TOBIAS FERNANDO PINTO

CORRESPONDÊNCIA ENTRE CATEGORIA MODELO E PARES DE COTORSÃO DE CATEGORIAS ABELIANAS E EXATAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Pinto, Tobias Fernando, 1988-

P659c Correspondência entre categoria modelo e pares de cotorsão
2017 de categorias abelianas e exatas / Tobias Fernando Pinto. – Viçosa, MG, 2017.

vi, 117f. ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Sônia Maria Fernandes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.115-117.

1. Categorias (Matemática). 2. Álgebra homológica. 3. Lógica simbólica e matemática. 4. Teoria dos grupos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 512.62

TOBIAS FERNANDO PINTO

CORRESPONDÊNCIA ENTRE CATEGORIA MODELO E PARES DE COTORSÃO DE CATEGORIAS ABELIANAS E EXATAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2017

Marinês Guerreiro

Sinem Odabaşı

Sônia Maria Fernandes
(Orientadora)

Agradecimentos

Quero agradecer a professora Sônia pela paciência e confiança que teve para me orientar além de todo apoio que deu para a realização deste trabalho. Agradeço pelos conselhos e ensinamentos valiosos que contribuíram muito para minha formação.

Agradeço também a professora Sinem pelo grande suporte que deu para este trabalho e para minha formação acadêmica. Também agradeço pela disposição e paciência para me ensinar.

Agradeço aos professores, funcionários e colegas do DMA-UFV pelas experiências compartilhadas.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais José e Aparecida que foram meus primeiros professores e que tenho como exemplos em minha vida. E a minha namorada Maiara pelo companherismo e apoio em todos os momentos.

Agradeço a Deus por todas as bênçãos em minha vida e por colocar todas estas pessoas em meu caminho.

Sumário

Resumo

PINTO, Tobias Fernando, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2016. **Correspondência entre Categoria Modelo e Pares de Cotorsão de Categorias Abelianas e Exatas**. Orientadora: Sônia Maria Fernandes.

Nesta dissertação estudamos principalmente a correspondência entre categoria modelo e pares de cotorsão em categorias abeliana e exata. A correspondência de Hovey para categoria abeliana é adaptada para categoria exata. E isto é possível quando a categoria exata é fracamente idempotente completa. Esta correspondência nos permite encontrar estruturas modelos através de pares de cotorsão. Também estudamos as categorias Grothendieck e exata do tipo Grothendieck que são categorias abeliana e exata, respectivamente, que nos fornecem alguns exemplos de pares de cotorção.

Abstract

PINTO, Tobias Fernando, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **Correspondece between Model Categories and Cotorsion Pairs of Abelian and Exact Category**. Adiviser: Sônia Maria Fernandes..

In this dissertation we studied mainly the correspondence between model category and cotorsion pairs in abelian and exact categories. Hovey's correspondence to abelian category is adapted to exact category. And it is possible when an exact category is weakly idempotent complete. This correspondence allows us to find model structures through cotorsion pairs. Also we study like Grothendieck categories and exact categories of Grothendieck type, which are abelian and exact categories, respectively, which provide us with some examples of cotorsion pairs.

Introdução

Neste trabalho nosso principal objetivo é estudar a correspondência de Hovey para categorias abelianas e exatas.

A Teoria de Categorias fornece uma linguagem conceitual conveniente para o estudo de vários campos de pesquisa em Matemática. Esta linguagem nos permite unificar e simplificar muitas estruturas matemáticas representando-as com diagramas de flechas. Categorias, funtores, transformações naturais e dualidade são os principais objetos de estudo da Teoria de Categorias e foram introduzidos por Eilemberg e Maclane [1] nos anos 40.

A Álgebra Homológica foi desenvolvida por H. Cartan e S. Eilenberg [2], em 1954, para categoria de módulos de certos aneis, com o objetivo de apresentar de forma unificada os desenvolvimentos trazidos pelos métodos de Topologia Algébrica para a Álgebra Pura. Os resultados e definições contidos em [2] são dados de forma categórica e isto permite que sejam levados para outras categorias com comportamento parecido com a categoria dos módulos de um anel. Em 1955, Buchsbaum [3] fez uma generalização desta teoria para um certo tipo de categoria que ele chamou de categoria exata. Esta generalização foi importante para encontrar novas aplicações para a Álgebra Homológica, tais como a categoria de feixes. Porém, esta definição de categoria exata não cobre todas as aplicações da Álgebra Homológica. Em 1958, Heller [4] definiu a categoria abeliana, com uma classe própria de morfismos. Esta definição generalizou a definição de categoria exata segundo Buchsbaum, cobrindo mais aplicações da Álgebra Homológica. Os axiomas de categoria abeliana foram escolhidos precisamente para uma boa noção de Teoria de Homologia na categoria de complexos de uma categoria. Se a aditividade é removida, então existem duas possíveis direções. Uma é tentar axiomatizar homologia não-abeliana. A outra é na direção de homotopia. Nesse sentido, em 1971, Barr [5] fez uma definição intrínseca de categoria exata de forma que uma categoria é abeliana se, e somente se, é aditiva e exata. Em 1973, Quillen [6] definiu categoria exata de forma extrínseca consistindo de uma categoria aditiva e uma classe de pares núcleo-conúcleo satisfazendo algumas propriedades. Nesta categoria pode-se demonstrar a maioria dos resultados da Álgebra Homológica.

Em 1964, Mitchell [7] mostrou que toda categoria abeliana pequena admite um mergulho covariante, exato e pleno na categoria dos módulos sobre um anel apropriado. Como consequência, Freyd [8] mostrou que os resultados obtidos utilizando diagramas podem ser transferidos da categoria dos módulos de um anel para uma categoria abeliana geral.

Um dos principais objetos de estudo da Álgebra Homológica são os funtores derivados entre categorias abelianas. Para definir estes funtores é necessário que seja possível calcular a resolução projetiva de cada objeto ou, de forma dual, a resolução injetiva. Quando há esta possibilidade, dizemos que a categoria tem suficientes projetivos ou, dualmente, suficientes injetivos. Na categoria dos módulos finitamente gerados de um anel é possível definir os funtores derivados, pois é uma categoria com suficientes projetivos e injetivos. A demonstração de que na categoria dos módulos de um anel tem suficientes injetivos pode ser feita de duas formas. Uma delas é mais conhecida e peculiar para a categoria dos módulos. A outra é mais categórica e baseada no argumento de objeto pequeno de Quillen pelo qual Grothendieck em [9] provou que uma categoria abeliana, possuindo as ferramentas necessárias tais como limites diretos exatos e a existência de um gerador, tem suficientes injetivos. Em 2014, Stovicek [10] trouxe esta configuração para categoria exata e provou que a chamada categoria exata do tipo Grothendieck tem suficientes injetivos. Um exemplo é a categoria $Ch(R)$ dos complexos da categoria R-Mod dos módulos de um anel R com a estrutura exata sendo $\mathcal{E}_{CE}$ a classe de sequências exatas curtas Cartan-Eilenbergue em $Ch(R)$ que podemos encontrar definida em [11].

Álgebra Homotópica ou Álgebra Homológica não linear é a generalização de Álgebra Homológica para categorias arbitrárias. Em 1967, Quillen [12] definiu categoria modelo para formalizar os estudos de Álgebra Homotópica. Ele usou esta definição como uma maneira de construir resoluções em configurações não abelianas. Esta categoria, inventada por topólogos algebristas, permite introduzir as ideias da Teoria de Homotopia a situações distantes de espaços topológicos.

Uma categoria pode ter mais de uma estrutura modelo, porém nem sempre é fácil encontrar estas estruturas. Em 2002, Hovey [13] fez uma conexão entre categoria modelo e pares de cotorsão em categorias abelianas, que é uma estrutura que generaliza a noção de objetos injetivos e projetivos. Este resultado nos permite encontrar estruturas modelos em categorias abelianas através de pares de cotorsão. Em 2011, Gillespie [14] generalizou este resultado para categorias exatas. Com esta generalização é possível encontrar estruturas modelos em categorias exatas através de pares de cotorsão. Um exemplo é dado por Stovicek em [10]. Ele mostrou, usando pares de cotorsão, que se a classe de todos os complexos acíclicos $C_{ac}(\mathcal{G})$ de uma categoria exata do tipo Grothendieck $\mathcal{G}$ é *deconstrutível* na categoria $Ch(\mathcal{G})$ dos complexos de $\mathcal{G}$, então podemos encontrar uma estrutura modelo hereditária em $Ch(\mathcal{G})$.

Em 2004, Gillespie [15] motivou o estudo sobre pares de cotorsão induzidos na categoria de complexo. Ele demonstrou em [15] que qualquer par de cotorsão hereditário em R-Mod induz dois pares de cotorsão em $Ch(R)$. Para conseguir uma categoria modelo a partir desses pares de cotorsão induzidos, é necessário que eles sejam completos. Esta questão ficou em aberto no trabalho do Gillespie.

Em 2011, Yang e Liu [16] mostraram que dados pares de cotorsão hereditários na categoria R-Mod, os seus pares de cotorsão induzidos na categoria de complexos $Ch(R)$ são completos.

Em 2015, Yang e Ding [17] demonstram o resultado para categoria abeliana. Até o momento não se sabe se esse resultado vale para categoria exata.

A correspondência entre estruturas modelos e pares de cotorsão de categorias abelianas e exatas será apresentada no Capítulo 4. Inicialmente, definiremos *estrutura modelo* em uma categoria $\mathcal{C}$ e definiremos *categoria modelo* como uma categoria bicompleta com uma estrutura modelo. Definiremos também os *pares de cotorsão* em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ e uma *estrutura modelo abeliana* para que seja possível fazer a correspondência. Um dos lados da correspondência consiste em mostrar que dada uma estrutura modelo abeliana conseguimos dois pares de cotorsão completos. O outro lado da correspondência é um pouco mais trabalhoso. Posteriormente, definiremos *pares de cotorsão* em uma categoria exata e uma *estrutura modelo exata* para a correspondência. Um dos lados desta correspondência consiste em mostrar que dada uma estrutura modelo exata conseguimos dois pares de cotorsão completos. Para mostrar o outro lado da correspondência precisamos que a categoria exata seja *fracamente idempotente completa*. Na categoria de módulos finitamente gerados temos exemplos bem conhecidos de pares de cotorsão completos. No Capítulo 3 apresentamos outros exemplos.

No Capítulo 3 apresentamos a *categoria Grothendieck* que é uma categoria abeliana com propriedades suficientes para que se tenha *suficientes injetivos*. Apresentamos também a *categoria exata do tipo Grothendieck* que é uma categoria exata com propriedades suficientes para ter suficientes injetivos.

Nos primeiros capítulos apresentamos os principais conceitos a serem abordados nos próximos capítulos. No Capítulo 1 definiremos *categoria, funtor, transformação natural, categoria aditiva, categoria abeliana, produto e coproduto, pullback e pushout, gerador e cogerador, limite e colimite* e apresentaremos alguns dos resultados que serão relevantes no trabalho. No Capítulo 2 definimos a categoria exata, apresentamos resultados básicos de Álgebra Homológica transferidos para este contexto.

Capítulo 1

Categoria abeliana

Apresentamos neste capítulo os conceitos de *categoria* e *funtor*, *categoria aditiva* e *categoria abeliana*. Os conceitos apresentados aqui podem ser encontrados em [18], [19], [20]. Alguns dos resultados apresentados aqui não serão demonstrados.

1.1 Categorias e funtores

Muitos sistemas de propriedades matemáticas podem ser unificados e simplificados por uma representação com diagramas de flechas. Por exemplo, na Álgebra e também na Topologia estudamos conjuntos com certas estruturas e aplicações entre os conjuntos que preservam a estrutura. A Teoria de Categorias tem como principal objetivo estudar estas estruturas de uma maneira mais geral e mais simples de visualizar. Muitas propriedades de construções matemáticas podem ser representadas por propriedades universais de diagramas.

Utilizamos a Teoria Axiomática de Conjuntos de Bernays-Gödel, introduzida em [21] e [22], para definir os principais conceitos na Teoria de Categorias. Para mais informações sobre a Teoria Axiomática de Conjuntos veja o Apêndice A.

1.1.1 Categorias

Definição 1.1.1. Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste de:

1. Uma classe $ob\mathcal{C}$ de objetos.
2. Para cada par de objetos (A,B) um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ com elementos chamados morfismos com domínio A e contradomínio B.
3. Para cada tripla ordenada de objetos (A,B,C), temos uma aplicação $(f, g) \mapsto gf$ de $Hom(A, B) \times Hom(B, C)$ em $Hom(A, C)$.

Os objetos $A, B, C, D \in ob\mathcal{C}$ satisfazem as seguintes condições:

C 1 Se $(A, B) \neq (C, D)$, então $Hom(A, B)$ e $Hom(C, D)$ são disjuntos.

C 2 (Associatividade) Se $f \in Hom(A, B)$, $g \in Hom(B, C)$ e
$h \in Hom(C, D)$, então $(hg)f = h(gf)$.

C 3 (Unidade) Para todo objeto A, temos um elemento $1_A \in Hom(A, A)$ tal que $f1_A = f$, para todo $f \in Hom(A, B)$, e $1_A g = g$, para todo $g \in Hom(B, A)$.

Vejamos alguns exemplos de categorias:

- **0** é a categoria vazia, nenhum objeto e nenhuma flecha.
- **Set** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os conjuntos e os morfismos são as funções.
- **Grp** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os grupos e os morfismos são os homomorfismos de grupos.
- **Ab** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os grupos abelianos e os morfismos são os homomorfismos de grupos abelianos.
- **Ring** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os anéis e os morfismos são os homomorfismos de anéis.
- **CRing** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os anéis comutativos e os morfismos são os homomorfismos de anéis comutativos.
- **R-Mod** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os módulos à esquerda sobre um anel R e os morfismos são os R-homomorfismos de módulos.
- **Mod-R** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os módulos à direita sobre um anel R e os morfismos são os R-homomorfismos de módulos.
- **Top** é a categoria cuja classe de objetos é a classe de todos os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

Dizemos que um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "\beta"] & \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"'] & C \end{tikzcd}$$

é *comutativo* se $\beta\alpha = \gamma$ e dizemos, neste caso, que o morfismo γ *se fatora sobre* B. De modo análogo, um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & C \arrow[d, "\delta"] \\ B \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

é comutativo se $\beta\alpha = \delta\gamma$.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{A}$ é chamado de *corretração* se existe um morfismo $g : B \to A$ em $\mathcal{A}$ tal que $gf = 1_A$. Dualmente, dizemos que f é uma *retração* se existe um morfismo $h : B \to A$ tal que $fh = 1_B$. Se f é uma retração e uma corretração, então chamamos f de *isomorfismo* e dizemos que os objetos A e B são *isomorfos* e denotamos isto por $A \cong B$. Neste caso, temos

$$g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h.$$

Chamamos $g = h$ de *inverso* de f e o denotamos por f^{-1}.

Um morfismo $\alpha : A \to B$ é chamado de *monomorfismo* se $\alpha f = \alpha g$ implica $f = g$, para todo par de morfismos f, g com domínio A. Dualmente, α é chamado de *epimorfismo* se $f\alpha = g\alpha$ implica $f = g$, para todo par de morfismos f, g com domínio B.

Lema 1.1.2. *Todo isomorfismo é um monomorfismo e um epimorfismo.*

Vejamos algumas categorias especiais:

- Uma categoria é *discreta* quando os únicos morfismos são as identidades.
- Uma categoria é *pequena* quando sua classe de objetos é um conjunto.
- Seja $\mathcal{A}$ uma categoria. Construímos a categoria $\mathcal{A}^{\to}$ tomando como objetos os morfismos e dados dois morfismos $f : A \to B$ e $g : C \to D$ tomamos um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

  comutativo como um morfismo de f para g.
- Seja $\mathcal{A}$ uma categoria. Construímos a categoria $\mathcal{A}^{\to\to}$ tomando como objetos os pares de morfismos em $\mathcal{A}$. E dados dois pares de morfismos gf e $g'f'$ sendo $f : A \to B$, $g : B \to C$, $f' : A' \to B'$ e $g' : B' \to C'$ morfismos em $\mathcal{A}$, tomamos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd}$$

  como um morfismo de gf para $g'f'$.
- Seja Z um objeto de uma categoria $\mathcal{C}$. O objeto Z é *inicial* se para todo $C \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $Z \to C$; Z é *final* se para todo $C \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $C \to Z$ e Z é *zero* se é inicial e final. Quaisquer dois objetos zeros são isomorfos e eles são portanto identificados por um

objeto zero 0 de $\mathcal{C}$. Chamamos uma categoria com objeto inicial e objeto final de *pontuada* se o morfismo do objeto inicial para o objeto final é um isomorfismo.

Para cada categoria $\mathcal{C}$ existe uma *categoria dual* $\mathcal{C}^{op}$, cujo conjunto subjacente é o mesmo de $\mathcal{C}$ e com

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(C, C') = Hom_{\mathcal{C}}(C', C)$$

e $\alpha * \beta = \beta \cdot \alpha$, com $*$ denotando a composição em $\mathcal{C}^{op}$ e $\cdot$ a composição em $\mathcal{C}$. Toda definição ou teorema para $\mathcal{C}$ dualiza a uma correspondente definição ou teorema para $\mathcal{C}^{op}$.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é *preaditiva* se cada conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ é um grupo abeliano e as aplicações composição $Hom(C', C'') \times Hom(C, C') \to Hom(C, C'')$ são bilineares.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria preaditiva e tem um objeto zero 0, então o elemento zero do grupo $Hom_{\mathcal{C}}(C, C')$ é idêntico ao morfismo composto $C \to 0 \to C'$, como segue da bilinearidade da aplicação composição

$$Hom(C, 0) \times Hom(0, C') \to Hom(C, C').$$

1.1.2 Funtores e transformações naturais

Definição 1.1.3. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas categorias. Um *funtor covariante* $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ associa a cada objeto B em $\mathcal{B}$ um objeto $T(B)$ em $\mathcal{C}$ e associa a cada morfismo $\alpha : B \to B'$ em $\mathcal{B}$ um morfismo $T(\alpha) : T(B) \to T(B')$ em $\mathcal{C}$, de tal modo que:

F 1 $T(\beta\alpha) = T(\beta)T(\alpha)$, para quaisquer $\alpha : B \to B'$, $\beta : B' \to B''$ em $\mathcal{B}$.

F 2 $T(1_B) = 1_{T(B)}$.

Assim, um funtor covariante $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ define uma aplicação

$$Hom_{\mathcal{B}}(B, B') \to Hom_{\mathcal{C}}(T(B), T(B')),$$

para cada par B, B' de objetos em $\mathcal{B}$. O funtor T é chamado *fiel* se estas aplicações são injetivas e é chamado *pleno* se elas são sobrejetivas. Funtores $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ podem ser compostos originando um funtor $UT : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$. Um funtor $T : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{C}$ é um *funtor contravariante* de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são categorias preaditivas, então um funtor $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é *aditivo* se satisfaz:

F 3 $T(\alpha + \alpha') = T(\alpha) + T(\alpha')$, para quaisquer $\alpha, \alpha' : C \to C'$.

Assim, um funtor T é aditivo se, e somente se, as aplicações 1.1.2 entre morfismos são homomorfismos de grupos.

Vejamos alguns exemplos de funtores que usaremos mais adiante.

1. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e $A \in \mathcal{A}$. Temos um funtor covariante $Hom(A, -) : \mathcal{A} \to Ab$ definido da seguinte maneira:

   (a) Cada objeto $B \in \mathcal{A}$ corresponde a um grupo abeliano $Hom(A, B)$.

   (b) Cada morfismo $\alpha : B \to C$ em $\mathcal{A}$ corresponde a um homomorfismo de grupos $Hom(A, \alpha) : Hom(A, B) \to Hom(A, C)$ tal que $Hom(A, \alpha)(x) = \alpha x$, para todo $x \in Hom(A, B)$.

   Dualmente podemos definir um funtor contravariante $Hom(-, A) : \mathcal{A} \to Ab$ da seguinte maneira:

   (a) Cada objeto $B \in \mathcal{A}$ corresponde a um grupo abeliano $Hom(B, A)$.

   (b) Cada morfismo $\alpha : B \to C$ em $\mathcal{A}$ corresponde a um homomorfismo de grupos $Hom(\alpha, A) : Hom(C, A) \to Hom(B, A)$ tal que $Hom(\alpha, A)(x) = x\alpha$ para $x \in Hom(C, A)$.

2. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e A um objeto de $\mathcal{A}$. Podemos definir o funtor $Ext^n(A, -) : \mathcal{A} \to Ab$ de duas maneiras diferentes: Uma como o n-ésimo funtor derivado à direita do funtor $Hom(A, -) : \mathcal{A} \to Ab$ como definido em [2], [20]. A outra forma é como definiram Baer [23] e Yoneda [24], ou seja, definir $Ext^n(C, A)$ como uma classe de equivalência de extensões com n dobras de A para C, isto é, sequência exata da forma

$$0 \to A \to B_{n-1} \to B_{n-2} \to \cdots \to B_1 \to B_0 \to C \to 0.$$

   Como definido em [18].

Definição 1.1.4. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são categorias, então $\mathcal{B}$ é uma *subcategoria* de $\mathcal{C}$ se $Ob(\mathcal{B})$ é uma subclasse de $Ob(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{B}}(B, B')$ é um subconjunto de $Hom_{\mathcal{C}}(B, B')$, para todo B e B' em $Ob(\mathcal{B})$, e a composição em $\mathcal{B}$ é a mesma que em $\mathcal{C}$.

Neste caso, existe um funtor fiel $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. A categoria $\mathcal{B}$ é uma subcategoria *plena* de $\mathcal{C}$ se este funtor é pleno. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria preaditiva e $\mathcal{B}$ é uma subcategoria plena de $\mathcal{C}$, então também $\mathcal{B}$ é preaditiva e o funtor inclusão $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é aditivo.

Como nas categorias, também é possível relacionar dois funtores de modo que preserve suas propriedades. Para isto, define-se as transformações naturais.

Definição 1.1.5. Sejam S e T funtores $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Uma *transformação natural* $\eta : S \to T$ é obtida tomando, para cada objeto B em $\mathcal{B}$, um morfismo $\eta_B : S(B) \to T(B)$ em $\mathcal{C}$ tal que, para cada morfismo $\alpha : B \to B'$ em $\mathcal{B}$, obtém-se a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} S(B) & \xrightarrow{\eta_B} & T(B) \\ \downarrow{\scriptstyle S(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\alpha)} \\ S(B') & \xrightarrow{\eta_{B'}} & T(B'). \end{array}$$

Uma transformação natural η é uma *equivalência natural*, se cada η_B é um isomorfismo em $\mathcal{C}$.

Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *isomorfas* se existem funtores $S : \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ e $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $TS = 1_{\mathcal{C}}$ e $ST = 1_{\mathcal{D}}$.

Um funtor $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma *equivalência* se existe um funtor $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e equivalências naturais $TS \to 1_{\mathcal{C}}$ e $ST \to 1_{\mathcal{D}}$.

Proposição 1.1.6. *Um funtor $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma* ***equivalência*** *se, e somente se, é pleno e fiel e todo objeto de $\mathcal{D}$ é isomorfo a um objeto da forma $S(C)$.*

1.1.3 Subobjetos e objetos quocientes

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria preaditiva com objeto zero. Um morfismo $\alpha : B \to C$ em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo se, e somente se, $\alpha\xi = 0$ implica $\xi = 0$, para todo $\xi : X \to B$. De fato, sejam α um monomorfismo e $\xi : X \to B$ um morfismo tal que $\alpha\xi = 0$. Logo

$$\alpha 0 = 0 = \alpha\xi \Rightarrow \xi = 0.$$

Reciprocamente, sejam $\alpha : B \to C$ $f, g : X \to B$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $\alpha f = \alpha g$. Daí

$$0 = \alpha f - \alpha g = \alpha(f - g) \Rightarrow f - g = 0.$$

Logo, $f = g$.

Dualmente, α é um epimorfismo se, e somente se, $\eta\alpha = 0$ implica $\eta = 0$, para todo $\eta : C \to X$. Dois monomorfismos $\alpha : B \to C$ e $\alpha' : B' \to C$ são *equivalentes* se existe um isomorfismo $\gamma : B \to B'$ tal que $\alpha'\gamma = \alpha$. Uma classe de equivalência de monomorfismos em C é chamada um *subobjeto* de C.

Se $\alpha : B \to C$ e $\alpha' : B' \to C$ são dois subobjetos de C, então escrevemos $B \subset B'$ se existe um morfismo $\gamma : B \to B'$ tal que $\alpha'\gamma = \alpha$ (note que γ então será um monomorfismo). Em particular, se $B \subset B'$ e $B' \subset B$, então os dois monomorfismos representam o mesmo subobjeto de C.

Dois epimorfismos $\alpha : B \to C$ e $\alpha' : B \to C'$ são *equivalentes* se existe um isomorfismo $\gamma : C' \to C$ tal que $\gamma\alpha' = \alpha$. Uma classe de equivalência de epimorfismos de B é chamado um *objeto quociente* de B.

Definição 1.1.7. Um *núcleo* de um morfismo $\alpha : B \to C$ é um morfismo $k : K \to B$ tal que

1. $\alpha k = 0$;
2. para todo $\xi : X \to B$ com $\alpha\xi = 0$, existe um único $\gamma : X \to K$ tal que $\xi = k\gamma$.

Proposição 1.1.8. *Dois núcleos de α representam o mesmo subobjeto.*

Demonstração. Sejam $k : K \to B$ e $k' : K' \to B$ núcleos de $\alpha : B \to C$. Visto que $\alpha k' = 0$, existe $\gamma : K' \to K$ tal que $k\gamma = k'$. Similarmente, existe $\beta : K \to K'$ tal que $k'\beta = k$. Consequentemente,

$$k\gamma\beta = k'\beta = k 1_K$$

$$k'\beta\gamma = k\gamma = k'1_{K'}.$$

Como k e k' são monomorfismos, então $\gamma\beta = 1_K$ e $\beta\gamma = 1_{K'}$. Logo β é um isomorfismo. $\square$

Seja $f : A \to B$ um morfismo na categoria $\mathcal{C}$. Denotemos por $ker(f) : Ker(f) \to A$ o núcleo de f e por $Ker(f)$ o domínio do núcleo de f.

Proposição 1.1.9. *Um morfismo α é um monomorfismo se, e somente se, $Ker(\alpha) = 0$*

Demonstração. Seja $\alpha : A \to B$ um monomorfismo. Seja $f : X \to A$ um morfismo tal que $\alpha f = 0$. Como α é monomorfismo, $f = 0$. Isto significa que f se fatora unicamente sobre o objeto zero. Logo, $0 : 0 \to A$ é o núcleo de α.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ & X \arrow[ul, dashed, "0"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, seja α um morfismo com $Ker(\alpha) = 0$. Seja $f : X \to B$ tal que $\alpha f = 0$. Pela definição de núcleo, f se fatora por $Ker(\alpha) = 0$. Então, $f = 0$. Logo, α é um monomorfismo. $\square$

De maneira dual, definimos o conúcleo de um morfismo.

Um *conúcleo* de um morfismo $\alpha : B \to C$ é um morfismo

$$coker(\alpha) : C \to Coker(\alpha)$$

tal que

1. $coker(\alpha)\alpha = 0$
2. para todo $\varepsilon : C \to X$ com $\varepsilon\alpha = 0$, existe um único $\gamma : Coker(\alpha) \to X$ tal que $\varepsilon = coker(\alpha)\gamma$.

Analogamente, podemos mostrar que dois conúcleos representam o mesmo objeto quociente e também que um morfismo α é um epimorfismo se, e somente se, $Coker\alpha = 0$.

Proposição 1.1.10. *Se α é um núcleo de algum morfismo e se $Coker\alpha$ existe, então $\alpha = ker(coker\alpha)$.*

Demonstração. Seja $\alpha : B \to C$ o núcleo de $\gamma : C \to D$. Como $\gamma\alpha = 0$, existe um único morfismo $f : Coker(\alpha) \to D$ tal que $fcoker(\alpha) = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "0"'] & C \arrow[r, "coker(\alpha)"] \arrow[d, "\gamma"] & Coker(\alpha) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Seja $\xi : X \to C$ morfismo tal que $coker(\alpha)\xi = 0$. Logo $\gamma\xi = f coker(\alpha)\xi = 0$. Como $\alpha = ker(\gamma)$, existe um único morfismo $g : X \to B$ tal que $\alpha g = \xi$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r, "\gamma"] & D \\ & X \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto, α é um núcleo de $coker(\alpha)$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r, "coker(\alpha)"] & Coker(\alpha) \\ & X \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

□

1.1.4 Produtos e Coprodutos

Definição 1.1.11. Um *produto* de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ é um objeto C em $\mathcal{C}$ e morfismos $\pi_i : C \to C_i$, com $i \in I$, tal que para cada objeto X e morfismos $\xi_i : X \to C_i$, com $i \in I$, existe um único morfismo $\xi : X \to C$ com $\pi_i\xi = \xi_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "\pi_i"] & X \arrow[l, dashed, "\xi"'] \arrow[dl, "\xi_i"] \\ C_i & \end{tikzcd}$$

Proposição 1.1.12. *O produto de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ é único a menos de isomorfismo.*

Denotamos o produto por $\prod_I C_i$ e os morfismos canônicos $\pi_i : \prod_I C_i \to C_i$ são chamados de *projeções*.

Proposição 1.1.13. *Sejam $(C_i)_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$ e X um objeto de $\mathcal{C}$. Então*

$$Hom(X, \prod_I C_i) \cong \prod_I Hom(X, C_i).$$

Demonstração. Sejam $Hom(X, \pi_i) : Hom(X, \prod_I C_i) \to Hom(X, C_i)$ os morfismos induzidos das projeções. Vamos mostrar que $Hom(X, \prod_I C_i)$ é um produto para a família de grupos abelianos $(Hom(X, C_i))_{i\in I}$ com $Hom(X, \pi_i)$ sendo as projeções. Seja G um grupo abeliano e, para cada $i \in I$, $f_i : G \to Hom(X, C_i)$ um homomorfismo de grupos. Note que, para cada $g \in G$, $f_i(g) \in Hom(X, C_i)$. Pela definição de produto, existe um único $f(g) : X \to \prod_I C_i$ tal que $\pi_i f(g) = f_i(g)$.

$$\begin{tikzcd} \prod_I C_i \arrow[d, "\pi_i"'] & X \arrow[l, dashed, "f(g)"'] \arrow[dl, "f_i(g)"] \\ C_i & \end{tikzcd}$$

Deste modo, temos uma aplicação $f : G \to Hom(X, \prod_I G_i)$ tal que $\pi_i f(g) = f_i(g)$. Sejam $g, h \in G$. Temos

$$\pi_i f(g+h) = f_i(g+h) = f_i(g) + f_i(h) = \pi_i f(g) + \pi_i f(h) = \pi_i(f(g) + f(h)).$$

Pela unicidade novamente,

$$f(g+h) = f(g) + f(h).$$

Assim, f é um homomorfismo de grupo. Mostremos a unicidade de f. Seja $f' : G \to Hom(X, \prod_I C_i)$ um homomorfismo de grupo tal que $Hom(X, \pi_i)f' = f_i$, para todo $i \in I$. Seja $g \in G$.

$$\pi_i f'(g) = f_i(g) = \pi_i f(g), \text{ para todo } i \in I.$$

Pela unicidade de $f(g)$, temos

$$f(g) = f'(g).$$

Logo, $f = f'$. Portanto, $Hom(X, \prod_I C_i)$ é um produto de $(Hom(X, C_i))_{i\in I}$. Pela Proposição 1.1.12, $Hom(X, \prod_I C_i) \cong \prod_I Hom(X, C_i)$. □

Se $\alpha_i : B_i \to C_i$, para todo $i \in I$, é uma família de morfismos, então os morfismos compostos $\prod B_i \to B_i \to C_i$ induzem um morfismo $\alpha : \prod B_i \to \prod C_i$.

Proposição 1.1.14. *Se $\alpha_i : B_i \to C_i$, para todo $i \in I$, são monomorfismos, então o morfismo induzido $\alpha : \prod_I B_i \to \prod_I C_i$ é um monomorfismo.*

Demonstração. Sejam $\xi, \eta : X \to \prod B_i$ morfismos tais que $\alpha\xi = \alpha\eta$. Então $\rho_i\alpha\xi = \rho_i\alpha\eta$, sendo ρ_i os morfismos canônicos $\prod C_i \to C_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\xi"] \arrow[r, shift right, "\eta"'] & \prod B_i \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_i"] & \prod C_i \arrow[d, "\rho_i"] \\ & B_i \arrow[r, "\alpha_i"] & C_i \end{tikzcd}$$

Como $\rho_i\alpha = \alpha_i\pi_i$, para todo $i \in I$, temos $\alpha_i\pi_i\xi = \alpha_i\pi_i\eta$. Como α_i são morfismos, $\pi_i\xi = \pi_i\eta$, para todo $i \in I$. Pela unicidade da fatoração sobre $\prod B_i$, $\xi = \eta$. Logo, α é monomorfismo. □

De modo dual, define-se também o coproduto.

Definição 1.1.15. Um *coproduto* de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos de $\mathcal{C}$ é um objeto C junto com morfismos $l_i : C_i \to C$, para todo $i \in I$, tal que, para cada objeto X e morfismos $\xi_i : C_i \to X$, para todo $i \in I$ existe um único morfismo $\xi : C \to X$ com $\xi l_i = \xi_i$, para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "\xi"] & X \\ C_i \arrow[u, "l_i"] \arrow[ur, "\xi_i"] & \end{tikzcd}$$

De modo análogo à Proposição 1.1.12 podemos provar que o coproduto de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de objetos de C é único a menos de isomorfismo.

Denotamos o coproduto por $\bigoplus_I C_i$ e os morfismos canônicos $l_i : C_i \to \bigoplus_I C_i$ são chamamos de *injeções*.

Proposição 1.1.16. *Sejam $(C_i)_I$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$ e X um objeto de $\mathcal{C}$. Então,*

$$Hom(\bigoplus_I C_i, X) \cong \prod_I Hom(C_i, X).$$

Demonstração. Sejam $Hom(l_i, X) : Hom(\bigoplus_I C_i, X) \to Hom(C_i, X)$ os morfismos induzidos das injeções. Vamos mostrar que $Hom(\bigoplus_I C_i, X)$ e $Hom(l_i, X)$ são um produto da família de grupos abelianos $(Hom(C_i, X))_{i\in I}$. Seja G um grupo abeliano e para cada $i \in I$ $f_i : G \to Hom(C_i, X)$ homomorfismos de grupos. Para cada $g \in G$, temos $f_i(g) \in Hom(C_i, X)$. Pela definição de coproduto,

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_I C_i \arrow[r, dashed, "f(g)"] & X \\ C_i \arrow[u, "l_i"] \arrow[ur, "f_i(g)"'] & \end{tikzcd}$$

existe um único morfismo $f(g) : X \to \bigoplus_I C_i$ tal que $f(g)l_i = f_i(g)$, para cada $i \in I$. Deste modo, temos uma aplicação $f : G \to Hom(\bigoplus_I C_i, X)$ tal que $f(g)l_i = f_i(g)$, para todo $g \in G$ e $i \in I$. Sejam $a, b \in G$. Então

$$f(a+b)l_i = f_i(a+b) = f_i(a) + f_i(b) = f(a)l_i + f(b)l_i = (f(a) + f(b))l_i.$$

Pela unicidade da fatoração de $f_i(a+b)$ por $\bigoplus_I C_i$, temos $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Logo, f é homomorfismo de grupo. Falta mostrar a unicidade de f. Seja $f' : G \to Hom(\bigoplus_I C_i, X)$ tal que $Hom(l_i, X)f' = f_i$, para cada $i \in I$. Seja $g \in G$. Temos

$$Hom(l_i, X)f'(g) = f_i(g) \Rightarrow f'(g)l_i = f_i(g) = f(g)l_i.$$

Pela unicidade da fatoração de $f_i(g)$ sobre $\bigoplus_I C_i$, temos $f(g) = f'(g)$. Logo, $f = f'$. Portanto, $Hom(\bigoplus_I C_i, X)$ com $Hom(l_i, X)$ é o produto de $(Hom(C_i, X))_{i\in I}$. Assim, obtemos o isomorfismo. $\square$

Proposição 1.1.17. *Se $\alpha_i : B_i \to C_i$, $i \in I$, são epimorfismos, então o morfismos induzidos $\alpha : \bigoplus_I B_i \to \bigoplus_I C_i$ é um epimorfismo.*

Quando todos os C_i são iguais a um certo objeto C, usamos a notação C^I e $C^{(I)}$ para produto e coproduto, respectivamente.

