

CAMILA CRISTINA TEIXEIRA

**METODOLOGIA GAGE R&R: UMA ABORDAGEM DE ESTIMAÇÃO INTERVALAR
VIA MÉTODO DELTA MULTIVARIADO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Eduardo Campana Barbosa

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2022**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

Teixeira, Camila Cristina, 1996-

T266m Metodologia gage R&R: uma abordagem de estimação
2022 intervalar via método delta multivariado / Camila Cristina
Teixeira. – Viçosa, MG, 2022.

1 dissertação eletrônica (60 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.

Orientador: Eduardo Campana Barbosa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Estatística, 2022.

Referências bibliográficas: f. 43-45.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.455>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Análise de variância. 2. Estatística matemática -
Medição. I. Barbosa, Eduardo Campana, 1988-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Estatística. Programa de
Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria. III. Título.

CDD 22. ed. 519.538

Bibliotecário(a) responsável: Euzebio Luiz Pinto CRB 6/3317

CAMILA CRISTINA TEIXEIRA

**METODOLOGIA GAGE R&R: UMA ABORDAGEM DE ESTIMAÇÃO INTERVALAR
VIA MÉTODO DELTA MULTIVARIADO**


Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de maio de 2022.

Assentimento:



Camila Cristina Teixeira
Autora



Eduardo Campana Barbosa
Orientador

*Ao meu pai, José David Teixeira;
A minha mãe, Izabel Cristina de Souza Teixeira;
Ao meu companheiro, Mateus Armond Santos.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por sempre estar comigo em todas as fases de minha vida me auxiliando.

Aos meus pais, Izabel Cristina de Souza Teixeira e José David Teixeira, por todo amor e cuidado por todos esses anos. Palavras não são suficientes para expressar minha gratidão.

Aos meus irmãos, Wanderson David de Souza Teixeira e William José de Souza Teixeira, por todo companheirismo e suporte durante todos os anos de minha vida.

Ao meu companheiro e melhor amigo Mateus Armond Santos, por toda dedicação, cuidado e amor, o qual sempre esteve me auxiliando nesse processo em tudo o que lhe era possível.

A todos os meus amigos, em especial ao João Graciano Sampaio, o meu maior incentivador ao ingresso no programa de mestrado.

Ao meu orientador Prof. Eduardo Campana Barbosa, pelo conhecimento compartilhado.

Aos membros da banca, Prof. André Roberto de Sousa, Prof. José Ivo Ribeiro Júnior, e Prof. Carlos Henrique Osório Silva por estarem dispostos a dar suas contribuições a este trabalho.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a Pós-Graduação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, pela concessão da bolsa de estudo.

RESUMO

TEIXEIRA, Camila Cristina, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2022. **Metodologia Gage R&R: uma abordagem de estimação intervalar via método delta multivariado.** Orientador: Eduardo Campana Barbosa.

A qualidade dos mais variados processos de produção está diretamente associada à análise estatística de dados coletados dos mesmos. Portanto, para tentar minimizar a probabilidade de fracassos ou de falhas, métodos estatísticos são utilizados. Um dos estudos mais tradicionais para avaliar um sistema de medição é denominado como Gage R&R (MSA, 2010; MONTGOMERY; RUNGER, 1993), em que a variação total do sistema é decomposta em, principalmente, duas partes: Repetibilidade e Reprodutibilidade. Logo, o objetivo deste trabalho é realizar o estudo de Gage R&R, via método da Análise de Variância (ANOVA), para estimar os quadrados médios associados aos fatores aleatórios operador e peça, e, em seguida, através do Método dos Momentos, obter os estimadores para as componentes de variância associadas a Repetibilidade e a Reprodutibilidade. Posteriormente, estima-se o índice R&R (%) e obtêm-se um intervalo de confiança assintótico, que permite classificar o sistema de medição quanto a sua adequação, de acordo com um quadro de referência utilizado por acadêmicos e profissionais atuantes nas indústrias.

Palavras-chave: Intervalo de Confiança. Operador. Peça. Qualidade. Repetibilidade. Reprodutibilidade

ABSTRACT

TEIXEIRA, Camila Cristina, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2022. **Gage R&R methodology: an interval estimation approach via multivariate delta method.** Adviser: Eduardo Campana Barbosa.

The quality of most production processes is directly associated with the statistical analysis of data collected from them. Therefore, to try to minimize the probability of failures or insuccesses, statistical methods are used. One of the most traditional studies to evaluate a measurement system is called Gage R&R (MSA, 2010; MONTGOMERY; RUNGER, 1993), in which the total variation of the system is mainly decomposed into two parts: Repeatability and Reproducibility. Therefore, the objective of this work is to carry out the study of Gage R&R, via the Analysis of Variance (ANOVA) method, to estimate the mean squares associated with the random effects of operator and part, and then, through the Method of Moments, to obtain the estimators of the variance components associated with Repeatability and Reproducibility. Subsequently, the R&R (%) index is estimated and an asymptotic confidence interval is obtained, which allows classifying the measurement system as to its suitability, according to a reference table used by academics and professionals working in industries.

Keywords: Confidence Interval. Operator. Part. Quality. Repeatability. Reproducibility

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1 Faixas de Classificação de um Sistema de Medição.....	16
Quadro 2 Estimadores das somas de quadrados dos fatores do modelo.....	19
Quadro 3 Quadrados Médios Esperados para ANOVA com Fatores de Efeitos Aleatórios.....	20
Quadro 4 Estatística do Teste F para Fatores de Efeitos Aleatórios.....	21
Quadro 5 Estimação das componentes de variância via método dos momentos.....	23
Quadro 6 Medições repetidas da densidade após secagem (em g/cm ³) de dez peças pelos operadores	29
Quadro 7 Atributos da função <i>ss.rr</i> do pacote <i>SixSigma</i> do <i>software R</i>	30
Quadro 8 Comparação resultado via Método Delta versus resultado simulação.....	40
Figura 1 Exemplo de Interação entre fatores operador e peça.....	15
Figura 2 Gráfico de Interação pra o modelo completo.....	32
Figura 3 Análise das pressuposições do método ANOVA.....	34
Figura 4 Intervalo de confiança para o estudo de <i>Gage R&R</i> atual e hipotético.....	38
Figura 5 Teste de hipótese sobre o parâmetro R&R via Intervalo de confiança.....	39
Figura 6 Histograma da distribuição de R&R (%).....	40
Figura 7 Inserção de função para derivação no site <i>WolframAlpha</i>	49
Figura 8 Resultado <i>WolframAlpha</i> passo-a-passo	50
Tabela 1 Tabela ANOVA para um modelo com fatores de efeito aleatório.....	22
Tabela 2 ANOVA para dois fatores com interação.....	32
Tabela 3 ANOVA para dois fatores sem interação.....	33
Tabela 4 Resultado do estudo de <i>Gage R&R</i> pelo método da ANOVA.....	35
Tabela 5 Estimadores das variâncias contidas na matriz de variância e covariâncias do modelo tradicional de <i>Gage R&R</i>	51

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
2.1 ANÁLISE DO SISTEMA DE MEDIÇÃO	13
2.1.1 Repetibilidade	13
2.1.2 Reprodutibilidade	14
2.1.3 O índice R&R percentual	15
2.2 ANÁLISE DE VARIÂNCIA (ANOVA)	16
2.2.1 Modelo Estatístico.....	16
2.2.2 Estimação dos Parâmetros.....	18
2.2.3 Soma de Quadrados.....	19
2.2.4 Esperanças de Quadrados Médios ou E(QM)	19
2.2.5 Tabela da ANOVA	21
2.2.6 Estimação das componentes de variância.....	22
2.3 INTERVALO DE CONFIANÇA PARA O ÍNDICE R&R PERCENTUAL	23
3. MATERIAL E MÉTODOS	28
3.1 OBTENÇÃO DOS DADOS.....	28
3.2 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE.....	29
3.3 SIMULAÇÃO DE DADOS	30
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	32
4.1 ESTUDO DE <i>GAGE</i> R&R PELO MÉTODO ANOVA	32
4.1.1 Análise e Diagnóstico dos resíduos do modelo	33
4.2 ESTIMAÇÃO PONTUAL DAS COMPONENTES DE VARIÂNCIA E DO ÍNDICE R&R (%)	35
4.3 INTERVALO DE CONFIANÇA PARA O ÍNDICE R&R (%).....	36
4.3.1 Intervalo de confiança para o índice R&R (%) via Método Delta Multivariado	36
4.3.2 Simulação de dados	39
5. CONCLUSÃO	42
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	43
APÊNDICE A	46

APÊNDICE B	49
APÊNDICE C	51
APÊNDICE D	55
APÊNDICE E	56
APÊNDICE F	58

1. Introdução

Atualmente, para que as empresas se mantenham saudáveis e lucrativas no mercado é necessário que elas sejam competitivas. A competitividade está associada a diversos fatores, e, principalmente, a satisfação dos clientes, que estão cada vez mais exigentes. Por este motivo, os gestores devem adotar políticas de melhoria contínua, já que novos desafios surgirão, exigindo que as empresas aprimorem seus processos e busquem sistemas de produção mais capazes, eficientes e com excelência na confiabilidade de seus resultados (KLAPUT *et al.*, 2016).

Uma política de melhoria contínua tradicionalmente empregada para monitorar ou tentar maximizar a eficiência de uma empresa e, conseqüentemente, sua competitividade, é a do controle de qualidade dos seus produtos (processos e/ou serviços). De maneira geral, o controle de qualidade envolve todas as operações da cadeia produtiva da companhia, desde a identificação da demanda e o recebimento dos suprimentos, até a confecção dos itens, a avaliação de não conformidades e a entrega do produto final ao cliente (SELEME, 2008; PALADINI, 2009).

Logo, a ausência de controle de qualidade em qualquer fase dos processos industriais implica em conseqüências financeiras, retrabalhos, perdas e desperdícios para as empresas, bem como em transtornos para os clientes (CUDNEY; ELROD, 2011). Mais especificamente, na etapa final da cadeia ou da operação, que envolve a metrologia ou a medição dos itens produzidos, é que os problemas mais graves podem ocorrer, principalmente quando um item não conforme é erroneamente considerado como conforme e enviado ao cliente (KLAPUT *et al.*, 2016).

Para tentar minimizar esses problemas alguns estudos têm sido conduzidos com a finalidade de avaliar a eficiência de um Sistema de Medição¹. Dentre as alternativas disponíveis, uma metodologia estatística frequentemente empregada para isso é a análise da Repetibilidade e da Reprodutibilidade (*Gage R&R*) do sistema (MSA, 2010), que permite verificar, indiretamente, a capacidade do sistema de produção e, diretamente, a capacidade do sistema de medição de uma empresa. Destaca-se que a capacidade do sistema de medição está associada a habilidade dos operadores em realizar as medições e a presença de efeitos associados a fontes

¹ Um sistema de medição é definido como uma coleção de instrumentos ou dispositivos de medição e de fixação de peças, padrões, operações, métodos, *software*, pessoal, ambiente e premissas utilizadas para quantificar a unidade de medição ou realizar a avaliação de uma característica que está sendo medida (MSA, 2010)

aleatórias de variação, que também afetam as medições (BURDICK; BORROR; MONTGOMERY, 2003).

De forma sucinta, a análise de um sistema de medição via metodologia *Gage R&R* tem como principal objetivo estimar um índice conhecido como índice R&R (%), que é uma função não linear das componentes de variância associadas aos fatores de interesse avaliados na análise. Esse índice permite ao pesquisador classificar o sistema de medição em estudo como adequado, moderado ou inadequado, de acordo com uma tabela de referência estabelecida na literatura. A estimativa do índice R&R (%) pode ser obtida a partir de duas abordagens distintas: i) via método dos gráficos de controle para média e amplitude (GONÇALVES JÚNIOR; SOUSA, 2017; MSA, 2010) ou ii) por ajuste de um modelo linear estatístico, como o da Análise de Variância (ANOVA) (MONTGOMERY, 2000)

No que se refere às aplicações práticas da metodologia *Gage R&R*, além dos trabalhos pioneiros de Montgomery & Runger (MONTGOMERY; RUNGER, 1993a; MONTGOMERY; RUNGER, 1993b), Li e Al-Refai (2008) analisaram dados de um sistema de medição de uma indústria madeireira via abordagem de gráficos de controle para média e amplitude. Os autores mediram o diâmetro de perfurações realizadas em painéis laterais. No experimento foram selecionados aleatoriamente três operadores e dez painéis laterais, utilizando um número de três repetições por operador. Os resultados demonstraram que o sistema de medição em questão era moderado, com um índice R&R (%) estimado de aproximadamente 12,67%. Posteriormente, após a detecção dos problemas, medidas corretivas foram realizadas e um novo estudo foi conduzido. Já os novos resultados demonstraram a adequação do sistema, com um índice R&R (%) estimado de aproximadamente 9,86% ou menor que 10% (como será apresentado mais adiante, um sistema de medição será considerado adequado se o seu índice R&R (%) estimado for inferior a 10%).

