THAMILES SANTOS NUNES

SISTEMAS SINGULARES HIPERBÓLICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

N972s
2017

Nunes, Thamiles Santos, 1991-
Sistemas singulares hiperbólicos / Thamiles Santos Nunes. – Viçosa, MG, 2017.
viii, 66f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Bulmer Mejía García.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.65-66.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 515.39

THAMILES SANTOS NUNES

SISTEMAS SINGULARES HIPERBÓLICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 10 de Julho de 2017

Carlos Arnoldo Morales Rojas

Enoch Humberto Apaza Calla

Bulmer Mejía García
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Josileide e João Batista.

O êxito da vida não se mede pelo caminho que você conquistou, mas sim pelas dificuldades que superou no caminho.

Abraham Lincoln

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me guiou durante essa caminhada.

Aos meus pais e irmãos pelo carinho e apoio, em especial à minha mãe Josileide Santos Nunes que contribuiu de maneira tão marcante em minha formação.

Agradeço ao meu orientador, Bulmer, pela paciência, companheirismo, aprendizado e pelas suas correções.

Agradeço ao Eder Leandro e ao Lázaro pelo apoio e incentivo, aos meus colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a construção deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Introdução **1**

1 Sistemas Dinâmicos **4**

1.1 Preliminares 4

1.2 Notações e Definições 6

1.3 Relação entre Sistemas Contínuos e Discretos 14

1.4 Teorema do Fluxo Tubular 15

2 Hiperbolicidade **18**

2.1 Preliminares 18

2.2 Teorema de Grobman-Hartman 23

2.3 Conjuntos Hiperbólicos 31

2.3.1 Exemplos Triviais 32

2.3.2 Ferradura de Smale 32

2.4 Variedades Invariantes 34

3 Atrator de Lorenz **36**

3.1 Introdução 36

3.2 Propriedades das Equações de Lorenz 37

3.3 Modelo geométrico do Atrator de Lorenz 39

4 Hiperbolicidade Singular **43**

4.1 Hiperbolicidade Fraca 43

4.2 Singularidades Incorporadas e Tipo Lorenz 48

4.3 Fluxo Linear de Poincaré 50

4.4 Sobre Conjuntos Singulares Hiperbólicos 53

4.5 Campo Singular Axioma A 58

4.5.1 Exemplo de Campo Singular Axioma A 61

Referências Bibliográficas **65**

Resumo

NUNES, Thamiles Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017. **Sistemas Singulares Hiperbólicos**. Orientador: Bulmer Mejía García.

Neste trabalho demonstramos alguns teoremas que tratam da estrutura local dos Sistemas Dinâmicos, como o Teorema do Fluxo Tubular, que é aplicado a pontos regulares, e o Teorema de Grobman-Hartman, que é aplicado a pontos singulares hiperbólicos. Também definimos conjuntos Hiperbólicos, Parcialmente Hiperbólicos, Decomposição dominada, Fluxo Linear de Poincaré e Campo Singular Axioma A. No entanto, o principal objetivo deste trabalho é o estudo de Sistemas Dinâmicos Singulares Hiperbólicos, os quais são subconjuntos compactos e invariantes de uma variedade fechada que admitem uma decomposição contínua do fibrado tangente em dois subfibrados invariantes, onde um deles tem um comportamento contrativo e o outro, sendo dominado pelo primeiro, expande área. Além disso, são sistemas cujas singularidades são todas hiperbólicas. Abordamos também um exemplo de conjunto Singular Hiperbólico, o Atrator de Lorenz e o modelo geométrico desse Atrator.

Abstract

NUNES, Thamiles Santos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017. **Singular Hyperbolic Systems**. Adviser: Bulmer Mejía García.

In this work we demonstrate some theorems that deal with the local structure of Dynamical Systems, such as the Tubular Flow Theorem, which is applied to regular points, and Grobman-Hartman's Theorem, which is applied to singular hyperbolic points. We also define Hyperbolic set, Partially Hyperbolic, Dominated Splitting, Linear Poincaré Flow and Singular Axiom A vector field. However, the main objective of this dissertation is the study of Singular Hyperbolic Dynamical Systems, which are compact and invariant subsets of a closed manifold that admit a continuous splitting of the tangent bundle into two invariant subbundles, one of them has a contractive behavior and the other, being dominated by the first, expands area. Moreover, all singularities of this systems are hyperbolic. Examples of Singular Hyperbolic sets are the Lorenz attractor and the geometric model of this attractor.

Introdução

A teoria de Sistemas Dinâmicos tem como objetivo compreender o comportamento ao longo do tempo dos estados de um sistema em uma variedade diferenciável M de dimensão n dado por uma função $f : M \longrightarrow M$ ou um fluxo $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, ou seja, as alterações dos estados do sistema na variedade com o decorrer do tempo t, o qual pode ser considerado discreto ($t \in \mathbb{Z}$) ou contínuo ($t \in \mathbb{R}$). A evolução dos estados podem mostrar desde um comportamento muito simples e portanto previsível, até um comportamento bastante complicado e complexo, onde é impossível fazer algum tipo de previsão da evolução das órbitas de um ponto ou um conjunto a longo prazo.

Pela dificuldade que representa estudar dinâmicas específicas, buscou-se propriedades gerais que satisfazem os Sistemas Dinâmicos. Nas décadas 60 e 70, com os trabalhos de *Smale* [29], *Sinai* [28], *Ruelle* [5], *Bowen* [4], entre outros, foi introduzido o conceito de Conjunto Hiperbólico conduzindo ao desenvolvimento da Teoria Hiperbólica, a qual permitiu facilitar o estudo geral dos Sistemas Dinâmicos. Essa teoria busca entender o comportamento de conjuntos compactos invariantes Λ para fluxos e difeomorfismos em variedades compactas de dimensão finita, os quais apresentam uma decomposição contínua do espaço tangente T_pM em cada ponto $p \in \Lambda$.

Na tentativa de ampliar o alcance da Teoria Hiperbólica, motivado, por exemplo, em entender as propriedades do Atrator de Lorenz, o qual é um exemplo clássico de dinâmica não hiperbólica com singularidade, que surgem várias noções mais fracas de hiperbolicidade, como, por exemplo:

(i) O conceito de decomposição dominada, que foi introduzido nos trabalhos de *Mañé* [17], *Liao* [14] e *Pliss* [26], no esforço de provar a conjectura de estabilidade de *Palis-Smale* [25].

(ii) A noção de Hiperbolicidade Parcial que surgiu a partir do estudo dos sistemas que robustamente não são hiperbólicos, *Brin-Pesin*, [6].

(iii) O conceito de variedades invariantes conforme apresentado por *Hirsch-Pugh-Shub* [10].

(iv) A noção de hiperbolicidade seccional introduzidas nos trabalhos de *Metzger-Morales* [19], *Bonatti-Díaz-Viana* [3] e *Araújo-Pacífico* [1], os quais caracterizam-se por expandir a área sobre cada subespaço bidimensional no subfibrado central.

O objetivo deste trabalho é estudar os conjuntos Singulares Hiperbólicos em variedades tridimensionais. Estes conjuntos foram introduzidos por *Morales-Pacífico-Pujals* em 1998, [21], como uma caracterização dos conjuntos C^1 robustos transitivos singulares, ou seja, um conjunto transitivo Λ que contém singularidades e que é a continuação, em um vizinhança U de Λ na variedade, de todo campo vetorial C^1 próximo de um campo X. Esses conjuntos definem um sistema dinâmico com todas as singularidades hiperbólicas e admitem uma decomposição invariante dominada. Informalmente, um conjunto Λ compacto e invariante é dito ser Singular Hiperbólico se existe uma decomposição do fibrado tangente em dois subfibrados invariantes, onde um deles tem um comportamento contrativo e o outro, sendo dominado pelo primeiro, expande área. O primeiro exemplo, dentre outros, de conjunto Singular Hiperbólico é o atrator de Lorenz e seus modelos geométricos.

Desde então estudou-se muitos problemas relacionados com a generalização das propriedades dos conjuntos Hiperbólicos em variedades de dimensão n. Esta dissertação pretende abordar sobre esses aspectos, não de forma exaustiva, mas o suficiente para compreender os Sistemas Singulares Hiperbólicos. A dissertação esta dividida como segue.

No capítulo 1, exibimos alguns conceitos preliminares para compressão do texto, além de noções e definições básicas do estudo de Sistema Dinâmico, tanto discreto como contínuo, e a relação entre eles. Finalizamos o capítulo com o Teorema de Fluxo Tubular que discorre sobre o comportamento local das órbitas de um ponto regular.

No capítulo 2, sobre Hiperbolicidade, utilizamos espaços de Banach para demonstrar de maneira mais geral o Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismo e para campos, que resumidamente reduz o problema de classificar as conjugações locais de difeomorfismos em torno de ponto fixos hiperbólicos e de campos em torno de singularidades hiperbólicas, ao de classificar as conjungações de isomorfismos hiperbólicos e a de campos lineares com singularidades hiperbólicas. Ainda neste capítulo definimos Conjuntos Hiperbólicos e exibimos exemplos. E por fim definimos as Variedades Invariantes Estável e Instável W^s e W^u e exibimos o Teorema da Variedade Estável que em suma, assegura que próximo a singularidades (pontos fixos) hiperbólicas o sistema não linear possui variedades estável e instável que são tangentes, respectivamente, aos subfibrados lineares estável E^s e instável E^u do fibrado tangente de M sobre Λ.

No capítulo 3, apresentamos o que foi o primeiro exemplo conhecido de um atrator estranho, não hiperbólico e caótico para fluxos, introduzido num famoso trabalho de *Edward Lorenz* [16] em 1963. Neste capítulo também exibimos as propriedades das equações de Lorenz e a construção do modelo Geométrico do atrator de Lorenz.

Finalmente, no capítulo 4, sobre Hiperbolicidade Singular, utilizamos subconjuntos conexos, compactos, não trivias e invariantes $\Lambda \subset M$, onde M é variedade tridimensional compacta e sem bordo dotada de uma topologia C^r, $r \geq 1$, para descrever os Conjuntos Hiperbólicos, Parcialmente Hiperbólicos e Singulares Hiperbólicos. Além disso, definimos singularidade incorporadas que

são acumuladas por órbitas regulares, e singularidade de tipo Lorenz as quais possuem, pela derivada do fluxo, autovalores reais que satisfazem a seguinte realção $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$. Também exibimos o fluxo Linear de Poincaré e definimos quando este é hiperbólico. Algumas propriedades de conjuntos Singulares Hiperbólicos e finalizamos nosso estudo com os Conjuntos Axioma A e Singular Axioma A, os quais são conjuntos hiperbólicos, ou a união de conjuntos básico e singulares básicos cujo conjunto não errante é o fecho de seus elementos críticos.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo vamos abordar os principais conceitos e resultados que serão usados ao longo desta dissertação. Para maiores detalhes, consultar [8], [12], [23], [24], [27], entre outros.

1.1 Preliminares

Definição 1.1. *Seja M um conjunto. Uma* ***topologia*** *em M é uma família τ de subconjuntos de M com as seguintes propriedades:*

1. *$\emptyset$ e M pertencem a τ;*
2. *A união de uma família arbitrária de membros de τ pertencem a τ;*
3. *A interseção de uma família finita de membros de τ pertencem a τ.*

Os membros de τ são chamados de abertos. O par (M, τ) é chamado *Espaço Topólogico*. Em geral, por simplicidade, diz-se que M é um espaço topológico, subentendendo-se uma topologia τ a ele associada.

Seja M um espaço topológico. Um *atlas* $\mathfrak{A}$ em M é uma coleção $\{\phi_i : U_i \to \tilde{U}_i\}_{i\in I}$ de homeomorfismos, chamados *cartas locais* ou *sistemas de coordenadas locais* de M, onde $U_i \subset M$ e $\tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$ são abertos e $\bigcup_{i\in I} U_i = M$. As aplicações

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_i \to \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \tilde{U}_j$$

chamadas de *mudanças de coordenadas* são homeomorfismos. Um atlas é de classe C^r, $0 \leq r \leq \infty$, se todas as mudanças de coordenadas do atlas são de classe C^r. E neste caso, dizemos que M é de dimensão m.

Na coleção de todos os atlas de classe C^r em M temos uma relação de ordem parcial dado pela inclusão: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se toda carta local do atlas $\mathcal{A}$ for também

uma carta local de $\mathcal{B}$. Um atlas $\mathcal{A}$ é *maximal* se para todo atlas $\mathcal{B}$ de classe C^r com $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ vale $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Um atlas diz-se *localmente finito* se todo ponto $p \in M$ tem uma vizinhança aberta que intersecta somente um número finito de vizinhanças de M no atlas.

Definição 1.2. *Um espaço topológico M é* ***Hausdorff*** *se para dois pontos distintos p e q em M, existem abertos $U, V \subset M$ tais que $p \in U$, $q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Definição 1.3. *Um espaço topológico M possui base enumerável de abertos se existe uma coleção enumerável de abertos de M tal que todo aberto é a união de abertos dessa coleção.*

Definição 1.4. *Uma* ***Variedade Diferenciável*** *de dimensão m e classe C^r, $r \geq 1$, é um par ordenado $(M, \mathfrak{A})$ onde M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e $\mathfrak{A}$ é um atlas maximal.*

Subentendendo o atlas maximal, diremos que M é uma variedade diferenciável, ou simplesmente, uma variedade.

Exemplo 1.5. *Os espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ são variedades de dimensão m e classe C^∞, com atlas $\mathfrak{A}$ de classe C^∞ contendo o único sistema de coordenadas $\phi = id : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.*

Exemplo 1.6. *A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ é uma variedade de dimensão n e classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$, com atlas $\mathfrak{A} = \{\phi_N; \phi_S\}$, onde $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ é o polo norte, $S = (0, \ldots, 0, -1) \in S^n$ o polo sul, e $\phi_N : S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$, $\phi_S : S^n - \{S\} \to \mathbb{R}^n$ as projeções estereográficas relativas ao polo norte e polo sul respectivamente.*

Definição 1.7. *Sejam M, N variedades de classe C^r, $(r \geq 1)$. Uma aplicação $f : M \to N$ é dita* ***diferenciável*** *no ponto $p \in M$ se existem cartas locais $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é diferenciável no ponto $\phi(p)$. Se $f : M \to N$ for diferenciável em todos os pontos de M, dizemos que f é diferenciável.

A aplicação $f : M \to N$ é dita ser de *classe* C^k, $(k \leq r)$ se, para cada $p \in M$, existem cartas locais $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ em M, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ em N, com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$ é de classe C^k.

No que segue $C^k(M, N)$ é o conjunto das aplicações de classe $C^k, k \geq 0$, de M a N.

Definição 1.8. *Sejam M e N variedades de classe C^r. A* ***topologia de Whitney*** *ou topologia forte de $C^k(M, N)$ é definida declarando-se os abertos que geram a sua topologia, construídos como segue:*

Sejam $f \in C^k(M,N)$, $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i\in\Lambda}$ um atlas de M localmente finito, $K = \{K_i\}_{i\in\Lambda}$ uma cobertura por compactos de M com $K_i \subset U_i$ tal que $f(U_i) \subset V_i$, $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i\in\Lambda}$ um atlas de N e $\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i\in\Lambda}$. Definimos portanto uma vizinhança forte básica de f

$$N^k(f; \Psi, \Phi, K, \epsilon)$$

como sendo o conjunto das aplicações $g : M \to N$ tal que para todo $i \in \Lambda$, $g(K_i) \subset V_i$ e

$$\| D^r(\psi_i f \phi_i^{-1})(x) - D^r(\psi_i g \phi_i^{-1})(x) \| < \epsilon_i$$

para todo $x \in \varphi_i(K_i)$, $r = 0, \ldots, k$.

1.2 Notações e Definições

Definição 1.9. *Um **Sistema Dinâmico** de classe C^r $(r \geq 0)$ é um terno (M, T, φ) onde M é variedade diferenciável e $\varphi : T \times M \to M$ é uma aplicação de classe C^r, satisfazendo*

1. $\varphi(0, x) = x$, $\forall x \in M$
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, $\forall x \in M$ e $\forall t, s \in T$

O sistema dinâmico diz-se *discreto* quando $T = \mathbb{Z}$ e *contínuo* quando $T = \mathbb{R}$.

Fixando $t \in T$, φ determina a aplicação $\varphi_t : M \to M$, e as propriedades 1 e 2 podem ser reescritas, para todo $x \in M$,

1. $\varphi_0(x) = x$
2. $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x)$

Um sistema dinâmico discreto $(M, \mathbb{Z}, f)$ consiste do estudo das *iteradas* da aplicação f, isto é:

$$f^0(x) := x$$
$$f^1(x) := f(x)$$
$$f^2(x) = f(f(x))$$
$$\vdots$$
$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f(x)}_{n \text{ vezes}}$$

Se a aplicação for inversível estudamos também:

$$f^{-2}(x) := f^{-1} \circ f^{-1}(x)$$
$$f^{-n}(x) := \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}(x)}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplo 1.10. *Seja o sistema dinâmico discreto* $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, f)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 + c$, *onde* c *é um número real fixo. Neste caso, dado qualquer número real* x *e qualquer* N *sempre vai existir a* N*-ésima iterada de* f *calculada em* x. *Tomemos, por exemplo,* $c = 2$, $x = 0$ *e* $N = 3$, *daí temos:*

$$f^3(0) = f(f(f(0))) = f(f(0^2+2)) = f(f(2)) = f(2^2+2) = f(f(6)) = 6^2+2 = 38.$$

Nos sistemas dinâmicos contínuos $(M, \mathbb{R}, \varphi)$ precisamos do conceito de campo vetorial e de fibrado tangente.

Definição 1.11. *Seja* E *um espaço vetorial e* M *uma variedade diferenciável. Um* ***Fibrado Vetorial*** *sobre* M, *de fibra* E, *é uma variedade* F *junto com uma função diferenciável* $\pi : F \to M$ *tal que:*

1. *Para todo ponto* $p \in M$, *existe um aberto* $U \subseteq M$ *com* $p \in U$ *e um difeomorfismo* $\tau_U : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ *tal que* $\pi_U(\tau_U(x)) = \pi(x)$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\tau_U"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times E \arrow[dl, "\pi_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

2. *Existem* U *e* V *abertos, tais que*

$$\begin{array}{ccccc} (U \cap V) \times E & \xleftarrow{\tau_U} & \pi^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\tau_V} & (U \cap V) \times E \\ (x, v) & & \longmapsto & & (x, \tau_{UVx}(v)) \end{array}$$

onde $\tau_{UVx} : E \longrightarrow E$ *é uma transformação linear inversível e a função*

$$\begin{array}{rcl} U \cap V & \longrightarrow & Gl(E) \\ x & \longmapsto & \tau_{UVx} \end{array}$$

é diferenciável.

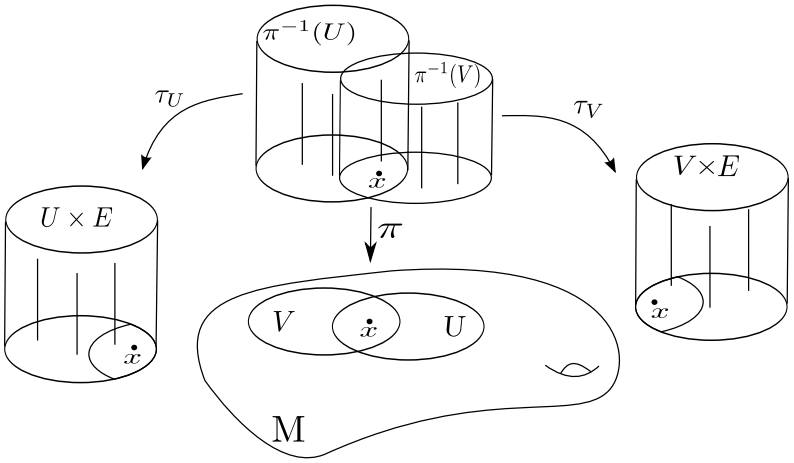

Figura 1.1: Fibrado Vetorial.

Definição 1.12. *Dado um Fibrado Vetorial F com $\pi_F : F \to M$, um* ***Subfibrado Vetorial*** *de F é um fibrado vetorial E com $\pi_E : E \to M$, em que E é um subespaço topológico de F e π_E é a restrição de π_F a E.*

Definição 1.13. *Seja M Variedade Diferenciável, C^r, e $p \in M$, definimos o* ***Espaço Tangente*** *a M em p como o conjunto*

$$T_pM := \{[\varphi, v]_p : v \in \mathbb{R}^m, \varphi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^m \text{ carta com } p \in U\}/_\sim$$

onde $[\varphi, v]_p \sim [\psi, w]_p$ se $D(\psi \circ \varphi^{-1})\varphi(p) \cdot v = w$.

Exemplo 1.14. *Seja $\mathbb{R}^n$ variedade com atlas $\mathfrak{A} = \{id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$. Se $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n = \{[id, v]_p : v \in \mathbb{R}^n\}$ faremos uma identificação de $[id, v]_p$ com $v \in \mathbb{R}^n$ portanto $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.*

Observação 1.15. *Também podemos definir o* ***Espaço Tangente*** *a M em p como o conjunto*

$$\mathcal{T}_pM := \{\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m \text{ é curva } C^k, k \geq 1, \text{ tal que } \gamma(0) = p\}/_\sim$$

onde $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se existe uma carta $\varphi : U \subseteq M \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, com $p \in U$ e $0 \in \tilde{U}$, tal que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

As definições 1.13 e 1.15 são equivalentes já que a aplicação

$$\begin{aligned} H : \mathcal{T}_pM &\longrightarrow T_pM \\ [\gamma] &\longmapsto [\varphi, (\varphi \circ \gamma)'(0)] \end{aligned}$$

é uma bijeção.

