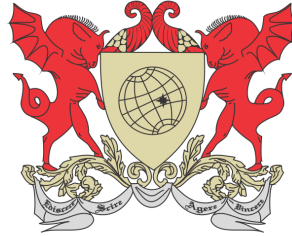


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



BRUNO VINÍCIUS DOS ANJOS E SILVA

PONTOS NOTÁVEIS EM TRIÂNGULOS E A  
RETA DE EULER

FLORESTAL – MINAS GERAIS  
2019

BRUNO VINÍCIUS DOS ANJOS E SILVA

**PONTOS NOTÁVEIS EM TRIÂNGULOS E A RETA DE  
EULER**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

Coorientador: Justino Muniz Júnior

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de  
Viçosa - Campus Florestal

T

S586p  
2019  
Silva, Bruno Vinícius dos Anjos e, 1981-  
Pontos notáveis em triângulos e a reta de Euler / Bruno Vinícius  
dos Anjos e Silva. - Florestal, MG, 2019.  
62 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática-ensino médio. 2. Reta de Euler. 3. Geogebra.  
4. Triângulos. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências  
Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional. II. Título.

CDD 23 515

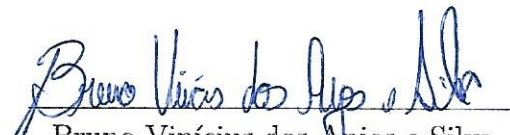
BRUNO VINÍCIUS DOS ANJOS E SILVA

PONTOS NOTÁVEIS EM TRIÂNGULOS E A RETA DE  
EULER

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de dezembro de 2019.

Assentimento:

  
Bruno Vinícius dos Anjos e Silva  
Autor

  
Luiz Gustavo Perona Araújo  
Orientador

# Dedicatória

---

Dedico esse trabalho a todos os envolvidos nessa caminhada: Minha família, meus professores durante toda a vida, meus colegas de graduação e de mestrado, meus orientadores em trabalhos acadêmicos e na vida.

# Agradecimentos

---

Agradeço primeiramente a DEUS e em seguida a todos os envolvidos de forma direta ou indireta no processo que culminou nessa dissertação. De forma especial agradeço a minha mãe Arminda Barbosa que sempre zelou para que seus filhos colocassem os estudos como uma parte especial da vida. Agradeço ao meu pai, Jorge Gregório, que é de quem acredito ter herdado o gosto pelos números. Agradeço aos meus irmãos Jorge, que sempre foi um exemplo para mim e José que sempre foi cuidadoso e incentivador do meu potencial. Agradeço a minha irmã Débora, que desde as caronas para o colégio foi incentivadora e conselheira dos meus caminhos. Agradeço a minha irmã Carmem que sempre me propôs desafios que me fizeram crescer e que enxergou algum talento onde havia apenas uma semente. Agradeço a minha irmã Clades que abriu as portas da matemática para mim e que me fez ver um campus universitário pela primeira vez e encher o coração de esperança. Agradeço aos meus amigos e colegas de profissão, os “Kuduns” e professores da graduação e os companheiros e doutores do mestrado que incentivaram e caminharam junto comigo por todo esse tempo. Agradeço ao meu Orientador Luiz Gustavo Perona, que também foi meu professor e que por uma dessas ironias do destino, um dia também foi meu aluno. Agradeço aos meus cunhados e cunhadas, sogra e tias que compartilharam todos as angustias e desafios dessa fase. Por último e não menos importante agradeço a minha esposa Patrícia Parreira que foi a grande responsável por eu ingressar no mestrado e também aquela que acompanhou as dificuldades sempre incentivando e entendendo todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Biografia

---

**Bruno Vinícius dos Anjos e Silva**, nascido em 04 de março de 1981, natural de Belo Horizonte (Minas Gerais). Sexto filho de uma família de 6 filhos. Duas de minhas irmãs também cursaram matemática na **Universidade Federal de Minas Gerais**.

Teve uma grande influência familiar no ingresso do mundo das exatas, em especial, da matemática.

Cursou o ensino fundamental 1 na **Escola municipal Maria de Rezende Costa**, ensino fundamental 2 na **Escola Municipal Marlene Pereira Rancante**, ensino médio no **Colégio Padre Eustáquio** e em fevereiro de 2000 ingressou na **Universidade Federal de Minas Gerais** integralizando seus créditos em fevereiro de 2007.

Começou a lecionar em pré vestibulares de Belo Horizonte, com destaque para **Associação Pré-Federal**, **Colégio Bernoulli**, **Unimaster pré Vestibular** e **Mais pré vestibular**. Em 2012 ingressou no **Colégio Batista Mineiro** permanecendo até a data atual. Em 2017 ingressou no **Colegium**, rede Eleva de ensino.

Em 2017 ingressou no Programa de mestrado profissional **PROF-MAT** e defendeu sua dissertação em 2019.

Tem como maiores paixões, minha família, o Clube Atlético Mineiro e a sala de aula. A vontade de encontrar caminhos que levem a uma aprendizagem qualitativa me motiva a procurar novas estratégias de ensino e mostrar a matemática como ferramenta útil e acessível a qualquer pessoa que se disponha a aprender.

Matemática viva e vivida diariamente, em toda sua simplicidade e complexidade, é assim que pretende caminhar e dividir meu conhecimento, sendo sempre contemplado com novos caminhos que a matemática poderá me oferecer.

# Resumo

---

SILVA, Bruno Vinícius dos Anjos e, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2019. **Pontos Notáveis em Triângulos e A Reta de Euler**. Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo. Coorientador: Justino Muniz Júnior.

A dissertação que será apresentada explora os aspectos geométricos no estudo dos pontos notáveis, bem como suas características específicas e peculiares. Além disso, abordaremos a *Reta de Euler* e a *Circunferência de Nove Pontos*.

Palavras-chave: Matemática. Ensino. Ciência.

# Abstract

---

SILVA, Bruno Vinícius dos Anjos e, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2019. **Notable Points in Triangle and the Euler Line**. Adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo. Co-adviser: Justino Muniz Júnior.

The dissertation that will be presented explores the geometric aspects of the notable points study, as well as its specific and peculiar characteristics. Furthermore, we will discuss *Euler Line* and the *Nine-Point Circle theorem*.

Keywords: Mathematics. Teaching. Science.

# Lista de Símbolos

---

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

// Retas ou segmentos paralelos

$\alpha$  letra grega Alfa

$\beta$  letra grega Beta

$\cong$  congruentes

$\sim$  semelhantes

$\triangle$  triângulo

$\hat{\phantom{a}}$  ângulo

$\rightarrow$  semirreta

$\overline{P_1P_2}$  segmento ou lado  $P_1P_2$

# Lista de Figuras

---

1.1	introdução 1	13
1.2	introdução 2	13
2.1	congruência(a)	16
2.2	congruência(b)	16
2.3	congruência(c)	17
2.4	congruência(d)	17
2.5	congruência(e)	18
2.6	congruência(f)	18
2.7	congruência(g)	19
2.8	congruência(h)	20
2.9	semelhança	20
2.10	proporcionalidade	21
2.11	proporcionalidade(b)	22
2.12	proporcionalidade(c)	23
2.13	proporcionalidade(d)	24
2.14	semelhança(a)	24
2.15	semelhança(ex)	25
2.16	semelhança(b)	26
2.17	semelhança(c)	27
3.1	mediana	28
3.2	baricentro(a)	29
3.3	baricentro(b)	29
3.4	mediana(a)	30
3.5	mediana(b)	30
3.6	mediana(c)	31
3.7	mediana(d)	32
3.8	mediana(e)	32
3.9	mediana(f)	33
3.10	mediatriz(a)	34
3.11	mediatriz(ex)	34
3.12	ortocentro(a)	35

3.13 ortocentro(b)	36
3.14 altura(a)	36
3.15 alturas(b)	37
3.16 altura(c)	37
3.17 bissetriz(a)	38
3.18 bissetriz(b)	39
4.1 circulo(a)	41
4.2 circulo(b)	41
4.3 circulo(c)	42
4.4 circulo(d)	43
4.5 circulo(e)	43
4.6 euler(a)	44
4.7 euler(b)	44
4.8 euler(c)	45
4.9 euler(d)	46
4.10 euler(e)	46
4.11 lema	47
4.12 euler(f)	48
4.13 euler(g)	48
4.14 euler(h)	49
5.1 atividade 1	51
5.2 atividade 2	51
5.3 atividade 3	52
5.4 atividade 4	53
5.5 atividade 5	53
5.6 atividade 6	54
5.7 atividade 7	54
5.8 atividade 8	55
5.9 atividade 11	56
5.10 atividade 9	56
5.11 atividade 10	57
5.12 atividade 12	58
5.13 atividade 13	58
5.14 atividade 14	59

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Congruência e Semelhança de Triângulos</b>	<b>15</b>
2.1	Congruência de triângulos . . . . .	15
2.2	Semelhança de triângulos . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Pontos Notáveis</b>	<b>28</b>
3.1	Baricentro . . . . .	28
3.2	Circuncentro . . . . .	33
3.3	Ortocentro . . . . .	35
3.4	Incentro . . . . .	38
<b>4</b>	<b>A Circunferência de Nove Pontos e a Reta de Euler</b>	<b>40</b>
4.1	Circunferência de Nove Pontos . . . . .	40
4.2	Reta de Euler . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Atividades</b>	<b>50</b>
5.1	Atividade 1 . . . . .	50
5.2	Atividade 2 . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>60</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

---

Desde as antigas civilizações, passando pelos Gregos e até os dias atuais, os triângulos tem sido objeto de estudo quanto à sua utilização, por exemplo, na movimentação dos astros, bem como quanto as suas características especiais, como nas propriedades das **Cevianas** e da **Mediatriz**. As **Medianas** do triângulo se cruzam em um ponto comum(**Baricentro**) e se dividem na razão 2:1. As **Mediatrizes** são retas perpendiculares aos lados do triângulo em seus respectivos pontos médios e se interceptam no(**Circuncentro**), que é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. As **Alturas** partem de cada vértice perpendicularmente aos seus respectivos lados opostos ou prolongamentos dos mesmos,se interceptam no (**Ortocentro**). As **Bissetrizes** dividem os ângulos internos do triângulo em partes iguais e se cruzam em um único ponto(**Incentro**), que é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

O **Baricentro**, **Circuncentro**, **Ortocentro** e **Incentro** são os conhecidos como os pontos notáveis de um triângulo.

O (**Baricentro**, **Circuncentro** e **Ortocentro**) possuem características próprias, bem definidas, que coexistem de forma independente, mas surpreendentemente são colineares. A reta que contém esses três pontos é conhecida como *A Reta de Euler*. Um elemento matemático que carrega em seu nome o peso de ter um dos maiores e mais brilhantes cientistas que contribuiu em vários campos da matemática.

**Leonhard Euler**, nasceu em 15 de abril de 1707 e morreu em 18 de setembro de 1783. Foi o matemático mais prolífico na história. Os 866 livros e artigos dele representam aproximadamente um terço do corpo inteiro de pesquisa em matemática, teorias físicas, e engenharia mecânica publicadas entre 1726 e 1800. Em matemática pura, ele integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de Newton em análise matemática; refinou a noção de uma função; criou muitas notações matemáticas comuns, incluindo o  $e$ ,  $i$ , o símbolo do pi( $\pi$ ) e o símbolo do sigma; introduziu as funções transcendentais beta e gamma.

É fato que para definir uma circunferência, basta dispormos de três pontos distintos não alinhados. Não necessariamente um quarto ou quinto ponto estará sobre essa circunferência. Nove pontos distintos! Seria possível estarem sobre a mesma circunferência? E se não fossem pontos quaisquer? E se esses pontos fossem formados a partir de pontos notáveis com características próprias e únicas? Também

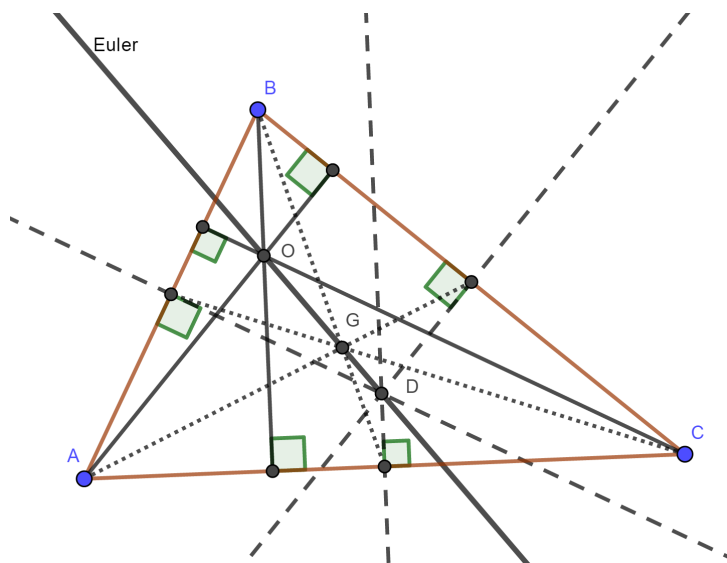


Figura 1.1: Reta de Euler

apresentaremos a *Circunferência de Nove Pontos*. Como e porque esses pontos podem ser garantidos em uma mesma circunferência independente do triângulo escolhido.

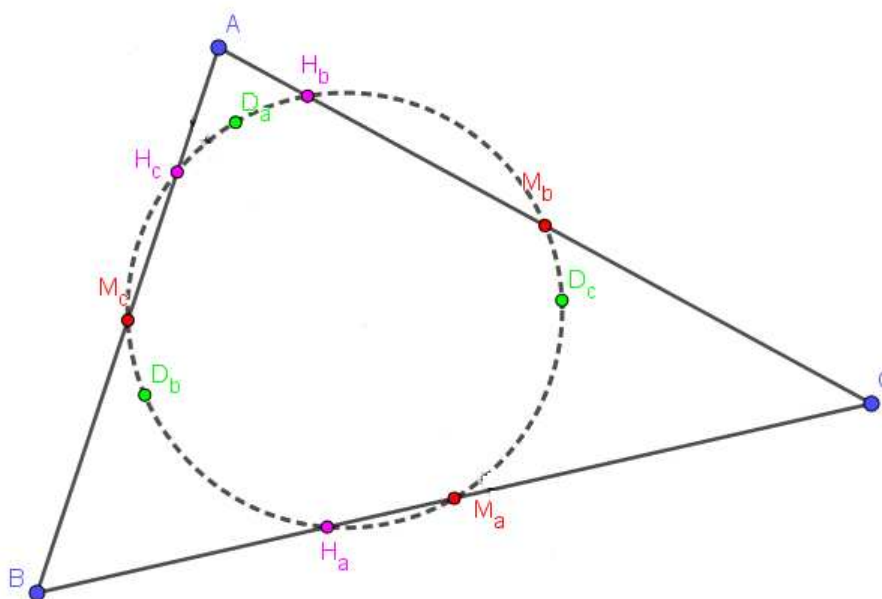


Figura 1.2: Círculo de Nove Pontos e a Reta de Euler

A *Reta De Euler* e a *Circunferência de Nove pontos* serão tratados nessa dissertação a partir de demonstrações geométricas. A abordagem em sala de aula em turmas de ensino médio também serão temas da dissertação. Para tanto usaremos aplicativos ou programas computacionais que facilitem a visualização e um melhor entendimento de todos os teoremas a serem demonstrados. Nesse contexto trabalharemos exclusivamente com o programa **Geogebra**. Partindo de noções primitivas e

tendo como alicerce teoremas envolvendo triângulos semelhantes e as cevianas do triângulo, será apresentada uma visão geral e aplicada à *Circunferência de Nove Pontos*.

De forma mais surpreendente essas duas propriedades, *Reta de Euler* e *Circunferência de Nove Pontos* não só coexistem mas se relacionam com propriedades e teoremas específicos que serão também amplamente exploradas nessa dissertação.

Essa dissertação será dividida da seguinte maneira: No Capítulo 2 a análise dos casos e particularidades na semelhança e congruência de triângulos. Análise essa que será útil no desenvolvimento da propriedades dos pontos notáveis. O Capítulo 3 trata das cevianas, explora propriedades, teoremas e demais características. No Capítulo 4 dessa dissertação culminamos no desenvolvimento da *Circunferência de Nove Pontos* e da *Reta de Euler*. Finalmente, no quinto capítulo foram desenvolvidas atividades em sala de aula que tem como metas, uma análise detalhada, mas ao mesmo tempo interessante, dos elementos notáveis e ainda trazendo, como principal objetivo, fazer com que os alunos, em sua própria curiosidade e com a devida orientação, percebam as características de formação da *Circunferência de Nove Pontos* e da *Reta de Euler*.

# Congruência e Semelhança de Triângulos

---

Estima-se que o início do uso da congruência e semelhança de triângulos se deu no Egito aproximadamente no ano 600 antes de Cristo com *Tales de Mileto*. A pedido de um faraó, teria sido utilizada sombra e projeções para determinar a altura da pirâmide de Quéops. Atualmente, percebemos várias aplicações no dia a dia para semelhança, como nas fotografias, maquetes, plantas baixas, entre outros. Nessa seção, estudaremos definições, características e teoremas que irão nortear as bases para todas as demonstrações dos capítulos seguintes.

## 2.1 Congruência de triângulos

Nesse primeiro momento, citaremos algumas definições que garantirão um melhor entendimento de congruência e semelhança de triângulos. Para maiores detalhes a respeito dessas e de outras definições, consultar: [3].

**Definição 2.1:** Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida ou comprimento.

**Definição 2.2:** Dois ângulos são congruentes se possuem a mesma medida.

**Definição 2.3:** Dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são congruentes se for possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência  $A \leftrightarrow D$ ,  $B \leftrightarrow E$  e  $C \leftrightarrow F$  entre os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$ ,  $\hat{C} \cong \hat{F}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ , dizemos que os dois triângulos são congruentes, o que denotamos por  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Para maior entendimento e facilidade nas demonstrações, estudaremos congruência de triângulos a partir de alguns casos particulares que chamaremos de “casos de congruência”.

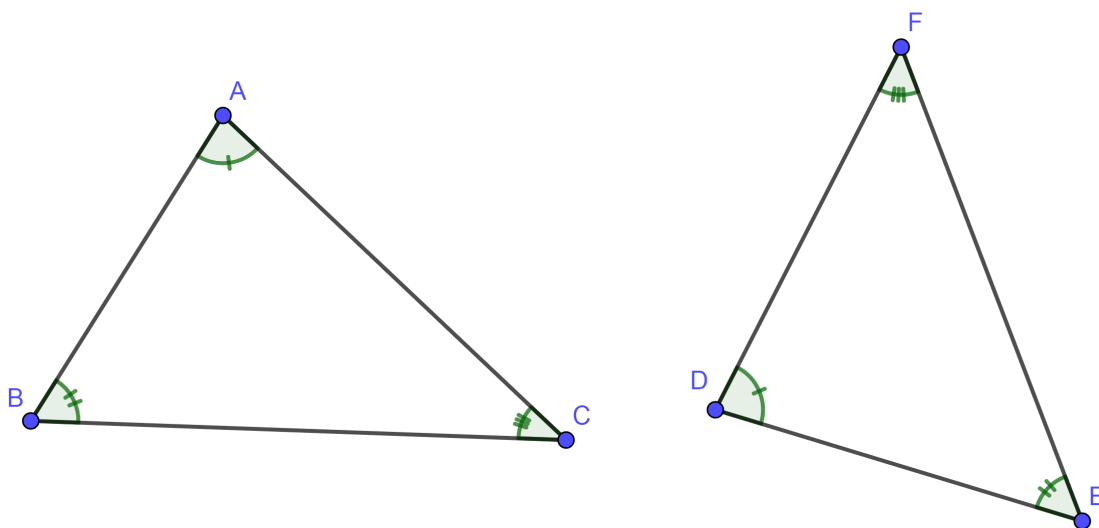


Figura 2.1:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

**Postulado 2.4 (1º caso de Congruência de Triângulos (L.A.L.)):** Dados dois Triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ , então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

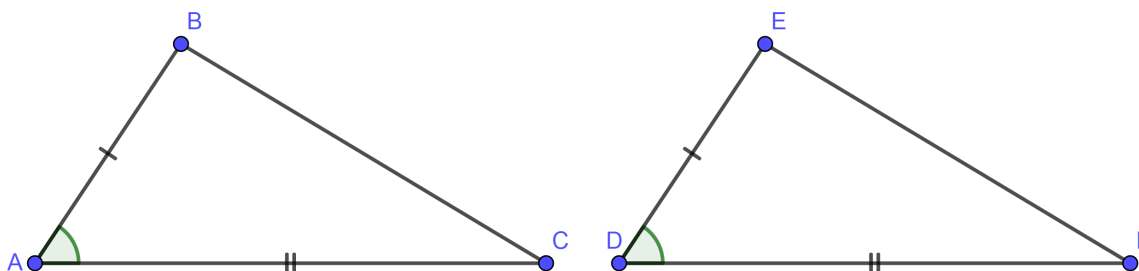


Figura 2.2: L.A.L.

