\tilde{X}) + \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \mu_p(D),$$

onde $\mu_p(D)$ denota o número de Milnor de p em D .

2.2 O Teorema de Poincaré-Hopf para ∂ -variedades

Como visto na seção anterior, o Teorema 2.1.9 nos dá uma generalização para o clássico Teorema Gauss-Bonnet, um resultado que segue diretamente do Teorema 2.1.7. Mais ainda, esse último resultado pode ser utilizado para obtermos uma outra importante generalização.

Aqui, enunciaremos um outro resultado do tipo Poincaré-Hopf, dessa vez para o mesmo tipo de ∂ -variedades apresentadas no Teorema 2.1.9. Os índices apresentados abaixo foram todos abordados no primeiro capítulo desse trabalho.

Teorema 2.2.1 (Teorema do tipo Poincaré-Hopf) *Seja \tilde{X} uma variedade complexa, com $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X com singularidades isoladas. Se $D = D_1 \cup D_2$ é uma decomposição - não necessariamente irredutível -, onde D_1 e D_2 são divisores com singularidades isoladas, com $C = D_1 \cap D_2$ uma subvariedade analítica com codimensão 2 e que possui singularidades isoladas e, mais ainda, v é um campo de vetores holomorfos em X , logaritmico ao longo de D e também com singularidades isoladas, então*

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{X}) &= PH(v, \text{Sing}(v)) - GSV(v, D_1, S(v, D_1)) - GSV(v, D_2, S(v, D_2)) \\ &\quad + GSV(v, C, S(v, C)) + (-1)^{n-1} [\mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) + \mu(C, S(C))] \end{aligned}$$

Demonstração: Novamente, recordamos resultados já apresentados, dados por (1.40) e (1.41):

$$\begin{aligned} \int_{D_i} c_{n-1}(T_X - [D_i]) &= \sum_{x \in S(v, D_i)} GSV(v, D_i, x), \quad i = 1, 2 \\ \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) &= \sum_{x \in S(v, C)} GSV(v, C, x) \end{aligned}$$

Assim, substituindo o resultado do Teorema clássico de Poincaré-Hopf (dado em (1.33)) e as duas igualdades acima no resultado (2.11) do Teorema 2.1.7, temos:

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= \int_X c_n(T_X) - \int_{D_1} c_{n-1}(T_X - [D_1]) \\ &\quad - \int_{D_2} c_{n-1}(T_X - [D_2]) + \int_C c_{n-2}(T_X - [D_1] \oplus [D_2]) \\ \Rightarrow (-1)^n \int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= \chi(X) - \sum_{x \in S(v, D_1)} GSV(v, D_1, x) \\ &\quad - \sum_{x \in S(v, D_2)} GSV(v, D_2, x) + \sum_{x \in S(v, C)} GSV(v, C, x) \\ &= \sum_{x \in \text{Sing}(v) \cap X} PH(v, x) - \sum_{x \in S(v, D_1)} GSV(v, D_1, x) \\ &\quad - \sum_{x \in S(v, D_2)} GSV(v, D_2, x) + \sum_{x \in S(v, C)} GSV(v, C, x) \end{aligned}$$

Assim, do Teorema 2.1.9, temos:

$$\begin{aligned}
\int_X c_n(\Omega_X^1(\log D)) &= (-1)^n \chi(\tilde{X}) + \mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) + \mu(C, S(C)) \\
\Rightarrow \sum_{x \in \text{Sing}(v) \cap X} PH(v, x) - \sum_{x \in S(v, D_1)} GSV(v, D_1, x) \\
- \sum_{x \in S(v, D_2)} GSV(v, D_2, x) + \sum_{x \in S(v, C)} GSV(v, C, x) &= \\
\chi(\tilde{X}) + (-1)^n \mu(D_1, S(D_1)) + (-1)^n \mu(D_2, S(D_2)) + (-1)^n \mu(C, S(C)) \\
\Rightarrow \chi(\tilde{X}) &= PH(v, \text{Sing}(v)) - GSV(v, D_1, S(v, D_1)) - GSV(v, D_2, S(v, D_2)) \\
+ GSV(v, C, S(v, C)) + (-1)^{n-1} [\mu(D_1, S(D_1)) + \mu(D_2, S(D_2)) + \mu(C, S(C))]
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado, das notações já estabelecidas anteriormente (ver Observação 1.8.2). ■

Por fim, para o caso em que $D_1 = D$ e $D_2 = \emptyset$, vale o seguinte Corolário