De fato, sejam $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^m$ uma carta local, $p \in U$ e $[\gamma]$, $[\alpha] \in \mathcal{T}_pM$ então

(i) H está bem definida:

$$[\gamma] = [\alpha] \Rightarrow H([\gamma]) = [\varphi, (\varphi \circ \gamma)'(0)]_p = [\varphi, (\varphi \circ \alpha)'(0)]_p = H([\alpha]).$$

(ii) H é injetiva:

$$\begin{aligned} H([\gamma]) = H([\alpha]) &\Rightarrow [\varphi, (\varphi \circ \gamma)'(0)]_p = [\varphi, (\varphi \circ \alpha)'(0)]_p \\ &\Rightarrow D(\varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0) \\ &\Rightarrow (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0) \\ &\Rightarrow [\gamma] = [\alpha]. \end{aligned}$$

(iii) H é sobrejetiva:

Seja $[\varphi, v]_p \in T_pM$ então $[\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)] \in \mathcal{T}_pM$ é tal que

$$H([\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)]) = [\varphi, (\varphi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv))'(0)]_p = [\varphi, v]_p.$$

Definição 1.16. *Seja M variedade diferenciável. Denotaremos por TM a união disjunta de todos os planos tangentes a M, ou seja,*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

esse conjunto é chamado ***Fibrado Tangente*** *associado à variedade M.*

Mostra-se que o Fibrado Tangente é um Fibrado Vetorial de fibra $\mathbb{R}^m$. Para maiores detalhes sobre este fato consultar [13].

Definição 1.17. *Um* ***Campo vetorial*** *de classe C^r $(r \geq 1)$ é uma aplicação $X : M \to TM$ de classe C^r, que a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Denotaremos $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^r em M.

Observação 1.18. *Por abuso de notação, se $X : U \subset \mathbb{R}^m \to T\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, denotaremos por $X : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.*

Exemplo 1.19. *A aplicação $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $X(x, y) = (-y, x)$ é um campo vetorial de classe C^∞, já que para cada $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $X(p) = (-y, x) \in T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$.*

Dado um campo vetorial X de classe C^r $(r \geq 1)$ definido em uma variedade M, existe um único fluxo φ_t definido para todo $t \in \mathbb{R}$ associado ao campo, solução da equação diferencial $\dfrac{d\varphi_t}{dt}(x) = X(x)$ sujeita à condição inicial $x(t_0) = x_0$.

Definição 1.20. *Uma* ***curva integral*** *de um campo $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto x_0 no tempo t_0 é uma função $x : I \subset \mathbb{R} \to U$ tal que $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t) = X(x(t))$ para todo $t \in I$. (Onde $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$).*

Definição 1.21. *Uma* ***órbita*** *de um ponto $q \in M$ é o conjunto*

$$\mathcal{O}(q) = \{\varphi_t(q) : t \in T\}.$$

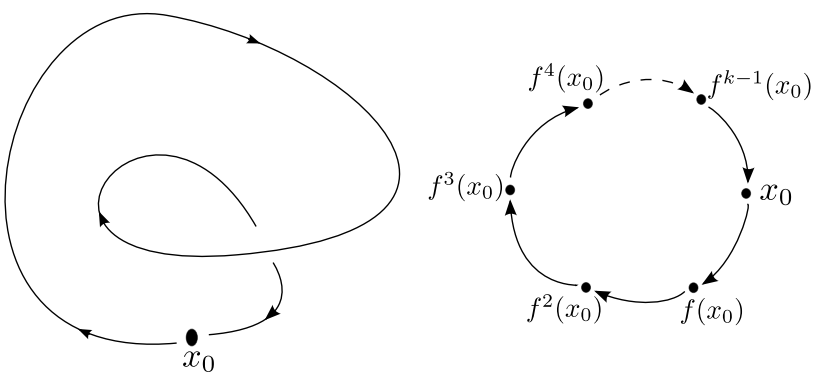

Figura 1.2: Órbitas periódicas $(M, \mathbb{R}, \varphi)$ e $(M, \mathbb{Z}, f)$, respectivamente.

Quando $T = \mathbb{R}$ as órbitas são curvas em M, enquanto que para $T = \mathbb{Z}$ uma órbita é uma sucessão de pontos. (Ver figura 1.2).

Definição 1.22. *Um ponto p é um* ***ponto fixo*** *se $\varphi_t(p) = p$, para todo $t \in T$, (equivalentemente $\mathcal{O}(p) = \{p\}$).*

Geralmente, em sistemas dinâmicos contínuos, $p \in M$ é chamado **singularidade** para o campo X se $X(p) = 0$, ou seja, se é ponto fixo para o fluxo φ_t. Caso contrário, p é dito **ponto regular**.

Denotaremos por $Sing(X)$ o conjunto das singularidades de X.

Definição 1.23. *Um ponto $p \in M$ é chamado* ***ponto periódico*** *para um Sistema Dinâmico (M, T, φ) se existe $t' > 0$ tal que $\varphi_{t'}(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$, para todo $0 < t < t'$. Neste caso, t' é chamado de período.*

A órbita de um ponto periódico é chamada de *órbita periódica.* Usaremos $Per(\varphi)$ para indicar o conjunto dos pontos periódicos.

Uma *órbita fechada* é uma órbita que é um conjunto fechado. Assim as órbitas fechadas em conjuntos compactos são as singularidades e as órbitas periódicas. Também chamaremos *elemento crítico* de um sistema dinâmico um ponto fixo, uma singularidade, ou uma órbita periódica.

Em uma órbita podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Para isso, segue o seguinte conceito.

Definição 1.24. *Dado $p \in M$ definimos o* ***ω-limite*** *e o* ***α-limite*** *de p, respectivamente, como os conjuntos*

$$\omega(p) = \{q \in M : \lim_{t_n \to \infty} \varphi_{t_n}(p) = q, \text{ para alguma sequência } t_n\}$$

$$\alpha(p) = \{q \in M : \lim_{t_n \to -\infty} \varphi_{t_n}(p) = q, \text{ para alguma sequência } t_n\}$$

Exemplo 1.25. *O círculo S^1 é o conjunto dos pontos do plano complexo $\mathbb{C}$ da forma $e^{ix2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$. Observamos que se k é um número inteiro, então $e^{ix2\pi}$ e $e^{i(x+k)2\pi}$ representam o mesmo ponto no círculo. Uma rotação de ângulo 2π é a aplicação*

$$R_\sigma : S^1 \longrightarrow S^1$$

dada por

$$R_\sigma(e^{ix2\pi}) = e^{i(x+\sigma)2\pi}$$

Notamos que $R_\sigma(e^{ix2\pi})$ é o primeiro iterado, o segundo é $R_\sigma^2(e^{ix2\pi}) = R_\sigma(R_\sigma(e^{ix2\pi})) = e^{i(x+2\sigma)2\pi}$. Sucessivamente, o m-ésimo iterado é

$$R_\sigma^m(e^{ix2\pi}) = R_\sigma(R_\sigma^{m-1}(e^{ix2\pi})) = e^{i(x+m\sigma)2\pi}$$

A órbita $\mathcal{O}(e^{ix2\pi})$ é periódica se

$$R_\sigma^m(e^{ix2\pi}) = e^{i(x+m\sigma)2\pi} = e^{ix2\pi} \Leftrightarrow m\sigma = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sigma \in \mathbb{Q}$$

Observamos que se $\sigma = \dfrac{p}{q}$, p e q primos entre si, então todos os pontos de S^1 são periódicos e seu período é q. Quando σ é irracional não há órbitas periódicas,

porém, neste caso, a órbita de qualquer ponto é densa em S^1. Os conjuntos ω-limite e α-limite são

$$\omega(e^{ix2\pi}) = \alpha(e^{ix2\pi}) = S^1, \quad se\ \sigma \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

$$\omega(e^{ix2\pi}) = \alpha(e^{ix2\pi}) = \mathcal{O}(e^{ix2\pi}), \quad se\ \sigma \in \mathbb{Q}.$$

Definição 1.26. *Seja um sistema dinâmico (M, T, φ). Um ponto p é chamado* ***não errante*** *para φ, se para toda vizinhança U, contendo p, e para todo $s > 0$, existe $t > s$ tal que*

$$\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Usaremos a notação $\Omega(\varphi)$ (as vezes, $\Omega(X)$) para indicar o conjunto dos pontos não errantes de φ, (ou do campo X). Claramente $Per(\varphi) \subset \Omega(\varphi)$.

Proposição 1.27. *O conjunto $\Omega(\varphi)$ é fechado, $\varphi(\Omega(\varphi)) \subseteq \Omega(\varphi)$ e além disso, contém ω-limite e α-limite de todos os pontos de M.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\Omega(\varphi)$ com $x_n \to x \in M$, dada uma vizinhança aberta U de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Então como $x_n \in U$ temos que existe $V_{x_n} \subset U$ aberto tal que $x_n \in V_{x_n}$ para cada $n > n_0$. Fixe $n > n_0$, como $x_n \in \Omega(\varphi)$ temos que existe $m \geq 1$ tal que $\varphi_m(V_{x_n}) \cap V_{x_n} \neq \emptyset$, logo $\varphi_m(U) \cap U \neq \emptyset$ e portanto $x \in \Omega(\varphi)$.

Por outro lado temos que se $x \in \varphi(\Omega(\varphi))$ então $x = \varphi(y)$ com $y \in \Omega(\varphi)$. Seja V uma vizinhança de x, temos que $\varphi_{-1}(V)$ é uma vizinhança de y, logo existe $n > 0$ tal que $\varphi_n(\varphi_{-1}(V)) \cap \varphi_{-1}(V) \neq \emptyset$ donde $\varphi_n(V) \cap V \neq \emptyset$. Portanto $x \in \Omega(\varphi)$, ou seja, $\varphi(\Omega(\varphi)) \subseteq \Omega(\varphi)$.

Finalmente, seja $x = \lim_{n_k\to\infty} \varphi_{n_k}(y) \in U$, com U aberto. Suponhamos que n_k é uma sequência crescente. Então $\varphi_{n_k}(y) \in U$ para k suficientemente grande e $\varphi_{n_{k+1}}(y) \in U$ pelo que $U \cap \varphi_{n_{k+1}-n_k}(U) \neq \emptyset$, ou seja, o ω-limite dos pontos de M estão em $\Omega(\varphi)$. O argumento para os pontos α-limite é completamente análogo. □

Definição 1.28. *Os sistemas dinâmicos (M, T, φ) e (N, T, ψ) são* ***topologicamente conjugados*** *se existe um homeomofismo $h : M \to N$ tal que*

$$h \circ \varphi = \psi \circ h$$

h é chamada ***conjugação topológica*** *entre φ e ψ.*

Em outras palavras, (M, T, φ) e (N, T, ψ) são topologicamente conjugados se o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.29. *Sejam os sistemas dinâmicos* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, X)$ *e* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, Y)$ *dados por* $X(x,y) = (x, -y)$ *e* $Y(x,y) = (x, -y + x^3)$, *e seja* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $h(x,y) = \left(x, y + \dfrac{x^3}{4}\right)$ *a conjugação topológica entre os campos* X *e* Y.

De fato, os fluxos de X *e* Y *são dados, respectivamente, por:*

$$\begin{aligned}\varphi_t(a,b) &= (ae^t, be^{-t})\\ \psi_t(a,b) &= \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4}\right)e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}\right)\end{aligned}$$

Assim,

$$(h \circ \varphi_t)(a,b) = h(ae^t, be^{-t}) = \left(ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}\right)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(\psi_t \circ h)(a,b) &= \psi_t\left(a, b + \frac{a^3}{4}\right)\\ &= \left(ae^t, \left(b + \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{4}\right)e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}\right)\\ &= \left(ae^t, be^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t}\right).\end{aligned}$$

Observação 1.30. *Os sistemas dinâmicos* (M, T, φ) *e* (N, T, ψ) *serão:*

1. **$\mathbf{C^r}$–*conjugados***, $r \geq 1$, *se existe um difeomorfismo* $h : M \to N$ *de classe* C^r *tal que* $h \circ \varphi = \psi \circ h$.

2. ***Semiconjugados***, *se existe uma aplicação sobrejetora* $h : M \to N$ *de classe* C^r *tal que* $h \circ \varphi = \psi \circ h$.

Definição 1.31. *Sejam* φ *e* ψ *em* $C^r(M,N)$. *A* **$\mathbf{C^r}$–*distância*** *entre* φ *e* ψ *denotada* $d_r(\varphi, \psi)$ *é dada por*

$$d_r(\varphi,\psi) = \sup_{x \in M}(|\varphi(x) - \psi(x)|, |\varphi^{(1)}(x) - \psi^{(1)}(x)|, \ldots, |\varphi^{(r)}(x) - \psi^{(r)}(x)|)$$

Sendo $\varphi^{(r)}$ *é a r-ésima derivada de* φ.

Intuitivamente, duas aplicações são C^r–*próximas* se ela, bem como suas r primeiras derivadas, diferem por apenas uma quantidade pequena.

Exemplo 1.32. *Sejam* $(J, \mathbb{Z}, f)$ *e* $(J, \mathbb{Z}, g)$ *dois sistemas dinâmicos,* $J = [0,1] \subset \mathbb{R}$, *definidos por* $f(x) = 2x$ *e* $g(x) = (2+\epsilon)x$. *Eles são* C^r–ϵ *distantes no intervalo* J, *pois*

$$\begin{aligned}d_r(f,g) &= \sup_{x \in J}(|f(x) - g(x)|, |f^{(1)}(x) - g^{(1)}(x)|, \ldots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|)\\ &= \sup_{x \in J}(|2x - 2x - \epsilon x|, |2 - 2 - \epsilon|, |0|, \ldots, |0|) = \epsilon.\end{aligned}$$

Definição 1.33. *Um sistema dinâmico (M, T, φ) é* **C^r–estruturalmente estável**, *se existem (M, T, ψ) e $\epsilon > 0$ tal que φ e ψ são $C^r-\epsilon-$próximos, ou seja, $d_r(\varphi, \psi) < \epsilon$. Além disso, φ é topologicamente conjugada a ψ.*

Em resumo, uma aplicação φ é estruturalmente estável se cada aplicação "nas proximidades" é topologicamente conjugada a φ e por isso tem essencialmente a mesma dinâmica.

Definição 1.34. *Um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto é*

1. ***Invariante** por φ_t, se $\varphi_t(\Lambda) = \Lambda, \forall t \in T$;*
2. ***Transitivo**, se é invariante e $\Lambda = \omega(p)$ para algum $p \in M$;*
3. ***Não trivial**, se Λ não é uma órbita fechada de X;*
4. ***Invariante Maximal**, se existe uma vizinhança compacta U de Λ tal que*
$$\Lambda = \bigcap_{t \in T} \varphi_t(U)$$
*U é chamado **bloco isolante**;*
5. ***Sumidouro**, se é invariante maximal e tem um bloco isolante positivamente invariante U, isto é,*
$$\varphi_t(U) \subset U, \forall t > 0$$
6. ***Atrator**, se é sumidouro transitivo;*
7. ***Singular**, se contém, pelo menos, uma singularidade.*

Definição 1.35. *Um atrator Λ, de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, é* **C^r–robusto** *se está contido num bloco isolante U, tal que*

$$\Lambda_Y = \bigcap_{t \geq 0} \psi_t(U)$$

é um atrator para cada Y C^r–próximo de X. Onde ψ_t é o fluxo gerado pelo campo Y.

Ou seja, se modificarmos ligeiramente o fluxo, continua existindo um atrator.

Definição 1.36. *Um conjunto compacto transitivo Λ de X é* **C^r–robusto transitivo** *se existe um bloco isolante U de Λ tal que*

$$\Lambda_Y = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \psi_t(U)$$

é transitivo para todo Y C^r–próximo de X.

Em particular, quando $r = 1$ diremos apenas que Λ é *robusto transitivo*.

1.3 Relação entre Sistemas Contínuos e Discretos

Podemos transformar um sistema dinâmico contínuo $(M, \mathbb{R}, \varphi)$ em um sistema dinâmico discreto $(M, \mathbb{Z}, f)$, pelo menos de duas maneiras:

1. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, fixo, e considerando $f = \varphi_{t_0}$, temos que, para $n \in \mathbb{Z}$

$$f^n = (\varphi_{t_0})^n = \varphi_{nt_0}.$$

2. Sejam $\varphi_t : M \to M$ um fluxo e $\mathcal{O}$ uma órbita periódica de período $\tau_0 > 0$. Seja $S \subseteq M$ uma subvariedade de codimensão 1, ou seja, $\dim(S) = \dim(M) - 1$ tal que:

   (i) $\mathcal{O} \cap S = \{x_0\}$

   (ii) $\dfrac{d}{dt}\varphi_t(x) \notin T_xS, \forall x \in S.$

   Dado x numa vizinhança $V_{x_0} \subset S$ de x_0, defina a aplicação

$$\begin{aligned} P : V_{x_0} &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \varphi_\tau(x) \end{aligned}$$

   onde τ é o menor valor positivo de t para o qual $\varphi_t(x) \in S$. A aplicação P é chamada *aplicação de Poincaré* e a subvariedade S é a *Seção de Poincaré*. (Ver figura 1.3).

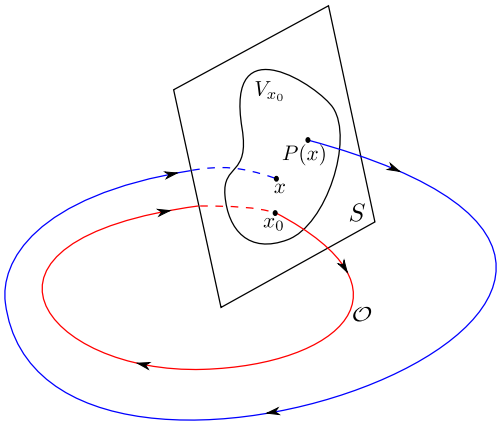

Figura 1.3: Aplicação de Poincaré.

De mesmo modo, dado um sistema dinâmico discreto $(M, \mathbb{Z}, f)$, podemos construir um fluxo definido em um espaço de dimensão igual a $\dim(M) + 1$. Este fluxo é denominado *suspensão* da aplicação f, que é construído como segue.

Seja $f : M \to M$ uma aplicação de classe C^r, $r \geq 0$, consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times M$. Defina a relação de equivalência $(s+1, x) \sim (s, f(x))$, obtemos o seguinte espaço quociente

$$M_f = (\mathbb{R} \times M)/_\sim.$$

Para obter todos os pontos é suficiente considerar $0 \leq s \leq 1$, mas os outros pontos são incluídos porque eles deixam claro que o espaço quociente tem uma estrutura C^r se f for C^r. Consideremos as equações em $\mathbb{R} \times M$, dadas por $\dot{x} = 0$ e $\dot{s} = 1$.

Elas induzem um fluxo φ_{-t} em $\mathbb{R} \times M$ que passa ao fluxo φ_t no espaço quociente M_f. Note que $\varphi_{-1}(0, x) = (1, x) \sim (0, f(x))$, para todo t. (Ver figura 1.4).

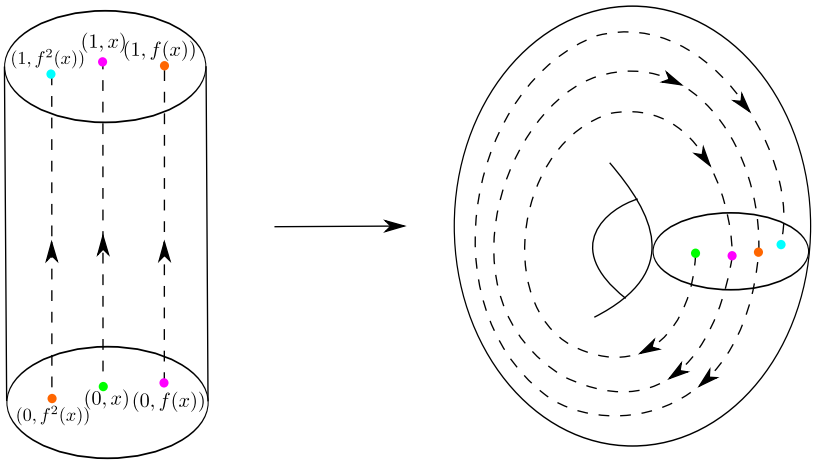

Figura 1.4: Suspensão de uma aplicação.

Note que, se identificarmos M com a seção $S = \{0\} \times M$ do fluxo φ_t, obtemos como aplicação de Poincaré a aplicação f. Assim, localmente, a suspensão e a aplicação de Poincaré são construções inversas uma da outra.

1.4 Teorema do Fluxo Tubular

Um prova do teorema a seguir pode ser encontrado em [15].

Teorema 1.37 (Aplicação Inversa). *Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^r, $r \geq 1$, no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ se $a \in U$ é tal que a derivada $Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo (isto é, $detJf(a) \neq 0$) então f é um difeomorfismo local.*

Definição 1.38. *Sejam $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe $C^r, r \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ também aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \to U$ de classe C^r chama-se **seção transversal local** de X quando, $\forall a \in A$, $Df(a) \cdot (\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço $\mathbb{R}^n$.*

*Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida por U. Se $f : A \to \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma **seção transversal** de X.*

Teorema 1.39 (Fluxo Tubular). *Seja p um ponto não singular de um campo $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^r, r \geq 1$ e $f : A \to \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^r com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : (-\epsilon, \epsilon) \times B \to V$ de classe C^r, onde $\epsilon > 0$ e B é uma bola em $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem tal que h é uma C^r-conjugação entre o campo $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$ dado por $Y \equiv (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\varphi : G \to U$ o fluxo do campo X, onde $G = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U\}$. Seja

$$F : G_A = \{(t,u) : (t, f(u)) \in G\} \to U$$

$G_A \subset \mathbb{R} \times A$, definida por $F(t,u) = \varphi(t, f(u))$. F aplica linhas paralelas em curvas integrais de X. Mostremos que F é um difeomorfismo local em $0 = (0, \overline{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Pelo teorema da aplicação inversa 1.37, é suficiente mostrar que $DF(0)$ é um isomorfismo.