Seja $(C_i)_I$ uma família de objetos tal que $\prod_I C_i$ e $\bigoplus_I C_i$ existem. Para cada $j \in I$ definimos $\delta_{ij} : C_j \to C_i$ como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Pela definição de produtos existe um único morfismo $\iota'_j : C_j \to \prod_I C_i$ tal que $\pi_i \iota'_j = \delta_{ij}$. Disto segue, em particular, que cada projeção π_i é um epimorfismo. Dualmente, o morfismo δ_{ij} induz $\pi'_i : \bigoplus_I C_j \to C_i$ tal que $\pi'_i \iota_j = \delta_{ij}$, e as injeções ι_j são, portanto, monomorfismos.

Assumimos agora que I é finito, digamos $I = \{1, \cdots, n\}$. Neste caso temos $\iota'_1\pi_1 + \cdots + \iota'_n\pi_n = 1$, pois para cada C_i obtemos

$$\pi_i(\iota'_1 + \cdots + l'_n\pi_n) = \pi_i\iota'_i\pi_i = \pi_i = \pi_i.1,$$

e a unicidade da fatoração sobre o produto implica $\iota'_1\pi_1 + \cdots + \iota'_n\pi_n = 1$. Para um coproduto finito obtemos também $\iota_1\pi'_1 + \cdots + \iota_n\pi'_n = 1$.

Proposição 1.1.18. *Suponha que existam morfismos $\iota_i : C_i \to C$ e $\pi_i : C \to C_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ tais que*

$$\pi_i\iota_j = \delta_{ij} \text{ e } \iota_1\pi_1 + \cdots + \iota_n\pi_n = 1.$$

Então C é um produto e um coproduto dos objetos C_i, com projeções π_i e injeções ι_i.

Demonstração. Por simetria é suficiente mostrar que C é um produto. Suponha que sejam dados morfismos $\xi_i : X \to C_i$. Defina $\xi : X \to C$ com $\xi = \iota_1\xi_1 + \cdots + \iota_n\xi_n$. Logo $\pi_j\xi = \pi_j\iota_1\xi_1 + \cdots + \pi_j\iota_n\xi_n = \xi_j$, como desejado. Há apenas uma escolha para ξ, pois se $\xi' : X \to C$ é tal que $\pi_i\xi' = \xi_i$, então $\xi' = (\iota_1 + \cdots + \iota_n\pi_n)\xi' = \iota_1\pi_1 + \cdots + \iota_n\xi_n = \xi$. $\square$

Quando o conjunto de índices é finito, denotamos $C_1\times\cdots\times C_n$ e $C_1\oplus\cdots\oplus C_n$, o produto e o coproduto, respectivamente.

É conveniente usar notação de matriz para morfismos entre produtos finitos. Um morfismo $\beta : \prod_J \beta_j \to \prod_I C_i$, com I e J finitos, é denotado pela matriz (β_{ij}), com $\beta_{ij} = \pi_i^C \beta \iota_j^B : B_j \to C_i$.

Definição 1.1.19. Uma categoria é chamada de *aditiva* se é preaditiva, tem um objeto zero e tem produtos e coprodutos finitos.

1.2 Categorias Abelianas

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria preaditiva em que todos os morfismos tem núcleo e conúcleo. Para um morfismo $\alpha : B \to C$ existe uma fatoração canônica

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha) \arrow[r, "ker(\alpha)"] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, dashed, "\beta"] & C \arrow[r, "coker(\alpha)"] & Coker(\alpha) \\
& Coker(ker(\alpha)) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & Ker(coker(\alpha)) \arrow[u, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

na qual $\bar{\alpha}$ é obtido da seguinte maneira: se $coker(\alpha)\alpha = 0$, então $\alpha = \mu\beta$, para algum $\beta : B \to Ker(coker(\alpha))$. Assim, $\mu\beta ker(\alpha) = \alpha ker(\alpha) = 0$ o que implica $\beta ker(\alpha) = 0$, visto que μ é um monomorfismo e, consequentemente, β se fatora como $\beta = \bar{\alpha}\lambda$. Chamamos esta fatoração de *análise* de α.

Definição 1.2.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ é *abeliana* se:

A 1 $\mathcal{C}$ é preaditiva.

A 2 Toda família finita de objetos tem um produto (e coproduto).

A 3 Todo morfismo tem um núcleo e conúcleo.

A 4 Para todo morfismo α, $\bar{\alpha} : Coker(ker(\alpha)) \to Ker(coker(\alpha))$ é um isomorfismo.

Proposição 1.2.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $\alpha : A \to B$ um morfismo de $\mathcal{C}$.*

1. *Se α é um monomorfismo, então $\alpha = ker(coker(\alpha))$.*

2. *Se α é um epimorfismo, então $\alpha = coker(ker(\alpha))$.*

3. *Se α é um monomorfismo e um epimorfismo, então α é um isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $\lambda = coker(ker(\alpha))$, $\mu = ker(coker(\alpha))$ e o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
Ker(\alpha) \arrow[r, "ker(\alpha)"] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] & B \arrow[r, "coker(\alpha)"] & Coker(\alpha) \\
& Coker(ker(\alpha)) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & Ker(coker(\alpha)) \arrow[u, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

1. Se α é monomorfismo, então $Ker(\alpha) = 0$. Como $1_A(ker(\alpha)) = 0$, existe um único $\lambda' : Coker(ker(\alpha)) \to A$ tal que $\lambda'\lambda = 1_A$. Note que $\lambda = \lambda(\lambda'\lambda) = (\lambda\lambda')\lambda$. Como λ é epimorfismo, $\lambda\lambda' = 1_{Coker(ker(\alpha))}$. Logo λ é um isomorfismo. Seja $f : X \to B$ um morfismo tal que $coker(\alpha)f = 0$. Como $\mu = ker(coker(\alpha))$, existe um único $g : X \to Ker(coker(\alpha))$ tal que $\mu g = f$. Considere o morfismo $h = \lambda^{-1}\bar{\alpha}^{-1}g : X \to A$. Segue $\alpha h = \mu\bar{\alpha}\lambda h = \mu g = f$. Se $h' : X \to A$ é um morfismo tal que $\alpha h' = f$, então $\alpha h' = \alpha h$. Como $\bar{\alpha}$ e λ são isomorfismos e μ é um monomorfismo, $\alpha = \mu\bar{\alpha}\lambda$ é um monomorfismo. Logo, $h' = h$. Portanto, $\alpha = \mu\bar{\alpha}\lambda = ker(coker(\alpha))$.

2. Se α é epimorfismo, então $Coker(\alpha) = 0$. Como $coker(\alpha)1_B = 0$, existe um único $\mu' : B \to Ker(coker(\alpha))$ tal que $\mu\mu' = 1_B$. Note que, $\mu(\mu'\mu) = \mu$. Como μ é monomorfismo, $\mu'\mu = 1_{Ker(coker(\alpha))}$. Então, μ é isomorfismo. Seja $f : A \to X$ um morfismo tal que $fker(\alpha) = 0$. Como $\lambda = coker(ker(\alpha))$, existe um único $g : Coker(ker(\alpha) \to X$ tal que $g\lambda = f$. Considere o morfismo $h = g\bar{\alpha}^{-1}\mu^{-1} : B \to X$. Segue $h\alpha = h\mu\bar{\alpha}\lambda = g\lambda = f$. Se $h' : B \to X$ é um morfismo tal que $h'\alpha = f$, então $h'\alpha = h\alpha$. Como $\bar{\alpha}$ e μ são isomorfismos e λ é um epimorfismo, $\alpha = \mu\bar{\alpha}\lambda$ é um epimorfismo. Logo, $h' = h$. Portanto, $\alpha = \mu\bar{\alpha}\lambda = coker(ker(\alpha))$.

3. Se α é monomorfismo e epimorfismo, então λ e μ são isomorfismos. Logo, $\alpha = \mu\bar{\alpha}\lambda$ é um isomorfismo.

$\square$

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Quando A é um subobjeto de B, frequentemente escrevemos $\frac{B}{A}$ para o objeto quociente $Coker(A \to B)$ de B.

Para todo morfismo $\alpha : A \to B$ definimos a *imagem* de α como $Im(\alpha) = Ker(coker(\alpha))$. Assim α tem uma fatoração

$$A \xrightarrow{\alpha'} Im\alpha \xrightarrow{\gamma} B$$

na qual α' é um epimorfismo e γ é um monomorfismo. Se A' é um subobjeto de A, denotamos por $\alpha(A')$ a imagem do morfismo composto $A' \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$. Observe que se α é um epimorfismo então $Im(\alpha) \cong B$.

Dizemos que uma sequência da forma

$$\cdots \longrightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} C_i \xrightarrow{\alpha_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots \qquad (1.1)$$

é uma *sequência exata em* C_i se $Im(\alpha_{i+1}) = Ker(\alpha_i)$ (iguais como subobjetos de C_i). E a sequência (1.1) é *exata* se é exata em cada C_i.

Proposição 1.2.3. *Um morfismo* $f : A \to B$*:*

1. *é um monomorfismo se, e somente se, a sequência* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ *é exata.*

2. *é um epimorfismo se, e somente se, a sequência* $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ *é exata.*

3. é um isomorfismo se, e somente se, a sequência $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$

Chamamos de *sequência exata curta* uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Também chamamos esta sequência exata curta de uma *extensão* de A por C.

Dizemos que uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde se existe um morfismo $j : C \to B$ tal que $gj = 1_C$.

Se uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

cinde, então podemos mostrar que $B \cong A \oplus C$.

Seja C um objeto de $\mathcal{C}$ com uma família $(C_i)_I$ de subobjetos e assuma que $\bigoplus\limits_I C_i$ existe. O monomorfismo $C_i \to C$ induz um morfismo $\alpha : \bigoplus\limits_I C_i \to C$. A imagem de α é chamada *soma dos subobjetos* C_i e é denotada por $\sum\limits_I C_i$. Dizemos que a soma $\sum\limits_I C_i$ é uma *soma direta* se α é um monomorfismo. Neste caso dizemos também que a família de subobjetos $(C_i)_I$ é independente. Além disso, pela análise do morfismo α temos um isomorfismo $\bigoplus\limits_I C_i \cong \sum\limits_I C_i$. De fato, $Im(\alpha) = Ker(coker(\alpha))$ e considere o seguinte diagrama comutativo, com $\overline{\alpha}$ um isomorfismo e $B = \bigoplus\limits_I C_i$:

$$\begin{tikzcd}
Ker\alpha \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"'] & C \arrow[r] & Coker\alpha \\
& Coker(ker\alpha) \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & Ker(coker\alpha) \arrow[u, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Como α é monomorfismo, temos $Ker(\alpha) = 0$. Segue que λ é isomorfismo. Como $\overline{\alpha}$ é isomorfismo, temos $Ker(coker(\alpha)) \cong B$. Ou seja,

$$\sum_I C_i = Im(\alpha) = Ker(coker(\alpha)) \cong B = \bigoplus_I C_i.$$

Dualmente, o epimorfismo $C \to \frac{C}{C_i}$ induz $\beta : C \to \prod\limits_I \dfrac{C}{C_i}$ (quando o produto existe). O núcleo de β é a *interseção* dos subobjetos C_i e é denotado por $\bigcap\limits_I C_i$.

Seja $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor aditivo entre categorias abelianas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

1. T é *exato à esquerda* se a exatidão de $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ implica a exatidão de $0 \longrightarrow TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC$.

2. T é *exato à direita* se a exatidão de $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ implica a exatidão de $TA \xrightarrow{Tf} TB \xrightarrow{Tg} TC \longrightarrow 0$.

3. T é *exato* se é exato à direita e à esquerda.

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana e $\mathcal{B}$ é uma subcategoria que também é abeliana, então $\mathcal{B}$ é dita uma *subcategoria abeliana* de $\mathcal{C}$ se o funtor inclusão $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é exato.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Um objeto C é *projetivo* se o funtor $Hom(C, -) : \mathcal{C} \to Ab$ é exato, e é *injetivo* se $Hom(-, C) : \mathcal{C}^{op} \to Ab$ é exata.

Se $(C_i)_I$ uma família de objetos, então podemos mostrar que

1. $\bigoplus\limits_I C_i$ é projetivo se, e somente se, cada C_i é projetivo.

2. $\prod\limits_I C_i$ é injetivo se, e somente se, cada C_i é injetivo.

A categoria C tem *suficientes projetivos* se todo objeto de $\mathcal{C}$ é um objeto quociente de um objeto projetivo, e tem *suficientes injetivos* se todo objeto é um subobjeto de um objeto injetivo.

1.2.1 Pullbacks e Pushouts

Assumimos aqui que $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana.

Definição 1.2.4. Sejam $\alpha_1 : C_1 \to C$ e $\alpha_2 : C_2 \to C$ morfismos em $\mathcal{C}$. Um *pullback* de α_1 e α_2 é um objeto P e dois morfismos $\pi_1 : P \to C_1$, $\pi_2 : P \to C_2$ tais que:

1. $\alpha_1\pi_1 = \alpha_2\pi_2$.

2. Para todo objeto X e morfismos $\xi_1 : X \to C_1$, $\xi_2 : X \to C_2$ com $\alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2$, existe um único $\gamma : X \to P$ tal que $\pi_1\gamma = \xi_1$ e $\pi_2\gamma = \xi_2$.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \end{tikzcd}$$

é assim chamado de um *quadrado pullback*.

De modo dual definimos *pushout*.

Definição 1.2.5. Sejam $\beta_1 : C \to C_1$ e $\beta_2 : C \to C_2$ morfismos em $\mathcal{C}$. Um *pushout* de β_1 e β_2 é um objeto D e dois morfismos $\iota_1 : C_1 \to D$, $\iota_2 : C_2 \to D$ tais que:

1. $\iota_1\beta_1 = \iota_2\beta_2$.

2. Para todo objeto X e morfismos $\xi_1 : C_1 \to X$, $\xi_2 : C_2 \to X$ com $\xi_1\beta_1 = \xi_2\beta_2$, existe um único $\gamma : D \to X$ tal que $\gamma\iota_1 = \xi_1$ e $\gamma\iota_2 = \xi_2$.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & C_2 \arrow[d, dashed, "\iota_2"] \\ C_1 \arrow[r, dashed, "\iota_1"] & D \end{tikzcd}$$

é chamado de um *quadrado pushout*.

Dizemos que um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "BC"] & C_2 \arrow[d, "g_2"] \\ C_1 \arrow[r, "g_1"] & B \end{tikzcd}$$

é *bicartesiano* se A, f_1, f_2 é um pullback de g_1, g_2 e B, g_1, g_2 é um pushout de f_1, f_2.

Proposição 1.2.6. *O pullback é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1 : C_1 \to C$ e $\alpha_2 : C_2 \to C$ morfismos em $\mathcal{C}$ e P_1 junto com $\pi_1 : P_1 \to C_1$ e $\pi_2 : P_1 \to C_2$ e P_2 junto com $\rho_1 : P_2 \to C_1$ e $\rho_2 : P_2 \to C_2$ dois pullbacks. Como P_1, π_1, π_2 é um pullback, existe um único morfismo $\gamma_2 : P_2 \to P_1$ tal que $\pi_1\gamma_2 = \rho_1$ e $\pi_2\gamma_2 = \rho_2$. Como P_2, ρ_1, ρ_2 é um pullback, existe um único morfismo $\gamma_1 : P_1 \to P_2$ tal que $\rho_1\gamma_1 = \pi_1$ e $\rho_2\gamma_1 = \pi_2$. Note que

$$\begin{aligned} \pi_1(\gamma_2\gamma_1) &= \rho_1\gamma_1 = \pi_1 \quad \text{e} \quad \pi_1 1_{P_1} = \pi_1, \\ \pi_2(\gamma_2\gamma_1) &= \rho_2\gamma_1 = \pi_2 \quad \text{e} \quad \pi_2 1_{P_1} = \pi_2. \end{aligned}$$

Pela unicidade da definição de pullback, $\gamma_2\gamma_1 = 1_{P_1}$. De modo análogo, $\gamma_1\gamma_2 = 1_{P_2}$. Logo, $P_1 \cong P_2$. □

Dado um quadrado pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \end{tikzcd}$$

podemos denotar o objeto P por $C_1 \times_C C_2$.

Proposição 1.2.7. *O pushout é único a menos de isomorfismo.*

A demonstração da unicidade do pushout é análoga à unicidade do pullback.

Dado um quadrado pushout

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[dr, phantom, "PO"] & C_2 \arrow[d, dashed, "\iota_2"] \\ C_1 \arrow[r, dashed, "\iota_1"] & D \end{tikzcd}$$

podemos denotar o objeto D por $C_1 \cup_C C_2$.

Proposição 1.2.8. *Se $\alpha : B \to C$ é um morfismo, então um diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

é um pullback se, e somente se, $P = Ker(\alpha)$.

Demonstração. Seja

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "PB"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

um quadrado pullback. Então $\alpha\pi = 0$. Seja $f : X \to B$ tal que $\alpha f = 0$. Pela definição de pullback, existe um único $g : X \to P$ tal que $\pi g = f$ e $(P \to 0)g = 0$. Logo, $P = Ker(\alpha)$.
Reciprocamente sejam $\pi : P \to B$ o núcleo de $\alpha : B \to C$ e $f : X \to B$ e $X \to 0$ tais que $\alpha f = X \to 0 \to C = 0$. Pela definição de núcleo, existe um único morfismo $g : X \to P$ tal que $\pi g = f$ e, pela definição de objeto zero, $(P \to 0)g = X \to 0$. Logo,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & C \end{tikzcd}$$

é um quadrado pullback. □

Proposição 1.2.9. *Se $\alpha : A \to B$ é um morfismo, então um diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\iota"] \\ 0 \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

é um pushout se, e somente se, $D = Coker(\alpha)$.

A demonstração da Proposição 1.2.9 é análoga à demonstração da Proposição 1.2.8.

Proposição 1.2.10. *Sejam C_1 e C_2 objetos em $\mathcal{C}$. Então um diagrama*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & C_2 \arrow[d] \\ C_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é um pullback se, e somente se, $P = C_1 \times C_2$.

Proposição 1.2.11. *Todo pullback pode ser construído com o uso de núcleos e produtos, isto é, sejam $\alpha_1 : C_1 \to C$ e $\alpha_2 : C_2 \to C$ morfismos. Então $P = Ker(\alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2)$, $p_1 = \pi_1 ker(\alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2)$, $p_2 = \pi_2 ker(\alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2)$ é um pullback de α_1, α_2, em que $\pi_1 : C_1 \times C_2 \to C_1$ e $\pi_2 : C_1 \times C_2 \to C_2$ são as projeções.*

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "p_1"'] & & C_2 \arrow[dd, "\alpha_2"] \\ & C_1 \times C_2 \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\ C_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] & & C. \end{tikzcd}$$

Sejam $\beta_2 : X \to C_2$ e $\beta_1 : X \to C_1$ tais que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$. Pela definição de produto, existe um único morfismo $\beta : X \to C_1 \times C_2$ tal que $\pi_1\beta = \beta_1$ e $\pi_2\beta = \beta_2$. Então,

$$(\alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2)\beta = \alpha_1\pi_1\beta - \alpha_2\pi_2\beta = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Pela definição de núcleo, existe um único $f : X \to P$ tal que

$$kf = \beta.$$

Assim,

$$p_1 f = \pi_1 kf = \pi_1\beta = \beta_1 \quad \text{e} \quad p_2 f = \pi_2 kf = \pi_2\beta = \beta_2.$$

Seja $f' : X \to P$ tal que $p_1 f' = \beta_1$ e $p_2 f' = \beta_2$. Segue que $\beta_1 = \pi_1 kf'$ e $\beta_2 = \pi_2 kf'$. Pela unicidade de β, $kf' = \beta$ e, pela unicidade de f, $f' = f$. □

Proposição 1.2.12. *Seja*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "PB"] & C_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ C_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \end{tikzcd}$$

um quadrado pullback. Então:

1. *Se α_1 é um monomorfismo, então p_2 também é.*

2. *Se α_1 é um epimorfismo, então p_2 também é.*

3. *Se α_1 é o núcleo de um morfismo $\beta : C \to D$, então p_2 é o núcleo de $\beta\alpha_2$.*

Demonstração. 1. Se $\xi : X \to P$ é um monomorfismo tal que $p_2\xi = 0$, então $\alpha_1 p_1 \xi = \alpha_2 p_2 \xi = 0$ e, por α_1 ser monomorfismo, $p_1\xi = 0$. A unicidade da fatoração sobre P implica $\xi = 0$.

2. Usando a Proposição 1.2.11 obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\ k\ } C_1 \times C_2 \xrightarrow{\ \mu\ } C \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

na qual $\mu = \alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2$ é um epimorfismo, pois $\mu\iota_1 = \alpha_1$ é um epimorfismo, sendo $\iota_1 : C_1 \to C_1 \times C_2$ a injeção e assim $\mu = (coker(ker(\mu))$. Suponha que $\xi : C_2 \to X$ é um morfismo tal que $\xi p_2 = 0$. Então $0 = \xi p_2 = \xi\pi_2 k$ implica que existe $\eta : C \to X$ tal que $\eta\mu = \xi\pi_2$, pois $\mu = coker(k)$. Isto nos dá $\eta\alpha_1 = \eta\mu\iota_1 = \xi\pi_2\iota_1 = 0$ e α_1 um epimorfismo implica $\eta = 0$. Mas então $\xi\pi_2 = 0$ e, consequentemente, $\xi = 0$.

3. Temos $\beta\alpha_2 p_2 = \beta\alpha_1 p_1 = 0$ e se $\xi : X \to C_2$ é um morfismo tal que $\beta\alpha_2\xi = 0$, então $\alpha_2\xi$ fatora sobre $\alpha_1 = ker(\beta)$ por um morfismo $\eta : X \to C_1$, com $\alpha_1\eta = \alpha_2\xi$. Consequentemente, ξ fatora sobre o pullback P e a unicidade é pelo fato de p_2 ser monomorfismo.

$\square$

Quando α_1 é um monomorfismo, define-se o objeto pullback P como a *imagem inversa* de C_1 sob α_2 e denota-se P por $\alpha_2^{-1}(C_1)$.

Se α_1 e α_2 são monomorfismos, então $P = C_1 \cap C_2$. De fato, Seja C um objeto de uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ com C_1 e C_2 subobjetos de C. Considere os objetos quocientes $\frac{C}{C_1}$ e $\frac{C}{C_2}$. Os epimorfismos $C \xrightarrow{a_1} \frac{C}{C_1}$ e $C \xrightarrow{a_2} \frac{C}{C_2}$ induzem um morfismo $\beta : C \to \frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2}$.

$$\begin{tikzcd}
\frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2} \arrow[d, "\rho_i"] & C \arrow[l, dashed, "\beta"'] \arrow[dl, "a_i"] \\
\frac{C}{C_i} &
\end{tikzcd}$$

O núcleo de β é a interseção dos subobjetos C_1, C_2. Vamos mostrar que $C_1 \cap C_2$ é o pullback dos monomorfismos $\alpha_1 : C_1 \to C$, $\alpha_2 : C_2 \to C$. Note que

$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha_1} C \xrightarrow{a_1} \frac{C}{C_1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\alpha_2} C \xrightarrow{a_2} \frac{C}{C_2} \longrightarrow 0$$

são sequências exatas, com $\alpha_1 = ker(a_1)$ e $\alpha_2 = ker(a_2)$. Como $u : C_1 \cap C_2 \to C$ é o núcleo de β e $\rho_1\beta = a_1$, $\rho_2\beta = a_2$, temos $a_1u = \rho_1\beta u = 0$ e $a_2u = \rho_2\beta u = 0$, sendo ρ_1 e ρ_2 as projeções. Então,

$$\begin{tikzcd}
C_i \arrow[r, "\alpha_i"] & C \arrow[r, "a_i"] & \frac{C}{C_i} \\
& C_1 \cap C_2 \arrow[ul, dashed, "a_i'"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

com $i \in \{1, 2\}$, existem únicos $a_1' : C_1 \cap C_2 \to C_1$ e $a_2' : C_1 \cap C_2 \to C_2$ tais que $u = \alpha_1 a_1' = \alpha_2 a_2'$. Assim temos um quadrado comutativo.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \cap C_2 \arrow[r, "a_1'"] \arrow[d, "a_2'"] & C_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\
C_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & C.
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Sejam $f : X \to C_1$ e $g : X \to C_2$ morfismos de $\mathcal{C}$ tais que $\alpha_1 f = \alpha_2 g$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & & \\
& C_1 \cap C_2 \arrow[r, "a_1'"] \arrow[d, "a_2'"] & C_1 \arrow[d, "\alpha_1"] & & \\
& C_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & C \arrow[r, "\beta"] & \frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2} \arrow[r, "\rho_i"] & \frac{C}{C_i}.
\end{tikzcd}$$

Note que

$$\rho_1\beta\alpha_1 f = a_1\alpha_1 f = 0,$$
$$\rho_2\beta\alpha_1 f = \rho_2\beta\alpha_2 g = a_2\alpha_2 g = 0$$

Pela definição de produto, existe um único morfismo $x : X \to \frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2}$ tal que

$$\rho_1 x = \rho_1\beta\alpha_1 f = 0 = \rho_1 0,$$
$$\rho_2 x = \rho_2\beta\alpha_1 f = 0 = \rho_2 0.$$

$$\begin{tikzcd}
\frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2} \arrow[d, "\rho_i"] & X \arrow[l, dashed, "x"'] \arrow[dl, "\rho_i\beta\alpha_1 f = 0"] \\
\frac{C}{C_i}. &
\end{tikzcd}$$

Pela unicidade de x, temos $\beta\alpha_1 f = 0$. Pela definição de núcleo, existe um único $h : X \to C_1 \cap C_2$ tal que $uh = \alpha_1 f$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 \cap C_2 \arrow[r, "u"] & C \arrow[r, "\beta"] & \frac{C}{C_1} \times \frac{C}{C_2} \\
& X \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "\alpha_1 f"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Falta mostrar que $a_1'h = f$ e $a_2'h = g$. Como α_i é monomorfismo, com $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 f = uh = \alpha_1 a_1' h \quad &\Rightarrow \quad f = a_1' h \\
\alpha_2 g = \alpha_1 f = uh = \alpha_2 a_2' h \quad &\Rightarrow \quad g = a_2' h.
\end{aligned}$$

Logo, $C_1 \cap C_2$ é o pullback de α_1, α_2.

Seja $\mu = \alpha_1\pi_1 - \alpha_2\pi_2$, com π_1 e π_2 projeções. Note que

$$\mu\iota_1 = \alpha_1\pi_1\iota_1 - \alpha_2\pi_2\iota_1 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad \mu(-\iota_2) = -\alpha_1\pi_1\iota_2 + \alpha_2\pi_2\iota_2 = \alpha_2$$

e observe também que ι_2 e $-\iota_2$ são morfismos isomorfos e assim $C_1 \oplus C_2$, com ι_1, $-\iota_2$ também é um coproduto de C_1 e C_2. Desse modo, μ é o morfismo induzido por α_1 e α_2. Como demonstrado na Proposição 1.2.12 item 2, μ é um epimorfismo. Então $C_1 + C_2 \cong C$. Além disso, $C_1 \oplus C_2 \cong C_1 \times C_2$. Assim, temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow C_1 \cap C_2 \xrightarrow{k} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{\gamma} C_1 + C_2 \longrightarrow 0. \tag{1.4}$$

Segue que a soma $C_1 + C_2$ é direta se, e somente se, $C_1 \cap C_2 = 0$.

Proposição 1.2.13. *Se C_1 e C_2 são subobjetos de C, então*

$$\frac{(C_1 + C_2)}{C_1} \cong \frac{C_2}{(C_1 \cap C_2)}.$$

Demonstração. Com o uso da Proposição 1.2.12 obtemos um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_1 \cap C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & \frac{(C_1+C_2)}{C_1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_1 + C_2 \arrow[r] & \frac{(C_1+C_2)}{C_1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Visto que o quadrado à esquerda é um pullback. Com a exatidão da linha de cima de (1.5) tem-se a conclusão desejada. □

Outra consequência da Proposição 1.2.12 é que pode-se construir o pullback de uma sequência exata curta $0 \longrightarrow C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C \longrightarrow 0$ com relação a um morfismo $C_2 \to C$. Para isto consideramos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_0 \arrow[r, "\alpha_0"] & C_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

no qual o quadrado à direita é um diagrama pullback e β_0 é induzido por α_0 e o morfismo zero $C_0 \to C_2$. Resta mostrar que β_0 é o núcleo de β. Suponha que $\xi : X \to P$ é tal que $\beta\xi = 0$. Então $\alpha_1\gamma\xi = 0$, assim $\gamma\xi = \alpha_0\lambda$, para algum $\lambda : X \to C_0$. Agora $\beta_0\lambda$ e ξ dão o mesmo resultado quando compostos com γ e β, assim $\xi = \beta_0\lambda$ pela propriedade universal de pullbacks. Conseguentemente, a linha de cima de (1.6) é exata.

Quando $\alpha_2 : C_2 \to C$ é um monomorfismo, esta construção mostra que cada subobjeto C_2 de $\frac{C_1}{C_0}$ é da forma $\frac{P}{C_0}$, para algum subobjeto P de C_1.

1.2.2 Geradores e cogeradores

Considere duas categorias aditivas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e um funtor aditivo $T : C \to D$. O funtor T é dito fiel se $T(\alpha) \neq 0$, para todo morfismo $\alpha \neq 0$ em $\mathcal{C}$.

Proposição 1.2.14. *Um funtor exato T é fiel se, e somente se, $T(C) \neq 0$ para todo objeto não nulo C.*

Demonstração. Seja $C \in \mathcal{C}$ com $T(C) = 0$, segue que $T(1_C) = 1_{T(C)} = 0$. Como T é fiel, $1_C = 0$. Logo, $C = 0$.
Reciprocamente, se $\alpha \neq 0$ em $\mathcal{C}$, então $Im(\alpha) \neq 0$ e assim $T(Im(\alpha)) \neq 0$. A exatidão de T implica $T(Im(\alpha)) = Im(T(\alpha))$, assim $T(\alpha) \neq 0$. □

Um objeto C de $\mathcal{C}$ é um *gerador* para C se $Hom(C, -)$ é fiel e é um *cogerador* se $Hom(-, C)$ é fiel.

Proposição 1.2.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com coproduto. Se U é um gerador, então para todo objeto C, existe um epimorfismo $U^{(I)} \to C$, para algum conjunto indexado I.*

Demonstração. Seja $I = Hom(U, C)$ e defina $\varphi : U^{(I)} = \bigoplus_{\alpha \in I} U_\alpha \to C$ o morfismo induzido por $\alpha : U_\alpha = U \to C$, para cada $\alpha \in I$. Se $\gamma : C \to C'$ é um morfismo não-nulo, então o homomorfismo de grupo

$$\begin{array}{lll} Hom(U,\gamma): & Hom(U,C) & \to Hom(U,C') \\ & \alpha & \to \gamma\alpha \end{array}$$

é não-nulo, isto é, existe um $\alpha \in Hom(U, C)$ tal que $\gamma\alpha \neq 0$ e, consequentemente, $\gamma\varphi \neq 0$.

$$\begin{tikzcd} U^{(I)} \arrow[r, "\varphi"] & C \arrow[r, "\gamma"] & C' \\ U \arrow[u] \arrow[ur, "\alpha"] & & \end{tikzcd}$$

Isto mostra que φ é um epimorfismo. □

Proposição 1.2.16. *Se P é um objeto projetivo, então P é um gerador se, e somente se, existe um morfismo não nulo $P \to C$, para cada objeto C não nulo.*

Demonstração. Como P é projetivo, o funtor $Hom(P, -)$ é exato.
Se P é gerador, então $Hom(P, -)$ é fiel. Pela Proposição 1.2.14, para cada $C \neq 0$, temos $Hom(P, C) \neq 0$.
a recíproca segue diretamente das definições. □

Dualmente, temos os seguintes resultados. As demonstrações seguem de forma análoga.

Proposição 1.2.17. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produto. Se V é um cogerador, então, para todo objeto $\mathcal{C}$, existe um monomorfismo $C \to V^I$, para algum conjunto de índices I.*

Proposição 1.2.18. *Um objeto injetivo E é um cogerador se, e somente se, existe um morfismo não nulo $C \to E$ para cada $C \neq 0$.*

Uma categoria é dita *localmente pequena* se a classe de subobjetos de qualquer objeto é um conjunto.

Proposição 1.2.19. *Se $\mathcal{C}$ tem um gerador, então $\mathcal{C}$ é localmente pequena.*

Demonstração. Seja U um gerador e C um objeto. Para cada monomorfismo $\beta : B \to C$, seja $< \beta >$ o conjunto de todos os morfismos $U \to C$ que podem ser fatorados sobre β. Visto que $Hom(U, C)$ é um conjunto, é suficiente mostrar que se β e β' representam subobjetos diferentes, então $< \beta > \neq < \beta' >$. Visto que β e β' são não equivalentes, não pode acontecer que ambos monomorfismos $\gamma : B \cap B' \to B$ e $\gamma' : B \cap B' \to B'$ sejam isomorfismos, pois assim teríamos β e β' ($B \cong B'$) na mesma classe. Digamos que γ não o seja. Neste caso, γ não é um epimorfismo, assim $Coker(\gamma) \neq 0$. Consequentemente, existe $\alpha : U \to B$ tal que $coker(\gamma)\alpha \neq 0$, pois U é gerador. Então, α não pode ser fatorado por B', assim $< \beta > \neq < \beta' >$. □

Uma família $(U_i)_I$ de objetos da categoria abeliana $\mathcal{C}$ é uma *família de geradores* para $\mathcal{C}$ se, para cada morfismo não nulo $\alpha : B \to C$ em $\mathcal{C}$ existe um morfismo $\beta : U_i \to B$, para algum $i \in I$, tal que $\alpha\beta \neq 0$. Se $\mathcal{C}$ tem coprodutos, isto é equivalente dizer que $\bigoplus_I U_i$ é um gerador. Assim, a existência de uma família de geradores projetivos para $\mathcal{C}$ implica que $\mathcal{C}$ tem suficientes projetivos.

1.2.3 Categoria Funtor

Se $\mathcal{I}$ é uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ é uma categoria arbitrária, pode-se definir a categoria funtor $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, na qual os objetos são funtores $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ e os morfismos são as transformações naturais entre tais funtores. Sejam $\xi : F \to G$ e $\eta : G \to H$ duas transformações naturais e um morfismo $f : A \to B$ na categoria $\mathcal{I}$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} A & & F(A) & \xrightarrow{\xi_A} & G(A) & \xrightarrow{\eta_A} & H(A) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\ B & & F(B) & \xrightarrow{\xi_B} & G(B) & \xrightarrow{\eta_B} & H(B). \end{array}$$

Como os quadrados menores são comutativos, o quadrado maior também é comutativo. Então a composição $\eta\xi : F \to H$ também é uma trasformação natural. Para mostrar que a composição é associativa, basta lembrar que a composição de morfismos em $\mathcal{C}$ é associativa. Com efeito, sejam $\xi : F \to G$, $\eta : G \to H$ e $\kappa : H \to I$ transformações naturais entre funtores $F, G, H, I : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ e A um objeto de $\mathcal{I}$. Como $\xi_A : F(A) \to G(A)$, $\eta_A : G(A) \to H(A)$ e $\kappa_A : H(A) \to I(A)$ são morfismos em $\mathcal{C}$, $(\kappa_A\eta_A)\xi_A = \kappa_A(\eta_A\xi_A)$. Falta mostrar que existe uma transformação identidade, para cada funtor. De fato, seja $T : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. Tome a transformação identidade de T como a transformação $1_T : T \to T$ dada pelos morfismos identidade $1_{T(B)} : T(B) \to T(B)$, para cada objeto B na categoria $\mathcal{I}$. Se $\xi : R \to T$ e $\eta : T \to S$ são transformações naturais, então $1_{T(A)}\xi_A = \xi_A$ e $\eta_A 1_{T(A)} = \eta_A$, para todo objeto A em $\mathcal{I}$. Assim, $1_T\xi = \xi$ e $\eta 1_T = \eta$.