Já Erdmann *et al.* (2010) utilizaram a abordagem da ANOVA para analisar um sistema de medição na área da saúde (em um hospital). Nesse estudo foram utilizados dados resultantes de medições de temperatura corporal (em °C) obtidas por enfermeiros através de um termômetro auricular. Os resultados demonstraram que o sistema de medição em questão foi classificado como moderado, apresentando um índice R&R (%) estimado de aproximadamente 25,4% (analogamente, um sistema de medição será considerado moderado se o valor estimado para o índice R&R (%) for

maior do que 10% e inferior a 30%, e inadequado quando essa estimativa for superior a 30%).

Por fim, na literatura científica, verifica-se que poucos trabalhos apresentam a derivação dos intervalos de confiança para o índice R&R (%). Mais especificamente, o que se verifica com maior frequência são trabalhos que apresentam a construção de intervalos de confiança para as variâncias ou para as componentes de variância. Isto é, intervalos de confiança assintóticos (MONTEGOMERY; RUNGER, 1993b), intervalos de confiança Bayesianos (LOPILATO; CARTER; WANG, 2015) e intervalos de confiança baseados em métodos de reamostragem ou *Bootstrap* (WANG; LI, 2003) para as componentes de variância e não para o índice R&R (%).

Nesse sentido, o principal objetivo deste trabalho foi apresentar a construção de um intervalo de confiança assintótico para o índice R&R percentual, o que possibilitará a realização de comparações estatísticas entre sistemas de medição e a testagem de hipóteses sobre o verdadeiro valor do índice R&R (%). Para isso foi utilizado o Método Delta Multivariado (CASELLA; BERGER, 2002), no intuito de obter a estimativa da variância do estimador do índice R&R (%), que é necessária para a construção do intervalo de confiança de interesse.

2. Referencial Teórico

2.1 Análise do sistema de medição

O estudo de *Gage R&R* permite avaliar e conhecer as principais fontes de variação associadas aos valores das medições. Em geral, os sistemas de medição estão associados a duas principais fontes de variação: as peças, produzidas na operação da empresa, e os operadores, que realizam as medições dessas peças com um dispositivo de medição apropriado (DESHPANDE *et al.*, 2020). Ou seja:

$$\sigma_{\text{Total}}^2 = \sigma_{\text{Peça}}^2 + \sigma_{\text{Sistema de Medição}}^2 \quad (1)$$

Adicionalmente, segundo Dolezal, Burdick e Birch (1998), a variabilidade associada ao sistema de medição pode ser decomposta em duas outras componentes de variação, denominadas, respectivamente, de Repetibilidade e Reprodutibilidade:

$$\sigma_{\text{Sistema de Medição}}^2 = \sigma_{\text{Repetibilidade}}^2 + \sigma_{\text{Reprodutibilidade}}^2 \quad (2)$$

2.1.1 Repetibilidade

A Repetibilidade representa a variabilidade natural ou inerente ao processo de medição, isto é, a variabilidade associada aos fatores aleatórios desconhecidos ou que não podem ser controlados, mensurados ou observados (por exemplo, condições ambientais, precisão do instrumento, etc.) pelo pesquisador. Nesse sentido, a Repetibilidade pode ser interpretada como a variação observada “dentro das medições de um mesmo operador” ou dentro das medições de uma mesma peça, quando avaliada repetidas vezes por um mesmo operador e com um mesmo instrumento de medida (ou sob condições idênticas) (BURDICK, BORROR, MONTGOMERY, 2003; SMITH; MCCRARY; CALLAHAN, 2007). Por este motivo, na representação formal de modelos lineares estatísticos, a Repetibilidade está associada a variabilidade dos erros aleatórios, isto é:

$$\sigma_{\text{Repetibilidade}}^2 = \sigma^2 \quad (3)$$

2.1.2 Reprodutibilidade

Define-se a Reprodutibilidade como a variabilidade decorrente da diferença entre as médias originadas pelas medições de diferentes operadores (ou de diferentes períodos de tempo, ou de diferentes ambientes, ou em geral, de diferentes condições), quando estes utilizam o mesmo instrumento de medida, repetidas vezes, para avaliar as mesmas peças. Por esse motivo, a Reprodutibilidade pode ser interpretada como a variabilidade “entre as medições médias dos operadores” (WERKEMA, 1996; BURDICK; BORROR; MONTGOMERY, 2003; SMITH; MCCRARY; CALLAHAN, 2007).

Um detalhe importante é que alguns operadores podem apresentar dificuldades para medir determinadas peças, enquanto outras não, o que caracteriza o efeito de interação entre operadores e peças, ou, mais especificamente, o efeito da interação entre os fatores operador e peça. Logo, a Reprodutibilidade é definida como:

$$\sigma_{\text{Reprodutibilidade}}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_{0 \times P}^2 \quad (4)$$

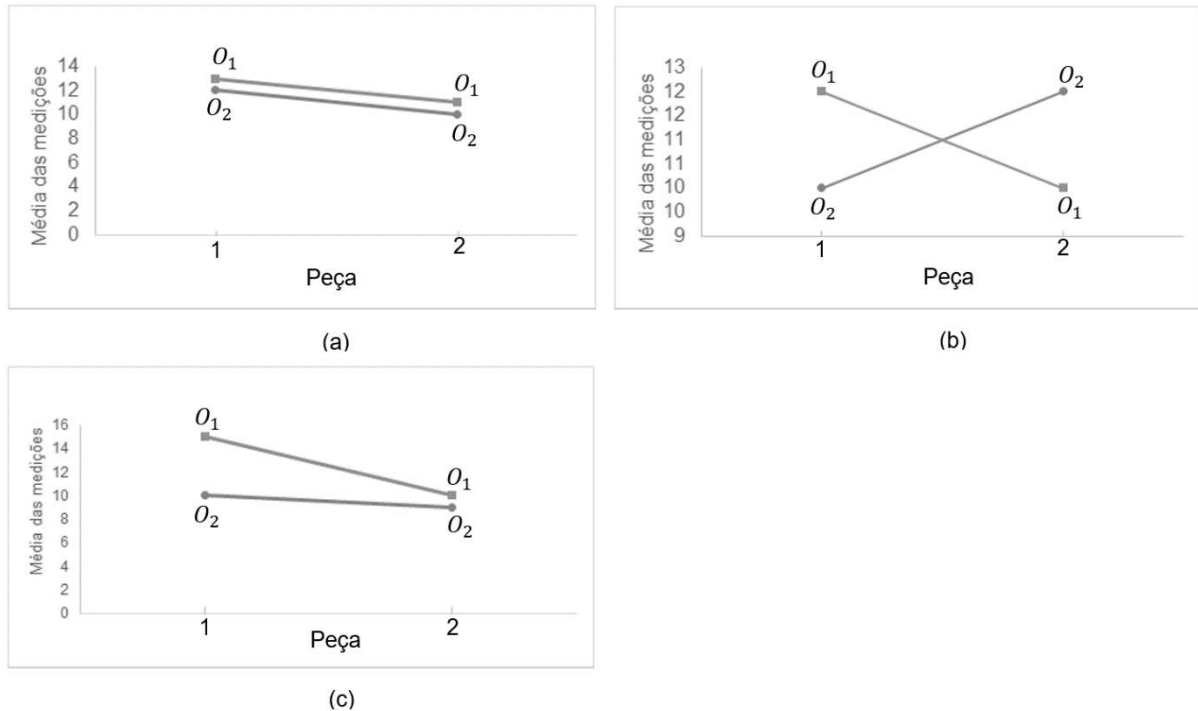
Note que na análise de *Gage R&R* estabelecem-se fatores, sendo que “O” representa o fator Operador, definido com “o” níveis, “P” o fator Peça, definido com “p” níveis, e “O x P” ou “I” é a representação formal para a interação entre o fator Operador e o fator Peça (BURDICK; BORROR; MONTGOMERY, 2003).

2.1.2.1 Variabilidade associada a Interação

A interação representa a dependência entre os níveis dos fatores operador e peça. O conceito de interação pode ser ilustrado graficamente, veja a Figura 1, que apresenta o fator Peça, com dois níveis, p_1 e p_2 , plotado contra os dois níveis do fator Operador, o_1 e o_2 . No gráfico (a) é possível visualizar que as linhas de o_1 e o_2 são aproximadamente paralelas, indicando que, possivelmente, os fatores Operador e Peça não interagem. Já no gráfico (b) as linhas de o_1 e o_2 não são paralelas e se cruzam, indicando que, possivelmente, há interação (complexa) entre os fatores Operador e Peça (MONTGOMERY, 2012). Por fim, no gráfico (c) as linhas de o_1 e o_2 também não são paralelas, mas não chegam a se cruzar, o que também caracteriza

uma possível interação (simples) entre os fatores Operador e Peça (MITCHELL; JOLLEY, 2010).

Figura 1 - Exemplo de Interação entre fatores operador e peça.



Fonte: Adaptado de Montgomery (2012, p.571) e Mitchell e Jolley (2010, p.442)

Vale ressaltar que uma conclusão mais formal sobre a presença ou não de interação entre os fatores deve ser avaliada através de um teste de hipótese adequado. Se for constatada a presença de interação significativa, a sua respectiva componente de variância, $\sigma_{O \times P}^2$, irá representar uma parte da Reprodutibilidade, caso contrário, se a interação não for significativa, então, $\sigma_{O \times P}^2 = 0$ e, conseqüentemente,

$$\sigma_{\text{Reprodutibilidade}}^2 = \sigma_O^2.$$

2.1.3 O índice R&R percentual

O índice R&R percentual resulta da razão entre o desvio-padrão do sistema de medição (σ_{SM}) e o desvio-padrão total dos dados (σ_{Total}), ou seja, o cálculo desse índice está associado ao valor da variabilidade das peças, da Repetibilidade e da Reprodutibilidade (GONÇALVES JÚNIOR; SOUSA, 2017).

$$R\&R(\%) = \frac{\sigma_{SM}}{\sigma_{Total}} \times 100 = \frac{\sqrt{\sigma_{Repetibilidade}^2 + \sigma_{Reprodutibilidade}^2}}{\sqrt{\sigma_{Peça}^2 + \sigma_{Repetibilidade}^2 + \sigma_{Reprodutibilidade}^2}} \times 100 \quad (5)$$

Naturalmente, como em geral não se conhece o valor verdadeiro desses parâmetros, o índice R&R (%) deverá ser estimado, substituindo esses valores desconhecidos por suas respectivas estimativas. Um dos critérios mais utilizados para verificar a adequação de um processo de medição, por meio do índice R&R (%), é o apresentado a seguir no Quadro 1 (MSA, 2010).

Quadro 1 - Faixas de Classificação de um Sistema de Medição.

R&R (%)	Situação do Sistema de Medição
< 10%	Sistema de medição aceitável
Entre 10% e 30%	Sistema de medição aceitável, dependendo da aplicação
> 30%	Sistema de medição inaceitável

Fonte: Adaptado MSA (2010, p.78).

2.2 Análise De Variância (ANOVA)

A ANOVA é o método estatístico tradicionalmente utilizado nos estudos de *Gage R&R* para decompor a variabilidade total dos dados e estimar os quadrados médios amostrais associados as fontes de variação dos fatores em estudo. A ANOVA é aqui empregada pois a estimativa das componentes de variância, quantidades necessárias para estimar o índice R&R (%), são obtidas a partir dos valores amostrais mencionados. Destaca-se que essa metodologia é capaz de lidar com diversas configurações experimentais e permite estimar as variações amostrais com boa precisão (NAMALA, 2008). Porém, de acordo com Janiga (2018), seus cálculos são mais complexos e exigem certo grau de conhecimento estatístico para interpretar os resultados, sendo assim, a utilização deste método é indicada principalmente quando há ferramentas computacionais disponíveis.

2.2.1 Modelo Estatístico

Segundo Montgomery (2012), o modelo estatístico da ANOVA empregado no estudo convencional de *Gage R&R* é o modelo linear de um experimento com dois

fatores aleatórios (Peça e Operador), desenvolvido sob um Delineamento Inteiramente Casualizado (DIC), conforme apresentado em (6). Vale destacar que esse modelo é utilizado para situações em que o planejamento do experimento é cruzado, isto é, quando é possível que todos os operadores meçam as mesmas peças repetidas vezes.