De fato,

$$D_1F(0) = D_1\varphi(0, f(\overline{0})) = \frac{d}{dt}\varphi(t, f(\overline{0})|_{t=0} = X(\varphi(0,p)) = X(p)$$

E mais, $D_2F(t,u) = D_2\varphi(t, f(u))$ e $\varphi(0, f(u)) = f(u)$ para todo $u \in A$. Logo,

$$D_2F(0,u) = D_2\varphi(0, f(u)) = D_1f(u) \Rightarrow D_2F(0) = D_1f(0)$$

Prosseguindo assim obtemos,

$$D_jF(0) = D_{j-1}f(0),\ j = 2, \ldots, n.$$

Portanto os vetores $D_jF(0),\ j = 1, \ldots, n$ geram o $\mathbb{R}^n$ e daí $detDF(0) \neq 0$, ou seja, $DF(0)$ é um isomorfismo. Aplicando 1.37 existem $\epsilon > 0$ e uma bola $B \in \mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem tais que $h := F|_{((-\epsilon,\epsilon)\times B)}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V := F((-\epsilon,\epsilon) \times B)$.

Finalmente, mostremos que h é a C^r–conjugação entre os campos Y e $X|_V$. Sejam $\psi(t,x) = x + (t, 0, \ldots, 0)$ o fluxo de Y, $x = (t_0, u_0) \in (-\epsilon, \epsilon) \times B$ e $t \in (-\epsilon - t_0, \epsilon - t_0)$. Assim, para o par (t,x) vale:

$$h(\psi(t,x)) = \varphi(t, h(x)) \Leftrightarrow \varphi(-t, h(\psi(t,x))) = h(x)$$

ou sinteticamente, $\varphi_{-t} \circ h \circ \psi_t(x) = h(x)$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_{-t} \circ h \circ \psi_t(x) &= \varphi_{-t} \circ h \circ \psi_t(t_0, u_0) \\
&= \varphi_{-t} \circ h \circ \psi(t + t_0, u_0) \\
&= \varphi_{-t} \circ \varphi(t + t_0, f(u_0)) \\
&= \varphi(t_0, f(u_0)) \\
&= h(t_0, u_0) \\
&= h(x).
\end{aligned}$$

□

O teorema do fluxo tubular descreve o comportamento local das órbitas na vizinhança de um ponto regular. Com isso existe um único modelo local para pontos não singulares que são as órbitas retas percorridas com velocidade de tempo 1. (Ver figura 1.5).

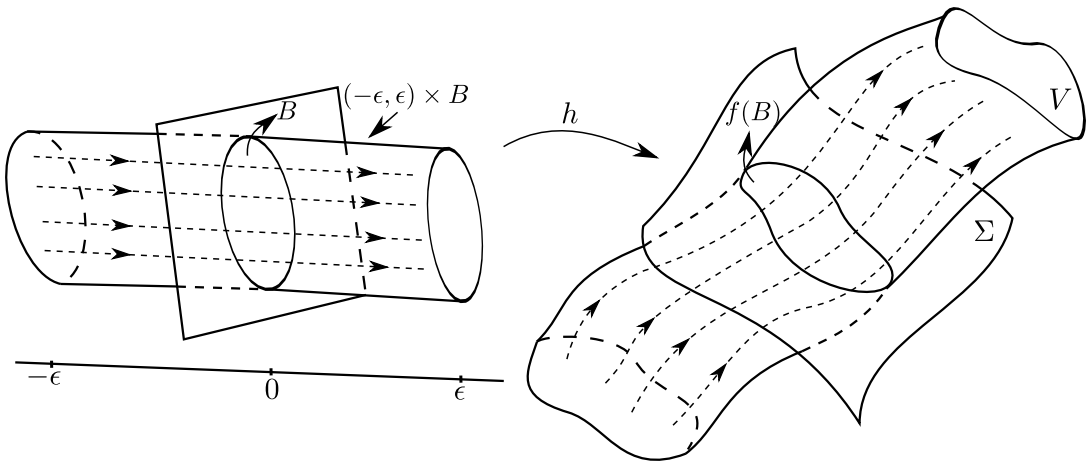

Figura 1.5: Teorema do Fluxo Tubular.

Capítulo 2

Hiperbolicidade

2.1 Preliminares

Definição 2.1. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma norma em E é uma aplicação $\| \cdot \|: E \to [0, +\infty)$ que satisfaz*

1. *(Nulidade)* $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. *(Homogeneidade)* $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$
3. *(Desigualdade triangular)* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

para quaisquer vetores $x, y \in E$ e escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

Um *espaço normado* é um espaço vetorial E munido de uma norma $\| \cdot \|$.

Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vetores em um espaço normado E é de *Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| x_m - x_n \| < \epsilon, \ \forall \ m, n > n_0$.

Definição 2.2. *Um espaço normado E é um* ***espaço de Banach*** *se toda sequência de Cauchy for convergente.*

Exemplo 2.3. *Os espaços normados $\mathbb{R}^n$, com a norma*

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{1/2}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, são espaços de Banach, pois toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ converge.

Definição 2.4. *Seja E um espaço normado complexo e seja $A : E \to E$ um operador linear. O* ***espectro*** *de A é o conjunto*

$$sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \ \ \textit{não é invertível}\}.$$

Exemplo 2.5. *Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por*

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Temos que o $sp(A) = \{3, 1/2\}$, neste caso, cada autovalor de A.

Definição 2.6. *Seja E um espaço normado. Uma aplicação $F : E \to E$ é uma* ***contração*** *se existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que*

$$\| F(x) - F(y) \| \leq \lambda \| x - y \|, \ \forall x, y \in E.$$

Teorema 2.7 (Ponto fixo para contração)**.** *Sejam E um espaço de Banach fechado e $F : E \to E$ uma contração. Então existe um único ponto fixo $p \in E$.*

Demonstração. Sejam $x \in E$ e $x_n = F^n(x), \forall n \in \mathbb{N}$. Como F é uma contração, então para $0 \leq \lambda < 1$ temos que

$$\| F(x) - F(y) \| \leq \lambda \| x - y \|, \ \forall x, y \in E.$$

Mostremos que x_n é uma sequência de Cauchy, para tal, verifiquemos por indução que

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leq \lambda^n \| x_1 - x_0 \|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para $n = 1$ temos

$$\| x_{n+1} - x_n \| = \| F(x_n) - F(x_{n-1}) \| \leq \lambda \| x_n - x_{n-1} \| .$$

Suponhamos a fórmula válida para um certo $n \in \mathbb{N}$. Para $n + 1$, da última desigualdade, temos:

$$\| x_{n+2} - x_{n+1} \| \leq \lambda \| x_{n+1} - x_n \| \underbrace{\leq}_{\text{hip. indução}} \lambda \cdot \lambda^n \| x_1 - x_0 \| = \lambda^{n+1} \| x_1 - x_0 \| .$$

Provando a indução.

Dados $m > n$, temos portanto

$$\| x_m - x_n \| \leq (\lambda^n + \ldots + \lambda^m) \cdot \| x_1 - x_0 \| \leq \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \lambda^j \right) \cdot \| x_1 - x_0 \| = \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \| F(x) - x \| .$$

Logo, x_n é uma sequência de Cauchy. Existe portanto, $p = \lim x_n$ e $p \in E$, porque E é fechado. Assim,

$$F(p) = F(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = p.$$

Notamos que a segunda igualdade se dá pois todo contração é contínua, e a última pois em uma sequência convergente toda subsequência converge para o mesmo limite. Se tivermos ainda $F(q) = q$, com $q \in E$ então

$$\| q - p \| = \| F(q) - F(p) \| \leq \lambda \| q - p \| \Rightarrow (1 - \lambda) \| q - p \| \leq 0.$$

Como $1-\lambda > 0$ temos $\| q-p \| = 0$ e assim $q = p$. Portanto, o ponto fixo de F é único. $\square$

No que segue $\mathcal{L}(E)$ é o espaço das transformações lineares $L : E \to E$, e $\mathcal{L}(E)$ é uma espaço normado com norma dada por

$$\| L \| = \sup_{v \neq 0} \frac{\| Lv \|}{\| v \|}.$$

Lema 2.8 (Pertubação do isomorfismo)**.** *Seja E um espaço de Banach, $L \in \mathcal{L}(E)$, satisfazendo $\| L \| \leq a < 1$ e $G \in \mathcal{L}(E)$ isomorfismo com $\| G^{-1} \| \leq a < 1$ então:*

1. *$(I+L)$ é um isomorfismo com $\| (I+L)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{(1-a)}$.*
2. *$(I+G)$ é um isomorfismo com $\| (I+G)^{-1} \| \leq \dfrac{a}{(1-a)}$.*

Demonstração. Seja $y \in E$ fixado. Defina $u : E \to E$ por:

$$u(x) = y - L(x).$$

Dessa forma tem-se que:

$$\| u(x_1) - u(x_2) \| = \| L(x_1) - L(x_2) \| \leq \| x_1 - x_2 \|$$

provando que u é uma contração. Como E é um espaço de Banach pelo teorema 2.7, existe um único $z \in E$ tal que $u(z) = z$, ou seja, $y - L(z) = z$, o que implica que $y = (I+L)(z)$, provando que $(I+L)$ é sobrejetivo. Além disso, $(I+L)(x_1) = (I+L)(x_2) \Rightarrow x_1 + L(x_1) = x_2 + L(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = L(x_1 - x_2)$, logo $x_1 = x_2$, pois caso contrário $\| L \| \geq 1$, uma contradição. Dessa forma $(I+L)$ é um isomorfismo. Sejam $y \in E$ com $\| y \| = 1$ e $x \in E$ tal que $x = (I+L)^{-1}(y)$. Assim, aplicando $(I+L)$, segue que $x + L(x) = y$ e reagrupando, $x = y - L(x)$. Pela desigualdade triangular e o fato de que $\| L \| \leq a < 1$ temos

$$\begin{aligned} \| x \| &\leq 1 + a \| x \| \\ \| x \| &\leq \frac{1}{1-a} \\ \| (I+L)^{-1} \| &\leq \frac{1}{(1-a)} \end{aligned}$$

demonstrando o item 1.

Agora, $(I+G) = G(I+G^{-1})$. Como $\| G^{-1} \| \leq a < 1$ segue do item 1 que $(I+G^{-1})$ é inversível. Sendo G isomorfismo, $(I+G)$ também o é. Daí, $(I+G)^{-1} = (I+G^{-1})^{-1}G^{-1}$, assim

$$\| (I+G)^{-1} \| \leq \| (I+G^{-1})^{-1} \| \cdot \| G^{-1} \| \leq \frac{a}{1-a}$$

demonstrando o ítem 2. $\square$

Lema 2.9 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam $\alpha \geq 0$ uma constante, $u, v : I \to \mathbb{R}$ duas funções positivas contínuas tais que*

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s), \ \forall t \in I.$$

Então vale

$$u(t) \leq \alpha \cdot e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0, u \equiv 0$.

Demonstração. Primeiro suponhamos $\alpha > 0$. Considere $\phi : I \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \alpha + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds$. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{d\phi}{dt} = u(t) \cdot v(t).$$

Mas por hipótese temos que $u(t) \leq \phi(t)$. Assim,

$$\frac{d\phi}{dt} = u(t) \cdot v(t) \leq \phi(t) \cdot v(t).$$

Sendo $\alpha > 0$ e $u, v \geq 0$, segue-se que ϕ é estritamente positiva. Com isso, podemos escrever:

$\frac{1}{\phi(t)} \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} \leq v(t) \Rightarrow \frac{d(\ln \phi(t))}{dt} \leq v(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d(\ln \phi(t))}{dt} ds \leq \int_{t_0}^{t} v(s)ds \Rightarrow$ $\ln\left(\frac{\phi(t)}{\phi(t_0)}\right) \leq \int_{t_0}^{t} v(s)ds \Rightarrow \phi(t) \leq \phi(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}$.

Como $\phi(t_0) = \alpha$ e $u(t) \leq \phi(t)$. Segue-se que

$$u(t) \leq \alpha \cdot e^{\int_{t_0}^{t} v(s)ds}.$$

Agora, para $\alpha = 0$. Consideremos $\alpha = \epsilon > 0$ no caso já provado e tomemos o limite quando $\epsilon \to 0$. Com isso obtemos que

$$u(t) \equiv 0, \forall t \in I.$$

□

A seguir veremos a definição de ponto fixo hiperbólico para sistemas dinâmicos discretos.

Definição 2.10. *Seja E um espaço de Banach. Um Isomorfismo Linear $A \in \mathcal{L}(E)$ é dito* ***hiperbólico*** *se o espectro de A não intersecta a esfera S^1. Se E tem dimensão finita isto é o mesmo que dizer que nenhum autovalor de A tem norma igual a 1.*

Definição 2.11. *Dado um difeomorfismo $f : U \subset E \to E$ de classe C^r, um ponto fixo $p \in U$ é dito* ***hiperbólico*** *se $Df(p)$ é um isomorfismo hiperbólico.*

Exemplo 2.12. *Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por*

$$L(u) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} u,$$

isto é, se $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz representação de L tem autovalores 2 e $\frac{1}{2}$, logo L é um isomorfismo hiperbólico. Além disso, $(0,0)$ é o único ponto fixo hiperbólico de L, já que $L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$. Note que,

$$L(x,0) = (2x,0) = 2(x,0)$$

$$L(0,y) = (0,\frac{1}{2}y) = \frac{1}{2}(0,y)$$

os pontos do eixo x se afastam da origem sob iteração de L. E os pontos do eixo y convergem para 0 sob iteração de L.

No caso em que $E = \mathbb{R}$, o ponto fixo $p \in U$, do difeomorfismo $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^r, é *hiperbólico* se $\| Df(x) \| = |f'(p)| \neq 1$. Com isso, se $|f'(p)| < 1$, então p é chamado *ponto hiperbólico atrator* ou *poço*. Se $|f'(p)| > 1$, então p é chamado *ponto hiperbólico repulsor* ou *fonte*.

Exemplo 2.13. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$. Os pontos fixos de f são 0, 1 e -1. Calculando sua derivada obtemos $f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)$. Assim, $| f'(0) | = \frac{1}{2} < 1$; $| f'(1)) | = 2 > 1$; $| f'(-1) | = 2 > 1$. Com isso, 0 é ponto hiperbólico atrator, 1 e -1 são pontos hiperbólicos repulsores.*

Para sistemas dinâmico contínuos temos a definição de singularidade hiperbólica.

Definição 2.14. *Seja um campo de vetores $X : M \to TM$ de classe C^r, uma singularidade $p \in M$ é* ***hiperbólica*** *se todos autovalores de sua parte linear $DX(p)$ têm parte real não nula.*

Definição 2.15. *Uma singularidade hiperbólica $p \in M$ é chamada de* ***fonte*** *ou* ***poço*** *se $DX(p)$ possui, respectivamente, os autovalores todos positivos ou todos negativos. Caso contrário, p é uma* ***sela hiperbólica****.*

Exemplo 2.16. *Seja um campo de vetores $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^r, dado por $X(x,y) = (x,-y)$. Claramente, $(0,0)$ é uma singularidade de X. Temos que*

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

como os autovalores de $(0,0)$ *são* 1 *e* -1*, logo* $(0,0)$ *é uma sela hiperbólica.*

2.2 Teorema de Grobman-Hartman

Se E um espaço de Banach e $A : E \to E$ um isomorfismo linear hiperbólico, existem uma decomposição $E = E^s \oplus E^u$ invariante por A e uma norma em E segundo a qual, para $a \geq 0$,

$$\| A^s \| \leq a < 1, \text{ onde } A^s := A|_{E^s} \to E^s.$$
$$\| (A^u)^{-1} \| \leq a < 1, \text{ onde } A^u := A|_{E^u} \to E^u.$$

Seja $C_b^0(E)$ o espaço das aplicações contínuas e limitadas de E em E com norma uniforme

$$|v| := \sup\{|v(x)|, x \in E\}, \forall v \in C_b^0(E)$$

como $E = E^s \oplus E^u$, temos uma decomposição em soma direta

$$C_b^0(E) := C_b^0(E, E^s) \oplus C_b^0(E, E^u), \text{ com } v = v_s \oplus v_u, \forall v \in C_b^0(E)$$

onde $v_s := \pi_s \circ v$ e $v_u := \pi_u \circ v$, sendo $\pi_s : E^s \oplus E^u \to E^s$ e $\pi_u : E^s \oplus E^u \to E^u$ as projeções naturais.

Lema 2.17. *Seja* E *um espaço de Banach e* $A : E \to E$ *um isomorfismo linear hiperbólico, então existe* $\epsilon > 0$ *tal que se* ϕ_1 *e* $\phi_2 \in C_b^0(E)$ *têm constantes de Lipschitz menor ou igual a* ϵ*, então* $(A + \phi_1)$ *e* $(A + \phi_2)$ *são conjugados.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe um homeomorfismo $h : E \to E$ tal que

$$h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h.$$

Suponhamos $h = I + w$, com $w \in C_b^0(E)$, isto é, h está a uma distância finita da identidade. Assim, segue que

$$(I + w) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + w) \Leftrightarrow$$

$$A + \phi_1 + w \circ (A + \phi_1) = A + A \circ w + \phi_2 \circ (I + w).$$

Fazendo o cancelamento de A e reagrupando os termos temos que:

$$A \circ w - w \circ (A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2 \circ (I + w). \tag{2.1}$$

Mostremos que $w \in C_b^0(E)$ satisfazendo a equação 2.1 é único.

Considere o operador $\hat{L}$ definido em $C_b^0(E)$ dado por

$$\hat{L}(y) := A \circ y - y(A + \phi_1).$$

Sejam $L : C_b^0(E) \to C_b^0(E)$ dado por $L(y) := y - A^{-1} \circ y \circ (A + \phi_1)$ e $\hat{A} : C_b^0(E) \to C_b^0(E)$ dada por $\hat{A}(y) = A \circ y$. Assim, $\hat{L} = \hat{A} \circ L$.

Se provarmos que $\hat{A}$ e L possuem inversa, teremos que $\hat{L}$ é inversível. Seja $\alpha \in C_b^0(E)$ temos que $\hat{A}(A^{-1}(\alpha)) = \alpha$ assim $\hat{A}$ é sobrejetiva. Além disso, se $\alpha, \beta \in C_b^0(E)$ com $\hat{A}(\alpha) = \hat{A}(\beta)$ segue que $A(\alpha) = A(\beta)$ e como A é injetivo, temos que $\alpha = \beta$. Logo, $\hat{A}$ sendo bijeção é invertível.

Agora, observe que $C_b^0(E, E^s)$ e $C_b^0(E, E^u)$ são invariantes por L, pois, como A é isomorfismo que tem E^s e E^u como subespaços de E invariantes, segue que estes subespaços são invariantes por A^{-1}. Com isso, $L(y_s) = y_s - A^{-1} \circ y_s \circ (A + \phi_1)$, $y_s \in C_b^0(E, E^s)$, segue que a aplicação $y_s \circ (A+\phi_1)$ toma valores em E^s e portanto, $L(y_s) \in C_b^0(E, E^s)$. Analogamente, $L(y_u) \in C_b^0(E, E^u)$.

Daí, podemos escrever $L = L^s + L^u$, onde

$$L^s := L|_{C_b^0(E,E^s)}, L^s : C_b^0(E, E^s) \to C_b^0(E, E^s)$$

$$L^u := L|_{C_b^0(E,E^u)}, L^u : C_b^0(E, E^u) \to C_b^0(E, E^u).$$

Se ϵ for suficiente pequeno, o Lema 2.8 garante que $(A + \phi_1)$ é um homeomorfismo. Definindo o operador $G : C_b^0(E, E^s) \to C_b^0(E, E^s)$ por

$$G(y_s) = A^{-1} \circ y_s \circ (A + \phi_1)$$

G é inversível, porque é a composição de aplicações inversíveis, com inversa

$$G^{-1}(y_s) = A^s \circ y_s \circ (A + \phi_1)^{-1}$$

G^{-1} é uma contração com norma limitada por $a < 1$. De fato, já que $\| G^{-1} \| \leq \| A^s \| \cdot \| (A + \phi_1)^{-1} \|$, escrevendo $x = x^s + x^u$, se $x^u \neq 0$ tomando ϵ suficientemente pequeno se verifica que G^{-1} é uma contração, e se $x^u = 0$ segue que $A(x) = A^s(x)$ e como ϕ_1 tem constante de Lipschitz que pode ser reduzida o quanto for necessário, $(A + \phi_1)$ são próximo de A quanto for necessáio. Já que $\| A^s \|$ e $\| (A^u)^{-1} \|$ tem norma limitada por $\lambda < 1$, segue o resultado.

Pelo Lema 2.8 temos que L^s é inversível e $\| (L^s)^{-1} \| \leq \dfrac{a}{1-a}$ assim como L^u é inversível e $\| (L^u)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{1-a}$.