Denotaremos o conjunto de todas as transformações naturais $S \to T$ por $Nat(S, T)$. Como $\mathcal{I}$ é pequena, então $Nat(S, T)$ é um conjunto. Esse conjunto pode ser considerado como um subconjunto do produto dos conjuntos $Hom(S(i), T(i))$ tomado sobre todos objetos $i \in \mathcal{I}$.

Proposição 1.2.20. *Se $\mathcal{I}$ é uma categoria pequena e $\mathcal{C}$ é preaditiva (abeliana), então $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ é preaditiva (abeliana).*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{C}$ seja preaditiva. Sejam S e T funtores $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ e considere duas transformações naturais $\xi, \eta : S \to T$. A soma de transformações naturais $\xi + \eta$ é definida por $(\xi + \eta)_i = \xi_i + \eta_i \in Hom(S(i), T(i))$, para cada objeto i de $\mathcal{I}$. Como $Hom(S(i), T(i))$ é um grupo abeliano, $Nat(S, T)$ é um grupo abeliano. De modo análogo, a composição de transformações naturais é bilinear, ou seja, dadas as transformações naturais $\xi, \eta : S \to T$, $\kappa : T \to R$ e $\gamma : U \to S$, com $T, S, R, U : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, temos $\kappa(\xi + \eta) = \kappa\xi + \kappa\eta$ e $(\xi + \eta)\gamma = \xi\gamma + \eta\gamma$. Assim, a categoria $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ é preaditiva. Agora assuma que $\mathcal{C}$ seja abeliana. Vamos provar que $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ é uma categoria abeliana. Se $T_1, \cdots, T_n$ são funtores $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$, então um novo funtor T é definido por

$$T(i) = T_1(i) \times \cdots \times T_n(i),$$
$$T(\lambda) = T_1(\lambda) \times \cdots \times T_n(\lambda),$$

para objetos i e morfismos λ de $\mathcal{I}$. Verifica-se que o funtor $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ é um objeto da categoria $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, assim esta categoria tem produtos finitos. Para mostrar que ela tem núcleos, considere uma transformação natural $\eta : S \to T$. Defina um funtor $K : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ como

$$K(i) = Ker(\eta_i),$$
$$K(\lambda) = \text{induzido de } S(\lambda) \text{ pela restrição.}$$

Esta restrição decorre da definição de núcleo, ou seja, como $\eta_j(S(\lambda)ker(\eta_i)) = T(\lambda)(\eta_i ker(\eta_i)) = 0$, existe um único $K(\lambda) : K(i) \to K(j)$ tal que $ker(\eta_j)K(\lambda) = S(\lambda)ker(\eta_i)$, como no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccc} K(i) & \longrightarrow & S(i) & \xrightarrow{\eta_i} & T(i) \\ \downarrow{\scriptstyle K(\lambda)} & & \downarrow{\scriptstyle S(\lambda)} & & \downarrow{\scriptstyle T(\lambda)} \\ K(j) & \longrightarrow & S(j) & \xrightarrow{\eta_j} & T(j). \end{array}$$

Assim temos uma transformação natural $ker(\eta) : K \to S$. Como $\eta_i ker(\eta_i) = 0$, para todo $i \in \mathcal{I}$, temos $\eta ker(\eta) = 0$. Dado $\xi : R \to S$, temos $\eta\xi = 0$, isto é, $\eta_i\xi_i = 0$, para todo $i \in \mathcal{I}$, então, para cada $i \in \mathcal{I}$, existe um único $\gamma : R(i) \to K(i)$ tal que $ker(\eta_i)\gamma_i = \xi_i$. Deste modo, temos uma única transformação natural $\gamma : R \to K$ tal que $ker(\eta)\gamma = \xi$. Então, $ker(\eta)$ é o núcleo de η. Similarmente podemos mostrar que $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ tem conúcleos. Note que núcleos e conúcleos (bem como produtos) em $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ são construídos "ponto-a-ponto" utilizando os objetos de $\mathcal{I}$. Disto segue que a validade do Axioma A4 em $\mathcal{C}$ é herdado por $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, que assim é uma categoria abeliana. □

Assuma que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sejam categorias preaditivas e que $\mathcal{B}$ é pequena. Seja $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ a subcategoria plena de $Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ consistindo dos funtores aditivos. A categoria $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é também preaditiva.

Proposição 1.2.21. *Se $\mathcal{B}$ é uma categoria preaditiva pequena e $\mathcal{C}$ é abeliana, então $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é uma subcategoria abeliana de $Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.*

Demonstração. Se $T_1, \cdots, T_n$ são funtores aditivos $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, então também $T_1 \times \cdots \times T_n$ é aditivo. Similarmente, se $\eta : S \to T$ é uma transformação natural de funtores aditivos S e T, então o funtor K construído na demonstração da Proposição 1.2.20 é aditivo. A categoria $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é assim abeliana pelas mesmas razões que $Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ o é. O funtor inclusão $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \to Fun(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é claramente exato. □

De interesse particular são as categorias funtor $Hom(\mathcal{B}, Ab)$, porque elas generalizam a categoria dos módulos de maneira natural. Para cada objeto B de $\mathcal{B}$, denotemos h_B o funtor $Hom(-, B) : \mathcal{B}^{op} \to Ab$.

1.2.4 Limites e Colimites

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria preaditiva e seja I uma categoria pequena. Seja também um funtor $F : I \to \mathcal{C}$. Se X é um objeto de $\mathcal{C}$, para cada $i \in obj(I)$ atribuímos um morfismo $\alpha_i : X \to F(i)$, então a família (α_i) é chamada *compatível* se para todo $\lambda : i \to j$ em I temos $\alpha_j = F(\lambda)\alpha_i$.

Definição 1.2.22. Um limite de um funtor $F : I \to \mathcal{C}$ é um objeto $\varprojlim F$ em $\mathcal{C}$ e uma família compatível de morfismos $\pi_i : \varprojlim F \to F(i)$, tal que para cada outra família compatível $\xi_i : X \to F(i)$ existe um único $\xi : X \to \varprojlim F(i)$ com $\pi_i\xi = \xi_i$.

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F \arrow[r, "\pi_i"] & F(i) \\ X \arrow[u, dashed, "\xi"] \arrow[ur, "\xi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Pode-se mostrar que um limite de um funtor F é único a menos de isomorfismo.

Definição 1.2.23. Uma categoria preaditiva $\mathcal{C}$ é chamada *completa* se o limite existe para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ quando $\mathcal{I}$ é pequena.

Definição 1.2.24. Um colimite de um funtor $F : I \to \mathcal{C}$ é um objeto $\varinjlim F$ de $\mathcal{C}$ e uma família compatível de morfismos $\iota_i : F(i) \to \varinjlim F$ tal que, para cada família compatível $\xi_i : F(i) \to X$, existe um único morfismo $\xi : \varinjlim F \to X$ com $\xi\iota_i = \xi_i$

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F \arrow[d, dashed, "\xi"] & F(i) \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\xi_i"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

Uma categoria preaditiva $\mathcal{C}$ é chamada *cocompleta* se o limite existe para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ quando $\mathcal{I}$ é pequena. Dizemos que uma categoria preaditiva $\mathcal{C}$ é *bicompleta* se é completa e cocompleta.

Seja I um conjunto parcialmente ordenado que é chamado *dirigido* se, para todo par $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$. Considere I como uma categoria. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria arbitrária, então um funtor $I \to \mathcal{C}$ é chamado de um *sistema direto* em $\mathcal{C}$, enquanto um funtor $I^{op} \to \mathcal{C}$ é um *sistema inverso* em $\mathcal{C}$.

Definição 1.2.25. Seja I um conjunto dirigido. O colimite de um sistema direto $F : I \to \mathcal{C}$ é chamado de *limite direto*.

Proposição 1.2.26. *Se $\mathcal{C}$ é completa, então $\varprojlim$ é um funtor $Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, para cada categoria pequena $\mathcal{I}$.*

Demonstração. Se F e G são funtores $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ e $\eta : F \to G$ uma transformação natural, então obtemos uma família compatível de morfismos

$$\varprojlim F \xrightarrow{\pi_i} F(i) \xrightarrow{\eta_i} G(i).$$

Pela definição de $\varprojlim G$, esta família se fatora sobre um único morfismo $\varprojlim F \to \varprojlim G$, que denotamos como $\varprojlim \eta$.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim G & G(i) \arrow[l] \\
\varprojlim F \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "\pi_i\eta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

□

É possível construir o limite de $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ a partir de produtos e núcleos, deste modo generalizando a construção de pullbacks. Para fazer isso vamos fixar algumas notações. Se $\lambda : i \to j$ é um morfismo em $\mathcal{I}$, então escrevemos $i = s(\lambda)$ e $j = t(\lambda)$. Para cada λ existe um morfismo

$$\pi_\lambda = F(\lambda)p_{s(\lambda)} - p_{t(\lambda)} : \prod_i F(i) \to F(t(\lambda)),$$

no qual p_i denota a projeção de $\prod\limits_i F(i)$ para $F(i)$. Os morfismos π_λ induzem um morfismo

$$\pi : \prod_i F(i) \to \prod_\lambda F(t(\lambda)), \tag{1.7}$$

no qual o segundo produto é tomado sobre todos os morfismos λ em $\mathcal{I}$.

Proposição 1.2.27. *Se $\mathcal{C}$ tem produtos e núcleos e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um funtor, então $\varprojlim F = Ker(\pi)$.*

Demonstração. Seja π o morfismo (1.7), $K = Ker(\pi)$ e $u = ker(\pi) : K \to \prod\limits_i F(i)$. Se $\varphi_i : K \to F(i)$ é definida como $\varphi_i = p_i u$, então (φ_i) é uma família compatível.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & \prod_i F(i) \arrow[d, "p_i"] \\ & F(i) \end{tikzcd}$$

De fato, se $\lambda : i \to j$ temos

$$\begin{aligned} F(\lambda)\varphi_i - \varphi_j &= F(\lambda)p_i u - p_j u = (F(\lambda)p_i - p_j)u \\ &= (F(\lambda)p_{s(\lambda)} - p_{t(\lambda)})u = \pi_\lambda u. \end{aligned}$$

Como π é o morfismo induzido da definição de produto, temos $\pi_\lambda = p_\lambda \pi$. Assim, $F(\lambda)\varphi_i - \varphi_j = \pi_\lambda u = p_\lambda \pi u = 0$. Logo, $F(\lambda)\varphi_i = \varphi_j$. Dada uma família compatível $\xi_i : X \to F(i)$ $\xi_j = F(\lambda)\xi_i$, para todo $\lambda : i \to j$, vamos mostrar que existe um único morfismo $g : X \to K$ tal que $\varphi_i g = \xi_i$. Pela definição do produto $\prod F(i)$, existe um único morfismo $\xi : X \to \prod F(i)$ tal que, para cada $\lambda : i \to j$, tem-se $p_i \xi = \xi_i$

$$\begin{tikzcd} \prod_i F(i) \arrow[r, "p_i"] & F(i) \\ X. \arrow[u, dashed, "\xi"] \arrow[ur, "\xi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Consequentemente,

$$\pi_\lambda \xi = (F(\lambda)p_{s(\lambda)} - p_{t(\lambda)})\xi = F(\lambda)\xi_i - \xi_j = 0 \quad \text{para todo } \lambda : i \to j.$$

Assim, $p_\lambda \pi \xi = \pi_\lambda \xi = 0$, para todo $\lambda : i \to j$. Pela definição do produto $\prod\limits_\lambda F(t(\lambda))$, existe um único morfismo $h : X \to \prod\limits_\lambda F(t(\lambda))$ tal que $p_\lambda h = 0$

$$\begin{tikzcd} \prod_{\lambda} F(t(\lambda)) \arrow[r, "p_\lambda"] & F(t(\lambda)) \\ X \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "\pi_\lambda \xi = 0"'] & \end{tikzcd}$$

Note que, $p_\lambda 0 = 0$ e $p_\lambda \pi\xi = 0$. Pela unicidade de h, temos $0 = h = \pi\xi$. Como $\pi = ker(u)$, existe um único $g : X \to K$ tal que $ug = \xi$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] & \prod_{i} F(i) \arrow[r, "\pi"] & \prod_\lambda F(t(\lambda)) \\ & X \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Então, $\varphi_i g = \xi_i$. Seja $g' : X \to K$ tal que $\varphi_i g' = \xi_i$. Segue

$$\varphi_i g' = \varphi_i g \quad \Rightarrow \quad p_i u g' = p_i u g, \text{ para todo } i \in obj\mathcal{I}$$

$$\begin{tikzcd} \prod_{i} F(i) \arrow[d, "p_i"] & X \arrow[l, dashed, "ug"] \arrow[dl, "p_i ug"] \\ F(i) & \end{tikzcd}$$

Pela unicidade da definição do produto, $ug' = ug$. Como u é um monomorfismo, $g' = g$. Logo, $K = Ker(\pi) = \varprojlim F$ é o limite de F a família compatível $\varphi_i = p_i u : \varprojlim F \to F(i)$. $\square$

Corolário 1.2.28. *Uma categoria abeliana é completa se, e somente se, tem produto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana completa e $(C_i)_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Considere $\mathcal{I}$ uma *categoria discreta*, isto é, os únicos morfismos são as identidades, cujos objetos são os elementos do conjunto de índices I. Considere também o funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ dado por $F(i) = C_i$ e $F(1_i) = 1_{C_i}$. Como $\mathcal{C}$ é completa, existe o limite de F, isto é, existe um objeto $\varprojlim F$ e uma família compatível $\varphi_i : \varprojlim \to F(i)$ na categoria $\mathcal{C}$. Assim, temos o produto $\prod_{I} C_i = \varprojlim F$ com φ_i sendo as projeções.

Reciprocamente, como $\mathcal{C}$ é abeliana, então tem núcleo. Pela Proposição 1.2.27, existe um limite, para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ quando $\mathcal{I}$ é pequena. $\square$

O seguinte resultado pode ser demonstrado de forma dual à Proposição 1.2.27.

Proposição 1.2.29. *Se $\mathcal{C}$ tem coprodutos e conúcleos e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um funtor, então*

$$\varinjlim F = Coker(\bigoplus_{\lambda} F(s(\lambda)) \to \bigoplus_{i} F(i))$$

com $l : \bigoplus_{\lambda} F(s(\lambda)) \to \bigoplus_{i} F(i))$ *induzido por*

$$l_\lambda = u_{t(\lambda)} F(\lambda) - u_{s(\lambda)} : F(s(\lambda)) \to \bigoplus_i F(i).$$

Corolário 1.2.30. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana completa e $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ um funtor. Se $\alpha_i : F(i) \to C$ é uma família de morfismos compatível induzindo $\alpha : \varinjlim F \to C$, então $Im(\alpha) = \sum Im(\alpha_i)$.*

Demonstração. Os morfismos α_i induzem $\bar{\alpha} : \bigoplus_i F(i) \to C$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i F(i) \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] & C \\ F(i) \arrow[u, "u_i"] \arrow[ur, "\alpha_i"] & \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Sabemos que α_i pode ser fatorado como

$$F(i) \xrightarrow{\alpha_i'} Im(\alpha_i) \xrightarrow{\gamma_i} C.$$

Pela definição de coproduto, existem únicos morfismos α' e γ tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_i F(i) \arrow[r, dashed, "\alpha'"] & \bigoplus_i Im(\alpha_i) \\ F(i) \arrow[u, "u_i"] \arrow[r, "\alpha_i'"] & Im(\alpha_i) \arrow[u, "\iota_i"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bigoplus_i Im(\alpha_i) \arrow[r, dashed, "\gamma"] & C \\ Im(\alpha_i) \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, "\gamma_i"] & \end{tikzcd}$$

Assim, $\gamma\alpha' u_i = \gamma_i \alpha_i' = \alpha_i$. Pela unicidade de $\bar{\alpha}$, temos $\bar{\alpha} = \gamma\alpha'$. Pelo dual da Proposição 1.1.14, α' é epimorfismo. Pela definição de soma,

$$\sum Im(\alpha_i) = Im(\gamma) = Kercoker(\gamma) \;\; = \;\; Kercoker(\gamma\alpha') = Im(\bar{\alpha}).$$

Seja $f : C \to X$. Temos $0 = (f\gamma\alpha')u_i = f\gamma\iota_i\alpha_i' = f\gamma_i\alpha_i'$, para todo i. Como α_i' é epimorfismo, então $f\gamma_i = 0$, para todo i. Pela unicidade de $f\gamma$ (definição de coproduto de $\bigoplus Im(\alpha_i)$), temos $f\gamma = 0$. Pela definição de conúcleo de γ, existe um único morfismo ψ tal que $\psi coker(\gamma) = f$. Assim temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd} \bigoplus F(i) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[drr] & \bigoplus Im(\alpha_i) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "0"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Coker(\gamma) \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ F(i) \arrow[u, "u_i"] \arrow[r, "\alpha_i'"] & Im(\alpha_i) \arrow[u, "p_i"] & X & \end{tikzcd}$$

Logo, $Coker(\gamma\alpha') = Coker(\gamma)$. Pela Proposição 1.2.29, $\varinjlim F = Coker(l)$ com $l : \bigoplus_\lambda F(s(\lambda)) \to \bigoplus_i F(i)$ é induzido por $l_\lambda = u_{t(\lambda)} F(\lambda) - u_{s(\lambda)} : F(s(\lambda)) \to F(i)$.

Utilizando a comutatividade do diagrama (1.8) obtemos:

$$\bar{\alpha} l_\lambda = \bar{\alpha}(u_j F(\lambda) - u_i) = \bar{\alpha} u_j F(\lambda) - \bar{\alpha} u_i = \alpha_j F(\lambda) - \alpha_i = 0,$$

para todo λ, e

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_\lambda F(s(\lambda)) \arrow[r, "\bar{\alpha} l"] & C \\
F(s(\lambda)). \arrow[u] \arrow[ur, "\bar{\alpha} l_\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

Pela unicidade da definição de coproduto, temos $\bar{\alpha} l = 0$. Pela definição de conúcleo, existe um único morfismo $h : \varinjlim F \to C$ tal que $hg = \bar{\alpha}$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_\lambda F(s(\lambda)) \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "0"'] & \bigoplus_i F(i) \arrow[r, "g=coker(l)"] \arrow[d, "\bar{\alpha}"] & \varinjlim F \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Pela construção do colimite na Proposição 1.2.29, temos que a família compatível do colimite é $\varphi_i = g u_i$ e que induz com α_i um único α tal que $\alpha \varphi_i = \alpha_i$ para todo i.

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & \varinjlim F \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\
C &
\end{tikzcd}$$

Como $\bar{\alpha} u_i = \alpha_i$, para todo i,

$$\alpha g u_i = \alpha \varphi_i = \alpha_i = \bar{\alpha} u_i,$$

para todo i. Pela unicidade de $\bar{\alpha}$, temos $\alpha g = \bar{\alpha}$. Pela unicidade de h, temos $h = \alpha$. Note que se $q : C \to Y$ é tal que $q\bar{\alpha} = 0$, então $q\alpha g = 0$. Como g é epimorfismo, temos $q\alpha = 0$. Então existe um único morfismo $a : Coker(\alpha) \to Y$ tal que $a coker(\alpha) = q$. No diagrama temos:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i F(i) \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "0"'] & \varinjlim F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "0"] & C \arrow[r] \arrow[d, "q"] & Coker(\alpha) \arrow[dl, dashed, "a"] \\
& & Y &
\end{tikzcd}$$

Logo, $coker(\alpha) = coker(\bar{\alpha})$. Assim

$$Im(\bar{\alpha}) = Ker(coker(\bar{\alpha}) = Ker(coker(\alpha) = Im(\alpha).$$

Portanto, $Im(\alpha) = \sum Im(\alpha_i)$. $\square$

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias preaditivas. Um funtor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva limites se, para todo funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, sendo $\mathcal{I}$ pequena e $\varprojlim F$ existe, tem-se $T(\varprojlim F) = \varprojlim TF$ e T leva os morfismos canônicos $\varprojlim F \to F(i)$ nos morfismos canônicos $\varprojlim TF \to TF(i)$. Segue da Proposição 1.2.27 que T preserva limites se, e somente se, preserva produtos e núcleos.

Dizemos que o limite de um funtor $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ é um *limite finito* se $\mathcal{I}$ tem apenas uma quantidade finita de objetos e morfismos.

Proposição 1.2.31. *Seja $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor aditivo entre duas categorias abelianas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. As seguintes propriedades de T são equivalentes:*

1. *T é exato à esquerda*
2. *T preserva núcleos*
3. *T preserva limites finitos.*

Demonstração. (1)⇒ (2) Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. A sequência $0 \longrightarrow Ker(f) \stackrel{ker(f)}{\longrightarrow} A \stackrel{f}{\longrightarrow} B$ é exata. Por hipótese,

$$0 \longrightarrow TKer(f) \xrightarrow{Tker(f)} TA \xrightarrow{Tf} TB$$

é uma sequência exata. Então,

$$Ker(Tf) = Im(Tker(f)) \cong TKer(f),$$

pois $ker(f)$ é um monomorfismo.

(2)⇒(1) Seja $0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C$ uma sequência exata. Segue que $Ker(g) = Im(f)$ e $Ker(f) = 0$. Como f é monomorfismo, temos $A \cong Im(f) = Ker(g)$. Por hipótese, $TKer(g) = Ker(Tg)$ e $TKer(f) = Ker(Tf)$. Então, $T(0) = TKer(f) = Ker(Tf)$ e $Ker(Tg) = TKer(g) \cong TA$. Segue que Tf é um monomorfismo. Logo, $Im(Tf) \cong TA \cong Ker(Tg)$. Portanto,

$$0 \longrightarrow TA \stackrel{Tf}{\longrightarrow} TB \stackrel{Tg}{\longrightarrow} TC$$

é uma sequência exata.

(2)⇒(3) Seja $\mathcal{I}$ uma categoria com uma quantidade finita de objetos e morfismos e um funtor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Pela Proposição 1.2.27, $\varprojlim F = Ker(\pi)$. Sabemos que

$$T(\prod_{i=1}^{n} F(i)) = \prod_{i=1}^{n} TF(i).$$

Como $TKer(\pi) = Ker(T\pi)$ e $T\pi : \prod_{i=1}^{n} TF(i) \to \prod_{\lambda} TF(t(\lambda))$, temos

$$T \varprojlim F = TKer(\pi) = Ker(T\pi) = \varprojlim(TF).$$

(c)⇒(b) Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Sabemos que

$$\begin{array}{ccc} Ker(f) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é um diagrama pullback. Seja $\mathcal{I}$ a categoria

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \searrow & \\ & & 3 \\ & \nearrow & \\ 2 & & \end{array}$$

mais os morfismos identidade e seja $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ o funtor dado por $F(1) = 0$, $F(2) = A$ e $F(3) = B$. O limite de F é obtido pelo diagrama pullback

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim F & \longrightarrow & F(1) = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ A = F(2) & \xrightarrow{f} & F(3) = B. \end{array}$$

Pela unicidade do pullback, $\varprojlim F = Ker(f)$. Logo,

$$TKer(f) = T \varprojlim F = \varprojlim TF = Ker(Tf).$$

□

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria completa e seja $\mathcal{J}$ uma categoria pequena. Afirmamos que a categoria $Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ também é completa e que seus limites podem ser calculados ponto a ponto em $\mathcal{C}$, como já sabemos é verdade para produtos e núcleos. Suponha que $\mathcal{I}$ é uma categoria pequena e $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ um funtor. Para cada objeto j de $\mathcal{J}$ definimos um funtor $F_j : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ como

$$F_j(i) = F(i)(j),$$
$$F_j(\lambda) = F(\lambda)_j.$$

Um morfismo $\mu : j \to j'$ em $\mathcal{J}$ induz uma transformação natural $\check{\mu} : F_j \to F_{j'}$, definida como

$$\check{\mu}_i = F(i)(\mu) : F_j(i) \to F_{j'}(i).$$

$\varprojlim F$ é então o funtor $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dado por

$$(\varprojlim F)(j) = \varprojlim F_j,$$
$$(\varprojlim F)(\mu) = \varprojlim \check{\mu}.$$

Por esta construção, podemos associar ao funtor $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J}, \mathcal{C})$ um novo funtor $\check{F} : \mathcal{J} \to Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, definido como

$$\check{F}(j) = F_j, \quad \check{F}(\mu) = \check{\mu},$$

e assim chegamos à seguinte conclusão.

Proposição 1.2.32. *Se $\mathcal{J}$ é pequena e $\mathcal{C}$ é completa, então $Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$ é completa. Se $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$ é um funtor, então $\varprojlim F$ é o funtor composto*

$$\mathcal{J} \xrightarrow{\check{F}} Fun(\mathcal{I},\mathcal{C}) \xrightarrow{\varprojlim} C. \tag{1.9}$$

A correspondência $F \to \check{F}$ é bijetiva, de fato existem isomorfismos de categorias

$$Fun(\mathcal{I}, Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})) \cong Fun(\mathcal{I} \times \mathcal{J},\mathcal{C}) \cong Fun(\mathcal{J}, Fun(\mathcal{I},\mathcal{C}))$$

como se pode verificar. Se F corresponde a $\tilde{F} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$, então também verifica-se que

$$\varprojlim_{\mathcal{J}}(\varprojlim_{\mathcal{I}} F) = \varprojlim_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}} \tilde{F} = \varprojlim_{\mathcal{I}}(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}). \tag{1.10}$$

Proposição 1.2.33. *O funtor $\varprojlim : Fun(\mathcal{J},\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ preserva limites.*

Demonstração. Para todo funtor $F : \mathcal{I} \to Fun(\mathcal{J},\mathcal{C})$ obtemos

$$\varprojlim_{\mathcal{J}}(\varprojlim_{\mathcal{I}} F) = \varprojlim_{\mathcal{I}}(\varprojlim_{\mathcal{J}} \check{F}) = \varprojlim_{\mathcal{I}}(\varprojlim_{\mathcal{J}} F)$$

usando (1.10) e aplicando (1.9) para $\check{F}$ ao invés de F. □

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana cocompleta, e seja C um objeto de $\mathcal{C}$. Uma família $(C_i)_I$ de subobjetos de C é dita *direta* se $\mathcal{I}$ torna-se um conjunto dirigido quando define-se $i \leq j$ sempre que $C_i \subset C_j$. Deveríamos notar que o limite direto $\varinjlim C_i$ não é necessariamente um subobjeto de C, a menos que limites diretos preservem monomorfismos. Mas existe um morfismo canônico $\alpha : \varinjlim C_i \to C_i$ e $Im(\alpha) = \sum C_i$ pelo Corolário 1.2.30.

Proposição 1.2.34. *Se $(C_i)_I$ é uma família direta de subobjetos de C, então o limite direto do sistema direto $(\dfrac{C}{C_i})_I$ de objetos quocientes é $\frac{C}{\sum C_i}$.*

Demonstração. A sequência exata $0 \longrightarrow C_i \longrightarrow C \longrightarrow \frac{C}{C_i} \longrightarrow 0$ induz no limite direto uma sequência exata

$$\varinjlim C_i \xrightarrow{\ \alpha\ } C \longrightarrow \varinjlim \tfrac{C}{C_i} \longrightarrow 0,$$

pelo dual da Proposição 1.2.33 e, consequentemente, pelo dual da 1.2.31. Logo,

$$\varinjlim \frac{C}{C_i} = \frac{C}{Im(\alpha)} = \frac{C}{\sum C_i}.$$

□

Se $(C_i)_I$ é uma família finita de objetos, então o coproduto $\bigoplus_I C_i$ é o limite direto dos coprodutos $\bigoplus_J C_j$ com J percorrendo todos subconjuntos finitos de I.

Capítulo 2

Categoria exata

Neste capítulo definimos as Categorias exatas e apresentamos resultados básicos de Álgebra Homológica transferidos para este contexto. As categorias exatas são categorias aditivas mais gerais que as categorias abelianas mas para a qual também pode ser construída uma Álgebra Homológica. Em geral, não é possível definir imagem de um morfismo em uma categoria exata, por isso não é possível definir sequências exatas da mesma forma que é definida nas categorias abelianas. No entanto, nas categorias exatas fracamente idempotentes completas podemos definir morfismos admissíveis e isto torna possível a definição de sequência exata em categorias exatas. Observamos que se $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ é uma categoria exata, então a categoria dos complexos $C(\mathcal{A})$ também é uma categoria exata com uma estrutura induzida. Os conceitos apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [25], [6], [4] e [3]. Alguns resultados apresentados aqui não serão demonstrados.

2.1 Categoria exata

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Um *par núcleo-conúcleo* (i, p) em $\mathcal{A}$ é um par de morfismos compostos

$$A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A''$$

tal que i é um núcleo de p e p é um conúcleo de i. Fixando uma classe $\mathcal{E}$ de pares núcleo-conúcleo em $\mathcal{A}$, chamamos um morfismo i de *monic admissível* se existe um morfismo p' tal que $(i, p') \in \mathcal{E}$. Chamamos um morfismo p de *epic admissível* se existe um morfismo i' tal que $(i', p) \in \mathcal{E}$. Representamos monic admissível por $\rightarrowtail$ e epic admissível por $\twoheadrightarrow$.

Definição 2.1.1. Uma *estrutura exata* em $\mathcal{A}$ é uma classe $\mathcal{E}$ de pares núcleo-conúcleo que é fechada sob isomorfismos e satisfaz os seguintes axiomas:

[E0] Para todo objeto $A \in \mathcal{A}$, o morfismo identidade 1_A é um monic admissível.

[E0^{op}] Para todo objeto $A \in \mathcal{A}$, o morfismo identidade 1_A é um epic admissível.

[E1] A classe de monics admissíveis é fechada sob a composição.

[E1^{op}] A classe de epics admissíveis é fechada sob a composição.

[E2] O pushout de um monic admissível $A \rightarrowtail B$ ao longo de um morfismo arbitrário $A \longrightarrow A'$ existe e produz um monic admissível.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d, dashed] \\ A' \arrow[r, tail, dashed] & B' \end{tikzcd}$$

[E2^{op}] O pullback de um epic admissível $A' \twoheadrightarrow B'$ ao longo de um morfismo arbitrário $B \longrightarrow B'$ existe e produz um epic admissível.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r, two heads] & B' \end{tikzcd}$$

Definição 2.1.2. Uma *categoria exata* é um par $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ constituído de uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ e uma estrutura exata $\mathcal{E}$ em $\mathcal{A}$. Os elementos de $\mathcal{E}$ são chamados *sequências exatas curtas*.

Observação 2.1.3. Isomorfismos são monics admissíveis e epics admissíveis. De fato, seja $f : A \to B$ um isomorfismo isto segue do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"'] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r, tail, "1_A"'] & A \arrow[r, two heads] & 0, \end{tikzcd}$$

do fato de que estruturas exatas são fechadas sob isomorfismos e que os axiomas são duais sobre si mesmo.

Observação 2.1.4. Os axiomas são redundantes e podem ser enfraquecidos. Os axiomas [E0] e [E0^{op}] podem ser substituídos pela afirmação: 1_0, a identidade do objeto zero, é um epic admissível. De fato, para um objeto A existe um diagrama pullback

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\theta = f"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\ & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "0"] & A \arrow[d, "0"] \\ & 0 \arrow[r, "1_0"] & 0. \end{tikzcd}$$

Como 1_0 é epic admissível, temos por [E2^{op}] que [E0^{op}] é verdadeiro. Note que $ker(1_0) = 1_0$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "f=\theta"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, "0"] & & \\
0 \arrow[r, "1_0"] & 0 \arrow[r, "1_0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Então, 1_0 é também um monic admissível. Assim, de modo análogo para [E0^{op}], podemos concluir de [E2] que [E0] também vale. Keller prova também em [26] (A.1, demonstração da Proposição step 3) que ou [E1] ou [E1^{op}] pode ser descartado.

Lema 2.1.5. *Sejam A, B objetos em uma categoria exata $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. A sequência*

$$A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \oplus B \xrightarrow{(0\ 1)} B \tag{2.1}$$

é exata curta.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que o morfismo $f_0 : 0 \to B$ é o núcleo de 1_B. Seja $f : X \to B$ um morfismo tal que $1_B f = 0$. Segue $f = 0$, isto é, f se fatora por 0. Como o morfismo $X \to 0$ é único, f_0 é o núcleo de 1_B. Por [E0^{op}] 1_B é epic admissível e assim f_0 é monic admissível. Do mesmo modo, $g_0 : 0 \to A$ também é um monic admissível. Vamos mostrar que o seguinte diagrama é um quadrado pushout:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "f_0"] \arrow[d, tail, "g_0"'] & B \arrow[d, "\binom{0}{1}"] \\
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & A \oplus B.
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

De fato, pela definição de objeto inicial, o diagrama é comutativo. Sejam $f : B \to X$ e $g : A \to X$ morfismos tais que $ff_0 = gg_0$. Note que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & f \end{bmatrix} = f$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & f \end{bmatrix} = g$. Vamos mostrar que $\begin{bmatrix} g & f \end{bmatrix}$ é única. Seja $\begin{bmatrix} g' & f' \end{bmatrix}$ um morfismo tal que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g' & f' \end{bmatrix} = f$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g' & f' \end{bmatrix} = g$. Segue $g' = g$ e $f' = f$. Logo, (2.2) é um quadrado pushout.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail, "f_0"] \arrow[d, tail, "g_0"'] & B \arrow[d, "\binom{0}{1}"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & A \oplus B \arrow[dr, dashed, "{[g\ f]}"] & \\
& & X.
\end{tikzcd}$$

Os morfismos $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ são monics admissíveis por [E2]. Falta mostrar que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} : A \oplus B \to B$ é o conúcleo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : A \to A \oplus B$. Seja $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} : A \oplus B \to X$ tal que $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. Segue $\alpha = 0$. Note que, $\beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\binom{1}{0}"] \arrow[dr, "0"'] & A \oplus B \arrow[r, two heads, "(0\ 1)"] \arrow[d, "{[\alpha\ \beta]}"] & B \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

Para mostrar a unicidade de β, considere $\beta' : B \to X$ tal que $\beta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$. Segue $\beta' = \beta$. Portanto, a sequência (2.1) é uma sequência exata curta. □

Dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$, a classe $\mathcal{E}_{min}$ de pares núcleo-conúcleo isomorfos a pares do tipo (2.1) é uma estrutura exata. Além disso, é a menor estrutura exata que podemos tomar em $\mathcal{A}$. No entanto, se tomarmos $\mathcal{E}$ como a classe de todos os pares núcleo-conúcleo de $\mathcal{A}$ nem sempre $\mathcal{E}$ é uma estrutura exata.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva com núcleos e conúcleos. Um conúcleo $g : B \to C$ em $\mathcal{A}$ é dito *semi-estável* se, para todo quadrado pullback,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "p_T"] \arrow[d, dashed, "p_B"] & T \arrow[d, "t"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

o morfismo p_T é também um conúcleo. De modo dual, um núcleo $f : A \to B$ em $\mathcal{A}$ é dito *semi-estável* se, para todo quadrado pushout,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "R"] \arrow[d, "t"] & Y \arrow[d, dashed, "s_Y"] \\ T \arrow[r, dashed, "s_T"] & S \end{tikzcd}$$

o morfismo s_T é também um núcleo.

