

**PAULA CRISTINA BASILIO DA SILVA**

**GONALIDADE E ÍNDICE DE CLIFFORD DE CURVAS  
UNIRRAMIFICADAS DE GÊNERO BAIXO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para a obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Lia Feital Fusaro Abrantes

**VIÇOSA - MINAS GERAIS**

**2024**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S586g  
2024  
Silva, Paula Cristina Basilio da, 2000-  
Gonalidade e índice de Clifford de curvas unirramificadas  
de gênero baixo / Paula Cristina Basilio da Silva. – Viçosa, MG,  
2024.

1 dissertação eletrônica (35 f.)

Orientador: Lia Feital Fusaro Abrantes.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,  
Departamento de Matemática, 2024.

Referências bibliográficas: f. 35.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.520>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Curvas algébricas. 2. Frobenius, Álgebra de. I. Abrantes,  
Lia Feital Fusaro, 1982-. II. Universidade Federal de Viçosa.  
Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 516.352

PAULA CRISTINA BASILIO DA SILVA

# GONALIDADE E ÍNDICE DE CLIFFORD DE CURVAS UNIRRAMIFICADAS DE GÊNERO BAIXO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para a obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de agosto de 2024.

Assentimento:



Documento assinado digitalmente  
PAULA CRISTINA BASILIO DA SILVA  
Data: 02/10/2024 17:34:52-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Paula Cristina Basilio da Silva  
Autora



Documento assinado digitalmente  
LIA FEITAL FUSARO ABRANTES  
Data: 02/10/2024 17:15:29-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Lia Feital Fusaro Abrantes  
Orientadora

*Dedicado à minha família.*

# Agradecimentos

Gostaria, primeiramente, de agradecer à Deus por ter me permitido chegar até aqui e ter me guiado durante todo o caminho (e por haver caminho) .

É preciso reconhecer que minha caminhada teria sido mais árdua se não fosse o apoio imprescindível da minha família e amigos.

Aos meus pais, Paulo e Normélia, obrigada por todo amor, carinho e cuidado depositados à mim.

À minha irmã, Marcelle, por sempre ter me incentivado e acreditado em mim.

Aos meus amigos, por todos os momentos de estudos, descontração e conselhos que tornaram essa jornada um pouco mais suave.

À minha orientadora, Prof. Lia Feital Fusaro Abrantes, pela paciência e orientação durante a elaboração das páginas que escrevo a seguir. Apesar de por muitas vezes percorrermos os caminhos mais longos, conheci o gosto pela pesquisa, vivi a ansiedade da busca e a satisfação de saber um pouco mais.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Finalmente, agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

SILVA, Paula Cristina Basilio da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2024.  
**Gonalidade e Índice de Clifford de Curvas Unirramificadas de Gênero Baixo.** Orientador:  
Lia Feital Fusaro Abrantes.

## Resumo

Neste trabalho estudamos conceitos importantes relacionados à gonalidade e ao Índice de Clifford de uma curva algébrica parametrizada monomial unirramificada. Em princípio, motivados pelo problema de Frobenius, atribuído ao matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917), vimos o conceito de semigrupos numéricos, suas propriedades e relação com curvas algébricas. Em seguida, estudamos a definição de feixe e gonalidade de uma curva. Através de dois teoremas buscamos caracterizar tais curvas quanto à sua gonalidade. Por fim, trabalhamos com o Índice de Clifford de uma curva com o objetivo de caracterizar as curvas que possuem Índice de Clifford igual a zero.

**Palavras-chave:** Semigrupos Numéricos; Curvas Algébricas; Feixe; Gonalidade e Índice de Clifford.

SILVA, Paula Cristina Basilio da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2024. **Gonality and Clifford Index of Low Genus Unibranched Curves**. Adviser: Lia Feital Fusaro Abrantes.

## Abstract

In this work, we study important concepts related to gonality and the Clifford index of a unibranched monomial parameterized algebraic curve. In principle, motivated by Frobenius' problem, attributed to the German mathematician Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917), we saw the concept of numerical semigroups, their properties and relation to algebraic curves. Then, we studied the definition of sheaf and gonality of a curve, through two theorems we seek to characterize such curves in terms of their gonality. Finally, we worked with the Clifford Index of a curve in order to characterize the curves that have Clifford Index equal to zero.

**Keywords:** Numerical Semigroups; Algebraic Curves; Sheaf; Gonality and Clifford Index.

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1	Corpos de Funções Algébricas e Anéis de Valorização . . . . .	11
1.2	Valorização Discreta . . . . .	12
<b>2</b>	<b>SEMIGRUPOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1	Semigrupos Numéricos . . . . .	14
2.2	Semigrupos Numéricos Gerados Por Dois Elementos . . . . .	18
<b>3</b>	<b>CURVAS ALGÉBRICAS</b> . . . . .	<b>23</b>
3.1	Curva Algébrica Afim . . . . .	23
3.2	Curva Algébrica Projetiva . . . . .	25
<b>4</b>	<b>FEIXES E GONALIDADE</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1	Feixes . . . . .	27
4.2	Gonalidade de Curvas Unirramificadas . . . . .	28
<b>5</b>	<b>ÍNDICE DE CLIFFORD</b> . . . . .	<b>32</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>36</b>

# Introdução

O objetivo principal deste trabalho foi produzir um material escrito com uma notação mais acessível a fim de que sua leitura seja compreensível para estudantes com poucos pré-requisitos em geometria algébrica. Dessa maneira, muitas definições foram simplificadas dentro do nosso contexto, tornando a leitura mais didática.

Neste estudo, estamos considerando  $\mathcal{C}$  uma curva algébrica parametrizada unirramificada monomial em  $\mathbb{P}^n$ , ou seja, descrita em função de um único parâmetro  $t$  e cada entrada da  $n$ -upla de pontos da curva é um polinômio monomial. Com essa definição,  $\mathcal{C}$  possui uma única singularidade cuspidal na origem.

Uma maneira de estudar singularidades de curvas algébricas é por meio do semigrupo numérico do anel local de cada singularidade, neste caso, trabalharemos com anéis unirramificados, que é aquele que possui um único domínio de valorização discreta (DVD) que o contém.

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

O primeiro capítulo apresenta conceitos básicos relevantes para a compreensão do trabalho.

Em seguida, estudamos o conceito de semigrupos numéricos, que é um subconjunto finito dos naturais, que satisfaz algumas condições. Vimos suas propriedades e alguns resultados, entre eles, um importante Teorema sobre semigrupos gerados por dois elementos, que nos permitirá provar o Teorema de Gorenstein sobre curvas planas.

No terceiro capítulo, definimos curvas algébricas e as relacionamos ao conceito de semigrupos através da valorização de seu anel local. Mostramos um importante resultado que diz que toda curva plana é Gorenstein, ou seja, seu semigrupo é simétrico.

A seguir, trabalhamos com a Definição de feixes e gonalidade de uma curva. Um feixe livre de torção de posto 1, dimensão  $r$  em  $\mathcal{C}$  e grau  $d$  pode ser definido como o conjunto de funções racionais

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, f_1, \dots, f_r \rangle \subset \mathbb{K}(\mathcal{C})$$

em que  $\mathcal{O}$  é o anel local de  $\mathcal{C}$ . A gonalidade de uma curva  $\mathcal{C}$  é o menor inteiro  $d$  tal que existe um feixe livre de torção de posto 1, dimensão 1 e grau  $d$  em  $\mathcal{C}$ .

Fizemos uma caracterização de curvas parametrizadas monomiais unirramificadas de gênero baixo quanto à sua gonalidade.

O quinto e último capítulo trata da definição do Índice de Clifford de uma curva, que é um importante invariante que nos fornece um limite para a dimensão do espaço vetorial de um

feixe em uma curva projetiva. Este invariante pode ser definido como

$$\text{Cliff}(\mathcal{C}) = \min\{\text{deg}\mathcal{F} - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1)\}$$

com o feixe  $\mathcal{F}$  satisfazendo algumas condições.

Finalmente, fizemos uma caracterização de todas as curvas monomiais unirramificadas com Índice de Clifford igual a zero.

# 1 Preliminares

Introduziremos neste capítulo alguns conceitos básicos necessários para a compreensão do trabalho.

## 1.1 Corpos de Funções Algébricas e Anéis de Valorização

Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado de característica zero. Consideramos  $k[x]$  o anel de polinômios em uma variável e  $k(x)$  o seu corpo de frações.

**Definição 1.1.1.** Um **corpo de funções algébricas**  $\mathbb{K} |_k$  de uma variável sobre  $k$  é uma extensão  $\mathbb{K} \supseteq k$  tal que  $\mathbb{K}$  é algébrica e finita de  $k(x)$ , para algum elemento  $x \in \mathbb{K}$  transcendente sobre  $k$ .