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, o \\ k = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (6)$$

Em que μ representa a média geral do modelo, τ_i , β_j , $(\tau\beta)_{ij}$ e ε_{ijk} representam, respectivamente, o efeito do i -ésimo nível do fator Peça, o efeito do j -ésimo nível do fator Operador, o efeito da interação entre a i -ésima peça e o j -ésimo operador e o erro aleatório associado a medição da i -ésima peça, quando realizada pelo j -ésimo operador, na k -ésima repetição do experimento, tal que, $\varepsilon_{ijk} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

Diferente do modelo clássico da ANOVA, em que o efeito dos fatores é tratado como fixo, nos estudos de *Gage R&R* é comum admitir que o efeito dos fatores é aleatório, ou seja, que os níveis dos fatores são na verdade uma amostra aleatória dos níveis reais. Naturalmente, como ambos os fatores (operador e peça) são aqui tratados como aleatórios, a interação entre eles também será considerada como um fator aleatório (BURDICK; BORROR; MONTGOMERY, 2005). Ou seja:

$$\tau_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_p^2) \quad \beta_j \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_o^2) \quad (\tau\beta)_{ij} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_{0 \times p}^2)$$

Admita ainda que os efeitos de peça, operador e interação sejam variáveis aleatórias contínuas mutuamente independentes e que cada uma dessas variáveis aleatórias também seja independente do componente aleatório

2.2.2 Estimação dos Parâmetros

Segundo Rencher e Schaalje (2008), os parâmetros μ , τ_i , β_j e $(\tau\beta)_{ij}$ do modelo (6) são tradicionalmente estimados pelo Método dos Mínimos Quadrados Ordinários, minimizando:

$$Z = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r \varepsilon_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r \{Y_{ijk} - [\mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij}]\}^2 \quad (7)$$

Para isso deriva-se parcialmente a quantidade Z ou a soma de quadrado dos erros aleatórios em relação a cada um dos parâmetros e, em seguida, iguala-se cada uma dessas derivadas parciais a zero, obtendo assim o Sistema de Equações Normais ou SEN:

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial \tau_i} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial \beta_j} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial (\tau\beta)_{ij}} = 0$$

Para que a solução do SEN seja possível e determinável, é necessário impor algumas restrições paramétricas, conforme demonstrado a seguir:

$$\sum_{i=1}^p \tau_i = 0 \quad \sum_{j=1}^o \beta_j = 0 \quad \sum_{i=1}^p (\tau\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_{j=1}^o (\tau\beta)_{ij} = 0$$

Após a imposição dessas restrições e a resolução do SEN, os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários dos parâmetros do modelo são:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{por} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r Y_{ijk} = \bar{Y}_{...} \quad (8)$$

$$\hat{\tau}_i = \frac{1}{or} \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r Y_{ijk} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} \quad (9)$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{pr} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r Y_{ijk} - \hat{\mu} = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{...} \quad (10)$$

$$(\widehat{\tau\beta})_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \hat{\mu} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...} \quad (11)$$

2.2.3 Soma de Quadrados

Definidos os estimadores de Mínimos Quadrados Ordinários, é possível derivar os estimadores das somas de quadrados do modelo, conforme ilustrado a seguir. O leitor pode consultar as demonstrações completas em Montgomery (2000):

Quadro 2 – Estimadores das somas de quadrados dos fatores do modelo

$SQP = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r \hat{t}_i^2 = or \sum_{i=1}^p (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$
$SQO = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r \hat{\beta}_j^2 = pr \sum_{j=1}^o (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$
$SQI = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (\widehat{\tau\beta})_{ij}^2 = r \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})^2$
$SQE = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r \hat{\epsilon}_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$
$SQT = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \hat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^o \sum_{k=1}^r (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$

2.2.4 Esperanças de Quadrados Médios ou E(QM)

De acordo com Montgomery (2000), para construir as estatísticas dos testes para os fatores aleatórios da ANOVA é preciso conhecer os quadrados médios esperados. Nesse caso, utilizaremos um método indireto para isso, conforme ilustra o quadro abaixo:

Quadro 3 – Quadrados Médios Esperados para ANOVA com Fatores de Efeitos Aleatórios

F V	σ^2	$r\sigma_{0 \times P}^2$	$ro\sigma_P^2$	$rp\sigma_0^2$	E(QM)
O	X	X		X	$\sigma^2 + r\sigma_{0 \times P}^2 + rp\sigma_0^2$
P	X	X	X		$\sigma^2 + r\sigma_{0 \times P}^2 + ro\sigma_P^2$
O x P	X	X			$\sigma^2 + r\sigma_{0 \times P}^2$
E	X				σ^2

O algoritmo para obter essas E(QM) é estabelecido a seguir:

- i) Escreva as fontes de variação na primeira coluna do quadro e as respectivas componentes de variância na primeira linha;
- ii) Adicione na primeira linha do quadro, ao lado de cada componente variância, as letras faltantes no índice da respectiva componente, por exemplo, em σ_0^2 faltam as letras r e p , “ r ” referente as repetições do experimento e “ p ” referente aos níveis do fator peça;
- iii) Como todas as E(QM) são combinações lineares de σ^2 (MYERS; WEEL, 2003), adicione (representado por X) essa componente de variância na fórmula da EQM de todas as demais fontes de variação presentes no quadro;
- iv) Além de iii), para cada fonte de variação, adicione na fórmula de sua E(QM) a componente que possuir pelo menos uma das letras dessa fonte no índice. Por exemplo, para a EQ do fator O, deve-se incluir na fórmula $rp\sigma_0^2$ e $r\sigma_{0 \times P}^2$, pois essas duas componentes contêm, pelo menos uma vez, a letra O nos índices. Logo, temos que $E(QMO) = \sigma^2 + r\sigma_{0 \times P}^2 + rp\sigma_0^2$

2.2.4.1 Estatística do Teste F para Fatores de Efeitos Aleatórios

Com o conhecimento das esperanças de quadrados médios pode-se derivar uma estatística de teste cuja distribuição de probabilidades seja uma distribuição F central e exata. Mais especificamente, quando o efeito dos fatores é aleatório, não há o interesse em se testar hipóteses sobre a igualdade de médias, como no caso de

fatores de efeito fixo, e sim sobre a nulidade ou não das componentes de variância. O quadro abaixo apresenta um esquema que permite compreender como a estatística do teste F é definida, em função de uma razão de esperanças de quadrados médios, que, sob H_0 verdadeira, deve tender a unidade (como em um teste F básico para comparação de duas variâncias).

Quadro 4 - Estatística do Teste F para Fatores de Efeitos Aleatórios.

F.V.	E(QM)	Razão de E(QM)	Sob H_0 Verdadeira	Razão de E(QM)	Teste F
O	$\sigma^2 + pr\sigma_0^2 + r\sigma_1^2$	$\frac{E(QMO)}{E(QMI)} = \frac{\sigma^2 + pr\sigma_0^2 + r\sigma_1^2}{\sigma^2 + r\sigma_1^2}$	$H_0: \sigma_0^2 = 0$	$\frac{E(QMO)}{E(QMI)} = 1$	$\frac{QMO}{QMI}$
P	$\sigma^2 + or\sigma_p^2 + r\sigma_1^2$	$\frac{E(QMP)}{E(QMI)} = \frac{\sigma^2 + or\sigma_p^2 + r\sigma_1^2}{\sigma^2 + r\sigma_1^2}$	$H_0: \sigma_p^2 = 0$	$\frac{E(QMP)}{E(QMI)} = 1$	$\frac{QMP}{QMI}$
I	$\sigma^2 + r\sigma_1^2$	$\frac{E(QMI)}{E(QME)} = \frac{\sigma^2 + r\sigma_1^2}{\sigma^2}$	$H_0: \sigma_1^2 = 0$	$\frac{E(QMI)}{E(QME)} = 1$	$\frac{QMI}{QME}$
Erro	σ^2	-	-	-	-
Total	-	-	-	-	-

* Admita, por conveniência, que I = O x P ou a Interação do Fator Operador com o Fator Peça

2.2.5 Tabela da ANOVA

Por fim, é construída uma tabela, conhecida como a tabela clássica da ANOVA, que resume os principais resultados apresentados anteriormente. A construção dessa tabela envolve o cálculo dos quadrados médios (QM) amostrais, que são obtidos pela divisão de cada uma das somas de quadrado amostrais pelos seus respectivos graus de liberdade (GL), ou número de desvios independentes e que podem variar livremente.

Tabela 1 – Tabela ANOVA para um modelo com fatores de efeito aleatório

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	VALOR DE P
P	$p - 1$	SQP	QMP	$\frac{QMP}{QMI}$	$P\{F_{GL_p, GL_I} \geq F_{obs.p}\}$
O	$o - 1$	SQO	QMO	$\frac{QMO}{QMI}$	$P\{F_{GL_o, GL_I} \geq F_{obs.o}\}$
I	$(p - 1)(o - 1)$	SQI	QMI	$\frac{QMI}{QME}$	$P\{F_{GL_I, GL_E} \geq F_{obs.I}\}$
Erro	$po(r - 1)$	SQE	QME	-	-
Total	$por - 1$	SQT			

* Admita I = O x P ou a Interação do Fator Peça com Fator Operador.

Vale ressaltar que, especificamente, quando a interação não é significativa (valor de $p > \alpha$) deve-se ajustar um novo modelo (denominado como modelo reduzido) no qual esse termo é removido. Além disso, nessa situação, o teste F e o cálculo do valor de p para os fatores Operador e Peça devem ser conduzidos utilizando informações sobre a fonte de variação associada ao erro aleatório no lugar da fonte de variação associada a interação, ou seja, substituir QMI e GL_I por QME e GL_E . Naturalmente, o leitor também poderá chegar a essa conclusão se refizer o esquema do quadro 4 desconsiderando o termo de interação.

2.2.6 Estimação das componentes de variância

Tradicionalmente, nos modelos de Análise de Variância com fatores de efeitos aleatórios, as componentes de variância são estimadas pelo método dos momentos (SEARLE; CASELLA; McCULLOCH, 2006), igualando um momento populacional, no caso, a esperança de quadrado médio de um determinado fator, a um momento amostral, no caso, o quadrado médio do mesmo fator, estimado através da ANOVA, por meio dos dados observados. O quadro abaixo apresenta um resumo dos estimadores.

Quadro 5 – Estimação das componentes de variância via método dos momentos.

$E(QME) = QME$ $\hat{\sigma}^2 = QME$	$E(QMI) = QMI$ $\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2 = QMI$ $\hat{\sigma}_I^2 = \frac{QMI - QME}{r}$
$E(QMO) = QMO$ $\hat{\sigma}^2 + pr\hat{\sigma}_O^2 + r\hat{\sigma}_I^2 = QMO$ $\hat{\sigma}_O^2 = \frac{QMO - QMI}{pr}$	$E(QMP) = QMP$ $\hat{\sigma}^2 + or\hat{\sigma}_P^2 + r\hat{\sigma}_I^2 = QMP$ $\hat{\sigma}_P^2 = \frac{QMP - QMI}{or}$

* Admita, por conveniência, I = O x P ou a Interação entre o Fator Peça e o Fator Operador

Note que os estimadores das componentes de variância, que são variáveis aleatórias, não são independentes, e por isso existe uma ordem de estimação que deve ser seguida ou respeitada durante o procedimento, o que implica que a primeira componente a ser estimada deve ser a do erro, seguida pela componente da interação e, por fim, dos fatores operador e peça ou peça e operador. Analogamente ao teste F, na definição dos estimadores das componentes de variância, quando a interação não for significativa e o modelo reduzido for ajustado, o termo *QMI* deverá ser substituído pelo termo de *QME* na expressão final.

2.3 Intervalo de confiança para o índice R&R percentual

Uma alternativa para a construção de um intervalo de confiança para o índice R&R percentual é admitir a normalidade de seu estimador, isto é, admitir a normalidade de $\widehat{R\&R}$ e obter um intervalo assintótico ou aproximado para o verdadeiro valor do mesmo. Mais especificamente, nesse trabalho, para construção de um intervalo desse tipo, utilizou-se o método Delta multivariado. A ideia desse método é obter uma aproximação de primeira ordem em série de Taylor (vide Khuri, 2003) para o estimador $\widehat{R\&R}$ (%), que é uma função não linear do vetor de estimativas de componentes de variância ou de $\hat{\sigma}^2$, e estimar sua variância, mais detalhes sobre esse método estão apresentados no Apêndice A.