Em [27] os autores demonstraram que dada uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ com núcleos e conúcleos então a classe de pares núcleo-conúcleo

$$\mathcal{E}_{max} = \{(e, f); e \text{ é um núcleo semi-estável e } f \text{ é um conúcleo semi-estável.}\}$$

é uma estrutura exata em $\mathcal{A}$. Além disso, $\mathcal{E}_{max}$ é uma estrutura exata maximal de $\mathcal{A}$, isto é, todas as estruturas exatas de $\mathcal{A}$ estão contidas em $\mathcal{E}_{max}$.

Proposição 2.1.6. *A soma direta de duas sequências exatas curtas é uma sequência exata curta.*

Demonstração. Sejam $A' \overset{i}{\rightarrowtail} A \overset{d}{\twoheadrightarrow} A''$ e $B' \overset{k}{\rightarrowtail} B \overset{c}{\twoheadrightarrow} B''$ duas sequências exatas curtas. Primeiro observe que, para todo objeto C, a sequência

$$A' \oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}} A \oplus C \xrightarrow{(d\ 0)} A''$$

é exata curta. Com efeito, o segundo morfismo é uma epic admissível, porque é a composição de epics admissíveis $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}: \ A \oplus C \rightarrowtail A$ e $d : A \rightarrowtail A''$; o primeiro morfismo na sequência é um núcleo do segundo. De fato, dado um morfismo $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} : X \to A \oplus C$ tal que $\begin{bmatrix} d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = 0$ consequentemente $df = 0$. Como $i = ker(d)$, existe um único morfismo $\alpha : X \to A'$ tal que $i\alpha = f$. Tome $\begin{bmatrix} \alpha \\ g \end{bmatrix} : X \to A' \oplus C$ e note que

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

Se $\begin{bmatrix} \alpha' \\ g' \end{bmatrix} : X \to A' \oplus C$ é um morfismo tal que

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

temos $i\alpha' = f$ e $1_C g' = g$. Pela unicidade da fatoração de f, temos $\alpha' = \alpha$. Assim, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1_C \end{bmatrix} = ker \begin{bmatrix} d & 0 \end{bmatrix}$ e consequentemente é uma monic admissível. Agora segue de [E1] que $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} : \ A' \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B$ é uma monic admissível, porque é a composição de $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1_{B'} \end{pmatrix} : A' \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B'$ com

$$\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} : \ A \oplus B' \rightarrowtail A \oplus B.$$

Agora falta mostrar que $A' \oplus B' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)} A'' \oplus B''$ é um par núcleo-conúcleo. De fato, seja $\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} : A \oplus B \to X$ um morfismo tal que $\begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, segue $fi = gk = 0$. Como $d = coker(i)$ e $c = coker(k)$, existem únicos $\alpha : A'' \to X$ e $\beta : B'' \to X$ tais que $\alpha d = f$ e $\beta c = g$. Tome $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} : A'' \oplus B'' \to X$ e note que

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha d & \beta c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix}.$$

Se $\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} : A'' \oplus B'' \to X$ é um morfismo tal que

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & g \end{bmatrix}.$$

temos $\alpha' d = f$ e $\beta' c = g$, pela unicidade da fatoração de f e g, $\alpha' = \alpha$ e $\beta' = \beta$. Portanto, $A' \oplus B' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)} A'' \oplus B''$ é uma sequência exata curta. $\square$

Como consequência da Proposição 2.1.6 temos o seguinte Corolário do qual não faremos a demonstração.

Corolário 2.1.7. *A estrutura exata $\mathcal{E}$ é uma subcategoria aditiva da categoria aditiva $\mathcal{A}^{\to\to}$ de morfismos compostos de $\mathcal{A}$.*

Proposição 2.1.8. *Considere o quadrado comutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

sendo as flechas horizontais monics admissíveis. As seguintes afirmações são equivalentes

1. *O quadrado é um pushout*
2. *A sequência* $A \xrightarrow{\binom{i}{-f}} B \oplus A' \xrightarrow{(f'\ i')} B'$ *é exata curta.*
3. *O quadrado é bicartesiano, isto é, um pushout e um pullback.*
4. *O quadrado é parte de um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, equal] \\ A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

com linhas exatas.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} : B \oplus A' \to C$ um morfismo tal que $\begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} = 0$ implica $gi = hf$. Pela propriedade de pushout, existe um único morfismo $\alpha : B' \to C$ tal que $\alpha f' = g$ e $\alpha i' = h$, ou seja, $\alpha\begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}$. Logo, $\begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} = coker\begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix}$. Falta mostrar que $\begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} : A \to B \oplus A'$ é monic admissível. Considere a composição

$$A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \oplus A' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{smallmatrix}\right)} A \oplus A' \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} B \oplus A'.$$

Note que $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix}$ e que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix}$ é um isomorfismo com o inverso $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$. Pelo Lema 2.1.5,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um monic admissível. O morfismo $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \oplus A' \to B \oplus A'$ é a soma direta dos morfismos $i : A \to B$ e $1 : A' \to A'$ que são monics admissíveis. Pela Proposição 2.1.6, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \oplus A' \to B \oplus A'$ também é monic admissível. Logo,

$$A \rightarrowtail B \oplus A' \twoheadrightarrow B'$$

é uma sequência exata curta.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam $g : B \to C$ e $h : A' \to C$ dois morfismos tais que $gi = hf$. Segue que $gi - hf = 0$ implica $\begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} = 0$, com $\begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix} : B \oplus A' \to C$. Como $\begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} = coker \begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix}$, existe um único morfismo $\alpha : B' \to C$ tal que $\alpha \begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}$. Assim, $\alpha f' = g$ e $\alpha i' = h$. Logo, o diagrama (2.3) pushout:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & B' \arrow[dr, dashed, "\alpha"] & \\
 & & C.
\end{tikzcd}$$

Agora sejam $g' : X \to B$ e $h' : X \to A'$ tais que $f'g' = i'h'$. Segue que $f'g' - i'h' = 0$ implica $\begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g' \\ -h' \end{pmatrix} = f'g' - i'h' = 0$. Como $\begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix}$, existe um único morfismo $\alpha : X \to A$ tal que $\begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ implica $i\alpha = g'$ e $-f\alpha = -h'$. Logo, (2.3) é um diagrama pullback:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "h'"'] & & \\
 & A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "f'"] \\
 & A' \arrow[r, tail, "i'"] & B'.
\end{tikzcd}$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Direto da definição.

(1) $\Rightarrow$ (4): Seja $p : B \twoheadrightarrow C$ um conúcleo de i. Pela propriedade de pushout, existe um único morfismo $p' : B' \to C$ tal que $p'f' = p$ e $p'i' = 0$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B' \arrow[dr, dashed, "p'"] & \\
& & C.
\end{tikzcd}$$

Observe que $p'f' = p$ implica que p' é um conúcleo de i'. Seja $g : B' \to X$ tal que $gi' = 0$. Então $gf'i = gi'f = 0$, assim gf' fatora unicamente sobre um morfismo $h : C \to X$ tal que $gf' = hp$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, bend left, "p"] & \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[dr, "0"] & B' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& X. &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $hp' = g$. Isto segue da propriedade de pushout, pois $hp'f' = hp = gf'$ e $hp'i' = 0 = gi'$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, bend left, "hp"] & \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B' \arrow[dr, shift left, "hp'"] \arrow[dr, shift right, "g"'] & \\
& & X.
\end{tikzcd}$$

Note que se temos outro morfismo $h' : C \to X$ tal que $h'p' = g$, então, por p' ser epimorfismo, $h' = h$. Logo, p' é o conúcleo de i'.

(4) $\Rightarrow$ (2): Sejam D, q, q' o pullback de p e p' do diagrama (2.4). Pelo dual da implicação (1) $\Rightarrow$ (4), obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "j"] & A \arrow[d, tail, "i"] \\
A' \arrow[r, tail, "j'"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, two heads, "q"] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\
A' \arrow[r, tail, "i'"] & B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C
\end{tikzcd}$$

com linhas e colunas exatas. Como $p'f' = p$, existe um único morfismo $k : B \to D$ tal que $q'k = 1_B$ e $qk = f'$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrd, bend left, "1_B"] \arrow[rd, dashed, "k"] \arrow[rdd, bend right, "f'"'] & & \\
& D \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, two heads, "q"] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\
& B' \arrow[r, two heads, "p'"] & C
\end{tikzcd}$$

Visto que $q'(1_D - kq') = 0$, existe um único morfismo $l : D \to A'$ tal que $j'l = 1_D - kq'$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "j'"] & D \arrow[r, two heads, "q'"] & B \\
& D. \arrow[lu, dashed, "l"] \arrow[u, "1_D - kq'"] \arrow[ru, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Note que $lk = 0$ porque $j'lk = (1_D - kq')k = 0$ e j' é monic, enquanto o cálculo $j'lj' = (1_D - kq')j'$ implica $lj' = 1_{A'}$, novamente porque j' é monic. Além disso,

$$i'lj = (qj')lj = q(1_D - kq')j = -(qk)(q'j) = -f'i = -i'f$$

implica $lj = -f$ visto que i' é monic. Os morfismos

$$\begin{pmatrix} k & j' \end{pmatrix} : B \oplus A' \to D \quad e \quad \begin{pmatrix} q' \\ l \end{pmatrix} : D \to B \oplus A'$$

são mutuamente inversos visto que

$$\begin{pmatrix} k & j' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q' \\ l \end{pmatrix} = kq' + j'l = 1_D \quad e$$
$$\begin{pmatrix} q' \\ l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'k & q'j' \\ lk & lj' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_B & 0 \\ 0 & 1_{A'} \end{pmatrix}.$$

Agora

$$\begin{pmatrix} f' & i' \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} k & j' \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} i \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q' \\ l \end{pmatrix} j$$

mostra que $A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} i \\ -f \end{smallmatrix}\right)} B \oplus A' \xrightarrow{(f' \ i')} B'$ é isomorfo a $A \xrightarrow{j} D \xrightarrow{q} B'$. □

Observação 2.1.9. Considere o quadrado pushout

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, "a"'] \arrow[rd, phantom, "PO"] & B' \arrow[d, "b"] \\
A \arrow[r, tail, "i"] & B.
\end{tikzcd}$$

Se $j' : B' \twoheadrightarrow Coker(i')$ é um conúcleo de i' então pela definição de pushout existe um único morfismo $j : B \to Coker(i')$ tal que $jb = j'$ e $ji = 0$.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[d, "b"] \arrow[ddr, bend left, "j'"] & \\
A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[drr, bend right, "0"] & B \arrow[dr, dashed, "j"] & \\
& & Coker(i').
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que j é o conúcleo de i. Seja $f : B \to X$ um morfismo tal que $fi = 0$. Note que $0 = fia = fbi'$. Pela definição do conúcleo j', existe um único morfismo $g : Coker(i') \to X$ tal que $gj' = fb$. Note que $gji = 0 = fi$ e $fb = gj' = gjb$. Pela unicidade da definição de pushout, $f = gj$. Falta mostrar que g é único. Seja $g' : Coker(i') \to X$ tal que $g'j = f = gj$. Temos $g'j' = g'jb = fb = gj'$. Pela unicidade da fatoração de fb por $Coker(i')$, $g' = g$. Logo, j é o conúcleo de i. Assim, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B' \arrow[r, two heads, "j'"] \arrow[d, "b"] & Coker(i') \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "i"] & B \arrow[r, two heads, "j"] & Coker(i').
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

comutativo com linhas sendo sequências exatas curtas que chamamos de diagrama pushout. De modo análogo, se $j : B \twoheadrightarrow C$ é um conúcleo de i podemos provar que $j' = jb$ é um conúcleo de i'. E novamente temos o diagrama pushout (2.5).

Corolário 2.1.10. *O diagrama da forma*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "PO"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, two heads, "f'"] & B' \arrow[r, tail, "g'"] & C'
\end{tikzcd}$$

é bicartesiano e $A \xrightarrow{\binom{-a}{gf}} A' \oplus C \xrightarrow{(g'f' \;\; c)} C'$ *é exata curta.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.1.8 e seu dual que os quadrados são bicartesianos ao longo de uma flecha comum produz outro quadrado bicartesiano, que acarreta a primeira parte e o fato que a sequência da segunda parte é um par núcleo-conúcleo. A equação $\begin{pmatrix} g'f' & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f' & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}$ exibe $\begin{pmatrix} g'f' & c \end{pmatrix}$ como uma composição de epics admissíveis pelas proposições. □

Proposição 2.1.11. *O pullback de um monic admissível $i : A \to B$ ao longo de um epic admissível $e : B' \to B$ produz um monic admissível $i' : A' \to B'$.*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "i'"] \arrow[d, two heads, "e'"] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B' \arrow[d, two heads, "e"] \\
A' \arrow[r, tail, "i"] & B.
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed, "i'"] \arrow[d, dashed, two heads, "e'"] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B' \arrow[r, two heads, "pe"] \arrow[d, two heads, "e"] & Coker(i) \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "i"] & B \arrow[r, two heads, "p"] & Coker(i). \end{tikzcd}$$

Pelo Axioma [E2^{op}] existe o pullback. Seja p um conúcleo de i, assim é uma epic admissível e pe é uma epic admissível pelo Axioma [E1^{op}]. Em qualquer categoria, o pullback de um monic é monic (se existe). Para provar que i' é um monic admissível, é suficiente provar que i' é um núcleo de pe. Suponha que $g' : X \to B'$ é tal que $peg' = 0$. Visto que i é um núcleo de p, existe um único $f : X \to A$ tal que $eg' = if$. Pela propriedade de pullback, existe um único $f' : X \to A'$ tal que $e'f' = f$ e $i'f' = g'$. Seja $h : X \to A'$ tal que $i'h = g'$. Como i' é monomorfismo e $i'h = g' = i'f'$, $h = f'$. Logo, i' é o núcleo de pe. □

Proposição 2.1.12 (Axioma Obscuro)**.** *Seja $i : A \to B$ um morfismo em $\mathcal{A}$ admitindo um conúcleo. Se existe um morfismo $j : B \to C$ em $\mathcal{A}$ tal que a composta $ji : A \rightarrowtail C$ seja um monic admissível, então i é um monic admissível.*

Demonstração. Seja $k : B \to D$ um conúcleo de i. Na demonstração da Proposição 2.1.6, observamos que a sequencia

$$A \xrightarrowtail{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} B \oplus C \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]} D \oplus C$$

é exata. Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & D \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"] \\ A \arrow[r, tail, "\left(\begin{smallmatrix} i \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & B \oplus C \arrow[r, two heads, "\left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1_C \end{smallmatrix}\right)"'] & D \oplus C. \end{tikzcd}$$

Visto que o quadrado direito é um pullback, k é um epic admissível e i é um núcleo de k, então i é um monic admissível. □

Corolário 2.1.13. *Sejam (i, p) e (i', p') dois pares de morfismos cuja composição está definida. Se o par $\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p' \end{bmatrix} \right)$ é uma sequência exata curta, então (i, p) e (i', p') são sequências exatas curtas.*

Demonstração. Os pares (i, p) e (i', p') são pares núcleo-conúcleo. Visto que i tem p como um conúcleo e que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é um monic admissível, o Axioma Obscuro implica que i é um monic admissível. Então (i, p) é uma sequência exata curta. De modo análogo, (i', p') também é uma sequência exata curta □

Proposição 2.1.14. *Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata. Um morfismo de uma sequência exata curta* $A' \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow C'$ *para outra sequência exata curta* $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ *se fatora sobre uma sequência exata curta* $A \rightarrowtail D \twoheadrightarrow C'$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b'"] & C' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

de tal modo que os dois quadrados marcados BC são bicartesianos. Em particular existe um isomorfismo canônico do pushout $A \cup_{A'} B'$ com o pullback $B \times_C C'$.

Demonstração. Seja

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, "b"] & C' \arrow[d, "c"] \\
A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

um morfismo entre sequências exatas curtas. Pelo Axioma [E2], existe o pushout de a e f'

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, "a"] & B' \arrow[d, "b'"] \\
A \arrow[r, tail, "m"] & D
\end{tikzcd}$$

que é também um diagrama pullback, pela Proposição 2.1.8. Pela definição de pushout, existe um único $e : D \to C'$ tal que $eb' = g'$ e $em = 0$. Novamente pela definição de pushout, existe um único $b'' : D \to B$ tal que $b''b' = b$ e $b''m = f$. Vamos mostrar que $coker(m) = e$. De fato, seja um morfismo $\alpha : D \to X$ tal que $\alpha m = 0$. Note que $\alpha b' f' = \alpha m a = 0$. Como $g' = coker(f')$, existe um único morfismo $\beta : C' \to X$ tal que $\beta g' = \alpha b'$. Pela definição de pushout, existe um único morfismo $\gamma : D \to X$ tal que $\gamma b' = \beta g'$ e $\gamma m = 0$. Observe que $\beta e b' = \beta g' = \alpha b'$ e $\beta e m = 0 = \alpha m$, segue da unicidade da definição de pushout que $\beta e = \gamma = \alpha$. Suponhamos que $\beta' : C' \to X$ é um morfismo tal que $\beta' e = \alpha$, então $\beta' g' = \beta' e b' = \alpha b'$. Pela definição de $coker(f')$, temos $\beta' = \beta$. Então, $e = coker(m)$. Logo, $A \overset{m}{\rightarrowtail} D \overset{e}{\twoheadrightarrow} C'$ é uma sequência exata curta.

Observe que $cg'f' = 0a = 0$. Pela definição de pushout, existe um único morfismo $\delta : D \to C$ tal que $\delta b' = cg'$ e $\delta m = 0$. Observe também que $ceb' = cg' = gb = gb''b'$ e $cem = 0 = gf = gb''m$. Então, $ce = \delta = gb''$. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "b''"] & C \arrow[d, "c"] \\ A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C \end{tikzcd}$$

é comutativo e como tem linhas exatas, pela Proposição 2.1.8 o quadrado da direita é um pullback e, consequentemente, é bicartesiano. □

Lema 2.1.15. *Considere o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "a_1"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "b_1"] \arrow[d, tail, "b_2"] & X \arrow[d, tail, dashed, "x"] \\ A \arrow[r, tail, "a_2"] & C \arrow[r, two heads, "c_1"] \arrow[d, two heads, "c_2"] & Y \arrow[d, two heads, dashed, "y"] \\ & Z \arrow[r, equal] & Z \end{tikzcd}$$

tal que as duas primeiras linhas horizontais e a coluna do meio são exatas curtas. Então a terceira coluna existe, é exata curta e é unicamente determinada de forma que faz o diagrama comutar. Além disso, o quadrado acima e à direita é bicartesiano.

Demonstração. Vamos mostrar a existência de x. Como a primeira linha é exata, $b_1 = coker(a_1)$. Note que $b_2 a_1 = a_2$. Então $c_1 b_2 a_1 = c_1 a_2 = 0$ pois a segunda linha é exata curta. Pela definição de $coker(a_1)$, existe um único x tal que $x b_1 = c_1 b_2$. Agora vamos mostrar a existência de y. Da exatidão da segunda linha temos $c_1 = coker(a_2)$. Como $a_2 = b_2 a_1$ e a coluna do meio é exata, $c_2 a_2 = c_2 b_2 a_1 = 0$. Pela definição de $coker(a_2)$ existe um único y tal que $y c_1 = c_2$. Pela Proposição 2.1.8, o quadrado contendo x é bicartesiano. Segue que x é monic admissível e y é seu conúcleo. □

Corolário 2.1.16 (Lema 3×3)**.** *Considere um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "a"] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, tail, "b"] & C' \arrow[d, tail, "c"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "a'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "b'"] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\ A'' \arrow[r, "f''"] & B'' \arrow[r, "g''"] & C'' \end{tikzcd}$$

tal que as colunas são exatas curtas e uma das seguintes condições vale:

1. *a linha do meio e qualquer das outras duas linhas é exata curta;*

2. *as duas linhas das extremidades são exatas curtas e $gf = 0$.*

Então a linha que resta é exata curta também.

Demonstração. Vamos provar (1). As duas possibilidades são duais, então precisamos considerar apenas um caso. Consideremos que as duas primeiras linhas são exatas. Aplicando a Proposição 2.1.14 para as primeiras duas linhas, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, tail, "a"] \arrow[dr, phantom, "BC"] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, tail, "i"] & C' \arrow[d, equal] \\
A \arrow[r, tail, "\bar{f}"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "\bar{g}"] \arrow[d, tail, "j"] \arrow[dr, phantom, "BC"] & C' \arrow[d, tail] \\
A \arrow[r, tail, "f"] & B \arrow[r, two heads, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

com $ji = b$. Note que i e j são monics admissíveis pelo Axioma [E2] e pela Proposição 2.1.11, respectivamente. Pela Observação 2.1.9 o morfismo $i' : D \to A''$ determinado por $i'i = 0$ e $i'\bar{f} = a'$ é um conúcleo de i, enquanto o morfismo $j' : B \to C''$ dado por $j' = c'g = g''b'$ é um conúcleo de j. Sabemos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads, "i'"] \arrow[d, tail, "j"] & A'' \arrow[d, "f''"] \\
B' \arrow[r, tail, "b"] & B \arrow[r, two heads, "b'"] \arrow[d, two heads, "j'"] & B'' \arrow[d, two heads, "g''"] \\
 & C'' \arrow[r, equal] & C''
\end{tikzcd}$$

é comutativo, então, pelo Lema 2.1.15, (f'', g'') é uma sequência exata curta. Logo, resta provar que $f''i' = b'j$, visto que as outras relações de comutatividade $b = ji$ e $g''b' = j'$ valem por construção. Vamos aplicar a propriedade de pushout do quadrado $A'B'AD$. Temos $(f''i)i = 0 = b'b = (b'j)i$ e $(b'j)\bar{f} = b'f = f''a' = (f''i')\bar{f}$, que junto com $(f''i'\bar{f})a = (f''i'i)f' = 0$ e $(b'j\bar{f})a = f''a'a = 0 = b'bf' = (b'ji)f'$, mostra que $f''i'$ e $b'j$ são soluções do mesmo problema pushout, consequentemente são iguais. Isto resolve o caso (1). Agora vamos provar (2). Tomamos o pushout de g' e b. Assim temos o seguinte diagrama comutativo com linhas e colunas exatas,

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "f'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads, "g'"] \arrow[d, tail, "b"] & C' \arrow[d, tail, "k"] \\
A \arrow[r, tail, "i"] & B \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[d, two heads, "b'"] & D \arrow[d, two heads, "k'"] \\
 & B'' \arrow[r, equal] & B''
\end{tikzcd}$$

em que o conúcleo k' de k é determinado por $k'j = b'$ e $k'k = 0$, enquanto $i = bf'$ é um núcleo do epic admissível j, pela Observação 2.1.9 e Proposição 2.1.11. A propriedade de pushout do quadrado $B'C'BD$ aplicada ao quadrado $B'C'BC$ produz um único morfismo $d' : D \to C$ tal que $d'k = c$ e $d'j = g$. O diagrama

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "k"] & C' \arrow[d, tail, "c"] \\ D \arrow[r, "d'"] \arrow[d, two heads, "k'"] & C \arrow[d, two heads, "c'"] \\ B'' \arrow[r, two heads, "g''"] & C'' \end{tikzcd}$$

tem linhas e colunas exatas e é comutativo. De fato, pela construção de d' temos $c = d'k$, enquanto $c'd' = g''k'$ segue de $c'd'j = c'g = g''b' = g''k'j$ e o fato de que j é um epimorfismo. Concluímos da Proposição 2.1.8 que $DCB''C''$ é um pullback, assim d' é um epic admissível e $g = d'j$ também é. O único morfismo $d : A'' \to D$ tal que $k'd = f''$ e $d'd = 0$ é um núcleo de d'. Pela propriedade pullback de $DCB''C''$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "a"] & A' \arrow[d, tail, "i"] & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "a'"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, two heads, "j"] & C \arrow[d, equal] \\ A'' \arrow[r, tail, "d"] & D \arrow[r, two heads, "d'"] & C \end{tikzcd}$$

é comutativo visto que $k'(da) = f''a' = b'f = k'(jf)$ e $d'(da') = 0gf = d'(jf)$. Segue da Proposição 2.1.8 que $ABA''D$ é bicartesiano, assim f é um núcleo de g, pela Proposição 2.1.11. $\square$

Seja $\alpha : A \to B$ um monic admissível e epimorfismo. Como α é monic admissível, tem um conúcleo tal que $A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \longrightarrow Coker(\alpha)$ é uma sequência exata curta. Como α é epimorfismo, $Coker(\alpha) = 0$. Assim, $\alpha = ker(B \to 0)$ e pela definição de núcleo, existe um único morfismo $\gamma : B \to A$ tal que $\alpha\gamma = 1_B$. Note que,

$$\alpha\gamma\alpha = \alpha = \alpha 1_A.$$

Como α é monic, $\gamma\alpha = 1_A$. Logo, α é um isomorfismo.

Definição 2.1.17. Uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ é idempotente completa se para todo idempotente $p : A \to A$, isto é, $p^2 = p$, existe uma decomposição $A \cong K \oplus I$ de A tal que $p \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observação 2.1.18. A categoria aditiva $\mathcal{A}$ é idempotente completa se, e somente se, todo idempotente tem um núcleo. De fato, suponha que todo idempotente tenha um núcleo. Seja $k : K \to A$ um núcleo do idempotente $p : A \to A$ e $i : I \to A$ um núcleo do idempotente $1 - p$. Porque $p(1-p) = 0$, temos $(1-p) = kl$, para um único $l : A \to K$ e porque $(1-p)p = 0$, temos $p = ij$ para um único $j : A \to I$. Visto que k é monomorfismo e $kli = (1-p)i = 0$, temos $li = 0$ e porque $klk = (1-p)k = pk + (1-p)k = k$ temos $lk = 1_K$. Similarmente, $jk = 0$ e $ji = 1_I$. Portanto $\begin{bmatrix} k & i \end{bmatrix} : K \oplus I \to A$ e $\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} : A \to K \oplus I$ são inversos um do outro e $\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} ij \begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$, como desejado. Note que construímos uma análise de p:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, two heads, "j"] & & A \arrow[dr, two heads, "l"] & \\
K \arrow[ur, tail, "k"] & & I \arrow[ur, tail, "i"] & & K,
\end{tikzcd}$$

em particular $k : K \rightarrowtail A$ é um núcleo de p e $i : I \rightarrowtail A$ é uma imagem de p. A recíproca é mais direta.

Proposição 2.1.19. *A categoria aditiva $\mathcal{A}$ é idempotente completa se, e somente se, todo idempotente p tem núcleo.*

Demonstração. Seja $p : A \to A$ um idempotente de $\mathcal{A}$. Considere $k : K \to A$ e $i : I \to A$ os núcleos de p e $1 - p$ respectivamente. Como $p(1-p) = 0$, existe um único morfismo $l : A \to K$ tal que $kl = 1 - p$. Como $(1-p)p = 0$, existe um único morfismo $j : A \to I$ tal que $ij = p$. Segue $0 = (1-p)i = kli$ e k monic implica $li = 0$. Também segue $k = pk = pk + k = pk + (1-p)k = (1-p)k = klk$ e k monic implica $lk = 1_K$, $0 = pk = ijk$ e i monic implica $jk = 0$ e $i = (1-p)i-(1-p)i+i = -pi+pi+i = (1-p)i+pi = pi = iji$ e i monic implica $ji = 1_I$. Assim, temos os morfismos $\begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} : K \oplus I \to A$, $\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} : A \to K \oplus I$ que são inversos um do outro:

$$\begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} = kl + ij = 1 - p + p = 1$$
$$\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk & li \\ jk & ji \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$$

Então, $A \cong K \oplus I$. Agora, note que

$$\begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} p \begin{pmatrix} k & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pk & pi \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} lpk & lpi \\ jpk & jpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lijk & liji \\ jijk & jiji \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$$

Logo $p \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$.

Reciprocamente, seja $p : A \to A$ um idempotente de $\mathcal{A}$. Tome K e I objetos de $\mathcal{A}$ tais que $A \cong K \oplus I$ e $p \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_I \end{pmatrix}$. $\square$

Definição 2.1.20. Um morfismo $r : B \to C$ é chamado de *retração* se existe uma seção $s :\to B$ de r no sentido de $rs = 1_C$. Dualmente, um morfismo $c : A \to B$ é *corretração*, se admite seção $s : B \to A$, isto é, $sc = 1_A$.

Observação 2.1.21. Retrações são epics e corretrações são monics. Além disso, uma seção de uma retração é uma corretração e uma seção de uma corretração é uma retração.

Observação 2.1.22. Assuma que $r : B \to C$ é uma retração, com seção $s : C \to B$. Então $sr : B \to B$ é um idempotente. Provaremos que este idempotente dá um acréscimo para uma decomposição de B, se r admite um núcleo $k : A \to B$. De fato, visto que $r(1_B - sr) = 0$, existe um único morfismo $t : B \to A$ tal que $kt = 1_B - sr$. Segue que k é uma corretração, pois $ktk = (1_B - sr)k = k$ implica $tk = 1_A$. Além disso, $kts = 0$, assim $ts = 0$, consequentemente $\begin{pmatrix} k & s \end{pmatrix} : A \oplus C \to B$ é um isomorfismo com inverso $\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}$. Em particular, as sequências $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ e $A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C$ são isomorfas.

Lema 2.1.23. *Em uma categoria aditiva $\mathcal{A}$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Toda corretração tem um conúcleo.*
2. *Toda retração tem um núcleo.*

Demonstração. Por dualidade é suficiente provar que (2) $\Rightarrow$ (1). Seja $c : C \to B$ uma corretração com seção s. Então s é uma retração e, assumindo 2, admite um núcleo $k : A \to B$. Pela discussão na Observação 2.1.22, k é uma corretração com seção $t : B \to A$ e t é um conúcleo de c. □

Definição 2.1.24. Se as condições do Lema 2.1.23 valem, então a categoria $\mathcal{A}$ é chamada *fracamente idempotente completa.*

Corolário 2.1.25. *Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A categoria aditiva $\mathcal{A}$ é fracamente idempotente completa.*
2. *Toda corretração é um monic admissível.*
3. *Toda retração é um epic admissível.*

Demonstração. Da Observação 2.1.22, se uma retração $r : B \to C$ admite um núcleo, então existe uma sequência $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ que é isomorfa à sequência exata cindida $A \rightarrowtail A \oplus C \rightarrowtail C$. Consequentemente, r é um epic admissível pelo Lema 2.1.5. Logo 1 implica 3. Por dualidade 1 implica 2 também. Reciprocamente, todo monic admissível tem um conúcleo e todo epic admissível tem um núcleo, consequentemente 2 e 3 implicam 1. □

Proposição 2.1.26. *Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A categoria aditiva $\mathcal{A}$ é fracamente idempotente completa.*
2. *Considere dois morfismos $g : B \to C$ e $f : A \to B$. Se $gf : A \to C$ é um epic admissível, então g é uma epic admissível.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Forme o pullback sobre g e gf e considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, "1_A"'] & & \\
& B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, two heads, "gf"] & C
\end{tikzcd}$$

que prova que g' é uma retração. Assim, g' tem um núcleo $K' \to B'$, pois o diagrama é um pullback, a composta $K' \to B' \to B$ é um núcleo de g e agora o dual do Axioma Obscuro diz que g é um epic admissível.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $r : B \to C$ uma retração com seção $s : C \to B$. Como 1_C é epic admissível, r é epic admissível. Logo existe $ker(r)$. $\square$

Corolário 2.1.27. *Uma categoria exata é fracamente idempotente completa se, e somente se, tem a seguinte propriedade: todo morfismo $g : B \to C$ tal que existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "gf"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

é epic admissível.

Demonstração. Uma categoria exata fracamente idempotente completa desfruta da propriedade estabelecida pela Proposição 2.1.26.

Reciprocamente, sejam $r : B \to C$ e $s : C \to B$ tal que $rs = 1_C$. Queremos mostrar que r é um epic admissível. As sequências

$$B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -r \end{smallmatrix}\right)} B \oplus C \xrightarrow{(r\ 1)} C \quad \text{e} \quad C \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -s \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} B \oplus C \xrightarrow{(1\ s)} B$$

são exatas cindidas, assim $\begin{pmatrix} r & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & s \end{pmatrix}$ são epics admissíveis. Como o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \oplus C \arrow[r, two heads, "(1\ s)"] \arrow[dr, two heads, "(r\ 1)"] & B \arrow[d, "r"] \\
& C
\end{tikzcd}$$

é comutativo, r é um epic admissível. $\square$

Definição 2.1.28. Um morfismo $f : A \to B$ em uma categoria exata

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f", "\circ" marking] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & B \\
& I \arrow[ur, tail, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

é chamado *admissível* se ele se fatora como uma composição de uma monic admissível com uma epic admissível. Nos diagramas, denotamos morfismo admissível como $\mathrel{-\!\circ\!\!\rightarrow}$ em diagramas.

Lema 2.1.29. *A fatoração de um morfismo admissível é única a menos de isomorfismo. Mais precisamente, em um diagrama comutativo da forma*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, two heads, "e'"'] & I \arrow[d, tail, "m"] \arrow[dl, dashed, "i"] \\ I' \arrow[r, tail, "m'"'] \arrow[ur, dashed, "i'"] & B. \end{tikzcd}$$

existe um único morfismo i, i' *fazendo o diagrama comutar. Em particular, i e i' são isomorfismos mutuamente inversos.*

Demonstração. Seja k um núcleo de e. Visto que $m'e'k = mek = 0$ e m' é monic temos $e'k = 0$, consequentemente existe um único morfismo $i : I \to I'$ tal que $e' = ie$. Além disso, $m'ie = m'e' = me$. Como e é epic obtemos $m'i = m$. Dualmente para i'. □

Um morfismo admissível tem uma análise

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"] & & B \arrow[dr, two heads, "c"] & \\ K \arrow[ur, tail, "k"] & & I \arrow[ur, tail, "m"] & & C \end{tikzcd}$$

na qual k é um núcleo, c é um conúcleo, e é uma coimagem e m é uma imagem de f e a classe de isomorfismos de K, I e C está bem definida pelo Lema 2.1.29.

Lema 2.1.30. *Morfismos admissíveis são estáveis sob pushout ao longo de monics admissíveis e pullbacks ao longo de epics admissíveis.*

Demonstração. Seja $A \twoheadrightarrow I \rightarrowtail B$ uma fatoração de um morfismo admissível em um epic admissível e um monic admissível. Para provar a parte do pushout construa o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & I \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \arrow[d, tail] \\ A' \arrow[r, two heads] & I' \arrow[r, tail] & B'. \end{tikzcd}$$

A Proposição 2.1.11 diz que $A' \to I'$ é um epic admissível e o restante da demonstração é direta. □

Definição 2.1.31. Dizemos que uma sequência de morfismos admissíveis

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & A \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, two heads] & & A'' \\ & I \arrow[ur, tail, "m"'] & & I' \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

é *exata* se $I \rightarrowtail A \twoheadrightarrow I'$ é uma sequência exata curta. Sequências longas de morfismos admissíveis são exatas se a sequência dada por quaisquer dois morfismos consecutivos é exata.

Lema 2.1.32 (Lema das Cinco)**.** *Se o diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[d] & A_3 \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[d, "f"] & A_4 \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[d] & A_5 \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r, "\circ" marking] & B_2 \arrow[r, "\circ" marking] & B_3 \arrow[r, "\circ" marking] & B_4 \arrow[r, "\circ" marking] & B_5
\end{tikzcd}$$

tem linhas exatas então f é um isomorfismo.

Proposição 2.1.33. *Assuma que $\mathcal{A}$ é uma categoria exata fracamente idempotente. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos admissíveis tais que $h = gf : A \to C$ é também admissível. Então existe uma sequência exata*

$$\begin{tikzcd}
Kerf \arrow[r, tail] & Kerh \arrow[r, "\circ" marking] & Kerg \arrow[r, "\circ" marking] & Cokerf \arrow[r, "\circ" marking] & Cokerh \arrow[r, two heads] & Cokerg.
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Observe que o morfismo $Ker(f) \rightarrowtail A$ se fatora sobre $Ker(h) \rightarrowtail A$ via um único morfismo $Ker(f) \longrightarrow Ker(h)$ que é um monic admissível, pela Proposição 2.1.26.