Como esse primeiro caso de congruência é um postulado, vamos assim assumi-lo como verdadeiro e a partir dele, demonstrar os demais casos de congruência de triângulo.

**Teorema 2.5 (2º caso de Congruência de Triângulos (A.L.A.)):** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  e  $\hat{B} \cong \hat{E}$ , então os triângulos são congruentes.

*Demonstração.* Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  satisfazendo as hipóteses do teorema. Seja  $F_1$  um ponto da semirreta  $DF$  tal que  $DF_1 = AC$ . Comparemos os triângulos  $ABC$  e  $DEF_1$ . Como  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\hat{A} \cong \hat{D}$  e  $\overline{AC} \cong \overline{DF_1}$  segue que eles são congruentes pelo caso L.A.L.. Portanto,  $\hat{B} \cong \hat{E}$ . Desse fato e da

hipótese segue que  $\widehat{DEF} \cong \widehat{DEF}_1$ . Assim,  $\overrightarrow{EF} \cong \overrightarrow{EF}_1$  coincidem. Portanto  $F$  e  $F_1$  são o mesmo ponto e temos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

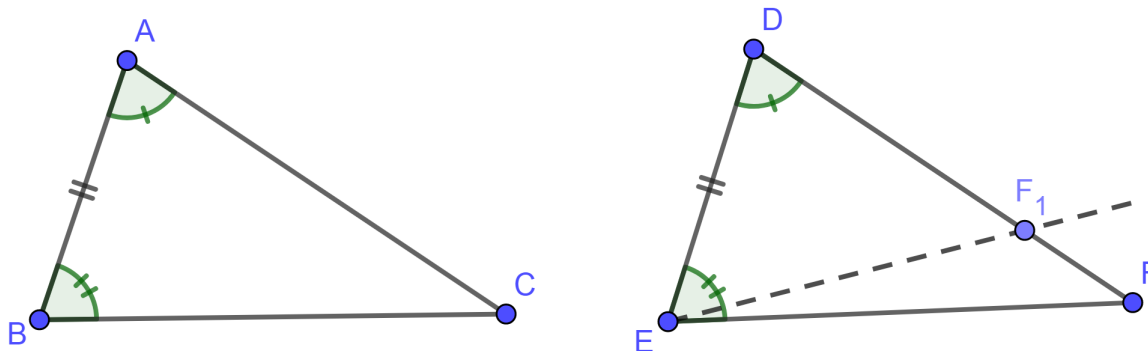


Figura 2.3:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

□

**Teorema 2.6 (3º caso de Congruência de Triângulos (L.L.L.)):** Se dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  têm os três pares de lados correspondentes congruentes, então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  tais que  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$  e  $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ .

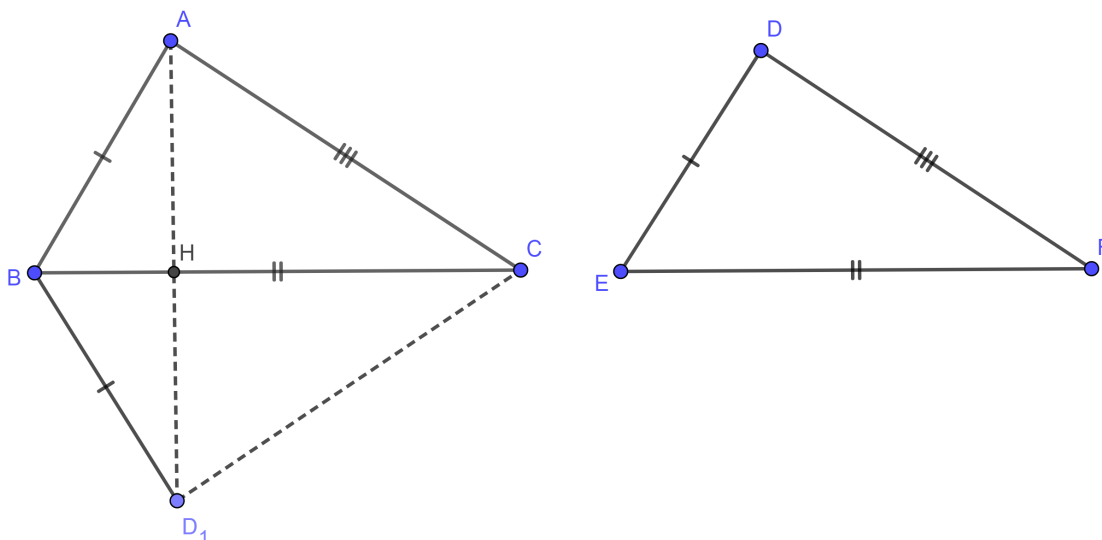


Figura 2.4:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

No semiplano determinado por  $\overrightarrow{BC}$  e que não contém o ponto  $A$ , consideremos uma semirreta de origem  $B$  formando com  $\overrightarrow{BC}$  um ângulo congruente a  $\widehat{DEF}$ . Escolhamos sobre ela um ponto  $D_1$  tal que  $BD_1 = DE$ . Pelo caso L.A.L., obtemos

$\triangle D_1BC \cong \triangle DEF$ . Vamos mostrar agora que  $\triangle ABC \cong \triangle D_1BC$ . Seja  $H$  um ponto que  $AD_1$  corta  $\overrightarrow{BC}$ . Vamos supor primeiro que  $H$  está entre  $B$  e  $C$ , como na Figura 2.4

Como os triângulos  $BD_1A$  e  $CAD_1$  são isósceles, temos  $\widehat{BAD_1} \cong \widehat{BD_1A}$  e  $\widehat{CAD_1} \cong \widehat{CD_1A}$ . Além disso temos que

$$m\widehat{BAC} = m\widehat{BAD_1} + m\widehat{D_1AC} = m\widehat{BD_1A} + m\widehat{AD_1C} = m\widehat{BD_1C}.$$

Daí, pelo caso L.A.L., segue que  $\triangle ABC \cong \triangle D_1BC$ . No caso em que  $B$  está entre  $H$  e  $C$ , como na Figura 2.5, ou ainda no caso em que  $C$  está entre  $B$  e  $H$ , é demonstrado analogamente que  $\triangle D_1BC \cong \triangle DEF$  e  $\triangle ABC \cong \triangle D_1BC$ .

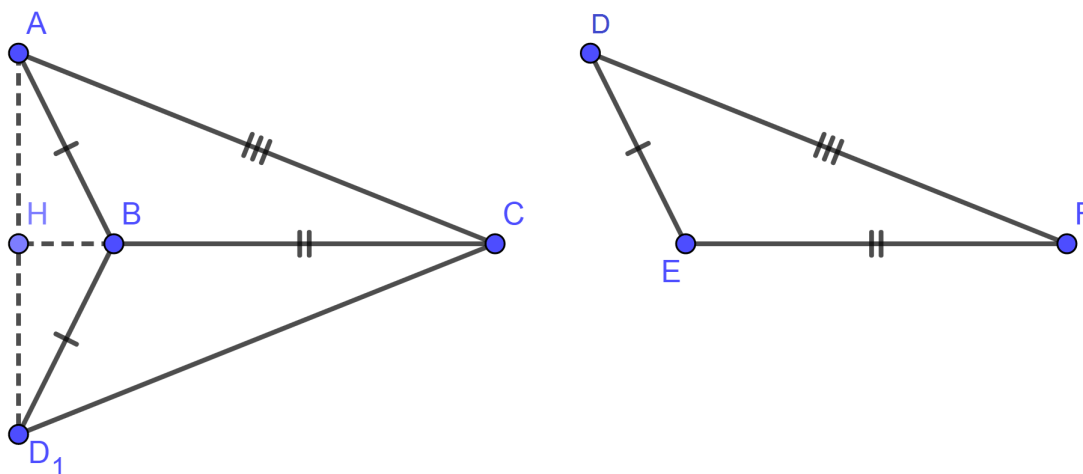


Figura 2.5:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . Analisemos agora o caso em que  $H = B$  (Figura 2.6), isto é  $A, B$  e  $D_1$  são colineares.

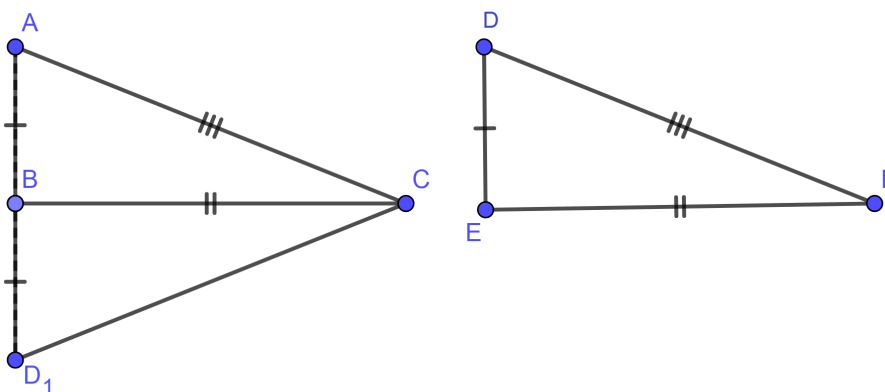


Figura 2.6:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

Nesse caso  $\widehat{A} \cong \widehat{D}_1$ . Sabendo que em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais (veja [3]), e, por transitividade  $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ . Novamente, pelo caso L.A.L., obtemos  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . Os outros dois casos,  $H = C$  ou  $C$  entre  $B$  e  $H$  são análogos.

□

**Teorema 2.7 (4º caso de Congruência de Triângulos (L.A.A.)):** Sejam  $ABC$  e  $DEF$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{E}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ . Então  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , e  $X$  um ponto da semirreta  $BC$  tal que  $BX = EF$ . Consideremos inicialmente  $X$  entre  $B$  e  $C$ .

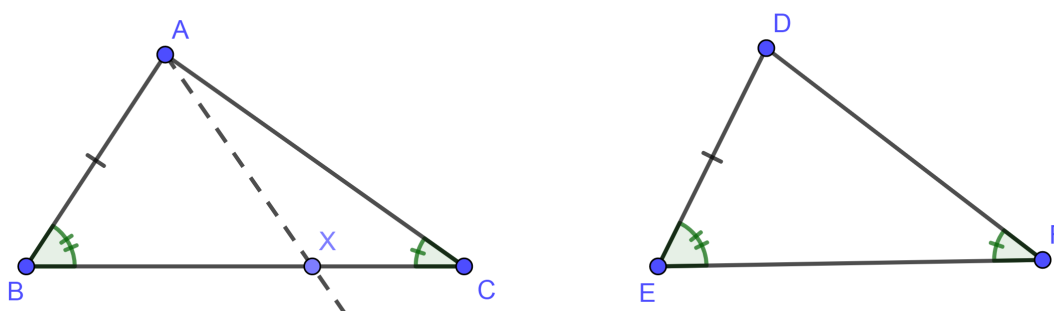


Figura 2.7:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

Pelo Postulado L.A.L. obtemos  $\triangle ABX \cong \triangle DEF$ . Disto, portanto, obtemos

$$\widehat{AXB} \cong \widehat{DFE} (*)$$

Mas  $\widehat{AXB}$  é um ângulo externo do  $\triangle AXC$ , do qual  $\widehat{ACX}$  é um ângulo interno não adjacente. Logo, pelo teorema do ângulo externo ([3]),  $\widehat{AXB} > \widehat{ACX}$  e, portanto, pela hipótese,  $\widehat{AXB} > \widehat{DFE}$ , o que contradiz (\*). Se tivéssemos  $C$  entre  $B$  e  $X$ , demonstraríamos analogamente que  $\widehat{AXB} < \widehat{DFE}$ , o que novamente contradiz (\*). Logo o ponto  $X$  coincide com  $C$ , e portanto  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

□

Em geral, L.L.A. não fornece um caso de congruência de triângulos, mas existe um caso especial, o caso do triângulo retângulo, o qual deduzimos do teorema anterior.

**Teorema 2.8 (Teorema da Hipotenusa e do Cateto):** Sejam  $ABC$  e  $DEF$  dois triângulos retângulos. Se a hipotenusa e um cateto do  $\triangle ABC$  são congruentes com as partes correspondentes do  $\triangle DEF$ , então os dois triângulos são congruentes.

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , com  $m\widehat{B} = m\widehat{E} = 90$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$  e  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ .

Tomemos o ponto  $Q$  na semirreta oposta a  $\overline{EF}$  de modo que  $\overline{EQ} = \overline{BC}$ . Pelo postulado L.A.L. temos

$$\triangle DEQ \cong \triangle ABC (**)$$

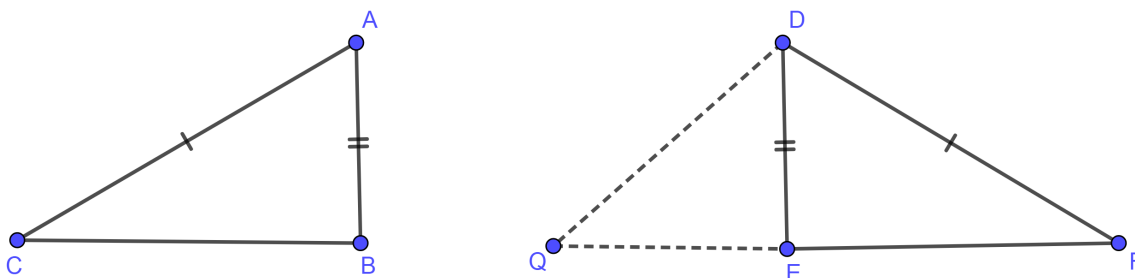


Figura 2.8:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

O  $\triangle DQF$  assim obtido é um triângulo isósceles visto que, por (\*\*) e pela hipótese,  $\overline{DQ} \cong \overline{DF}$ . Logo  $\widehat{EFD} \cong \widehat{EQD}$ . Disso e de (\*\*) decorre que  $\widehat{EFD} \cong \widehat{BCA}$ . Então pelo Teorema L.A.A., obtemos  $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ .

□

## 2.2 Semelhança de triângulos

A teoria de Semelhança de Triângulos tem ampla relevância em diversos ramos de estudo como a arquitetura, a física e muitas engenharias. Limitaremos o nosso estudo aos casos relevantes que contribuirão para futuras demonstrações.

**Definição 2.9:** Seja  $S$  uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência  $S$  é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.

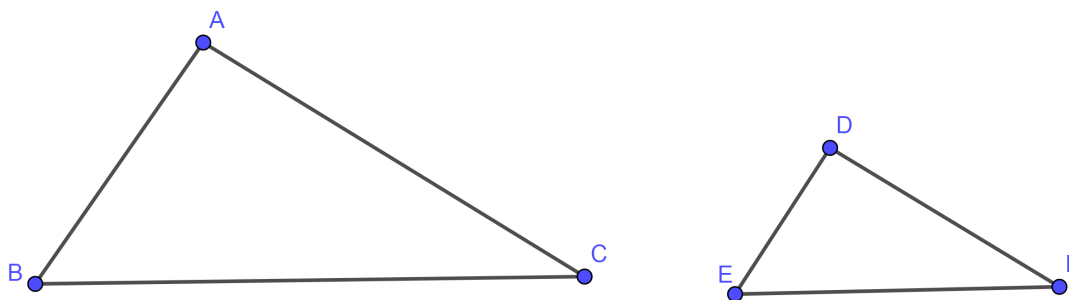


Figura 2.9:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Nesse caso, a correspondência leva  $\widehat{A}$  a  $\widehat{D}$ ,  $\widehat{B}$  a  $\widehat{E}$  e  $\widehat{C}$  a  $\widehat{F}$ .

Em triângulos semelhantes, medidas lineares correspondentes nos dois triângulos formam a proporção

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k,$$

em que  $k$  é chamada constante de proporcionalidade ou razão de semelhança entre os triângulos. Em triângulos congruentes  $k = 1$

Consideraremos a partir desse momento dois lemas, sem no preocuparmos com maiores detalhes de suas demonstrações para a introdução de dois importantes teoremas que serão ferramentas úteis em demonstrações futuras. Suas demonstrações podem ser encontradas em [3]

**Lema 2.10:** Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

**Lema 2.11:** Dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$ , temos

$$\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m},$$

onde  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos se, e somente se, existe um segmento de comprimento  $c$  tal que  $AB = nc$  e  $CD = mc$ .

**Teorema 2.12 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade):** Se uma reta paralela a um dos lados do triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então essa reta divide os lados na mesma razão.

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $ABC$  e uma reta paralela ao lado  $BC$  intersectando os lados  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $D$  e  $E$  respectivamente. Vamos mostrar que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

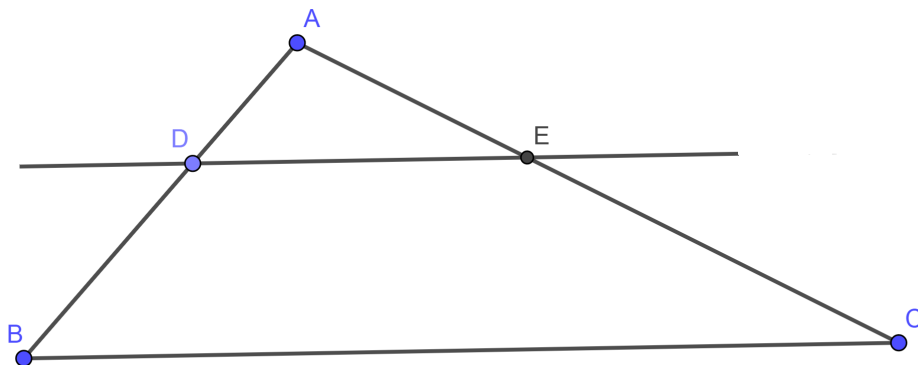


Figura 2.10

Consideraremos a partir desse momento 2 casos:

(i)  $\frac{AB}{AD}$  é um número racional, ou seja,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{n}{m},$$

com  $m$  e  $n$  números inteiros positivos.

Pelo lema (2.11), existe um segmento de comprimento  $c$  tal que  $AD = mc$  e  $AB = nc$ , e ainda com  $m < n$  pois  $AD < AB$ .

Consideremos então em  $\overrightarrow{AB}$  os pontos  $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n$ , com  $P_0 = A, P_m = D$  e  $P_n = B$  tais que  $P_i P_{i+1} = c$ , com  $i = 0, \dots, m, \dots, n - 1$ .

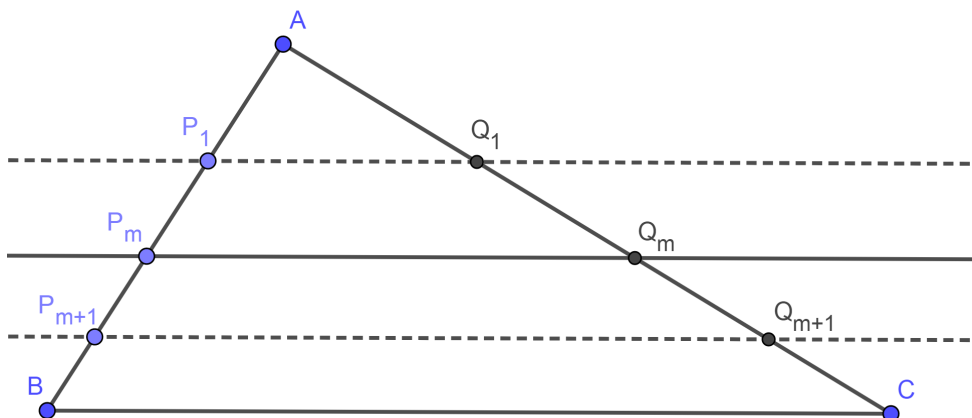


Figura 2.11

Agora tracemos paralelas à  $\overline{BC}$  por  $P_1, \dots, P_{n-1}$ . Estas retas cortam o segmento  $AC$  em pontos que denotamos por  $Q_1, \dots, Q_{n-1}$ . Pelo Lema 2.10, existe um número real positivo  $d$  tal que  $Q_i Q_{i+1} = d$  para  $i = 0, \dots, n - 1$  com  $Q_0 = A, Q_m = E, Q_n = C$ . Portanto  $AC = nd$  e  $AE = md$ . Assim, temos:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{nd}{md} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc} = \frac{AB}{AD}.$$

(ii) Agora vamos considerar o caso em que  $\frac{AB}{AD}$  é um número irracional.