Portanto, $\hat{L}$ é inversível com norma

$$\| \hat{L}^{-1} \| = \| L^{-1} \cdot \hat{A}^{-1} \| \leq \frac{\| A^{-1} \|}{1-a}.$$

Dessa forma a equação 2.1 é equivalente a

$$w = \hat{L}^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + w)). \tag{2.2}$$

Mas w sastisfará a equação 2.2 se e só se for ponto fixo do operador $T : C_b^0(E) \to C_b^0(E)$, dado por

$$T(y) := \hat{L}^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + y)).$$

Dados y_1, $y_2 \in C_b^0(E)$, temos

$$\begin{aligned}\| T(y_1) - T(y_2) \| =& \| \hat{L}^{-1}(\phi_1) - \hat{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + y_1)) - \hat{L}^{-1}(\phi_1) + \hat{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + y_2)) \| \\ =& \| \hat{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + y_1)) - \hat{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + y_2)) \| \\ \leq& \| \hat{L}^{-1} \| \cdot |\phi_2 \circ (I + y_1) - \phi_2 \circ (I + y_2)| \\ \leq& \frac{\| A^{-1} \|}{1 - a} \cdot \epsilon \cdot |y_1 - y_2|.\end{aligned}$$

Assim para ϵ suficientemente pequeno T é uma contração e existe um único ponto fixo, w que satisfaz 2.2, logo

$$(I + w) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + w).$$

Só resta mostrar que $(I + w)$ é um homeomorfismo. Para tal, seguindo o raciocínio acima e permutando ϕ_1 com ϕ_2, obtemos um único $v \in C_b^0(E)$ tal que

$$(I + v) \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_1) \circ (I + v).$$

Isto posto, $(I + v)$ é a inversa de $(I + w)$. De fato,

$$(I+w)\circ(I+v)\circ(A+\phi_2) = (I+w)\circ(A+\phi_1)\circ(I+v) = (A+\phi_2)\circ(I+w)\circ(I+v).$$

Temos então que $(I + w) \circ (I + v)$ semiconjuga $(A + \phi_2)$ consigo mesmo. E $(I + w) \circ (I + v)$ está a uma distância finita da identidade

$$(I + w) \circ (I + v) = I + v + w \circ (I + v)$$

$v + w \circ (I + v) \in C_b^0(E)$. Já que a identidade I também semiconjuga $(A+\phi_2)$ com ele mesmo, da unicidade da construção de v, segue-se que $I = (I + w) \circ (I + v)$. Analogamente, $(I + w) \circ (I + v)$ semiconjuga $(A + \phi_1)$ com ele próprio. Dessa forma,

$$(I + w) \circ (I + v) = (I + v) \circ (I + w) = I.$$

O que implica que $h = (I + w)$ é homeomorfismo conjugando $(A + \phi_1)$ e $(A + \phi_2)$. Completando a demonstração. □

Teorema 2.18 (Grobman-Hartman para difeomorfismos)**.** *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r e $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico de f. Seja $A = Df_p : T_pM \to T_pM$. Então existem vizinhanças V de p em M e U de 0 em T_pM e um homeomorfismo $h : U \to V$ tais que*

$$h \circ A = f \circ h.$$

Demonstração. Tratando-se de resultado local, podemos, sem perda de generalidade e usando cartas locais, supor f um difeomorfismo definido de uma vizinhança W de p para outra N de zero em $E = T_pM$, com $f(0) = 0$. Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $(A+\phi)$ é conjugado a A em E, para todo ϕ limitado com constante

de Lipschitz limitada por ϵ_0, conforme Lema 2.17. Para este ϵ_0 tomemos uma vizinhança $B_r \subset W \cap N$ tal que $(A+\phi)|_{B_{r/2}} = f|_{B_{r/2}}$, $(A+\phi)|_{B_r{}^c} = A$, ϕ é limitada e tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ_0. Pelo Lema 2.17, existe um homeomorfismo $h : E \to E$ a uma distância finita da identidade tal que

$$h \circ A = (A+\phi) \circ h.$$

Como A é isomorfismo hiperbólico e zero seu único ponto fixo (não possuindo outro, pois este seria um autovetor do autovalor 1), pela conjugação implica que $(A+\phi)$ possui um único ponto fixo. Se p é ponto fixo de $(A+\phi)$ temos

$$\begin{aligned} h \circ A(h^{-1}(p)) &= (A+\phi) \circ h(h^{-1}(p)) \Rightarrow \\ h \circ A \circ h^{-1}(p) &= (A+\phi)(p) = p \Rightarrow \\ A \circ h^{-1}(p) &= h^{-1}(p) \end{aligned}$$

o que significa que $h^{-1}(p)$ é ponto fixo de A, logo, zero. Assim, $(A+\phi)(0) = 0$, daí $h(0) = 0$.

Agora, restriguindo h a uma vizinhança de zero $U \subset B_{r/2}$ tal que $V := h(U) \subset W$. Temos que para todo $x \in U \cap A^{-1}(U)$ vale

$$h \circ A(x) = f \circ h(x).$$

□

Corolário 2.19. *Seja p um ponto fixo hiperbólico para um difeomorfismo $f : M \to M$ de classe C^r. Existe uma vizinhança U de p tal que se $f^n(x) \in U$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $x = p$. Em particular, os pontos fixos hiperbólicos de f são isolados.*

Demonstração. Pelo teorema de Grobman-Hartman (2.18) existem vizinhanças U em torno de p, V em torno de 0 e um homeomorfismo $h : U \to V$, com $A \circ h = h \circ f$. Como A é um isomorfismo hiperbólico, então o único ponto fixo é o 0, assim, para toda vizinhança do 0, qualquer ponto diferente da origem, ou ele no passado ($n < 0$) estava fora de tal vizinhança, ou ele no futuro ($n > 0$), estará fora da mesma. Daí, se $f^n(x) \in U$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, então $h(f^n(x)) = A^n(h(x)) \in V$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Pelo argumento acima, $h(x) = 0$ e além disso, como $A(h(p)) = h(f(p)) = h(p)$, então $h(p) = 0$, com isso, já que h é homeomorfismo logo $x = p$.

Em particular, se $x \in U$ é outro ponto fixo hiperbólico ($f^n(x) = x \in U$, $\forall n \in \mathbb{Z}$), logo $x = p$. □

Agora para enunciar e demonstrar o teorema de Grobman-Hartman para campos precisamos do seguinte lema.

Lema 2.20. *Seja $X : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores de classe C^r,$(r \geq 1)$ com $X(0) = 0$. Seja $L = DX_0$. Dados $\epsilon > 0$ e $K > 0$, existe um campo $Y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ com as seguintes propriedades:*

1. *O campo Y tem constante de Lipschitz limitada por K e, portanto, o fluxo induzido por Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$;*

2. *$Y = L$ fora de uma bola $B(0, r)$;*

3. *Existe um aberto $U \subset V$ contendo zero tal que $Y = X$ em U;*

4. *Escrevendo $Y_t = L_t + \phi_t$, existe $N > 0$ tal que $|\phi_t| \leq N$ para todo $t \in [-2, 2]$ e ϕ_1 tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ.*

Demonstração. Visto que $L = (DX)_0$, temos que $X = L + \psi$, onde $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ é C^r tal que $\psi(0) = 0$ e $D\psi_0 = 0$. Seja $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ tal que $\beta(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, com

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, & se\ t \leq \dfrac{r}{2} \\ 0, & se\ t \geq r \end{cases}$$

Seja $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\Psi(x) = \begin{cases} \beta(|x|) \cdot \psi(x), & se\ x \in V \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R}^m \setminus V \end{cases}$$

Dado $\delta > 0$, podemos escolher $r > 0$ de tal forma que Ψ seja de classe C^r e seja $\delta-$Lipschitz. Daí, da definição de Ψ, $\Psi = \psi$ em $B\left(0, \dfrac{r}{2}\right)$ e $\Psi \equiv 0$ fora $B(0, r)$. Seja $Y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ o campo de vetores definada por $Y = L + \Psi$. Daí,

$$Y = \begin{cases} X, & em\ B\left(0, \dfrac{r}{2}\right) \\ L, & fora\ de\ B(0, r) \end{cases}$$

satisfazendo 1. Agora, como consequência da desigualdade de Gronwall (Lema 2.9), temos que

$$|Y_t(x) - Y_t(y)| \leq e^{K|t|} \cdot |x - y| \underbrace{\leq}_{|t| \leq 2} e^{2K} \cdot |x - y|.$$

Seja $\phi_t := Y_t - L_t$, então

$$\begin{aligned} \phi_t(x) - \phi_t(y) &= [Y_t(x) - Y_t(y)] + [L_t(x) - L_t(y)] \\ &= \int_0^t [\Psi(Y_s(x)) - \Psi(Y_s(y))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \Rightarrow \\ |\phi_t(x) - \phi_t(y)| &\leq \delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2 + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \right| \\ &\leq \underbrace{\delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2}_{:=\alpha} + \int_0^t \underbrace{\| L \|}_{:=v(s)} \cdot \underbrace{|\phi_s(x) - \phi_s(y)|}_{:=u(s)} ds. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwall (2.9), obtemos

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2 \cdot e^{\|L\| \cdot \int_0^t ds} \leq \delta \cdot e^{2K} \cdot |x - y| \cdot 2 \cdot e^{\|L\| \cdot 2}.$$

Tomando Ψ de modo que sua constante de Lipschitz $\delta > 0$ seja menor ou igual a $\frac{\epsilon}{e^{2K} \cdot 2 \cdot e^{\|L\| \cdot 2}}$. O que implica, em particular, que ϕ_1 tem constante de Lipschitz menor ou igual a ϵ. Finalmente, $|\phi_t|$, com $t \in [-2, 2]$ é limitada se $x \in B(0, r)$

$$|\phi_t(x)| = |\phi_t(x) - \phi_t(0)| \leq \epsilon \cdot r$$

se $x \notin B(0, r)$

$$|\phi_t(x)| = |\phi_t(x) - \phi_t(0)| = \left| \int_0^t [\Psi(Y_s(x)) - \Psi(Y_s(0))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0)) ds \right| \leq$$

(Note que $\Psi(Y_s(x)) = 0$, se $Y_s(x) \notin B(0, r)$)

$$\int_0^t \epsilon \cdot r ds + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0)) ds \right| \leq 2 \cdot \epsilon \cdot r + \| L \| \cdot \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(0)| ds$$

o que implica novamente pela desigualdade de Gronwall (2.9) que existe $N > 0$ tal que

$$|\phi_t(x)| \leq N, \forall x \in \mathbb{R}^m \text{ e } \forall t \in [-2, 2].$$

□

Sabemos que podemos relacionar campo com difeomorfismo, o seguinte lema é um exemplo dessa relação envolvendo singularidade hiperbólica e ponto fixo hiperbólico.

Lema 2.21. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um campo de vetores, e φ_t o seu fluxo. Então p é singularidade hiperbólica de $X \Leftrightarrow p$ é ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo $f = \varphi_1$, tempo 1 de X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se p é singularidade hiperbólica de X, temos que $\varphi(t, p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$, em particular para $t = 1$, assim $f = \varphi_1$ tem p como ponto fixo. Da dependência diferenciável em relação as condições iniciais, temos que $\partial_x \varphi$ é solução de $\dot{Z} = DX(p) \cdot Z; Z_0 = I$. Portanto, $\partial_x \varphi(t, p) = e^{t \cdot DX(p)}$, o que nos dá

$$Df_p = \partial_x \varphi(1, p) = e^{DX(p)}$$

com isso o espectro $sp(Df_p) = e^{sp(DX(p))}$, o que implica que $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in sp(Df_p)$, isto é, p é ponto fixo hiperbólico de f.

($\Leftarrow$) Se p é ponto fixo hiperbólico do tempo 1 de X, então pelo corolário 2.19 do teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismo, p é isolado. Temos que p não pode pertencer a uma órbita periódica, pois caso contrário, os pontos da órbita periódica seriam pontos fixos de f e assim p não seria isolado. Logo, como $\varphi(n, p) = p, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\varphi(\cdot, p)$ não é periódica regular, segue-se então que $\varphi(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ o que implica que p é uma sigularidade de X.

Agora, da dependência diferenciável em relação as condições iniciais, temos que $\partial_x \varphi$ é solução de $\dot{Z} = DX(p) \cdot Z; Z_0 = I$. Portanto, $\partial_x \varphi(t, p) = e^{t \cdot DX(p)}$, o que nos dá

$$Df_p = \partial_x \varphi(1, p) = e^{DX(p)}$$

com isso o espectro $sp(Df_p) = e^{sp(DX(p))}$, o que implica que $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in sp(Df_p)$. Assim os elementos de $sp(DX(p))$ têm parte real não nula, ou seja, p é singularidade hiperbólica. □

Teorema 2.22 (Grobman-Hartman para campos)**.** *Sejam p uma singularidade hiperbólica de um campo $X : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^r, r \geq 1$ e $L = DX_p$. Então X é localmente topologicamente conjugado (via um homeomorfismo h) a L, em vizinhanças de p e zero, respectivamente.*

Demonstração. Seja $Y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ um campo C^r como no Lema 2.20. Já que $Y = X$ em U, vizinhança de zero, temos que a aplicação identidade conjuga localmente Y e X em U. Uma vez que a conjugação é transitiva, só nos resta mostrar que os fluxos Y_t e L_t, dos campos Y e L respectivamente, são conjugados, $\forall t \in \mathbb{R}$. Como $DY_0 = L$, da dependência diferenciável em relação às condições iniciais, temos que a derivada $(DY_1)_0$ do difeomorfismo Y_1 na origem é $e^L = L_1$. De fato, escrevendo $\varphi(t, x) = Y_t(x)$, temos que $DY_t(x) = \dfrac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{Z} = DY(\varphi(t, x)) \cdot Z \\ Z(0) = I_m \leftarrow \text{ matriz identidade } m \times m \end{cases}$$

Por ser $x = 0$ uma singularidade, $\varphi(t, 0) = 0$, e a equação acima se reescreve

$$\begin{cases} \dot{Z} = DY(0) \cdot Z = L \cdot Z \\ Z(0) = I_m \end{cases}$$

implicando que $DY_t(0) = e^{t \cdot L}$ então para $t = 1$ $DY_1(0) = e^L = L_1$.

Logo, o difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \phi_1$ tem a origem como ponto fixo hiperbólico e ϕ_1 como o resto de sua derivada (L_1) na origem. Pelo Lema 2.17, existe um único homeomorfismo $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a uma distância finita da identidade que satisfaz $h \circ Y_1 = L_1 \circ h$. Mostramos que este h também satisfaz $h \circ Y_t(x) = L_t \circ h(x), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^m$, ou seja, Y é topologicamente conjugado a L.

Considere $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dado por

$$H(x) := \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t(x) dt.$$

H é contínua e da condição (4) do Lema 2.20, temos que H está a uma distância finita da identidade.

Agora, $\forall s \in \mathbb{R}$ vale

$$H \circ Y_s = L_s \circ H.$$

Com efeito, se tivermos H um homeomorfismo a expressão acima vale, $\forall s \in [0, 1]$, pois dado $q \in \mathbb{R}^+$ podemos escrever $q = n + s$, com $n \in \mathbb{N}$ e $s \in [0, 1]$. Daí,

$$H \circ Y_q = H \circ \underbrace{Y_1 \circ Y_1 \circ \ldots \circ Y_1}_{n-vezes} \circ Y_s =$$

$$L_1 \circ H \circ \underbrace{Y_1 \circ Y_1 \circ \ldots \circ Y_1}_{(n-1)-vezes} \circ Y_s = L_{n+s} \circ H = L_q \circ H.$$

Se $q < 0$ e H inversível, então

$$H \circ Y_q = (Y_{-q} \circ H^{-1})^{-1} = (H^{-1} \circ L_{-q})^{-1} = L_q \circ H.$$

Seja $s \in [0,1]$. Temos

$$L_{-s} \circ H \circ Y_s = L_{-s} \circ \left(\int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t \; dt \right) \circ Y_s =$$

$$\int_0^1 L_{-s} \circ L_{-t} \circ h \circ Y_t \circ Y_s \; dt = \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ Y_{t+s} \; dt.$$

tomando $u = t + s - 1$, temos que

$$\int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ Y_{t+s} \; dt = \int_{-1+s}^{s} L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} \; du =$$

$$\int_{-1+s}^{0} L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} \; du + \int_0^s L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} \; du.$$

Fazendo $v = u + 1$ na primeira parcela

$$L_{-s} \circ H \circ Y_s = \int_s^1 L_{-v} \circ h \circ Y_v \; dv + \int_0^s L_{-u} \circ \underbrace{(L_{-1} \circ h \circ Y_1)}_{h} \circ Y_u \; du =$$

$$\int_0^1 L_{-u} \circ h \circ Y_u \; du = H.$$

Temos portanto, que H é contínua e semiconjuga Y_1 e L_1. Além disso, H está a uma distância finita da identidade, dado $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} L_{-t} \circ h \circ Y_t &= L_{-t} \circ (I + w) \circ (L_t + \phi_t) \\ &= L_{-t} \circ I \circ L_t + L_{-t} \circ I \circ \phi_t + L_{-t} \circ w \circ L_t + L_{-t} \circ w \circ \phi_t \\ &= I + L_{-t} \circ \phi_t + L_{-t} \circ w \circ L_t + L_{-t} \circ w \circ \phi_t. \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{w}_t = L_{-t} \circ \phi_t + L_{-t} \circ w \circ L_t + L_{-t} \circ w \circ \phi_t$. Existe $\tilde{N} > 0$ tal que $|\tilde{w}_t(x)| \leq \tilde{N}, \forall t \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}^m$. Assim,

$$H(x) := \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t \; dt = \int_0^1 I + \tilde{w}_t \; dt = \int_0^1 \tilde{w}_t \; dt$$

com $|\int_0^1 \tilde{w}_t(x) \; dt| \leq \int_0^1 \tilde{N} \; dt = \tilde{N}$.

Da unicidade da tese do Lema 2.17, segue-se que $H = h$, que é homeomorfismo. Isto significa que h conjuga Y_s e L_s, $\forall s \in \mathbb{R}$. □

Em suma, o teorema de Grobman-Hartman reduz o problema de classificar as conjugações locais de difeomorfismos em torno de pontos fixos hiperbólicos

e de campos em torno de singularidades hiperbólicas ao de classificar as conjugações, respectivamente, de isomorfismos hiperbólicos e de campos lineares com singularidades hiperbólicas.

2.3 Conjuntos Hiperbólicos

Utilizaremos a norma de um operador linear A, dada por

$$\| A \| = \sup_{v \neq 0} \frac{\| Av \|}{\| v \|}.$$

Definição 2.23. *Seja um sistema dinâmico discreto $(M, \mathbb{Z}, f)$. Um subconjunto compacto, invariante por f, $\Lambda \subset M$ é dito* ***Hiperbólico*** *para f, se existem constantes $k > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e uma família de subespaços $E^s_x, E^u_x \subset T_xM$, para cada $x \in \Lambda$ tais que*

1. $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$
2. $\| Df^n(x) \cdot v \| \leq k\lambda^n \| v \|, \forall v \in E^s(x), \forall n > 0$
3. $\| Df^{-n}(x) \cdot w \| \leq k\lambda^n \| w \|, \forall w \in E^u(x), \forall n > 0.$

E^s é chamado de **subespaço Estável**, gerado pelos autovetores associados a autovalores com parte real menor do que zero.

E^u é chamado de **subespaço Instável**, gerado pelos autovetores associados a autovalores com parte real maior do que zero.

Definição 2.24. *Seja um sistema dinâmico contínuo $(M, \mathbb{R}, \varphi)$. Um subconjunto compacto, invariante, $\Lambda \subset M$, é dito* ***Hiperbólico****, se existem constantes $k > 0$, $\lambda \in (0,1)$ e uma decomposição do fibrado tangente de M sobre Λ tais que*

1. $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$
2. $\| D\varphi_t(x) \cdot v \| \leq ke^{-\lambda t} \| v \|, \ \forall v \in E^s, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in \Lambda$
3. $\| D\varphi_{-t}(x) \cdot w \| \leq ke^{-\lambda t} \| w \|, \ \forall w \in E^u, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in \Lambda.$

Da mesma forma que para difeomorfismos, E^s é o **subfibrado Estável**, direção de contração pelo fluxo, E^u é o **subfibrado Instável**, direção de expansão pelo fluxo.

E^X é o subespaço unidimensional gerado pelo campo vetorial tangente ao fluxo.

Definição 2.25. *Uma órbita fechada do campo X é uma* ***órbita hiperbólica*** *se esta é um conjunto hiperbólico.*

Definição 2.26. *Um conjunto hiperbólico H é dito* ***tipo sela*** *se $E^s_x \neq 0$ e $E^u_x \neq 0$, para todo $x \in H$.*

2.3.1 Exemplos Triviais

Os conjuntos Λ a seguir são hiperbólicos

(a) $\Lambda = \{p\}$, sendo p ponto fixo hiperbólico.

(b) $\Lambda = \{p_1, \ldots, p_n\}$ onde cada p_i é ponto fixo hiperbólico.

(c) $\Lambda =$ órbita periódica hiperbólica.

(d) $\Lambda = \mathcal{O}(p_1) \cup \ldots \cup \mathcal{O}(p_n) \cup \{q_1, \ldots, q_n\}$ onde cada $\mathcal{O}(p_i)$ e q_i são hiperbólicos.

2.3.2 Ferradura de Smale

Seja S o conjunto compacto constituído por um quadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$ e dois semi-discos A e B de raio $\frac{1}{2}$. Considere H_j para $j = 1, 2$ dois retângulos horizontais disjuntos

$$H_j = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y_1^j \leq y \leq y_2^j\}$$

com $0 \leq y_1^1 < y_2^1 < y_1^2 < y_2^2 \leq 1$. Analogamente, V_j para $j = 1, 2$ dois retângulos verticais disjuntos

$$V_j = \{(x, y) : x_1^j \leq x \leq x_2^j, 0 \leq y \leq 1\}$$

com $0 \leq x_1^1 < x_2^1 < x_1^2 < x_2^2 \leq 1$. (Ver figura 2.1).