Seja $Ker(h) \twoheadrightarrow X$ um conúcleo de $Ker(f) \rightarrowtail Ker(h)$. Dualmente, existe um epic admissível $Coker(h) \twoheadrightarrow Coker(g)$ com $Z \rightarrowtail Coker(h)$ como núcleo. O Lema 2.1.15 implica que existem dois diagramas comutativos com linhas e colunas exatas

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & Ker(h) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & X \arrow[d, tail] \\
Ker(f) \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Im(f) \arrow[d, two heads] \\
& Im(h) \arrow[r, equal] & Im(h)
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
Im(h) \arrow[r, equal] & Im(g) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & Z \arrow[d, tail] \\
Im(h) \arrow[r, tail] & C \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Coker(h) \arrow[d, two heads] \\
& Coker(g) \arrow[r, equal] & Coker(g).
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que existe um monic admissível $X \rightarrowtail Ker(g)$ cujo conúcleo denotamos por $Ker(g) \twoheadrightarrow Y$. Portanto, o Corolário 2.1.16 produz um diagrama comutativo com linhas e colunas exatas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & Ker(g) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & Y \arrow[d, tail] \\
Im(f) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Coker(f) \arrow[d, two heads] \\
Im(h) \arrow[r, tail] & Im(g) \arrow[r, two heads] & Z.
\end{tikzcd}$$

A sequência-Ker-Coker desejada é agora obtida pelo encaixe: começa com a primeira linha do primeiro diagrama, emenda com a primeira linha do terceiro diagrama, e continua com a terceira coluna do terceiro diagrama e a terceira coluna do segundo diagrama. A naturalidade afirmação é direta. □

Lema 2.1.34. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria exata em que cada triângulo comutativo de morfismos admissíveis produz uma sequência-Ker-Coker exata sendo a exatidão no sentido de morfismos admissíveis. Então $\mathcal{A}$ é fracamente idempotente completa.*

Demonstração. Usando o critério no Corolário 2.1.27, precisamos mostrar que todo diagrama comutativo da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[dr, two heads, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

o morfismo g é um epic admissível. Dado tal diagrama, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, tail] \arrow[dr, "0"] & A \arrow[d, two heads, "h"] \\ & C \end{tikzcd}$$

cuja sequência-Ker-Coker associada é

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow Ker(h) \longrightarrow B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tal que g é um epic admissível. $\square$

Corolário 2.1.35 (Lema da Serpente)**.** *Seja $\mathcal{A}$ fracamente idempotente completa. Considere um morfismo de sequências exatas curtas $A' \rightarrowtail A \twoheadrightarrow A''$ e $B' \rightarrowtail B \twoheadrightarrow B''$ com componentes admissíveis. Existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, tail] & K \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[d, tail] & K'' \arrow[d, tail] \\ A' \arrow[r, tail] \arrow[d] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A'' \arrow[d] \\ B' \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & B'' \arrow[d, two heads] \\ C' \arrow[r, dashed, "c"] & C \arrow[r, dashed, "c'"] & C'' \end{tikzcd}$$

com linhas e colunas exatas e existe um morfismo de conecção $\delta : K'' \to C'$ apropriado para uma sequência exata

$$K' \overset{k}{\rightarrowtail} K \xrightarrow{k'} K'' \xrightarrow{\delta} C' \xrightarrow{c} C \overset{c'}{\twoheadrightarrow} C''$$

dependendo naturalmente do morfismo de sequências exatas curtas.

Demonstração. Pela Proposição 1.1.14 e Lema 2.1.30, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\circ" marking] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\circ" marking] & A'' \arrow[d, equal] \\
B' \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & D \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\circ" marking] & A'' \arrow[d, "\circ" marking] \\
B' \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & B''
\end{tikzcd}$$

(mais precisamente, o diagrama é obtido formando o pushout $A'AB'D$). A sequência-Ker-Coker de um triângulo comutativo de morfismos admissíveis

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[dr, "\circ" marking] & D \arrow[d, "\circ" marking] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

produz o resultado desejado, pela Observação 2.1.9. □

Observação 2.1.36. Usando a notação da demonstração do Lema considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Kerf \arrow[r, tail] \arrow[d, "\circ" marking] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\circ" marking] & B \arrow[d] \\
C \arrow[r, equal] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

A sequência $Kerf \rightarrowtail Kerh \xrightarrow{\circ} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\circ} 0 \twoheadrightarrow 0$ fornecida pelo Lema da serpente mostra que g é uma epic admissível. Segue que o Lema da serpente pode valer somente se a categoria é fracamente idempotente completa.

Capítulo 3

Categoria Grothendieck e Categoria Exata do Tipo Grothendieck

Em 1957, Alexandre Grothendieck [9] provou que uma categoria abeliana possuindo as ferramentas necessárias tais como limites diretos exatos e a existência de um gerador, poderia ter suficientes injetivos. Com a demonstração deste fato, tem-se uma alternativa para demonstrar que a categoria dos módulos de um anel também tem suficientes injetivos.

Em vários contextos frequentemente considera-se categorias mais gerais que categorias Grothendieck. Isto motivou Stovicek [10] a definir uma categoria exata que tenha suficientes injetivos. Ele fez isso trazendo a configuração da categoria de Grothendieck para categoria exata e fazendo as adaptações necessárias.

Neste capítulo apresentamos a definição de *categoria Grothendieck*, *categoria eficiente*, *categoria exata do tipo Grothendieck* e algumas definições e resultados necessários para demonstrar que a categoria Grothendieck e a categoria exata do tipo Grotendieck tem suficientes injetivos. Os conceitos trabalhados neste capítulo podem ser encontrados em [9],[10], [19], [28]. Neste capítulo assumimos que o leitor esteja familiarizado com o conceito de *números ordinais* e *números cardinais* que podem ser encontrados em [29].

3.1 Categoria Grothendieck

Nesta seção definiremos a *categoria Grothendieck*, apresentaremos alguns resultados necessários com relação a exatidão de limites e o argumento de objetos pequenos de Quillen, que pode ser encontrado em [28], para demonstrar que a categoria Grothendick tem suficientes injetivos.

3.1.1 A exatidão de limites diretos

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana cocompleta. Pelo dual da Proposição 1.2.33, o funtor colimite $\varinjlim : Fun(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ é exato à esquerda. Assim limites diretos são exatos se, e somente se, eles preservam monomorfismos. Sejam C um objeto de $\mathcal{C}$ e $(C_i)_I$ uma família direta de subobjetos de C. Se os limites diretos em $\mathcal{C}$ são exatos, então $\varinjlim C_i$ é um subobjeto de C que coincide com $\sum\limits_I C_i$, e é chamado de *união direta* dos subobjetos C_i. A exatidão de limites diretos, implicam, em particular, que uniões diretas preservam interseções finitas, assim, para qualquer subobjeto B de C, tem-se

$$(\sum_I C_i) \cap B = \sum_I (C_i \cap B). \tag{3.1}$$

Lema 3.1.1. *Se C satisfaz* (3.1) *e seja $(C_i)_I$ um sistema direto de objetos em $\mathcal{C}$, então, para cada $k \in I$, tem-se*

$$Ker(C_k \to \varinjlim C_i) = \sum_{j \geq k} Ker(C_k \to C_j).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2.29,

$$\varinjlim C_i = Coker(\bigoplus_\lambda C_{s(\lambda)} \to \bigoplus_i C_i) \text{ e}$$

$$l_\lambda = u_{t(\lambda)}\gamma_{ij} - u_{s(\lambda)} : C_{s(\lambda)} \to \bigoplus_i C_i.$$

Para cada $k \in I$, existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus\limits_I C_i \arrow[dd, "p"] \\
C_k \arrow[ur, "u_k"] \arrow[dr, "l_k"'] & \\
& \varinjlim C_i
\end{tikzcd}$$

de morfismos canônicos. Seja R o subconjunto de $I \times I$ consistindo dos pares (i, j), com $i \leq j$. Para cada $S \subset R$, colocamos

$$C_S = \sum_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) \subset \bigoplus_I C_i,$$

sendo $\gamma_{ij} : C_i \to C_j$ o morfismo canônico, para $i \leq j$. Então $\varinjlim C_i = \frac{\bigoplus_I C_i}{C_R}$. De fato, pela definição de coproduto,

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{\lambda} C_{s(\lambda)} \arrow[dd, dashed, "\bar{\alpha}"] \\ C_{s(\lambda)} \arrow[ur, "u_{s(\lambda)}"] \arrow[dr, "l_\lambda"'] & \\ & \bigoplus_{I} C_i \end{tikzcd}$$

Além disso, $Im(l_\lambda) = Ker(coker(l_\lambda))$ e

$$\begin{tikzcd} C_{s(\lambda)} \arrow[rr, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr, "l'_\lambda"'] & & \bigoplus_{I} C_i \\ & Im(l_\lambda) \arrow[ur, "\gamma_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

com l'_λ epimorfismo e γ_λ monomorfismo. Pela definição de coproduto, existem únicos morfismos l' e γ que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\lambda} C_{s(\lambda)} \arrow[r, dashed, "l'"] & \bigoplus_{\lambda} Im(l_\lambda) \arrow[r, dashed, "\gamma"] & \bigoplus_{I} C_i \\ C_{s(\lambda)} \arrow[u, "u_{s(\lambda)}"] \arrow[r, "l'_\lambda"] & Im(l_\lambda) \arrow[u] \arrow[ur, "\gamma_\lambda"] & \end{tikzcd}$$

Como $\gamma_\lambda l'_\lambda = l_\lambda$, para todo λ, segue que $\gamma l' u_{s(\lambda)} = l_\lambda$, para todo λ. Pela unicidade de $\bar{\alpha}$, temos $\gamma l' = \bar{\alpha}$. Pelo dual da Proposição 1.1.14, l' é epimorfismo. Assim,

$$\sum_{\lambda} Im(l_\lambda) = Im(\gamma) = Ker(coker(\gamma)) =$$
$$Ker(coker(\gamma l')) = Ker(coker(\bar{\alpha}) = Im(\bar{\alpha})$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\lambda} C_{s(\lambda)} \arrow[r, "l'"] & \bigoplus_{\lambda} Im(l_\lambda) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "0"] & \bigoplus_{I} C_i \arrow[r] \arrow[d] & Coker(\gamma l') \arrow[dl, dashed] \\ & & X & \end{tikzcd}$$

isto é, $C_R = \sum_{\lambda} Im(l_\lambda) = Im(\bar{\alpha})$. Logo,

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\lambda} C_{s(\lambda)} \arrow[rr, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \bigoplus_{I} C_i \arrow[r, "coker(\bar{\alpha})"] & \varinjlim C_i \\ & C_R \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $\bar{\alpha} = \alpha\beta$, segue que $coker(\bar{\alpha}) = coker(\alpha)$. Como α é monic, $\varinjlim C_i = \dfrac{\bigoplus_I C_i}{C_R}$.
Para cada $S \subset R$ subconjunto finito de R, temos um morfismo induzido $\gamma_S : \bigoplus_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) \to \bigoplus_i C_i$ e $Im(\gamma_S) = \sum_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) = C_S$. Segue o morfismo induzido $\delta : \bigoplus_S C_S \to \bigoplus_i C_i$. Considerando

$$\gamma'_S : \bigoplus_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) \to \sum_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}),$$

o epimorfismo da fatoração da $Im(\gamma_S)$, $u_{(i,j)_S} : Im(ui - u_j\gamma_{ij}) \to \bigoplus_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij})$ e $u_S : \sum_{(i,j)\in S} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) \to \bigoplus_S C_S$ inclusões, temos o morfismo induzido $\mu : \bigoplus_{(i,j)\in R} Im(u_i - u_j\gamma_{ij}) \to \bigoplus_S C_S$. Pela unicidade da definição de coproduto, $\delta\mu = \gamma$.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{(i,j)\in R} Im(l_{(i,j)}) \arrow[rrr, dashed, "\mu"] & & & \bigoplus_S \sum C_S \arrow[r, dashed, "\delta"] & \bigoplus_i C_i \\
Im(l_{(i,j)}) \arrow[u, "u_{(i,j)}"] \arrow[r, "u_{(i,j)_S}"] & \bigoplus_{(i,j)\in S} Im(l_{(i,j)}) \arrow[rr, "\gamma'_S"] & & \sum_{(i,j)\in S} Im(l_{(i,j)}) \arrow[u, "u_S"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que μ é epimorfismo. Seja $f : \bigoplus_S \sum Im(l_{(i,j)}) \to X$ tal que $f\mu = 0$. Segue que $f\mu u_{(i,j)} = 0$, para todo $(i,j) \in R$. Então $fu_S\gamma'_S u_(i,j)_S = 0$, para todo S subconjunto finito de R e para todo $(i,j) \in S$. Isto implica $fu_S\gamma'_S = 0$, para todo S subconjunto finito de R. Como γ'_S é epimorfismo, $fu_S = 0$, para todo S subconjunto finito de R. Logo, $f = 0$. Portanto, μ é um epimorfismo. Consequentemente,

$$C_R = \sum_{(i,j)\in R} Im(l_{(i,j)}) = Im(\gamma) = Im(\delta\mu) = Im(\delta) = \sum_S C_S.$$

Assim, para cada $k \in I$, tem-se $Ker(l_k) = u_k^{-1}(C_R) = \sum_S u_k^{-1}(C_S)$, pela hipótese. Agora para mostrar que $Ker(l_k) = \sum_{j\geq k} Ker(\gamma_{kj})$, é suficiente mostrar que, para todo S finito, tem-se $u_k^{-1}(C_S) \subset Ker(\gamma_{ks})$, para algum $s \geq k$. Visto que S é finito, pode-se escolher $s \in I$ tal que $k \leq s$ e $(i,j) \in S$ implica $i \leq s$, $j \leq s$. Definimos $\beta : \bigoplus_i C_i \to C_S$ tal que

$$\beta u_i = \begin{cases} \gamma_{is} & \text{se } i \leq s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para cada $(i,j) \in S$, tem-se $\beta(u_i - u_j\gamma_{ij}) = \gamma_{is} - \gamma_{js}\gamma_{ij} = 0$. Assim $C_S \subset Ker(\beta)$. Consequentemente, $u_k^{-1}(C_S) \subset u_k^{-1}(Ker(\beta)) = Ker(\beta u_k) = Ker(\gamma_{ks})$, como desejado. $\square$

Proposição 3.1.2. *As seguintes propriedades de categoria abeliana cocompleta $\mathcal{C}$ são equivalentes:*

1. *Limites diretos são exatos em $\mathcal{C}$.*
2. *$\mathcal{C}$ satisfaz a condição $(\sum_I C_i) \cap B = \sum_I (C_i \cap B)$, na qual C_i são subobjetos de um objeto C de $\mathcal{C}$ e B é um objeto de $\mathcal{C}$.*

3. *Para todo morfismo* $\alpha : B \to C$ *e família direta* $(C_i)_I$ *de subobjetos de* C, *tem* $\alpha^{-1}(\sum C_i) = \sum \alpha^{-1}(C_i)$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2): Para cada $i \in I$, considere o diagrama pullback

$$\begin{tikzcd} C_i \cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[d, hook] \\ C_i \arrow[r, hook] & C. \end{tikzcd}$$

Aplicando o funtor limite temos

$$\begin{tikzcd} \varinjlim(C_i \cap B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ \varinjlim C_i \arrow[r, hook] & C \end{tikzcd}$$

como o funtor limite preserva limites e o pullback é um limite, o diagrama acima é um pullback. Por hipótese, o limite direto é exato. Logo preserva monomorfismos. Assim temos o diagrama pullback

$$\begin{tikzcd} \sum(C_i \cap B) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B \arrow[d, hook] \\ \sum C_i \arrow[r, hook] & C. \end{tikzcd}$$

Logo, $\sum(C_i \cap B) = (\sum C_i) \cap B$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Seja $\alpha : B \to C$. E $\alpha^{-1}(C_i)$ dado por

$$\begin{tikzcd} \alpha^{-1}(C_i) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\ C_i \arrow[r, hook, "c"] & C. \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Note que α se fatora como $B \xrightarrow{\tilde{\alpha}} Im(\alpha) \xrightarrow{\gamma} C$ com $\tilde{\alpha}$ sendo um epimorfismo e γ monomorfismo. Construindo o pullback, temos

$$\begin{tikzcd} C_i \cap Im(\alpha) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] \arrow[dr, phantom, "PB"] & Im(\alpha) \arrow[d, "\gamma"] \\ C_i \arrow[r, hook, "c"] & C. \end{tikzcd}$$

Note que $\gamma\tilde{\alpha}b = \alpha b = ca$, então existe um único $\beta : \alpha^{-1}(C_i) \to C_i \cap Im(\alpha)$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(C_i) \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\tilde{\alpha}b"] \arrow[ddr, bend right, "a"'] & & \\
& C_i \cap Im(\alpha) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & Im(\alpha) \arrow[d, "\gamma"] \\
& C_i \arrow[r, hook, "c"] & C.
\end{tikzcd}
$$

Assim completamos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(C_i) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \\
C_i \cap Im_(\alpha) \arrow[r, "y"] & Im(\alpha).
\end{tikzcd} \tag{3.3}
$$

Vamos mostrar que é pullback. Sejam $f : X \to B$ e $g : X \to C_i \cap Im(\alpha)$ morfismos tais que $yg = \tilde{\alpha}f$. Segue que $cxg = \gamma yg = \gamma\tilde{\alpha}f$. Pela propriedade pullback do quadrado (3.2), existe um único morfismo $\lambda : X \to \alpha^{-1}(C_i)$ tal que $xg = x\beta\lambda$ e $f = b\lambda$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "xg"'] & & \\
& \alpha^{-1}(C_i) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a=x\beta"] & B \arrow[d, "\alpha"] \\
& C_i \arrow[r, "c"] & C.
\end{tikzcd}
$$

Como x é monomorfismo, $g = \beta\lambda$. Logo, (3.3) é um pullback. Note que

$$
0 \longrightarrow C_i \cap Im(\alpha) \xrightarrow{y} Im(\alpha) \xrightarrow{y_1} \frac{Im(\alpha)}{C_i \cap Im(\alpha)} \longrightarrow 0
$$

é exata, consequentemente, $y = ker(y_1)$. Pela Proposição 1.2.12, $b = ker(y_1\alpha)$, ou seja,

$$
0 \longrightarrow \alpha^{-1}(C_i) \xrightarrow{b} B \xrightarrow{y_1\alpha} \frac{Im(\alpha)}{C_i \cap Im(\alpha)} \longrightarrow 0
$$

é exata. Assim, temos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \alpha^{-1}(C_i) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r, "y_1\alpha"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] & \frac{Im(\alpha)}{C_i \cap Im(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_i \cap Im(\alpha) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & Im(\alpha) \arrow[r, "y_1"] \arrow[d, "\gamma"] & \frac{Im(\alpha)}{C_i \cap Im(\alpha)} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_i \arrow[r, "c"] & C \arrow[r, "c_1"] & \frac{C}{C_i} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Pela Proposição 1.2.34, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \sum \alpha^{-1}(C_i) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim \frac{Im(\alpha)}{(C_i \cap Im(\alpha))} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \sum C_i \arrow[r] & C \arrow[r] & \frac{C}{\sum C_i} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

As duas primeiras linhas formam um diagrama pullback, então o primeiro quadrado à esquerda é um pullback. Por hipótese, $\sum(C_i \cap Im(\alpha)) = (\sum C_i) \cap Im(\alpha)$. Segue que o quadrado à esquerda abaixo é um quadrado pullback pela definição de interseção. Assim, como os dois quadrados à esquerda são pullbacks, temos que o retângulo maior à esquerda é um pullback, a saber

$$\begin{tikzcd}
\sum \alpha^{-1}(C_i) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
\sum C_i \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

Logo, pela definição de imagem inversa, $\sum \alpha^{-1}(C_i) = \alpha^{-1}(\sum C_i)$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Se B é um subobjeto de C e $(C_i)_I$ é uma família direta de subobjetos de C, então aplica-se (c) ao monomorfismo $\alpha : B \to C$, e obtém-se

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{-1}(\sum C_i) = B \cap \sum C_i \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\alpha"] \\
\sum C_i \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

Logo, $B \cap (\sum C_i) = \alpha^{-1}(\sum C_i) = \sum \alpha^{-1}(C_i) = \sum(B \cap C_i)$. Resta provar que 2 e 3 implicam 1. Seja $\alpha_i : B_i \to C_i$, para cada $i \in I$, um sistema direto de monomorfismos em $\mathcal{C}$, com morfismos canônicos $\beta_{ij} : B_i \to B_j$ e $\gamma_{ij} : C_i \to C_j$, quando $i \leq j$. Existem diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
B_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "l'_i"] & C_i \arrow[d, "l_i"] \\
\varinjlim B_i \arrow[r, "\alpha"] & \varinjlim C_i.
\end{tikzcd}$$

Tomemos $K = Ker(\alpha)$. Visto que $\varinjlim B_i = \sum_I Im(l'_i)$ pela Proposição 1.2.29, temos $K = K \cap (\sum Im(l'_i)) = \sum(K \cap Im(l'_i))$. Portanto, é suficiente mostrar que $K \cap Im(l'_i) = 0$, para todo $i \in I$. Suponhamos, por contradição, que $K \cap Im(l'_i) \neq 0$. Segue que $l_i'^{-1}(K) \neq 0$ em B_i. Com o uso da Proposição 1.2.12 e Lema 3.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \neq l_i'^{-1}(K) &= Ker(\alpha l_i') = Ker(l_i\alpha_i) = \alpha_i^{-1}(Ker(l_i) \\ &= \alpha_i^{-1}(\sum_{j\leq i} Ker(\gamma_{ij}) = \sum \alpha_i^{-1}(Ker(\gamma_{ij})) \\ &= \sum Ker(\gamma_{ij}\alpha_i) = \sum Ker(\alpha_j\beta_{ij}) = \sum Ker(\beta_{ij}) \\ &= Ker(l_i'). \end{aligned}$$

Isto implica $Im(l_i') \cap K = l_i'(l_i'^{-1}(K)) = 0$, uma contradição que finaliza a prova da proposição. □

3.1.2 Injetivos em categorias Grothendieck

Definição 3.1.3. Uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ é chamada *categoria Grothendieck* se existem um gerador e limites diretos e os limites diretos são exatos.

A existência de um gerador implica que, dado um objeto M de uma categoria Grothendieck $\mathcal{A}$, existe um conjunto de subobjetos.

Definição 3.1.4. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck. Seja M um objeto de $\mathcal{A}$. O *tamanho* $|M|$ de M é a cardinalidade do conjunto de subobjetos de M.

Lema 3.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck. Se*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de $\mathcal{A}$, então $|M'|, |M''| \leq |M|$.

Lema 3.1.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck com gerador G.*

1. *Se $|M| \leq \kappa$, então M é o quociente de uma soma direta de, no máximo, κ cópias de G.*

2. *Para todo cardinal κ, existe um conjunto de classes de isomorfismos de objetos M, com $|M| \leq \kappa$.*

Demonstração. Para (1) escolha, para todo subobjeto próprio $M' \subset M$ um morfismo $\varphi_{M'} : G \to M$ cuja imagem não está contida em M'. Então

$$\oplus_{M'\subset M}\varphi_{M'} : \oplus_{M'\subset M} G \to M$$

é sobrejetiva. É claro que (1) implica (2). □

Definição 3.1.7. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria, $I \subset ob\mathcal{C}$ e α um ordinal. Um objeto A de $\mathcal{C}$ é dito *α-pequeno com relação a I* se sempre que $\{B_\beta\}$ é um sistema sobre α com aplicações transitivas em I, então a aplicação

$$\varinjlim_{\beta\in\alpha} Hom_{\mathcal{C}}(A, B_\beta) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, \varinjlim_{\beta\in\alpha} B_\beta)$$

é um isomorfismo.

Proposição 3.1.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck. Seja M um objeto de $\mathcal{A}$. Seja $\kappa = |M|$. Se α é um ordinal cuja cofinalidade é maior que κ, então M é α-pequeno com respeito a injeções.*

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que a aplicação

$$\varinjlim_{\beta\in\alpha} Hom_{\mathcal{C}}(A, B_\beta) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, \varinjlim_{\beta\in\alpha} B_\beta)$$

é uma sobrejeção. Seja $f : M \to \varinjlim B_\beta$ um morfismo. Considere os subobjetos do colimite $B = \cup_\beta B_\beta$. Se um deles, digamos $f_{-1}(B_\beta)$, preenche M, então o morfismo fatora sobre B_β. Suponha o contrário, isto é, que todos $f_{-1}(B_\beta)$ sejam subobjetos próprios de M. Contudo, porque $\mathcal{A}$ tem colimites filtrados exatos, temos

$$\varinjlim F_{-1}(B_\beta) = f_{-1}(\varinjlim B_\beta) = M.$$

Agora, existem no máximo κ subobjetos diferentes de M que ocorrem em $f_{-1}(B_\alpha)$, por hipótese. Assim, podemos encontrar um subconjunto $S \subset \alpha$ de cardinalidade no máximo κ tal que como β' varia sobre S, o $f^{-1}(B_{\beta'})$ varia sobre todo os $f^{-1}(B_\alpha)$. No entanto, S tem uma cota superior $\tilde{\alpha} < \alpha$, já que α tem cofinalidade maior que κ. Em particular, todos os $f^{-1}(B_{\beta'}), \beta' \in S$, estão contidas em $f^{-1}(B_{\tilde{\alpha}})$. Logo $f^{-1}(B_{\tilde{\alpha}}) = M$. Em particular, a aplicação se fatora através de $B_{\tilde{\alpha}}$. □

Na categoria dos módulos de um anel, o critério de Baer a partir do lema de Zorn, nos dá uma caracterização de módulos injetivos. Na categoria Grothendieck também temos uma caracterização de objetos injetivos, análoga à de módulos que demonstraremos a seguir.

Proposição 3.1.9. *(Critério de Baer para Categoria Grothendieck). Seja $\mathcal{C}$ uma categoria Grothendieck com uma família de geradores $(G_i)_I$. Um objeto E é injetivo se, e somente se, para todo monomorfismo $\alpha : C \to G_i$ e morfismo $\varphi : C \to E$, existe $\varphi' : G_i \to E$ tal que $\varphi'\alpha = \varphi$.*

Demonstração. Sejam um monomorfismo $\alpha : C \to C'$ e um morfismo $\varphi : C \to E$. Considere o conjunto S de pares (A, φ') consistindo de um objeto A tal que $C \subset A \subset C'$ e um morfismo $\varphi' : A \to E$ estendendo E, ou seja, $\varphi' a = \varphi$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r, "b"] \arrow[dl, "\varphi'"] & C' \\
E. & &
\end{tikzcd}$$

Dados $(A, f), (B, g) \in S$, dizemos que $(A, f) < (B, g)$, se $A \subset B$, como no diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "a"] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[r, "b"] \arrow[dl, "f"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dll, "g"] & C' \\
E. & & &
\end{tikzcd}$$

Desse modo, $<$ define uma relação de ordem parcial em S. Então escolha um subconjunto $T \subset S$ totalmente ordenado. Como T é totalmente ordenado, segue que é um conjunto dirigido. Fixando um conjunto de índices I, para os elementos de T, e definindo uma ordem em I de modo que $i \leq j$ sempre que $A_i \subseteq A_j$, observamos que as famílias $(A_i)_{i\in I}$ e $(\varphi_i)_{i\in I}$ são diretas, com $(A_i, \varphi_i) \in T$, para todo $i \in I$. Então, os respectivos limites diretos existem e $(\varinjlim A_t, \varinjlim \varphi_t)$ é uma cota superior de T. Pelo Lema de Zorn, o conjunto S tem um elemento maximal (A, φ').

Afirmação: Se φ não pode ser estendida dentro de C', ou seja, não existe morfismo $\varphi' : A' \to E$ tal que $C \subset A' \subset C'$ e o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & A' \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi'"] & C' \\
E & &
\end{tikzcd}$$

comuta, então α é um isomorfismo. De fato, suponha que α não seja um isomorfismo. Então existe algum morfismo $\gamma : G_i \to C'$ tal que $Im\gamma$ não está contida em C. De fato, como α não é isomorfismo, então α não é epimorfismo. Segue que $coker\alpha \neq 0$. Como G_i é gerador, existe $\gamma : G_i \to C'$ tal que $\alpha\gamma \neq 0$. Daí, γ não pode ser fatorado por C, pois do contrário teríamos a contradição $\alpha\gamma = 0$. Assim, $Im\gamma$ não está contida em C. Considere os pullbacks

$$\begin{tikzcd}
\gamma^{-1}(C) \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & C \arrow[d, "\alpha"] \\
G_i \arrow[r, "\gamma"] & C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Im\gamma \cap C \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C \arrow[d, "\alpha"] \\
Im\gamma \arrow[r, "\lambda"] & C'
\end{tikzcd}$$

Segue que

$$\begin{tikzcd}
\gamma^{-1}(C) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Im\gamma \cap C \arrow[d, "\alpha_2"] \\
G_i \arrow[r, "\gamma'"] & Im\gamma
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

também é um pullback. Tomando a sequência exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G_i \longrightarrow Im\gamma \longrightarrow 0,$$

temos um diagrama pullback

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k'"] \arrow[d, equal] & \gamma^{-1}(C) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha_1"] & Im\gamma \cap C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & G_i \arrow[r, "\gamma'"] & Im\gamma \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Visto que $\gamma^{-1}(C)$ é um subobjeto de G_i, o morfismo composto

$$\gamma^{-1}(C) \xrightarrow{\gamma_1'} Im\gamma \cap C \xrightarrow{\lambda_1} C \xrightarrow{\varphi} E$$

pode ser estendido a $\beta : G_i \to E$, por hipótese. No diagrama

$$\begin{tikzcd} \gamma^{-1}(C) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Im\gamma \cap C \arrow[r, "\lambda_1"] & C \arrow[r, "\varphi"] & E \\ G_i \arrow[urrr, dashed, "\beta"] & & & \end{tikzcd}.$$

Já que $\gamma_1' k' = 0$, $\beta\alpha_1 k' = \varphi\gamma_1\gamma_1' k' = 0$. Como $Im\gamma$ é o conúcleo de $K \to G_i$, existe um único $\beta' : Im\gamma \to E$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & G_i \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\beta"'] & Im\gamma \arrow[dl, dashed, "\beta'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

O diagrama

$$\begin{tikzcd} Im\gamma \cap C \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ Im\gamma \arrow[r, "\beta'"] & E. \end{tikzcd}$$

comuta porque $\gamma_1' : \gamma^{-1}(C) \to Im\gamma \cap C$ é um epimorfismo e em

$$\begin{tikzcd} \gamma^{-1}(C) \arrow[r, "\gamma_1'"] \arrow[d, "\alpha_1"] & Im\gamma \cap C \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & C \arrow[d, "\varphi"] \\ G_i \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & Im\gamma \arrow[r, "\beta'"] & E \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

o retângulo maior comuta e o diagrama (3.4) comuta.

Pela demonstração da Proposição 1.2.12 item 2, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Im\gamma \cap C \xrightarrow{\binom{\alpha_2}{\lambda_1}} Im\gamma \oplus C \xrightarrow{u} Im\gamma + C \longrightarrow 0. \tag{3.6}$$

Considere o morfismo $(-\beta',\ \varphi) : Im\gamma \oplus C \to E$. Segue de (3.5)

$$\begin{pmatrix} -\beta' & \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Então, como u é o conúcleo de $\binom{\alpha_2}{\lambda_1}$, existe um único morfismo $u' : Im\gamma + C \to E$ tal que $u'u = \begin{pmatrix} -\beta' & \varphi \end{pmatrix}$, como a seguir.

$$\begin{tikzcd}
Im\gamma \cap C \arrow[r, "\binom{\alpha_2}{\lambda_1}"] \arrow[dr, "0"'] & Im\gamma \oplus C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "{(-\beta',\ \varphi)}"] & Im\gamma + C \arrow[dl, dashed, "u'"] \\
& E. &
\end{tikzcd}$$

Assim,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] \arrow[d, "\varphi"'] & Im(\gamma) \oplus C \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "{(-\beta',\varphi)}"] & Im(\gamma) + C \arrow[dll, bend left, "u'"] & C' \\
E. & & &
\end{tikzcd}$$

Isto significa que encontramos um morfismo u' que estende estritamente φ, o que é uma contradição. Assim, demonstramos a Afirmação.

Desse modo, se φ pode ser estendida dentro de C', encontramos, pelo Lema de Zorn, uma extensão maximal φ' e não existe uma extensão φ' dentro de C'. Então, pela Afirmação, $A \cong C'$. Logo, E é um objeto injetivo. $\square$

Teorema 3.1.10. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck. Então todo objeto pode ser mergulhado em um objeto injetivo.*

Demonstração. Escolha um gerador G de $\mathcal{A}$. Para um objeto X, definimos $E(X)$ pelo seguinte diagrama pushout

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{N \subset G} \left(\bigoplus_{J_0} N\right) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{N \subset G} \left(\bigoplus_{J_0} G\right) \arrow[d] \\
X \arrow[r] & E(X)
\end{tikzcd}$$

com $J_0 = Hom(N, X)$. Por indução transfinita define-se $E_\alpha(X)$, para todo ordinal α. Tem-se, $E_0(X) = X$ e, dado $E_\alpha(X)$, define-se $E_{\alpha+1}(X) = E(E_\alpha(X))$ e, para um limite ordinal β, tem-se $E_\beta(X) = \varinjlim_{\alpha<\beta} E_\alpha(X)$. Finalmente, escolha um ordinal α cuja cofinalidade é maior que $|G|$. Como o colimite é exato, temos que $X \to E_\alpha(X)$ é um monomorfismo.

Afirmação: Seja $\mathcal{A}$ uma categoria Grothendieck e X um objeto de $\mathcal{A}$. Se α é um ordinal cuja cofinalidade é maior que $|X|$, então X é α-pequeno com respeito a monomorfismos.

Se $N \subset G$ é um subobjeto e $\varphi : N \to E_\alpha(X) = \varinjlim_{\gamma<\alpha} E_\gamma(X)$ é um morfismo, então pela Afirmação φ se fatora sobre $E_{\alpha'}(X)$, para algum $\alpha' < \alpha$. Assim, temos

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl] \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dddl] \arrow[rr, hook] & & G \arrow[dl, dashed] \\
\bigoplus_{N\subset G}\left(\bigoplus_{J_{\alpha'}} N\right) \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & \bigoplus_{N\subset G}\left(\bigoplus_{J_{\alpha'}} G\right) \arrow[dd, dashed] & \\
& E_\alpha(X) & & \\
E_{\alpha'}(X) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & E_{\alpha'+1}(X) \arrow[ul, dashed, hook] &
\end{tikzcd}$$

com $J_{\alpha'} = Hom(N, E_{\alpha'}(X))$. Como $E_{\alpha'+1}(X) = E(E_{\alpha'}(X))$, φ se estende a um morfismo de G em $E_{\alpha'+1}(X)$ e, consequentemente, em $E_\alpha(X)$. Pelo Critério de Baer concluímos que $E_\alpha(X)$ é injetivo. □

3.2 Categoria exata do tipo Grothendieck

Nesta seção estudaremos os conceitos de *composição transfinita*, *objeto pequeno relativo*, *categoria eficiente*, *categoria exata do tipo Grothendick* e a demonstração de que a categoria exata do tipo Grothendieck tem suficientes injetivos. Vamos denotar uma categoria exata $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ simplesmente por sua estrutura exata $\mathcal{E}$.

Definição 3.2.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria arbitrária, seja λ um número ordinal, e seja $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha<\beta<\lambda}$ um sistema direto indexado por λ em uma categoria $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_{01}"] \arrow[rr, bend right, "f_{02}"'] \arrow[rrrrr, bend right, "f_{0\omega}"'] \arrow[rrrrrr, bend right=40, "f_{0,\omega+1}"'] & X_1 \arrow[r, "f_{12}"] & X_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & & X_\omega \arrow[r, "f_{\omega,\omega+1}"] & X_{\omega+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tal sistema é chamado uma λ-*sequência* se, para cada limite ordinal $\mu < \lambda$, o objeto X_μ com o morfismo $f_{\alpha\mu} : X_\alpha \to X_\mu$, $\alpha < \mu$, é um colimite do subsistema direto $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha<\beta<\mu}$.