Dessa forma, de acordo com o algoritmo apresentado a seguir, será possível aproximar a função não linear de várias variáveis \hat{g} por uma função linear, e assim obter a variância (também aproximada, conseqüentemente) do estimador de interesse, necessária para construção do referido intervalo. Segue:

i) Defina a função não linear \hat{g} ou o estimador para o qual deseja-se obter uma aproximação para sua variância, neste caso:

$$\widehat{R\&R} = \hat{g} = g(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}_P^2) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_I^2 + \hat{\sigma}_O^2}{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_I^2 + \hat{\sigma}_O^2 + \hat{\sigma}_P^2}}$$

ii) Obtenha o vetor de derivadas parciais da função g (\hat{g}) com relação a cada uma das componentes de variância que o define e avalie essas derivadas parciais sob as respectivas estimativas (então obtenha \hat{g}), ou seja:

$$\hat{g} = [\hat{g}_1 \quad \hat{g}_2 \quad \hat{g}_3 \quad \hat{g}_4] = \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma^2} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_I^2} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_O^2} \quad \frac{\partial g}{\partial \sigma_P^2} \right] \Bigg|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

Em que:

$$g = g(\sigma^2, \sigma_I^2, \sigma_O^2, \sigma_P^2) = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma_I^2 + \sigma_O^2}{\sigma^2 + \sigma_I^2 + \sigma_O^2 + \sigma_P^2}}$$

E:

$$\sigma^2 = (\sigma^2, \sigma_I^2, \sigma_O^2, \sigma_P^2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}_P^2)$$

Portanto:

$$\hat{g}_1 = \left. \frac{\partial g}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2 + \sigma_P^2}} \right\} \Bigg|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{g}_2 = \left. \frac{\partial g}{\partial \sigma_1^2} \right|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_1^2} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2 + \sigma_P^2}} \right\} \Bigg|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{g}_3 = \left. \frac{\partial g}{\partial \sigma_0^2} \right|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2 + \sigma_P^2}} \right\} \Bigg|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{g}_4 = \left. \frac{\partial g}{\partial \sigma_P^2} \right|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_P^2} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_0^2 + \sigma_P^2}} \right\} \Bigg|_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

A derivadas foram calculadas com auxílio do site *WolframAlpha*, mais detalhes no Apêndice B. Note que após a derivação os resultados obtidos são:

$$\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \hat{g}_3 = \frac{1}{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_P^2} - \frac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2}{(\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_P^2)^2} \cdot 2 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_P^2}}$$

$$\hat{g}_4 = - \frac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2}{2 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_P^2}} (\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_P^2)^2}$$

iii) A partir dos resultados extraídos das derivadas parciais em ii), avaliadas sob o vetor de estimativas das componentes de variância, define-se o vetor transposto de \hat{g} , ou \hat{g}' :

$$\hat{g}' = [\hat{g}_1 \quad \hat{g}_2 \quad \hat{g}_3 \quad \hat{g}_4]_{(1 \times 4)}$$

$$\hat{\mathbf{g}}' = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \\ \hat{g}_4 \end{bmatrix}_{(4 \times 1)}$$

iv) Encontre a matriz de variâncias e covariâncias estimada ou avaliada sob o vetor de estimativas das componentes de variância, isso é, $\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{V}}(\hat{\sigma}^2)$:

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\mathbf{V}}(\hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} V(\hat{\sigma}^2) & Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_I^2) & Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_O^2) & Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_P^2) \\ Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}^2) & V(\hat{\sigma}_I^2) & Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_O^2) & Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_P^2) \\ Cov(\hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}^2) & Cov(\hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}_I^2) & V(\hat{\sigma}_O^2) & Cov(\hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}_P^2) \\ Cov(\hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}^2) & Cov(\hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}_I^2) & Cov(\hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}_O^2) & V(\hat{\sigma}_P^2) \end{bmatrix}_{\sigma^2 = \hat{\sigma}^2}$$

Em que:

$$V(\hat{\sigma}_j^2) = \frac{2(\sigma_j^2)^2}{f_j}, j = I, O, P, E$$

Admita que $\hat{\sigma}_E^2 = \hat{\sigma}^2$ e que f_j representa o número de graus de liberdade do j -ésimo quadrado médio, obtido na tabela da ANOVA. Para as covariâncias tem-se que:

$$Cov(\hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}^2) = Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_O^2) = 0$$

$$Cov(\hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}^2) = Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_P^2) = 0$$

$$Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}^2) = Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_I^2) = -\frac{2(\sigma^2)^2}{por(r-1)}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_O^2) = Cov(\hat{\sigma}_O^2, \hat{\sigma}_I^2) = \frac{1}{pr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_I^2, \hat{\sigma}_P^2) = Cov(\hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}_I^2) = \frac{1}{or^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2) = Cov(\hat{\sigma}_p^2, \hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{opr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

A demonstração completa dos resultados apresentados acima pode ser conferida com maiores detalhes no apêndice C. No apêndice D é possível verificar a matriz completa de variâncias e covariâncias.

v) A partir dos passos iii) e iv), e com alguma álgebra (LEHMANN; CASELLA, 1998), é possível mostrar que a variância estimada de \hat{g} ou, nesse caso, de $\widehat{R\&R}$, pode ser obtida a partir do seguinte produto matricial:

$$\hat{V}[\widehat{R\&R}] = \hat{V}[\hat{g}] = \hat{g} \hat{\Omega} \hat{g}^t$$

vi) De acordo com o valor obtido no passo v) e admitindo a normalidade de \hat{g} ou de $\widehat{R\&R}$, pode-se derivar, com confiança de $(1 - \alpha)\%$, o intervalo de assintótico para o verdadeiro valor de R&R (%):

$$P \left\{ \widehat{R\&R} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]} \leq R\&R \leq \widehat{R\&R} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]} \right\} = 1 - \alpha$$

Destaca-se que como o índice R&R (%) é uma quantidade que varia de 0 a 1, ou de 0% a 100%, pode-se admitir, sem perda de generalidades, que:

$$LI = \max \left[0, \widehat{R\&R} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]} \right]$$

$$LS = \min \left[\widehat{R\&R} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]}, 1 \right]$$

3. Material e Métodos

3.1 Obtenção dos dados

Os dados utilizados neste estudo referem-se a medições de densidade a seco de corpos-de-prova prismáticos, construídos a partir de material cerâmico. Basicamente, os corpos de prova ou as peças foram processadas (detalhes sobre esses procedimentos podem ser encontrados em Pinheiro, Barbosa e Mello, 2012) e, em seguida, foi realizada a medição da massa (em gramas) e do volume (em cm^3 , mediu-se o comprimento, a largura e a espessura das peças e em seguida foi calculado o produto desses valores para se obter o volume) das mesmas. Posteriormente, a variável de interesse (densidade a seco, em g/cm^3) foi calculada pela razão entre a massa e o volume obtido a partir de cada um dos corpos de prova. Adicionalmente, para a realização das medições seguiu-se algumas recomendações que são comuns nos estudos de *Gage R&R*:

i) O número de operadores, peças e repetições utilizados nesse estudo foi de, respectivamente, dois, dez e cinco. Isto é $o = 2, p = 10$ e $r = 5$. Segundo o MSA (2010), esses números são considerados adequados, já que para se ter um nível mínimo de confiabilidade nos resultados é necessário que o produto $o \times p \times r$ seja maior que quinze (15), e neste caso foi de cem (100). Além disso, esses valores são corroborados pelos estudos de Sweeney (2017) e Bueno (2018), que sugerem a utilização de pelo menos duas repetições ($r \geq 2$), três operadores ($o \geq 2$) e cinco peças ($p \geq 5$).

ii) As peças foram distribuídas aleatoriamente entre os operadores e cada um destes seguiu o mesmo procedimento para obtenção das medidas. Naturalmente, as medições ocorreram sem que estes soubessem que estavam medindo as mesmas peças. Isso foi feito para tentar minimizar o viés associado a memória dos operadores no que se refere às medidas obtidas na primeira repetição ou em repetições anteriores. O quadro 6 apresenta os resultados obtidos a partir das medições realizadas:

Quadro 6 - Medições repetidas da densidade após secagem (em g/cm³) de dez peças pelos operadores

Peça	Operador 1					Operador 2				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1,85	1,86	1,87	1,82	1,86	1,88	1,90	1,92	1,90	1,86
2	1,88	1,91	1,88	1,87	1,89	1,91	1,88	1,90	1,91	1,89
3	1,87	1,89	1,88	1,88	1,87	1,90	1,90	1,91	1,87	1,89
4	1,89	1,85	1,86	1,87	1,87	1,90	1,91	1,90	1,90	1,89
5	1,87	1,86	1,89	1,87	1,86	1,87	1,90	1,90	1,89	1,88
6	1,90	1,87	1,88	1,92	1,87	1,88	1,89	1,91	1,90	1,91
7	1,89	1,92	1,91	1,88	1,91	1,89	1,89	1,89	1,89	1,91
8	1,87	1,87	1,90	1,89	1,87	1,91	1,90	1,91	1,86	1,89
9	1,90	1,87	1,91	1,88	1,88	1,89	1,91	1,90	1,90	1,88
10	1,89	1,93	1,90	1,86	1,88	1,89	1,87	1,90	1,91	1,89

3.2 Procedimentos de Análise

O modelo da ANOVA com fatores de efeitos aleatórios descrito em (6) foi ajustado utilizando o *software* livre R (R CORE TEAM, 2020), através do pacote *Sixsigma* versão 0.10.3, utilizando a função *ss.rr* conforme sugerido por Cano, Moguerza e Redchuk, (2012). Adicionalmente, a referida função desse pacote já apresenta as estimativas de quadrados médios e os resultados para os testes F de hipóteses, bem como as estimativas das componentes de variância, obtidas pelo método dos momentos, e também do índice R&R (%). O quadro 7 apresenta os argumentos da função *ss.rr* do pacote *Sixsigma* do R e suas respectivas descrições. Já os códigos utilizados podem ser verificados no Apêndice E.

Quadro 7 - Atributos da função *ss.rr* do pacote *SixSigma* do *software R*

Atributo	Descrição
var	Variável medida
part	Fator Peça
appr	Fator Operador
Lsl	Valor numérico do limite inferior especificado usado com USL para calcular a variação do estudo com % de tolerância
usl	Valor numérico do limite superior especificado usado com USL para calcular a variação do estudo com % de tolerância
sigma	Valor numérico para o número de desvios padrão a serem utilizados no cálculo da variação do estudo
tolerance	Valor numérico para a tolerância
data	Dataframe contendo as variáveis
main	Título principal para a saída gráfica
sub	Legenda para a saída gráfica
alphaLim	Valor limite para considerar a interação (padrão 0,05)
errorTerm	Qual termo do modelo deve ser usado como termo de erro (para o modelo com interação)
digits	Número de dígitos decimais para saída
method	Caractere para especificar o tipo de análise a ser executada, "crossed" (padrão) ou "nested"
print_plot	Se TRUE (padrão) as plotagens são impressas. Altere para FALSE para evitar a impressão de plotagens.
Signifstars	Se FALSE (padrão) as estrelas de significância são omitidas. Altere para TRUE para permitir a impressão de estrelas.

3.3 Simulação de dados

Para verificar se a variância estimada pelo método Delta seria uma boa aproximação para a verdadeira variância do estimador de R&R (%) ou para $\widehat{R\&R}$ (%) foi realizado, à posteriori, um estudo de simulação de dados. Neste, foram realizadas 1000 simulações ou gerados 1000 bancos de dados hipotéticos no *software* livre R (o *script* está apresentado no Apêndice F), em que cada um desses bancos de dados foi gerado a partir de um cenário similar ao cenário dos dados originais ou do estudo real, isto é, considerando $o = 2$, $p = 10$ e $r = 5$.

Adicionalmente, os dados foram simulados a partir de um modelo de Análise de Variâncias (ANOVA) que admitia apenas os efeitos principais de operador e de peça, ambos independentes, normais, com média nula, variância constante e equivalente as estimativas de Mínimos Quadrados Ordinárias obtidas no estudo real. Destaca-se que o erro aleatório do modelo foi simulado também sob uma distribuição

normal, independente dos efeitos de peça e operador e admitindo variância constante e equivalente a variância estimada para a repetibilidade. Ou seja:

$$\alpha_i \sim N(0, \hat{\sigma}_{\text{Peça}}^2)$$

$$\beta_j \sim N(0, \hat{\sigma}_{\text{Reprodutibilidade}}^2), \text{ ou nesse caso, } \beta_j \sim N(0, \hat{\sigma}_{\text{Operador}}^2)$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \hat{\sigma}_{\text{Repetibilidade}}^2)$$

Por fim, para cada simulação foi ajustado o modelo da ANOVA, estimado o índice R&R (%) e coletado o valor pontual de $\widehat{R\&R}$ (%). Desta forma foi estabelecido um conjunto composto por 1000 valores ou por 1000 estimativas de R&R (%), o que permitiu acessar a distribuição empírica desse estimador e, principalmente, avaliar a sua variância amostral. Por fim, o valor da variância amostral dos 1000 valores de $\widehat{R\&R}$ (%) foi comparada com a estimativa de variância obtida via método Delta Multivariado.

4. Resultados e Discussão

4.1 Estudo de *Gage R&R* pelo método ANOVA

Com os dados apresentados no Quadro 6, o modelo da ANOVA foi ajustado e os resultados da análise podem ser visualizados na Tabela 2.