Por questões de simplificação, vamos nos referir a  $\mathbb{K} \supseteq k$  somente como corpo de funções.

**Definição 1.1.2.** Um anel  $\mathcal{O}$  é chamado um **anel de valorização** de um corpo de frações  $F$  se, para todo  $x \in F$ , têm-se  $x \in \mathcal{O}$  ou  $x^{-1} \in \mathcal{O}$ .

**Exemplo 1.1.3.** Seja  $K$  um corpo e  $K(x)$  seu corpo de funções racionais. Seja  $p(x) \in K[x]$  um polinômio mônico e irredutível e considere o conjunto.

$$\mathcal{O}_{p(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0 \text{ e } p(x) \nmid g(x) \right\}$$

Então  $\mathcal{O}_{p(x)}$  é um anel e  $K \subsetneq \mathcal{O}_{p(x)} \subsetneq K(x)$ . De fato, seja  $h(x) \in K(x)$ . Podemos escrever  $h(x) = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ . Se  $h(x) \in \mathcal{O}_{p(x)}$  o resultado já está provado. Suponha que  $h(x) \notin \mathcal{O}_{p(x)}$ . Então  $p(x) \mid g_1(x)$ . Como a representação de  $h(x)$  é única, assumindo que  $\text{mdc}(f_1(x), g_1(x)) = 1$ , temos  $p(x) \nmid f_1(x)$  e, portanto,  $h^{-1}(x) = \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \in \mathcal{O}_{p(x)}$ . Logo,  $\mathcal{O}_{p(x)}$  é um anel de valorização de  $K(x)/K$ .

Note que se  $q(x) \in K[x]$  é um polinômio mônico e irredutível diferente de  $p(x)$  então  $\mathcal{O}_{p(x)} \neq \mathcal{O}_{q(x)}$ .

**Proposição 1.1.4.** Considere  $\mathcal{O}$  um anel de valorização do corpo de funções  $\mathbb{K} |_k$ . Então, são válidas as seguintes afirmações:

(i)  $\mathcal{O}$  é um anel local, isto é, possui um único ideal maximal, que é  $M = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^*$ , em que  $\mathcal{O}^* = \{z \in \mathcal{O} \mid \exists v \in \mathcal{O}; zv = 1\}$  é o grupo dos elementos invertíveis de  $\mathcal{O}$ .

(ii) Para  $0 \neq x \in \mathbb{K} |_k$ ,  $x \in M$ , se e somente se  $x^{-1} \notin \mathcal{O}$ .

*Demonstração.* (i) É suficiente mostrar que  $M$  é ideal de  $\mathcal{O}$ , pois, como  $M$  não possui apenas as unidades de  $\mathcal{O}$ , este será maximal.

De fato, sejam  $x \in M$  e  $z \in \mathcal{O}$ . Temos  $xz \in M$ , pois caso contrário  $x$  seria invertível em  $\mathcal{O}$ . Tome  $x, y \in M$  não nulos. Por definição de  $\mathcal{O}$  temos  $\frac{x}{y} \in \mathcal{O}$  ou  $\frac{y}{x} \in \mathcal{O}$ . Suponhamos sem perda de generalidade, que  $\frac{x}{y} \in \mathcal{O}$ . Então  $\frac{x}{y} + 1 \in \mathcal{O}$  e assim  $x + y = y \left( \frac{x}{y} + 1 \right) \in M$ .

(ii) A demonstração segue diretamente da definição de  $M$ . □

**Definição 1.1.5.** Um **domínio de valorização discreta** (DVD) do corpo de funções  $\mathbb{K} |_k$  é um anel de valorização  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{K}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

(i)  $\mathcal{O}$  é um domínio de ideais principais.

(ii) Se seu ideal maximal  $M = t\mathcal{O}$ , então cada  $0 \neq z \in \mathbb{K}$  tem uma única representação na forma  $z = t^n u$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$  e  $u \in \mathcal{O}^*$ .

## 1.2 Valorização Discreta

**Definição 1.2.1.** Uma valorização discreta de um corpo de funções  $\mathbb{K} |_k$  é uma função

$$v : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

com as seguintes propriedades:

(i)  $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$

(ii)  $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in \mathbb{K}$

(iii)  $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{K}$

(iv)  $\exists t \in \mathbb{K}$  tal que  $v(t) = 1$ , chamado *parâmetro local*.

(v)  $v(a) = 0, \forall 0 \neq a \in \mathbb{K}$ .

**Lema 1.2.1.** Sejam  $v$  uma valorização discreta de  $\mathbb{K} |_k$  e  $x, y \in \mathbb{K}$  tais que  $v(x) \neq v(y)$ . Então  $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$ .

*Demonstração.* Note que  $v(ax) = v(x)$  para todo  $a \neq 0 \in k$ . Logo, temos  $v(-y) = v(y)$ . Segue por hipótese que  $v(x) \neq v(y)$ , sem perda de generalidade, suponha que  $v(x) < v(y)$ . Tome  $v(x + y) \neq \min\{v(x), v(y)\}$ . Daí segue que

$$v(x) = v((x + y) - y) \geq \min\{v(x + y), v(y)\} = v(y) > v(x)$$

o que gera uma contradição. Portanto,  $v(x + y) = \min\{v(x), v(y)\}$  se  $v(x) \neq v(y)$ . □

Seja  $\mathcal{O}$  um DVD do corpo de funções algébricas  $\mathbb{K} |_k$  e  $t$  um parâmetro local para  $\mathcal{O}$ . Definimos a função,

$$\begin{aligned} v : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty \\ t^n u &\longmapsto n \\ 0 &\longmapsto \infty \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como a função não depende da escolha do parâmetro, ela está bem definida. De fato, suponha que  $t'$  seja outro parâmetro local. Então  $M = t\mathcal{O} = t'\mathcal{O}$ , logo, para algum  $s \in \mathcal{O}^*$  temos  $t = t's$ . Portanto,  $t^n u = ((t')^n s^n u) = (t')^n (s^n u)$  com  $s^n u \in \mathcal{O}^*$ .

**Teorema 1.2.2.** *A função  $v$  definida acima é uma valorização discreta sobre  $\mathbb{K} |_k$ .*

*Demonstração.* As propriedades (i), (ii), (iv) e (v) da **Definição 1.2.1** seguem diretamente da definição da função  $v$  (1.1). Vamos mostrar que (iii) também é satisfeita.

Sejam  $x, y \in \mathbb{K}$  tais que  $v(x) = n$  e  $v(y) = m$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $n \leq m \leq \infty$ . Pela definição da função  $v$  em (1.1), temos que  $x = t^n u_1$  e  $y = t^m u_2$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são invertíveis em  $\mathcal{O}$ . Assim,  $x + y = t^n u_1 + t^m u_2 = t^n (u_1 + t^{m-n} u_2) = t^n z$ , com  $z \in \mathcal{O}$ . Se  $z = 0$ , então  $v(x + y) = v(0) = \infty > \min\{n, m\}$ . Se  $z \neq 0$ , então  $z = t^r u_3$ , para  $r \geq 0$  e  $u_3 \in \mathcal{O}^*$ . Daí  $v(x + y) = v(t^n \cdot t^r u_3) = v(t^{n+r} u_3) = n + r \geq n = \min\{n, m\}$ . Portanto  $v$  é uma valorização discreta de  $\mathbb{K} |_k$ .

□

Observe que, assim definida, a valorização  $v$  de um elemento  $f \in \mathbb{K}[[t]]$  é o menor expoente de  $t$  em  $f$ .

**Exemplo 1.2.3.** *Seja  $f = t^3 + t^5 + t^8$ . Então,  $v(t^3 + t^5 + t^8) = 3$ . De fato,*

$$v(t^3 + t^5 + t^8) = v(t^3(1 + t^2 + t^5)) = v(t^3 u) = 3,$$

com  $(1 + t^2 + t^5) = u \in \mathcal{O}^*$ .

## 2 Semigrupos Numéricos

### 2.1 Semigrupos Numéricos

Trabalharemos agora sobre o conceito de semigrupos numéricos. Embora a definição seja simples, ela facilita a compreensão de problemas cuja resolução nem sempre é trivial. Considere a seguinte pergunta: Qual a maior quantia que não pode ser obtida utilizando moedas de valor 3 e 5? Este problema é conhecido como o problema de Frobenius, atribuído ao matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917). Para resolvê-lo utilizamos o conceito de semigrupo numérico. A resposta da questão enunciada acima é o maior número natural não pertencente ao conjunto gerado por 3 e 5, ou seja, o número 7, que é chamado número de Frobenius, em homenagem ao criador do problema.