A *composição de* λ-*sequências* é o morfismo colimite

$$X_0 \longrightarrow \varinjlim_{\alpha<\lambda} X_\alpha,$$

se ele existir em $\mathcal{C}$

Finalmente, se $\mathcal{I}$ é uma classe de morfismos de $\mathcal{C}$, então uma *composição transfinita* de morfismos de $\mathcal{I}$ é definida como a composição de λ-sequências $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})_{\alpha<\beta<\lambda}$, com $f_{\alpha,\alpha+1} \in \mathcal{I}$, para todo $\alpha + 1 < \lambda$.

Definição 3.2.2. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria, κ é um número cardinal e $\mathcal{D}$ é uma classe de morfismos de $\mathcal{C}$, então um objeto $X \in \mathcal{C}$ é chamado κ-*pequeno relativo a* $\mathcal{D}$ se, para todo cardinal infinito regular $\lambda \geq \kappa$ e toda λ-sequência

$$E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_\alpha \longrightarrow E_{\alpha+1} \longrightarrow \cdots$$

em $\mathcal{C}$ tal que $f_{\alpha,\alpha+1} : E_\alpha \to E_{\alpha+1}$ está em $\mathcal{D}$, para todo $\alpha + 1 < \lambda$, a aplicação canônica de conjuntos

$$\varinjlim_{\alpha<\lambda} Hom(X, E_\alpha) \longrightarrow Hom(X, \varinjlim_{\alpha<\lambda} E_\alpha)$$

é um isomorfismo.

O objeto X é chamado *pequeno relativo a* $\mathcal{D}$, se é κ-pequeno relativo a $\mathcal{D}$, para algum cardinal κ.

A seguir faremos a definição de categoria eficiente. Com esta categoria consegue-se várias propriedades como, por exemplo, que os grupos Ext de Yoneda são sempre conjuntos em vez de classes próprias. Porém, os axiomas para definir estas categorias ainda não são suficientes para ter suficientes injetivos.

Definição 3.2.3. Uma categoria exata $\mathcal{E}$ é chamada *eficiente* se

[**Ef0**] $\mathcal{E}$ é fracamente idempotente completa.

[**Ef1**] Composições transfinitas arbitrárias de monics admissíveis existe e são monics admissíveis também.

[**Ef2**] Todo objeto de $\mathcal{E}$ é pequeno relativo à classe de todos os monics admissíveis.

[**Ef3**] $\mathcal{E}$ admite um gerador.

Definição 3.2.4. Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata e S uma classe de objetos em $\mathcal{E}$. Denota-se uma *S-filtração* por uma λ-seqência

$$0 = X_0 \xrightarrow{f_{01}} X_1 \xrightarrow{f_{12}} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_\omega \xrightarrow{f_{\omega,\omega+1}} X_{\omega+1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $X_0 = 0$ e, para cada $\alpha + 1 < \lambda$, o morfismo $f_{\alpha,\alpha+1}$ é um monic admissível cujo conúcleo pertence a S, isto é, temos sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow X_\alpha \xrightarrow{f_{\alpha,\alpha+1}} X_{\alpha+1} \longrightarrow S_\alpha \longrightarrow 0,$$

com $S_\alpha \in S$.

Um objeto $X \in \mathcal{E}$ é chamado *S-filtrado* se $0 \to X$ é a composição de uma S-filtração. A classe de todos os objetos S-filtrados será denotada por $FiltS$.

Definição 3.2.5. Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ uma classe de objetos. Então $\mathcal{F}$ é chamado *deconstrutível* se existe um conjunto $S \subseteq \mathcal{E}$ de objetos tais que $\mathcal{F} = FiltS$.

Definição 3.2.6. Uma categoria exata $\mathcal{E}$ é dita *do tipo Grothendieck*, se $\mathcal{E}$ é eficiente e deconstrutível em si mesmo, isto é, existe um conjunto de objetos $S \subseteq \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} = FiltS$.

No Lema 3.6 de [30], temos um exemplo de categoria exata do tipo Grothendieck.

Definição 3.2.7. Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata. Para uma classe $\mathcal{S}$ de objetos de $\mathcal{E}$, definimos

$$\mathcal{S}^{\perp} = \{B \in \mathcal{E} | Ext^1_{\mathcal{E}}(S, B) = 0, \forall S \in \mathcal{S}\} \text{ e}$$
$$^{\perp}\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{E} | Ext^1_{\mathcal{E}}(A, S) = 0, \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

A seguir enunciaremos alguns resultados sem as demonstrações.

Proposição 3.2.8 (Proposition 5.3 [10])**.** *Sejam $\mathcal{E}$ uma categoria exata eficiente com gerador G e $S \in \mathcal{E}$ um objeto. Então existe um conjunto $\mathcal{I}_S$ de monics admissíveis de $\mathcal{E}$ com as seguintes propriedades:*

1. *Para cada $f \in \mathcal{I}_S$, existe uma sequência exata curta $K \overset{f}{\hookrightarrow} G^{(I)} \twoheadrightarrow S$.*

2. *Se $h : X \to Y$ é um monic admissível em $\mathcal{E}$ com conúcleo isomorfo a S, então h é um pushout de algum $f \in \mathcal{I}_S$*

Proposição 3.2.9 (Proposition 5.7 [10])**.** *Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata satisfazendo **(Ef1)**. Seja $\mathcal{B}$ uma classe de objetos em $\mathcal{E}$ e denote $\mathcal{A} =^{\perp} \mathcal{B}$. Então qualquer objeto $\mathcal{A}$-filtrado pertence a $\mathcal{A}$.*

Teorema 3.2.10 (Critério de Baer para Categorias Exatas do Tipo Grothendieck)**.** *Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata do tipo Grothendieck. Se $\mathcal{S}$ é um conjunto de objetos tal que $\mathcal{E} = Filt(\mathcal{S})$ e $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ é o conjunto dos monics admissíveis tal que:*

1. *todo $l \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ tem conúcleo em $\mathcal{S}$ e*

2. *todo monic admissível cujo conúcleo está em $\mathcal{S}$ é o pushout de algum $l \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$,*

então X é $\mathcal{E}$-injetivo se, e somente se, para todo $K_{i,S} \to Y_{i,S} \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ e $f : K_{i,S} \to X$, existe $\alpha : Y_{i,S} \to X$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_{i,s} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & Y_{i,S} \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\ X & \end{tikzcd}$$

comuta.

Demonstração. Se X é $\mathcal{E}$-injetivo, então, para todo monic admissível $f : A \to B$ e $g : A \to X$, existe $\alpha : B \to X$ tal que $\alpha f = g$. Reciprocamente, considere $\mathcal{A} = {}^{\perp}X = \{A \in \mathcal{E} | Ext^1_{\mathcal{E}}(A, X) = 0\}$. Seja $S \in \mathcal{S}$ e $X \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow S$ uma sequência exata curta. Então existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} K_{i,S} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"] & Y_{i,S} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & S \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, hook] & Q \arrow[r, two heads] & S, \end{tikzcd}$$

com $f \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$. Por hipótese, existe $\alpha : Y_{i,S} \to X$ tal que $\alpha f = g$. Pela definição de pushout, existe $\beta : Q \to X$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} K_{i,S} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"] & Y_{i,S} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\ X \arrow[r, hook] \arrow[drr, bend right, "1_X"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

comuta. Logo, $X \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow S$ cinde. Assim, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Pela Proposição 3.2.9, $Filt\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Então

$$\mathcal{E} = Filt\mathcal{S} \subseteq Filt\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Portanto, X é injetivo. □

Teorema 3.2.11. *Seja $\mathcal{E}$ uma categoria exata do tipo Grothendieck. Então $\mathcal{E}$ tem suficientes injetivos.*

Demonstração. Como $\mathcal{E}$ é deconstrutível em si mesmo, existe um conjunto de objetos $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} = Filt\mathcal{S}$. Pela Proposição 3.2.8, existe um conjunto de monics admissíveis $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ satisfazendo as propriedades 1 e 2 da Proposição 3.2.8. Seja $X \in \mathcal{E}$ e $J = Hom(K_{I,S}, X)$, para cada $f : K_{I,S} \to G^{(I)} \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$. Por **(Ef1)** o coproduto de monics admissíveis é também um monic admissível. Desse modo, tome o diagrama pushout

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\mathcal{I}_{\mathcal{S}}} (\bigoplus_J K_{I,S}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \bigoplus_{\mathcal{I}_{\mathcal{S}}} (\bigoplus_J G^{(I)}) \arrow[d, dashed] \\ X \arrow[r, hook, dashed] & Z_1(X). \end{tikzcd}$$

Para todo ordinal α, definimos $Z_\alpha(X)$, por indução transfinita, isto é, $Z_0(X) = X$, dado $Z_\alpha(X), Z_{\alpha+1}(X) = Z_1(Z_\alpha(X))$ e, para um limite ordinal β, definimos $Z_\beta(X) = \varinjlim Z_\alpha(X)$. Por **(Ef2)**, para cada $f : K_{I,S} \to G^{(I)} \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$, $K_{I,S}$ é κ-pequeno relativo à classe de todos os monics admissíveis, para algum cardinal κ. Considere L o conjunto desses cardinais e o cardinal $\alpha = supL$. Sejam λ um cardinal regular infinito maior ou igual a α, $g : K_{I,S} \to G^{(I)} \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ e $\varphi : K_{I,S} \to Z_\lambda(X)$. Como $K_{I,S}$ é κ-pequeno relativo à classe de todos os monics admissíveis, para algum cardinal κ e $\lambda \geq \kappa$, temos que φ se fatora sobre $Z_{\lambda'}(X)$, para algum $\lambda' < \lambda$. De $Z_{\lambda'+1}(X) = Z_1(Z_{\lambda'}(X))$ e da comutatividade do diagrama abaixo, φ se estende a um morfismo de $G^{(I)}$, para $Z_\lambda(X)$.

$$\begin{tikzcd}
 & K_{I,S} \arrow[rr, hook] \arrow[dl] \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dddl] & & G^{(I)} \arrow[dl, dashed] \\
\bigoplus_{\mathcal{I}_S}(\bigoplus_{J_{\lambda'}} K_{I,S}) \arrow[rr, hook] \arrow[dd] & & \bigoplus_{\mathcal{I}_S}(\bigoplus_{J_{\lambda'}} G^{(I)}) \arrow[dd, dashed] & \\
 & Z_\lambda(X) & & \\
Z_{\lambda'}(X) \arrow[rr, hook] \arrow[ur] & & Z_{\lambda'+1}(X) \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Pelo Critério de Baer, $Z_\lambda(X)$ é injetivo. Novamente por **(Ef1)**, $X \to Z_\lambda(X)$ é um monic admissível. Portanto, $\mathcal{E}$ tem suficientes injetivos. $\square$

Exemplo 3.2.12. Seja $Ch(R)$ a categoria dos complexos de R-Mod e $\mathcal{E}_{CE}$ a classe de sequências exatas curtas Cartan-Eilenbergue em $Ch(R)$, ou seja, uma sequência exata curta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ em Ch(R) está em $\mathcal{E}_{CE}$ se $0 \longrightarrow Z_i(A) \longrightarrow Z_i(B) \longrightarrow Z_i(C) \longrightarrow 0$ é exata, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Desse modo $(Ch(R), \mathcal{E}_{CE})$ é uma categoria exata do tipo Grothendieck com gerador $G = (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} D^n(R)) \oplus (\oplus_{n\in\mathbb{Z}} S^n(R))$ e tendo seus $\mathcal{E}_{CE}$-projetivos (injetivos) como os complexos projetivos (injetivos) Cartan-Eilenberg definidos em [11].

Exemplo 3.2.13. Seja R-Mod a categoria dos módulos e $\mathcal{E}_{pure}$ uma classe de sequências exatas curtas puras em R-Mod, ou equivalentemente a classe das sequências exatas curtas que são limites diretos de sequências exatas curtas cindidas. Deste modo, $(\text{R-Mod}, \mathcal{E}_{pure})$ é uma categoria exata do tipo Grothendieck com $\mathcal{E}_{pure}$-projetivos (injetivos) sendo R-módulos projetivos (injetivos) puros.

Exemplo 3.2.14. Chamamos de estrutura exata pura induzida em $Ch(R)$ a classe $Ch(\mathcal{E}_{pure})$ de sequências exatas curtas em $Ch(R)$ que são exatas puras em cada nível. Assim temos $(Ch(R), Ch(\mathcal{E}_{pure}))$ uma categoria exata eficiente do tipo Grothendieck, com os $Ch(\mathcal{E}_{pure})$-projetivos (injetivos) sendo complexos contraíveis de módulos projetivos (injetivos) puros.

Capítulo 4

Categoria Modelo e pares de cotorsão

Neste capítulo apresentaremos os conceitos de *categoria modelo* e *pares de cotorsão*, a demonstração feita por Hovey [13] em 2002, da correspondência entre essas categorias modelos e pares de cotorsão e a transferência dessa correspondência para categorias exatas, feita por Gillespie [14] em 2011. Os conceitos deste capítulo podem ser encontrados em [12], [13], [14], [31], [32].

4.1 Categoria Modelo

Em [32] e [31], se pode encontrar a definição de categoria modelo como definiremos a seguir.

Definição 4.1.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo f em $\mathcal{C}$ é uma *retração* de um morfismo g em $\mathcal{C}$ se existe um diagrama comutativo da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & D \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

com as composições horizontais sendo identidades.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, podemos formar a categoria $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ cujos objetos são morfismos de $\mathcal{C}$ e cujos morfismos são quadrados comutativos.

Definição 4.1.2. Uma *fatoração funtorial* é um par ordenado (α, β) de funtores $\mathcal{C}^{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{C}^{\rightarrow}$ tal que $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$, para todo $f \in \mathcal{C}^{\rightarrow}$. Em particular, o domínio de $\alpha(f)$ é o domínio de f, o contradomínio de $\alpha(f)$ é o domínio de $\beta(f)$ e o contradomínio de $\beta(f)$ é o contradomínio de f.

Definição 4.1.3. Sejam $i : A \rightarrow B$ e $p : X \rightarrow Y$ morfismos em uma categoria $\mathcal{C}$. Então i tem a *propriedade de levantamento à esquerda com relação a* p e p tem a *propriedade de levantamento à direita com relação a* i se, para todo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

existe um *levantamento* $h : B \to X$ tal que $hi = f$ e $ph = g$.

Definição 4.1.4. Uma *estrutura modelo* em uma categoria $\mathcal{C}$ é formada por três subcategorias de $\mathcal{C}$ chamadas equivalências fracas, fibrações e cofibrações e duas fatorações funtoriais (α, β) e (γ, δ) satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (Retrações) As classes de morfismos das três subcategorias são fechadas sob retrações.
2. (3 por 2) Se f e g são morfismos de $\mathcal{C}$ tal que o morfismo composto gf está definido e quaisquer dois dos morfismos f, g e gf são equivalências fracas, então o terceiro também o é.
3. (Axioma do levantamento) Chamamos um morfismo de *cofibração trivial* se é uma fibração e uma equivalência fraca. Similarmente, chamamos um morfismo de *fibração trivial* se é uma fibração e uma equivalência fraca. Sejam f e g dois morfismos na categoria $\mathcal{C}$.
   (a) Se f é uma cofibração trivial e g é uma fibração, então f tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a g.
   (b) Se f é uma cofibração e g é uma fibração trivial, então f tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a g.
4. (Fatoração) Para qualquer morfismo f na categoria $\mathcal{C}$, $\alpha(f)$ é uma cofibração, $\beta(f)$ é uma fibração trivial, $\gamma(f)$ é uma cofibração trivial e $\delta(f)$ é uma fibração.

Definição 4.1.5. Uma *categoria modelo* é uma categoria $\mathcal{C}$ com todos os limites e colimites e uma estrutura modelo em $\mathcal{C}$.

Proposição 4.1.6. *Uma categoria modelo $\mathcal{C}$ tem objeto inicial e objeto final.*

Demonstração. Considere a categoria 0 cuja classe de objetos seja o conjunto vazio e o funtor $F : 0 \to \mathcal{C}$. Aplicando o colimite em F, temos um objeto $A = \varinjlim F$ na categoria $\mathcal{C}$ tal que, para todo objeto X na categoria $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $f \in Hom(A, X)$. De modo análogo, aplicando o limite em F, temos um objeto $B = \varprojlim F$ na categoria $\mathcal{C}$ tal que, para todo objeto X na categoria $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $f \in Hom(X, B)$. $\square$

Definição 4.1.7. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria modelo. Dizemos que um objeto X em $\mathcal{C}$ é *cofibrante* se $f : 0 \to X$, o morfismo do objeto inicial para ele, é uma cofibração e dizemos que um objeto X é *fibrante* se $f : X \to 0$, o morfismo dele para o objeto final, é uma fibração. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pontuada, isto é, o morfismo do objeto inicial para o objeto final é um isomorfismo, então chamamos um objeto de *trivial* se o morfismo do objeto inicial para ele é uma equivalência fraca.

Sejam A um objeto inicial e B um objeto final em uma categoria pontuada $\mathcal{C}$. Seja X um objeto trivial de $\mathcal{C}$. Observe que o morfismo entre o objeto inicial e o final é uma retração do morfismo do objeto inicial para X, conforme o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "f\alpha^{-1}"] & X \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

Como $f : A \to X$ e $gf = \alpha : A \to B$ são equivalências fracas, segue que $g : X \to B$ é uma equivalência fraca.

A categoria dos complexos de um R-módulo $Ch(R)$ (Vide Apêndice B) é um exemplo de categoria modelo, como demonstraram Goerss e Schemmerhorn em [32]. Antes de fazermos esta demonstração vamos listar alguns resultados encontrados em [32] que serão necessários mas não os demonstraremos aqui.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e (C, d) um complexo em $Ch(\mathcal{A})$. Definimos a *n-homologia* de (C, d) como $H_n(C) = \dfrac{Ker(d_n)}{Im(d_{n+1})}$. Dizemos que

$$H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$$

é o *n-morfismo induzido* do morfismo de complexos $f : (C, d) \to (D, \delta)$ e o *n-funtor homológico* $H_n : Ch(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um funtor aditivo da categoria dos complexos de $\mathcal{A}$ para a categoria $\mathcal{A}$. (Vide [20].) Seja $f \in Hom_{Ch(R)}(A, B)$. Aqui, dizer que $H_*(f)$ é um isomorfismo significará que $H_n(f)$ é isomorfismo, para todo n.

Proposição 4.1.8. *Sejam dois morfismos $j : A \to B$ e $q : M \to N$ de complexos tais que*

1. *para todo $n \geq 0$, $A_n \to B_n$ é um monomorfismo e $\frac{B_n}{A_n}$ é projetivo;*
2. *$H_*(q)$ é um isomorfismo e $M_n \to N_n$ é um epimorfismo, para $n > 0$.*

Então qualquer quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & N \end{tikzcd}$$

tem um levantamento de modo que os triângulos comutam.

Lema 4.1.9. *Seja $f : M \to N$ um morfismo de complexos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$H_*(f)$ é um isomorfismo e $f : M_n \to N_n$ é um epimorfismo, para $n > 0$.*
2. *O morfismo induzido*

$$M_n \to Z_{n-1}M \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

é um epimorfismo, para $n \geq 0$.

Sob qualquer dessas condições, o morfismo induzido $Z_nM \to Z_nN$ é um epimorfismo.

Teorema 4.1.10. *Seja $Ch(R)$ a categoria dos complexos de R-módulos. Então $Ch(R)$ tem a estrutura de uma categoria modelo com um morfismo $f : (M, d) \to (N, \delta)$ que é:*

1. *uma equivalência fraca se $H_*(f)$ é um isomorfismo;*
2. *uma fibração, se $M_n \to N_n$ é um epimorfismo, para $n \geq 1$;*
3. *uma cofibração se, e somente se, para $n \geq 0$, o morfismo $M_n \to N_n$ é um monomorfismo com núcleo projetivo.*

Demonstração. Vamos mostrar que o axioma da retração é válido. Seja $f : (M, d) \to (N, \delta)$ uma fibração e $g : (A, d') \to (B, \delta')$ sua retração. Para cada $n \geq 1$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "g_n"] & M_n \arrow[r, "\alpha'_n"] \arrow[d, "f_n"] & A_n \arrow[d, "g_n"] \\ B_n \arrow[r, "\beta_n"] & N_n \arrow[r, "\beta'_n"] & B_n \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

com $\alpha'_n\alpha_n = 1_{A_n}$ e $\beta'_n\beta_n = 1_{B_n}$. Seja $h : B_n \to X$ tal que $hg_n = 0$. Note que $h\beta'_nf_n = hg_n\alpha'_n = 0$. Como f_n é um epimorfismo, $h\beta'_n = 0$ e, consequentemente, $0 = h\beta'_n\beta_n = h1_{B_n} = h$. Logo, g_n é um epimorfismo, para cada $n \geq 1$.

Se $f : (M, d) \to (N, \delta)$ é uma cofibração, então, para cada $n \geq 0$, $f_n : M_n \to N_n$ é um monomorfismo com conúcleo projetivo. Seja $h : X \to A_n$ tal que $g_nh = 0$. Note que $f_n\alpha_nh = \beta_ng_nh = 0$. Como f_n é monomorfismo, $\alpha_nh = 0$ isto implica que $0 = \alpha'_n\alpha_nh = h$. Logo, g_n é monomorfismo, para $n \geq 0$. Vamos mostrar que $Coker(g_n)$ é projetivo. De fato, seja $h : A \to X$ um epimorfismo e $j : Coker(g_n) \to X$ um morfismo. Note que

$$jcoker(g_n)\beta'_nf_n = jcoker(g_n)g_n\alpha'_n = 0.$$

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[dr, "0"'] & N_n \arrow[r, "coker(f_n)"] \arrow[d, "jcoker(g_n)\beta'_n"] & Coker(f_n) \arrow[dl, dashed, bend left, "l"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Então existe um morfismo $l : Coker(f_n) \to X$ tal que

$$jcoker(g_n)\beta'_n = lcoker(f_n).$$

Como $Coker(f_n)$ é projetivo, existe $\alpha : Coker(f_n) \to A$ tal que $h\alpha = l$. Além disso,

$$coker(f_n)\beta_ng_n = coker(f_n)f_n\alpha_n = 0.$$

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[dr, "0"'] & B_n \arrow[r, "coker(g_n)"] \arrow[d, "coker(f_n)\beta_n"] & Coker(g_n) \arrow[dl, dashed, bend left, "t"] \\ & Coker(f_n) & \end{tikzcd}$$

Segue que existe um morfismo $t : Coker(g_n) \to Coker(f_n)$ tal que $coker(f_n)\beta_n = tcoker(g_n)$. Consequentemente,

$$l(tcoker(g_n)) = lcoker(f_n)\beta_n = jcoker(g_n)\beta'_n\beta_n = jcoker(g_n).$$

Como $coker(g_n)$ é epimorfismo, $lt = j$. Assim, $h(\alpha t) = lt = j$. Logo, $Coker(g_n)$ é projetivo.

Se f é uma equivalência fraca, então $H_*(f)$ é um isomorfismo. Aplicando o funtor homológico no diagrama (4.1) temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_n(A) \arrow[r, "H_n(\alpha)"] \arrow[d, "H_n(g)"] & H_n(M) \arrow[r, "H_n(\alpha')"] \arrow[d, "H_n(f)"] & H_n(A) \arrow[d, "H_n(g)"] \\ H_n(B) \arrow[r, "H_n(\beta)"] & H_n(N) \arrow[r, "H_n(\beta')"] & H_n(B). \end{tikzcd}$$

Como $H_n(g)$ é uma retração de $H_n(f)$, então $H_n(g)$ é monomorfismo e epimorfismo, para cada $n \geq 0$. Logo, g é uma equivalência fraca.

Agora vamos mostrar que o Axioma (3 por 2) também vale. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $Ch(R)$. Se f e g são equivalências fracas, então $H_*(f)$ e $H_*(g)$ são isomorfismos. Segue que $H_*(gf) = (H_*(g))(H_*(f))$ é isomorfismo. Se f e gf são equivalências fracas, então $H_*(f)$ e $H_*(gf)$ são isomorfismos. Assim $H_*(g) = (H_*(g))(H_*(f))(H_*(f))^{-1} = H_*(gf)(H_*(f))^{-1}$ e isto implica que g é equivalência fraca. O outro caso é análogo.

Mostremos que qualquer morfismo em $Ch(R)$ pode ser fatorado por uma fibração e uma cofibração trivial.

Denotamos por $(D(n), \partial)$, para $n > 1$, o complexo com $D(n)_k = 0$, para $k \neq n, n-1$ e $\partial_n = 1_R : D(n)_n = R \to R = D(n)_{n-1}$. Então existe um isomorfismo natural $Hom(D(n), N) \cong N_n$. De fato, considere $\varphi_N : Hom(D(n), N) \to N_n$ definida por $\varphi_N(f) = f_n(1)$. Mostremos que φ_N é uma função. Mostremos que φ_N é um R-homomorfismo de módulos. Sejam f e g morfismos em $Ch(R)$

$$\varphi_N(f+g) = (f+g)_n(1) = f_n(1) + g_n(1) = \varphi_N(f) + \varphi_N(g)$$

e

$$\varphi_N(rf) = (rf)_n(1) = rf_n(1) = r\varphi_N(f).$$

Vamos mostrar que φ_N é monomorfismo. De fato, seja $x \in N_n$. Considere $f : (D(n), \partial) \to (N, d)$ sendo $f_k = 0$, se $k \neq n, n-1$, $f_n : R \to N_n$ um R-homomorfismo tal que $f_n(1) = x$ e $f_{n-1} = d_n f_n$. Logo $\varphi_N(f) = x$. Agora falta mostrar que $\varphi = (\varphi_N)$ é uma transformação natural entre os funtores $Hom(D(n), -) : Ch(R) \to Mod_R$ e $F_n : Ch(R) \to Mod_R$, com $F_n(M) = M_n$ e

$F_n(f) = f_n$. Seja $f : (M, d) \to (N, \delta)$. Vamos mostrar que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} Hom(D(n), M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "f_*"] & M_n \arrow[d, "f_n"] \\ Hom(D(n), N) \arrow[r, "\varphi_N"] & N_n. \end{tikzcd}$$

De fato, seja $g : D(n) \to M$. Segue que $f_n\varphi_M(g) = f_n(g_n(1)) = (f_n g_n)(1) = \varphi_N(fg) = \varphi_N(f_*(g))$. Portanto, φ é um isomorfismo natural.

Afirmação:Um morfismo $q : (Q, d) \to (N, \delta)$ é uma fibração se, e somente se, q tem a propriedade de levantamento à direita com relação ao morfismo $0 \to (D(n), \partial)$, para $n > 0$.

De fato, seja $q : (Q, d) \to (N, \delta)$ uma fibração e $p : (D(n), \partial) \to (N, \delta)$ um morfismo entre complexos. Como q_n é epimorfismo, para $n > 0$, existe $t \in Q_n$ tal que $q_n(t) = \varphi_N(p)$. Tome $h = \varphi_Q^{-1}(t)$. Segue que $p = \varphi_N^{-1}\varphi_N(p) = \varphi_N^{-1}(q_n(t)) = \varphi_N^{-1} q_n \varphi_Q(h) = \varphi_N^{-1}\varphi_N qh = qh$. Reciprocamente, seja $x \in N_n$, para $n > 0$. Por hipótese, existe $h : (D(n), \partial) \to (Q, d)$ tal que $qh = \varphi_N^{-1}(x)$. Então $x = \varphi_N qh = q_n(h_n(1))$. Logo, q é uma fibração.

Se (N, δ) é um complexo, defina um novo complexo $(P(N), \delta')$ e um morfismo $\varepsilon : (P(N), \delta') \to (N, \delta)$ pela equação $P(N) = \bigoplus_{n>0} \bigoplus_{x \in N_n} D(n) \to N$. Considerando, para cada $n > 0$, $\bigoplus_{x \in N_n} D(n) \to N$ o morfismo induzido pelos morfismos $\varphi_N^{-1}(x) : (D(n), \partial) \to (N, \delta)$. Para cada $n > 0$ e quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & P(N) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ D(n) \arrow[r] & N, \end{tikzcd}$$

tomamos como levantamento o morfismo inclusão $i_{x_n} : D(n) \to P(N)$. Então ε é uma fibração. Dado $M \to N$, note que o quadrado comutativo a seguir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \oplus P(N) \arrow[d, "q"] \\ D(n) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & N \end{tikzcd}$$

tem como levantamento a inclusão. Logo, q é uma fibração.

Se $f : (M, d) \to (N, \delta)$ é um morfismo de complexos, então f pode ser fatorado por

$$M \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M \oplus P(N) \xrightarrow{[f \ \varepsilon]} N. \tag{4.2}$$

Note que

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} M \oplus P(N) \xrightarrow{[0 \ 1]} P(N) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta, segue que $P(N) = Coker\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$, ou seja, $Coker\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$ é projetivo. Para cada $n \geq 0$, como $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_n$ é monomorfismo, então $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ é uma cofibração. Seja $q' : (A, d') \to (B, d'')$ uma fibração e um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha"', "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] & A \arrow[d, "q'"] \\ P(N) \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]"'] \arrow[urr, dashed] & M \oplus P(N) \arrow[r, "{[\,b\ b'\,]}"'] & B. \end{tikzcd}$$

Como q' é epimorfismo e $(P(N), \delta')$ é projetivo, existe $\alpha : (P(N), \delta') \to (A, d')$ tal que $q'\alpha = \begin{bmatrix} b & b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = b'$. Consideramos $\begin{bmatrix} a & \alpha \end{bmatrix} : (M, d) \oplus (P(N), \delta') \to (A, d')$. Segue $q'\begin{bmatrix} a & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q'a & q'\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b' \end{bmatrix}$. Logo, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação à toda fibração. Como $P(N) = \bigoplus_{n>0}\bigoplus_{x\in N_n} D(n)$ é soma direta de complexos acíclicos, $H_n(P(N)) = 0$ para todo $n > 0$. Segue da exatidão da sequência

$$H_{n+1}(P(N)) \longrightarrow H_n(M) \longrightarrow H_n(M \oplus P(N)) \longrightarrow H_n(P(N))$$

que $H_*\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ é isomorfismo. Logo, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ é uma equivalência fraca. Assim conseguimos fatorar f por uma fibração e uma cofibração trivial. (Vide diagrama (4.2).)

Agora vamos mostrar que cofibrações triviais tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a fibrações. Seja $i : (M, d) \to (N, \delta)$ uma cofibração trivial. Podemos fatorar i como

$$M \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} M \oplus P(N) \xrightarrow{[\,i\ p\,]} N,$$

com $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ uma cofibração trivial e $\begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix}$ uma fibração. Como i e $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ são equivalências fracas e $i = \begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, segue que $\begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix}$ também o é. Pela Proposição 4.1.8, existe um levantamento $\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha'\end{bmatrix} : N \to M \oplus P(N)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]"] \arrow[d, "i"] & M \oplus P(N) \arrow[d, "{[\,i\ p\,]}"] \\ N \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\\alpha'\end{smallmatrix}\right]"] & N \end{tikzcd}$$

comuta. Seja um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{a} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ N & \xrightarrow{b} & B \end{array}$$

com f sendo uma fibração. Note que $i = \begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, segue que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad a \quad} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ M \oplus P(N) & \xrightarrow{b[i\ p]} & B \end{array}$$

comuta. Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a todas as fibrações, existe $\beta : M \oplus P(N) \to A$ tal que $f \begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a$. Considerando $\begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} : N \to A$. Segue

$$f \begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} i & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = b \text{ e } \begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} \beta & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a,$$

isto é, i tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a qualquer fibração.

Vamos mostrar que qualquer morfismo em $Ch(R)$ pode ser fatorado por uma fibração trivial e uma cofibração. Seja $f : (M, d) \to (N, \delta)$ um monomorfismo de complexo. Vamos construir, de forma indutiva sobre $n \geq 0$, R-módulos Q_n e morfismos de R-módulos $i_n : M_n \to Q_n$, $p : Q_n \to N_n$ e $\partial_n : Q_n \to Q_{n-1}$ tais que:

1. $p_n i_n = f_n$;
2. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ e os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} M_k & \xrightarrow{d_k} & M_{k-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_{k-1}} \\ Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_k & \xrightarrow{\partial_k} & Q_{k-1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{k-1}} \\ N_k & \xrightarrow{\delta_k} & N_{k-1} \end{array}$$

   comutam, para todo $k \leq n$;
3. i_n é um monomorfismo com conúcleo projetivo e o morfismo induzido

$$Q_n \to Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

   é um epimorfismo.

Para $n = 0$, tomamos $Q_0 = M_0 \oplus P(N_0)$. Considerando que nossos complexos são 0 nos graus negativos, temos $Z_{-1}Q = Z_{-1}N = 0$. Note que

$$\begin{array}{ccc} N_0 & \xrightarrow{1_{N_0}} & N_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

é um quadrado pullback. Isto significa que $Z_{-1}Q \times_{Z_{-1}N} N_0 = N_0$. Tomamos $i_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $p_0 = \begin{bmatrix} f_0 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Segue $p_0 i_0 = f_0 : M_0 \to N_0$. Como $Q_{-1} = Q_{-2} = 0$, $\partial_{-1}\partial_0 = 0$, com $\partial_0 : Q_0 \to 0$ e $\partial_{-1} : 0 \to 0$. Observe que

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{i_0} M_0 \oplus P(N_0) \xrightarrow{[0\ 1]} P(N_0) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata que cinde, então $Coker(i) = P(N_0)$ é projetivo. Agora mostremos que o morfismo induzido pela definição de pullback

$$\alpha : Q_0 \to Z_{-1}Q \times_{Z_{-1}N} N_0 = N_0$$

é epimorfismo. Note que $p_0 = 1_{N_0}\alpha = \alpha$. Seja $x \in N_0$. Como ε_{N_0} é epimorfismo, existe $t \in P(N_0)$ tal que $\varepsilon(t) = x$. Tomamos $\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \in M_0 \oplus P(N_0)$. Segue que $p_0 \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = f_0(0) + \varepsilon(t) = x$. Logo, p_0 é epimorfismo. Suponhamos, por indução, que existam R-módulos Q_k e morfismos de R-módulos $i_k : M_k \to Q_k$, $p_k : Q_k \to N_k$ e $\partial_k : Q_k \to Q_{k-1}$ tais que:

1. $p_k i_k = f_k$;
2. $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ e os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} M_l & \xrightarrow{d_l} & M_{l-1} \\ \downarrow{\scriptstyle i_l} & & \downarrow{\scriptstyle i_{l-1}} \\ Q_l & \xrightarrow{\partial_l} & Q_{l-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_l & \xrightarrow{\partial_l} & Q_{l-1} \\ \downarrow{\scriptstyle p_l} & & \downarrow{\scriptstyle p_{l-1}} \\ N_l & \xrightarrow{\delta_l} & N_{l-1} \end{array}$$

   comutam, para todo $l \leq k$;
3. i_k é monomorfismo com conúcleo projetivo e o morfismo induzido do pullback $Q_k \to Z_{k-1}Q \times_{Z_{k-1}N} N_k$ é epimorfismo, com $0 \leq k \leq n-1$.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, dashed, "c"] \arrow[dd, "f_n"'] & & M_{n-1} \arrow[rr, "d_{n-1}"] \arrow[dr, "i_{n-1}"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & M_{n-2} \arrow[dr, "i_{n-2}"] \arrow[dd, "f_{n-2}"] & \\
& Z_{n-1}Q \arrow[rr, "z_Q"] \arrow[dd, "b"] & & Q_{n-1} \arrow[rr, "\partial_{n-1}"] \arrow[dl, "p_{n-1}"] & & Q_{n-2} \arrow[dl, "p_{n-2}"] \\
N_n \arrow[rr, "\delta_n"] \arrow[dr, "a"] & & N_{n-1} \arrow[rr, "\delta_{n-1}"] & & N_{n-2} & \\
& Z_{n-1}N \arrow[ur, "z_N"] & & & &
\end{tikzcd}$$

Sejam z_Q o núcleo de ∂_{n-1} e z_N o núcleo de δ_{n-1}. Como $\delta_{n-1}\delta_n = 0$, existe um único $a : N_n \to Z_{n-1}N$ tal que $z_N a = \delta_n$. Como $\delta_{n-1}p_{n-1}z_Q = p_{n-2}(\partial_{n-1}z_Q) = 0$, existe um único $b : Z_{n-1}Q \to Z_{n-1}N$ tal que $p_{n-1}z_Q = z_N b$. Como $\partial_{n-1}i_{n-1}d_n = i_{n-2}d_{n-1}d_n = 0$, existe um único $c : M_n \to Z_{n-1}Q$ tal que $i_{n-1}d_n = z_Q c$. Além disso, $z_N a f_n = \delta_n f_n = f_{n-1}d_n = p_{n-1}i_{n-1}d_n = p_{n-1}z_Q c = z_N bc$. Como z_N é monomorfismo, $af_n = bc$. Pela definição de pullback, existe um único $f' : M_n \to Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[dr, "f'"] \arrow[drr, bend left, "f_n"] \arrow[ddr, bend right, "c"'] & & \\
& Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "a'"] & N_n \arrow[d, "a"] \\
& Z_{n-1}Q \arrow[r, "b"] & Z_{n-1}N.
\end{tikzcd}$$

Tomando $P = P(Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n)$ e $\varepsilon : P \to Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$ um epimorfismo definido pela *evaluation map*, podemos fatorar f' como

$$M_n \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} M_n \oplus P \xrightarrow{[\,f'\ \ \varepsilon\,]} Z_{n-1}Q \times_{Z_{n-1}N} N_n$$

com $\begin{bmatrix} f' & \varepsilon \end{bmatrix}$ um epimorfismo. Consideremos $Q_n = M_n \oplus P$, $i_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_n = b'\begin{bmatrix} f' & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f' & b'\varepsilon \end{bmatrix}$ e $\partial_n = \begin{bmatrix} z_Q c & z_Q a'\varepsilon \end{bmatrix}$. Note que

$$\partial_{n-1}\partial_n = \partial_{n-1}z_Q \begin{bmatrix} c & a'\varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

e, pelo princípio de indução finita, estas propriedades valem, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Lema 4.1.9, $H_*(p)$ é um isomorfismo e $p_n : Q_n \to N_n$ é epimorfismo, para $n > 0$. Logo, o morfismo de complexos p é uma cofibração trivial. Portanto, $Ch(R)$ tem uma estrutura modelo. $\square$

No axioma de levantamento, observamos que uma cofibração sempre tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a qualquer fibração trivial. Por outro lado, as cofibrações são os únicos morfismos que tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a todas as fibrações triviais. Analogamente, também ocorre com as cofibrações triviais e de modo dual fibrações e fibrações triviais são os únicos morfismos com a propriedade de levantamento à direita com relação a todas as cofibrações triviais e cofibrações, respectivamente.