Corolário 2.2.2 *Seja \tilde{X} uma variedade complexa, com $\tilde{X} = X - D$, onde X é uma variedade complexa compacta n -dimensional ($n \geq 3$) e D um divisor reduzido em X com singularidades isoladas. Se v é um campo de vetores holomorfos em X , logaritmico ao longo de D e também com singularidades isoladas, então*

$$\chi(\tilde{X}) = \sum_{x \in \text{Sing}(v)} PH(v, x) - \sum_{x \in S(v, D)} GSV(v, D, x) + (-1)^{n-1} \sum_{p \in \text{Sing}(D)} \mu_p(D).$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALEKSANDROV, A. Multidimensional residue theory and the logarithmic De Rham Complex, **Journal of Singularities**, Volume 5, p. 1-18, 2012.
- [2] ALUFFI, P. Chern classes for singular hypersurfaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 351, n. 10, p. 3989–4026, 1999.
- [3] BRASSELET, J; SEADE, J.; SUWA, T. **Vector fields on singular varieties**. Lecture Notes in Mathematics, Berlin: Springer, 2009.
- [4] BRUNELLA, M. **Birational Geometry of Foliations**, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [5] CHERN, S. A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. **The Annals of Mathematics**, JSTOR, v. 45, n. 4, p. 747, oct 1944.
- [6] CORRÊA, M. et al. **On Gauss-Bonnet and Poincaré-Hopf type theorems for complex ∂ -manifolds**. MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL (ONLINE), 2020.
- [7] CORRÊA, M.; MACHADO, D. GSV-Index for holomorphic Pfaff Systems. **Documenta Mathematica** (print), v. 25, p. 1011-1027, 2020.
- [8] CORRÊA, M.; MACHADO, D. Residue formulas for logarithmic foliations and applications. **Transactions of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society (AMS), v. 371, n. 9, p. 6403–6420, feb 2019.
- [9] DELIGNE, P. **Equations différentielles à points singulier réguliers**, Lecture Notes in Mathematics, 163, Springer-Verlag, 1970.
- [10] DOLGACHEV, I. Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes, **J. Math.** Kyoto Univ. 47 (2007), n. 1, 35-64.
- [11] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.
- [12] GÓMEZ-MONT, X. **An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity**, J. Algebraic Geom. 7 (1998), 731-752.
- [13] HARTSHORNE, R. **Algebraic Geometry**. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics 52, 1977.
- [14] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.

- [15] HUYBRECHTS, D. **Complex Geometry: An Introduction**. [S.l.]: Springer, 2005. (Universitext (Berlin. Print)). ISBN 9783540212904.
- [16] IITAKA, S. Logarithmic forms of algebraic varieties. **J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math**, v. 23, n. 3, p. 525–544, 1976.
- [17] LEHMANN, D.; SOARES, M.; SUWA, T. **On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety**, Bol. Soc. Bras. Mat. 26 (1995), pp. 183-199.
- [18] LIMA, E. L. **Curso de Análise vol.2**. 10. ed. Rio de Janeiro: Instituto de matemática pura e aplicada, 2007.
- [19] MILNOR, J. **Singular points of complex hypersurfaces**. [S.l.]: Princeton University Press, 1968.
- [20] MOL, R. S.; SOARES, M. G. **Índices de campos holomorfos e aplicações**. Publicações Matemáticas do IMPA, v. 23, 2001.
- [21] MONT, X.; SEADE, J.; VERJOVSKY, A. The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. **Mathematische Annalen**, Springer Science and Business Media LLC, v. 291, n. 1, p. 737–751, mar 1991.
- [22] NORIMATSU, Y. et al. Kodaira vanishing theorem and Chern classes for ∂ -manifolds. **Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences**, The Japan Academy, v. 54, n. 4, p. 107–108, 1978.
- [23] O'BRIAN, N. et al. **The Trace Map and Characteristic Classes for Coherent Sheaves**. American Journal of Mathematics, Vol. 103, No. 2, pp. 225-252, Apr. 1981.
- [24] OLIVEIRA, M. **O Problema de Painlevé para campos de Pfaff**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2013.
- [25] POL, D. **Characterizations of freeness for Cohen-Macaulay spaces**, <https://arxiv.org/pdf/1512.06778.pdf>, 2018.
- [26] SAITO, K. Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. **Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics**, v. 27, n. 2, p. 265–291, ago. 1980.
- [27] SEADE, J.; SUWA, T. **A residue formula for the index of a holomorphic flow**, Math. Ann. 304 (1996), 621-634.
- [28] SILVA, J. **Fórmulas residuais para folheações logarítmicas e aplicações**. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2020.
- [29] SILVOTTI, R. On a conjecture of varchenko. **arXiv preprint alg-geom/9503016**, 1995.
- [30] SUWA, T. **Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations**. [S.l.]: Hermann, 1998. ISBN 2705663614.