**Definição 2.1.1.** *Um semigrupo de valores (ou semigrupo numérico)  $S$  é um subconjunto de  $\mathbb{N}$  que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Se  $a, b \in S$ , então  $a + b \in S$*

(ii)  *$0 \in S$*

(iii) *Existe  $\beta \in \mathbb{N}$  tal que  $\beta + \mathbb{N} \subset S$ , isto é, o complemento  $\mathbb{N} \setminus S$  é finito.*

Por questões de simplificação vamos nos referir a  $S$  apenas como semigrupo.

O menor inteiro que satisfaz (iii) é chamado o **condutor**  $\beta$  de  $S$ . Um número natural que não pertence a  $S$  é chamado uma **lacuna** de  $S$ . O conjunto  $\mathbb{N} \setminus S = G$  é o conjunto de todas as lacunas de  $S$ . O número de lacunas é chamado **gênero (aritmético)** do semigrupo, que denotamos por  $g$ . O número  $\gamma = \beta - 1 \notin S$  é o maior número natural que não pertence a  $S$  e é chamado **número de Frobenius**. Os elementos de  $S$  são escritos da seguinte forma  $0 = s_0 < s_1 < s_2, \dots$ , e  $s_1 = m$  é a **multiplicidade** do semigrupo, ou seja, o menor elemento não nulo de  $S$ . Utilizaremos a notação  $\mapsto$  para representar que todo número natural a partir do número que antecede a seta pertence a  $S$ . Se um semigrupo numérico  $S$  é do tipo  $\{0, \beta \mapsto\}$ , dizemos que  $S$  é um **semigrupo ordinário**.

**Proposição 2.1.2.** *Seja  $S$  um semigrupo de multiplicidade  $m$ . Considere  $c$  o primeiro elemento do semigrupo à partir do qual se consegue encontrar  $m$  elementos consecutivos em  $S$  (incluindo  $c$ ), então  $c$  é o condutor de  $S$ .*

*Demonstração.* Seja  $S = \{0, m, \dots, c \mapsto\}$ . Por hipótese, a partir de  $c$  conseguimos encontrar  $m$  elementos consecutivos em  $S$ , são eles:

$$c, c + 1, c + 2, \dots, c + m - 1 \in S. \quad (2.1)$$

Como  $c \in S$  e  $m \in S$  então  $c + m \in S$ . De forma análoga, somando  $m$  a cada elemento de (2.1), conseguimos mais  $m$  elementos consecutivos em  $S$ :

$$c + m, c + m + 1, c + m + 2, \dots, c + 2m - 1 \in S. \quad (2.2)$$

Somando  $m$  a cada elemento de (2.2) e seguindo assim sucessivamente, encontramos em  $S$  todos os números naturais à partir de  $c$ . Logo,  $c$  é o condutor do semigrupo.

□

**Exemplo 2.1.3.** O semigrupo gerado por 4, 6 e 7

$$S = \langle 4, 6, 7 \rangle = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, \dots\} = \{0, 4, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$$

possui gênero 5, número de Frobenius igual a 9, condutor 10 e multiplicidade 4.

**Proposição 2.1.4.** Seja  $S$  um semigrupo numérico com condutor  $\beta$ . Se  $s \in S$  então  $\beta - 1 - s \notin S$ .

*Demonstração.* Observe que se  $s \in S$  e  $\beta - 1 - s \in S$  então

$$s + (\beta - 1 - s) = \beta - 1 \in S,$$

pois  $S$  é fechado em relação à soma de elementos. Porém,  $\beta - 1$  é o número de Frobenius, que por definição, não está em  $S$ . Logo,  $\beta - 1 - s \notin S$ .

□

Como na sessão anterior, consideramos  $k$  um corpo algebricamente fechado de característica zero,  $\mathbb{K} |_k$  o corpo de funções algébricas em uma variável,  $\mathcal{O}$  o anel Noetheriano de dimensão 1 com ideal maximal  $M$  e  $k \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{K}$  tal que o corpo de frações de  $\mathcal{O}$  é  $\mathbb{K}$ . Vale ressaltar que neste trabalho estamos considerando o caso em que  $\mathcal{O}$  é uniramificado, isto é, existe um único DVD que o contém e este é o fecho inteiro  $\overline{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{O}$ .

Em (1.1) vimos que a aplicação

$$v : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$$

$$t^n u \longmapsto n$$

$$0 \longmapsto \infty$$

é uma valorização discreta, onde  $t$  é um parâmetro local de  $\overline{\mathcal{O}}$  e  $u$  um invertível de  $\overline{\mathcal{O}}$ .

**Definição 2.1.5.** Se  $\gamma = \beta - 1$  é o número de Frobenius de  $S$ , definimos o conjunto

$$K = \{a \in \mathbb{Z}; \gamma - a \notin S\}.$$

$K$  não necessariamente tem a propriedade de ser fechado em relação à soma. Definimos  $S'$  o conjunto que contém  $K$  acrescentados os elementos necessários para que  $S'$  seja fechado em relação à soma. Chame,  $C = \{\beta \mapsto\}$  o conjunto condutor de  $S$ .

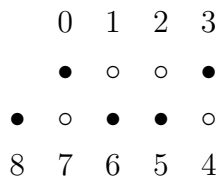
Pela definição do conjunto  $K$  e pela Proposição 2.1.4, temos que todos os elementos de  $S \in K$ . Assim definidos, temos a seguinte sequência de subconjuntos:

$$C \subset S \subset K \subset S' \subset \mathbb{N}$$

**Definição 2.1.6.** Dizemos que um semigrupo é simétrico se  $K = S$ . Caso contrário, o semigrupo é não-simétrico. Além disso, um semigrupo é pseudo-simétrico se existe um único elemento em  $K \setminus S$ , que é a metade do número de Frobenius.

Um semigrupo pode ser representado por um diagrama da seguinte forma: na primeira coluna e linha inferior coloca-se o condutor e nas colunas seguintes, coloca-se dois inteiros cuja soma é o número de Frobenius, listados em ordem crescente à partir do 0 na linha superior e decrescente à partir do número de Frobenius na linha inferior. Bolinha preta significa que o número pertence ao semigrupo. Bolinhas brancas representam as lacunas.

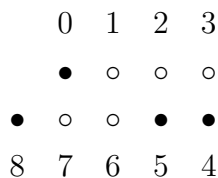
**Exemplo 2.1.7.**



*Diagrama do semigrupo  $S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8 \mapsto\}$*

Pela definição o conjunto  $K$ , se uma coluna do diagrama não tem nenhum elemento de  $S$ , então os elementos dessa coluna estão em  $K$ . No exemplo acima, todas as colunas tem um elemento de  $S$  e, portanto,  $K = S = S'$ ,  $C = \{8 \mapsto\}$  e  $S$  é simétrico.

**Exemplo 2.1.8.**



*Diagrama do semigrupo  $S = \langle 4, 5, 11 \rangle = \{0, 4, 5, 8 \mapsto\}$*

Como a coluna dos elementos 1 e 6 não tem elementos de  $S$ , precisamos acrescentar ambos ao conjunto  $K$ . Por outro lado, se o  $1 \in K$ , então precisamos que todos os naturais estejam em  $S'$  para que tal conjunto seja fechado em relação à soma e assim temos que

$$C = \{8 \mapsto\} \subset S = \{0, 4, 5, 8 \mapsto\} \subset K = \{0, 1, 4, 5, 6, 8 \mapsto\} \subset S' = \mathbb{N}$$

e  $S$  é não-simétrico.

**Exemplo 2.1.9.**

	0	1	2	3	4
	•	○	○	•	○
•	○	•	•	○	○
9	8	7	6	5	4

Diagrama do Semigrupo  $S = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 9 \mapsto\}$

$$C = \{9 \mapsto\} \subset S = \{0, 3, 6, 7, 9 \mapsto\} \subset K = \{0, 3, 4, 6, 7, 9 \mapsto\} \subset S' = \{0, 3, 4, 6 \mapsto\} \subset \mathbb{N}.$$

Como 4 é o único elemento em  $K \setminus S$ , temos  $S$  pseudo-simétrico.

**Proposição 2.1.10.** Um semigrupo é simétrico se, e somente se  $\beta = 2g$ .

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Se  $\ell$  é uma lacuna de  $S$ , então  $\gamma - \ell \in K = S$ . Além disso, pela Proposição 2.1.4, sabemos que para todo  $a \in S$ , o elemento  $\gamma - a \notin S$ , caso contrário  $a + (\gamma - a) = \gamma \in S$ . Portanto, o número de elementos em  $S$  entre 0 e  $\gamma$  coincide com o número de lacunas do semigrupo, que é  $g$ . Logo, temos  $g + g = 2g$  naturais entre 0 e  $\gamma$ . Assim,  $\beta = 2g$ .

( $\impliedby$ ) Se  $\beta = 2g$  e  $g$  é o número de lacunas de  $S$ , então, existem  $2g - g = g$  elementos de  $S$  entre 0 e  $\gamma$ . Ou seja, se  $\ell$  é lacuna, então  $\gamma - \ell \in S$ . Logo,  $K = S$ .