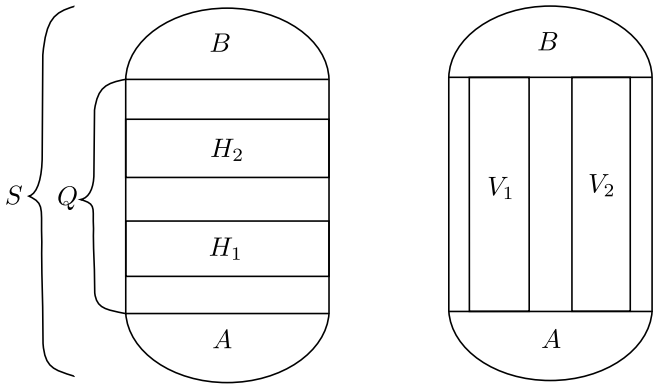

Figura 2.1: Ferradura de Smale.

A ferradura de Smale é uma aplicação $h : S \to S$ que verifica as seguintes condições:

1. A imagem $h(S) \subset S$ tem a forma de uma ferradura que é obtida a partir da contração horizontal por um fator $\lambda < \frac{1}{2}$, da expansão vertical por um fator $\mu > 2$ e uma dobra ao meio, fazendo $h(S)$ atravessar S duas vezes. (Ver figura 2.2).

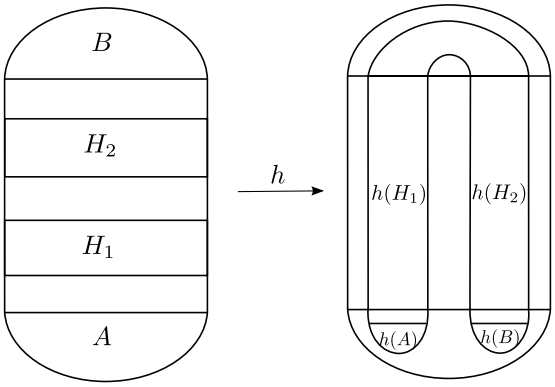

Figura 2.2: Ferradura de Smale.

2. Em cada um dos retângulos horizontais H_1 e H_2 de $Q \cap h^{-1}(Q)$ h é linear e transforma H_1 e H_2 nos retângulos verticais V_1 e V_2 de $h(Q) \cap Q$.

3. Por linearidade de $h : H_i \to V_i$, $i = 1, 2$, h preserva segmentos horizontais e verticais em Q;

4. $h|_A : A \to A$ é uma contração, e pelo teorema do ponto fixo para contrações 2.7, possui um único ponto fixo.

O conjunto $h^n(Q) \cap h^{-n}(Q)$ dos pontos que permanecem em Q após n iterações de h e h^{-1}, é constituído por 2^{2n} quadrados. Na figura 2.3 representa-se os conjuntos $\bigcap_{n=-1}^{1} h^n(Q)$ e $\bigcap_{n=-2}^{2} h^n(Q)$.

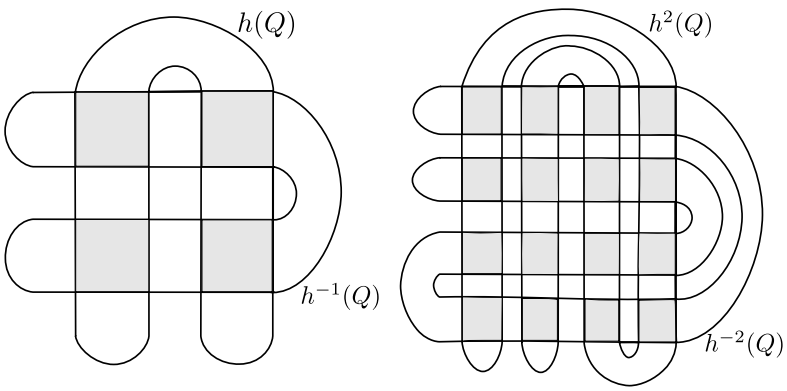

Figura 2.3: Iterações da ferradura: $\bigcap_{n=-1}^{1} h^n(Q)$ e $\bigcap_{n=-2}^{2} h^n(Q)$.

O conjunto de todos os pontos que permanecem em Q para todas as iterações de h é então

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} h^n(Q).$$

Sejam $p \in S$ e $v \in T_pS$, com $v = v_1 + v_2$. Assim,

$$Dh(p) \cdot v_1 = \lambda v_1 \ e \ Dh(p) \cdot v_2 = \mu v_2.$$

Portanto, existe uma direção contratora e outra expansora. Sendo S invariante por h, temos que S é um conjunto hiperbólico.

2.4 Variedades Invariantes

Definição 2.27. *Os conjuntos*

$$W^{ss}(p) = \{q \in M : \lim_{t\to\infty} \| \varphi_t(p) - \varphi_t(q) \| = 0\}$$

$$W^{uu}(p) = \{q \in M : \lim_{t\to-\infty} \| \varphi_t(p) - \varphi_t(q) \| = 0\}$$

são chamados, respectivamente, ***variedade estável forte*** *e* ***variedade instável forte*** *do ponto p.*

Definição 2.28. *Dado $\epsilon > 0$, definimos* ***variedade estável local*** *e* ***variedade instável local*** *de tamanho ϵ do ponto $p \in M$ como os conjuntos, respectivamente,*

$$W^{ss}_{\epsilon}(p) = \{q \in M : \| \varphi_t(p) - \varphi_t(q) \| \leq \epsilon, \text{ para todo } t \geq 0\}$$

$$W^{uu}_{\epsilon}(p) = \{q \in M : \| \varphi_t(p) - \varphi_t(q) \| \leq \epsilon, \text{ para todo } t \leq 0\}.$$

Portanto, outra forma de obter as variedades estáveis e instáveis fortes é a seguinte:

$$W^{ss}(p) = \bigcup_{t\geq 0} \varphi_{-t}(W^{ss}_{\epsilon}(\varphi_t(p))$$

e

$$W^{uu}(p) = \bigcup_{t\geq 0} \varphi_t(W^{uu}_{\epsilon}(\varphi_{-t}(p)).$$

Teorema 2.29 (Teorema da Variedade estável para fluxos)**.** *Seja Λ um conjunto invariante e hiperbólico para um fluxo $\varphi_t : M \to M$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$, existem dois discos mergulhados $W^{ss}_{\epsilon}(p)$ e $W^{uu}_{\epsilon}(p)$ em M os quais são tangentes a E^s_p e E^u_p, respectivamente.*

A demonstração deste resultado é bem extensa para incluir neste trabalho, no entanto, para o leitor interessado, uma prova detalhada pode ser encontrada em [10], [12], [27].

Este teorema mostra que se p pertence a um conjunto hiperbólico, então $W^{ss}(p)$ e $W^{uu}(p)$ são subvariedades mergulhadas em M de classe C^1 e, consequentemente, os conjuntos

$$W^s(p) = \bigcup_{t\in T} W^{ss}(\varphi_t(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t\in T} W^{uu}(\varphi_t(p))$$

denominados, respectivamente, *variedade estável* e *variedade instável* do ponto p são também subvariedades mergulhadas em M.

O Teorema da Variedade Estável assegura que em um conjunto hiperbólico, o sistema não linear possui variedades estáveis e instaveis, W^s e W^u que são tangentes, respectivamente, aos subespaços, E^s e E^u, do sistema linearizado. Além disso, W^s e W^u tem as mesmas dimensões de E^s e E^u. (Ver figura 2.4).

Observação 2.30. *Um resultado análogo é válido para difeomorfismo.*

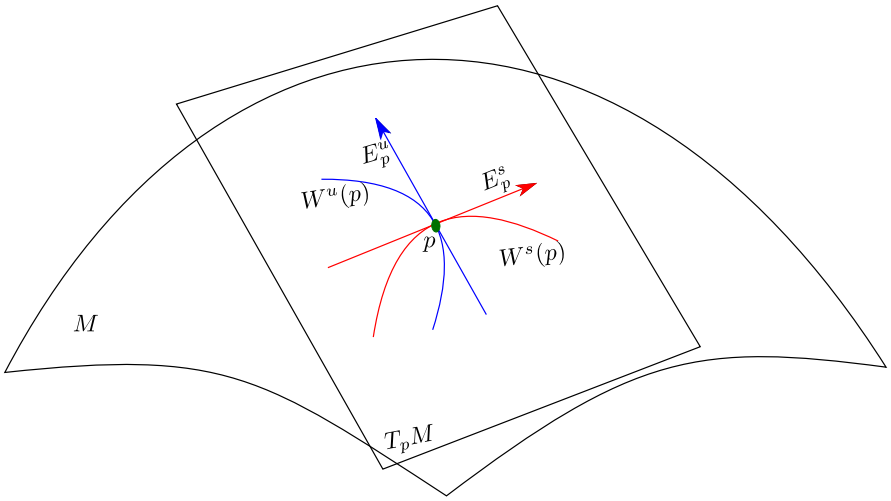

Figura 2.4: Teorema de Variedade Estável.

A Figura 2.5 mostra as variedades estável e instável do ponto p. Note que sendo a interseção de E^s e E^u transversal então $W^s(p)$ e $W^u(p)$ também serão transversais ao longo de $X_t(p)$.

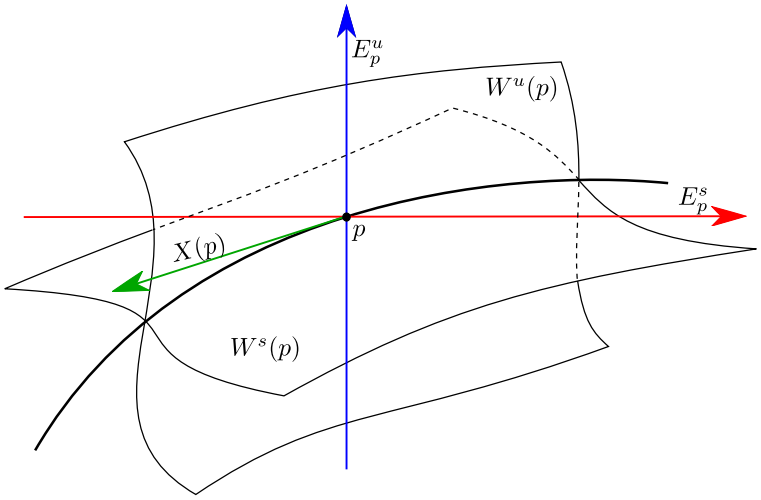

Figura 2.5: Variedades Estável e Instável do ponto p.

Capítulo 3

Atrator de Lorenz

3.1 Introdução

Em 1963, o metereologista do MIT, Edward Norton Lorenz publicou o artigo "Deterministic Nonperiodic flow" [16]. Nesse artigo introduziu o seguinte sistema não linear de equações: Seja $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial definido por $X(x, y, z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, onde

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y}(t) = rx - y - xz \\ \dot{z}(t) = xy - bz \end{cases}$$

e σ, r, b são parâmetros reais positivos e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, que foi obtida por simplificação de outras equações estudadas por Saltzman. Inicialmente ele fixou os parâmetros $\sigma = 10, r = 28, b = \dfrac{8}{3}$ numa vizinhança da origem. Ao escolher uma condição inicial próxima da origem deparou-se com uma órbita de comportamento muito estranho, limitada que não mostrava regularidade. A figura mostra a solução e tem a aparência similar a uma borboleta. Por esta razão ficou conhecida como *butterfly*.

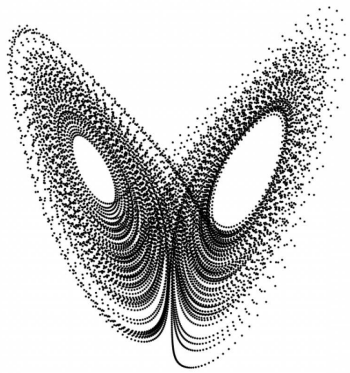

Figura 3.1: Atrator de Lorenz.

3.2 Propriedades das Equações de Lorenz

1. **Simetria**

   Existe uma simetria natural $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ para quaisquer σ, r, b positivos. Isto é, se $(x(t), y(t), z(t))$ é uma solução, $(-x(t), -y(t), z(t))$ também é.

2. **Singularidades do campo X**

   Podemos calcular as singularidades procurando os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $X(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Segue então que:

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

   Resolvendo o sistema, obtemos três singularidades, para $r > 1$,

$$p = (0, 0, 0)$$

$$q^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$
$$q^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

3. **Os autovalores das singularidades**

   Usando os parâmetros $\sigma = 10, r = 28, b = \dfrac{8}{3}$ as singularidades serão $p = (0, 0, 0); q^- = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27); q^+ = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$. Assim, seja

$$DX(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial_x(\dot{x}) & \partial_y(\dot{x}) & \partial_z(\dot{x}) \\ \partial_x(\dot{y}) & \partial_y(\dot{y}) & \partial_z(\dot{y}) \\ \partial_x(\dot{z}) & \partial_y(\dot{z}) & \partial_z(\dot{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

   O cálculo dos autovalores de $DX(p), DX(q^-), DX(q^+)$, reduz-se a achar as raízes dos polinômios característicos dessas três derivadas.

$$DX(p) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$DX(q^+) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & -\dfrac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$DX(q^-) = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -\dfrac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Os polinômios característicos de $DX(p)$, $DX(q^-)$, $DX(q^+)$, com suas respectivas raízes, são:

(i) $f(\lambda) = \lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{722}{3}\lambda - 720$
$\lambda_1 \approx 11,83;\ \lambda_2 \approx -22,83;\ \lambda_3 \approx -2,67$

(ii) $f(\mu) = \mu^3 + \frac{41}{3}\mu^2 + \frac{304}{3}\mu + 1440$
$\mu_1 \approx -13,85;\ \mu_2 \approx 0,094 + 10,19i;\ \mu_3 \approx 0,094 - 10,19i$

(ii) $f(\zeta) = \zeta^3 + \frac{41}{3}\zeta^2 + \frac{304}{3}\zeta + 1440$
$\zeta_1 \approx -13,85;\ \zeta_2 \approx 0,094 + 10,19i;\ \zeta_3 \approx 0,094 - 10,19i$

Uma vez conhecidos os autovalores das três singularidades é possível ter uma idéia geométrica das variedades estáveis e instáveis, isto pelo menos nas vizinhanças destas singularidades. (Ver figura 3.2).

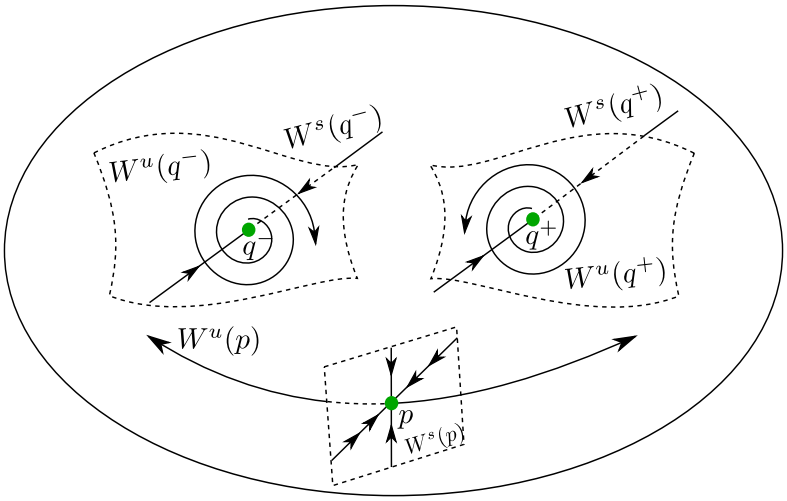

Figura 3.2: Parte das variedades estável e instável das singularidades

4. **A divergência do campo**

Usando a derivada de X, temos que sua divergência é dada por

$$div(X(x,y,z)) = \text{traço}(DX(x,y,z)) = -(\sigma + 1 + b) < 0$$

isto significa que o fluxo φ_t associado ao campo X contrai volume significativamente. Dado um volume inicial V_0 de um sólido é possível calcular o volume $V(t)$ desse sólido no tempo t

$$V(t) = e^{\int div(X(p))dt}$$

$$V(t) = V_0 e^{-(\sigma+1+b)t}$$

5. **Existe um elipsoide onde eventualmente entram as órbitas**

Existe uma elipsoide onde eventualmente entram todas as órbitas e nunca mais voltam a sair. Sparrow [30] mostra como é obtido esse elipsoide.

Escolhendo uma função de Lyapunov

$$V = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$$

verifica-se que as órbitas ingressam transversalmente no elipsoide.

Assim existe uma região sólida K cuja fronteira é o elipsoide onde todas as órbitas acabam entrando. Supondo K compacto então necessariamente estas órbitas terão que acumular em algum subconjunto de K. Na realidade as simulações mostram que existe um conjunto B homeomorfo a um bitoro, de tal forma que toda órbita atravessa-o transversalmente e nunca mais volta a sair.

Logo existe uma região sólida, limitada e aberta U, cuja a fronteira de U é $\partial U = B$. Consequentemente U será um bloco isolante, de tal forma que a origem é a única singularidade em U contida. Logo nosso candidato a ser atrator é o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(U).$$

Para construir geometricamente esta região sólida U com fronteira homemorfa a um bitoro, é só retirar uma vizinhança suficientemente pequena que contenha as variedades estáveis tanto de q^+ como de q^-. Assim teremos uma região como é mostrada na Figura 3.3, que é homeomorfa a um bitoro.

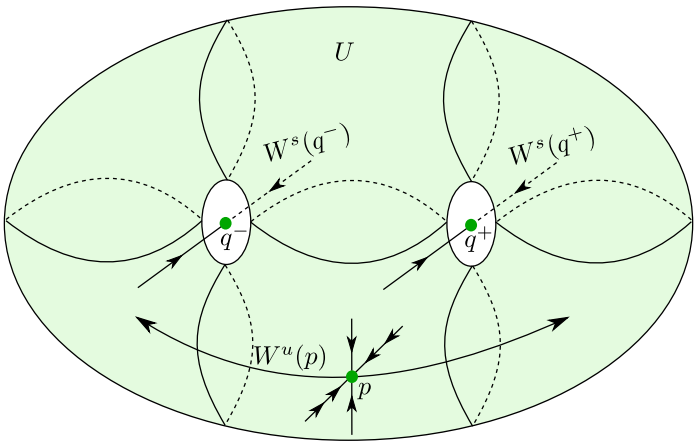

Figura 3.3: O bitoro

3.3 Modelo geométrico do Atrator de Lorenz

Dois grupos de pesquisadores de maneira independente Afraimovich, Bukov, Shilnikov (URSS-1977) e Guckenheimer, Williams (USA-1979) fizeram o modelo do atrator de Lorenz baseados nas propriedades que as observações númericas indicavam e sugeriam. Mostraram que o modelo geométrico é um fluxo em 3 dimensões tal que:

1. Existe um ponto singular p.

2. Existe uma seção transversal ao fluxo.
3. Existe uma folheação invariante pela aplicação de retorno à seção transversal.
4. A aplicação unidimensional induzida é expansora.

Para sua construção considere as equações de Lorenz numa vizinhança da origem, por uma mudança não linear de coordenadas as equações são conjugadas as equações linearizadas em uma vizinhança de p (este resultado segue do Teorema de Grobman-Hartman para campos, Teorema 2.22).

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \\ \dot{z} = \lambda_3 z \end{cases}$$

onde $\lambda_1 \approx 11,83; \lambda_2 \approx -22,83; \lambda_3 \approx -2,67$.

A solução desse sitema é imediata

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 \\ z(t) = e^{\lambda_3 t} z_0 \end{cases}$$

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$S = \{(x, y, z_0); |x|, |y| \leq \alpha\}$$

$$S' = S \setminus \{(x, y, z_0); |x| = 0\}$$

$$\Sigma^{\pm} = \{(\pm x_1, y, z); |y|, |z| \leq \beta\}$$

com α e β positivos e pequenos. (Ver figura 3.4).

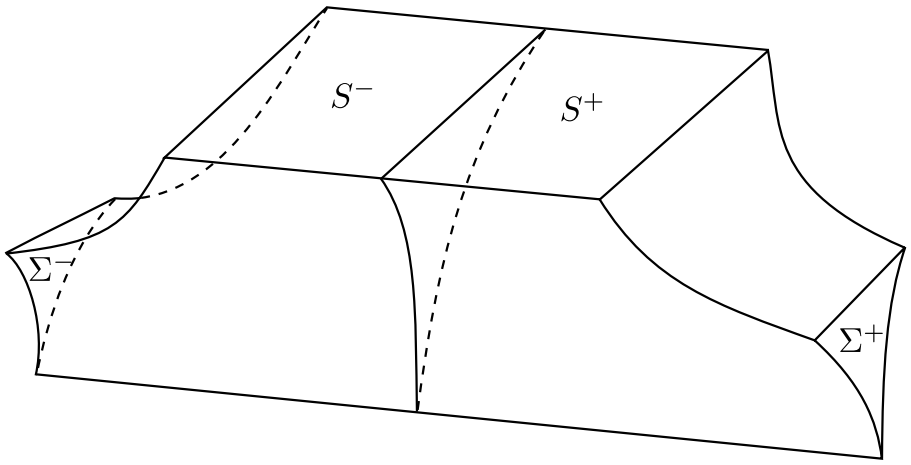

Figura 3.4: Região em forma de cúspide.

Construimos duas aplicações $P_1 : S' \to \Sigma$, e $P_2 : \Sigma \to S$, definimos uma aplicação $P = P_1 \circ P_2 : S' \to S$, dada por $P(x, y) = (f(x), g(x, y))$ e finalmente a projetamos na reta real. (Ver figuras 3.5, 3.6).