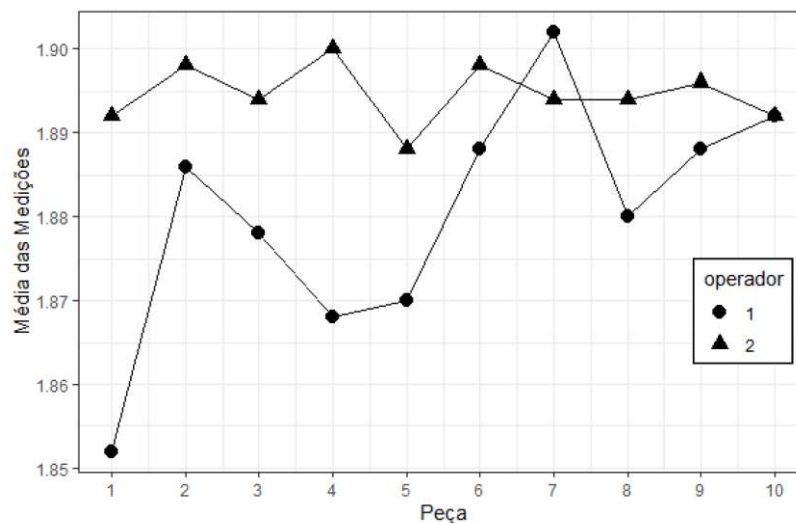
Tabela 2 – ANOVA para dois fatores com interação

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Valor de p
P	9	0,00529	0,000588	1,205	0,3929
O	1	0,00504	0,005040	10,328*	0,0106
O x P	9	0,00439	0,000488	1,914	0,0616
E	80	0,02036	0,000255		
Total	99	0,03507			

* Significativo a 5% de probabilidade

Observa-se inicialmente que a interação entre os fatores Operador e Peça não foi significativa a 5% de probabilidade ($p = 0,0616$), logo, esse termo será removido e o modelo reduzido será ajustado. Para corroborar esse resultado, a Figura 2 ilustra o gráfico da interação entre os fatores Operador e Peça e, como pode ser observado, as linhas referentes aos operadores são paralelas para praticamente todas as peças, podendo-se admitir que os cruzamentos observados foram causados pelo acaso e que não se repetiriam se o experimento pudesse ser conduzido outras vezes.

Figura 2 – Gráfico de Interação para o modelo completo



Como mencionado anteriormente, os resultados do modelo reduzido estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – ANOVA para dois fatores sem interação

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F	Valor de p
Peça	9	0,00529	0,000588	2,115*	0,0362
Operador	1	0,00504	0,005040	18,129*	0,0000
Erro	89	0,02475	0,000278		
Total	99	0,03507			

* significativo a 5% de probabilidade

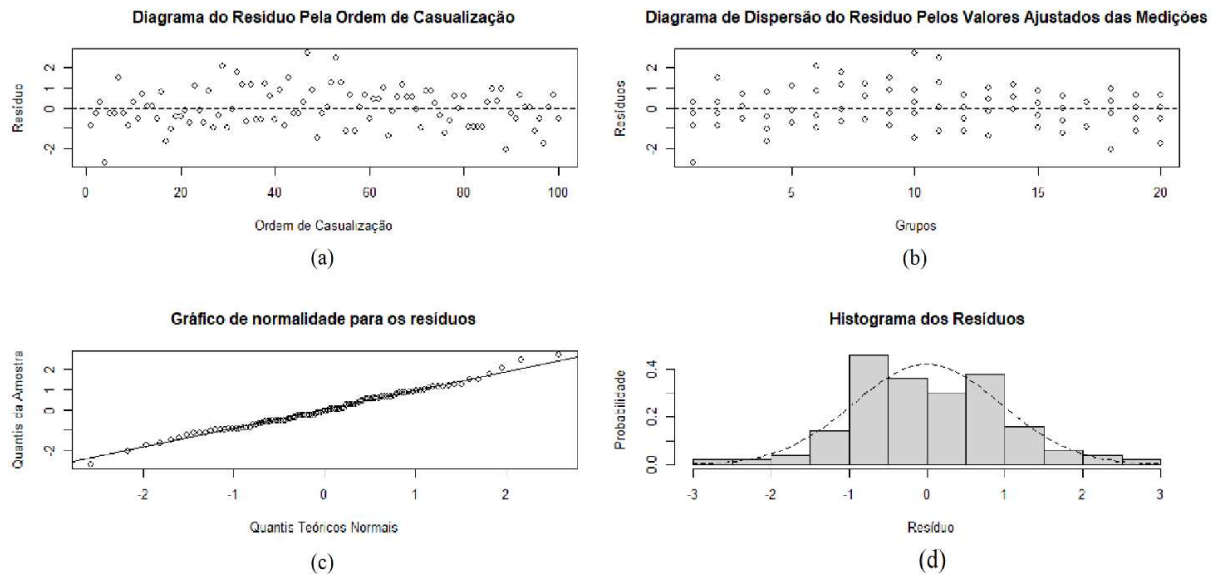
Note que agora tanto o fator Peça quanto o fator Operador foram significativos a 5% de probabilidade (Valor de p < 0,05), com valor de p, respectivamente, de 0,0362 e 0,0000, ambos menores do que 0,05. Isso indica que, de forma independente, pode-se concluir que existe variabilidade relevante em torno da média das medições obtidas em diferentes peças e também em torno da média das medições obtidas por diferentes operadores, uma vez que a hipótese nula ($H_0: \sigma_p^2 = 0$ e $H_0: \sigma_o^2 = 0$) do teste F foi rejeitada para ambos os casos, o que permite concluir em favor de H_1 , ou seja, que $\sigma_p^2 > 0$ e também que $\sigma_o^2 > 0$. Logo, esses resultados fornecem indícios de que o processo de produção das peças pode estar fora de controle estatístico (seria preciso um estudo mais específico para validar esse indício) e também de que os operadores podem não estar devidamente preparados ou treinados para realizar as medições.

4.1.1 Análise e Diagnóstico dos resíduos do modelo

Como o estudo de *Gage R&R* foi conduzido através do método da ANOVA, para que sua aplicação seja válida, é necessário avaliar as pressuposições do modelo estatístico. A Figura 3 ilustra os gráficos de diagnóstico dos resíduos padronizados².

$$^2 \hat{\varepsilon}_i^* = \frac{\hat{\varepsilon}_i - \mu_{\hat{\varepsilon}}}{\sqrt{\sigma_{\hat{\varepsilon}}^2}} = \frac{\hat{\varepsilon}_i - 0}{\sqrt{QMR}} = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\sqrt{QMR}}$$

Figura 3 – Análise das pressuposições do método ANOVA.



Na Figura 3a observa-se o diagrama de dispersão dos resíduos plotados contra a ordem de casualização. Verifica-se que os pontos estão dispersos aleatoriamente em torno da linha média central, não apresentando nenhum tipo de tendência. Logo, conclui-se que os erros experimentais são independentes, o que implica que o efeito dos tratamentos ou dos grupos (combinações entre operadores e peças) independe da ordem em que as medições foram realizadas. Adicionalmente, na Figura 3b, o mesmo comportamento foi verificado para o diagrama de dispersão dos resíduos, agora plotados contra os valores ajustados das medições, o que permitiu concluir sobre a homogeneidade das variâncias dos erros experimentais e, conseqüentemente, dos tratamentos ou grupos.

Por fim, na Figura 3c e 3d, a normalidade dos erros aleatórios foi verificada de acordo com o QQ-plot e o histograma de probabilidades, respectivamente. Note pela Figura 3c que ao comparar os quantis da distribuição acumulada empírica (dos dados amostrais) com os quantis da distribuição acumulada de uma curva normal padrão, o gráfico resultante foi similar a uma linha reta, o que demonstra um ajuste adequado dos resíduos a mesma e, conseqüentemente, fortes indícios de normalidade dos erros. A Figura 3d corrobora essa conclusão, já que o histograma apresenta forma de sino e a curva da função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão (linha tracejada) se ajusta adequadamente aos dados.

4.2 Estimação Pontual das Componentes de Variância e do índice R&R (%)

Com os valores dos quadrados médios amostrais obtidos na Tabela 3 foram estimadas as componentes de variância, conforme já explicado anteriormente. A Tabela 4 apresenta esses resultados.

Tabela 4 – Resultado do estudo de *Gage R&R* pelo método da ANOVA

Fonte de Variação	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}^2 / \hat{\sigma}_{Total}^2 (\%)$
Repetibilidade	$2,780 \times 10^{-4}$	0,01667	68,78
Reprodutibilidade	$9,526 \times 10^{-5}$	0,00976	23,57
Operador	$9,526 \times 10^{-5}$	0,00976	23,57
Peça	$3,090 \times 10^{-5}$	0,00556	7,65
Sistema de Medição	$3,733 \times 10^{-4}$	0,01932	92,36
Variação Total	$4,042 \times 10^{-4}$	0,02010	100

Logo, de acordo com as estimativas das componentes de variância apresentadas na segunda coluna da Tabela 4, o valor estimado do índice R&R percentual é:

$$\widehat{R\&R}(\%) = \frac{\hat{\sigma}_{\text{Sistema de Medição}}}{\hat{\sigma}_{\text{Total}}} \times 100$$

$$\widehat{R\&R}(\%) = \frac{\sqrt{3,733 \times 10^{-4}}}{\sqrt{4,042 \cdot 10 \times 10^{-4}}} \times 100 = \frac{0,01932}{0,02010} \times 100 = 96,12$$

Esse resultado, segundo as informações do Quadro 1, sugere que o sistema de medição é inadequado, já que o valor estimado do índice R&R (%) é muito superior ao valor de 30%, assemelhando-se aos resultados obtidos por DELGADO *et al.* (2018), os quais calcularam o índice R&R (%) para o sistema de medição de uma empresa de embalagens e encontraram um valor de 95,73%, chegando também a mesma conclusão sobre a inadequabilidade do sistema.

Adicionalmente, pela análise da terceira coluna da Tabela 4, pode-se observar que a maior parte da variabilidade total dos dados está associada a Repetibilidade (68,78%) ou a causas/fatores aleatórios, que não tiveram seus efeitos incluídos no

modelo, o que é algo crítico e que deve ser investigado. Já a Reprodutibilidade, nesse caso, representada apenas pela componente de variação associada ao fator operador, contribuiu com cerca de 23,57% da variação total, sendo após a repetibilidade, a segunda fonte de variação de maior representatividade. Esses percentuais podem ser considerados altos se comparados com o percentual de contribuição associado a componente de variância do fator Peça (7,65%). Por isso, aparentemente, há evidências de que o desajuste do sistema de medição está sendo causado, principalmente, por causas aleatórias e por falhas dos operadores, já que o fator peça, embora significativo, apresentou baixa contribuição.

Nesse sentido, de acordo com MSA (2010), algumas das principais causas aleatórias, desconhecidas ou não mensuradas e cujos efeitos não foram incluídos no modelo, podem estar associadas a:

- i. Necessidade de manutenção ou troca do dispositivo de medição;
- ii. Condições inadequadas (posição, fixação, acabamento) para realizar as medições.

Como a reprodutibilidade também contribuiu de forma significativa na variação do sistema de medição, é importante que as possíveis causas associadas aos problemas de medição errônea dos operadores também sejam investigadas. Pode-se citar:

- i. Necessidade de treinamento dos operadores para que os mesmos possam utilizar e conseguir ler corretamente o dispositivo de medição;
- ii. Utilização de algum acessório que auxilie os operadores ou que simplifique/facilite o procedimento de medição.

4.3 Intervalo de confiança para o índice R&R (%)

4.3.1 Intervalo de confiança para o índice R&R (%) via Método Delta Multivariado

Os cálculos para o intervalo assintótico do índice R&R (%), com confiança de 95% e obtido via Método Delta Multivariado, são detalhados a seguir:

$$\hat{\mathbf{g}} = [\hat{g}_1 \quad \hat{g}_2 \quad \hat{g}_3] = [98,4221 \quad 98,4221 \quad -1188,9011]$$

$$\hat{\mathbf{g}}' = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98,4221 \\ 98,4221 \\ -1188,9011 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{\Omega}} = \begin{bmatrix} 1,7367 \times 10^{-9} & -3,4734 \times 10^{-11} & -1,7367 \times 10^{-10} \\ -3,4734 \times 10^{-11} & 1,8149 \times 10^{-8} & 3,4734 \times 10^{-12} \\ -1,7367 \times 10^{-10} & 3,4734 \times 10^{-12} & 2,1218 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\hat{V}[\widehat{R\&R}] = \hat{\mathbf{g}} \hat{\mathbf{\Omega}} \hat{\mathbf{g}}' \approx 0,0005317$$

Por fim:

$$IC_{1-\alpha\%}(\widehat{R\&R}) = \left[\widehat{R\&R} - z_{\alpha} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]}; \widehat{R\&R} + z_{\alpha} \sqrt{\hat{V}[\widehat{R\&R}]} \right]$$

$$IC_{95\%}(\widehat{R\&R}) = \left[0,9612 - 1,96\sqrt{5,317 \times 10^{-4}}; 0,9612 + 1,96\sqrt{5,317 \times 10^{-4}} \right]$$