Seja  $m$  um número inteiro positivo. Consideremos na semirreta  $AB$  pontos  $P_0 = A, P_1, \dots, P_m = D, \dots, P_n, P_{n+1}$  tais que  $P_i P_{i+1} = c, i = 0, 1, \dots, m, m + 1, \dots, n$ , para algum  $c$ . Daí  $AD = mc$  e  $nc < AB < (n + 1)c$ . Então temos

$$\frac{n}{m} < \frac{AB}{AD} < \frac{n + 1}{m}. \tag{2.1}$$

Tracemos paralelas a reta suporte de  $\overline{BC}$  por  $P_1, \dots, P_{n+1}$ . Estas retas cortam a semirreta  $AC$  em pontos  $Q_0 = A, Q_1, \dots, Q_{n+1}$  e, pelo Lema 2.10, temos que existe um número real positivo  $d$  tal que  $Q_i Q_{i+1} = d, i = 0, \dots, n$  com  $Q_0 = A, AE = md$  e  $nd < AC < (n + 1)d$ . Portanto obtemos

$$\frac{n}{m} < \frac{AC}{AE} < \frac{n + 1}{m}. \tag{2.2}$$

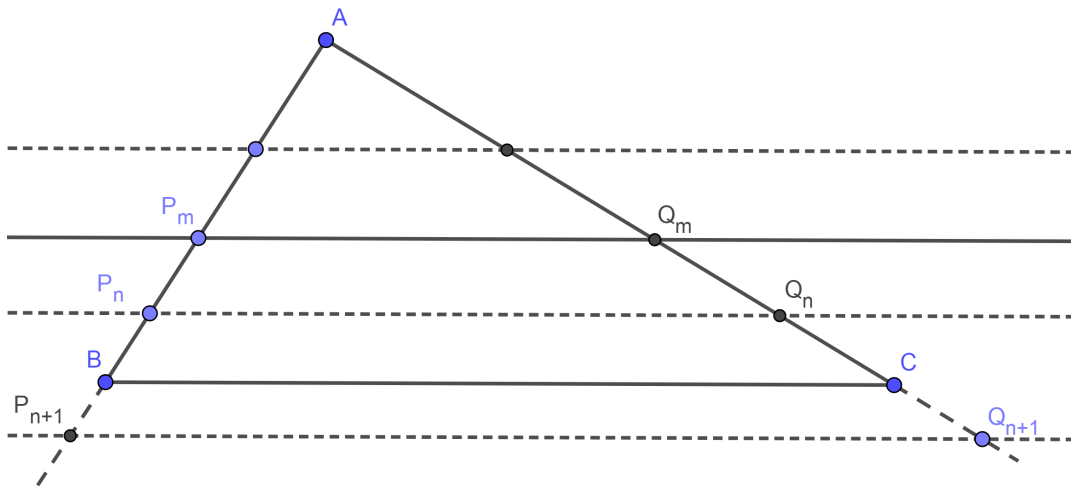


Figura 2.12

De (2.1) e (2.2) obtemos

$$\left| \frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} \right| < \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer número inteiro positivo  $m$ , temos

$$\frac{AB}{AD} - \frac{AC}{AE} = 0, \text{ ou seja, } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

□

**Teorema 2.13:** Se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Consideremos a reta que passa por  $DE$  onde  $D$  é um ponto entre  $A$  e  $B$ , e  $E$  é um ponto entre  $a$  e  $C$  com

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

Considere a reta  $DE_1$  passando por  $D$ , paralela à reta suporte do segmento  $\overline{BC}$  que intersecciona a reta suporte do segmento  $AC$  no ponto  $E$ .

Pelo Teorema 2.13,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE_1},$$

e, portanto,

$$AE_1 = AC \cdot \frac{AD}{AB}.$$

Mas por hipótese

$$AE = AC \cdot \frac{AD}{AB}.$$

Assim,  $AE_1 = AE$ . Logo  $E = E_1$ , e a reta suporte do segmento  $DE$  é paralela à reta suporte do segmento  $\overline{BC}$ .

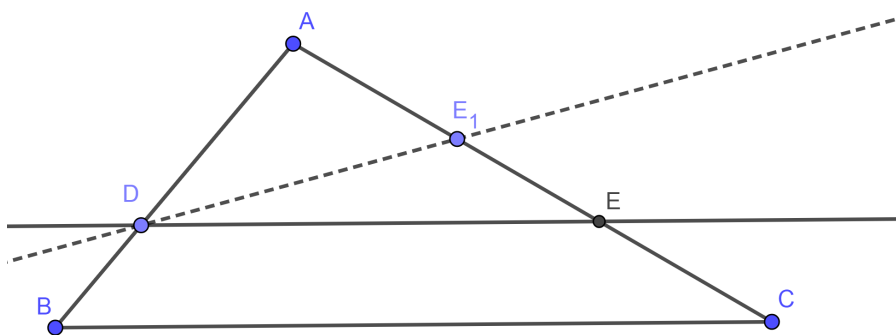


Figura 2.13

□

**Teorema 2.14 (O Teorema de Semelhança A.A.A.):** Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  satisfazendo as hipóteses do teorema.

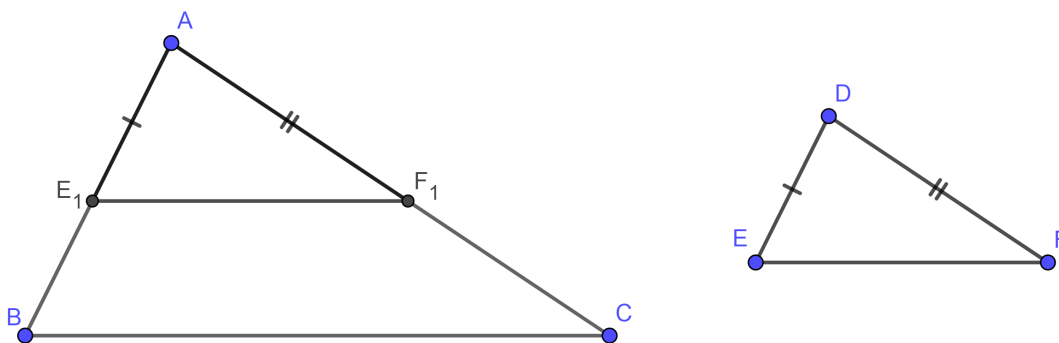


Figura 2.14

Considere  $E_1$  e  $F_1$  pontos de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , respectivamente, tais que  $AE_1 = DE$  e  $AF_1 = DF$ . Pelo caso (L.A.L) de congruência de triângulos (Teorema 2.4) temos que  $\triangle AE_1F_1 \cong \triangle DEF$ . Portanto  $\widehat{AE_1F_1} \cong \widehat{ABC}$ . Assim as retas suportes de  $\overline{E_1F_1}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas ou coincidentes. Se coincidem, então pelo caso de congruência A.L.A. temos  $\triangle AE_1F_1 \cong \triangle ABC$ , e portanto, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são congruentes e daí, semelhantes.

Se as retas suportes de  $\overline{E_1F_1}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas, então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (Teorema 2.12) temos:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF_1}.$$

Como  $AE_1 = DE$  e  $AF_1 = DF$ , temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Analogamente demonstramos que

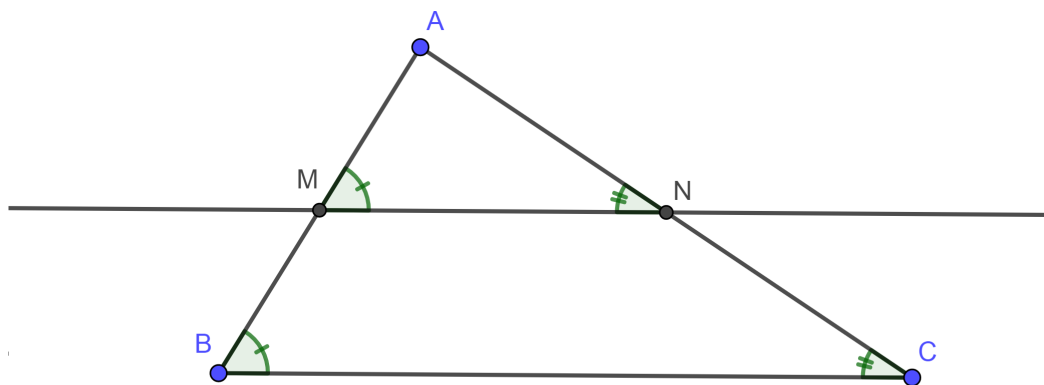
$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Logo  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ . □

**Corolário 2.15:** Se dois triângulos possuem dois ângulos iguais entre si, então o terceiro ângulo também será igual uma vez que a soma dos ângulos internos é igual a 180 graus. Logo, o caso (A.A.A.) pode ser escrito apenas como (A.A.)

**Exemplo 2.2.1:** Considere o triângulo  $\triangle ABC$ . A partir do ponto médio  $M$  do lado  $AB$ , trace uma paralela ao lado  $BC$  passando por  $M$  e interceptando  $AC$  em  $N$ . Temos que  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$  e consequentemente

$$MN = \frac{BC}{2}.$$



**Figura 2.15:**  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ .

De fato, pelo caso (A.A.A.) os triângulos são semelhantes, uma vez que pelo teorema das paralelas cortadas por transversais ([3]),  $\widehat{B} = \widehat{M}$  e  $\widehat{C} = \widehat{N}$ . Assim  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ . Como  $M$  é ponto médio do lado  $AB$ ,  $AM = \frac{AB}{2}$  e a razão de semelhança é  $k = \frac{1}{2}$ . Sendo assim  $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ . Consequentemente

$$MN = \frac{BC}{2}.$$

O segmento  $MN$  é chamado de **base média** do triângulo.

**Teorema 2.16 (O Teorema de Semelhança L.A.L.):** Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ , se  $\hat{A} \cong \hat{D}$ ,  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  então,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

*Demonstração.* Consideremos os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  satisfazendo as hipóteses do teorema.

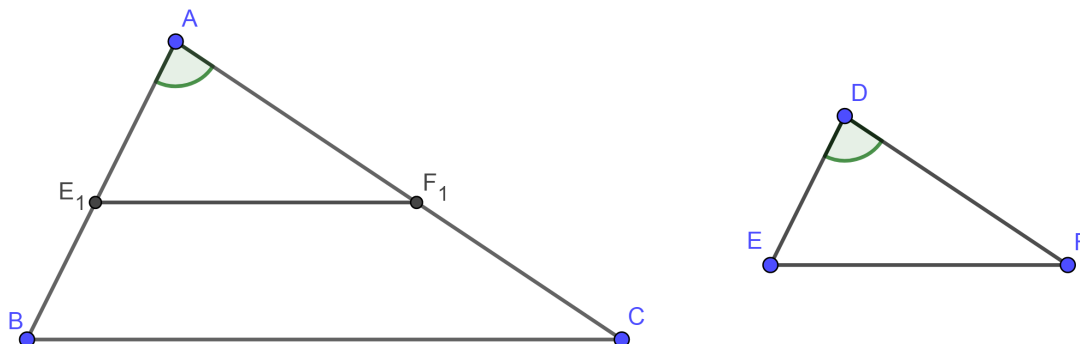


Figura 2.16

Consideremos  $E_1$  e  $F_1$  pontos de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  respectivamente, tais que  $AE_1 = DE$  e  $AF_1 = DF$ . Temos  $\frac{AB}{AE_1} = \frac{AC}{AF_1}$ . Portanto pelo Teorema 2.13, obtemos que as retas suportes de  $\overline{E_1F_1}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas e então, temos que  $\hat{ABC} \cong \hat{AE_1F_1}$  e  $\hat{ACB} = \hat{AF_1E_1}$ . Mas pelo postulado L.A.L., os triângulos  $\triangle AE_1F_1$  e  $\triangle DEF$  são congruentes. Portanto temos  $\hat{AE_1F_1} \cong \hat{DEF}$  e  $\hat{AF_1E_1} \cong \hat{DFE}$ .

Então  $\hat{B} \cong \hat{E}$  e  $\hat{C} \cong \hat{F}$  e assim temos  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  □

**Teorema 2.17 (O Teorema de Semelhança L.L.L.):** Se dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  são tais que vale a relação

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

, então  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

*Demonstração.* Sejam  $E_1$  e  $F_1$  pontos de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , respectivamente, tais que  $AE_1 = DE$  e  $AF_1 = DF$ .

Decorre da hipótese que,

$$\frac{AB}{AE_1} = \frac{AC}{AF_1},$$

segue, usando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que as retas suportes de  $\overline{E_1F_1}$  e  $\overline{BC}$  são paralelas. Então, temos  $\hat{ABC} \cong \hat{AE_1F_1}$  e  $\hat{ACB} = \hat{AF_1E_1}$ . Pelo Corolário A.A. temos  $\triangle ABC \sim \triangle AE_1F_1$ . Portanto

$$\frac{E_1F_1}{BC} = \frac{AE_1}{AB},$$

daí,

$$E_1F_1 = BC \frac{AE_1}{AB} = BC \frac{DE}{AB}. \tag{2.3}$$

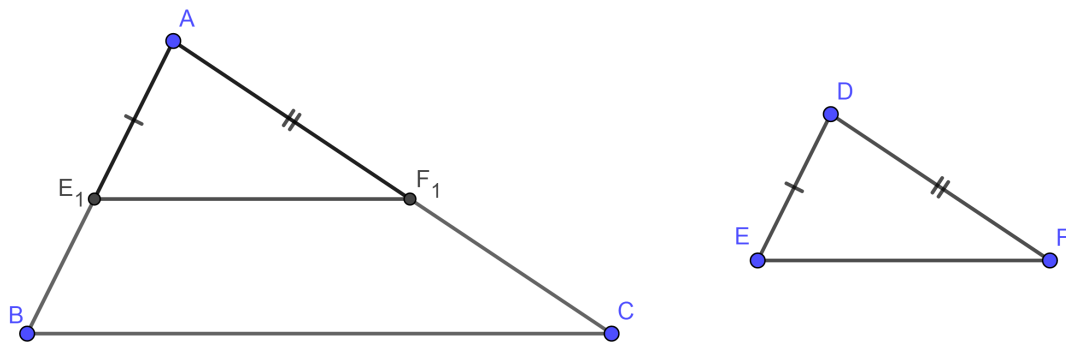


Figura 2.17

Mas, pela hipótese, temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF_1},$$

ou seja

$$EF = BC \frac{DE}{AB}. \tag{2.4}$$

Das expressões (2.3) e (2.4), temos que  $E_1F_1 = EF$ . Então pelo caso (L.L.L.) de Congruência de triângulos, temos  $\triangle AE_1F_1 \cong \triangle DEF$ , e portanto  $\widehat{AE_1F_1} \cong \widehat{DEF}$  e  $\widehat{AF_1E_1} \cong \widehat{DFE}$ .

Pelas expressões anteriores temos  $\widehat{B} \cong \widehat{E}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ . E novamente do Corolário A.A., segue o resultado.

□

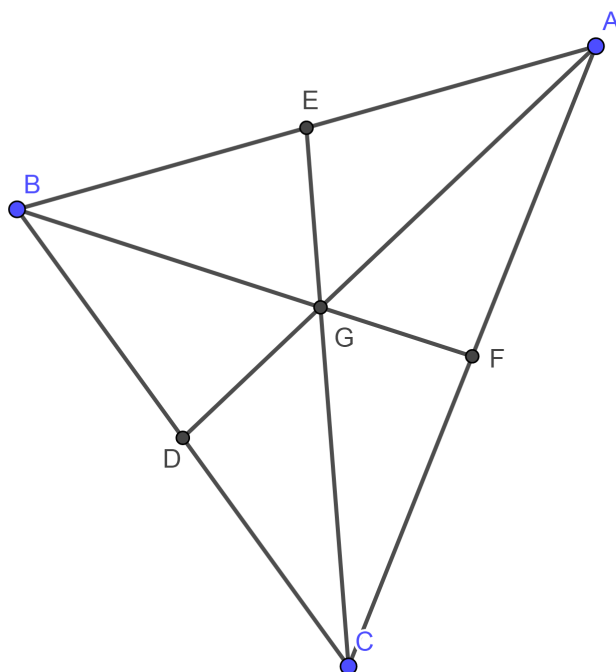
## Pontos Notáveis

---

Nessa seção, estudaremos os pontos notáveis e todas as suas características, teoremas e corolários que serão úteis nas próximas seções.

### 3.1 Baricentro

**Definição 3.1:** Mediana é um segmento que parte do vértice do triângulo e vai até o ponto médio do lado oposto a esse vértice.



**Figura 3.1:** Os pontos  $D, E$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $BC, AB$  e  $AC$  respectivamente.  $G$  é o baricentro

**Teorema 3.2:** As três medianas de um triângulo concorrem em um ponto interno a esse triângulo chamado de **baricentro**.

*Demonstração.* Considere o  $\triangle ABC$  e suas medianas  $AM$  e  $BN$  que se interceptam no ponto  $X$ . O segmento  $\overline{MN}$  é base média do triângulo  $ABC$ , logo  $MN$  é metade de  $AB$ .

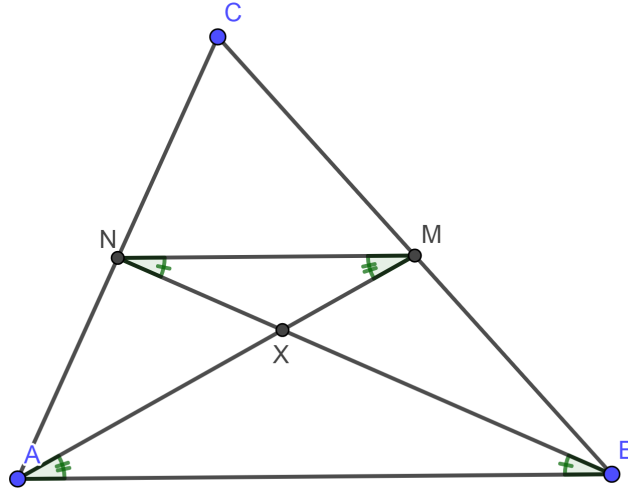


Figura 3.2

Como  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ,  $\widehat{AMN} \cong \widehat{MAB}$ ,  $\widehat{BNM} \cong \widehat{NBA}$ , logo  $\triangle NMX \sim \triangle BAX$  e  $X$  está na terça parte do segmento  $\overline{BN}$  a partir de  $N$ .

Considere agora, o  $\triangle ABC$  e suas medianas  $CP$  e  $BN$  que se interceptam no ponto  $Y$ . O segmento  $\overline{NP}$  é base média do triângulo  $ABC$ , logo  $NP$  é metade de  $BC$ .

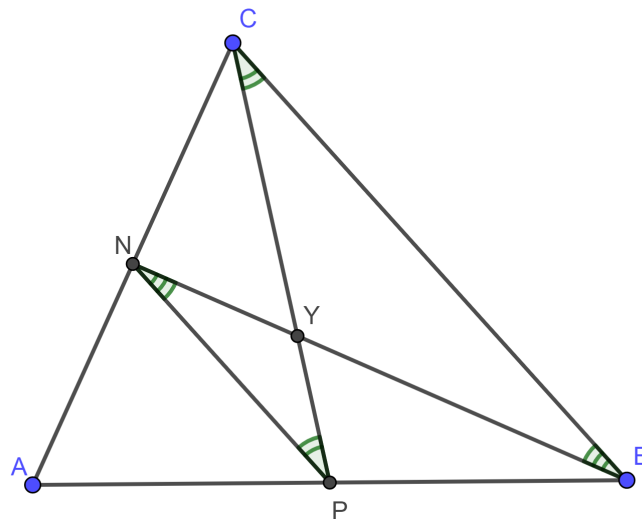


Figura 3.3

Como  $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$ ,  $\widehat{CPN} \cong \widehat{PCB}$ ,  $\widehat{PNB} \cong \widehat{NBC}$ , logo  $\triangle NPY \sim \triangle BCY$  e  $Y$  está na terça parte do segmento  $\overline{BN}$  a partir de  $N$ .