□

Segue diretamente da propriedade de semigrupos simétricos que o diagrama de tal semigrupo possui uma bolinha preta em todas as colunas. Essas bolinhas devem ser únicas em cada coluna, pois a soma de dois elementos de uma mesma coluna é o número de Frobenius do semigrupo  $S$ .

**Exemplo 2.1.11.** O semigrupo  $S = \langle 4, 6, 7 \rangle = \{0, 4, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$  possui gênero 5 e condutor  $10 = 2 \cdot 5$ , portanto é simétrico.

	0	1	2	3	4
	•	○	○	○	•
•	○	•	•	•	○
10	9	8	7	6	5

Diagrama do Semigrupo  $S = \langle 4, 6, 7 \rangle = \{0, 4, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$ .

**Exemplo 2.1.12.** O semigrupo  $S = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$  possui gênero 6 e condutor  $12 = 2 \cdot 6$ , portanto é simétrico.

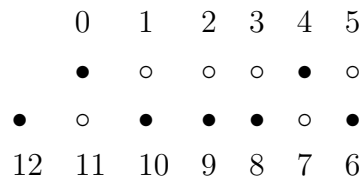


Diagrama do Semigrupo  $S = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$ .

## 2.2 Semigrupos Numéricos Gerados Por Dois Elementos

Nesta seção trabalharemos com semigrupos numéricos gerados por dois elementos e a relação entre os invariantes de tais semigrupos e seus geradores.

**Proposição 2.2.1.** Dado  $S = \langle a, b \rangle$  um semigrupo numérico, então  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

*Demonstração.* Se  $n \in S$ , então  $n$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $a$  e  $b$ . Daí, existem  $x, y \in \mathbb{N}$  tais que  $n = ax + by$ . Se  $\text{mdc}(a, b) = p$ , com  $p \neq 1$ , então  $a = p \cdot a_0$  e  $b = p \cdot b_0$  e podemos escrever

$$n = p(a_0x + b_0y).$$

Isto significa que  $n$  é um múltiplo de  $p$  e concluímos que existem infinitos elementos que não podem ser escritos como uma combinação linear de  $a$  e  $b$ . Logo, o complemento  $\mathbb{N} \setminus S$  é infinito, o que contraria a definição de semigrupo.

□

No Teorema a seguir buscamos calcular alguns invariantes de semigrupos numéricos gerados por dois elementos, como por exemplo, o condutor  $\beta$  e o gênero aritmético  $g$ , utilizando apenas seus geradores minimais, ou seja, sem a necessidade de especificar os elementos do semigrupo.

**Teorema 2.2.2.** Dado o semigrupo  $S = \langle a, b \rangle$ , tem-se que:

i)  $\beta = (a - 1) \cdot (b - 1)$

ii)  $g = \frac{(a-1) \cdot (b-1)}{2}$

*Demonstração.* i) Precisamos mostrar que se  $n \geq (a-1) \cdot (b-1)$  então  $n \in \langle a, b \rangle$ . Note que se  $n \in \langle a, b \rangle$  então  $n$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $a$  e  $b$ , ou seja, existem,  $x, y \in \mathbb{N}$  tais que

$$n = ax + by.$$

Como  $\text{mdc}(a, b) = 1$  pela Proposição 2.2.1, então a Equação Diofantina Linear tem solução em  $\mathbb{Z}$  da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

em que  $t \in \mathbb{Z}$  e  $(x_0, y_0)$  é uma solução particular. Como em um semigrupo numérico as combinações lineares são não negativas, devemos garantir que  $x$  e  $y$  são inteiros não negativos, ou seja,  $x, y > -1$ . Então devemos garantir que

$$x_0 + bt > -1, \text{ o que implica que } t > \frac{-1 - x_0}{b}$$

e

$$y_0 - at > -1, \text{ o que implica que } t < \frac{1 + y_0}{a}.$$

Assim, sempre que existir  $t \in \mathbb{Z}$  no intervalo  $\left(\frac{-1 - x_0}{b}, \frac{1 + y_0}{a}\right)$ , teremos  $x, y \in \mathbb{N}$  tais que  $ax + by = n$ . Se calcularmos o comprimento do intervalo, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 + y_0}{a} - \left(\frac{-1 - x_0}{b}\right) &= \frac{1 + y_0}{a} + \frac{1 + x_0}{b} \\ &= \frac{b + by_0 + a + ax_0}{ab} = \frac{a + b + n}{ab}. \end{aligned}$$

Pela hipótese, temos  $n \geq (a-1) \cdot (b-1) = ab - a - b + 1$ , então:

$$\frac{a + b + n}{ab} \geq \frac{a + b + ab - a - b + 1}{ab} = 1 + \frac{1}{ab} > 1.$$

Portanto, o comprimento do intervalo é maior que 1, significa que sempre vai existir um  $t \in \mathbb{Z}$  nesse intervalo, o que garante que existem  $x, y \in \mathbb{N}$  tais que  $ax + by = n$ , logo,  $n \in \langle a, b \rangle$ .

Vamos mostrar agora que  $(a-1) \cdot (b-1) - 1 \notin \langle a, b \rangle$ , ou seja, que tal número é o Frobenius.

Seguindo o raciocínio semelhante da parte anterior, suponha que

$$m = (a-1) \cdot (b-1) - 1 \in \langle a, b \rangle.$$

Assim, devem existir  $x, y \in \mathbb{N}$ , tais que  $ax + by = m$ . Já vimos que para que existam tais  $x, y \in \mathbb{N}$  devemos ter

$$\begin{cases} x_0 + bt > -1 \\ y_0 - at > -1 \end{cases} \implies \begin{cases} t > \frac{-1 - x_0}{b} \\ t < \frac{1 + y_0}{a} \end{cases}$$

e que o comprimento do intervalo  $\left(\frac{-1 - x_0}{b}, \frac{1 + y_0}{a}\right)$  é  $\frac{a + b + m}{ab}$ .

Substituindo  $m$  temos:

$$\frac{a + b + ab - a - b}{ab} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Agora, vamos mostrar que  $\frac{-1 - x_0}{b}$  e  $\frac{1 + y_0}{a}$  são inteiros.

Observe que se  $m = ax_0 + by_0 = ab - a - b$ , então:

$$a(x_0 - b + 1) = b(-1 - y_0) = -b(1 + y_0).$$

Como  $a \neq 0$ , podemos escrever

$$x_0 - b + 1 = \frac{-b(1 + y_0)}{a}$$

Se  $x_0, b \in \mathbb{Z}$ , então  $x_0 - b + 1 \in \mathbb{Z}$ , o que implica que  $a \mid -b(1 + y_0)$ , ou seja,  $a \mid -b$  ou  $a \mid (1 + y_0)$ , mas como  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , então  $a \mid (1 + y_0)$ . Logo,  $\frac{1 + y_0}{a}$  é inteiro.

Assim, se o comprimento do intervalo  $\left(\frac{-1 - x_0}{b}, \frac{1 + y_0}{a}\right) = 1$  e  $\frac{1 + y_0}{a}$  é inteiro, então  $\frac{-1 - x_0}{b}$  também é inteiro.

Portanto, não existe nenhum inteiro no intervalo aberto  $\left(\frac{-1 - x_0}{b}, \frac{1 + y_0}{a}\right)$ , o que significa dizer que não existem  $x, y \in \mathbb{N}$  tais que  $ax + by = m$ , logo  $m = (a - 1).(b - 1) - 1 \notin \langle a, b \rangle$ .

Dessa forma, concluímos que o condutor de  $S$  é  $\beta = (a - 1).(b - 1)$ .

□

Para a demonstração do item ii) vamos antes provar a seguinte proposição:

**Proposição 2.2.3.** *Sejam,  $a, b \in \mathbb{N}$ , com  $\text{mdc}(a, b) = 1$  e  $S = \langle a, b \rangle$ . Se  $\beta - 1 - s \in G$ , então  $s \in S$ .*

*Demonstração.* Tome o condutor  $\beta$  de  $S$ . Se  $x, y \in \mathbb{Z}$  satisfaz

$$ax + by = \beta - 1 - s \tag{2.3}$$

então  $x < 0$  ou  $y < 0$ .

As soluções inteiras para a equação diofantina 2.3 são

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

com  $t \in \mathbb{Z}$  e  $(x_0, y_0)$  uma solução particular.

Sem perda de generalidade, suponha que  $y_0 < 0$  e  $y_0 + a > 0$ . Como  $\beta - 1 - s > 0$ , então  $x_0 > 0$ . Daí, como  $(x_0 - b, y_0 + a)$  é uma solução de 2.3, então  $x_0 - b < 0$ . Pelo item i), temos  $\beta = (a - 1)(b - 1)$ . Logo,

$$\begin{aligned} s &= \beta - 1 - (ax_0 + by_0) \\ &= ab - a - b - ax_0 - by_0 \\ &= a(b - 1 - x_0) + b(-1 - y_0) \end{aligned}$$

Observe que:

- $x_0 - b < 0 \implies b - x_0 > 0 \implies b - x_0 - 1 \geq 0$
- $y_0 < 0 \implies -y_0 > 0 \implies -1 - y_0 \geq 0$ .