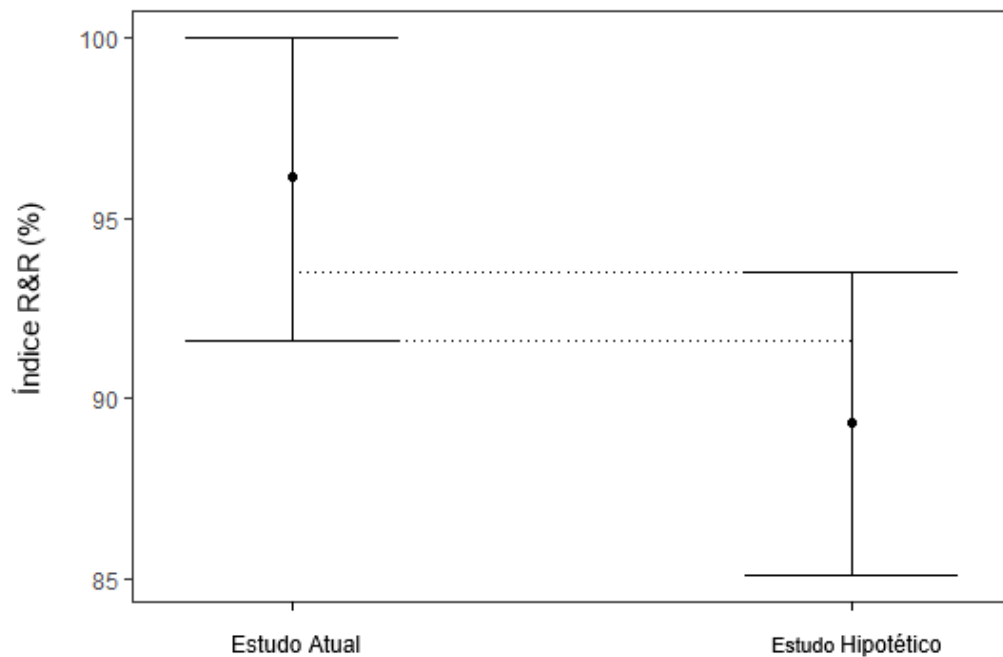
$$IC_{95\%}(\widehat{R\&R}) = [0,916; 1,000] \text{ ou } [91,6\%; 100\%]$$

Através dos resultados obtidos pelo Método Delta, observou-se que o intervalo apresentado corrobora, probabilisticamente, o resultado das estimativas pontuais, sobre a inadequabilidade do sistema de medição, já que tanto o limite inferior quanto o limite superior do mesmo são muito maiores do que 30%.

No entanto, a critério de ilustração e a título de uma possível aplicação, considere uma situação hipotética em que medidas corretivas tenham sido realizadas no sistema de medição em questão e um novo estudo tenha sido conduzido. Admita que agora, no novo estudo, a estimativa pontual do índice R&R (%) tenha sido de 89,31%, ou seja, levemente inferior à do estudo atual, de 96,12%. Admita também que

o intervalo de confiança para o índice R&R (%) desse novo estudo tenha fornecido valores de LI = 0,8511 (85,11%) e LS = 0,9351 (93,51%). Portanto, ao comparar o intervalo de confiança dos dois estudos (atual e o hipotético), seria possível concluir que apesar da estimativa pontual do índice R&R (%) do novo estudo demonstrar uma possível melhoria do sistema de medição, de acordo com a comparação dos intervalos de confiança, essa afirmação não seria válida, pois verificaríamos uma sobreposição dos mesmos, conforme apresentado na Figura 4, o que sugere que os verdadeiros valores (ou valores populacionais de R&R (%)), de ambos os estudos, seriam na verdade iguais.

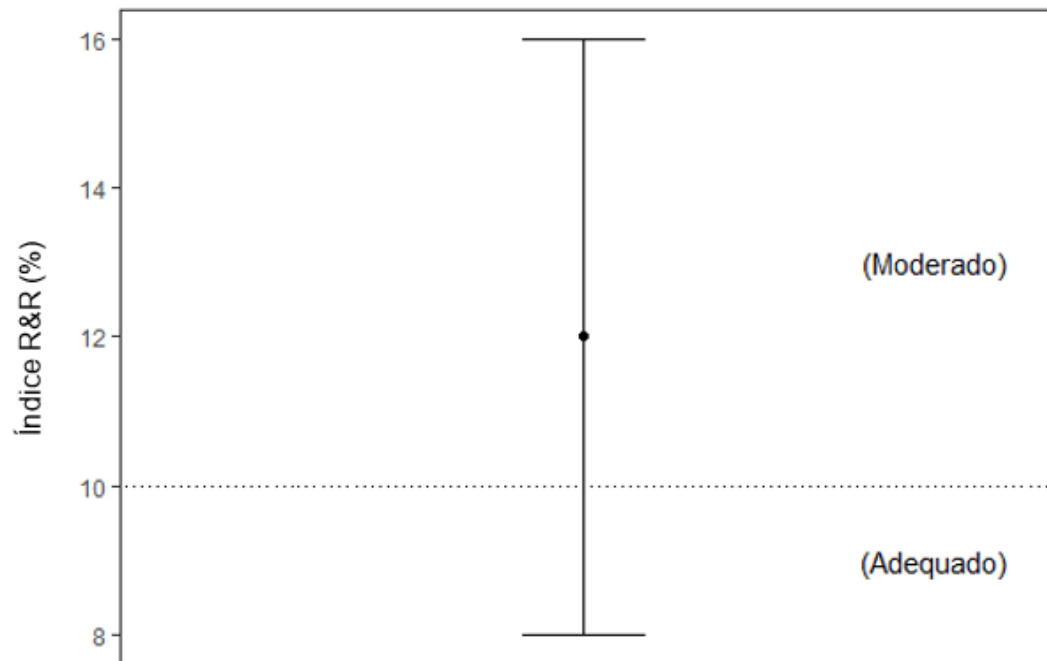
Figura 4 – Intervalo de confiança para o estudo de *Gage* R&R atual e hipotético.



Além disso, a utilização de intervalos de confiança para o índice R&R (%) pode proporcionar uma tomada de decisão, em relação a classificação do sistema de medição, mais assertiva ou baseada em probabilidade. Isto é, pode-se agora testar hipóteses sobre particulares valores de R&R (%). Por exemplo, considere que a estimativa pontual para o índice R&R (%) de um sistema de medição tenha sido de 12%, e, portanto, conforme o quadro 1, o sistema de medição seria considerado moderadamente adequado. No entanto, se os limites inferior e superior de seu intervalo de confiança são 8% e 16%, respectivamente, seria possível afirmar que o

sistema de medição na verdade (ou a nível populacional) é adequado, já que o valor de 10% pertence ao intervalo de confiança estabelecido. Dessa forma, recomenda-se também a utilização dos intervalos de confiança quando as estimativas pontuais estiverem próximas aos limites de classificação fornecidos no quadro 1. Veja o exemplo ilustrativo a seguir:

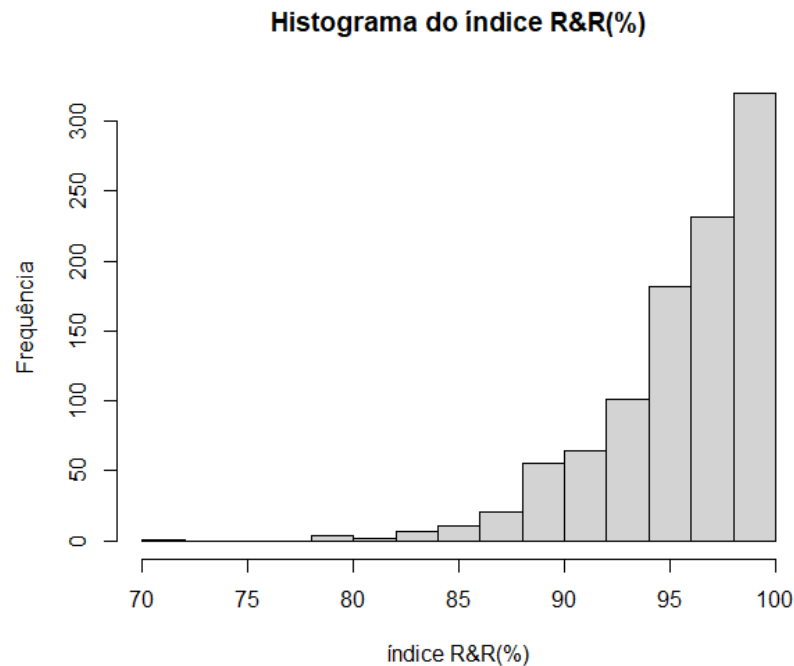
Figura 5 – Teste de hipótese sobre o parâmetro R&R (%) via Intervalo de confiança.



4.3.2 Simulação de dados

Através da simulação dos dados foi possível construir a distribuição amostral do estimador do índice R&R (%), conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Histograma da distribuição de R&R (%)



É possível verificar que nesse caso, para o modelo admitido e para os dados gerados, a distribuição amostral de $\widehat{R\&R}$ foi assimétrica à esquerda, uma vez que grandes valores de $\widehat{R\&R}$ apareceram com maior frequência. Esse é um ponto negativo, pois a construção do intervalo de confiança no estudo real, com a variância do estimador obtida via método Delta Multivariado, foi realizada sobre a premissa de normalidade assintótica, o que não se verificou na prática. Os resultados obtidos para a variância estimada e para os limites de confiança (intervalo normal assintótico e percentis da distribuição empírica) estão apresentados no Quadro 8:

Quadro 8 – Comparação resultado via Método Delta versus resultado simulação

Método	$V(\widehat{R\&R})$	$LI (2,5\%)$	$LS (97,5\%)$
Delta Multivariado	$5,317 \times 10^{-4}$	0,916	1,00
Simulação	$1,285 \times 10^{-3}$	0,873	1,00

Portanto, pode-se concluir, inicialmente, que o método Delta Multivariado subestimou a variância do estimador do índice R&R (%). Isso sugere que uma aproximação de ordem superior a 1 em série Taylor poderia ter sido empregada, no intuito de tentar obter maior precisão para a estimativa de variância. No entanto,

um ponto positivo é que o método Delta subestimou a variância e não a superestimou, o que poderia ser mais crítico. Adicionalmente, mesmo com essa diferença e com uma distribuição assimétrica à esquerda, os limites de confiança estimados com a variância obtida e sob normalidade foram muito próximos dos limites de confiança definidos pelos percentis 2,5% e 97,5% da distribuição empírica, o que foi um resultado interessante e que valida a aplicação do método Delta Multivariado.

5. CONCLUSÃO

No presente trabalho derivou-se um intervalo de confiança assintótico para o índice R&R (%) através da utilização do Método Delta Multivariado, que se mostrou uma boa alternativa metodológica para esse fim, pois mesmo subestimando a variância do estimador de interesse, produziu limites de confiança próximos aos limites definidos pelos percentis 2,5% e 97,5% da distribuição empírica do estimador.

Adicionalmente, observou-se que a utilização dos intervalos de confiança estabelecidos é interessante pois permite a realização de comparações estatísticas entre sistemas de medições e a testagem de hipóteses sobre particulares valores de R&R (%), o que favorece a tomada de decisão, uma vez que se possui informações probabilísticas sobre o verdadeiro valor de R&R (%), que poderiam auxiliar no momento de classificar o sistema de medição em adequado, moderado ou inadequado.

Referências Bibliográficas

- BILODEAU, M. *Anova of Balanced Variance Component Models*. arXiv:2103.13202 [math.ST], 2021.
- BUENO, Jéssica Naihara Nunes. Implantação da Ferramenta Gage R&R em uma Indústria de Embalagens. **Revista de Ciências Exatas e Tecnologia**, Editora e Distribuidora Educacional, v. 13, n. 13, p. 38-46, 2018.
- BURDICK, R.K.; BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C. *A review of methods for measurement systems capability analysis*. **Journal of Quality Technology**, v.35, p.342-354, 2003.
- BURDICK, R.K.; BORROR, C.M.; MONTGOMERY, D.C. *Design and analysis of gauge R&R studies: making decisions with confidence intervals in random and mixed ANOVA models*. **American Statistical Association and the Society for industrial and Applied Mathematics**, 2005.
- CANO, EMILIO L.; M. MOGUERZA, JAVIER; REDCHUK, ANDRÉS. *Six Sigma with R: Statistical Engineering for Process Improvement*. New York: **Springer-Verlag**, 2012.
- CASELLA, G.; BERGER, R. *Statistical Inference*. 2. ed. Pacific Grove, CA: **Thomson Learning**, 2002.
- CUDNEY, E.; ELROD, C. *A comparative analysis of integrating lean concepts into supply chain management in manufacturing and services industries*. **International Journal of Lean Six Sigma**, v.2, n.1, p. 5-22, 2011.
- DELGADO, J. M. C. *et al.* ANÁLISE DE REPETIBILIDADE E REPRODUTIBILIDADE PARA SISTEMAS DE MEDIÇÕES E ATRIBUTOS EM UMA EMPRESA QUE PRODUZ EMBALAGENS. **Enegep**, 2018
- DESHPANDE, Atharva. *et al.* Measurement System Scrutiny using Gage R&R: Case Study. **International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)**. v.7, p. 4224 – 4229, 2020.
- DOLEZAL, K. K.; BURDICK, R. K.; BIRCH, N. J. *Analysis of a two-factor R&R study with fixed operators*. **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 2, p. 163-170, 1998.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R.J. *An Introduction to the Bootstrap*. **Chapman and Hall: New York**, 1993.
- ERDMANN, T.P.; DOES, R.J.M.M.; BISGAARD, S. *Quality quandaries: a gage R&R study in a hospital*. **Quality Engineering**, v.22, p.46-53, 2010.
- GONÇALVES JÚNIOR, Armando Albertazzi; SOUSA, André R. de. **Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial**. Manole, 2017.