Logo  $X$  e  $Y$  estão sobre o mesmo segmento  $\overline{BN}$  e na terça parte de  $N$  até  $B$ . Logo os pontos  $X$  e  $Y$  são o mesmo ponto que é o ponto comum (Baricentro) de interseção das medianas.

□

**Definição 3.3:** Chamamos de **Triângulo Medial**, o triângulo com vértices nos pontos médios dos lados de um triângulo  $\triangle ABC$  dado.

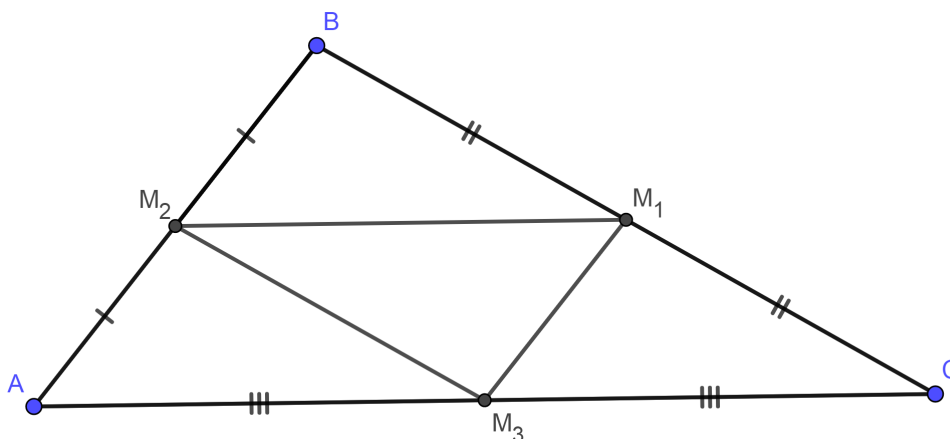


Figura 3.4:  $\triangle M_1M_2M_3$  é um triângulo medial

**Teorema 3.4:** Todo triângulo e seu triângulo medial possuem o mesmo **baricentro**.

*Demonstração.* Considere as medianas  $AM_1$ ,  $CM_2$  e  $DM_3$  do triângulo  $\triangle ABC$ . O ponto  $G$  é o **baricentro** do triângulo  $\triangle ABC$ .

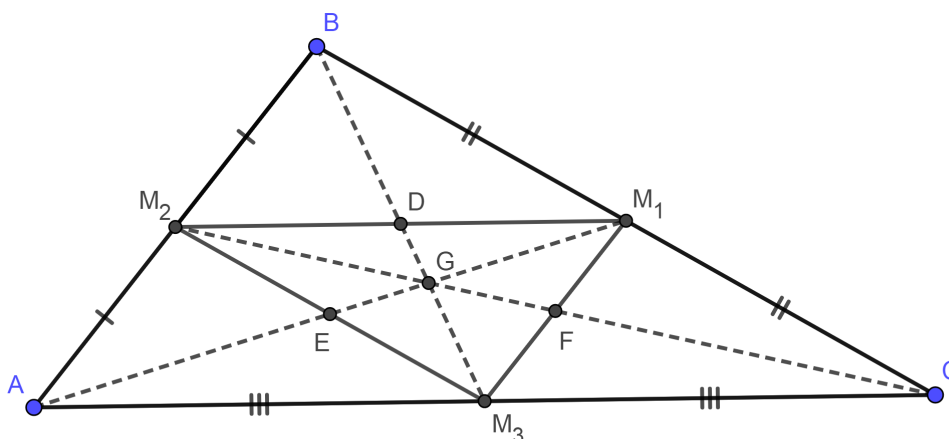


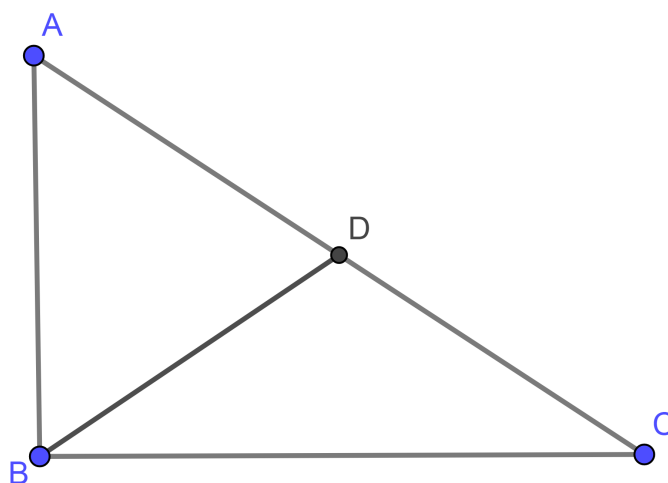
Figura 3.5:  $\triangle M_1M_2M_3$  é um triângulo medial

Temos que  $\triangle ABC \sim \triangle M_2BM_1$  pelo caso (L.A.L.), logo  $\widehat{BM_1M_2} \cong \widehat{BCA}$  e  $\widehat{BM_2M_1} \cong \widehat{BAC}$ . Assim são também semelhantes  $\triangle BM_1D$  com  $\triangle BCM_3$  pelo

caso (L.A.L.).  $\triangle BM_3A$  com  $\triangle BDM_2$  pelo caso (L.A.L.) e como  $CM_3 = AM_3$ , então  $M_1D = M_2D$ , logo  $D$  é ponto médio do lado  $\overline{M_1M_2}$  e  $\overline{M_3D}$  é mediana desse mesmo triângulo. Analogamente  $E$  e  $F$  são pontos médios de  $\overline{M_2M_3}$  e  $\overline{M_1M_3}$  respectivamente. Por fim, o ponto  $G$  também será ponto de encontro das medianas do triângulo  $\triangle M_1M_2M_3$ .

□

**Teorema 3.5:** No triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa vale metade dessa hipotenusa.



**Figura 3.6:** Na figura  $AD = DC = BD$  e o ângulo  $B$  é reto.

*Demonstração.* Considere um retângulo  $ABCE$  e suas diagonais  $AC$  e  $BE$  se interceptando no ponto  $D$ .

Como  $AB = EC$ ,  $BC = AE$ , pelo Teorema de Pitágoras, temos que  $BE = AC$ . Como as diagonais se cruzam no ponto médio, então  $BD = CD = AD$ , ou seja, no  $\triangle ABC$ , a mediana  $BD$  vale metade da hipotenusa  $AC$ .

□

**Teorema 3.6:** O **baricentro** de um triângulo divide cada mediana desse triângulo na razão de  $1/3$  e  $2/3$ , sendo maior a parte mais próxima ao vértice que contém a mediana.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  na figura, sendo  $D$  e  $E$  pontos médios de  $BC$  e  $AC$  respectivamente.

Traçando a reta  $r$  que passa pelos pontos  $D$  e  $E$ , temos que  $r \parallel \overleftrightarrow{AB}$ , pelo exemplo(2.2.1), sendo  $m\widehat{A\hat{B}E} = m\widehat{D\hat{E}B}$  e  $m\widehat{B\hat{A}D} = m\widehat{E\hat{D}A}$ . Como  $DE$  é base média do triângulo  $ABC$  então  $DE = \frac{AB}{2}$  e por consequência  $FE = \frac{BF}{2}$  e  $DF = \frac{AF}{2}$ . Logo

$$BF = \frac{2}{3}BE, EF = \frac{1}{3}BE$$

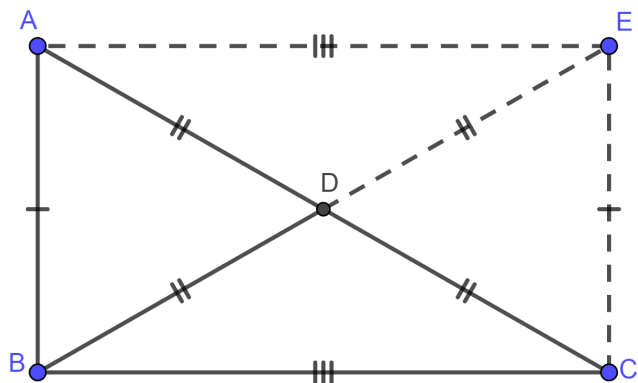


Figura 3.7

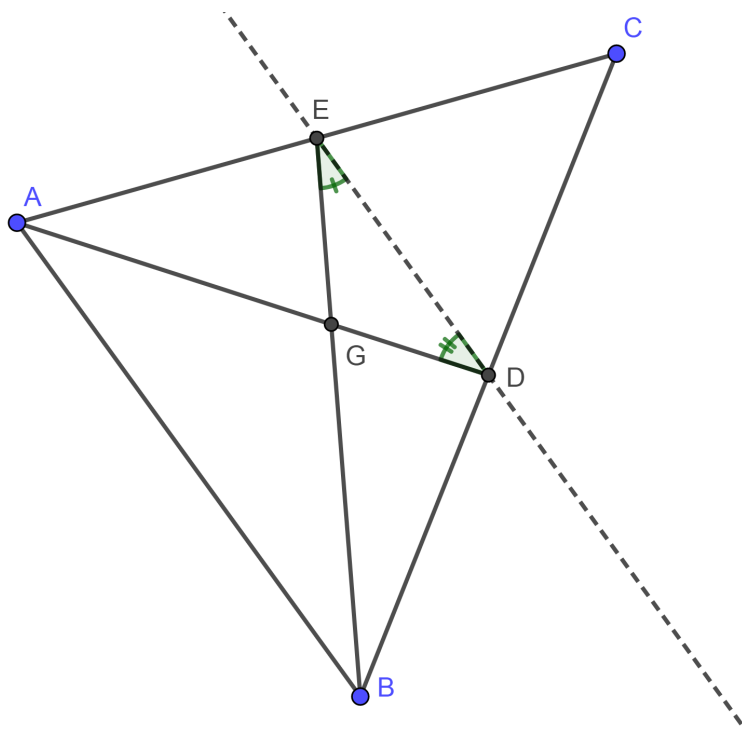


Figura 3.8: Na figura  $D$  e  $E$  são pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ .

e

$$AF = \frac{2}{3}AD, DF = \frac{1}{3}AD.$$

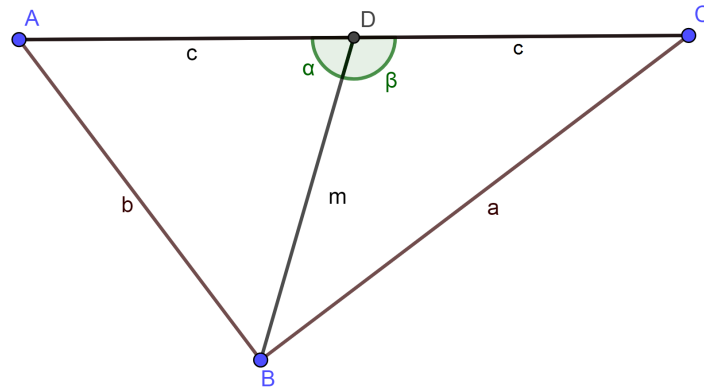
Sem perda de generalidade as igualdades são verificadas para a terceira mediana do triângulo.

□

**Teorema 3.7:** O dobro do quadrado de cada mediana é igual à soma dos quadrados dos lados adjacentes do triângulo subtraído da metade do quadrado do lado que

possui o pé da mediana, ou seja, como na Figura 3.9, temos:

$$2m^2 = b^2 + a^2 - \frac{(2c)^2}{2}. \quad (3.1)$$



**Figura 3.9:** Na figura  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos suplementares.

*Demonstração.* No  $\triangle ABC$ ,  $\underline{BD}$  é uma mediana. Aplicando a Lei dos Cossenos ([2]) nos triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle BDC$  temos:

$$b^2 = c^2 + m^2 - 2c.m.\cos(\alpha) \quad (3.2)$$

$$a^2 = c^2 + m^2 - 2c.m.\cos(\beta) \quad (3.3)$$

E ao somar (3.2) e (3.3) temos:

$$a^2 + b^2 = c^2 + c^2 + 2m^2 = 2c^2 + 2m^2. \quad (3.4)$$

Portanto,

$$2m^2 = b^2 + a^2 - \frac{(2c)^2}{2}.$$

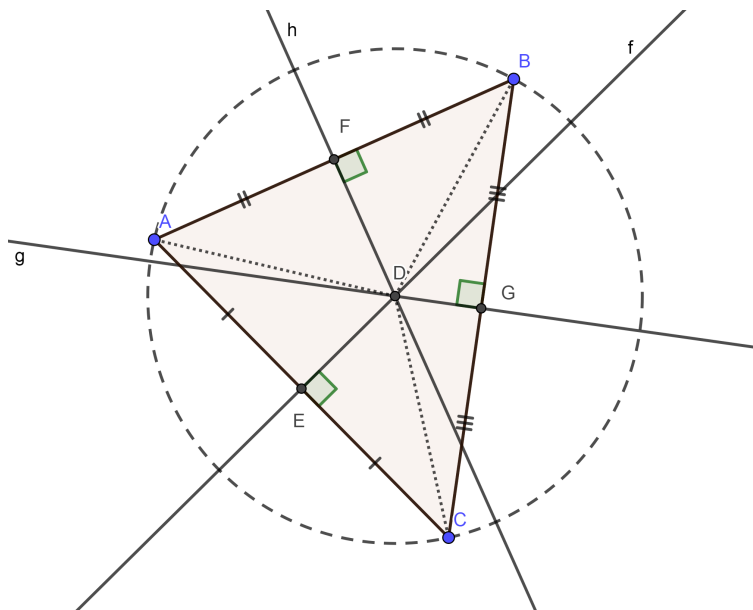
□

## 3.2 Circuncentro

**Definição 3.8:** Mediatriz é a reta perpendicular a um segmento passando por seu ponto médio.

**Teorema 3.9:** As três mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado de **circuncentro**. Esse ponto equidista dos vértices do triângulo.

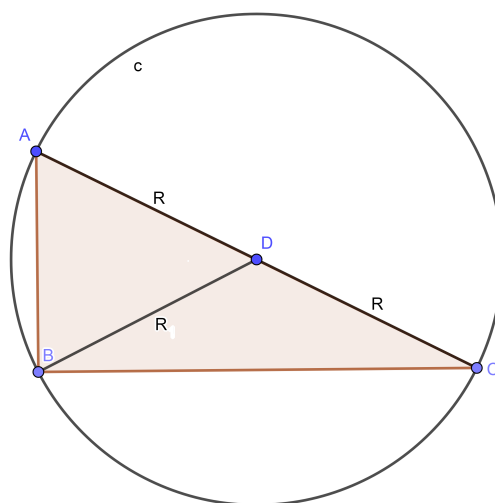
*Demonstração.* Considere as retas  $f$ ,  $g$  e  $h$ , sendo  $f$  e  $g$  mediatrizes dos lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  e  $F$  ponto médio do lado  $\overline{AB}$ , respectivamente. Assim  $E$  e  $G$  são pontos



**Figura 3.10:** Na figura  $ABC$  é um Triângulo qualquer

médios dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente. Com isso temos os triângulos  $\triangle CDE$  e  $\triangle ADE$  congruentes pelo caso (L.A.L.), logo  $\overline{DA} \cong \overline{DC}$ . Analogamente,  $\triangle CDG \cong \triangle BDG$  e  $\overline{DC} \cong \overline{DB}$ . Assim o Ponto  $D$  está equidistante de  $A$  e de  $B$ .  $\triangle CED \cong \triangle AED$  pelo caso (L.A.L.). Assim  $\overline{DC} = \overline{AD}$ . Por transitividade  $\overline{BD} = \overline{AD}$ . Sendo assim  $\triangle AFD \cong \triangle BFD$ , pelo caso (L.L.L.). Com isso  $m\widehat{BFD} = m\widehat{AFD} = 90^\circ$ , sendo  $\overline{DF} \perp \overline{AB}$  e  $h$  a mediatriz do lado  $\overline{AB}$ . Assim as três mediatrizes passam pelo ponto  $D$  **circuncentro**.  $\square$

**Exemplo 3.2.1:** Se  $\triangle ABC$  é um triângulo retângulo em  $B$ , então existe uma circunferência( $c$ ) circunscrita a esse triângulo de diâmetro  $AC$ .



**Figura 3.11**

Como  $D$  é ponto médio do segmento  $\overline{AC}$ , então  $D$  é centro da circunferência( $c$ ), e sendo assim,  $AD = DC = BD = R$  em que  $R$  o raio de ( $c$ ) ( Veja Figura 3.7).

### 3.3 Ortocentro

**Definição 3.10:** Altura é um segmento que parte do vértice do triângulo e chega perpendicularmente ao lado oposto ou prolongamento desse lado.

**Teorema 3.11:** As retas suportes das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado de **ortocentro**.

*Demonstração.* Considere um  $\triangle ABC$  e as retas  $f$ ,  $g$  e  $h$ , paralelas aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente. Utilizando os resultados de retas paralelas cortadas por transversal, ([3]) temos  $F\hat{B}A \cong C\hat{A}B$ ,  $F\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ ,  $E\hat{C}B \cong A\hat{B}C$ ,  $E\hat{B}C \cong A\hat{C}B$ ,  $D\hat{C}A \cong B\hat{A}C$ ,  $D\hat{A}C \cong B\hat{C}A$ .

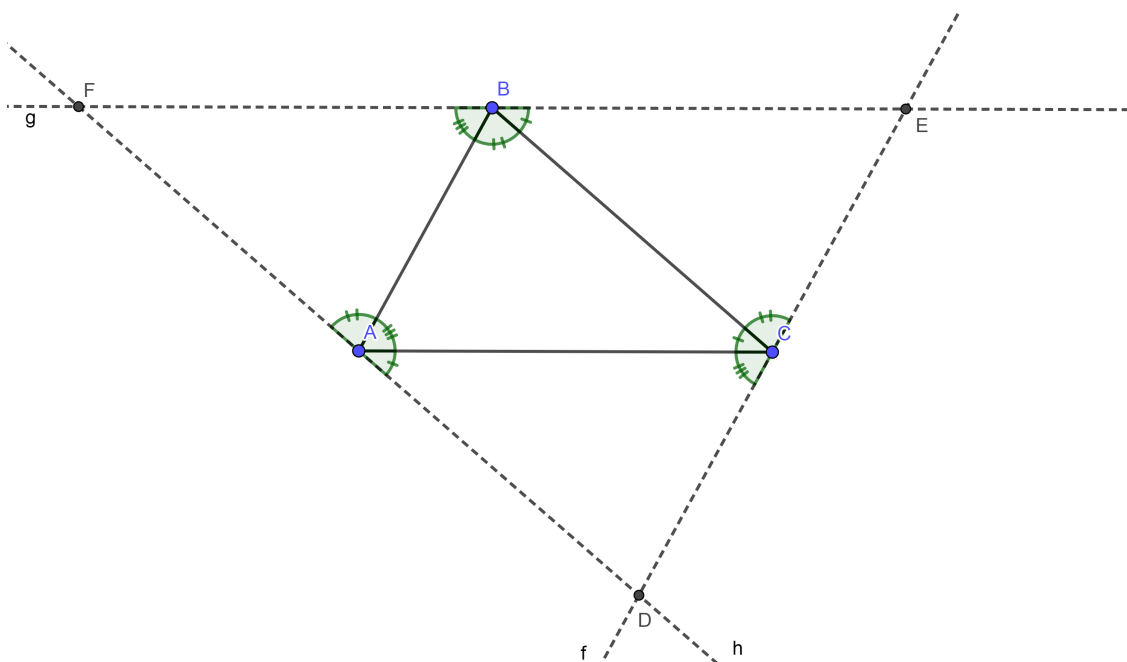


Figura 3.12

Logo, pelo caso de congruência (A.L.A),  $\triangle ABC \cong \triangle ABF \cong \triangle CEB \cong \triangle DCA$  e por consequência  $\overline{BF} \cong \overline{BE}$ ,  $\overline{CE} \cong \overline{CD}$ ,  $\overline{AD} \cong \overline{AF}$ .