Portanto,  $s \in \langle a, b \rangle = S$ .

□

Seguindo a demonstração do Teorema 2.2.2, temos:

*Demonstração.* ii) Considere  $\gamma$  o número de Frobenius, dado por  $\gamma = (a - 1)(b - 1) - 1$ . Tome o intervalo  $[0, \gamma] \cap \mathbb{Z}$ . O número de elementos deste intervalo é  $\gamma + 1$ , pois o elemento 0 é acrescentado. Assim, segue que

$$\gamma + 1 = (a - 1)(b - 1).$$

Como  $a$  e  $b$  são primos entre si, então  $a - 1$  ou  $b - 1$  é um número par, portanto, o produto deles é par. Pelas Proposições 2.1.4 e 2.2.3, se  $s \in [0, \gamma] \cap \mathbb{Z}$ , então  $\#\{s, \beta - 1 - s\} \cap S = 1$ . Logo, a quantidade de lacunas coincide com metade da quantidade de elementos do intervalo  $[0, \gamma] \cap \mathbb{Z}$ . Assim,

$$g = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}$$

□

**Exemplo 2.2.4.** Dado o semigrupo numérico  $S = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \dots\}$ , considere:

$$i) \beta = (4 - 1) \cdot (5 - 1) = 12$$

$$ii) g = \frac{(4-1) \cdot (5-1)}{2} = 6$$

Segue imediatamente do Teorema 2.2.2 e da Proposição 2.1.10 que:

**Corolário 2.2.5.** Todo semigrupo gerado por dois elementos é simétrico.

## 3 Curvas Algébricas

### 3.1 Curva Algébrica Afim

**Definição 3.1.1.** *Uma curva algébrica parametrizada unirramificada monomial no **espaço afim**  $k^n$  é um conjunto de pontos do tipo:*

$$\mathcal{C} = (t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_n}) \subset k^n$$

em que  $a_i \in \mathbb{N}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $k$  é um corpo algebricamente fechado e  $t$  é o parâmetro da curva. A curva é descrita em função de um único parâmetro e cada entrada da  $n$ -upla de pontos da curva é um polinômio monomial em  $t$ .

É possível fazer uma mudança de coordenadas de forma que se tenha:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

Assim definida,  $\mathcal{C}$  possui uma singularidade em  $0 = (0, 0, \dots, 0)$  sempre que  $a_1 > 1$ , que é única.

**Definição 3.1.2.** *Seja  $P$  um ponto da curva  $\mathcal{C}$ . Definimos  $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$  como o conjunto das funções racionais em  $\mathcal{C}$  que estão definidas em  $P$ . É fácil ver que  $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$  forma um subanel de  $\mathbb{K}(\mathcal{C})$  contendo  $k : k \subset \mathcal{O}_P(\mathcal{C}) \subset \mathbb{K}(\mathcal{C})$ . O anel  $\mathcal{O}_P(\mathcal{C})$  é chamado **anel local** de  $\mathcal{C}$  em  $P$  e é tal que*

$$\mathcal{O}_P(\mathcal{C}) = \mathcal{O} = k[[t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_n}]].$$

**Exemplo 3.1.3.** *A curva parametrizada unirramificada monomial dada por*

$$\mathcal{C} = (t^3, t^5) \subset k^2$$

tem anel local  $\mathcal{O} = k[[t^3, t^5]]$ .

Fazendo  $x = t^3$  e  $y = t^5$ ,  $\mathcal{C}$  é o conjunto de pontos que são zeros do polinômio  $x^5 - y^3$ .

**Proposição 3.1.4.** *A valorização do anel local  $\mathcal{O}$  de uma curva  $\mathcal{C}$ ,  $v(\mathcal{O}) \subset \mathbb{N}$  é um semigrupo numérico, que denotaremos por  $S$ .*

*Demonstração.*   ▪  $0 \in S$  pois  $v(1) = 0$

- Sejam  $x, y \in S$ . Então existem  $a, b \in \mathcal{O}$  tais que  $x = v(a)$ ,  $y = v(b)$ .

$$x + y = v(a) + v(b) = v(ab) \in S$$

- Dado  $z \in \mathcal{O} : \overline{\mathcal{O}}$ , temos  $z\overline{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{O}$ . Seja  $t$  parâmetro local de  $\overline{\mathcal{O}}$ . Como  $\mathcal{O} : \overline{\mathcal{O}}$  é um  $\overline{\mathcal{O}}$ -módulo, temos  $t^i z \in \mathcal{O} : \overline{\mathcal{O}}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e daí

$$v(t^i z) = v(t^i) + v(z) = i + v(z) \in S$$

para todo  $i$ . Portanto,  $\mathbb{N} \setminus S$  é finito e  $S$  é um semigrupo numérico. □

A partir daqui, sempre iremos relacionar uma curva  $\mathcal{C}$  com um semigrupo  $S$  como sendo a valorização  $v(\mathcal{O})$  do seu anel local.

No Exemplo 3.1.3, temos  $S = v(\mathcal{O}) = v(k[[t^3, t^5]]) = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8 \mapsto\}$ .

**Definição 3.1.5.** Dizemos que uma curva  $\mathcal{C}$  com semigrupo de valores  $S$  é **hiperelítica** se  $2 \in S$ .

**Exemplo 3.1.6.** Seja  $\mathcal{C} = (t^2, t^7) \subset k^2$  uma curva em que seu anel local é  $\mathcal{O} = k[[t^2, t^7]]$ . Dizemos que  $\mathcal{C}$  é hiperelítica pois seu semigrupo  $S = v(\mathcal{O}) = \langle 2, 7 \rangle = \{0, 2, 4, 6 \mapsto\}$ .

**Definição 3.1.7.** Dizemos que uma curva é **Gorenstein** se o seu semigrupo numérico é simétrico. Caso contrário, a curva é **não-Gorenstein**. Além disso, uma curva é dita **Kunz** se seu semigrupo é pseudo-simétrico.

Observe nos Exemplos 3.1.3, 2.1.7 que o condutor de  $S$  é 8, o Frobenius é 7 e que o gênero da curva é  $g = 4$ . Portanto, a curva  $\mathcal{C}$  é Gorenstein.

**Exemplo 3.1.8.** Seja  $\mathcal{C} = (t^4, t^5, t^{11}) \subset k^3$ . Então,  $\mathcal{O} = k[[t^4, t^5, t^{11}]]$  e

$$S = v(\mathcal{O}) = \langle 4, 5, 11 \rangle = \{0, 4, 5, 8 \mapsto\}.$$

O condutor de  $S$  é 8, o Frobenius é 7 e dizemos que o gênero da curva é  $g = 5$ . Observe pelo Exemplo 2.1.8 que a curva  $\mathcal{C}$  é não-Gorenstein.

**Exemplo 3.1.9.** Seja  $\mathcal{C} = (t^3, t^7, t^{11}) \subset k^3$ . Então  $\mathcal{O} = k[[t^3, t^7, t^{11}]]$  e

$$S = v(\mathcal{O}) = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0, 3, 4, 6, 7, 9 \mapsto\}.$$

O condutor de  $S$  é 9, o Frobenius é 8 e dizemos que o gênero da curva é  $g = 5$ . Observe pelo Exemplo 2.1.9 que a curva  $\mathcal{C}$  é Kunz.

Observe que toda curva plana monomial  $\mathcal{C} = (t^a, t^b) \subset k^2$  é tal que seu semigrupo é gerado por dois elementos  $S = \langle a, b \rangle$ . Segue diretamente do Corolário 2.2.5:

**Teorema 3.1.10. Teorema de Gorenstein.** Toda curva plana é Gorenstein.

## 3.2 Curva Algébrica Projetiva

**Definição 3.2.1.** *Uma curva algébrica parametrizada unirramificada monomial no espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  é um conjunto de pontos do tipo:*

$$\mathcal{C} = (1 : t^{a_1} : t^{a_2} : \dots : t^{a_n}) \subset \mathbb{P}^n$$

em que  $a_i \in \mathbb{N}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Da mesma forma que fizemos para curvas no espaço afim, podemos considerar

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

e assim definida,  $\mathcal{C}$  possui uma singularidade em  $0 = (0 : 0 : \dots : 0)$  sempre que  $a_1 > 1$ .