JANIGA, Ivan. *MEASUREMENT SYSTEM STUDIES USING ANOVA*. Faculty of Mechanical Engineering – Slovak University of Technology in Bratislava. 17th Conference on Applied Mathematics, **APLIMAT**, 2018.

KHURI, A. I. *Advanced Calculus with Applications in Statistics*. 2. ed. Hoboken: **John Wiley & Sons**, 2003.

KLAPUT, P. *et al. Problems of application of Measurement System Analysis (MSA) in metallurgical production*. **Metallurgija**. v. 3, 2016.

LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. *Theory of Point Estimation*. 2. ed. Nova York: **Springer-Verlag**, 1998.

LI, M. -H. C. AL-REFAIE, A. *Improving Wooden Parts' Quality By Adopting DMAIC Procedure*. **Quality and Reliability Engineering International**. v. 24, n. 3, p. 351–360, 2008.

LOPILATO, A. C.; CARTER, N. T.; WANG, M. *Updating Generalizability Theory in Management Research: Bayesian Estimation of Variance Components*. **Journal of Management**. v.41, n. 2, p.692–717, 2015.

MITCHELL, M. L.; JOLLEY, J. M. *Research Design Explained*, 7. ed. Califórnia: **Wadsworth Publishing**, 2010.

MOOD, A.; GRAYBILL, F.; BOES, D. *Introduction to the Theory of Statistics*. 3. ed. New York: **McGraw-Hill**, 1974.

MONTGOMERY, D. C. *Design and analysis of experiments*. 5. ed. Arizona: **Wiley**, 2000.

MONTGOMERY, D. C. *Introduction of Statistical Quality Control*. 7. ed. Arizona: **Wiley**, 2012.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER; G. C. *GAUGE CAPABILITY AND DESIGNED EXPERIMENTS. PART I: BASIC METHODS*, **Quality Engineering**, v.6, n.1, p.115-135, 1993a.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *GAUGE CAPABILITY ANALYSIS AND DESIGNED EXPERIMENTS. PART II: EXPERIMENTAL DESIGN MODELS AND VARIANCE COMPONENT ESTIMATION*. **Quality Engineering**. v. 6, n. 2, p. 289-305, 1993b.

MSA - *Measurement Systems Analysis. Reference Manual*. 4. ed. **Chrysler Corp., Ford Motor Corp., General Motors Corp.**, 2010.

MYERS, J. L.; WELL, A. D. *Research Design and Statistical Analysis*. 2. ed. Mahwah: **LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES**, 2003.

NAMALA, Kiran. *Designing and Setting up a Process for Assessing Measurement System's Capability. Culminating Projects in Mechanical and Manufacturing Engineering*. n. 67, 2008.

PALADINI, Edson Pacheco. **Gestão Estratégica da Qualidade**. São Paulo: Atlas, 2009.

PINHEIRO, B. C. A.; BARBOSA, E. C.; MELLO, M. V. Análise do parâmetro R&R de um processo de medição de densidade após secagem de corpos-de-prova de revestimento cerâmico para piso. **EMEPRO**, p. 1-9, 2012.

R CORE TEAM. ***R: A language and environment for statistical computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing***, 2020. Disponível em: <http://www.r-project.org>. Acesso em: 15 junho 2021.

RENCHER, Alvin C.; SCHAALJE, G. Bruce. *Linear Models in Statistics*. **Wiley**. 2. ed. 2008.

SEARLE, SHAYLE R.; CASELLA, GEORGE; McCULLOCH, CHARLES E. *Variance Components*. Hoboken: **John Wiley and Sons**, 2006.

SELEME, Robson. **Controle da Qualidade: as ferramentas essenciais**. Curitiba: Ilepex, 2008.

SMITH, Rathel R. Dick; MCCRARY, S.W.; CALLAHAN, R. Neal. *Gauge repeatability and reproducibility studies and measurement system analysis: A multimethod exploration of the state of practice*, **J. Ind. Technol.** n.23, p. 1-12, 2007.

SWEENEY, S. K. *Gage Capability Case Study in a Quality Control Course*. **American Society for Engineering Education**, 2017.

WANG, F. K.; LI, E. *Confidence intervals in repeatability and reproducibility using the Bootstrap method*. **Total Quality Management & Business Excellence**, v.14, n.3, p.341–354, 2003.

WERKEMA, M. *Avaliação da Qualidade de Medidas*. 1 ed. Belo Horizonte: **FCO**, 1996.

APÊNDICE A - Método Delta Multivariado

Segundo Casella e Berger (2002), o Método Delta Multivariado é utilizado para obter a variância aproximada de uma função não linear. Isso é realizado, inicialmente, por meio da linearização da função não linear de interesse, através de uma aproximação em primeira ordem em série de Taylor para a respectiva função (vide Khuri, 2003) e, posteriormente, a aplicação de propriedades de variância. Admita que:

$$g = g(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{e} \quad \hat{g} = g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Com:

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)'$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)'$$

Dito isso, seja g é uma função continuamente diferencial no ponto $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, o teorema de Taylor afirma que é possível escrever a função g como série de potência infinita:

$$g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx g(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{k=1}^{n-1} g^k(\boldsymbol{\theta}) \frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})}{k!} + R_n \quad R_n = g^n(\boldsymbol{\theta}_0) \frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})}{n!}$$

em que $\boldsymbol{\theta} < \boldsymbol{\theta}_0 < \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Se $R_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então, têm-se a série de Taylor,

$$g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx g(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{k=1}^{n-1} g^k(\boldsymbol{\theta}) \frac{(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})}{k!}$$

a aproximação de primeira ordem em série de Taylor para g é dada por:

$$g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx g(\boldsymbol{\theta}) + \dot{g}(\boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

onde $\dot{g}(\theta)$ é um vetor com as primeiras derivadas parciais avaliadas no ponto θ ,

$$\dot{g}(\theta) = g^{(1)}(\hat{\theta}) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta'} = \left[\frac{\partial g}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial \theta_r} \right]$$

Considerando que $E[\hat{\theta}] = \theta$ e aplicando $E[g(\hat{\theta})]$ em (1) tem-se que:

$$E[g(\hat{\theta})] \approx E[g(\theta) + \dot{g}(\theta)(\hat{\theta} - \theta)]$$

$$E[g(\hat{\theta})] \approx E[g(\theta)] + E[\dot{g}(\theta)(\hat{\theta} - \theta)]$$

$$E[g(\hat{\theta})] \approx g(\theta) + \dot{g}(\theta)E[(\hat{\theta} - \theta)]$$

$$E[g(\hat{\theta})] \approx g(\theta)$$

Dessa forma, a variância aproximada de $g(\hat{\theta})$ será:

$$V[g(\hat{\theta})] = E\{g(\hat{\theta}) - E[g(\hat{\theta})]\}^2$$

Substituindo (1) e (2) em $V[g(\hat{\theta})]$:

$$V[g(\hat{\theta})] = E[g(\theta) + \dot{g}(\theta)(\hat{\theta} - \theta) - g(\theta)]^2$$

$$V[g(\hat{\theta})] = E[\dot{g}(\theta)(\hat{\theta} - \theta)]^2$$

De acordo com a teoria de álgebra de matrizes e vetores, tem-se que:

$$V[g(\hat{\theta})] = \dot{g}(\theta)E[(\hat{\theta} - \theta)]^2 \dot{g}(\theta)'$$

$$V[g(\hat{\theta})] = \dot{g}(\theta) V(\hat{\theta}) \dot{g}(\theta)'$$

$$V[g(\hat{\theta})] = \dot{g} \Omega \dot{g}'$$

Como o valor real dos parâmetros é desconhecido, substitui-se os mesmos pelas suas respectivas estimativas (Método *plug-in*). Portanto, a variância estimada de $g(\hat{\theta})$, isto é, $\hat{V}[g(\hat{\theta})]$, pelo Método Delta é:

$$\hat{V}[g(\hat{\theta})] \approx \hat{\mathbf{g}} \hat{\mathbf{\Omega}} \hat{\mathbf{g}}' \quad (3)$$

onde

$$\hat{\mathbf{g}} = \dot{g}(\hat{\theta}) = g^{(1)}(\hat{\theta}) = \left. \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta'} \right|_{\theta = \hat{\theta}}$$

APÊNDICE B – Resolução de Derivadas com *WolframAlpha*

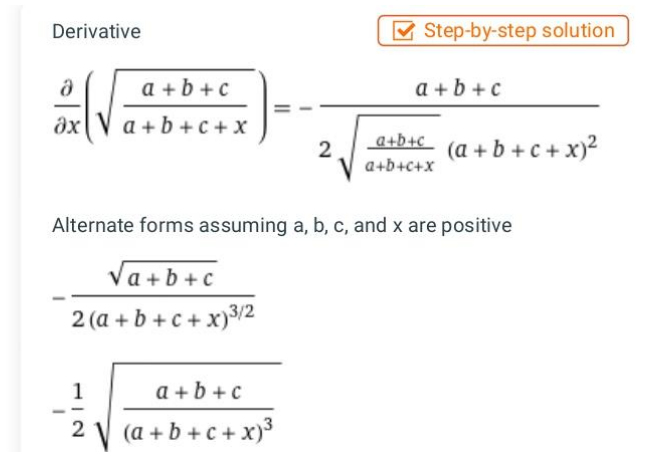
Para encontrar a solução das derivadas parciais utilizou-se a plataforma gratuita Wolfram Alpha (<https://www.wolframalpha.com/>). Dentro do site na página inicial pesquisou-se por “*derivate*”, em seguida, a função a ser derivada foi inserida no campo “*function to differentiate*” e o botão “*compute*” foi acionado. A Figura 7 apresenta detalhes sobre isso. Para ilustrar, utilizou-se a função \hat{g}_4 apresentada no referencial teórico, como não há a opção para inserção das componentes de variâncias, elas foram substituídas por letras ($a = \hat{\sigma}^2$, $b = \hat{\sigma}_1^2$, $c = \hat{\sigma}_0^2$ e $d = \hat{\sigma}_p^2$).

Figura 7 – Inserção de função para derivação no site *WolframAlpha*

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, there are navigation links: "UPGRADE TO PRO", "APPS", "TOUR", and a "Sign in" button. Below this is a promotional banner for "Volume of a cylinder? Piece of cake." with a "Unlock Step-by-Step" link and a colorful illustration of party characters. The WolframAlpha logo is prominently displayed in the center. Below the logo is a search bar containing the word "derivative". Underneath the search bar are several utility buttons: "NATURAL LANGUAGE", "MATH INPUT", "EXTENDED KEYBOARD", "EXAMPLES", "UPLOAD", and "RANDOM". The main content area is divided into two columns. The left column contains a text box with the instruction: "Assuming 'derivative' refers to a computation | Use as a general topic or referring to a mathematical definition or a word or referring to a course app instead". Below this is a section titled "Computational Inputs:" which includes a field for "function to differentiate:" containing the mathematical expression $((a+b+c)/(a+b+c+x))^{1/2}$, and a field for "Also include: differentiation variable". A "Compute" button is located at the bottom of this section. The right column features a "Wolfram Problem Generator" section with a sample problem $\frac{\partial \sin(x)}{\partial x} = ?$ and a "Challenge yourself" link at the bottom.

Conforme apresentado na Figura 8, o resultado da derivada parcial é obtido como:

Figura 8 - Resultado *WolframAlpha* passo-a-passo



Derivative Step-by-step solution

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{a+b+c}{a+b+c+x}} \right) = - \frac{a+b+c}{2 \sqrt{\frac{a+b+c}{a+b+c+x}} (a+b+c+x)^2}$$

Alternate forms assuming a, b, c, and x are positive

$$- \frac{\sqrt{a+b+c}}{2(a+b+c+x)^{3/2}}$$
$$- \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a+b+c}{(a+b+c+x)^3}}$$

APÊNDICE C – Elementos da matriz de variâncias e covariâncias

i) Obtenção das variâncias contidas na matriz Ω

Para encontrar as variâncias de cada componente considerou-se a seguinte aproximação (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974):

$$\frac{n_i \hat{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi_{n_i}^2 \Rightarrow V\left\{\frac{n_i \hat{\sigma}_i^2}{\sigma_i^2}\right\} \sim V\{\chi_{n_i}^2\} \Rightarrow \frac{n_i^2}{(\sigma_i^2)^2} V\{\hat{\sigma}_i^2\} \sim 2n_i \Rightarrow V\{\hat{\sigma}_i^2\} \approx \frac{2(\sigma_i^2)^2}{n_i}$$

Substituindo σ^2 por $\hat{\sigma}^2$ de cada componente de variância e n pelo respectivo grau de liberdade, obtém-se as variâncias aproximadas para as componentes conforme apresentado na tabela 6.