Tracemos então as mediatrizes do triângulo  $\triangle DEF$

Como as retas  $f$ ,  $g$  e  $h$  são paralelas aos lados do triângulo  $ABC$ , as mediatrizes do triângulo  $DEF$  são perpendiculares também aos lados do triângulo  $ABC$ , logo, são retas suportes das alturas do triângulo  $ABC$ .

Mas na seção anterior (Teorema 3.9), mostramos que as mediatrizes se interceptam em um único ponto, logo as alturas(ou prolongamentos) do triângulo  $\triangle ABC$  se encontram em um único ponto, chamado de **ortocentro**.

□

**Corolário 3.12:** O circuncentro de um triângulo é o ortocentro de seu triângulo medial.

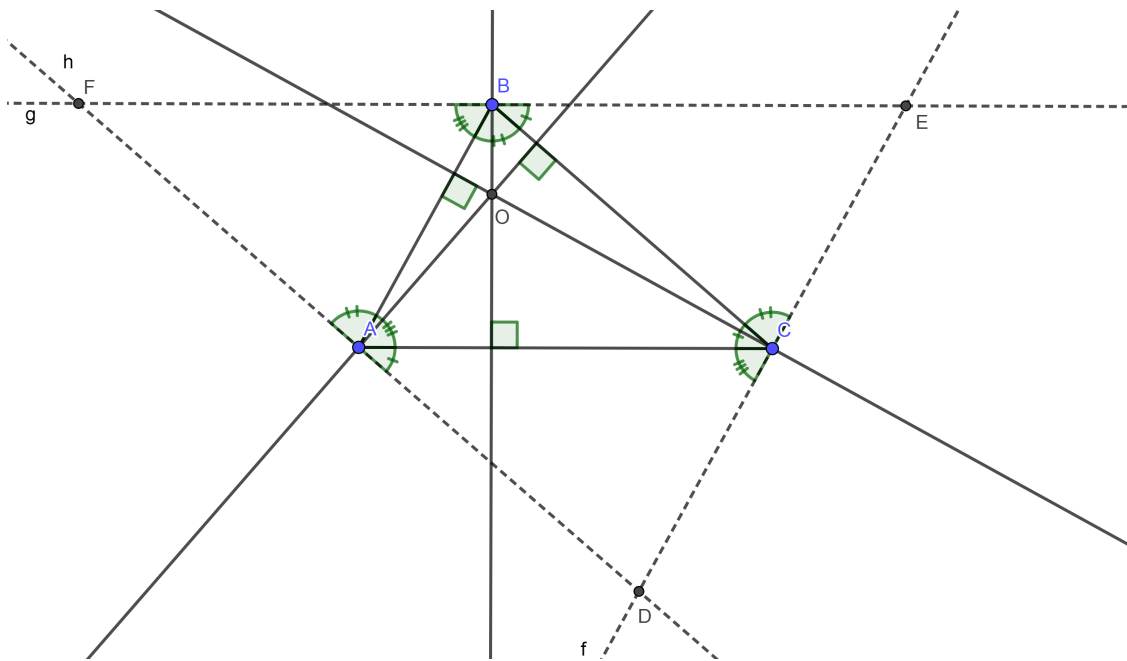


Figura 3.13

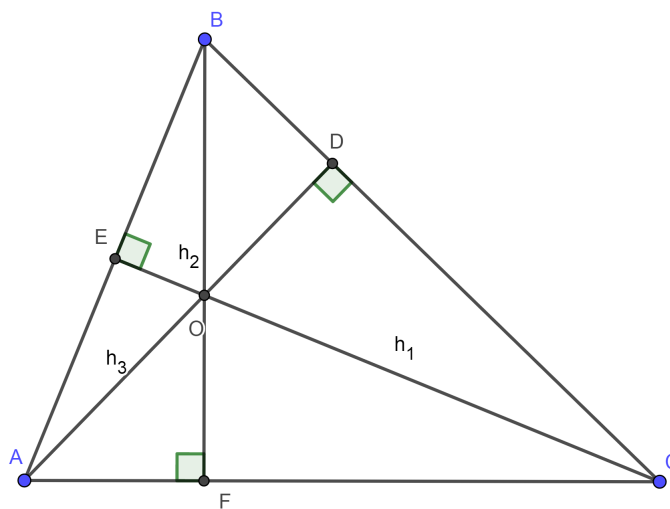


Figura 3.14: Na figura  $\triangle ABC$  é um triângulo acutângulo

**Teorema 3.13:** O produto de dois lados de um triângulo é igual a altura relativa ao terceiro lado multiplicado pelo dobro do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

*Demonstração.* Na figura 3.16, como no  $\triangle ABD$ ,  $\overline{AE}$  é altura, então

$$\text{sen } \alpha = \frac{BE}{AB}, \tag{3.5}$$

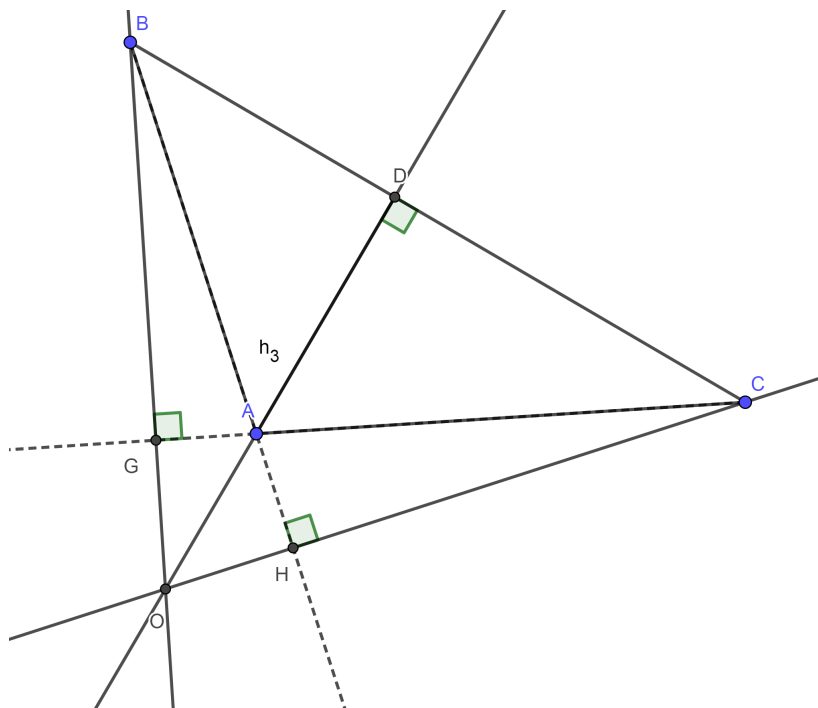


Figura 3.15: Na figura  $\triangle ABC$  é um triângulo obtusângulo

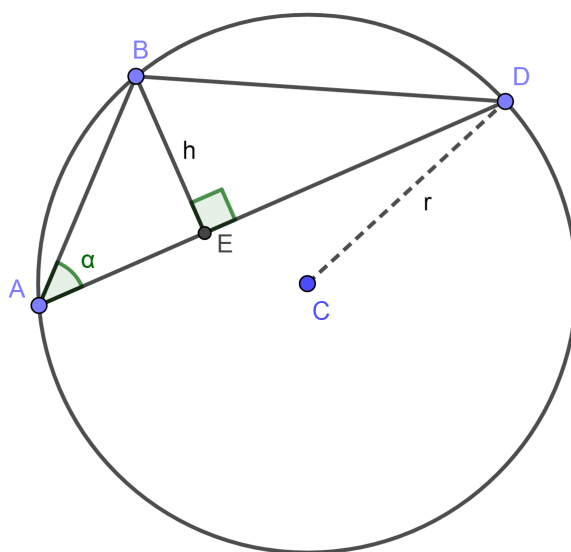


Figura 3.16

mas pela lei dos senos ([2]),

$$\frac{BD}{\text{sen } \alpha} = 2r, \tag{3.6}$$

em que  $r$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABD$ .

De (3.5) e (3.6), obtemos

$$\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{2r}.$$

Assim,

$$BD \cdot AB = BE \cdot 2r.$$

□

### 3.4 Incentro

**Definição 3.14:** A **bissetriz (interna)** de um triângulo é um segmento de reta de extremos em um dos vértices do triângulo e no lado oposto a esse vértice, dividindo o ângulo desse vértice em duas partes iguais.

**Teorema 3.15:** As três bissetrizes de um triângulo concorrem em um ponto interno ao triângulo chamado de **incentro**. Esse ponto equidista dos lados desse triângulo.

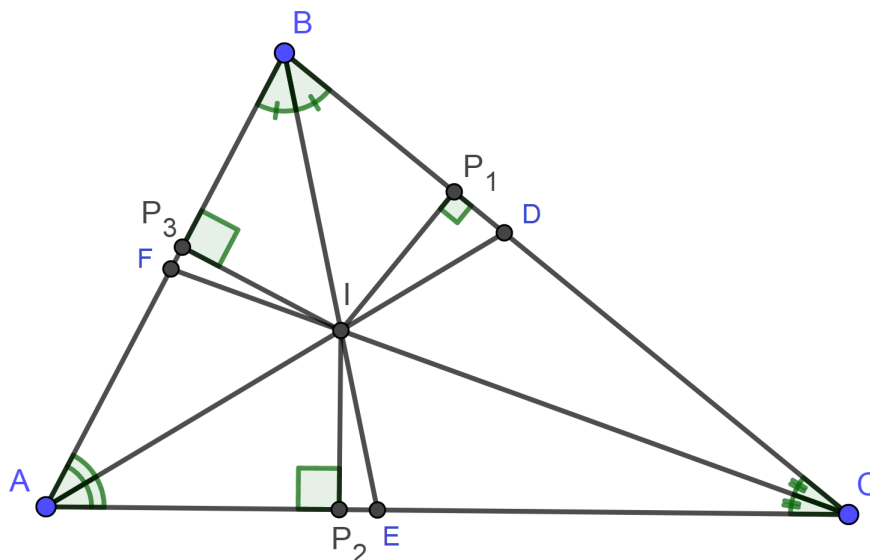


Figura 3.17

*Demonstração.* Claramente, duas bissetrizes internas no triângulo se interceptam. No  $\triangle ABC$ ,  $\overline{AI}$  e  $\overline{BI}$  são bissetrizes internas do triângulo  $ABC$ . A partir do ponto  $I$  considere as perpendiculares  $IP_1$ ,  $IP_2$  e  $IP_3$  aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  respectivamente. Como os triângulos  $P_3AI$  e  $P_2AI$  possuem  $\widehat{P_3} \cong \widehat{P_2}$  e  $P_1\widehat{AI} \cong P_2\widehat{AI}$ , então pelo corolário (A.A.),  $\triangle P_3AI \sim \triangle P_2AI$ . Mas  $AI$  é hipotenusa comum nos dois triângulos, logo  $\triangle P_2AI \cong \triangle P_3AI$ , e assim  $\overline{IP_2} \cong \overline{IP_3}$ . De forma análoga  $\overline{IP_3} \cong \overline{IP_1}$ , e assim  $\overline{IP_1} \cong \overline{IP_2} \cong \overline{IP_3}$ . Traçando agora a semirreta suporte de  $\overline{CI}$ , temos os triângulos  $\triangle CP_2I$  e  $\triangle CP_1I$  que possuem a mesma hipotenusa. Como  $P_1 = P_2$ , então pelo caso (cateto e hipotenusa)  $\triangle CP_2I \cong \triangle CP_1I$ , concluindo que  $P_1\widehat{CI} \cong P_2\widehat{CI}$ , ou seja as bissetrizes se encontram em  $I$  (**incentro**) e são equidistantes dos lados do triângulo.

□

**Teorema 3.16:** Em um triângulo, o pé da perpendicular a uma bissetriz partindo de um outro vértice fica no lado do triângulo medial oposto ao primeiro vértice considerado.

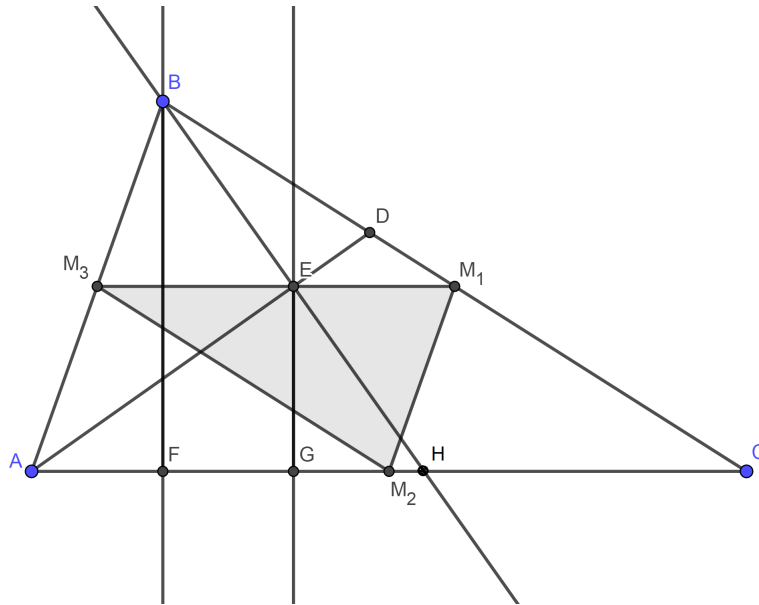


Figura 3.18

*Demonstração.* Considere a **bissetriz**  $\overline{AD}$  do ângulo  $\widehat{BAC}$ . A partir de  $B$ , traçamos a perpendicular  $\overline{BE}$  ao segmento  $\overline{AD}$ . Essa perpendicular intersecta  $\overline{AC}$  em  $H$ . Como  $\overline{AE}$  é perpendicular a  $\overline{BH}$  e bissetriz de  $\widehat{BAC}$ , então  $E$  é ponto médio do lado  $\overline{BH}$ . Traçando as perpendiculares  $\overline{EG}$  e  $\overline{BF}$  ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$ , temos que  $\triangle EHG \sim \triangle BHF$  pelo caso (A.A.). Logo, como  $EH = BE$ , temos que

$$EG = \frac{BF}{2}.$$

Ou seja, o ponto  $E$  estará na base média do triângulo  $ABC$ , logo estará no lado triângulo medial.

□

# A Circunferência de Nove Pontos e a Reta de Euler

---

A partir desse momento, será feita uma retomada de todos os conceitos anteriores para chegarmos ao cerne de toda dissertação. Compondo e estruturando a *Circunferência de Nove Pontos* a partir de construções geométricas.

## 4.1 Circunferência de Nove Pontos

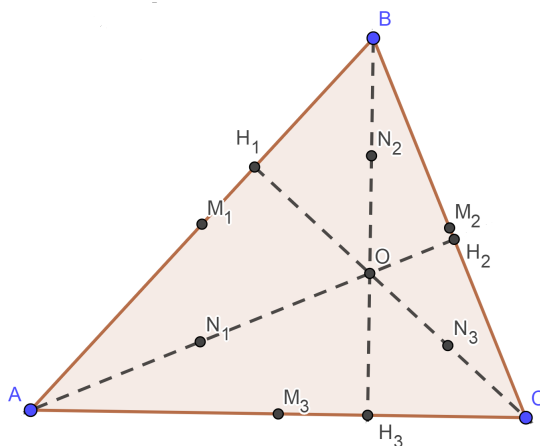
Karl Wilhelm Feuerbach(30/05/1800 - 12/03/1834) foi um geômetra alemão que leva o crédito pela descoberta da circunferência de 9 pontos. Apesar de o problema já ser conhecido em referências mais antigas, o teorema só veio a ser demonstrado por Feuerbach no livro “Eigenschaften einiger merk-würdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren(1822) (Propriedades de alguns pontos especiais no plano de um triângulo, e várias retas e figuras determinadas por estes pontos: um tratamento analítico-trigonométrico). Alguns atribuem a descoberta do teorema a Charles J.Brianchou e Jean Victor Poncelet que publicaram em 1822 um artigo com o “Teorema da Circunferência de Nove Pontos”.

A partir desse momento utilizaremos todas as ferramentas já demonstradas nos capítulos anteriores para mostrar como é formada a *Circunferência de Nove Pontos*.

**Teorema 4.1:** A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles passa também pelos pontos médios dos lados do triângulo. Assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ponto de interseção das perpendiculares.

*Demonstração.* Consideremos primeiramente o  $\triangle ABC$  com ortocentro  $O$ , pés das alturas  $H_1, H_2, H_3$ , pontos médios dos lados do triângulo  $M_1, M_2$  e  $M_3$  e pontos médios dos segmentos de extremos em cada vértice e no ortocentro  $N_1, N_2$  e  $N_3$ .

Traçando  $\overline{N_1N_3}$  e  $\overline{M_1M_2}$  temos que  $\triangle AOC \sim \triangle N_1ON_3$  e  $\triangle ABC \sim \triangle M_1BM_2$ , ambos pelo caso (L.A.L.).



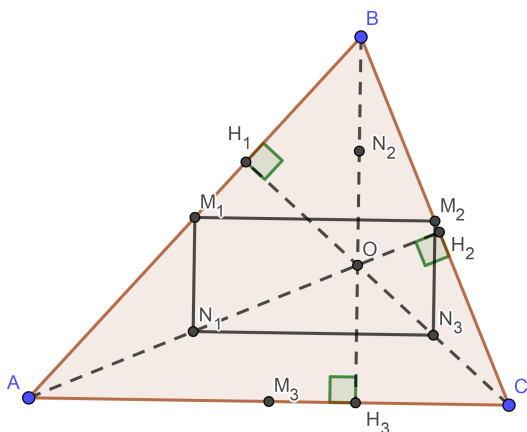
**Figura 4.1:** Na figura  $\triangle ABC$  é um Triângulo qualquer.

Como  $M_1, M_2, N_1, N_3$  são pontos médios de  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AO}$  e  $\overline{OC}$ , então

$$\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_3} = \frac{\overline{CA}}{2}.$$

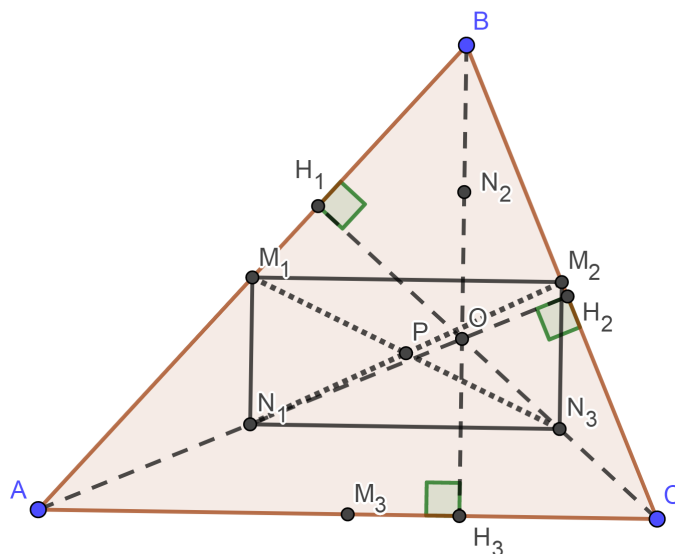
De forma análoga  $\triangle AOB \sim \triangle AN_1M_1$  e  $\triangle COB \sim \triangle CN_3M_2$ , ambos pelo caso (L.A.L.). Logo

$$\overline{M_1N_1} = \overline{N_3M_2} = \frac{\overline{OB}}{2}.$$



**Figura 4.2:** Na figura  $M_1N_1N_3M_2$  é um paralelogramo.

Como  $\overline{M_1N_1} // \overline{OB} // \overline{N_3M_2}$  e, uma vez que a reta suporte de  $\overline{OB}$  é perpendicular a  $\overline{AC}$ , que por sua vez é paralelo a  $\overline{M_1M_2}$  e  $\overline{N_1N_3}$ , então temos que os ângulos internos do quadrilátero  $M_1N_1N_3M_2$  são retos.



**Figura 4.3:** Na figura  $M_1N_1N_3M_2$  é um retângulo.

Perceba que as diagonais desse retângulo são os segmentos  $\overline{N_1M_2}$  e  $\overline{N_3M_1}$ . Esse fato será usado posteriormente na demonstração.

De forma análoga podemos construir o retângulo  $M_1N_2N_3M_3$  e também o retângulo  $N_1N_2M_2M_3$ .

Repare, nas Figuras 4.3 e 4.4, que a diagonal  $M_1N_3$  é comum aos retângulos. Nas Figuras 4.3 e 4.5 a diagonal  $\overline{M_1N_2}$  também é comum, e nas Figuras 4.4 e 4.5, a diagonal  $\overline{M_2N_3}$  é comum nos retângulos destacados.