Uma curva no espaço projetivo possui um ponto no infinito dado por  $(0 : \dots : 0 : 1)$ . Observe que a curva  $\mathcal{C} = (1 : t^{a_1} : t^{a_2} : \dots : t^{a_n})$  com parâmetro  $t$  pode ser vista como

$$\mathcal{C} = \left( \frac{1}{t^{a_n}} : \frac{t^{a_1}}{t^{a_n}} : \dots : \frac{t^{a_{n-1}}}{t^{a_n}} : 1 \right).$$

Podemos reparametrizar a curva fazendo  $u = \frac{1}{t}$ , de forma que

$$\mathcal{C} = (u^{a_n} : u^{a_n - a_1} : \dots : u^{a_n - a_{n-1}} : 1).$$

Dessa maneira, o semigrupo do ponto no infinito será  $S_\infty = \langle a_n - a_{n-1}, \dots, a_n - a_1, a_n \rangle$  e, portanto,  $\mathcal{C}$  possui uma singularidade no infinito se, e somente se,  $1 \notin S_\infty$ . Ou seja,  $\mathcal{C}$  é suave no infinito se, e somente se  $a_n - a_{n-1} = 1$ .

Iremos, à partir de agora, considerar sempre curvas projetivas que não possuem singularidade no infinito, isto é, tais que  $a_n - a_{n-1} = 1$ . Isto sempre é possível, mesmo que tivermos que mergulhar a curva em um espaço de dimensão maior, como veremos a seguir.

**Exemplo 3.2.2.** *Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^3 : t^5)$  contida em  $\mathbb{P}^2$ .  $\mathcal{C}$  é o conjunto de pontos que são zeros do polinômio  $X^5 - Y^3Z^2$ .*

Como no caso afim,  $\mathcal{O} = k[[t^3, t^5]]$  e  $S = v(\mathcal{O}) = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8 \mapsto\}$ .

Porém, tal curva tem uma singularidade no infinito. Para que isso não ocorra, iremos mergulhar a curva em  $\mathbb{P}^3$ , acrescentando uma coordenada:  $\mathcal{C} = (1 : t^3 : t^5 : t^6)$ . Esta nova curva possui o mesmo semigrupo, portanto mesmo gênero 4, mesmo Frobenius 7 e condutor 8, mas não possui singularidade no infinito, pois  $a_n - a_{n-1} = 6 - 5 = 1$ .

**Exemplo 3.2.3.** *Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^4 : t^5)$  contida em  $\mathbb{P}^2$ .*

Temos  $\mathcal{O} = k[[t^4, t^5]]$  e  $S = v(\mathcal{O}) = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$ .

Esta curva não possui uma singularidade no infinito, pois  $a_n - a_{n-1} = 5 - 4 = 1$ . O gênero é 6, Frobenius 11 e condutor 12.

**Exemplo 3.2.4.** Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^4 : t^5 : t^{11} : t^{12})$  contida em  $\mathbb{P}^4$ .

Observe que  $\mathcal{O} = k[[t^4, t^5, t^{11}]]$  e  $S = v(\mathcal{O}) = \langle 4, 5, 11 \rangle = \{0, 4, 5, 8 \mapsto\}$ .

12 é desnecessário como gerador de  $S$ , já que  $4 \in S$ , mas  $t^{12}$  foi incluído em  $\mathcal{C}$  a fim de evitar uma singularidade no infinito. O gênero é 5, Frobenius 7 e condutor 8.

## 4 Feixes e Gonalidade

Deste capítulo em diante, consideraremos  $\mathcal{C}$  uma curva como na Definição 3.2.1, sem singularidade no infinito,  $\mathcal{O}$  o seu anel local e  $P$  o seu único ponto singular.

Nota: as definições deste capítulo foram simplificadas dentro do nosso contexto a fim de tornar a leitura mais compreensível a leitores sem muitos pré-requisitos em geometria algébrica.

### 4.1 Feixes

**Definição 4.1.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma curva com anel local  $\mathcal{O}$ . O conjunto de funções racionais*

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, f_1, \dots, f_r \rangle \subset \mathbb{K}(\mathcal{C})$$

*é chamado um feixe livre de torção de posto 1, dimensão  $r$  em  $\mathcal{C}$  e grau*

$$d = \deg(\mathcal{F}) = \deg_p \mathcal{F} + \deg_\infty \mathcal{F},$$

*em que  $\deg_p \mathcal{F} = \dim(\mathcal{F}/\mathcal{O})$ . Cada uma das funções  $f_i$  que geram o feixe é chamada uma seção de  $\mathcal{F}$ .*

No nosso contexto, chamaremos um feixe livre de torção de posto 1, denotado por  $\mathcal{F}$ , apenas de feixe. Neste trabalho, as seções do feixe são monômios na variável  $t$ , o parâmetro local.

**Exemplo 4.1.2.** *Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^3 : t^7 : t^{11} : t^{12}) \subset \mathbb{P}^4$  então*

$$S = \{0, 3, 6, 7, 9, \mapsto\}.$$

*Temos que  $\mathcal{O} = k[[t^3, t^7, t^{11}]]$ . Considere o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$ . Então*

$$1 = v(t) \notin S, 4 = v(t^3 \cdot t) \notin S \text{ e } 8 = v(t^7 \cdot t) \notin S$$

*Portanto,  $\deg_p \langle 1, t \rangle = \dim(\mathcal{F}/\mathcal{O}) = 3$ . Além disso, sempre que o ponto no infinito é suave,  $\deg_\infty \mathcal{F}$  equivale ao maior expoente dos monômios que geram o feixe. De fato, fazendo a mudança de parâmetro  $u = 1/t$ , temos que*

$$-1 = v(1/u) \notin S_\infty = \mathbb{N}$$

*e  $\deg_\infty \mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 1$ . Assim,*

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t \rangle = \deg_p \mathcal{O}\langle 1, t \rangle + \deg_\infty \mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 3 + 1 = 4.$$

Já o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$  possui grau

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = \deg_p \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle + \deg_\infty \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = 3 + 2 = 5,$$

pois  $2 = v(t^2), 5 = v(t^3 \cdot t^2), 8 = v(t^6 \cdot t^2) \notin S$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle$ , então  $\mathcal{F}$  não acrescenta grau em  $P$ , pois  $3 = v(t^3) \in S$  e acrescenta 3 em  $\infty$ . Então

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = \deg_p \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle + \deg_\infty \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = 0 + 3 = 3.$$

Agora, considerando o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t, t^2 \rangle$ , temos que

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t, t^2 \rangle = \deg_p \mathcal{O}\langle 1, t, t^2 \rangle + \deg_\infty \mathcal{O}\langle 1, t, t^2 \rangle = 5 + 2 = 7$$

pois  $v(t) = 1, v(t^2) = 2, v(t^3 \cdot t) = 4, v(t^3 \cdot t^2) = 5$  e  $v(t^7 \cdot t) = 8 \notin S$ .

## 4.2 Gonalidade de Curvas Unirramificadas

**Definição 4.2.1.** A gonalidade de uma curva  $\mathcal{C}$  é o menor inteiro  $d$  tal que existe um feixe livre de torção de posto 1, dimensão 1 em  $\mathcal{C}$  e grau  $d$ . Ou seja:

$$\text{gon}(\mathcal{C}) = \min\{\deg \mathcal{F} \mid \mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^a \rangle\}$$

No Exemplo 4.1.2,  $\text{gon}(\mathcal{C}) = 3$ , pois  $\deg \mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 4, \deg \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = 5, \deg \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = 3$  e  $\deg \mathcal{O}\langle 1, t^a \rangle \geq 4, \forall a \geq 4$ . Nesse caso, dizemos que a curva é trigonal.

**Exemplo 4.2.2.** Calcule a gonalidade da curva

$$\mathcal{C} = (1 : t^4 : t^5) \subset \mathbb{P}^2$$

$\mathcal{C}$  tem única singularidade na origem, com

$$S = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, \mapsto\}$$

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 3 + 1 = 4$$

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = 4 + 2 = 6$$

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = 3 + 3 = 6$$

$$\deg \mathcal{O}\langle 1, t^\alpha \rangle \geq 4, \text{ para } \alpha \geq 4 \implies \text{gon}(\mathcal{C}) = 4$$

Nos dois Teoremas seguintes caracterizamos as curvas parametrizadas monomiais unirramificadas quanto à sua gonalidade.

**Teorema 4.2.3.** Sejam  $\mathcal{C}$  uma curva singular parametrizada monomial unirramificada e  $S$  o seu semigrupo numérico. Então são válidas as seguintes afirmações:

1.  $gon(\mathcal{C}) \geq 2$ .
2. Se  $\mathcal{C}$  é hiperelítica, então  $gon(\mathcal{C}) = 2$ .
3. Se  $S$  é ordinário, então  $gon(\mathcal{C}) = 2$ .
4. Se  $gon(\mathcal{C}) = 2$ , então  $\mathcal{C}$  é hiperelítica ou  $S$  é ordinário.
5. Se  $3 \in S$  então  $gon(\mathcal{C}) \leq 3$ .