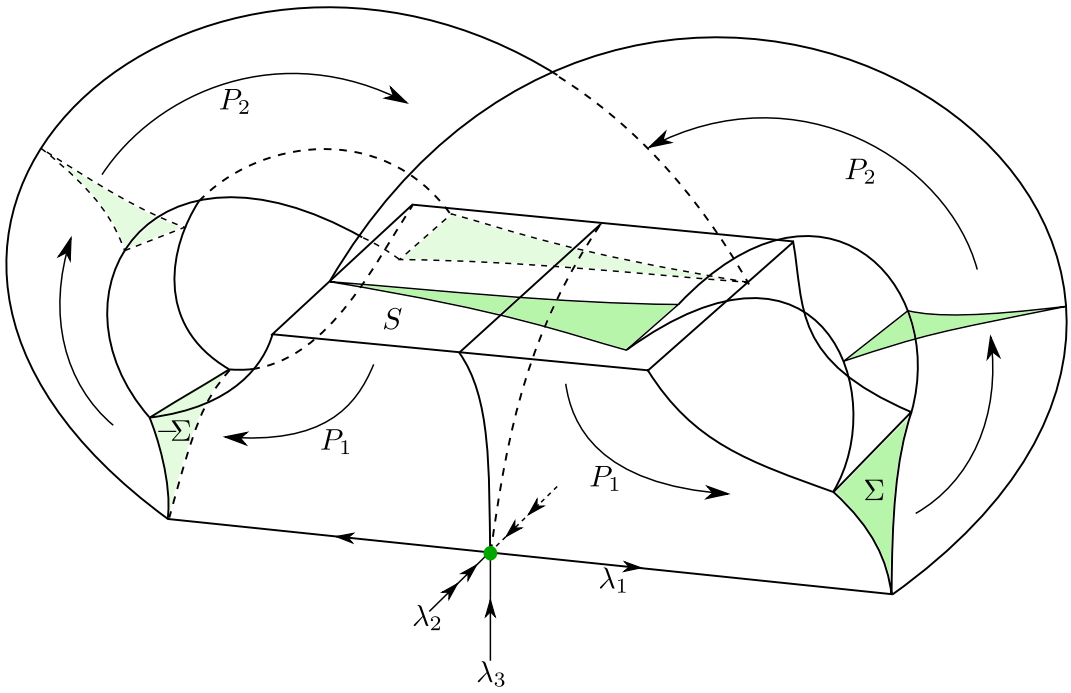

Figura 3.5: Aplicações P_1 e P_2.

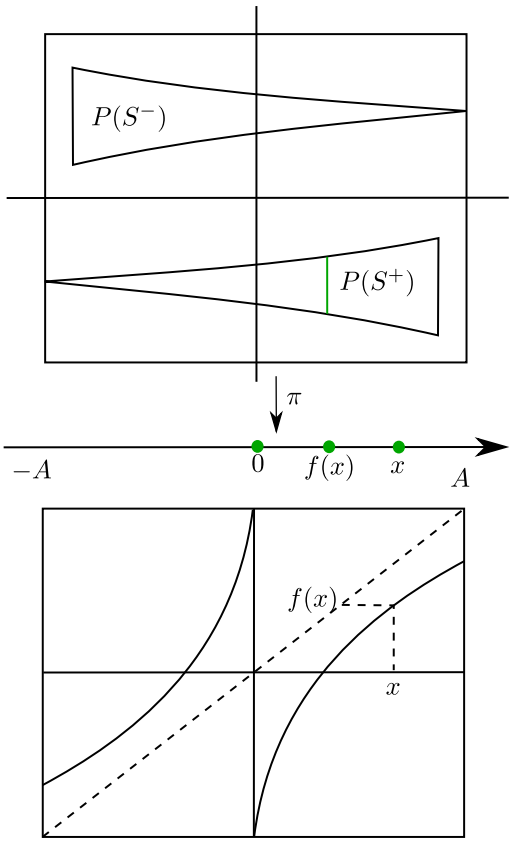

Figura 3.6: Transformação do modelo geométrico de Lorenz.

A aplicação unidimensional $f : [-A, A] \setminus \{0\} \to [-A, A]$ possui as seguintes propriedades:

1. A simetria das equações de Lorenz implicam que
$$f(-x) = -f(x)$$
2. Tem única descontinuidade em $x = 0$
3. Os limites laterais em $x = 0$ são, respectivamente
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = A \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -A$$
4. f é diferenciável em $[-A, A] \setminus \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$, ou seja, f é expansora.
5. Os limites laterais de f' em $x = 0$ são
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \infty.$$

Assim estudar o fluxo tridimensional, reduz-se a estudar uma aplicação bidimensional que ajuda a compreender a dinâmica do fluxo, daí o estudo foi reduzido a uma aplicação unidimensional, chamada *Aplicação de Lorenz.*

Um dos aspectos mais surpreendentes desta construção é que ela é robusta. Se modificarmos ligeiramente o fluxos ainda continua existindo um atrator.

Em meados dos anos 90, C. Morales, M. J. Pacífico, E. Pujals [21] provaram o seguinte teorema, que enunciamos sem demonstração.

Teorema 3.1. *Qualquer atrator robusto de um fluxo em 3 dimensões é hiperbólico ou de tipo Lorenz.*

Ser tipo Lorenz significa que tem todas as propriedades que descrevem os modelos geométricos de Lorenz.

W. Tucker [31] provou o seguinte teorema

Teorema 3.2. *As equações de Lorenz admitem um atrator estranho para os valores dos paramêtros originalmente considerados por Lorenz.*

Capítulo 4

Hiperbolicidade Singular

Ao longo deste capítulo M designa uma $3-$variedade fechada, isto é, variedade de dimensão 3, compacta e sem bordo, e $\mathfrak{X}^r(M)$ denota o conjunto dos campos vetoriais C^r em M, dotado da topologia de Whitney C^r, $r \geq 1$. Além disso, $\Lambda \subset M$ é conexo e não trivial, e mais, os conjuntos transitivos são sempre não vazios e não triviais. Para cada campo X de classe C^r $(r \geq 1)$ definido em uma variedade M, associaremos o fluxo que denotaremos por X_t definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lembramos que, *elemento crítico* é uma singularidade ou uma órbita periódica de um campo X. E $Sing(X)$ é o conjunto das singularidades de X em M.

Utilizaremos as normas de um operador linear A

$$\| A \| := \sup_{v \neq 0} \frac{\| Av \|}{\| v \|} \quad \text{e} \quad m(A) := \inf_{v \neq 0} \frac{\| Av \|}{\| v \|}.$$

Note que para um operador linear inversível a segunda norma, que também é chamada *norma mínima* ou *conorma* pode ser expressa como $m(A) = \| A^{-1} \|^{-1}$.

4.1 Hiperbolicidade Fraca

Embora já tenhamos definido conjuntos hiperbólicos, para propósito de compreensão deste capítulo, vamos enunciá-lo novamente.

Definição 4.1. *Um subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto e invariante por $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é dito* ***Hiperbólico****, se existem constantes $\lambda \in (0,1)$, $k > 0$ e uma decomposição do fibrado tangente de M sobre Λ tais que*

1. $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$
2. $\| DX_t(x)|_{E^s_x} \| \leq ke^{-\lambda t}, \ \forall t > 0, \ \forall x \in \Lambda$
3. $\| DX_{-t}(x)|_{E^u_x} \| \leq ke^{-\lambda t}, \ \forall t > 0, \ \forall x \in \Lambda.$

Onde, E^s é o **subfibrado estável**, direção de contração pelo fluxo. E^u é o **subfibrado instável**, direção de expansão pelo fluxo. E^X é o subespaço unidimensional gerado pelo campo vetorial tangente ao fluxo. (Ver figura 4.1). Esses subfibrados são invariantes pela derivada DX_t do fluxo X_t, no seguinte sentido

$$DX_t(E^i_x) = E^i_{X_t(x)},\ x \in \Lambda,\ t \in \mathbb{R},\ i = s, X, u.$$

Observe que a condição 3 da definição 4.1 vista como $\| DX_t(x)|_{E^u_x} \| \geq k^{-1}e^{\lambda t}$ pode ser susbstituida pela seguinte:

$$m(DX_t(x)|_{E^u_x}) \geq k^{-1}e^{\lambda t},\ \forall t > 0, \forall x \in \Lambda.$$

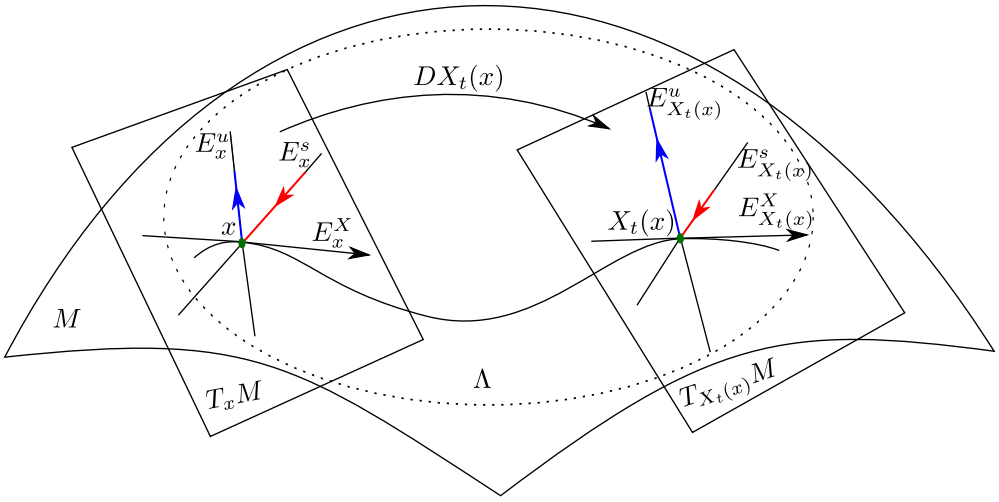

Figura 4.1: Conjunto Hiperbólico.

Definição 4.2. *Um conjunto* ***básico*** *é um conjunto hiperbólico que é invariante maximal e transitivo, ou contém um único elemento crítico.*

Definição 4.3. *Seja $\Lambda \subseteq M$ um conjunto compacto e invariante para o campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Uma decomposição invariante contínua por DX_t do fibrado tangente $T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda$ é uma* ***decomposição dominada*** *se existem constantes $\lambda \in (0,1)$, $k > 0$ tais que*

$$\| DX_t(x)|_{E_x} \| \cdot \| DX_{-t}(x)|_{F_x} \| \leq ke^{-\lambda t},\ \forall t > 0,\ \forall x \in \Lambda.$$

Ou equivalentemente,

$$\frac{\| DX_t(x)|_{E_x} \|}{m(DX_t(x)|_{F_x})} \leq ke^{-\lambda t},\ \forall t > 0,\ \forall x \in \Lambda.$$

Com essas desigualdades dizemos que o fibrado E *domina* o fibrado F, porque qualquer contração/expansão ao longo da direção E é mais forte que qualquer contração/expansão na direção F.

Definição 4.4. *Um subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto e invariante por $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é* ***Parcialmente Hiperbólico*** *se existem constantes $\lambda \in (0,1)$, $k > 0$ e uma decomposição invariante contínua do fibrado tangente $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ tais que*

1. *A decomposição é não trivial: $E^s_x \neq 0$ e $E^c_x \neq 0$, $\forall t > 0$, $\forall x \in \Lambda$.*
2. *O subfibrado E^s_Λ é contrator: $\| DX_t(x)|_{E^s_x} \| \leq ke^{-\lambda t}$, $\forall t > 0$, $\forall x \in \Lambda$.*
3. *A decomposição é dominada: $\| DX_t(x)|_{E^s_x} \| \cdot \| DX_{-t}(x)|_{E^c_x} \| \leq ke^{-\lambda t}$, $\forall t > 0$, $\forall x \in \Lambda$.*

E^c é chamado **subfibrado central**. (Ver figura 4.2).

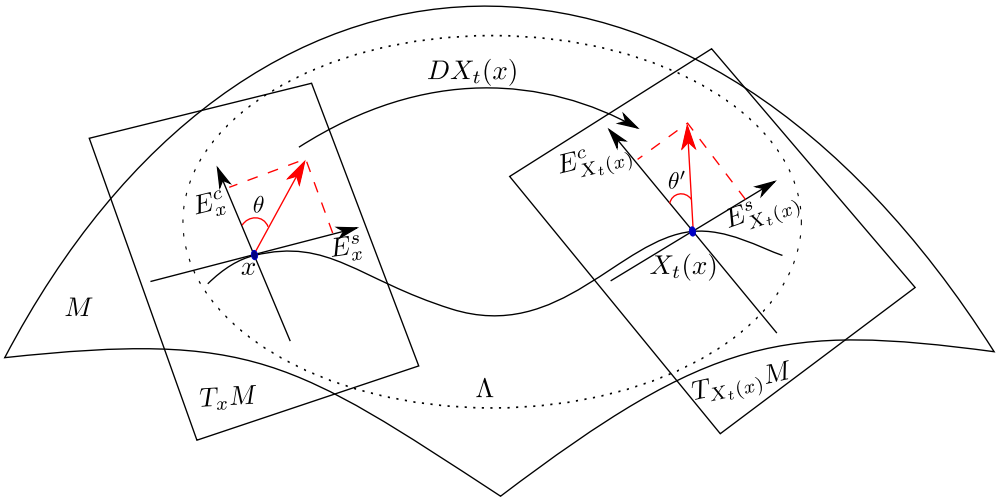

Figura 4.2: Conjunto Parcialmente Hiperbólico.

Note que, todo conjunto hiperbólico é parcialmente hiperbólico, para ver isto, basta tomar $E^c = E^X \oplus E^u$. O contrário nem sempre é verdadeiro.

Definição 4.5. *Um conjunto parcialmente hiperbólico Λ de X se diz* ***expande área*** *na direção central E^c se existem constantes $\lambda \in (0,1)$, $k > 0$ tais que*

$$| \, det(DX_t(x)|_{E^c_x}) \, | > ke^{\lambda t}, \ \forall t > 0, \ \forall x \in \Lambda.$$

Onde $det(DX_t(x)|_{E^c_x})$ denota o jacobiano de $DX_t(x)$ ao longo de E^c_x, $\forall x \in \Lambda$.

Geralmente, é dito *expande volume* ao em vez de *expande área*, mas como estamos tratando de variedade tridimensionais, é mais apropriado essa denominação.

Definição 4.6. *Um subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto e invariante por $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é* ***Singular Hiperbólico*** *se Λ é parcialmente hiperbólico, expande área na direção central e cada uma de suas singularidades é hiperbólica.*

Exemplo 4.7. *O atrator de Lorenz geométrico é um conjunto singular Hiperbólico que não é hiperbólico. (Ver capítulo 3 e Exemplo 4.5.1).*

Definição 4.8. *Um* ***sumidouro singular hiperbólico*** *é um sumidouro que ao mesmo tempo é um conjunto singular hiperbólico.*

Teorema 4.9. *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico para o campo vetorial X, não trivial, com decomposição $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$, então:*

1. *$X(x) \notin E^s_x$, para todo $x \in \Lambda \setminus Sing(X)$.*
2. *$X(x) \in E^c_x$, para todo $x \in \Lambda$.*
3. *$\dim(E^s_x) = 1$, para todo $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Suponha que Λ não é hiperbólico. Caso contrário o resultado é trivial.

1. Suponhamos por contradição que existe $x_0 \in \Lambda \setminus Sing(X)$ tal que $X(x_0) \in E^s_{x_0}$. Então $X(x) \in E^s_x$ para cada x na órbita de x_0, pois E^s é invariante. Pela continuidade da decomposição temos $X(x) \in E^s_x$ para todo $x \in \alpha(x_0)$ e, portanto $\omega(x)$ é uma singularidade para todo $x \in \alpha(x_0)$. Em particular, $\alpha(x_0)$ contém uma singularidade σ de tipo sela, pois se σ fosse uma singularidade tipo poço contradiria o fato de que $\sigma \in \alpha(x_0)$ e também não poderia ser uma singularidade tipo de fonte já que isso significa que não haveria um $\omega-$limite. Com isso temos dois casos:

(i) $\alpha(x_0) = \{\sigma\}$.

Então $x_0 \in W^u(\sigma)$. Assim, para $t \in \mathbb{R}$, definimos o vetor unitário

$$v^t = \frac{DX_t(x_0)(X(x_0))}{\| DX_t(x_0)(X(x_0)) \|}.$$

Já que $x_0 \in W^u(\sigma)$ que é invariante, segue que $DX_t(x_0)(X(x_0)) \in T_{X_t(x_0)}W^u(\sigma)$ e daí $v^t \in T_{X_t(x_0)}W^u(\sigma) \cap E^s_{X_t(x_0)}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Tome uma sequência $t_n \to \infty$ tal que a sequência v^{-t_n} converge para (digamos) v^∞. Temos que v^∞ é um vetor unitário, e visto que $X_{-t_n}(x_0) \to \sigma$, já que este é o $\alpha-$limite e como E^s é contínuo obtemos que $v^\infty \in T_\sigma W^u(\sigma) \cap E^s_\sigma$.

Dessa maneira v^∞ é um vetor unitário que está na direção E^u e E^s e a interseção destes é apenas o vetor nulo, o que gera uma contradição.

(ii) $\alpha(x_0) \neq \{\sigma\}$.

Então existe $x_1 \in (W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}) \cap \alpha(x_0)$. Logo, $X(x_1) \in E^s_{x_1}$, e então substituindo x_0 por x_1 no primeiro caso obtemos que $X(x_1)$ está na direção instável e estável ao mesmo tempo o que é uma contradição.

Portanto, não pode haver $x_0 \in \Lambda \setminus Sing(X)$ tal que $X(x_0) \in E^s_{x_0}$.

2. Se $x \in Sing(X)$, então $X(x) = 0$, assim $X(x) \in E^c_x$. Dessa forma, podemos supor que $x \in \Lambda \setminus Sing(X)$, com isso temos dois casos:

(i) $\alpha(x)$ tem um ponto regular y.

Existe uma sequência $t_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} X_{-t_n}(x) = y$$

e pelo item 1 $X(y) \notin E^s_y$, isto significa que o ângulo entre $X(y)$ e E^s_y é diferente de zero. Por outro lado devido a continuidade do campo,

$$\lim_{n\to\infty} X(X_{-t_n}(x)) = X(y)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} E^s_{X_{-t_n}(x)} = E^s_y.$$

Assim, o ângulo entre $X(X_{-t_n}(x))$ e $E^s_{X_{-t_n}(x)}$ é limitado e maior que zero para n suficientemente grande.

Como E^s_Λ domina E^c_Λ, então o ângulo entre $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(E^s_{X_{-t_n}(x)})$ e $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(X(X_{-t_n}(x)))$ converge para zero quando $n \to \infty$.

Porém, $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(E^s_{X_{-t_n}(x)}) = E^c_x$ e $DX_{t_n}(X_{-t_n}(x))(X(X_{-t_n}(x))) = X(x)$. Logo o ângulo entre $X(x)$ e E^c_x é zero, ou seja, $X(x) \in E^c_x$.

(ii) $\alpha(x)$ não tem pontos regulares.

Então $\alpha(x)$ contém algum $\sigma \in Sing(X)$, isto significa que $x \in W^u(\sigma)$. Por outro lado, como $T_\sigma W^u(\sigma) \cap E^s_\sigma = \{0\}$, então $T_\sigma W^u(\sigma) \subset E^c_\sigma$, já que E^c_σ é o maior espaço que intersectado com E^s_σ é igual a zero. Então $T_x W^u(\sigma) \subset E^c_x$ e como $X(x) \in T_x W^u(\sigma)$ então $X(x) \in E^c_x$.

3. Inicialmente, vamos mostrar que $\dim(E^c_x) = 2$, $\forall x \in \Lambda$.

Suponhamos por contradição que $\dim(E^c_{x_0}) = 1$, para algum $x_0 \in \Lambda$. Como E^c é contínuo e Λ é conexo, obtemos que $\dim(E^c_x) = 1$, $\forall x \in \Lambda$. Uma vez que Λ expande área na direção central E^c_Λ e, além disso, $X(x) \in E^c_x$, então $\| DX_t(x)(X(x)) \| \to \infty$, quando $t \to \infty$, para todo $x \in \Lambda \setminus Sing(X)$. Já que Λ é compacto $\| DX_t(x)(X(x)) \| \to \infty$ não pode acontecer a menos que $\Lambda \setminus Sing(X) = \emptyset$, assim, por ser conexo, concluimos que Λ é uma singularidade de X, um absurdo, uma vez que Λ é não trivial.

Como resultado, uma vez que Λ é conexo e a decomposição é contínua obtemos que

$$\begin{aligned}\dim(E^s_x) &= \dim(T_x M) - \dim(E^c_x)\\ &= 3 - 2 = 1\end{aligned}$$

para todo $x \in \Lambda$. □

Definição 4.10. *Um conjunto* ***singular básico*** *é um conjunto singular hiperbólico que é invariante maximal e transitivo.*

4.2 Singularidades Incorporadas e Tipo Lorenz

Definição 4.11. *Seja σ uma singularidade de um campo vetorial X contida em um conjunto Λ compacto e invariante por X. Dizemos que σ é:*

1. ***Incorporada**, se σ é acumulada por órbitas regulares de X em Λ.*
2. ***Tipo Lorenz**, se $DX(\sigma)$ tem autovalores reais $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, tais que*

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Todas as singularidades de tipo Lorenz σ são hiperbólicas. Então as variedades invariantes $W^s(\sigma)$ e $W^u(\sigma)$ estão bem definidas e são tangentes respectivamente aos autoespaços associados ao conjunto de autovalores $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ e $\{\lambda_1\}$. Com isso, $W^s(\sigma)$ é bidimensional e $W^u(\sigma)$ é unidimensional. Além disso, a variedade estável forte $W^{ss}(\sigma)$ tangente ao autoespaço associado a $\{\lambda_2\}$ também está bem definida.