Repare ainda que o Ponto  $P$  pertence a todas essas diagonais e é ponto médio dessas.

Portanto, concluímos que  $\overline{M_1N_3}$ ,  $\overline{M_3N_2}$  e  $\overline{N_1M_2}$  são todos congruentes (as diagonais de um retângulo são congruentes [3]) e com ponto médio  $P$ . Sendo assim 6 dos 9 pontos sugeridos compõem a circunferência  $c$  de raio  $PM_1$ , por exemplo.

Resta-nos concluir que os pés das alturas  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  também são pontos desse círculo. De fato, como  $\overline{M_1N_3}$  é um diâmetro da circunferência  $c$  de centro  $P$  e  $M_1\widehat{H_1}N_3$  é reto, então  $H_1$  é ponto da circunferência. Para mais detalhes ver Teorema 3.5 e Exemplo 3.2.1

Analogamente,  $H_2$  e  $H_3$  são pontos da circunferência  $c$ .

□

## 4.2 Reta de Euler

Muitas vezes, de forma errônea, a *Circunferência de Nove Pontos* também é chamada de “Círculo de Euler”. Na verdade, Euler provou que em qualquer triângulo o circuncentro, o baricentro e o ortocentro pertencem a uma mesma reta.

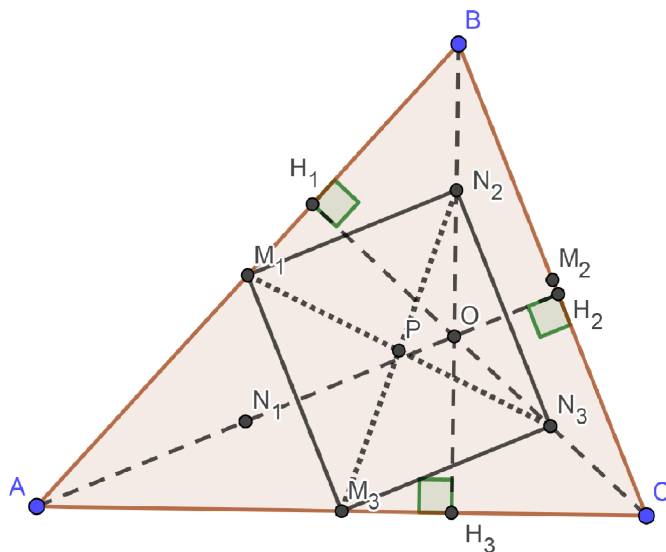


Figura 4.4: Na figura  $M_1N_2N_3M_3$  é um retângulo.

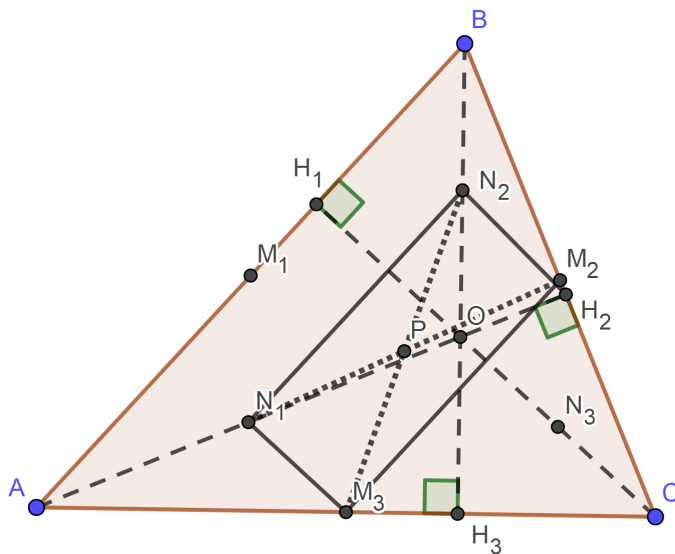


Figura 4.5: Na figura  $N_1N_2M_2M_3$  é um retângulo.

**Teorema 4.2:** O **circuncentro**, o **baricentro** e **ortocentro** de um triângulo são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro na razão 1:2.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e os pontos médios  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente. Repare que pelo Caso (L.L.L.) (Teorema 2.17), os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle M_aM_bM_c$  são semelhantes na razão 1:2.

Além disso as retas suportes das alturas do triângulo  $\triangle ABC$  coincidem com as mediatrizes do triângulo  $\triangle ABC$ . Assim temos o ponto  $O$  como circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$

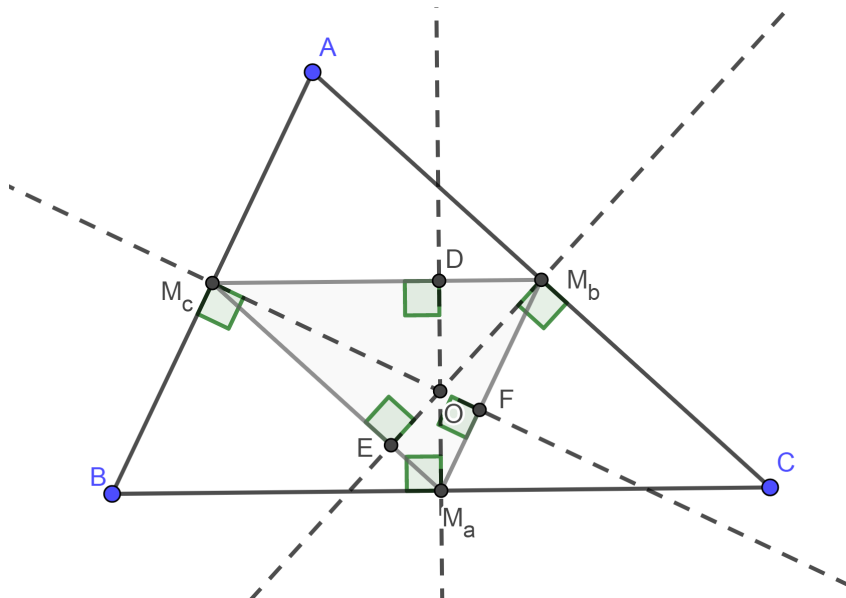


Figura 4.6

O quadrilátero  $AM_cM_aM_b$  é um paralelogramo, pois suas diagonais  $\overline{AM_a}$  e  $\overline{M_bM_c}$  se cruzam no ponto  $Q$  que, sendo assim, é ponto médio do segmento  $\overline{M_bM_c}$  (as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio [3]). Ou seja, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle M_aM_bM_c$  possuem as mesmas retas suportes de suas medianas. Consideremos o ponto  $G$  como baricentro desses triângulos.

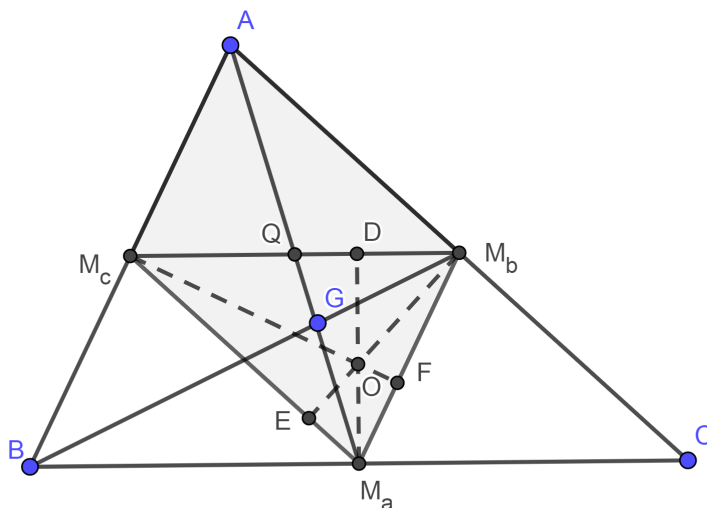


Figura 4.7

Pelo Teorema 3.6  $AG = 2M_aG$ , e por semelhança,  $AH = 2M_aO$ .  $AH$  e  $OM_a$

são ambos perpendiculares a  $\overline{BC}$ , logo  $\widehat{HAG} \cong \widehat{GM_aO}$ . Portanto  $\triangle AGH \sim \triangle M_aGO$  com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ , e daí  $\widehat{AGH} \cong \widehat{M_aGO}$ .

Assim  $O, G$  e  $H$  são colineares e  $OG = \frac{1}{2}GH$ .

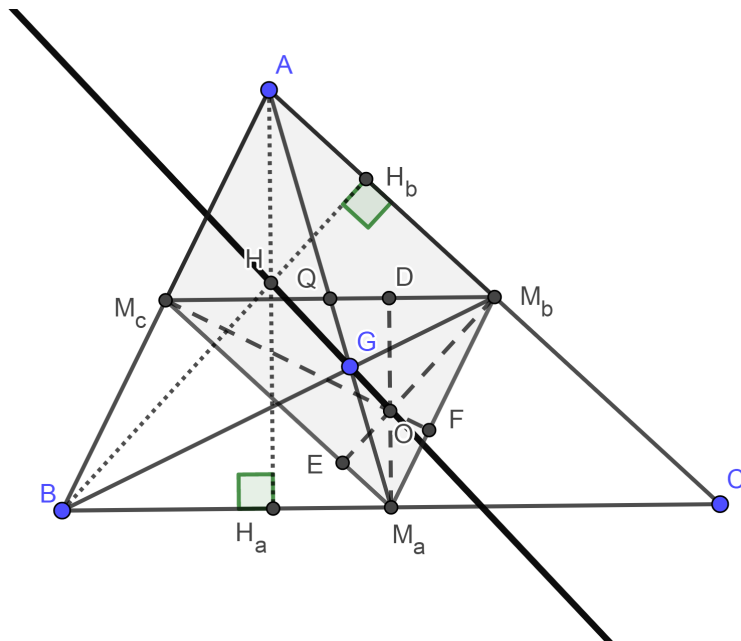


Figura 4.8

□

**Teorema 4.3:** O centro da *Circunferência de Nove Pontos* pertence à *Reta de Euler*. Mais ainda, tal centro é o ponto médio do segmento que une o circuncentro e o ortocentro do triângulo.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  com suas alturas  $AH_1, BH_2$ , mediatrizes  $m_1, m_2$  e ortocentro e circuncentro respectivamente  $O$  e  $R$ . O ponto  $K$  é ponto médio do segmento que une ortocentro e vértice  $A$ , e por definição, pertence à *Circunferência de Nove Pontos. O Ponto  $H_1$  é pé da altura  $AH_1$  e também pertence à circunferência de nove pontos.  $M_1$  é ponto médio do lado  $BC$  do triângulo  $\triangle ABC$  e, por sua vez, também pertence à *Circunferência de Nove Pontos.**

Como  $AH_1 \perp BC$ , então  $\triangle KH_1M_1$  é retângulo com  $\widehat{KH_1M_1}$  reto.

Consideremos ainda o ponto médio  $I$  do segmento  $\overline{KM_1}$ .

Pelo Teorema 3.5,  $I$  equidista de  $K, H_1$  e  $M_1$ . Logo  $I$  é o centro da *Circunferência de Nove Pontos*.

Considere a *Reta de Euler* e sua interseção com o segmento  $\overline{KM_1}$  em um ponto  $P$ . Mostraremos que  $P$  é ponto médio de  $\overline{KM_1}$ , logo  $P = I$ . Como  $\overline{AH_1}$  é altura do  $\triangle ABC$  e  $m_1$  é mediatriz do lado  $\overline{BC}$ , então  $AH_1 \parallel m_1$ . Assim,  $\widehat{PRM_1} \cong \widehat{POK}$  e  $\widehat{OKP} \cong \widehat{RM_1P}$ .

Logo

$$\triangle M_1RP \sim \triangle KOP.$$

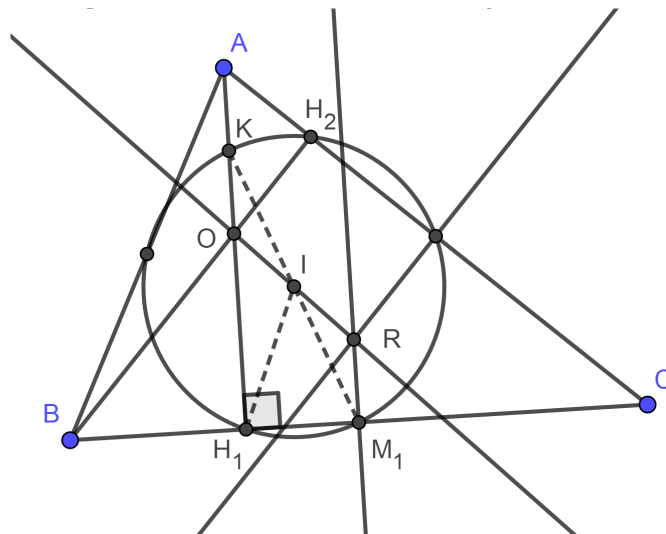


Figura 4.9

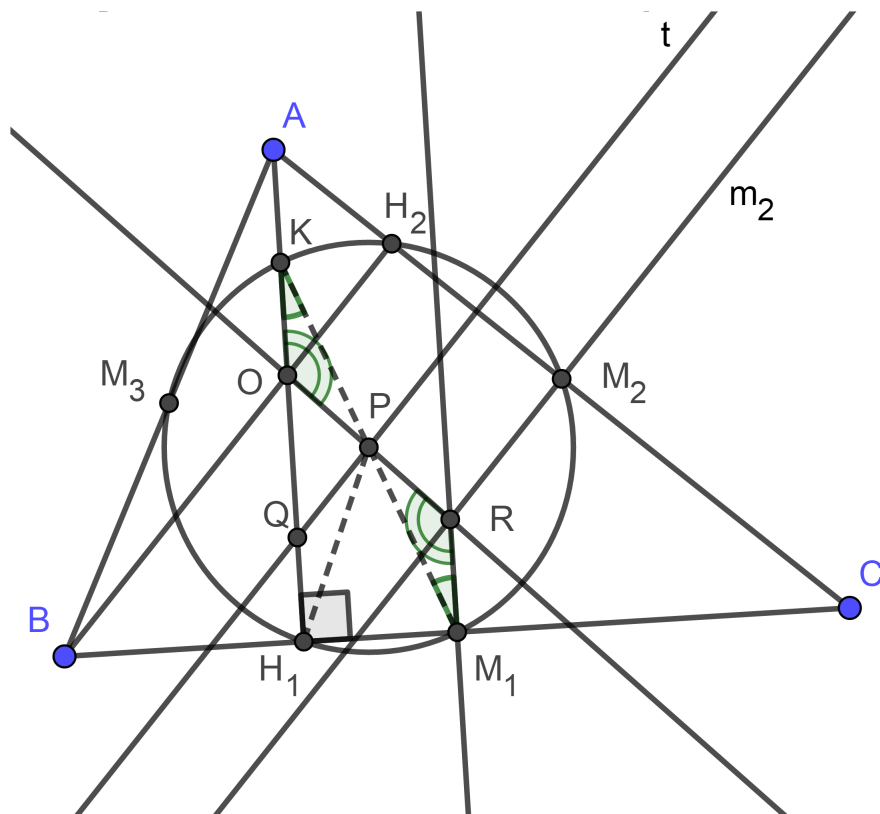


Figura 4.10

Mas, por definição  $OK = \frac{OA}{2}$ , logo a razão de semelhança entre o  $\triangle ABC$  e o triângulo medial é 1;2, e como  $R$  é ortocentro do triângulo medial  $\triangle M_1M_2M_3$ . Sendo  $M_2$  e  $M_3$  pontos médios de  $AC$  e  $AB$  respectivamente, então  $RM_1 = OK$ . Assim  $\triangle PRM_1 \cong \triangle POK$  e conseqüentemente  $PK = PM_1$ .

□

**Lema 4.4:** Os raios das circunferências circunscritas a triângulos semelhantes estão na mesma razão de semelhança.

*Demonstração.* Considere o  $\triangle ABC$  e o  $\triangle DEF$  semelhantes, sendo  $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{E}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{F}$ . Assim,  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = K$ . Considere  $R_1$  e  $R_2$  os centros das circunferências circunscritas aos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  respectivamente. Temos  $\overline{AR_1} = \overline{BR_1} = \overline{CR_1}$  e  $\overline{DR_2} = \overline{ER_2} = \overline{FR_2}$ . Mas, pela Lei dos Senos (veja [2]), temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \widehat{C}} = 2AR_1$$

e

$$\frac{\overline{EF}}{\text{sen } \widehat{D}} = \frac{\overline{DF}}{\text{sen } \widehat{E}} = \frac{\overline{DE}}{\text{sen } \widehat{F}} = 2DR_2.$$

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{2AR_1} = \frac{\overline{DE}}{2DR_2}.$$

Portanto,

$$\frac{2AR_1}{2DR_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \implies \frac{\overline{AR_1}}{\overline{DR_2}} = K.$$

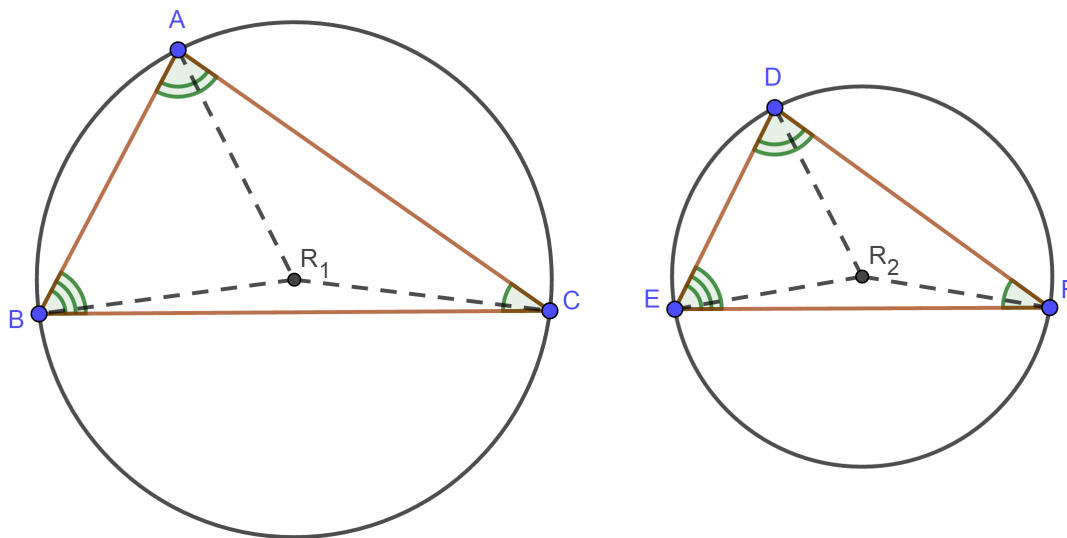


Figura 4.11

□

**Teorema 4.5:** O raio da *Circunferência de Nove Pontos* é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e os pontos médios  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente.

Uma vez que  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\overline{M_1M_3}$ ,  $\overline{M_2M_3}$  são bases médias do  $\triangle ABC$ , temos que  $\triangle ABC \sim \triangle M_1M_2M_3$  na razão 2 : 1. Exemplo 2.2.1

Considere os circuncentros  $R_1$  e  $R_2$  dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle M_1M_2M_3$  respectivamente. Por definição, a *Circunferência de Nove Pontos* de raio  $r_2$  passa

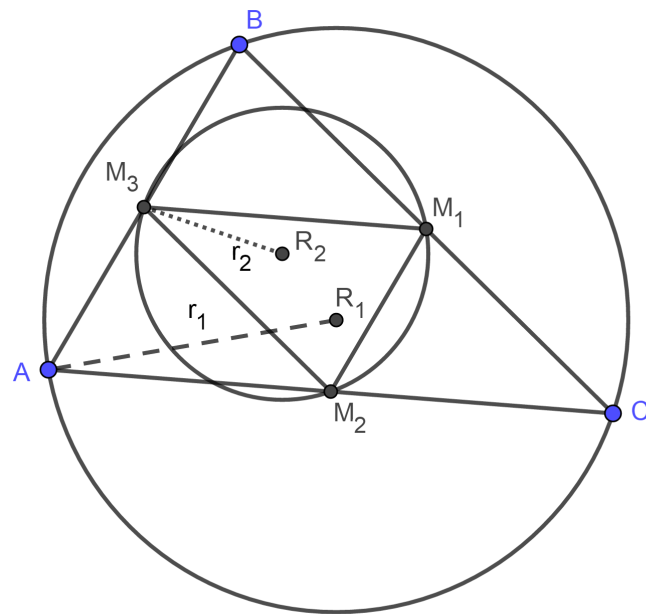


Figura 4.12

por  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Também a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$  de raio  $r_1$  passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Logo

$$r_1 = \frac{r_2}{2}.$$

□

**Definição 4.6:** Considere o  $\triangle ABC$  de ortocentro  $O$ . O triângulo  $\triangle M_1M_2M_3$ , sendo  $M_1, M_2$  e  $M_3$  pontos médios dos segmentos  $\overline{AO}$ ,  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$  respectivamente, é chamado *Triângulo de Euler*.