Tabela 5 – Estimadores das variâncias contidas na matriz de variância e covariâncias do modelo tradicional de *Gage R&R*

Variância	Estimador
$\hat{V}(\hat{\sigma}^2)$	$\frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{po(r-1)}$
$\hat{V}(\hat{\sigma}_1^2)$	$\frac{2(\hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)}$
$\hat{V}(\hat{\sigma}_0^2)$	$\frac{2(\hat{\sigma}_0^2)^2}{(o-1)}$
$\hat{V}(\hat{\sigma}_p^2)$	$\frac{2(\hat{\sigma}_p^2)^2}{(p-1)}$

ii) Obtenção das covariâncias contidas na matriz Ω

Para o cálculo das covariâncias admite-se que as somas de quadrados de cada componente são mutuamente independentes (BILODEAU, 2021), ou seja, o que implica que a covariância entre os quadrados médios dos diferentes fatores é nula.

1. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2) = Cov\left(QME, \frac{QMI - QME}{r}\right)$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{r} [Cov(QME, QMI) - Cov(QME, QME)]$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2) = -\frac{1}{r} V(QME)$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2) = -\frac{1}{r} V(\hat{\sigma}^2)$$

Em que:

$$V(QME) = V(\hat{\sigma}^2) = \frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{po(r-1)} \quad (1)$$

Logo:

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_1^2) = -\frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{por(r-1)}$$

2. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_0^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_0^2) = Cov\left\{QME, \frac{QMO - QMI}{pr}\right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{pr} (Cov\{QME, QMO\} - Cov\{QME, QMI\})$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_0^2) = 0$$

3. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_p^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_p^2) = Cov\left\{QME, \frac{QMP - QMI}{or}\right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{or} (Cov\{QME, QMP\} - Cov\{QME, QMI\})$$

$$Cov(\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_p^2) = 0$$

4. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2) = Cov\left\{\frac{QMI - QME}{r}, \frac{QMO - QMI}{pr}\right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{pr^2} (Cov\{QMI, QMO\} - Cov\{QMI, QMI\} - Cov\{QME, QMO\} + Cov\{QME, QMI\})$$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{pr^2} V\{QMI\}$$

Em que:

$$\frac{n QMI}{\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2} \sim \chi_n^2 \rightarrow V\left(\frac{n QMI}{\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2}\right) \sim V(\chi_n^2) \rightarrow \frac{n^2}{(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2} V\{QMI\} \sim 2n$$

$$V\{QMI\} = \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{n}, \quad n = (p-1)(o-1)$$

$$V\{QMI\} = \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)} \quad (2)$$

Logo:

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2) = \frac{1}{pr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

5. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_p^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_p^2) = Cov\left\{ \frac{QMI - QME}{r}, \frac{QMP - QMI}{or} \right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{or^2} (Cov\{QMI, QMP\} - Cov\{QMI, QMI\} - Cov\{QME, QMP\} - Cov\{QME, QMI\})$$

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{or^2} V\{QMI\}$$

Substituindo de acordo com (2):

$$Cov(\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{or^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

6. Encontrando $Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2)$

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2) = Cov\left\{ \frac{QMO - QMI}{pr}, \frac{QMP - QMI}{or} \right\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{opr^2} \{Cov\{QMO, QMP\} - Cov\{QMO, QMI\} - Cov\{QMI, QMP\} + Cov\{QMI, QMI\}\}$$

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{opr^2} V\{QMI\}$$

Substituindo de acordo com (2):

$$Cov(\hat{\sigma}_0^2, \hat{\sigma}_p^2) = \frac{1}{opr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r \hat{\sigma}_1^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\}$$

APÊNDICE D - Matriz de variâncias e covariâncias para o modelo tradicional de Gage R&R

$$\hat{\Omega} = \hat{V}(\hat{\sigma}^2) = \begin{bmatrix} \frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{po(r-1)} & -\frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{por(r-1)} & 0 & 0 \\ -\frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{por(r-1)} & \frac{2(\hat{\sigma}^2)^2}{(p-1)(o-1)} & \frac{1}{pr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} & \frac{1}{pr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} \\ 0 & \frac{1}{pr^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} & \frac{1}{or^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} & \frac{1}{or^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} \\ 0 & \frac{1}{or^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} & \frac{1}{por^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} & \frac{1}{por^2} \left\{ \frac{2(\hat{\sigma}^2 + r\hat{\sigma}_I^2)^2}{(p-1)(o-1)} \right\} \end{bmatrix}$$

APÊNDICE E – Script em R para ANOVA

```

#Carregando os dados
library(openxlsx)
df<- read.xlsx ("dados ceramicos.xlsx")
attach (df)

#Análise de GRR pelo método ANOVA
library(SixSigma)
anova.rr <- ss.rr(var = y,
  part = peca,
  appr = operador,
  data = df,
  main = "Six Sigma Gage R&R Measure",
  sub = "MSA")

#Gráfico de Interação
library(dplyr)
interacao = read.xlsx ("interacao.xlsx") %>% mutate(operador=as.factor(operador))

library(ggplot2)
ggplot(interacao, aes(x=peca,y=y, group=operador, shape=operador)) +
  geom_line()+ geom_point(fill = "black", size = 3, stroke = 1)+
  scale_x_continuous(breaks = seq(1,10,1))+
  theme_bw()+
  labs(x= "Peça", y= "Média das Medições", Shape="Operador")

##### Testando as pressuposições #####
aq = factor (peca)
bq = factor (operador)
mdicf = aov (y ~ aq + bq)

#normalizando os residuos
resdicf = residuals (mdicf)
resdicf=resdicf/sqrt(0.0002780786517)

#ajuste
yajg = fitted (mdicf)
tapply(resdicf,trat,var)

#gráficos
par(mfrow=c(2,2))
plot (resdicf ~ ordem, xlab = "Ordem de Casualização", ylab = "Resíduo", main =
"Diagrama do Resíduo Pela Ordem de Casualização")
abline (h = 0, lty = 2)
mean(resdicf)

plot(resdicf~trat, main="Diagrama de Dispersão do Resíduo Pelos Valores Ajustados
das Medições", xlab="Grupos", ylab="Resíduos")

```

```
abline(h=0,lty=2)
```

```
qqnorm(resdicf, main = "Gráfico de normalidade para os resíduos", xlab = "Quantis  
Teóricos Normais", ylab = "Quantis da Amostra")  
qqline(resdicf)
```

```
hist(resdicf, main = "Histograma dos Resíduos", ylab = "Probabilidade",  
xlab="Resíduo", probability = T)  
curve(dnorm(x,0,0.9481508), col = "black", add = T, lty=2)
```

APÊNDICE F – Script em R para a simulação

```

# Dados Iniciais (Operador, Peça e Repetições)

p = 10 # Número de Peças
o = 2 # Número de operadores
r = 5 # Número de repetições
N = o*p*r

# Valores das componentes de variância obtidas no trabalho

(Mu = 1.8875)
(Sigma2_R = 2.780*(10^-4))
(Sigma2_O = 9.526*(10^-5))
(Sigma2_P = 3.090*(10^-5))
(RR_V = sqrt(Sigma2_R + Sigma2_O)/sqrt(Sigma2_R + Sigma2_O + Sigma2_P))

# Construindo a matriz de delineamento do modelo

Xmu = c(rep(1,100))
Xo1 = c(rep(1,50),rep(0,50))
Xo2 = c(rep(0,50),rep(1,50))
Xp1 = c(rep(1,5),rep(0,45),rep(1,5),rep(0,45))
Xp2 = c(rep(0,5),rep(1,5),rep(0,40), rep(0,5), rep(1,5), rep(0,40))
Xp3 = c(rep(0,10),rep(1,5),rep(0,35), rep(0,10), rep(1,5), rep(0,35))
Xp4 = c(rep(0,15),rep(1,5),rep(0,30), rep(0,15), rep(1,5), rep(0,30))
Xp5 = c(rep(0,20),rep(1,5),rep(0,25), rep(0,20), rep(1,5), rep(0,25))
Xp6 = c(rep(0,25),rep(1,5),rep(0,20), rep(0,25), rep(1,5), rep(0,20))
Xp7 = c(rep(0,30),rep(1,5),rep(0,15), rep(0,30), rep(1,5), rep(0,15))
Xp8 = c(rep(0,35),rep(1,5),rep(0,10), rep(0,35), rep(1,5), rep(0,10))
Xp9 = c(rep(0,40),rep(1,5),rep(0,5), rep(0,40), rep(1,5), rep(0,5))
Xp10 = c(rep(0,45),rep(1,5),rep(0,45), rep(1,5))
X = cbind(Xmu, Xp1, Xp2, Xp3, Xp4, Xp5, Xp6, Xp7, Xp8, Xp9, Xp10, Xo1, Xo2)

# install.packages("SixSigma")
library("SixSigma")

# Fatores

operador = factor(rep(c(1,2), each = 50))
peca = factor(rep(seq(1:10),each = 5))

# Simulação

RR = c(NULL)

Simul = 1000
for (i in 1:Simul)
{
  B = c(Mu, rnorm(p, 0, sqrt(Sigma2_P)), rnorm(o, 0, sqrt(Sigma2_O)))
}

```

```

Y = X%*%B + rnorm(N, 0, sqrt(Sigma2_R))
dt = data.frame(cbind(peca, operador, Y)); colnames(dt) = c("peca","operador","Y")
teste = ss.rr(var = Y, part = peca, appr = operador, errorTerm = "Repeatability", data
= dt, print_plot = F, alphaLim = 0)

RR[i] = teste$studyVar[1,3]
}

# Histograma da distribuição amostral dos estimadores das variâncias e RR

hist(RR, main = "Histograma do índice R&R(%)", ylab= "Frequência", xlab="índice
R&R(%)")

# Intervalo de Confiança estimado pelos Percentis LI = P(2.5%) e LS = P(97.5%)

(LIp = quantile(RR, .025))
(Mediana = median(RR))
(LSp = quantile(RR, .975))
mean(RR)

#variancia de RR

(sd(RR))^2/(100^2)
# Resultados via Método Delta

# Vetor g ponto e vetor g linha ponto

p1 = (1/(Sigma2_R + Sigma2_O + Sigma2_P))
p2 = ((Sigma2_R + Sigma2_O)/((Sigma2_R + Sigma2_O + Sigma2_P)^2))
p3 = 2*sqrt((Sigma2_R + Sigma2_O)/(Sigma2_R + Sigma2_O + Sigma2_P))

gp1 = ((p1 - p2)/p3); gp2 = gp1

p11 = (Sigma2_R + Sigma2_O)
p12 = p3
p13 = ((Sigma2_R + Sigma2_O + Sigma2_P)^2)

gp3 = - (p11/(p12*p13))

(gp = c(gp1, gp2, gp3))
(gpl = t(gp))

# Variâncias estimadas por teoria [V(Sigma2_chapéu)]

(V_Sigma2_R = 2*((Sigma2_R)^2)/(o*p*r - o - p + 1))
(V_Sigma2_O = 2*((Sigma2_O)^2)/(o - 1))
(V_Sigma2_P = 2*((Sigma2_P)^2)/(p - 1))

# Covariâncias teóricas estimadas

```

```

(C_Sigma2_O_Sigma2_R = - (V_Sigma2_R/(r*p)))
(C_Sigma2_R_Sigma2_O = - (V_Sigma2_R/(r*p)))
(C_Sigma2_P_Sigma2_R = - (V_Sigma2_R/(r*o)))
(C_Sigma2_R_Sigma2_P = - (V_Sigma2_R/(r*o)))
(C_Sigma2_O_Sigma2_P = (V_Sigma2_R/((r^2)*o*p)))
(C_Sigma2_P_Sigma2_O = (V_Sigma2_R/((r^2)*o*p)))

```

```

# Matriz Omega Estimada

```

```

L1 = c(V_Sigma2_R, C_Sigma2_R_Sigma2_O, C_Sigma2_R_Sigma2_P)
L2 = c(C_Sigma2_O_Sigma2_R, V_Sigma2_O, C_Sigma2_O_Sigma2_P)
L3 = c(C_Sigma2_P_Sigma2_R, C_Sigma2_P_Sigma2_O, V_Sigma2_P)

```

```

(Omega = rbind(L1, L2, L3))

```

```

# Variância estimada e erro padrão estimado

```

```

(V = gpl%*%Omega%*%gp)
(EP = sqrt(V))

```

```

# Intervalo de Confiança estimado pela matriz ômega estimada

```

```

(LI = RR_V - 1.96*EP)
(LS = RR_V + 1.96*EP)

```