Exemplo 4.12. *A união de um conjunto básico não trivial e uma singularidade de tipo Lorenz é um conjunto singular hiperbólico que é hiperbólico e não transitivo. Isso se dá, uma vez que o $\omega-$limite não seria todo o conjunto, já que para ser transitivo o conjunto deve ser conexo.*

Exemplo 4.13. *Considere $\Lambda = \{\sigma\}$, onde σ é uma singularidade de tipo Lorenz σ para um fluxo X_t, $t \in \mathbb{R}$, de classe C^1, sobre uma variedade tridimensional M, isto é, σ é singularidade hiperbólica de tipo sela tal que os autovalores de $DX(\sigma)$ são reais e satisfazem $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$.*

Denomine E_i o autoespaço associado ao autovalor λ_i, $i = 1, 2, 3$ e escolha $E = E_2$ e $F = E_1 \oplus E_3$, como na figura 4.3.

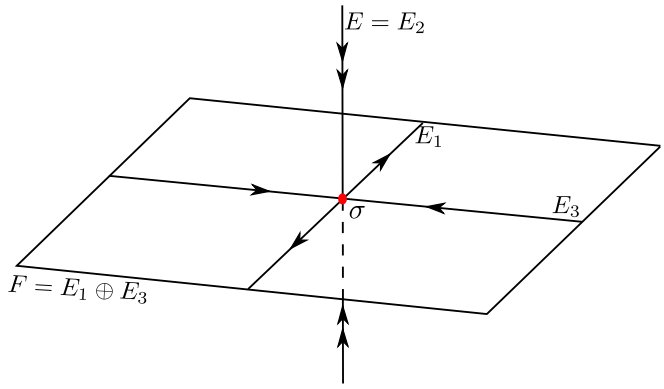

Figura 4.3: Singularidade tipo Lorenz.

Então a decomposição é trivialmente contínua, pois $\Lambda = \{\sigma\}$ é apenas um ponto, E contrai comprimento de vetores e tem dimensão 1 e F expande área uniformemente. Podemos considerar sem perda de generalidade que

$$DX(\sigma) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

daí temos que $X_t(x) = e^{At}x$, *onde* $A = DX(\sigma)$ *e* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, *logo*

$$DX_t(\sigma) \cdot x = Ae^{At}x = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Tomando $v = (0, v_2, 0) \in E$ *e* $w = (0,0,0) + (0,0,w_3) \in F = E_1 \oplus E_3$, *com isso temos que*

$$\begin{aligned} \| DX_t(\sigma) \cdot v \| \cdot \| DX_{-t}(\sigma) \cdot w \| &= (|\lambda_2| \cdot \| v \| e^{\lambda_2 t}) \cdot (|\lambda_3| \cdot \| w \| e^{-\lambda_3 t}) \\ &= |\lambda_2| \cdot |\lambda_3| \cdot \| v \| \cdot \| w \| e^{(\lambda_2 - \lambda_3)t} \\ &= |\lambda_2| \cdot |\lambda_3| \cdot \| v \| \cdot \| w \| e^{-(\lambda_3 - \lambda_2)t} \end{aligned}$$

como $\lambda_3 - \lambda_2 > 0$ *temos que a decomposição é dominada e isso ocorre porque* E *admite vetores mais fortemente contraídos do que aqueles de* F.

Com isso temos um exemplo de conjunto básico que expande área e parcialmente hiperbólico, portanto, também é singular hiperbólico.

No entanto, a escolha dos subfibrados é essencial, se tivessemos escolhido $E = E_3$ *e* $F = E_1 \oplus E_2$, *a decomposição não seria dominada e com isso, não teríamos hiperbolicidade parcial nem singular.*

Cabe observar que Conjuntos Hiperbólicos não podem ter singularidades incorporadas, exceto se Λ é composto de um número finito de singularidades hiperbólicas. Caso contrário, qualquer singularidade incorporada σ em um conjunto hiperbólico Λ seria um ponto de descontinuidade para a decomposição hiperbólica, devido à ausência da direção do fluxo no espaço tangente a σ.

O próximo resultado mostra que não podemos ter uma decomposição hiperbólica sem a direção do fluxo, a menos que o conjunto invariante se reduza a um número finito de singularidades isoladas.

Proposição 4.14. *Seja* $\Lambda \subset M$ *um conjunto compacto e invariante por* X. *Se existe uma decomposição* $T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda$, *invariante por* DX_t, *e existem constantes* $k, \lambda > 0$, *tais que, para todo* $x \in \Lambda$ *e todo* $t > 0$,

$$\| DX_t(x)|_{E_x} \| \leq ke^{-\lambda t} \quad e \quad \| DX_{-t}(x)|_{F_{X_t(x)}} \| \leq ke^{-\lambda t}.$$

Então, Λ *é um conjunto finito de singularidades hiperbólicas.*

Demonstração. Primeiramente provemos que $\Lambda \subset Sing(X)$. Suponhamos, por contradição, que existe $x \in \Lambda \setminus Sing(X)$. Logo, x é um ponto regular para X, ou seja, $X(x) \neq 0$. Assim, como E é subfibrado de contração, a direção do fluxo $X(x)$ está contida em F_x, para todo $x \in \Lambda$. Mas, aplicando o fluxo reverso X_{-t} gerado pelo campo $-X$ sobre o mesmo conjunto invariante Λ, temos que F seria uma subfibrado de contração, então $X(x) \in E_x$, para todo $x \in \Lambda$. Com isso, $X(x) \in E_x \cap F_x = \{0\}$, uma contradição.

Todavia, a hipótese de decomposição mostra que cada $\sigma \in \Lambda$ é uma singularidade hiperbólica, ou seja, a parte real dos autovalores de $DX|_{E_\sigma}$ são negativos e a parte real dos autovalores de $DX|_{F_\sigma}$ são positivos. Uma vez que as singularidades hiperbólicas são isoladas na variedade M, pela decomposição contínua do fibrado tangente, e já que Λ é compacto, concluimos que Λ é conjunto finito de singularidades hiperbólicas. □

4.3 Fluxo Linear de Poincaré

Definição 4.15. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Dado $q \in M \setminus Sing(X)$, definimos N_q como o* ***complemento ortogonal*** *de E_q^X e denotamos $\Theta_q : T_qM \to N_q$ a* ***projeção ortogonal****.*

Lema 4.16. *Se $q \in M \setminus Sing(X)$ e L_q é um subespaço de T_qM tal que $E_q^X \subset L_q$ então $\Theta_q(L_q) = N_q \cap L_q$.*

Demonstração. Fixe $v \in L_q$. Já que $T_{M\setminus Sing(X)}M = N_{M\setminus Sing(X)} \oplus E^X_{M\setminus Sing(X)}$, podemos escrever $v = w + z$ para algum $w \in N_q$ e algum $z \in E_q^X$. Por outro lado, como $E_q^X \subset L_q$ e $w = v - z$ temos que $w \in L_q$ assim $w \in L_q \cap N_q$. Portanto, $\Theta_q(v) = w \in N_q \cap L_q$ provando que $\Theta_q(L_q) \subset N_q \cap L_q$.

Reciprocamente, se $v \in N_q \cap L_q$ então $\Theta_q(v) = v$ assim, $v = \Theta_q(v + X(q))$. Uma vez que $v \in L_q$ e $X(q) \in E_q^X \subset L_q$ obtemos que $v \in \Theta_q(L_q)$, portanto $N_q \cap L_q \subset \Theta_q(L_q)$. □

Definição 4.17. *Dado um conjunto compacto e invariante Λ sem singularidades, definimos o* ***subfibrado normal*** *do campo X sobre Λ como*

$$N_\Lambda = \bigcup_{q\in\Lambda} N_q.$$

Definição 4.18. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante compacto de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, sem singularidades. Se $v \in N_q$ denotamos por $P_t(q)v$ a projeção ortogonal de $DX_t(q)v$ sobre $N_{X_t(q)}$. O fluxo $P_t : N_\Lambda \to M \setminus Sing(X)$ é o* ***fluxo linear de Poincaré*** *de X associado a Λ. Em outras palavras, $P_t(q)v = \Theta_{X_t(q)}(DX_t(q)v)$.*

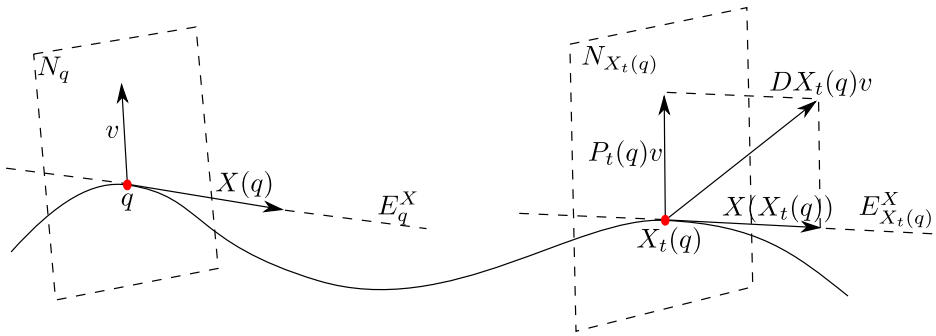

Figura 4.4: Fluxo Linear Poincaré tridimensional.

Dizemos que um subfibrado G_Λ de N_Λ é chamado *invariante* por P_t se $P_t(q)G_q = G_{X_t(q)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $q \in \Lambda$.

Lema 4.19. *Se L_Λ é um subfibrado invariante por X_t de $T_\Lambda M$ contendo E^X_Λ, então o subfibrado induzido $\overline{L}_\Lambda = N_\Lambda \cap L_\Lambda$ é invariante por P_t.*

Demonstração. Fixe $q \in \Lambda$ e $t \in \mathbb{R}$. Uma vez qua L_Λ é invariante por X_t e pela hipótese $E^X_{X_t(q)} \subset L_{X_t(q)}$ então, pelo Lema 4.16, $\Theta_{X_t(q)}(L_{X_t(q)}) = N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
P_t(\overline{L}_q) &= \Theta_{X_t(q)}(DX_t(q)(N_q \cap L_q)) \\
&= \Theta_{X_t(q)}(DX_t(q)(N_q) \cap L_{X_t(q)}) \\
&= \Theta_{X_t(q)}(DX_t(q)(N_q)) \cap \Theta_{X_t(q)}(L_{X_t(q)}) \\
&= P_t(q)(N_q) \cap \Theta_{X_t(q)}(L_{X_t(q)}) \\
&= N_{X_t(q)} \cap (N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)}) \\
&= N_{X_t(q)} \cap L_{X_t(q)} \\
&= \overline{L}_{X_t(q)}.
\end{aligned}$$

□

Definição 4.20. *O fluxo linear Poincaré P_t é* ***Hiperbólico*** *sobre Λ se existir uma decomposição contínua $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ e constantes positivas k, λ tal que*

1. *$N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ é invariante por P_t, isto é, ambos G_Λ e F_Λ são invariantes por P_t.*
2. *P_t contrai G_Λ, isto é, $\| P_t(q)|_{G_q} \| \leq ke^{-\lambda t}$, para todo $t \geq 0$ e $q \in \Lambda$.*
3. *P_t expande F_Λ, isto é, $m(P_t(q)|_{F_q}) \geq ke^{\lambda t}$, para todo $t \geq 0$ e $q \in \Lambda$.*

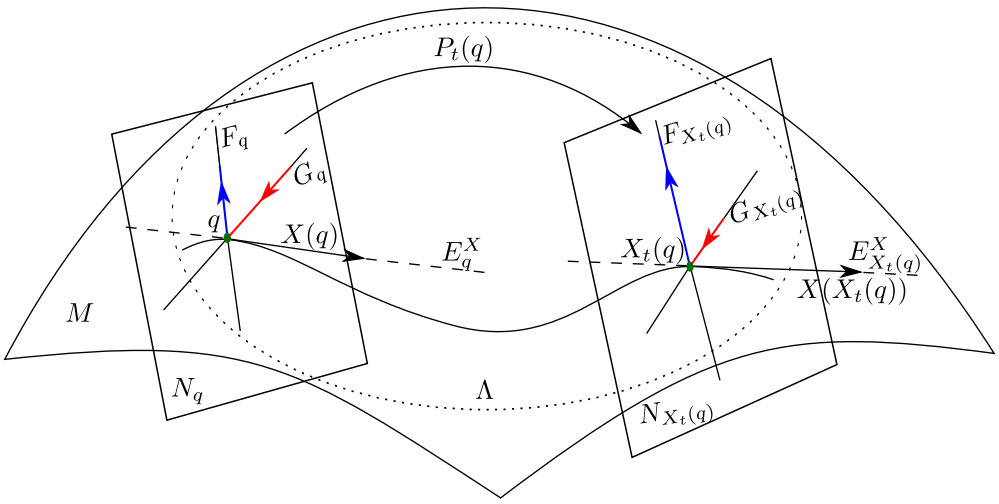

Figura 4.5: Fluxo Linear de Poincaré Hiperbólico.

Verifica-se que a hiperbolicidade de um campo vetorial sem singularidades pode ser expressa em termos da hiperbolicidade do fluxo linear de Poincaré associada a X. Para averiguar isso segue o próximo lema, que para prová-lo usamos o campo de cones o qual é definido a seguir.

Definição 4.21. *Seja S uma variedade diferenciável e TS seu fibrado tangente. Dado $x \in S$, $\alpha > 0$ e um subespaço linear $V_x \subset T_xS$, denotamos por $C_\alpha(x, V_x) \equiv C_\alpha(x)$ o cone ao redor de V_x em T_xS com inclinação α, isto é,*

$$C_\alpha(x) = \{v_x \in T_xS : \angle(v_x, V_x) \leq \alpha\}$$

onde $\angle(v_x, V_x)$ é o ângulo entre um vetor v_x e o subespaço V_x. Um ***campo de cones*** *em S é uma aplicação contínua $C_\alpha : S \to T_xS$, onde $C_\alpha(x)$ é um cone com inclinação constante α em T_xS.*

Lema 4.22. *Um conjunto compacto invariante Λ por X sem singularidades é hiperbólico se, e somente se, P_t é hiperbólico sobre Λ.*

Demonstração. Suponhamos que Λ é um conjunto hiperbólico sem singularidades e decomposição hiperbólica $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$. Definindo $G_\Lambda = \overline{(E^s \oplus E^X)}_\Lambda$ e $F_\Lambda = \overline{(E^X \oplus E^u)}_\Lambda$, ou seja, $G_\Lambda = N_\Lambda \cap (E^s \oplus E^X)_\Lambda$ e $F_\Lambda = N_\Lambda \cap (E^X \oplus E^u)_\Lambda$ assim, obtemos uma decomposição contínua $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ que é invariante por P_t pelo Lema 4.19. Como Λ não tem singularidades, temos que, para $q \in \Lambda$ e $v \in G_\Lambda$

$$\begin{aligned} \| P_t(q)v \| &= \| \Theta_{X_t(q)}(DX_t(q)v) \| \\ &\leq \| DX_t(q)v \| \\ &\leq ke^{-\lambda t} \| v \| \end{aligned}$$

com isso P_t contrai G_Λ. Analogamente, F_Λ é expandido por P_t. Logo P_t é hiperbólico sobre Λ.

Reciprocamente, suponhamos que P_t é hiperbólico sobre Λ e denote por $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ a decomposição correspondente. Defina o subfibrado $A_\Lambda = G_\Lambda \oplus E^X_\Lambda$ e $B_\Lambda = E^X_\Lambda \oplus F_\Lambda$ sobre Λ. Note que, tanto A_Λ quanto B_Λ são invariantes por X_t. De fato, se $x \in \Lambda$ e $v_x \in A_x$ então existe um único $w_x \in G_x$ tal que $v_x - w_x \in E^X_x$. Se $t \in \mathbb{R}$ então $DX_t(x)v_x - DX_t(x)w_x \in E^X_{X_t(x)}$ já que E^X_Λ é invariante por DX_t, assim $\Theta_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) = P_t(x)w_x$ do qual obtemos que $\Theta_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) \in G_{X_t(x)}$, já que G_Λ é invariante por P_t. Como $DX_t(x)v_x - \Theta_{X_t(x)}(DX_t(x)v_x) \in E^X_{X_t(x)}$ pela definição de $\Theta_{X_t(x)}$, daí obtemos que $DX_t(x)v_x \in G_{X_t(x)} \oplus E^X_{X_t(x)} = A_{X_t(x)}$, portanto A_Λ é invariante por X_t. O mesmo processo é feito para B_Λ. Finalmente, já que Λ é compacta e sem singularidades podemos usar campos de cones em torno de G_Λ para obter um subfibrado estável E^s_Λ em A_Λ complementar a E^X_Λ. Analogamente obtemos um subfibrado instável E^u_Λ em B_Λ complementar a E^X_Λ. Uma vez que $N_\Lambda = G_\Lambda \oplus F_\Lambda$ obtemos $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^X_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ com isso conseguimos a decomposição hiperbólica sobre Λ. □

O fluxo linear de Poincaré não é definido em uma singularidade. Portanto, não podemos caracterizar um conjunto singular hiperbólico com singularidades através da hiperbolicidade desse fluxo. Apesar desta dificuldade, ainda podemos obter algumas informações a partir da restrição do fluxo linear de Poincaré a $\Lambda^* = \Lambda \setminus Sing(X)$.

Seja Λ um conjunto parcialmente hiperbólico para X com $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ tal que expande área na direção de E^c. Seja E^X a direção do fluxo de X em Λ. Defina o subfibrado $F_{\Lambda^*} = N_{\Lambda^*} \cap E^c_{\Lambda^*}$ sobre Λ^*. Note que F_{Λ^*} é invariante por P_t sobre Λ^*, uma vez que N_{Λ^*} e $E^c_{\Lambda^*}$ são.

Lema 4.23. *Seja Λ um conjunto parcialmente hiperbólico para $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ que expande área na direção central. Então, existem constantes λ,$k > 0$ tais que*

$$m(P_t(x)|_{F_x}) \cdot m(DX_t(x)|_{E^X_x}) \geq ke^{\lambda t}$$

para todo $x \in \Lambda^*$ e $t > 0$.

Demonstração. Seja $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ a decomposição contínua parcialmente hiperbólica de Λ sobre M.

Fixe $x \in \Lambda^*$ e dados $u, v \in T_xM$, seja $A(u, v)$ a área do paralelogramo formado por u, v. Se $u \in F_x = N_x \cap E^c_x$ e $v \in E^X_x$ temos que

$$A(u, v) = \| u \| \cdot \| v \|$$

uma vez que N_x é o complemento ortogonal de E^X. A partir disto, obtemos

$$A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = \| P_t(x)u \| \cdot \| DX_t(x)v \|$$

por definição $P_t(x)u$.

Por outro lado,

$$A(DX_t(x)u, DX_t(x)v) = |det(DX_t(x)|_{E^c_x})| \cdot A(u, v).$$

Como Λ é compacto e E^c_Λ expande área, existem constantes $k, \lambda > 0$ tais que

$$| \, det(DX_t(x)|_{E^c_\Lambda}) \, | \geq ke^{\lambda t}, \ \forall t > 0.$$

Portanto,

$$\| P_t(x)u \| \cdot \| DX_t(x)v \| \geq ke^{\lambda t} \| u \| \cdot \| v \| .$$

Como u, v são arbitrários segue o resultado. □

4.4 Sobre Conjuntos Singulares Hiperbólicos

Lema 4.24 (Lema Hiperbólico)**.** *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico para $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se $H \subset \Lambda$ é um conjunto compacto invariante sem singularidades, então H é hiperbólico.*

Demonstração. Invertendo o sentido do fluxo, se necessário, podemos assumir que Λ é parcialmente hiperbólico em X. Neste caso, o mesmo acontece com H, já que H é compacto e invariante. Provemos que H é hiperbólico. Suponhamos

que $T_H M = E^s_H \oplus E^c_H$ com E^s_H contrator e E^c_H expande área. Uma vez que H não tem singularidades, podemos considerar o subfibrado $F_H = N_H \cap E^c_H$. Como H é um conjunto compacto parcialmente hiperbólico em X sem singularidades, temos pelo Lema 4.23 que existem constantes $\lambda, k > 0$ tais que

$$m(P_t(x)|_{F_x}) \cdot m(DX_t(x)|_{E^X_x}) \geq ke^{\lambda t}$$

para todo $x \in H$ e $t > 0$.

Por outro lado, uma vez que H é compacto, existe $A > 0$ tal que $\| X(x) \| \leq A$, $\forall x \in H$. Além disso, por H ser compacto invariante e sem singularidades, existe $B > 0$ tal que $\| X(x) \| \geq B$, $\forall x \in H$.

Desta maneira, para todo $x \in H$ e $t > 0$, temos que

$$m(DX_t|_{E^X_x}) = \inf \frac{\| DX_t(x)(X(x)) \|}{\| X(x) \|} = \inf \frac{\| X(X_t(x)) \|}{\| X(x) \|} \leq \frac{A}{B}.$$

Logo, operando $m(P_t(x)|_{F_x})$ em ambos os lados da desigualdade e aplicando o Lema 4.23, nós obtemos

$$m(P_t(x)|_{F_x}) \cdot \frac{A}{B} \geq m(P_t(x)|_{F_x}) \cdot m(DX_t(x)|_{E^X_x}) \geq ke^{\lambda t}.$$

Assim,

$$m(P_t(x)|_{F_x}) \geq Ce^{\lambda t}, \ \forall x \in H, \ \forall t > 0$$

onde $C = \dfrac{kB}{A} > 0$. Portanto, P_t expande F_H.