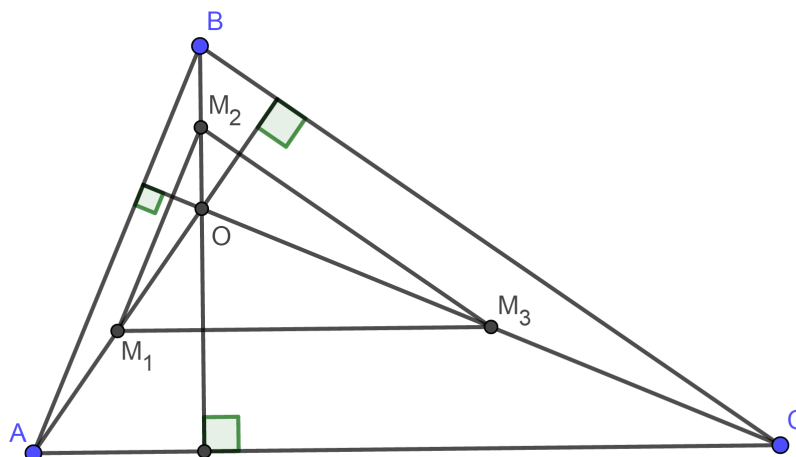


Figura 4.13

**Teorema 4.7:** O Triângulo de Euler é congruente ao triângulo medial de um dado triângulo.

*Demonstração.* Considere o  $\triangle ABC$ , de ortocentro  $O$ . Considere ainda os pontos médios  $M_1, M_2, M_3$  e  $O_1, O_2, O_3$  dos segmentos  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AO}, \overline{OB}$  e  $\overline{OC}$  respectivamente.

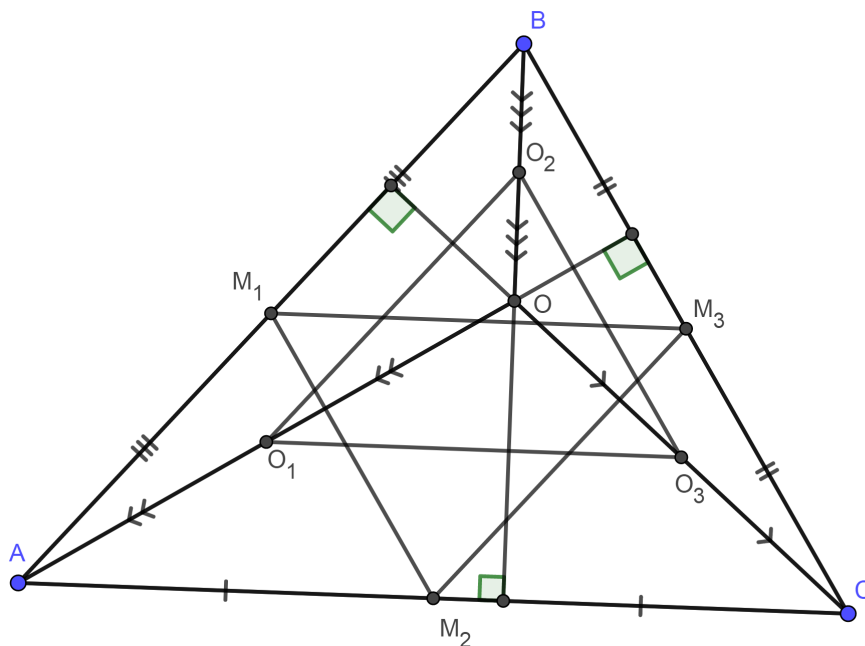


Figura 4.14

Como  $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$  e  $\overline{M_2M_3}$  são bases médias do triângulo  $\triangle ABC$ , então esses segmentos valem metade dos lados  $\overline{BC}, \overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Ou seja,

$$\overline{M_2M_3} = \frac{\overline{AB}}{2}, \quad \overline{M_1M_3} = \frac{\overline{AC}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{M_1M_2} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Por outro lado,  $\overline{O_1O_2}, \overline{O_1O_3}$  e  $\overline{O_2O_3}$  são bases médias dos triângulos  $\triangle ABO, \triangle ACO$  e  $\triangle BCO$ , respectivamente. Logo,

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AB}}{2}, \quad \overline{O_1O_3} = \frac{\overline{AC}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{O_2O_3} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Portanto, pelo caso de congruência de triângulos (L.L.L), temos que

$$\triangle M_1M_2M_3 \cong \triangle O_3O_2O_1.$$

□

# Atividades

---

Nesse capítulo, iremos sugerir atividades que poderão ser realizadas dentro do contexto escolar. Para isso, utilizaremos como ferramenta básica o programa de construções geométricas **Geogebra**. Ressaltando que a utilização de tal programa é um facilitador de aprendizagem. Inicialmente a proposição é que todas essas atividades sejam aplicadas no ensino médio, objetivando a observação qualitativa dos resultados aplicados em vários aspectos das construções geométricas. Eventualmente essas atividades podem ser aplicadas no ensino fundamental II, adaptando o grau de dificuldade e interpretação das construções. Um objetivo primário, tanto aplicada no ensino fundamental quanto no médio, é tornar prático o entendimento das construções dos pontos notáveis, bem como os teoremas envolvendo esses *Pontos Notáveis*, *Circunferência de Nove Pontos* e da *Reta de Euler*. Em um segundo momento, tentar provocar curiosidade em novas construções e teoremas nos triângulos.

## 5.1 Atividade 1

**PRÉ REQUISITOS:** Saber fazer construções básicas usando régua e compasso.

**PÚBLICO ALVO:** Alunos do ensino fundamental a partir do oitavo ano e médio até a terceira série. Preferencialmente grupos de até 20 alunos para melhor acompanhamento.

**METODOLOGIA:** Em princípio, aula expositiva para introduzir o assunto e na sequência uso do aplicativo **Geogebra** com participação ativa dos alunos em estações individuais.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Quadro e pincel para a aula expositiva e sala com computadores para aplicação dos resultados discutidos em sala de aula.

**OBJETIVOS:** Levar o aluno a concluir as propriedades dos elementos notáveis citados a seguir. Concluir, por meio do uso do aplicativo, a formação da *Reta de Euler*.

Inicialmente será realizada uma aula introdutória sugerindo a atividade que será proposta para 5 aulas de 50 minutos. As duas primeiras aulas mostrarão a construção de cada um dos pontos notáveis utilizando régua e compasso. A partir desse momento, utilizaremos o aplicativo **Geogebra**.

Utilizando o programa **Geogebra**, construa um triângulo de vértices  $ABC$

- (a) Marque os pontos médios  $M$ ,  $N$  e  $P$  dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ .
- (b) Trace as medianas  $\overline{CM}$ ,  $\overline{BN}$  e  $\overline{AP}$ .
- (c) Marcar o ponto de encontro  $Q$  das três medianas traçadas.
- (d) Movimente um dos vértices do triângulo  $\triangle ABC$  e observe o que acontece com as medianas traçadas anteriormente. (Figura 5.1) Repita o processo com os demais vértices.

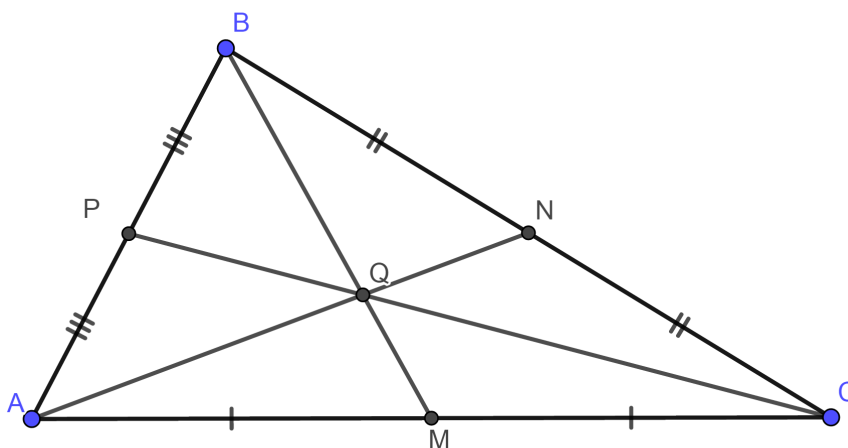


Figura 5.1

Perguntas:

- ( $P_1$ ) Como é chamado o ponto  $Q$ ?
- ( $P_2$ ) É possível, movimentando o triângulo, fazer com que o ponto  $Q$  “saia” do triângulo  $ABC$ ? Em caso afirmativo, por que isso acontece?

O objetivo é fazer com que os alunos comprovem experimentalmente uma característica já explorada em sala de aula, o fato de baricentro e incentro sempre estarão dentro do triângulo.

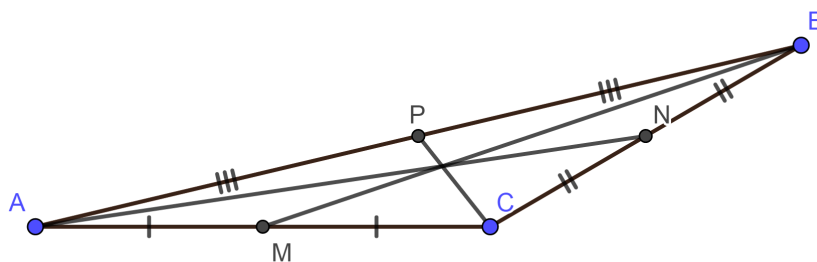


Figura 5.2

- ( $P_3$ ) Encontre uma razão para as medidas dos segmentos  $\overline{AQ}$  e  $\overline{QN}$ .

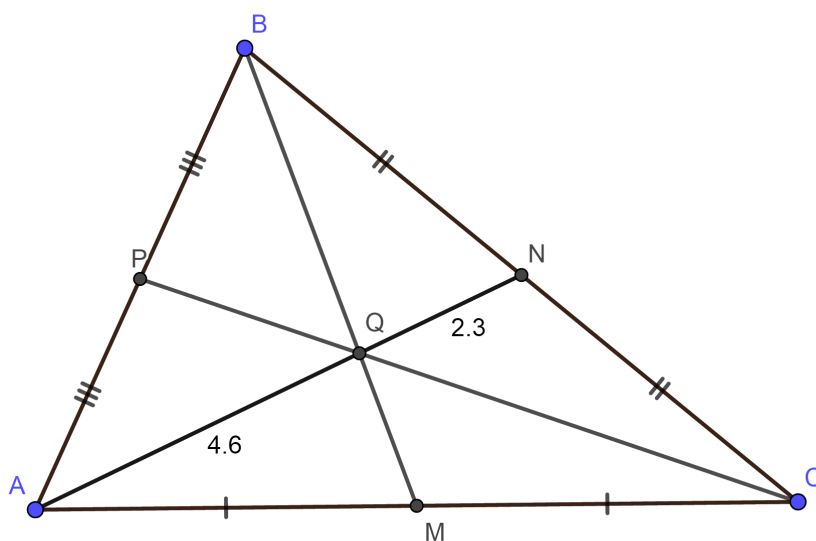


Figura 5.3

- ( $P_4$ ) A razão encontrada em ( $P_3$ ) muda ao movimentarmos os vértices do triângulo  $ABC$ ?

Aqui os alunos devem perceber que mesmo alterando os tamanhos das medianas por meio da movimentação dos vértices do triângulo  $ABC$ , a razão 2:1 não será alterada nos segmentos determinados pelo *baricentro*.

- ( $P_5$ ) A razão encontrada em ( $P_3$ ) é a mesma para  $\overline{BQ}$  e  $\overline{QN}$ ? E para  $\overline{CQ}$  e  $\overline{QM}$ ?

Em seguida, na mesma figura já desenhada no Geogebra,

- (e) Trace as perpendiculares  $r$ ,  $s$  e  $t$  aos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  passando respectivamente por  $M$ ,  $N$  e  $P$ .
- (f) Marcar o ponto de encontro  $R$  das três retas traçadas. (Veja Figura 5.4)

Para melhor visualização, podemos suprimir as medianas traçadas na parte anterior do trabalho. Permanecendo apenas o ponto  $Q$ , interseção dessas medianas.

- ( $P_6$ ) É possível, movimentando o triângulo, fazer com que o ponto  $R$  “saia” do triângulo  $\triangle ABC$ ? Em caso afirmativo, por que isso acontece? Veja (Figura 5.5)

O aluno, nesse momento, poderá verificar que quando o triângulo é obtusângulo, o *circuncentro* estará fora do triângulo. Também é uma característica citada na aula expositiva, mas não experimentada.

Nesse momento, suprima as retas mediatrizes traçadas anteriormente, conservando o ponto  $R$  de interseção dessas mediatrizes.

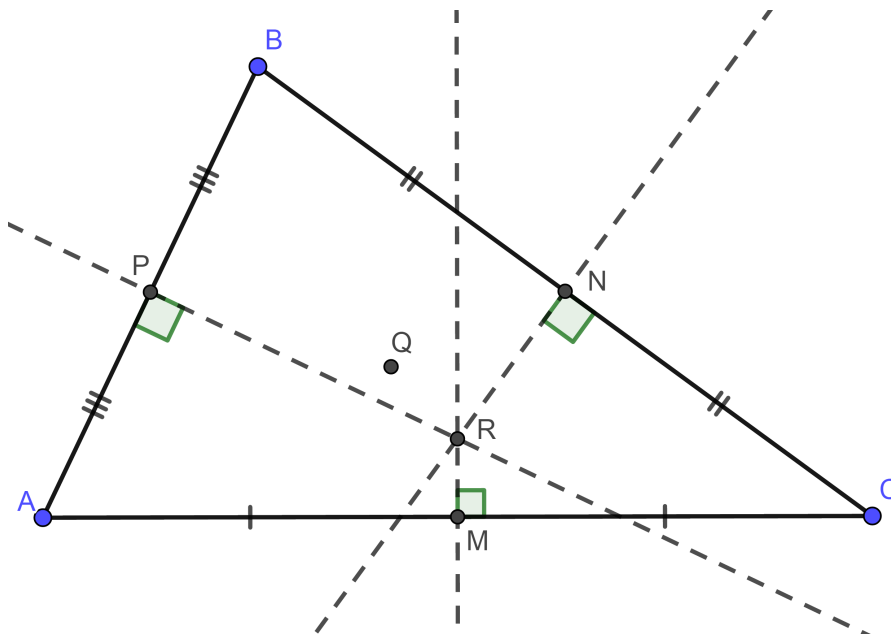


Figura 5.4

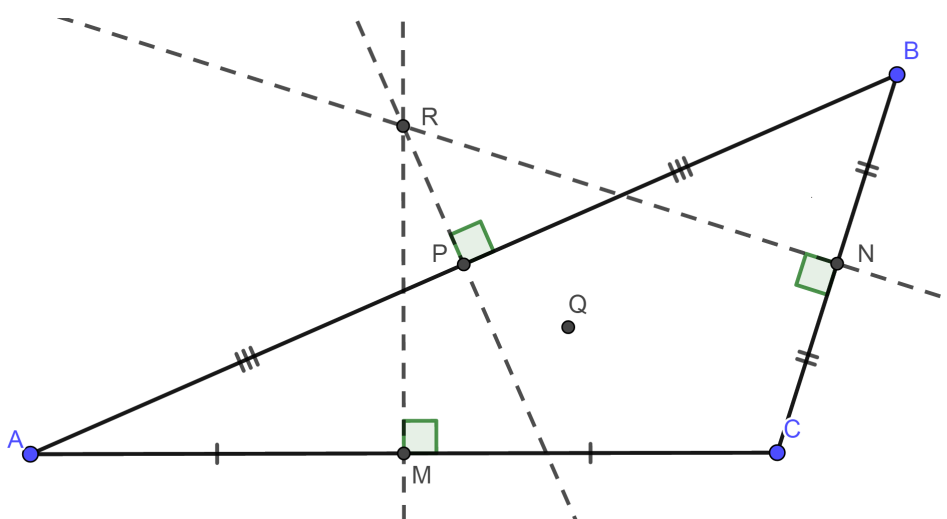


Figura 5.5

- (g) Traçar a reta que passa pelos pontos  $R$  e  $Q$  e coloca-la com uma marcação de destaque. (Veja Figura 5.6)
  - (h) Trace as semirretas perpendiculares aos lados do triângulo  $\triangle ABC$ ,  $AH_1$ ,  $BH_2$  e  $CH_3$  partindo, respectivamente de  $A$ ,  $B$  e  $C$  e com  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  pontos dos lados ou dos prolongamentos dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ .
  - (i) Marcar o ponto de encontro  $T$  das três semirretas traçadas. (Veja Figura 5.7)
  - (j) Movimente um dos vértices do triângulo  $ABC$  e observe o que acontece com os elementos traçados anteriormente. Repita o processo com os demais vértices.
- ( $P_7$ ) É possível, movimentando o triângulo, fazer com que o ponto  $T$  “saia” da reta que passa pelos pontos  $Q$  e  $R$ ?

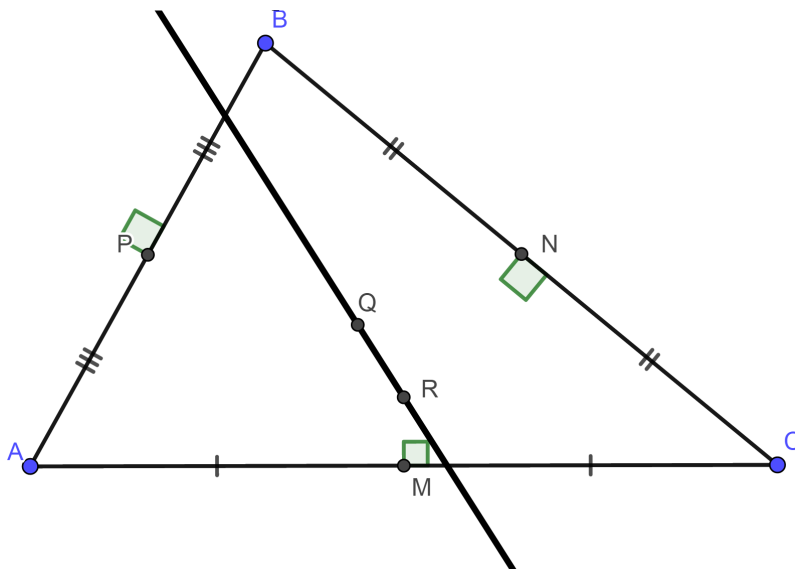


Figura 5.6

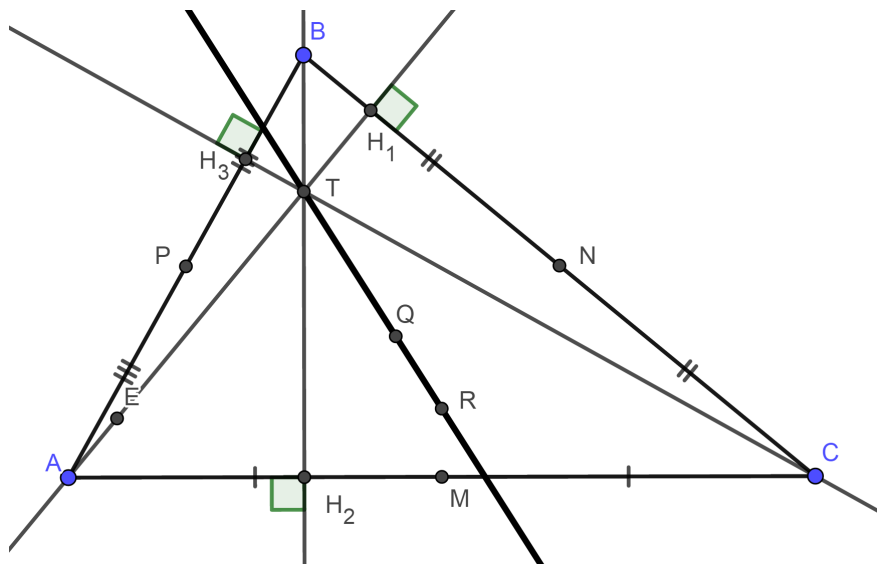


Figura 5.7

Aqui o objetivo é fazer com que o aluno perceba que esses três pontos estão sempre alinhados.