Lema 4.1.11. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria modelo. Então um morfismo é uma cofibração (uma cofibração trivial) se, e somente se, tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a todas as fibrações triviais (fibrações). Dualmente, um morfismo é uma fibração (uma fibração trival) se, e somente se, tem a propriedade de levantamento à direita com relação a todas as cofibrações triviais (cofibrações).*

Demonstração. Suponha que um morfismo f de $\mathcal{C}$ tenha a propriedade de levantamento à esquerda com relação a todas as fibrações triviais. Fatorando $f = pi$, com i uma cofibração e p uma fibração trivial, segue de 3 (b) que f tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a p.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & A' \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & B. \end{tikzcd}$$

Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & A' \arrow[r, "p"] & B. \end{tikzcd}$$

Assim, f é uma retração de i. Portanto, f é uma cofibração. A Recíproca, segue da definição de estrutura abeliana.

A demonstração de que um morfismo é uma cofibração trivial se, e somente se, tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a todas as fibrações é análoga. E o restante do lema segue da dualidade. □

Este resultado nos permite caracterizar cofibrações, cofibrações triviais, fibrações e fibrações triviais por meio da propriedade de levantamento. E podemos usá-lo, por exemplo, para mostrar que um isomorfismo f é uma cofibração trivial e uma fibração trivial. De fato, para cada fibração g e um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "b"] & D \end{tikzcd}$$

basta tomar como levantamento o morfismo $af^{-1} : B \to C$ e teremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dashed, "af^{-1}"] & D. \end{tikzcd}$$

Logo, f é uma cofibração trivial. Por outro lado, para cada cofibração g e um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "d"] & B \end{tikzcd}$$

basta tomar como levantamento o morfismo $f^{-1}d : D \to A$ e teremos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "d"] \arrow[ur, dashed, "f^{-1}d"] & B. \end{tikzcd}$$

Logo, f é uma fibração trivial.

Corolário 4.1.12. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria modelo, então cofibrações (cofibrações triviais) são fechadas sob pushout, isto é, se temos um quadrado pushout*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "b"] & D \end{tikzcd}$$

com f uma cofibração (cofibração trivial), então g é uma cofibração (cofibração trivial). Dualmente, fibrações (fibrações triviais) são fechadas sob pullbacks.

Demonstração. Seja f uma cofibração e

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "b"] & D \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

um quadrado pushout. Vamos mostrar que g tem a propriedade de levantamento à esquerda. Sejam h uma fibração trivial e um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d, "h"] \\ D \arrow[r, "d"] & N \end{tikzcd}$$

existe um levantamento $\alpha : B \to M$ para o quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "ca"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "db"] \arrow[ur, dashed, "\alpha"] & N. \end{tikzcd}$$

Como (4.3) é um quadrado pushout e $\alpha f = ca$, existe um único $\gamma : D \to M$ tal que $\gamma g = c$ e $\gamma b = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "c"] & \\
B \arrow[r, "b"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"] & D \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\
& & M.
\end{tikzcd}$$

Note que, $h\gamma g = hc = dg$ e $h\gamma b = h\alpha = db$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "hc"] & \\
B \arrow[r, "b"] \arrow[drr, bend right, "h\alpha"'] & D \arrow[dr, shift left, "h\gamma"] \arrow[dr, shift right, "d"'] & \\
& & N.
\end{tikzcd}$$

Pela unicidade da propriedade de pullback, $h\gamma = d$. Logo, g tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação à todas as fibrações triviais, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[d, "h"] \\
D \arrow[r, "d"] \arrow[ur, dashed, "\gamma"] & N.
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema 4.1.11, g é uma cofibração. O caso de cofibração trivial é análogo e os casos de fibração e fibração trivial são duais. □

Corolário 4.1.13. *Se $\mathcal{C}$ é uma categoria modelo, então cofibrações (cofibrações triviais) tem conúcleos cofibrantes (cofibrantes triviais). Dualmente, fibrações (fibrações triviais) tem núcleos fibrantes (fibrantes triviais).*

A demonstração do Corolário 4.1.13 segue diretamente do Corolário 4.1.12 e das Proposições 1.2.8 e 1.2.9.

4.2 Correspondência entre Estrutura Modelo Abeliana e Pares de Cotorsão

Definição 4.2.1. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um *par de cotorsão* em $\mathcal{A}$ é um par $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ de classes de objetos de $\mathcal{A}$ sendo cada qual um complemento ortogonal do outro com relação ao funtor Ext. Em outras palavras, temos

1. $D \in \mathcal{D}$ se, e somente se, $Ext^1(D, E) = 0$, para todo $E \in \mathcal{E}$ e

2. $E \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $Ext^1(D, E) = 0$, para todo $D \in \mathcal{D}$.

Dizemos que um par de cotorsão $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tem *suficientes projetivos* se, para todo X na categoria abeliana $\mathcal{A}$, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow X \longrightarrow 0, \tag{4.4}$$

com $D \in \mathcal{D}$ e $E \in \mathcal{E}$. Dizemos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tem *suficientes projetivos funtorais* se a sequência (4.4) é funtorial em X. Dualmente, dizemos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tem *suficientes injetivos* se, para todo X em $\mathcal{A}$, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

com $E \in \mathcal{E}$ e $D \in \mathcal{D}$. Dizemos que $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tem *suficientes injetivos funtoriais* se a sequência (4.5) é funtorial em X. Se $(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ tem suficientes projetivos e sufientes injetivos, dizemos que é um *par de cotorsão completo*. Dizemos que um par de cotorsão é *funtorialmente completo* se tem suficientes injetivos funtoriais e suficientes projetivos funtoriais.

Vejamos alguns exemplos conhecidos de pares de cotorsão:

Exemplo 4.2.2. A categoria R-*mod* dos módulos finitamente gerados de um anel artiniano R é uma categoria com suficientes injetivos e suficientes projetivos. Assim, temos um par de cotorsão $(\mathcal{P}, \text{R-mod})$ com suficientes projetivos formados pela classe $\mathcal{P}$ de R-módulos finitamente gerados projetivos e a classe R-mod dos R-módulos finitamente gerados e também temos um par de cotorsão $(\text{R-mod}, \mathcal{I})$, com suficientes injetivos formados pela classe $\mathcal{I}$ de todos os R-módulos finitamente gerados injetivos e a classe R-*mod* de todos os R-módulos finitamente gerados. Além disso, estes pares de cotorsão são completos. De fato, para qualquer R-módulo M basta considerar as sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow I \oplus M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus P \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

com $I \in \mathcal{I}$ e $P \in \mathcal{P}$.

Exemplo 4.2.3. Seja $\mathcal{G}$ uma categoria Grothendieck e $\mathcal{I}$ a classe de objetos injetivos. Como vimos no Capítulo 3, $\mathcal{G}$ tem suficientes injetivos. Desse modo, temos o seguinte par de cotorsão com suficientes injetivos $(ob\mathcal{G}, \mathcal{I})$. Além disso, este par de cotorsão é completo. De fato, seja $X \in ob\mathcal{G}$. Como a categoria $\mathcal{G}$ é abeliana, existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0.$$

Logo, o par de cotorsão $(ob\mathcal{G}, \mathcal{I})$ tem suficientes projetivos.

Para relacionar pares de cotorsão e estruturas modelos em uma categoria abeliana, é preciso que a estrutura modelo preserve a estrutura abeliana na categoria. Neste sentido definimos a estrutura modelo abeliana.

Definição 4.2.4. Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Uma *estrutura modelo abeliana* em $\mathcal{A}$ é uma estrutura modelo tal que

1. Toda cofibração é um monomorfismo.
2. Um morfismo é uma fibração (fibração trivial) se, e somente se, é um epimorfismo com núcleo fibrante (fibrante trivial).

Definição 4.2.5. Uma *categoria modelo abeliana* é uma categoria abeliana com limites e colimites e uma estrutura modelo abeliana.

Em uma categoria modelo abeliana podemos encontrar dois pares de cotorsão relacionados com sua estrutura modelo, mais especificamente com as classes de objetos fibrantes, cofibrantes e triviais.

Teorema 4.2.6. *Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria modelo abeliana, $\mathcal{C}$ a classe de objetos cofibrantes, $\mathcal{F}$ a classe dos objetos fibrantes e $\mathcal{W}$ a classe dos objetos triviais. Então $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ são pares de cotorsão completos.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $Ext^1(C, K) = 0$, para um cofibrante C e um fibrante trivial K. Um elemento de $Ext^1(C, K)$ é representado por uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0. \tag{4.6}$$

Como p é um epimorfismo e K é um fibrante trivial, então p é uma fibração trivial, pela definição de categoria modelo abeliana. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, equal] & C. \end{tikzcd}$$

Como C é cofibrante, $0 \to C$ é uma cofibração. Pelo axioma de levantamento da categoria modelo, existe $h : C \to X$ tal que $ph = 1_C$. Então, (4.6) cinde. Logo, $Ext^1(C, K) = 0$.

Agora suponhamos que A seja um objeto tal que $Ext^1(A, K) = 0$, para todo fibrante trivial K. Devemos mostrar que A é cofibrante. Pelo Lema 4.1.11, basta mostrar que $0 \to A$ tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a fibrações triviais. Seja $p : X \to Y$ uma fibração trivial. Por definição de categoria modelo abeliana, p é um epimorfismo e seu núcleo é um fibrante trivial. Segue que $Ext^1(A, Ker(p)) = 0$, então $Hom(A, p)$ é epimorfismo. Consequentemente, dado $f \in Hom(A, Y)$ existe $h \in Hom(A, X)$ tal que $ph = f$, isto é, $0 \to A$ tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a $p : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Logo, A é um cofibrante.

Dualmente, seja X um objeto tal que $Ext^1(C, X) = 0$, para todo cofibrante C. Devemos mostrar que X é um fibrante trivial. Pelo Lema 4.1.11, basta mostrarmos que $X \to 0$ tem a propriedade de levantamento à direita com relação a cofibrações. Seja $i : A \to B$ uma cofibração. Pela definição de categoria modelo abeliana, i é um monomorfismo e, pelo Corolário 4.1.13, $Coker(i)$ é cofibrante. Logo $Ext^1(Coker(i), X) = 0$, então $Hom(i, X)$ é epimorfismo. Consequentemente, dado $f \in Hom(A, X)$, existe $h \in Hom(B, X)$ tal que $hi = f$, isto é, $X \to 0$ tem a propriedade de levantamento à direita com relação a $i : A \to B$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

Logo, X é um fibrante trivial. Portanto $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ é um par de cotorsão.

Agora vamos mostrar que $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ também é um par de cotorsão. Seja X seja algum objeto tal que $Ext^1(C, X) = 0$, para todo cofibrante C. Devemos mostrar que X é um fibrante trivial. Pelo Lema 4.1.11, basta mostrarmos que $X \to 0$ tem a propriedade de levantamento à direita com relação a cofibrações. Seja $i : A \to B$ uma cofibração. Pela definição de categoria modelo abeliana, i é um monomorfismo com conúcleo cofibrante. Então $Ext^1(Coker(i), X) = 0$. Pela exatidão da sequência:

$$Hom(B, X) \to Hom(A, X) \to Ext^1(Coker(i), X) \tag{4.7}$$

e $Hom(i, X)$ é epimorfismo. Assim dado $f \in Hom(A, X)$ existe $h \in Hom(B, X)$ tal que $hi = f$, isto é,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

$X \to 0$ tem a propriedade de levantamento à direita com relação a $i : A \to B$. Logo, X é um fibrante trivial. Portanto, mostramos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ é um par de cotorsão.

Agora mostraremos que $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ tem suficientes projetivos. Seja X um objeto arbitrário de $\mathcal{A}$. Pela definição de categoria modelo, podemos fatorar $0 \to X$ em uma cofibração seguida de uma fibração trivial

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{p} X.$$

Logo Y é um cofibrante. Pela definição de categoria modelo abeliana, p é um epimorfismo com núcleo K fibrante trivial. Então temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow Y \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0,$$

com $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ e $Y \in \mathcal{C}$. Logo, $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ tem suficientes projetivos.

Agora falta mostrar que $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ tem suficientes injetivos. Seja X um objeto arbitrário de $\mathcal{A}$. Pela definição de categoria modelo, podemos fatorar $X \to 0$ em uma cofibração seguida de uma fibração trivial

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{c} 0$$

Logo Y é um fibrante trivial. Pela definição de categoria modelo abeliana, i é um monomorfismo com conúcleo C cofibrante. Disto temos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} Y \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

com $C \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Logo, $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ tem suficientes injetivos. Portanto, o par de cotorsão $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ é completo. A completude do outro par de cotorsão segue de modo análogo. $\square$

Proposição 4.2.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana bicompleta com uma estrutura modelo em $\mathcal{A}$, na qual toda cofibração é um monomorfismo e toda fibração é um epimorfismo. Então fibrações coincidem com epimorfismos com núcleos fibrantes se, e somente se, cofibrações triviais coincidem com monomorfismos com conúcleos cofibrantes triviais. Similarmente, fibrações triviais coincidem com epimorfismos com núcleos fibrantes triviais se, e somente se, cofibrações coincidem com monomorfismos com conúcleos cofibrantes.*

Demonstração. Suponha que fibrações triviais coincidam com epimorfismos com núcleo fibrante trivial. Mostremos que cofibrações coincidem com monomorfismos com conúcleos cofibrantes. Suponha que $i : A \to B$ é um monomorfismo com conúcleo $j : B \to C$ com C um cofibrante. Vamos mostrar que i tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a qualquer fibração trivial $p : X \to Y$. Considere um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd}$$

Como p é uma fibração trivial, $K = Ker(p)$ é um cofibrante trivial. Este diagrama induz o diagrama comutativo com linhas e colunas exatas a seguir.

$$\begin{tikzcd} Hom(B,K) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(B,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(B,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ Hom(A,K) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "\delta"] & Hom(A,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\delta"] & Hom(A,Y) \arrow[d, "\delta"] \\ Ext^1(C,K) \arrow[r, "k_*"'] & Ext^1(C,X) \arrow[r, "p_*"'] & Ext^1(C,Y). \end{tikzcd}$$

De fato, dado $\alpha : B \to X$, temos $i^* p_*(\alpha) = i^*(p\alpha) = p\alpha i = p_*(\alpha i) = p_* i^*(\alpha)$. De modo análogo, temos $i^* k_* = k_* i^*$.

Agora vamos mostrar a comutatividade do quadrado de baixo à direita. Seja $\beta : A \to X$. Tomando o diagrama pushout de β com i

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "n"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\varepsilon : 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "l"] & P \arrow[r, "m"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

encontramos $\delta(\beta) = [\varepsilon]$ que é a classe de sequências exatas curtas equivalentes a sequência ε: $0 \longrightarrow X \xrightarrow{l} P \xrightarrow{m} C \longrightarrow 0$.

Aplicando $p_* : Ext^1(C, X) \to Ext^1(C, Y)$ em $\delta(\beta)$ encontramos $p_*\delta(\beta) = [\varepsilon']$, a classe de sequências exatas curtas equivalentes à sequência dada pelo diagrama pushout a seguir

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon : 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p"'] & P \arrow[r, "m"] \arrow[d, "n'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\varepsilon' : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "l'"] & P' \arrow[r, "m'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Agora vamos calcular $\delta p_*(\beta)$. Tomando o diagrama pushout de $p_*(\beta) = p\beta$ com i

$$\begin{tikzcd}
E : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p\beta"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "n''"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\varepsilon'' : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "l''"] & P'' \arrow[r, "m''"] & C \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

temos $\delta p_*(\beta) = \delta(p\beta) = [\varepsilon'']$, a classe de sequências exatas curtas equivalentes a ε''. Para mostrar que $p_*\delta(\beta) = \delta p_*(\beta)$, devemos mostrar que $\varepsilon' : 0 \longrightarrow Y \longrightarrow P' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ e $\varepsilon'' : 0 \longrightarrow Y \longrightarrow P'' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ são equivalentes. Pela definição de pushout, temos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p\beta"'] & B \arrow[d, "n''"] \arrow[ddr, bend left, "n'n"] & \\
Y \arrow[r, "l''"] \arrow[drr, bend right, "l'"'] & P'' \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}$$

Assim, pelo Lema das Cinco, no diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d, "r"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & P \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

r é um isomorfismo. Logo, $p_*\delta(\beta) = \delta p_*(\beta)$. De modo análogo, temos a comutatividade do quadrado ao lado.

Temos $p_*f = i^*g$. Assim, $p_*\delta f = \delta p_* f = \delta i^* g$. Vamos mostrar que $\delta i^* g = 0$. De fato, $\delta i^* g = \delta g i$ é a classe das sequências exatas curtas equivalentes à sequência resultante do pushout de i com gi:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "gi"] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "r"] & R \arrow[r, "r'"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pela definição de pushout, existe um único $q : R \to Y$ tal que $qs = g$ e $qr = 1_Y$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "gi"] & B \arrow[d, "s"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
Y \arrow[r, "r"] \arrow[drr, bend right, "1_Y"] & R \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
 & & Y.
\end{tikzcd}$$

Então, a sequência $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{r} R \xrightarrow{r'} C \longrightarrow 0$ cinde, isto é, $\delta gi = 0$. Pelo Teorema 4.2.6, $Ext^1(C, K) = 0$. Consequentemente, $\delta f = 0$. Pela exatidão de

$$Hom(B, X) \xrightarrow{i^*} Hom(A, X) \xrightarrow{\delta} Ext^1(C, X),$$

existe uma aplicação $h : B \to X$ tal que $hi = f$.

Temos ainda $i^*(ph - g) = (ph - g)i = phi - gi = 0$, assim existe uma aplicação $m : C \to Y$ tal que $mj = j^*m = ph - g$. Da sequência exata

$$Hom(C, X) \xrightarrow{p_*} Hom(C, Y) \xrightarrow{\delta} Ext^1(C, K) = 0,$$

temos $\delta(m) = 0$. Logo, existe $n : C \to X$ tal que $pn = p_*n = m$. Consequentemente, $(h - nj)i = hi = f$ e $p(h - nj) = ph - pnj = ph - mj = ph - ph + g = g$, ou seja, $h - Gj : B \to X$ é o levantamento procurado. Logo, i é uma cofibração. $\square$

Definição 4.2.8. Uma subcategoria não vazia $\mathcal{S}$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ é chamada *thick* se é fechada sob retrações e dada uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{4.8}$$

se duas das três entradas A, B, C da sequência (4.8) estão na subcategoria $\mathcal{S}$, então a terceira também está.

Proposição 4.2.9. *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria modelo abeliana e $\mathcal{W}$ é uma classe de objetos triviais, então $\mathcal{W}$ é thick.*

Demonstração. Seja A um objeto trivial, isto é, $0 \to A$ é uma equivalência fraca. Vamos mostrar que $A \to 0$ também é uma equivalência fraca. Note que 1_0 é uma retração de $0 \to A$, como podemos observar no diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \arrow[d, equal] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Então 1_0 é uma equivalência fraca. Como $1_0 = 0 \to A \to 0$, temos que $A \to 0$ também é uma equivalência fraca.

Agora mostremos que $\mathcal{W}$ é fechada sob retrações. Seja $g : C \to D$ um morfismo em $\mathcal{W}$ e $f : A \to B$ sua retração. Considere os diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ A \arrow[r] & C \arrow[r] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, equal] & 0 \arrow[r, equal] & 0. \end{tikzcd}$$

Note que $0 \to A$ é uma retração de $0 \to C$ e $B \to 0$ é uma retração de $D \to 0$. Como $0 \to C$ e $D \to 0$ são equivalências fracas, então $0 \to A$ e $B \to 0$ também o são. Logo, $f \in \mathcal{W}$. Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, podemos escrever $g = pi$, com p uma fibração (e, em particular, um epimorfismo), e i é uma cofibração trivial (e, em particular, um monomorfismo). Seja $A' = ker(p)$. Como $p(if) = gf = 0$, pela definição de núcleo, existe um único $j : A \to A'$ tal que $kj = if$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "k"] & B' \arrow[r, "p"] & C \\ & A \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "if"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Então, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "k"'] & B' \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como i e f são monomorfismos, então kj também o é, e assim j é um monomorfismo. Pela propriedade de pushout $Coker(j) = Coker(i)$. Pela Proposição 4.2.7, como i é uma cofibração trivial, então $Coker(i)$ é cofibrante trivial. Novamente pela Proposição 4.2.7, como j é monomorfismo e $Coker(j) = Coker(i)$ é um cofibrante trivial, então j é uma cofibração trivial. Portanto, se $A \in \mathcal{W}$ temos que $A \xrightarrow{r} A' \longrightarrow 0$ é uma equivalência fraca, então $A' \to 0$ também é uma equivalência fraca, ou seja, $A' \in \mathcal{W}$. Como p é uma fibração, A' também é fibrante, pela definição de categoria abeliana modelo. Neste caso, p é uma fibração trivial, assim g é uma equivalência fraca. Logo, $B \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $C \in \mathcal{W}$. Similarmente, se $B, C \in \mathcal{W}$, então p é fibração trivial. Logo, $A' \in \mathcal{W}$ e assim $A \in \mathcal{W}$. $\square$

O Teorema 4.2.6 mostra que, dada uma estrutura modelo abeliana em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, pode-se encontrar dois pares de cotorsão completos em $\mathcal{A}$. Reciprocamente, mostraremos a seguir que dados dois pares de cotorsão completos em uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ pode-se encontrar uma estrutura modelo abeliana em $\mathcal{A}$.

Para os próximos resultados desta seção consideremos $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana bicompleta e $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W}$ sejam três classes de objetos em $\mathcal{A}$.

Para construir uma estrutura modelo abeliana vamos definir uma *cofibração* (resp. cofibração trivial) como um monomorfismo f de $\mathcal{A}$ cujo conúcleo está em $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$), e uma *fibração* (resp. fibração trivial) como um epimorfismo cujo núcleo está em $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$). E uma *equivalência fraca* definimos como um morfismo f em $\mathcal{A}$ que se fatora como $f = pi$, com p uma fibração trivial e i é uma cofibração. Denotemos por $\mathcal{C}_m$ (resp. $\mathcal{CW}_m$) a classe das cofibrações (resp. cofibrações triviais), $\mathcal{F}_m$ (resp. $\mathcal{FW}_m$) a classe das fibrações (resp. fibrações triviais), $\mathcal{W}_m$ a classe das equivalências fracas

Lema 4.2.10. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{CW}_m$, $\mathcal{F}_m$ e $\mathcal{FW}_m$ são subcategorias de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Se i e j são cofibrações, então ji é um monomorfismo. Assim, podemos construir um diagrama comutativo com linhas e colunas exatas como segue

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & Ker(f) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "ji"] \arrow[d, "i"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & Coker(ji) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & Coker(j) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Coker(i) & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Pela definição de conúcleo, existe uma única $f : Coker(ji) \to Coker(j)$ tal que $fcoker(ji) = coker(j)$. Como $coker(j)$ é epimorfismo, f também o é. Pelo Lema da Serpente, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow Coker(i) \longrightarrow 0,$$

isto é, $Ker(f) \cong Coker(i)$. Desse modo, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Coker(i) \longrightarrow Coker(ji) \longrightarrow Coker(j) \longrightarrow 0.$$

Seja $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Aplicando o funtor $Ext^1(-, K)$ nesta sequência, temos uma sequência exata

$$Ext^1(Coker(j), K) \longrightarrow Ext^1(Coker(ji), K) \longrightarrow Ext^1(Coker(i), K).$$

Como i e j são cofibrações, $Ext^1(Coker(j), K) = Ext^1(Coker(i), K) = 0$. Logo, $Ext^1(Coker(ji), K) = 0$. Assim, $Coker(ji) \in \mathcal{C}$. Portanto, ji é uma cofibração. Os outros casos são similares. □

Vamos mostrar que esta estrutura satisfaz o axioma de levantamento.

Lema 4.2.11. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão em $\mathcal{A}$, então cofibrações tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a fibrações triviais. E cofibrações triviais tem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a fibrações.*

Demonstração. Seja $i : A \to B$ uma cofibração. Seja $p : X \to Y$ uma fibração trivial e um quadrado comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Este diagrama induz o diagrama comutativo com linhas e colunas exatas:

$$\begin{tikzcd} Hom(B,K) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(B,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(B,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ Hom(A,K) \arrow[r, "k_*"] \arrow[d, "\delta"] & Hom(A,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\delta"] & Hom(A,Y) \arrow[d, "\delta"] \\ Ext^1(C,K) \arrow[r, "k_*"] & Ext^1(C,X) \arrow[r, "p_*"] & Ext^1(C,Y) \end{tikzcd}$$

O morfismo f representa uma classe em $Hom(A, X)$ tal que $p_*f = i^*g$. Assim $p_*\delta f = \delta p_* f = \delta i^* g = 0$. Por hipótese $Ext^1(C, K) = 0$. Consequentemente, $\delta f = 0$. Pela exatidão de

$$Hom(B, X) \longrightarrow Hom(A, X) \xrightarrow{\delta} Ext^1(C, X)$$

existe uma aplicação $h : B \to X$ tal que $hi = f$. Note que $i^*(ph - g) = (ph - g)i = phi - gi = 0$, assim existe uma aplicação $F : C \to Y$ tal que $Fj = j^*F = ph - g$. Olhando para a sequência

$$Hom(C, X) \xrightarrow{p_*} Hom(C, Y) \xrightarrow{\delta} Ext^1(C, K) = 0$$

note que $\delta(F) = 0$. Segue que, existe $G : C \to X$ tal que $pG = p_*G = F$. Daí, $(h - Gj)i = hi = f$ e $p(h - Gj) = ph - pgj = ph - Fj = ph - ph + g = g$. Portanto, $h - Gj : B \to X$ é o levantamento procurado. □

Vamos mostrar que esta estrutura satisfaz o axioma da fatoração.

Proposição 4.2.12. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão completos em $\mathcal{A}$, então todo morfismo f em $\mathcal{A}$ pode ser fatorado como $f = pi = qj$, com p uma fibração, i uma cofibração trivial, q uma fibração trivial e j uma cofibração. Se os pares de cotorsão são funtorialmente completos, então as fatorações são funtoriais.*

Demonstração. Primeiro mostremos que qualquer monomorfismo f pode ser fatorado como $f = qj$, com q uma fibração trivial e j uma cofibração. De fato, seja $f : A \to B$ um monomorfismo com conúcleo C. Como $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ é um par de cotorsão completo, existe um epimorfismo $QC \xrightarrow{h} C$, com $QC \in \mathcal{C}$, cujo núcleo $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Tomando o pullback, obtemos o diagrama comutativo abaixo cujas linhas e colunas são sequências exatas curtas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r, equal] \arrow[d, "g'"'] & K \arrow[d] \\
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "q"] & QC \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

Como j é um monomorfismo com conúcleo $QC \in \mathcal{C}$, j é uma cofibração. Visto que o núcleo de q está em $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, q é uma fibração trivial.

Mostraremos agora que qualquer epimorfismo $f : X \to Y$ pode ser fatorado como $f = qj$, com q uma fibração trivial e j uma cofibração. De fato, seja $f : X \to Y$ um epimorfismo com núcleo K. Como $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ é um par de cotorsão completo, existe um monomorfismo $g : K \to RK$ com conúcleo em $\mathcal{C}$ e $RK \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Então tomamos o pushout para obter o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, equal] \\
RK \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[r, "q"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
C \arrow[r, equal] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $f = qj$ é um epimorfismo, q também o é. Como o núcleo RK de q está em $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, q é uma fibração trivial. Como g é um monomorfismo, g' é um epimorfismo. Segue que $X' \to C$ também é um epimorfismo. Então j é um monomorfismo. Como $C = Coker(j) \in \mathcal{C}$, j é uma cofibração.

Agora seja $f : A \to B$ uma aplicação arbitrária. Então podemos fatorar f como

$$A \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} A \oplus B \xrightarrow{[f\ 1_B]} B.$$

Podemos escrever $\begin{bmatrix} f & 1_B \end{bmatrix} = q'j'$, com q' uma fibração trivial e j' uma cofibração. Então $j'i$ é um monomorfismo e assim podemos escrever $j'i_1 = q''j$, com q'' uma fibração trivial e j uma cofibração. Seja $q = q'q''$. Então $f = qj$, com q uma fibração trivial, pelo Lema 4.2.10, e j uma cofibração. Esta é uma fatoração, como queríamos. $\square$

Vamos mostrar que a estrutura satisfaz o axioma das retrações.

Lema 4.2.13. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{CW}_m$, $\mathcal{F}_m$ e $\mathcal{FW}_m$ são fechadas sob retrações.*

Demonstração. Seja $g : B \to Y$ uma cofibração e $f : A \to X$ sua retração. Segue que existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "r"] & Y \arrow[r, "s"] & X
\end{tikzcd}$$

tal que $\beta\alpha = 1_A$ e $sr = 1_X$. Então, r e α são monomorfismos. Consequentemente, f também é monomorfismo. Assim, pela definição de cofibração $Coker(g) \in \mathcal{C}$, falta mostrar que $Coker(f) \in \mathcal{C}$. Note que,

$$coker(g)rf = coker(g)g\alpha = 0.$$

Pela definição de $coker(f)$, existe $r' : Coker(f) \to Coker(g)$ tal que $r'coker(f) = coker(g)r$. De modo análogo temos também $s' : Coker(g) \to Coker(f)$ tal que $s'coker(g) = coker(f)s$. Assim temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "coker(f)"] & Y \arrow[r, "s"] \arrow[d, "coker(g)"] & X \arrow[r] \arrow[d, "coker(f)"] & 0 \\
 & Coker(f) \arrow[r, "r'"] \arrow[d] & Coker(g) \arrow[r, "s'"] \arrow[d] & Coker(f) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Pela comutatividade de (4.9), $s'r'coker(f) = coker(f)sr = coker(f)$. Como $coker(f)$ é um epimorfismo, $s'r' = 1_{Coker(f)}$. Agora seja $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ tal que exista uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} D \xrightarrow{x} Coker(f) \longrightarrow 0.$$

Considere o diagrama pullback

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k'"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "y"] \arrow[d, "p"] & Coker(g) \arrow[r] \arrow[d, "s'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "k"] & D \arrow[r, "x"] & Coker(f) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ é um par cotorsão e $Coker(g) \in \mathcal{C}$ e $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, $Ext^1(Coker(g), K) = 0$. Então existe $y' : Coker(g) \to P$ tal que $yy' = 1_{Coker(g)}$. Tome $py'r' : Coker(f) \to D$ e note que

$$x(py'r') = s'yy'r' = s'r' = 1_{Coker(f)}.$$

Então, a sequência exata curta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{k} D \xrightarrow{x} Coker(f) \longrightarrow 0$ cinde. Isto significa que $Ext^1(Coker(f), K) = 0$. Pela definição de par de cotorsão, $Coker(f) \in \mathcal{C}$. Logo, f é uma cofibração. Os outros casos são similares. $\square$

Lema 4.2.14. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão funtorialmente completos em $\mathcal{A}$, então $\mathcal{W}_m$ é fechada sob retrações.*

Demonstração. Seja f uma retração de g. Pela Proposição 4.2.12, temos uma fatoração funtorial, $f = pi$ e $g = qj$ com p e q fibrações triviais, i e j cofibrações. Como a fatoração é funtorial, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[d, "i"] \\
A' \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & B' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "q"] & A' \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "x"] & Y \arrow[r, "y"] & X
\end{tikzcd}$$

com $s'r' = 1_{A'}$. Isto significa que i é uma retração de j e p é uma retração de q. Se g é uma equivalência fraca, então tomamos j como uma cofibração trivial. Como cofibrações triviais são fechadas sob retrações, i é também uma cofibração trivial. Portanto, f é uma equivalência fraca. $\square$

Agora vamos mostrar que a estrutura satisfaz o Axioma (3 por 2).