*Demonstração.* 1. Sabemos que o único feixe que tem grau 1 no infinito é  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  e ele tem grau 1 em  $P$  já que  $P$  é singular e, portanto,  $1 = v(t) \notin S$ . Assim,  $gon(\mathcal{C}) \geq 2$ .

2. Se  $\mathcal{C}$  é hiperelítica, então  $2 \in S$  e, portanto, o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$ , é tal que

$$deg\mathcal{F} = deg_{\infty}\mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle + deg_P\mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = 2 + 0 = 2,$$

logo,  $gon(\mathcal{C}) = 2$ .

3. Se  $S$  é ordinário, então  $S = \{0, \beta \mapsto\}$  possui um único bloco de lacunas e, portanto, o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  é tal que

$$deg\mathcal{F} = deg_{\infty}\mathcal{O}\langle 1, t \rangle + deg_P\mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 1 + 1 = 2.$$

4. Se  $gon(\mathcal{C}) = 2$ , então os únicos feixes que podem realizar a gonalidade são  $\mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  ou  $\mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$ , caso contrário, teria grau maior que 2 no infinito. Se  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$  realiza a gonalidade, então  $deg_{\infty}\mathcal{F} = 2$  e portanto,  $deg_P\mathcal{F} = 0$ . Isso ocorre apenas se  $2 \in S$  e, nesse caso,  $\mathcal{C}$  é hiperelítica. Por outro lado, se  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  realiza a gonalidade, então,  $deg_P\mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 1$ . Como  $1 \notin S$ , então  $S$  só pode ter um bloco de lacunas, caso contrário,  $deg_P\mathcal{O}\langle 1, t \rangle \geq 2$ . Portanto,  $S$  é do tipo  $\{0, \beta \mapsto\}$  ou seja,  $S$  é ordinário.

5. Se  $3 \in S$ , então

$$deg\mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = deg_{\infty}\mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle + deg_P\mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = 3 + 0 = 3$$

e, portanto, a gonalidade é no máximo 3.

□

**Teorema 4.2.4.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma curva singular parametrizada monomial unirramificada tal que  $3 \notin S$  e  $gon(\mathcal{C}) \geq 3$ , em que  $S$  é o seu semigrupo numérico. Então  $g \geq 4$  e são válidas as seguintes afirmações:*

1. Se  $g = 4$ , então  $\mathcal{C}$  é trigonal.

2. Se  $g = 5$ , então  $\mathcal{C}$  é trigonal ou  $S = \{0, 4, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$ , nesse último caso,  $\text{gon}(\mathcal{C}) = 4$ .
3. Se  $g = 6$ , então  $\text{gon}(\mathcal{C})$  é no máximo 4.

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.2.3,  $\mathcal{C}$  não é hiperelítica e  $S$  não é ordinário. Assim, como  $1 \notin S$ ,  $2 \notin S$  e  $3 \notin S$ , então  $S$  já tem no mínimo 3 lacunas. Porém, se o gênero fosse 3, então  $S$  seria ordinário, o que contradiz a hipótese. Portanto  $g \geq 4$ .

1. Os únicos semigrupos que satisfazem a hipótese e tem  $g = 4$  são:

$$S = \{0, 4, 6 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 5, 7 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 5, 6, 8 \mapsto\}$$

Em todos os casos, o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  tem grau 1 em  $\infty$  e 2 em  $P$ , portanto,  $\mathcal{C}$  é trigonal.

2. Para  $g = 5$ , se  $\mathcal{C}$  é a curva de semigrupo  $S = \{0, 4, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$ , então  $\text{gon}(\mathcal{C}) = 4$ . De fato,  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  tem grau 1 em  $\infty$  e 3 em  $P$  e, portanto,  $\text{deg}\mathcal{O}\langle 1, t \rangle = 4$ . O feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$  tem grau 2 em  $\infty$  e 2 em  $P$  e assim  $\text{deg}\mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle = 4$ . Além disso,  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle$  tem grau 3 em  $\infty$  e 2 em  $P$  e  $\text{deg}\mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle = 5$ . Por fim,  $\text{deg}\mathcal{O}\langle 1, t^a \rangle$ , com  $a \geq 4$ , tem grau no mínimo 4 no infinito e concluímos que  $\text{gon}(\mathcal{C}) = 4$ .

Por outro lado, para os semigrupos:

$$S = \{0, 4, 5, 8 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 7 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 7, 9 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 8 \mapsto\}$$

o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  tem grau 1 em  $\infty$  e 2 em  $P$  e, portanto,  $\mathcal{C}$  é trigonal.

Os demais semigrupos com  $g = 5$  que satisfazem a hipótese são:

$$S = \{0, 4, 6, 8 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 7 \mapsto\}$$

Nesses casos, o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$  tem grau 2 no em  $\infty$  e grau 1 em  $P$ . Portanto, concluímos que  $\mathcal{C}$  é trigonal.

3. Para  $g = 6$ , os semigrupos:

$$S = \{0, 4, 8 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 7, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 9 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 8 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 6, 7, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 6, 7, 8, 9, 11 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 6, 7, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 6, 7, 9 \mapsto\}$$

são tais que feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  tem 1 grau em  $\infty$  e 2 em  $P$  e, portanto,  $\mathcal{C}$  é trigonal.

Já nos semigrupos abaixo

$$S = \{0, 4, 6, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 7, 9 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 6, 8 \mapsto\}$$

o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$  tem grau 2 em  $\infty$  e 1 em  $P$  e, portanto,  $\mathcal{C}$  é trigonal.

Analisaremos agora, todos os demais semigrupos de gênero 6 que satisfazem as hipóteses:

$$S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 7, 8, 9, 11 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 7, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 6, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 7, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 5, 7, 8, 10 \mapsto\}$$

$$S = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$$

Em todos os casos, é fácil ver que pelo menos um dos feixes  $\mathcal{O}\langle 1, t \rangle$ ,  $\mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$ ,  $\mathcal{O}\langle 1, t^3 \rangle$  e  $\mathcal{O}\langle 1, t^4 \rangle$  possuem grau no mínimo 4, e, portanto, as curvas são tetragonais.

□

## 5 Índice de Clifford

Neste capítulo iremos estudar um invariante importante na geometria algébrica que é o Índice de Clifford de uma curva, o qual fornece um limite para a dimensão do espaço vetorial de um feixe em uma curva projetiva.

**Definição 5.0.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma curva como na Definição 3.2.1, com semigrupo  $S$ . Considere o feixe*

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^{a_1}, \dots, t^{a_n} \rangle,$$

com  $a_1 < \dots < a_n$  e seja  $G' := \{\ell \in G \mid \ell > a_n \text{ e } \ell \notin v(\mathcal{F})\}$ , em que  $\ell$  é uma lacuna de  $S$  e  $G$  é o conjunto de todas as lacunas de  $S$ . Então, definimos  $h^1(\mathcal{F}) = \#G'$  e  $h^0(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}) = n + 1$ , ou seja, o número de seções do feixe.

**Exemplo 5.0.2.** *Considere o semigrupo  $S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$  e seja  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  então  $G = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$  e  $G' = \{2, 3, 7\}$ . Portanto,  $h^1(\mathcal{F}) = 3$ ,  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ .*

*Por outro lado, se  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^5 \rangle$ , temos  $G' = \{6, 7, 11\}$  e  $h^1(\mathcal{F}) = 3$ ,  $h^0(\mathcal{F}) = 3$ .*

*Já para o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^6 \rangle$ , temos  $G' = \{7\}$  e  $h^1(\mathcal{F}) = 1$ ,  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ .*

O Teorema a seguir é um conhecido resultado da geometria algébrica, cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

**Teorema 5.0.3. Teorema de Riemann-Roch.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma curva de gênero  $g$ . Então para cada feixe  $\mathcal{F}$  em  $\mathcal{C}$ , tem-se:*

$$h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + 1 - g.$$

Uma vez conhecido o gênero  $g$  da curva, o Teorema de Riemann-Roch pode ser bastante útil para calcular  $h^1(\mathcal{F})$  sem precisar calcular  $G'$  como na Definição 5.0.1 para cada feixe.

**Exemplo 5.0.4.** *Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^4 : t^5) \subset \mathbb{P}^2$  a curva com um único ponto singular de semigrupo*

$$S = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$$

*e considere o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^5 \rangle$ , então  $\deg(\mathcal{F}) = 5$  e  $h^0(\mathcal{F}) = 3$ . Pelo Teorema de Riemann-Roch*

$$3 - h^1(\mathcal{F}) = 5 + 1 - 6$$

*segue que  $h^1(\mathcal{F}) = 3$ .*

*Por outro lado, considere o feixe  $\mathcal{G} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^6 \rangle$ , então  $\deg(\mathcal{G}) = 6 + 2 = 8$  e  $h^0(\mathcal{G}) = 3$ . Daí, pelo Teorema de Riemann-Roch*

$$3 - h^1(\mathcal{G}) = 8 + 1 - 6$$

segue que  $h^1(\mathcal{G}) = 0$ .