- ( $P_8$ ) **Que conclusão podemos chegar, sabendo que  $Q$  é o ponto de encontro das medianas (baricentro),  $R$  é ponto de encontro das mediatrizes (circuncentro) e  $T$  é o ponto de encontro das alturas (ortocentro)?**

O objetivo é que, a partir das observações dos alunos, seja definido o elemento *Reta de Euler* e começar a citar as características a partir daí.

- (k) Utilize o triângulo  $ABC$  do exemplo anterior, mantendo na figura a *Reta de Euler*, os pontos médios dos lados e os pontos  $R$ ,  $S$  e  $T$ . (Veja Figura 5.8)

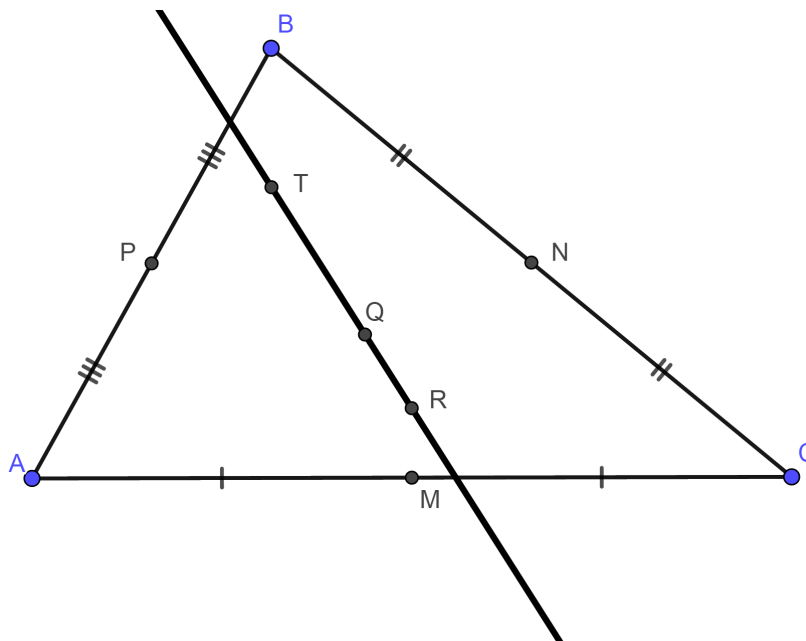


Figura 5.8

## 5.2 Atividade 2

**PÚBLICO ALVO:** Alunos do ensino fundamental a partir do oitavo ano e médio até a terceira série. Preferencialmente grupos de até 20 alunos para melhor acompanhamento.

**METODOLOGIA:** Em princípio, aula expositiva para introduzir o assunto. Na sequência uso do aplicativo **Geogebra** com participação ativa dos alunos em estações individuais.

**RECURSOS UTILIZADOS:** Quadro e pincel na aula teórica. Sala com computadores para aplicação dos resultados discutidos em sala de aula.

**OBJETIVOS:** Levar o aluno a concluir as propriedades dos elementos notáveis citados a seguir. Concluir, por meio do uso do aplicativo, a formação da *Circunferência de Nove Pontos* e sua relação com a *Reta de Euler*.

- (a) Em uma nova circunferência trace as mediatrizes dos lados do triângulo. Marque o ponto  $R$ , interseção das mediatrizes. Trace a circunferência que passa pelos vértices do triângulo  $\triangle ABC$ . (Veja Figura 5.9)
  - (b) Movimente os vértices do triângulo e observe o que acontece com o ponto  $R$ .
- ( $P_1$ ) **Como determinar o raio da circunferência obtida?**

Nesse momento o objetivo é que o aluno perceba que em uma circunferência circunscrita, o raio é calculado de maneira simples, medindo-se a distância do circuncentro a qualquer um dos vértices.

- (c) Exclua as mediatrizes e a circunferência obtida nos itens anteriores e trace as bissetrizes  $\overline{AB_1}$ ,  $\overline{BB_2}$  e  $\overline{CB_3}$  e o ponto  $S$ , interseção dessas bissetrizes.

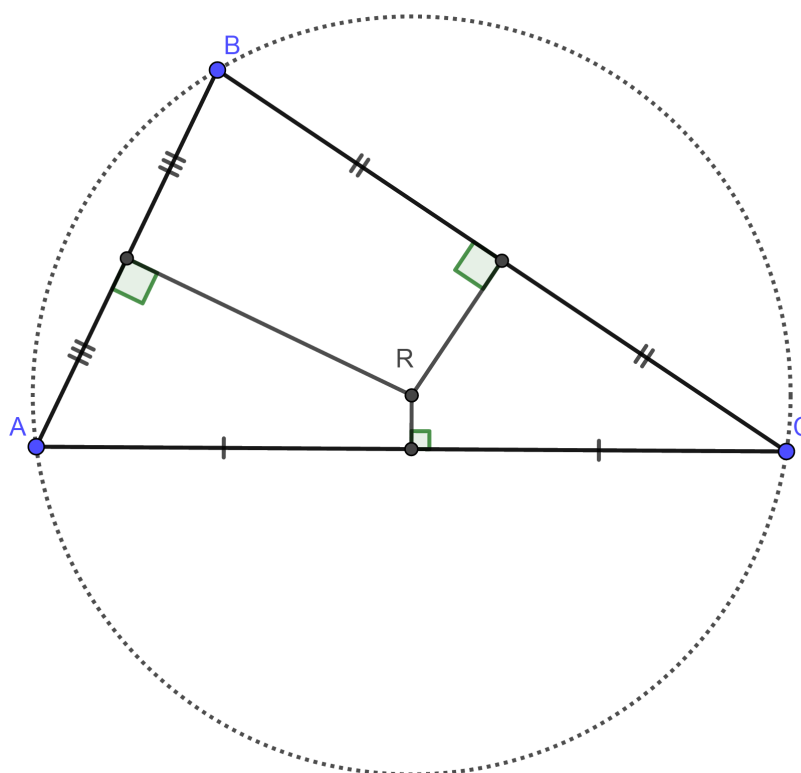


Figura 5.9

( $P_2$ ) Como determinar o raio da circunferência de centro em  $S$  e que está inscrita no triângulo?

Nesse momento, como pré-requisito, os alunos já sabem que há uma circunferência inscrita no triângulo, mas o cálculo do raio dessa circunferência é mais trabalhoso que o cálculo do raio da circunferência circunscrita.

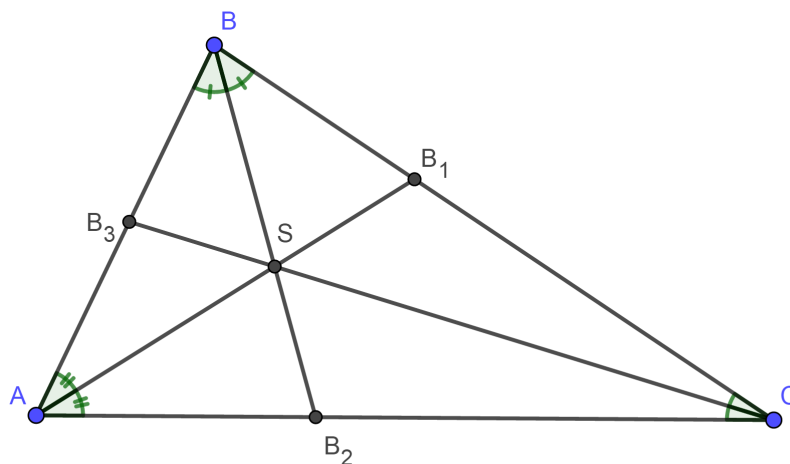


Figura 5.10

(d) Trace a perpendicular  $\overline{SX}$ , ao lado  $\overline{AC}$  do triângulo e desenhe o segmento  $\overline{SX}$ .

Repita o processo para o lado  $\overline{AB}$  com o segmento  $\overline{SY}$  e para o lado  $\overline{BC}$  com o segmento  $\overline{SZ}$ .

- (e) Trace a circunferência que passa pelos pontos  $X, Y$  e  $Z$ . (Veja Figura 5.11)

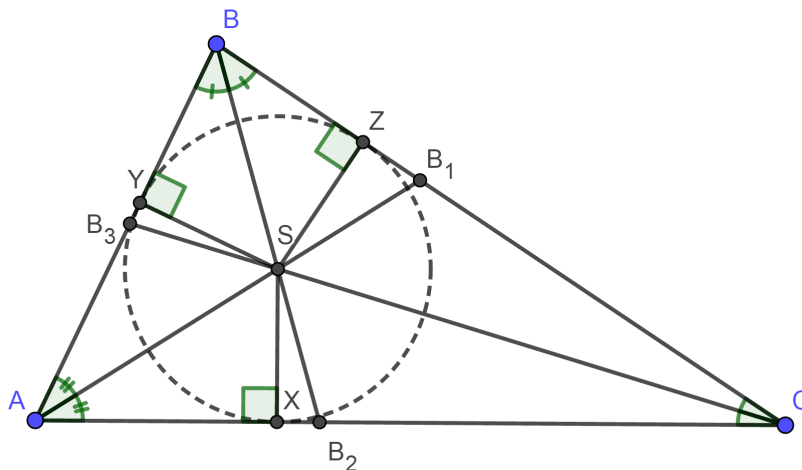


Figura 5.11

- (f) Movimente os vértices do triângulo  $\triangle ABC$  e observe o que acontece com a circunferência e com os pontos  $X, Y, Z$  e  $S$ .

Nesse momento, é importante destacar que essas são duas circunferências importantes no triângulo e que podem ser obtidas através da bissetriz e da mediatriz. O objetivo agora é encontrar uma outra circunferência que também seja especial em suas características.

- (g) Utilizando a figura do exemplo (5.1), trace uma circunferência que passe pelos pontos  $N, M$  e  $P$ .
- (h) Movimente os vértices do triângulo  $\triangle ABC$  e observe, intuitivamente a relação da *Reta de Euler* com a circunferência traçada.
- (i) Retorne à figura os pontos  $H_1, H_2$  e  $H_3$ , pés das alturas do triângulo  $\triangle ABC$ .
- (j) Movimente os vértices do triângulo  $ABC$  e observe se os pontos  $H_1, H_2$  e  $H_3$  continuam na circunferência traçada anteriormente. (Veja Figura 5.13)

Nesse momento, será importante destacar para os alunos que já existem 6 pontos destacados nessa circunferência. Independente da movimentação com os vértices do triângulo  $\triangle ABC$  os pontos continuam sobre a circunferência.

Até então temos uma circunferência de 6 pontos, mas que ainda teremos mais 3 pontos a serem destacados.

- (k) Traçar os segmentos  $\overline{BT}, \overline{AT}$  e  $\overline{CT}$

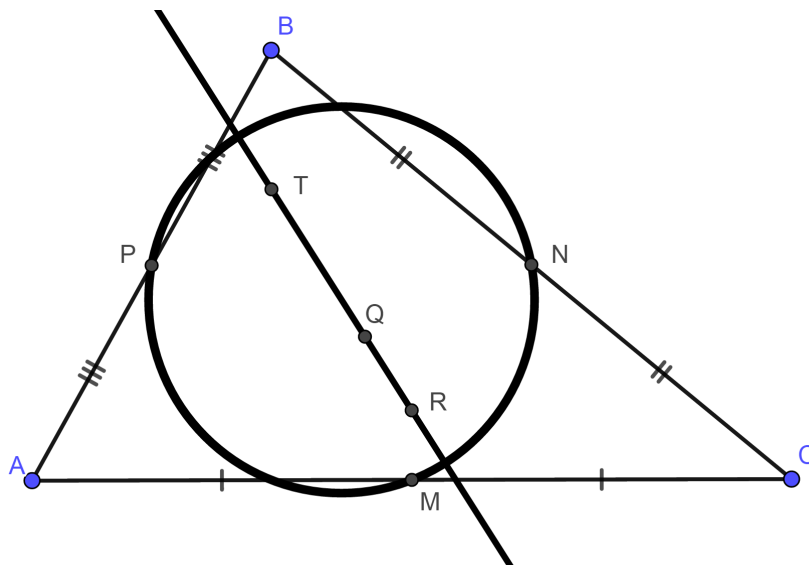


Figura 5.12

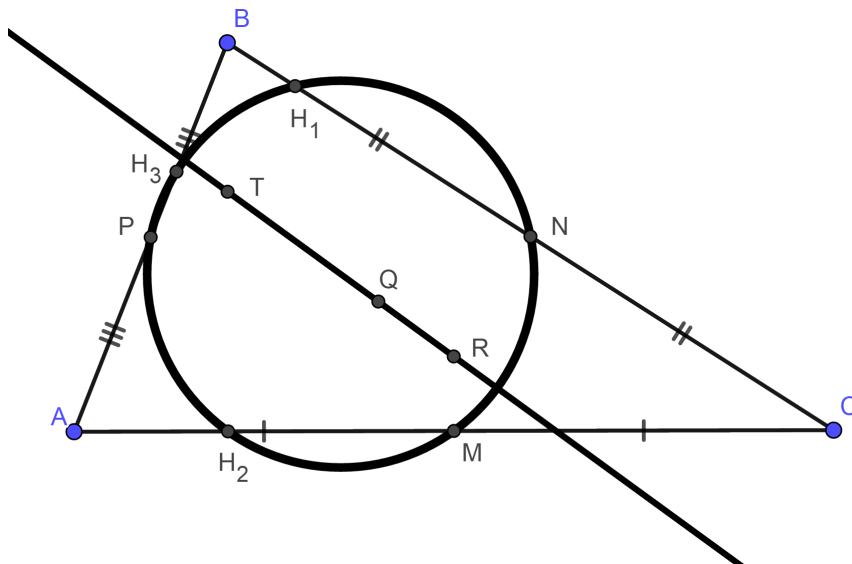


Figura 5.13

- (l) Marcar os pontos  $X_1, X_2$  e  $X_3$ , interseção dos segmentos  $\overline{BT}$ ,  $\overline{AT}$ ,  $\overline{CT}$  com a circunferência anteriormente traçada. (Veja Figura 5.14)
- (m) Movimente os vértices do triângulo  $\triangle ABC$  e verifique se os pontos assinalados anteriormente continuam na circunferência.

Nesse momento é importante destacar que existem nove pontos, oriundos de diferentes cevianas e, inicialmente sem conexão, que sempre estão sobre uma mesma circunferência. Essa circunferência é chamada de *Circunferência de Nove Pontos* e possui características especiais, que serão exploradas nas atividades seguintes.

- ( $P_1$ ) Compare os tamanhos dos segmentos  $\overline{BX_1}$  e  $\overline{TX_1}$ . A relação entre esses tamanhos varia quando movimentamos os vértices do triângulo?

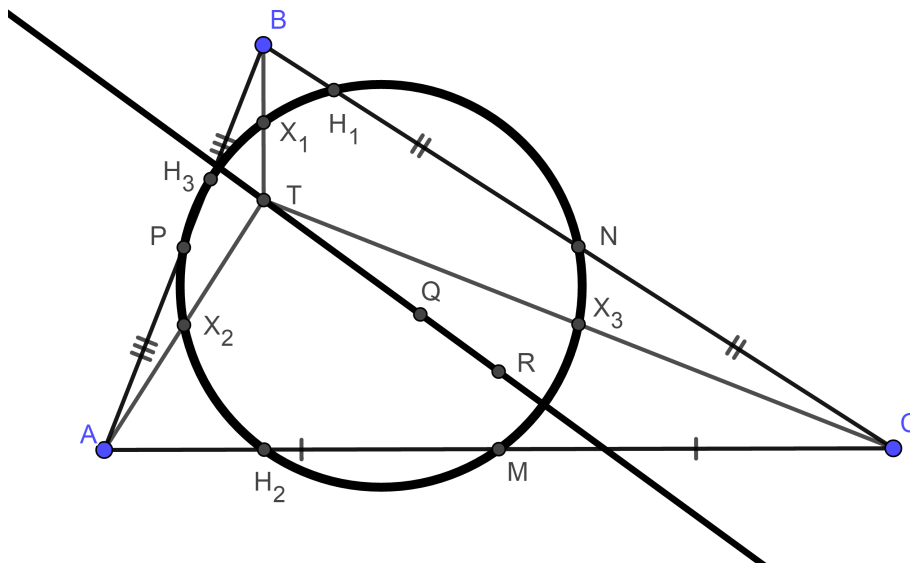


Figura 5.14

- (n) Coloque nas configurações da circunferência a sua equação.
- (o) Marque o ponto médio  $D$  do segmento  $\overline{RT}$ .
- ( $P_2$ ) Qual a conclusão em relação ao ponto  $D$  com à circunferência?
- (p) Marque os pontos  $D_1$  e  $D_2$ , interseções da reta com a circunferência. Determine o tamanho do segmento  $D_1D_2$ .
- (q) Determine a distância  $DH_2$ , raio da circunferência.
- ( $P_3$ ) Qual a relação entre os tamanhos encontrados?
- ( $P_4$ ) Qual a conclusão em relação à reta e à circunferência?

Nesse momento, é importante mostrar que essa são apenas algumas das características relativas aos dois elementos, circunferência e reta, e que outras tantas podem ser citadas para aguçar a curiosidade dos alunos.

## Considerações Finais

---

O propósito da dissertação é trabalhar, a *Reta de Euler* e a *Circunferência de Nove Pontos*. Inicialmente, há a percepção de que seria fundamental um bom embasamento teórico em relação à semelhança e congruência de triângulos. O que levou a uma reflexão de como fazer a abordagem desses dois últimos conteúdos em sala de aula. Normalmente, tais conteúdos são trabalhados de forma aplicável em situações cotidianas, mas sem as devidas e amplas implicações na construção de outras propriedades geométricas.

A construção dos pontos notáveis em sala de aula já deveria ser bem assimilada pelos alunos desde o oitavo ano até a terceira série do ensino médio. Por outro lado, *Cevianas* e *Mediatriz*, apesar de serem elementos de definições simples, geram dúvidas quando aplicados a triângulos com características diferentes em relação aos ângulos internos. Por isso, o uso do aplicativo **Geogebra** se tornou essencial para a percepção e melhor visualização dos alunos. O fato de poderem traçar um triângulo qualquer e suas *cevianas*, além de “mexer” com os vértices desse triângulo, alterando suas características, possibilita um padrão maior em relação à percepção de todas as características desejadas.

O maior desafio foi o de adaptar toda parte do corpo da dessa dissertação, que por si só, traz uma carga de demonstrações e definições matemáticas bem específicas, à uma aplicação efetiva em sala de aula. Ao produzir as atividades, o objetivo foi o de contemplar primeiramente a visualização dos pontos notáveis e suas características, e em seguida a utilização desses pontos notáveis na construção da *Reta de Euler* e a *Circunferência de Nove Pontos*.

De forma ideal, seria interessante uma prévia adaptação dos alunos ao aplicativo **Geogebra** para que as dúvidas e questionamentos se restrinjam às características dos pontos notáveis.

Outra fato importante é que, na aplicação das atividades, há uma abertura significativa para questionamentos em relação às características dos pontos notáveis que propositadamente foram deixadas de fora da atividade para uma abordagem mais específica e também para que seja gerada uma curiosidade dos próprios alunos.

Finalmente, a referência bibliográfica de *Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz* [3] foi ferramenta importante na construção dos elementos

geométricos, enquanto Nathan Altshiller-Court[1] forneceu propriedades relacionadas às aplicações das *cevianas*, da *mediatriz* nas construções de outros teoremas e algumas relações entre *Reta de Euler* e a *Circunferência de Nove Pontos*.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] N. Altshiller-Court. *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover publication, Inc., 2007.
- [2] M. P. Carmo, A. C. Morgado, and E. Wagner. *Trigonometria Números Complexos*. SBM, 3a edição edition, 2005.
- [3] E. Q. F. Rezende and M. L. B. de Queiroz. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP, 2008.