Proposição 4.2.15. *Se $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão funtorialmente completos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{W}_m$ são fechadas sob composições.*

Demonstração. Sejam f e g equivalências fracas. Vamos mostrar que gf também é uma equivalência fraca. Por definição $g = pi$ e $f = qj$ com p, q fibrações triviais e i, j cofibrações triviais. Segue que $gf = piqj$. Pelo Lema 4.2.10, basta mostrarmos que iq é uma equivalência fraca. Pela Proposição 4.2.12, iq pode ser fatorado como $iq = q'i'$, com q' fibração trivial e i' uma cofibração. Obtemos assim um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "q'"] & Coker(i') \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i"] & C \arrow[r] & Coker(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

no qual $r : Coker(i') \to Coker(i)$ é obtido pela definição de conúcleo. Precisamos mostrar que i' é uma cofibração trivial. Pelo Lema da Serpente, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(q) \longrightarrow Ker(q') \longrightarrow Ker(r) \longrightarrow Coker(q).$$

Como q é um epimorfismo, $Coker(q) = 0$. Pelo fato de i' ser um monomorfismo, o morfismo induzido da definição de núcleo $Ker(q) \to Ker(q')$ é um monomorfismo. Segue que

$$0 \longrightarrow Ker(q) \longrightarrow Ker(q') \longrightarrow Ker(r) \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta. Pela definição de cofibração trivial, $Coker(i) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Uma vez que q e q' são fibrações triviais, $Ker(q)$, $Ker(q') \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ é thick, $Ker(r) \in \mathcal{W}$. Se $C \to Coker(i)$ e q' são epimorfismos, então r também o é. Assim,

$$0 \longrightarrow Ker(r) \longrightarrow Coker(i') \xrightarrow{r} Coker(i) \longrightarrow 0$$

é exata. Como $\mathcal{W}$ é thick, $Coker(i') \in \mathcal{W}$. Logo, i' é uma cofibração trivial. □

Lema 4.2.16. *Se $h = gf$, com h e f monomorfismos e g um epimorfismo em $\mathcal{A}$, então existe uma sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow Coker(h) \longrightarrow 0. \tag{4.10}$$

Dualmente, se temos uma fatoração $h' = g'f'$, com h' e g' epimorfismos e f' um monomorfismo, então existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Ker(h') \longrightarrow Ker(g') \longrightarrow Coker(f') \longrightarrow 0. \tag{4.11}$$

Demonstração. Temos o seguinte diagrama comutativo cujas linhas são sequências exatas curtas.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Coker(f) \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "h"] & C \arrow[r] & Coker(h) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema da Serpente temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(g) \longrightarrow Ker(r) \longrightarrow 0.$$

Isto significa que $Ker(g) \cong Ker(r)$. Como g e $C \to Coker(h)$ são epimorfismos, r também é um epimorfismo. Logo, obtemos a sequência exata curta (4.10). A demonstração da sequência (4.11) é similar. □

Lema 4.2.17. *Se i é um monomorfismo em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$, então i é uma equivalência fraca se, e somente se, $Coker(i) \in \mathcal{W}$. Em particular, uma aplicação que é uma cofibração e uma equivalência fraca é uma cofibração trivial. Dualmente, um epimorfismo p é uma equivalência fraca se, e somente se, $Ker(p) \in \mathcal{W}$. Assim, uma aplicação que é uma fibração e uma equivalência fraca é uma fibração trivial.*

Demonstração. Se $i = pj$, no qual p é uma fibração trivial e j é uma cofibração, então pelo Lema 4.2.16 obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Ker(p) \longrightarrow Coker(j) \longrightarrow Coker(i) \longrightarrow 0.$$

Como $Ker(p) \in \mathcal{W}$ e $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick temos que se $Coker(j) \in \mathcal{W}$ então $Coker(i) \in \mathcal{W}$. Em particular, se $Coker(i) \in \mathcal{W}$, então $Coker(j) \in \mathcal{W}$ e assim j é uma cofibração trivial. Portanto, i é uma equivalência fraca. Reciprocamente, se i é uma equivalência fraca, então podemos tomar j uma cofibração trivial. Isto significa que $Coker(j) \in \mathcal{W}$ e assim $Coker(i) \in \mathcal{W}$. □

Lema 4.2.18. *Sejam $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão completos em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$. Se $fi = j$, com i e j cofibrações triviais, então f é uma equivalência fraca. Dualmente, se $qf = p$, com p e q fibrantes triviais, então f é uma equivalência fraca.*

Demonstração. Suponha que $fi = j$. Seja $f = lk$ uma fatoração de f tal que k é uma cofibração trivial e l é uma fibração. Desse modo, $j = fi = l(ki)$. Vamos mostrar que l é uma equivalência fraca. Como l é um epimorfismo e j e ki são monomorfismo, pelo Lema 4.2.16 existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow Coker(i) \longrightarrow Coker(j) \longrightarrow 0$$

Como $Coker(i)$ e $Coker(j)$ estão em $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick, obtemos $Ker(f) \in \mathcal{W}$. Pelo Lema 4.2.17, f é uma equivalência fraca. □

Lema 4.2.19. *Seja $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$. Se $pi = j$, com p uma fibração trivial e j é uma cofibração trivial, então i é uma equivalência fraca. Dualmente, se $qj = p$ o qual j é uma cofibração trivial e p é uma fibração trivial, então q é uma equivalência fraca.*

Demonstração. Note que i é um monomorfismo. Pelo Lema 4.2.16, existe uma sequência exata curta.

$$0 \longrightarrow Ker(p) \longrightarrow Coker(i) \xrightarrow{\ r\ } Coker(j) \longrightarrow 0.$$

Como $Ker(p)$ e $Coker(j)$ estão em $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick, $Coker(i)$ está também em $\mathcal{W}$. Logo, o Lema 4.2.17 implica que i é uma equivalência fraca. □

Lema 4.2.20. *Seja $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$. Se $jf = i$, com i e j cofibrações triviais, então f é uma equivalência fraca. Dualmente, se $fq = p$, com q e p fibrações triviais, então f é uma equivalẽncia fraca.*

Demonstração. Note que f é um monomorfismo. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Ker(r) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "j"] & Coker(f) \arrow[r, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & Coker(i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & Coker(j) \arrow[r] & Coker(r) &
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema da Serpente, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(r) \longrightarrow 0 \longrightarrow Coker(j) \longrightarrow Coker(r) \longrightarrow 0.$$

Isto significa que $Ker(r) \cong 0$ e $Coker(j) \cong Coker(r)$. Logo, temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Coker(f) \longrightarrow Coker(i) \longrightarrow Coker(j) \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick, $Coker(f) \in \mathcal{W}$. Assim, f é uma equivalência fraca, pelo Lema 4.2.17. □

Utilizando os lemas acima mostraremos que o axioma 3 por 2 é válido, que será demonstrado na proposição abaixo.

Proposição 4.2.21. *Sejam $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão completos em $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$ e f e g morfismos em $\mathcal{A}$ com a composição gf definida. Se dois de f, g e gf são equivalências fracas, então a terceira também é.*

Demonstração. Pela Proposição 4.2.15, se f e g são equivalências fracas, então gf também o é. Vamos mostrar que se $gf : X \to Z$ são equivalências fracas, então f também o é. O outro caso é dual. Pela Proposição 4.2.12, podemos fatorar f como $f = yx$ com x uma cofibração e y uma fibração trivial. Se x fosse uma equivalência fraca, então f seria uma equivalência fraca. Assim podemos reduzir ao caso em que $f : X \to Y$ é uma cofibração. Como g é uma equivalência fraca, é possível fatorar $g = pi$, com i uma cofibração trivial e p uma fibração trivial. Então temos uma fatoração $if = qj$, com j uma cofibração e q uma fibração trivial. Assim temos o diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, equal] \\
X' \arrow[r, "q"'] & Y' \arrow[r, "p"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Por outro lado, gf é também uma equivalência fraca, assim podemos fatorar $gf = rk$, com k uma cofibração trivial e r uma fibração trivial. Consequentemente temos o diagrama comutativo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & X' \arrow[r, "pq"] \arrow[d, "\alpha"] & Z \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "k"'] & X'' \arrow[r, "r"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Aqui o morfismo α existe pela propriedade de levantamento à esquerda de j com relação à r.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"'] & X'' \arrow[d, "r"] \\
X' \arrow[r, "pq"] & Z
\end{tikzcd}$$

Note que $pq = r\alpha$, com pq e r fibrações triviais. Consequentemente, o Lema 4.2.18 mostra que α é uma equivalência fraca. Podemos então fatorar $\alpha = sl$, com s uma fibração trivial e l uma cofibração trivial. Temos então $s(lj) = k$, com s uma fibração trivial e k uma cofibração trivial. O Lema 4.2.19 implica que lj é uma cofibração trivial. Visto que l é uma cofibração trivial, o Lema 4.2.20 implica que j é uma cofibração trivial. Isto significa que if e i são cofibrações triviais. Consequentemente, do Lema 4.2.20, f é uma cofibração trivial. $\square$

Assim concluímos a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 4.2.22. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W}$ três classes de objetos em uma categoria abeliana bicompleta $\mathcal{A}$ tais que*

1. *$\mathcal{W}$ é thick e*
2. *$(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ são pares de cotorsão completos.*

Então existe uma única categoria modelo abeliana em $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C}$ é a classe de objetos cofibrantes, $\mathcal{F}$ é a classe de objetos fibrantes e $\mathcal{W}$ é a classe de objetos triviais.

4.3 Correspondência entre Estrutura Modelo Exata e Pares de Cotorsão

Definição 4.3.1. Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata. Um par de classes $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ de objetos em uma categoria exata $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ é um *par de cotorsão* se as seguintes condições valem:

1. $Ext^1_{(\mathcal{A},\mathcal{E})}(F, C) = 0$, para todo $F \in \mathcal{F}$ e $C \in \mathcal{C}$.
2. Se $Ext^1_{(\mathcal{A},\mathcal{E})}(F, X) = 0$, para todo $F \in \mathcal{F}$, então $X \in \mathcal{C}$.
3. Se $Ext^1_{(\mathcal{A},\mathcal{E})}(X, C) = 0$, para todo $C \in \mathcal{C}$, então $X \in \mathcal{F}$.

Dizemos que um par de cotorsão $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tem *suficientes projetivos* se, para todo X na categoria exata $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, existe uma sequência exata curta

$$C \rightarrowtail F \twoheadrightarrow X, \tag{4.12}$$

com $F \in \mathcal{F}$ e $C \in \mathcal{C}$. Dizemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tem *suficientes projetivos funtorais* se a sequência (4.12) é funtorial em X. Dualmente, dizemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tem *suficientes injetivos* se, para todo X em $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ existe uma sequência exata curta

$$X \rightarrowtail C \twoheadrightarrow F, \tag{4.13}$$

com $C \in \mathcal{C}$ e $F \in \mathcal{F}$. Dizemos que $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tem *suficientes injetivos funtoriais* se a sequência (4.13) é funtorial em X. Se $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ tem suficientes projetivos e sufientes injetivos, dizemos que é um *par de cotorsão completo*. Dizemos que um par de cotorsão é *funtorialmente completo* se tem suficientes injetivos funtoriais e suficientes projetivos funtoriais.

Exemplo 4.3.2. Seja $\mathcal{G}$ uma categoria exata do tipo Grothendieck e $\mathcal{I}$ a classe de objetos injetivos. Do Teorema 3.2.11, o par $(ob\mathcal{G}, \mathcal{I})$ é um par de cotorsão com suficientes injetivos. Além disso, este par de cotorsão é completo. De fato, seja $X \in ob\mathcal{G}$. Como a categoria $\mathcal{G}$ é exata, existe uma sequência exata curta

$$0 \rightarrowtail X \xrightarrow{1_X} X.$$

Logo, o par de cotorsão $(ob\mathcal{G}, \mathcal{I})$ tem suficientes projetivos.

De modo natural é possível fazer a correspondência entre pares de cotorsão e estruturas exatas em categorias exatas como foi feito para categorias abelianas. Primeiro precisamos definir uma estrutura modelo que preserve a estrutura exata.

Definição 4.3.3. Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata. Uma *estrutura modelo exata* em $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ é uma estrutura modelo em que valem as afirmações.

1. Um morfismo é uma fibração (trivial) se, e somente se, é um monomorfismo admissível com um conúcleo cofibrante (trivial).
2. Um morfismo é uma fibração (trivial) se, e somente se, é um epimorfismo admissível com um núcleo fibrante (trivial).

Definição 4.3.4. Dada uma categoria exata $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, uma *subcategoria thick* de $\mathcal{A}$ é uma classe de objetos $\mathcal{W}$ que é fechada sob somandos diretos e tal que se dois de três termos em uma sequência exata curta estão em $\mathcal{W}$, então o terceiro também está.

Teorema 4.3.5. *Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata com uma estrutura modelo exata. Seja $\mathcal{Q}$ a classe de objetos cofibrantes, $\mathcal{R}$ a classe de objetos fibrantes e $\mathcal{W}$ a classe de objetos triviais. Então $\mathcal{W}$ é uma subcategoria thick de $\mathcal{A}$ e $(\mathcal{Q}, \mathcal{R} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W}, \mathcal{R})$ são pares de cotorsão funtorialmente completos em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. A demonstração de que $(\mathcal{Q}, \mathcal{R} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W}, \mathcal{R})$ são pares de cotorsão completos em $\mathcal{A}$ é análoga à demonstração do Teorema 4.2.6. Vamos mostrar que $\mathcal{W}$ é thick. Seja $W \in \mathcal{W}$ e X um somando direto de W, ou seja, $W = X \oplus Y$. Note que $0 \to X$ é uma retração da aplicação $0 \to W$. De fato,

$$X \overset{\binom{1}{0}}{\rightarrowtail} X \oplus Y \overset{(0\ 1)}{\twoheadrightarrow} Y$$

é uma sequência exata curta e, além disso, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \binom{1}{0} = 1$. Então, temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & 0 \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus Y \arrow[r, "(1\ 0)"] & X, \end{tikzcd}$$

isto é, $0 \to X$ é uma retração de $0 \to W$. Assim, como $0 \to W$ é uma equivalência fraca, o axioma de retração nos diz que $0 \to X$ também é uma equivalência fraca. Logo, $\mathcal{W}$ é fechado sob somandos diretos.

Agora queremos provar que se dois termos em uma sequência exata curta estão em $\mathcal{W}$, então o terceiro também está. Seja

$$A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C$$

uma sequência exata curta. Usando o axioma da fatoração, escrevemos $g = pi$ com p uma fibração (e assim um epic admissível com núcleo fibrante) e i uma cofibração trivial (e assim um monic admissível com conúcleo cofibrante trivial). Seja $A' = Ker(p)$. Como $p(if) = gf = 0$, pela definição de núcleo, existe um único $j : A \to A'$ tal que $kj = if$.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "k"] & B' \arrow[r, "p"] & C \\ & A \arrow[ul, dashed, "j"] \arrow[u, "if"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Então, temos um diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, tail, "i"] & C \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, tail, "k"] & B' \arrow[r, two heads, "p"] & C. \end{tikzcd}$$

Pela Proposição 2.1.8, o quadrado à esquerda é um pushout. Seja $q = coker(i)$. Temos $(qk)j = qif = 0$ e, dado $\alpha : A' \to X$ tal que $\alpha j = 0$, pela definição de pushout, existe um único $h : B' \to X$ tal que $hi = 0$ e $hk = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[d, tail, "i"] \arrow[ddr, bend left, "0"] & \\
A' \arrow[r, tail, "k"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"] & B' \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & X.
\end{tikzcd}$$

Pela definição de conúcleo de i, existe um único morfismo $l : Coker(i) \to X$ tal que $lq = h$. Assim, $l(qk) = hk = \alpha$. Para mostrar a unicidade, suponha que $l' : Coker(i) \to X$ seja tal que $l'(qk) = \alpha$. Como k é monomorfismo, temos

$$l'(qk) = l(qk) \Rightarrow l'q = lq.$$

Pela unicidade de l, $l' = l$. Logo, $qk = coker(j)$ e $Coker(j) = Coker(i)$. Como i e f são monics admissíveis, segue que a composição $kj = if$ é um monic admissível. Pelo Axioma Obscuro, j é um monic admissível. Note que $Coker(i) = Coker(j)$ é um cofibrante. Logo, j é uma cofibração trivial. Agora, se $A \in \mathcal{W}$, então a composição $A \xrightarrow{j} A' \longrightarrow 0$ é uma equivalência fraca. Assim, como j também é uma equivalência fraca, $A' \to 0$ é uma equivalência fraca, isto é, $A' \in \mathcal{W}$. Como p é uma fibração, A' é também um fibrante. Neste caso, p é uma fibração trivial e, assim, $g = pi$ é uma equivalência fraca. Logo, $B \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $C \in \mathcal{W}$. Por outro lado, se $B, C \in \mathcal{W}$, então p é uma equivalência fraca. Logo, $A' \in \mathcal{W}$ e assim $A \in \mathcal{W}$. □

Agora, assumindo que $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ é fracamente idempotente completa, vamos mostrar que dados uma subcategoria thick $\mathcal{W}$ e classes $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ tais que $(\mathcal{Q}, \mathcal{R} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W}, \mathcal{R})$ são pares de cotorsão completos, então existe uma estrutura modelo exata em $\mathcal{A}$ com $\mathcal{Q}$ a classe dos cofibrantes, $\mathcal{R}$ a classe dos fibrantes e $\mathcal{W}$ a classe dos objetos triviais. O primeiro passo é definir as cofibrações, fibrações e equivalências fracas. De modo natural, defina uma *cofibração* (trivial) como um monic admissível f em $\mathcal{A}$ cujo conúcleo está $\mathcal{Q}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W})$. De modo análogo, defina uma *fibração* (trivial) como um epic admissível cujo núcleo está em $\mathcal{R}$ $(\mathcal{R} \cap \mathcal{W})$. E defina uma *equivalência fraca* como um morfismo f em $\mathcal{A}$ que pode ser fatorado como $f = pi$, com p uma fibração trivial e i uma cofibração trivial.

Teorema 4.3.6. *Seja $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ uma categoria exata fracamente idempotente completa. Seja $\mathcal{W}$ uma subcategoria thick e $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ classes de objetos tais que $(\mathcal{Q}, \mathcal{R} \cap \mathcal{W})$ e $(\mathcal{Q} \cap \mathcal{W}, \mathcal{R})$ sejam pares de cotorsão completos. Então existe uma estrutura modelo exata em $\mathcal{A}$ com $\mathcal{Q}$ os objetos cofibrantes, $\mathcal{R}$ os objetos fibrantes e $\mathcal{W}$ os objetos triviais.*

A demonstração do Teorema 4.3.6 é análoga a demonstração do Teorema 4.2.22.

Exemplo 4.3.7. Seja $\mathcal{G}$ uma categoria exata do tipo Grothendieck. Em [10] (vide Teorema 7.11) Stovicek utiliza a correspondência entre pares de cotorsão e estrutura modelo exata para mostrar que se $C_{ac}(\mathcal{G})$ a classe dos complexos acíclicos for deconstrutível em $Ch(\mathcal{G})$, então existe uma estrutura modelo hereditária em $Ch(\mathcal{G})$ com $\mathcal{Q} = Ch(\mathcal{G})$ a classe de objetos cofibrantes, $\mathcal{W} = C_{ac}(\mathcal{G})$ a classe de objetos triviais e $\mathcal{R} = C_{ac}(\mathcal{G})^{\perp}$ a classe de objetos fibrantes.

Considerações Finais

As estruturas modelos são necessárias na construção da categoria de homotopia, que é definida pela localização de uma categoria modelo.

Neste trabalho apresentamos a correspondência entre estrutura modelo e pares de cotorsão em categorias abelianas, que foi demonstrada por Hovey [13] e, generalizada por Gillespie [14], para categorias exatas.

Com as categorias Grothendieck e as categorias exatas do tipo Grothendieck, temos exemplos de pares de cotorsão completos e estes exemplos nos dão estruturas modelos nestas categorias.

O resultado proposto por Gillespie [15], em 2004, e demonstrado por Yang e Ding [17], em 2015, diz que um par de cotorsão completo hereditário em uma categoria abeliana bicompleta $\mathcal{A}$ induz dois pares de cotorsão completos na categoria dos complexos $C(\mathcal{A})$. Assim, a correspondência de Hovey, junto com este resultado, nos fornece uma estrutura modelo na categoria dos complexos $C(\mathcal{A})$ de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ com um par de cotorsão completo e hereditário em $\mathcal{A}$.

Apêndice A

Conjuntos e classes

Na Teoria de Conjuntos Axiomática de Zermelo-Fraenkel temos os seguintes axiomas, que podem ser encontrados em [29]:

1. Axioma da Extensionalidade: Se X e Y têm os mesmos elementos, então $X = Y$.

2. Axioma do Emparelhamento: Para quaisquer conjuntos x e y existe um conjunto $\{x, y\}$.

3. Axioma Esquema de Separação: Se P é uma propriedade, então para qualquer X e p existe um conjunto $Y = \{x \in X | P(x, p)\}$ que contém todos os $x \in X$ que tem a propriedade P.

4. Axioma da União: Para todo conjunto X existe o conjunto $Y = \bigcup X$, a união de todos os elementos de X.

5. Axioma do Conjunto Potência: Para todo conjunto X existe o conjunto potência $Y = P(X)$, o conjunto de todos os subconjuntos de X.

6. Axioma da Infinidade: Existe um conjunto infinito.

7. Axioma Esquema de Substituição: Se uma classe F é uma função, então para qualquer conjunto X existe um conjunto $Y = F(X) = \{F(z) | z \in X\}$.

8. Axioma da Regularidade: Todo conjunto não vazio tem um $\in$-minimal elemento.

9. Axioma da Escolha: Toda família de conjuntos não vazios tem uma função escolha.

O seguinte axioma: se P é uma propriedade, então existe um conjunto $Y = \{x | P(x)\}$, chamado de Axioma Esquema de Compreensão, foi substituído pelo Axioma Esquema de Separação, pois se mostra contraditório como podemos ver, por exemplo, no paradoxo de Russel. Considere o conjunto $S = \{X | X \notin X\}$ cujos elementos são todos os conjuntos que não são membros deles mesmos. $S \in S$? Se $S \in S$, então S não é um membro dele mesmo e assim $S \notin S$. Por outro lado, se $S \notin S$, então $S \in S$. Em qualquer caso, temos uma contradição. Para corrigir este problema, abandona-se o Axioma Esquema de Compreensão e faz-se uma versão mais fraca que é o Axioma Esquema de Separação.

Com esta alteração nos axiomas Zermelo-Fraenkel, o paradoxo de Russel já não é problema. No entanto, não existe um conjunto de todos os conjuntos. De fato, se existisse um conjunto X de todos os conjuntos, então, pelo Axioma Esquema de Separação, existe um conjunto $Y = \{x \in X | x \notin x\}$. Assim, $Y \in X$. Se $Y \in Y$, então $Y \notin Y$. E se $Y \notin Y$ então $Y \in Y$. Portanto, em qualquer dos dois casos temos uma contradição. Neste caso não seria possível definir uma estrutura geral como a categoria de todos os conjuntos.

Com o intuito de resolver este problema, Maclane em [33], define o *universo* como um conjunto com as seguintes propriedades:

1. $x \in u \in U \Rightarrow x \in U$.
2. $u \in U$ e $v \in U \Rightarrow \{u, v\}, (u, v)$ e $u \times v \in U$.
3. $x \in U \Rightarrow \mathcal{P}x \in U$ e $\bigcup x \in U$.
4. $\omega \in U$ (onde $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ é o conjunto de todos os números ordinais finitos).
5. Se $f : a \to b$ é uma função sobrejetora com $a \in U$ e $b \subset U$, então $b \in U$.

Chamando um conjunto $u \in U$ de conjunto pequeno e uma função entre conjuntos pequenos de função pequena, ele consegue definir a categoria de todos os conjuntos pequenos em que U é o conjunto dos objetos e A é o conjunto de flechas. Dessa forma, pode-se construir, por exemplo, a categoria dos grupos pequenos, a categoria dos espaços topológicos pequenos e categorias de outros tipos de objetos matemáticos pequenos. Também pode-se construir a categoria das categorias pequenas que são categorias onde o conjunto de objetos e o de flechas são pequenos. Observe que a categoria dos conjuntos pequenos, por exemplo, não é uma categoria pequena, pois o conjunto de objetos U não é um conjunto pequeno. Desse modo, segundo Maclane, ao assumir a existência de um conjunto universo, junto com os axiomas de Zermelo-Fraenkel, tem-se o suficiente para a proposta usual de Teoria de Categorias.

Uma axiomatização alternativa da Teoria de Conjuntos é o Sistema Axiomático da Teoria de Conjuntos de Bernays-Gödel, introduzida por Bernays em [21].

1. (a) Extensionalidade: se para todo u, $u \in X$ se, e somente se, $y \in Y$, então $X = Y$.
   (b) Todo conjunto é uma classe.
   (c) Se $X \in Y$, então X é um conjunto.
   (d) Poda: Para quaisquer conjuntos x e y, existe um conjunto $\{x, y\}$.
2. Compreensão:

$$\text{Para todos } X_1, \cdots, X_n, \text{ existe } Y \text{ tal que } Y = \{x | \varphi(x, X_1, \cdots, X_n)\},$$

onde φ é uma fórmula em que apenas os conjuntos variáveis são quantificados.

3. (a) Infinidade: Existe um conjunto infinito.
   (b) União: Para todo conjunto x existe o conjunto $\bigcup x$.
   (c) Conjunto potência: Para todo conjunto x existe o conjunto potência $P(x)$ de x.
   (d) Substituição: Se uma classe F é uma função e x é um conjunto, então $\{F(z)|z \in x\}$ é um conjunto.
4. Regularidade.
5. Escolha: Existe uma função F tal que $F(x) \in x$ para todo conjunto x não vazio.

A Teoria de Conjuntos Axiomática de Zermelo-Fraenkel, tem apenas um tipo de objeto, que são os conjuntos. Já a Teoria de Conjuntos Axiomática Alternativa de Bernays-Gödel tem dois tipos de objetos: os conjuntos e as classes. Se um conjunto de afirmações teóricas é provável na Teoria de Conjuntos Axiomática de Zermelo-Fraenkel, então é provável na Teoria de Conjuntos Axiomática de Bernays-Gödel. Shoenfield [34] prova que se uma sentença envolvendo apenas variáveis conjuntos é provável na Teoria de Conjuntos Axiomática de Bernays-Gödel, então é provável na Teoria de Conjuntos Axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Apêndice B

A Categoria dos Complexos e a Categoria Homotópica de uma Categoria Exata

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva. Definimos a *Categoria dos Complexos* denotada por $Ch(\mathcal{A})$ tendo como objetos os complexos (A, d_A), os quais são sequências de objetos de $\mathcal{A}$, e morfismos $d_A^i \in Hom_{\mathcal{A}}(A^i, A^{i+1})$ chamados diferenciais

$$\cdots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_A^{n-1}} A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

tal que a composição de morfismos adjacentes é zero, ou seja

$$d_A^n d_A^{n-1} = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

O morfismo $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ nessa categoria é uma família de morfismos $f^n : A^n \to B^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, fazendo o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d_A^n"] \arrow[d, "f^n"] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d_B^{n-1}"] & B^n \arrow[r, "d_B^n"] & B^{n+1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Lema B.0.1. *Se $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ é uma categoria exata então $Ch(\mathcal{A})$ é uma categoria exata com relação à classe $Ch(\mathcal{E})$ de sequências exatas curtas de morfismos que são exatos em cada grau. Se $\mathcal{A}$ é abeliana, então $Ch(\mathcal{A})$ também é.*

Demonstração. O ponto é que (como na categoria funtor) limites e colimites de diagramas em $Ch(\mathcal{A})$ são obtidos tomando os limites e colimites ponto a ponto (em cada grau). Em particular, pushout sob monics admissíveis e pullback sobre epics admissíveis existem e produzem monics admissíveis e epics admissíveis. O restante segue diretamente. □

Definição B.0.2. A *aplicação cone* de uma aplicação cadeia $f : A \to B$ é o complexo $cone(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$, com diferencial $d_f^n = \begin{pmatrix} -d_A^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_B^n \end{pmatrix}$. Além disso, $d_f^{n+1} d_f^n = 0$, precisamente porque f é uma aplicação cadeia. É claro que a aplicação cone define um funtor da categoria de morfismos em $Ch(\mathcal{A})$, para $Ch(\mathcal{A})$.

O *funtor translação* em $Ch(\mathcal{A})$ é definido por $\Sigma A = cone(A \to 0)$. Mais explicitamente, ΣA é o complexo com componentes $(\Sigma A)^n = A^{n+1}$ e diferenciais $d_{\Sigma A}^n = -d_A^{n+1}$. Se f é uma aplicação cadeia, sua tradução é dada por $(\Sigma f)^n = f^{n+1}$. Claramente, Σ é um automorfismo aditivo de $Ch(\mathcal{A})$.

O *triângulo estrito* sobre a aplicação cadeia $f : A \to B$ é a sequência 3-periódica

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{if} cone(f) \xrightarrow{jf} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma if} \Sigma cone(f) \xrightarrow{\Sigma jf} \cdots$$

na qual a aplicação cadeia i_f tem componentes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e jf tem componentes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Seja $f : A \to B$ uma aplicação cadeia. Observe que a sequência de aplicações cadeia

$$B \xrightarrow{if} cone(f) \xrightarrow{jf} \Sigma A$$

cinde em cada grau, porém, não precisa ser uma sequência exata cindida em $Ch(\mathcal{A})$, porque a aplicação que cinde em cada grau não precisa montar uma aplicação cadeia. De fato, é direto verificar que a sequência acima é exata cindida em $Ch(\mathcal{A})$ se, e somente se, f é homotópica a zero.

Definição B.0.3. Uma aplicação cadeia $f : A \to B$ é *homotópica a zero* se existem morfismos $h^n : A^n \to B^{n-1}$ tais que $f^n = d_B^{n-1} h^n + h^{n+1} d_A^n$. Um complexo A é chamado *homotopicamente nulo* se 1_A é homotópico a zero.

As aplicações cadeia que são homotópicas a zero formam um ideal em $Ch(\mathcal{A})$, isto é, se $h : B \to C$ é homotópica a zero então hf e gh também o são, para todos morfismos $f : A \to B$ e $g : C \to D$. Se h_1 e h_2 são homotópicos a zero então $h_1 \oplus h_2$ também o é. O conjunto $N(A, B)$ de aplicações cadeia $A \to B$ que são homotópicas a zero é um subgrupo do grupo abeliano $Hom_{Ch(\mathcal{A})}(A, B)$.

Definição B.0.4. A *categoria homotópica* $K(\mathcal{A})$ é a categoria com os complexos sobre $\mathcal{A}$ como objetos e $Hom_{K(\mathcal{A})}(A, B) := \frac{Hom_{Ch(\mathcal{A})}(A,B)}{N(A,B)}$ como morfismo.

Note que todo complexo homotopicamente nulo é isomorfo ao objeto zero em $K(\mathcal{A})$. Acontece que $K(\mathcal{A})$ é aditiva, mas é muito raramente abeliana ou exata com respeito a uma estrutura exata não trivial. Porém, $K(\mathcal{A})$ tem a estrutura de uma categoria triangulada induzida pelos triângulos estritos em $Ch(\mathcal{A})$.

Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, define-se $cone(A) = cone(1_A)$. Note que $cone(A)$ é homotopicamente nulo com $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, como homotopia contraída.

Se f e g são homotopicamente equivalentes, isto é, $f - g$ é homotópico a zero, então $cone(f)$ e $cone(g)$ são isomorfos em $Ch(\mathcal{A})$, mas o isomorfismo e sua classe de homotopia geralmente dependem da escolha de uma homotopia. Em particular, a construção da aplicação cone não produz um funtor definido em morfismos de $K(\mathcal{A})$.

Uma aplicação cadeia $f : A \to B$ é homotópica a zero se, e somente se, se fatora como $hi_A = f$ sobre $h : cone(A) \to B$, com $i_A = i_{1_A} : A \to cone(A)$. Além disso, h tem componentes $\begin{pmatrix} h^{n+1} & f^n \end{pmatrix}$, sendo a família de morfismos $\{h^n\}$ uma homotopia de f a zero. Similarmente, f é homotópica a zero se, e somente se, f se fatora sobre $j_{\Sigma^{-1}B} = j_{1_{\Sigma^{-1}B}} : cone(\Sigma^{-1}B) \to B$.

Definição B.0.5. Um complexo A sobre uma categoria exata é chamado *acíclico* (ou *exato*) se cada diferencial se fatora como $A^n \twoheadrightarrow Z^{n+1}A \rightarrowtail A^{n+1}$ de tal modo que cada sequência $Z^nA \rightarrowtail A^n \twoheadrightarrow Z^{n+1}A$ é exata.

Lema B.0.6 (Lemma 10.3 [25])**.** *A aplicação cone de uma aplicação cadeia $f : A \to B$ entre complexos acíclicos é acíclico.*

Referências Bibliográficas

[1] EILENBERG, S.; MACLANE, S. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 58, n. 2, p. 231–294, 1945.

[2] CARTAN, H.; EILENBERG, S. *Homological algebra.* New Jersey: Princeton University Press, 1956.

[3] BUCHSBAUM, D. A. Exact categories and duality. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 80, n. 1, p. 1–34, 1955.

[4] HELLER, A. Homological algebra in abellian categories. *Annals of Mathematics*, p. 484–525, 1958.

[5] BARR, M. Exact categories. In: *Exact categories and categories of sheaves.* Springer, 1971. p. 1–120.

[6] QUILLEN, D. Higher algebraic k-theory: I. In: *Higher K-theories.* Springer, 1973. p. 85–147.

[7] MITCHELL, B. The full imbedding theorem. *American Journal of Mathematics*, v. 86, n. 3, p. 619–637, 1964.

[8] FREYD, P. J. *Abelian categories.* New York: Haper & Row, Publishers, 1964.

[9] GROTHENDIECK, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, v. 9, n. 2, p. 119–183, 1957.

[10] ŠT'OVÍČEK, J. Exact model categories, approximation theory, and cohomology of quasi-coherent sheaves. *Advances in Representation Theory of Algebras*, p. 297–367, 2014.

[11] ENOCHS, E. E.; JENDA, O. M. G. *Relative homological algebra.* Walter de Gruyter, 2011. v. 54.

[12] QUILLEN, D. G. *Homotopical algebra.* Berlin: Springer-Verlag, 1967. v. 43 of *lecture notes in mathematical.*

[13] HOVEY, M. Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory. *Mathematische Zeitschrift*, v. 241, n. 3, p. 553–592, 2002.

[14] GILLESPIE, J. Model structures on exact categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 215, n. 12, p. 2892–2902, 2011.

[15] GILLESPIE, J. The flat model structure on ch(r). *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 356, n. 8, p. 3369–3390, 2004.

[16] YANG, G.; LIU, Z. Cotorsion pairs and model structures on ch(r). *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, v. 54, n. 03, p. 783–797, 2011.

[17] YANG, X.; DING, N. On a question of Gillespie. *Forum Mathematicum*, v. 27, n. 6, p. 3205–3231, 2015.

[18] MITCHELL, B. *Theory of categories.* London: Academic Press, 1966. v. 17.

[19] STENSTRÖM, B. *Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory.* New York: Springer-Verlag, 2012. v. 217.

[20] ROTMAN, J. *An introduction to homological algebra.* New York: Springer, 2009.

[21] BERNAYS, P. A system of axiomatic set theory—part i. *The Journal of symbolic logic*, v. 2, n. 01, p. 65–77, 1937.

[22] GÖDEL, K. *Consistency of the continuum hypothesis.* Princeton: Princeton University Press, 1940. v. 3.

[23] BAER, R. Erweiterung von gruppen und ihren isomorphismen. *Mathematische Zeitschrift*, v. 38, n. 1, p. 375–416, 1934.

[24] YONEDA, N. On the homology theory of modules. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I*, v. 7, p. 193–227, 1954.

[25] BÜHLER, T. Exact categories. *Expositiones Mathematicae*, v. 28, n. 1, p. 1–69, 2010.

[26] KELLER, B. Chain complexes and stable categories. *Manuscripta Mathematica*, v. 67, n. 1, p. 379–417, 1990.

[27] SIEG, D.; WEGNER, S.-A. Maximal exact structures on additive categories. *Mathematische Nachrichten*, v. 284, n. 16, p. 2093–2100, 2011.

[28] DE JONG, A. J. et al. The stacks project. *Algebraic stacks-Examples*, 2013.

[29] JECH, T. *Set theory.* New York: Springer-Verlag, 2013.

[30] ESTRADA, S.; GILLESPIE, J.; ODABAŞI, S. Pure exact structures and the pure derived category of a scheme. *arXiv preprint arXiv:1408.2846*, 2014.

[31] HOVEY, M. *Model categories.* Number 63. American Mathematical Soc., 1999.

[32] GOERSS, P. G.; SCHEMMERHORN, K. Model categories and simplicial methods. *arXiv preprint math/0609537*, 2006.

[33] MAC LANE, S. *Categories for the working mathematician.* New York: Springer-Verlag, 1971. v. 5.

[34] SHOENFIELD, J. R. A relative consistency proof. *The Journal of Symbolic Logic*, v. 19, n. 01, p. 21–28, 1954.