**Definição 5.0.5. Índice de Clifford de um Feixe.** Seja  $\mathcal{C}$  uma curva. Então, para cada feixe  $\mathcal{F}$  em  $\mathcal{C}$ , tem-se:

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{deg}\mathcal{F} - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1).$$

**Exemplo 5.0.6.** Sejam  $\mathcal{C}$  a curva do exemplo anterior e  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^5 \rangle$ , então

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 5 - 2(3 - 1) = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Por outro lado, se  $\mathcal{G} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^6 \rangle$ , então

$$\text{Cliff}(\mathcal{G}) = 8 - 2(3 - 1) = 8 - 2 \cdot 2 = 4.$$

**Exemplo 5.0.7.** Seja  $\mathcal{C}$  uma curva hiperelítica, isto é, o semigrupo  $S$  é definido por  $\{0, 2, 4, 6, \dots, 2g \mapsto\}$ , em que  $g$  é o gênero da curva. Considere o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^2 \rangle$ . Assim,  $\text{deg}\mathcal{F} = 2$  e  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ . Daí

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 2 - 2(2 - 1) = 0.$$

**Exemplo 5.0.8.** Seja  $\mathcal{C}$  uma curva cujo semigrupo é ordinário, isto é,  $S = \{0, \beta \mapsto\}$ . Considere  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t \rangle$  de forma que  $\text{deg}\mathcal{F} = 1 + 1 = 2$  e  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ . Então

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{deg}\mathcal{F} - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1)$$

$$2 - 2(2 - 1) = 0.$$

**Definição 5.0.9. Índice de Clifford de uma Curva.** Seja  $\mathcal{C}$  uma curva e  $\mathcal{F}$  um feixe em  $\mathcal{C}$ . Então, o Índice de Clifford de  $\mathcal{C}$  é

$$\text{Cliff}(\mathcal{C}) := \min\{\text{Cliff}(\mathcal{F}); h^0(\mathcal{F}) \geq 2 \text{ e } h^1(\mathcal{F}) \geq 2\}.$$

Chamaremos **Dimensão de Clifford** o número

$$\text{Cdim}(\mathcal{C}) = \min\{h^0(\mathcal{F}) - 1; \mathcal{F} \text{ computa } \text{Cliff}(\mathcal{C})\}.$$

**Teorema 5.0.10.** Seja  $\mathcal{C}$  uma curva. Então, para cada feixe temos que

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = \text{deg}\mathcal{F} - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1) \geq 0.$$

Além disso, se  $g \geq 3$ ,  $\text{Cliff}(\mathcal{C}) = 0$  se, e somente se

1.  $\mathcal{C}$  é hiperelítica ou

2. Seu semigrupo  $S$  é ordinário.

A proposição a seguir justifica a necessidade da hipótese  $g \geq 3$  no Teorema 5.0.10.

**Proposição 5.0.11.** *Não existe curva de gênero 1 ou 2 com  $Cliff(\mathcal{C}) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C}$  uma curva com  $Cliff(\mathcal{C}) = 0$ . Se o feixe  $\mathcal{F}$  computa o Índice de Clifford, então por definição  $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$  e  $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$ . Assim,  $Cliff(\mathcal{F}) = deg(\mathcal{F}) - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1) = 0$  implica que

$$deg\mathcal{F} = 2h^0(\mathcal{F}) - 2$$

Pelo Teorema de Riemann-Roch:

$$h^1(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - deg\mathcal{F} - 1 + g \geq 2$$

$$h^0(\mathcal{F}) - 2h^0(\mathcal{F}) + 2 - 1 + g \geq 2$$

$$-h^0(\mathcal{F}) \geq -g + 1$$

$$2 \leq h^0(\mathcal{F}) \leq g - 1$$

$$g - 1 \geq 2$$

$$g \geq 3$$

□

Os Exemplos 5.0.7 e 5.0.8 acrescidos da hipótese de que  $g \geq 3$  provam a ida do Teorema 5.0.10. A demonstração da volta e da afirmação de que  $Cliff(\mathcal{F}) \geq 0$  fogem ao objetivo deste trabalho e pode ser encontrada em [7].

**Exemplo 5.0.12.** *Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^2 : t^7 : t^8) \subset \mathbb{P}^3$  uma curva de semigrupo  $S = \{0, 2, 4, 6 \mapsto\}$ . Então,  $\mathcal{F} = \mathcal{O}(1, t^2)$  e  $deg\mathcal{F} = 2$ . Segue que  $Cliff(\mathcal{F}) = 2 - 2(2 - 1) = 0$  e  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ . Pelo Teorema de Riemann-Roch*

$$2 - h^1(\mathcal{F}) = 2 + 1 - 3$$

$$-h^1(\mathcal{F}) = 2 + 1 - 3 - 2$$

$$-h^1(\mathcal{F}) = 3 - 5$$

$$-h^1(\mathcal{F}) = -2$$

$$h^1(\mathcal{F}) = 2$$

assim, pelo teorema anterior,  $Cliff(\mathcal{C}) = 0$  e  $Cdim(\mathcal{C}) = 2 - 1 = 1$ .

**Exemplo 5.0.13.** Seja a curva  $\mathcal{C} = (1 : t^3 : t^4 : t^5) \subset \mathbb{P}^3$  de gênero 2, com  $S = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3 \mapsto\}$ . Considere o feixe  $\mathcal{O}\langle 1, t \rangle$ . Temos que  $\deg(\mathcal{F}) = 2$  e, embora,  $\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 0$ , tal feixe não pode computar o Índice de Clifford da curva, conforme a Definição 5.0.9. De fato, por Riemann-Roch:

$$h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + 1 - g$$

$$2 - h^1(\mathcal{F}) = 2 + 1 - 2$$

$$2 - h^1(\mathcal{F}) = 1$$

$$h^1(\mathcal{F}) = 1$$

o que gera uma contradição, pois  $h^1(\mathcal{F}) \geq 2$  para computar  $\text{Cliff}(\mathcal{C})$ .

**Exemplo 5.0.14.** Seja  $\mathcal{C} = (1 : t^4 : t^5) \subset \mathbb{P}^2$  com  $S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12 \mapsto\}$ . Pelo Teorema 5.0.10, como  $\mathcal{C}$  não é hiperelítica e  $S$  não é ordinário, então  $\text{Cliff}(\mathcal{C}) \geq 1$ . Vimos no Exemplo 4.2.2 que  $\mathcal{C}$  é tetragonal, ou seja, se  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^a \rangle$ , então  $\deg \mathcal{F} \geq 4$ . Assim, para tais feixes,  $\text{Cliff}(\mathcal{F}) \geq 4 - 2(2 - 1) = 2$ . Porém, vimos em 5.0.4 que o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}\langle 1, t^4, t^5 \rangle$  tem  $\deg(\mathcal{F}) = 5$ ,  $h^0(\mathcal{F}) = 3$  e  $h^1(\mathcal{F}) = 3$ . Assim,  $\mathcal{F}$  pode computar o Índice de Clifford e

$$\text{Cliff}(\mathcal{F}) = 5 - 2(3 - 1) = 1.$$

Portanto,  $\text{Cliff}(\mathcal{C}) = 1$  e  $\text{Cdim}(\mathcal{C}) = 2$ .

# Referências

- [1] L. F. F. Abrantes. *Gonalidade e o Teorema de Max Noether para curvas não-Gorenstein*, UFMG Ph. D. thesis, (2013).
- [2] L. F. F. Abrantes, A. Contiero, and R. V. Martins, *Max Noether's theorem for integral curves*, *Journal of Algebra*, (2018).
- [3] L. F. F. Abrantes, R. V. Martins. *Gonality of Non-Gorenstein Curves of Genus Five*. *Bull. Braz. Math. Soc.* (2014).
- [4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griths, J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves*. Springer-Verlag, (1985).
- [5] V. Barucci, M. D'Anna, R. Fröberg. *Analytically Unramified One-Dimensional Semilocal Rings and their Value Semigroups*. *Journal of Pure and Applied Algebra* 147 (2000) 215-254.
- [6] V. Barucci, R. Fröberg. *One-Dimensional Almost Gorenstein Rings*. *Journal of Algebra* 188, (1997), 418-442.
- [7] D. Eisenbud, J. Koh, and M. Stillman. *Determinantal equations for curves of high degree*. *American Journal of Mathematics*, 110(3):513–539, (1988). [34](#)
- [8] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Benjamin/Cummings Publishing C (1969).
- [9] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, (1977). [32](#)
- [10] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. Springer-Verlag (1994).