Seja $G_H = N_H \cap (E^s_H \oplus E^X_H)$. Como DX_t contrai E^s_H, então P_t contrai G_H. Daí, $N_H = G_H \oplus F_H$ é uma decomposição de um conjunto sem singularidades e isto implica que P_t é hiperbólico e aplicando o Lema 4.22, concluímos a prova. □

Exemplo 4.25. *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico, qualquer órbita periódica de X em Λ é hiperbólico. Isso ocorre pois em uma órbita periódica não se tem singularidades, logo o Lema 4.24 se aplica.*

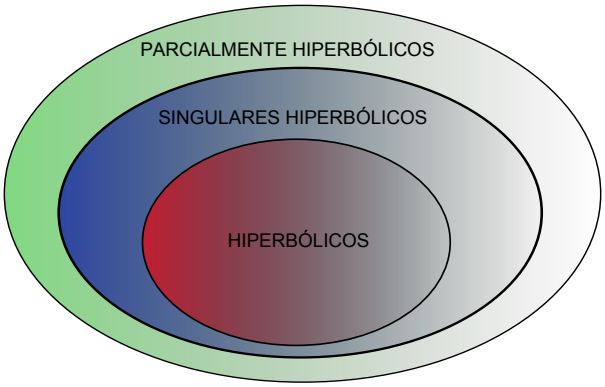

Figura 4.6: Relação dos conceitos de Hiperbolicidade.

Conseguimos então relacionar os tipos de hiperbolicidade como mostra a Figura 4.6.

Todo subconjunto fechado invariante de um conjunto hiperbólico (singular hiperbólico) também é um conjunto hiperbólico (singular hiperbólico). Mais interessante, às vezes, é estender a hiperbolicidade para uma vizinhança de um conjunto hiperbólico (singular hiperbólico).

A proposição a seguir ilustra a estabilidade estrutural de campos de conjuntos hiperbólicos, cuja prova envolve conceitos que aqui não foram enunciados. Apresentamos sem demonstração este resultado, uma prova pode ser vista em [12] *Teorema 18.2.3*, bem como nas suas referências.

Proposição 4.26. *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Então para qualquer vizinhança aberta U de Λ existe $\epsilon > 0$ tal que se Y é campo e $d_1(X, Y) < \epsilon$ então existe um conjunto hiperbólico invariante para Y.*

Embora não seja um resultado da estabilidade estrutural, o resultado a seguir nos dá uma idéia de que em pequenas vizinhanças do campo podemos ainda ter conjuntos Singulares Hiperbólicos.

Proposição 4.27. *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico de $X \in \mathfrak{X}^r(M), r \geq 1$. Então existe uma vizinhança U de Λ e uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ de X de tal forma que se $Y \in \mathcal{U}$, então qualquer conjunto invariante compacto de Y em U é singular hiperbólico.*

Demonstração. Como no caso Hiperbólico (Proposição 4.26), a existência de uma decomposição contínua e invariante Λ é uma propriedade aberta, isto é, existem vizinhanças $U \supset \Lambda$ e $\mathcal{U} \supset X$ com as propriedades da proposição.

Denotando por Λ_Y, um conjunto invariante em U para $Y \in \mathcal{U}$ e por DY_t a derivada do fluxo Y_t gerado pelo campo Y, resta provar que a direção central de Λ_Y expande área.

Sejam u, $v \in E^c_{\Lambda_Y}$ e $x \in \Lambda_Y$, sem perda de generalidade, suponhamos que suas imagens pela derivada do fluxo sejam ortogonais, com isso temos que

$$A(DY_t(x)u, DY_t(x)v) = \| DY_t(x)u \| \cdot \| DY_t(x)v \|$$

e como

$$A(DY_t(x)u, DY_t(x)v) = |det(DY_t(x)|_{E^c_x})| \cdot A(u, v)$$

segue que

$$\| DY_t(x)v \| \cdot \| DY_t(x)v \| = |det(DY_t(x)|_{E^c_x})| \cdot A(u, v).$$

Lembramos que o mesmo vale para X.

Agora, uma vez que X e Y são C^1-próximos, temos que

$$\| DX_t(x)u - DY_t(x)u \| < \epsilon$$

$$\| DX_t(x)v - DY_t(x)v \| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\| DY_t(x)u \| &= \| DX_t(x)u - DX_t(x)u + DY_t(x)u \| \\ &= \| DX_t(x)u - (DX_t(x)u - DY_t(x)u) \| \\ &\geq \| DX_t(x)u \| - \| DX_t(x)u - DY_t(x)u \| \\ &> \| DX_t(x)u \| - \epsilon.\end{aligned}$$

Do mesmo modo

$$\| DY_t(x)v \| > \| DX_t(x)v \| - \epsilon.$$

Operando as duas desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}\| DY_t(x)u \| \| DY_t(x)v \| &> (\| DX_t(x)u \| - \epsilon)(\| DX_t(x)v \| - \epsilon) \\ &= \| DX_t(x)u \| \| DX_t(x)v \| - \epsilon \| DX_t(x)u \| - \epsilon \| DX_t(x)v \| + \epsilon^2 \\ &= |det(DX_t(x)|_{E^c_x})| A(u,v) - \epsilon \| DX_t(x)u \| - \epsilon \| DX_t(x)v \| + \epsilon^2\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ e usando o fato de que o conjunto Λ de X expande área na direção E^c_Λ, temos que

$$\begin{aligned}\| DY_t(x)u \| \cdot \| DY_t(x)v \| &> |det(DX_t(x)|_{E^c_x})| A(u,v) \\ &> ke^{\lambda t} A(u,v)\end{aligned}$$

O que implica que

$$|det(DY_t(x)|_{E^c_x})| > ke^{\lambda t}.$$

Portanto, $E^c_{\Lambda_Y}$ expande área. □

A proposição e o teorema a seguir caracteriza as singularidades de conjuntos Singulares Hiperbólicos.

Proposição 4.28. *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico para o campo X e suponha que Λ não é hiperbólico. Então, Λ tem, pelo menos, uma singularidade incorporada.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $Sing(X) \neq \emptyset$ pois, caso contrário, Λ seria hiperbólico pelo Lema 4.24.

Denotemos por Λ_1 o fecho de $\Lambda^* = \Lambda \setminus Sing(X)$. Temos que Λ_1 é invariante por X_t. De fato,

$$\begin{aligned}X_t(\Lambda_1) &= X_t(\overline{\Lambda^*}) = \overline{X_t(\Lambda^*)} = \overline{X_t(\Lambda \setminus Sing(X))} \\ &= \overline{X_t(\Lambda) \setminus X_t(Sing(X))} \\ &= \overline{\Lambda \setminus Sing(X)} = \overline{\Lambda^*} \\ &= \Lambda_1.\end{aligned}$$

Além disso, Λ_1 é compacto, já que $\Lambda_1 \subset \Lambda$, Λ_1 fechado e Λ compacto.

Tomando $\sigma_1 \in Sing(X)$. Se $\sigma_1 \notin \Lambda_1$, podemos escrever $\Lambda = \{\sigma_1\} \cup \Lambda_1$ (união disjunta).

Como $\Lambda_1 \subset \Lambda$, temos que Λ_1 não é hiperbólico, uma vez que Λ não é hiperbólico. Além disso, $Sing(X|_{\Lambda_1})$ é não vazio, pois caso contrário Λ_1 seria hiperbólico pelo Lema 4.24, uma contradição.

Agora, tomando $\sigma_2 \in Sing(X)$, $\sigma_2 \neq \sigma_1$. Se $\sigma_2 \notin \Lambda_1$, então podemos escrever $\Lambda = \{\sigma_1, \sigma_2\} \cup \Lambda_1$ (união disjunta). Com isso, concluimos novamente que $Sing(X|_{\Lambda_1}) \neq \emptyset$, senão Λ_1 seria hiperbólico, um absurdo.

Já que $Sing(X)$ é finito, repetindo o processo, chegamos a uma singularidade no fecho de Λ^*, logo ela é um ponto de aderência em Λ e portanto uma singularidade incorporada. □

Teorema 4.29. *Seja Λ um conjunto singular hiperbólico para o campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se $\sigma \in Sing(X) \cap \Lambda$, então σ é tipo Lorenz ou tem dois autovalores positivos. Além disso, tem-se*

$$\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que σ é tipo Lorenz ou tem dois autovalores positivos. Denote por $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ a decomposição singular hiperbólica de M sobre Λ. Se Λ é trivial, então tem-se o resultado. Suponha que Λ não é trivial. Como Λ é conexo, pelo Teorema 4.9 implica que $X(x) \in E^c_x$ e $\dim(E^s_x) = 1$ para todo $x \in \Lambda$. Em particular $\dim(E^s_\sigma) = 1$ e σ tem um autovalor contrator (forte) $\lambda_2 < 0$. Se σ tem somente um autovalor contrator, então σ tem dois autovalores positivos e obtemos uma parte do resultado. Assim podemos assumir que σ tem outro autovalor negativo λ_3. Então temos que $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$ por dominância. Como $\dim(M) = 3$ e nenhuma singularidade num conjunto singular hiperbólico é atratora (pela condição de expande área) temos que existe um terceiro autovalor positivo λ_1 de σ tal que $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_1$. Segue da condição de expandir área que $-\lambda_3 < \lambda_1$. Isto prova que σ é tipo Lorenz e obtemos a outra parte do resultado.

Agora provermos que em qualquer caso tem-se a igualdade $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$. Por contradição, suponha que isto não ocorra. Então, existe um ponto $x_0 \in \Lambda \cap (W^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\})$. Neste ponto devemos ter que $X(x_0) \in E^s_{x_0}$ e logo $X(x_0) \in E^s_{x_0} \cap E^c_{x_0}$ implicando $X(x_0) = 0$, o que é um absurdo. Esta contradição prova a igualdade. □

Corolário 4.30. *Seja Λ um sumidouro singular hiperbólico para o campo X. Se $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ é a decomposição singular hiperbólica de M sobre Λ, então:*

1. *$X(x) \in E^c_x$, para todo $x \in \Lambda$.*
2. *$\dim(E^s_x) = 1$, para todo $x \in \Lambda$.*
3. *Além disso, se $\sigma \in Sing(X) \cap \Lambda$, então σ é tipo Lorenz ou tem dois autovalores positivos.Em qualquer caso, tem-se $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$.*

Demonstração. Podemos assumir que Λ é não trivial, porque caso contrário, Λ seria uma singularidade tipo sela, o qual é uma contradição já que Λ é um sumidouro. Então o Corolário segue dos Teoremas 4.9 e 4.29. □

Observação 4.31. *Em [22] foi demonstrado que todas as singularidades de um conjunto singular hiperbólico são de tipo Lorenz. Isto não é verdade para sumidouro singular hiperbólico em geral, por exemplo no sumidoro singular hiperbólico da Figura 4.7 as singularidades σ_2 e σ_3 não são de tipo Lorenz. Logo o item 1 da Proposição 9.25 pag. 178 em [3] é falso.*

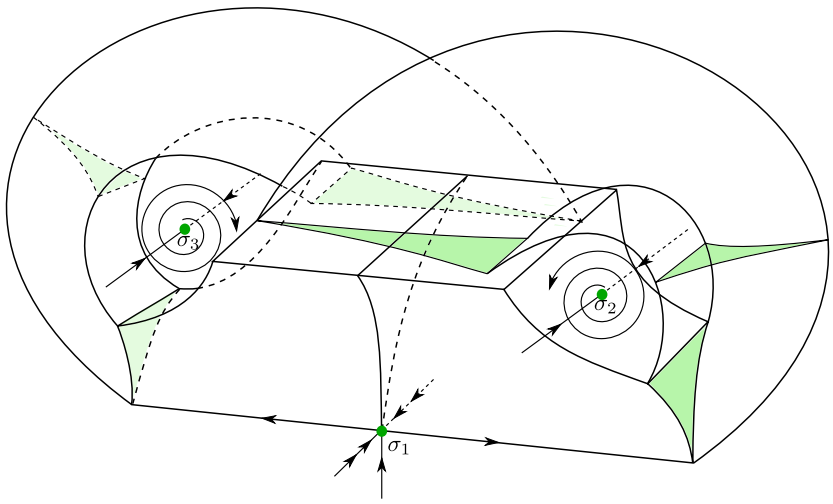

Figura 4.7: Um sumidoro singular hiperbólico com singularidades σ_2 e σ_3 que não são de tipo Lorenz.

4.5 Campo Singular Axioma A

Definição 4.32. *Um campo vetorial X é **Axioma A** se*

1. *$\Omega(X)$ é um conjunto hiperbólico;*
2. *$\Omega(X)$ é o fecho dos elementos críticos de X.*

Exemplo 4.33. *Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ é chamado Anosov se a variedade M é um conjunto hiperbólico. É conhecido de $\Omega(X) = M$ quando temos X Anosov, com isso segue que todo campo vetorial Anosov é Axioma A (Ver por exemplo [20]).*

Definição 4.34. *Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é **Singular Axioma A** se*

1. *O conjunto não errante $\Omega(X)$ de X é uma união disjunta de conjuntos singulares básicos, ou seja,*

$$\Omega(X) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_m$$

onde cada Λ_i é um conjunto Singular Hiperbólico, invariante maximal e transitivo.

2. $\Omega(X)$ é o fecho dos elementos críticos de X.

A família de conjuntos singulares básicos é chamada de *decomposição singular espectral* de $\Omega(X)$.

Definição 4.35. *Um **ciclo** é uma sequência $\Lambda_0 = \Lambda_m, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{m-1}$ de conjuntos singulares básicos da decomposição singular espectral tal que para cada $i = 1, \ldots, m$ existe uma órbita regular cujo $\alpha-$limite está contido em Λ_{i-1} e cujo $\omega-$limite está contido em Λ_i.*

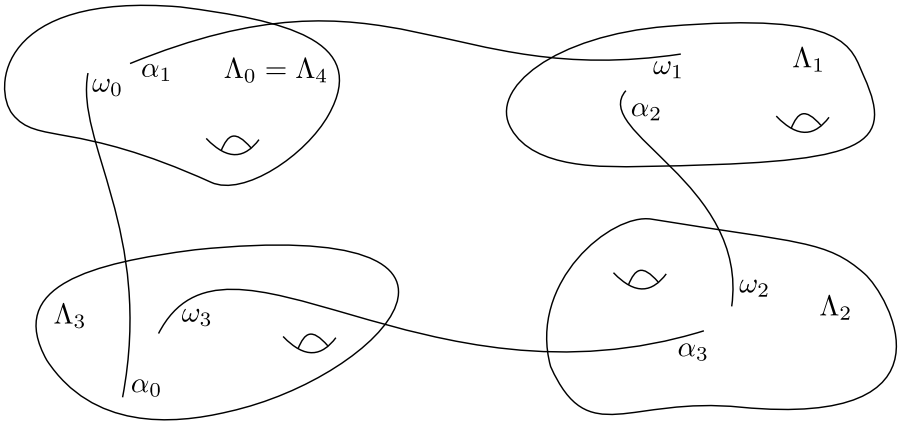

Figura 4.8: Um ciclo $\Lambda_0 = \Lambda_4, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.

Dizemos que um campo vetorial Singular Axioma A não possui ciclos se não houver nenhum conjunto de órbitas regulares que unem os seus conjuntos singulares básicos de forma cíclica.

Definição 4.36. *Uma **filtração** para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é uma família finita $M_0 = \emptyset, M_1, M_2, \cdots, M_m$ de subvariedades compactas (com bordo para $1 \leq i < k$) tal que:*

1. $M_m = M$ e M_{i+1} contem o interior de M_i para todo $1 \leq i \leq m$;

2. $X_t(M_i)$ está contido no interior de M_i para todo $1 \leq i \leq m$.

Em suma, uma filtração é uma sequência de subvariedades onde se pode decompor a dinâmica em pedaços menores.

Exemplo 4.37. *Sejam $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o campo vetorial dado por $X(p) = [\varphi, (0, 1)]_p$, com $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ uma carta, tomando $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Uma filtração de X é $M_1, M_2 = S^2$ (Figura 4.9).*

Denominaremos $\mathcal{G}^r(M)$ como o interior do conjunto de campos vetoriais C^r em M cujos elementos críticos são hiperbólicos.

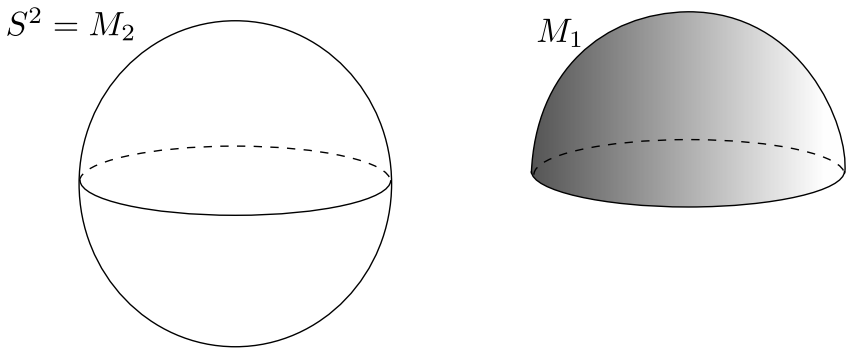

Figura 4.9: Uma filtração da esfera.

Teorema 4.38. *Um campo vetorial Singular Axioma A, de classe C^r, sem ciclos está em $\mathcal{G}^r(M)$ para qualquer $r \geq 1$.*

Demonstração. Seja X um campo vetorial Singular Axioma A, então o conjunto não errante de X se escreve como $\Omega(X) = \Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_m$, onde cada Λ_i é um conjunto singular básico.

Fixe $1 \leq i \leq m$. Pela Proposição 4.27, existem vizinhanças U_i de Λ_i e $\mathcal{U}_i$ de X de tal forma que qualquer conjunto invariante compacto $\Lambda_i(Y)$ de $Y \in \mathcal{U}_i$ em U_i é singular hiperbólico. Então, qualquer singularidade de Y em $\Lambda_i(Y) \in U_i$ é hiperbólica e, pelo Lema 4.24 qualquer órbita periódica de Y em $\Lambda_i(Y) \in U_i$ é hiperbólica, ou seja, todo elemento crítico de $Y \in \mathcal{U}_i$ em $\Lambda_i(Y) \in U_i$ é hiperbólico.

Por outro lado, já que X não tem ciclos, então podemos tomar uma filtração $M_0 = \emptyset, M_1, \ldots, M_m$ de tal modo que cada conjunto singular básico coincide com o conjunto de órbitas contidas em algum conjunto aberto do tipo $L_i = int(M_i \setminus M_{i-1})$, ou seja,

$$\Lambda_i = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(L_i), \quad \forall i = 1, \cdots, m.$$

Além disso, podemos encontrar uma vizinhança $\mathcal{V}$ de X tal que se $Y \in \mathcal{V}$, então a filtração $M_0, M_1, \ldots, M_m$ ainda é filtração de Y. Para finalizar a prova, mostremos que

$$\Omega(Y) \subset \Lambda_1(Y) \cup ... \cup \Lambda_m(Y)$$

onde cada $\Lambda_i(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(L_i), \ \forall i = 1, \cdots, m.$

Seja $x \in \Omega(Y)$. A primeira observação é que x não pode pertencer a fronteira dos M_i, caso contrário entraria no interior e como a fronteira é compacta teriamos uma vizinhança de x que nunca retorna a ela. Logo $x \in L_i$ para algum i. Vejamos que $x \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t(L_i)$. Por absurdo suponha que não, portanto existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin Y_{-t_0}(M_i - M_{i-1})$, então $Y_{t_0}(x) \notin (M_i - M_{i-1})$ e portanto $Y_{t_0}(x) \in M_{i-1}$. Mas então dada uma vizinhança de $Y_{t_0}(x)$ ela não retorna próximo de x, absurdo. O outro caso é análogo. Teríamos por absurdo, que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin Y_{t_0}(M_i - M_{i-1}) \Rightarrow Y_{-t_0}(x) \in M_i^C$, mas existiria uma vizinhança que

para o tempo negativo nunca volta a se intersectar, absurdo. Logo

$$x \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}} Y_t(L_i) = \Lambda_i(Y)$$

para algum $i = 1, \cdots, m$. Portanto, $\Omega(Y) \subset \Lambda_1(Y) \cup ... \cup \Lambda_m(Y)$.

Como todos os elementos críticos de Y pertencem ao $\Omega(Y)$ então eles pertencem a $\Lambda_1(Y) \cup ... \cup \Lambda_m(Y)$. Assim, definindo

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_m$$

temos que $\mathcal{U} \in \mathfrak{X}^r(M)$ é uma vizinhança de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$ todo elemento crítico de Y é hiperbólico. Isto prova que $X \in \mathcal{G}^r(M)$ como queríamos. □

O inverso ao Teorema 4.38 não é verdadeiro, na verdade campos vetoriais em $\mathcal{G}^1(M)$ não precisam ser campos singular Axioma A. Por exemplo, os campos vetoriais com expansão de ciclos singulares em [2] pertencem a $\mathcal{G}^1(M)$ pois o desdobramento do ciclo não dá origem a órbitas periódicas não hiperbólicas.

4.5.1 Exemplo de Campo Singular Axioma A

Nesta seção apresentamos um campo vetorial Singular Axioma A em $\mathcal{G}^r(M)$ com um conjunto singular básico $\mathcal{L}$ equivalente ao atrator geométrico de Lorenz (Ver Capítulo 3). Faremos um esboço da prova, dando uma ideia bem geral, contudo compreensível.

Para começar, considere a equação diferencial linear de $\mathbb{R}^3$ dada por $L(x, y, z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, onde

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \\ \dot{z} = \lambda_3 z \end{cases} \tag{4.1}$$

Note que a origem $\sigma = (0, 0, 0)$ é uma singularidade de L com autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Assumimos que $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$ e assim σ é de tipo Lorenz.

O fluxo induzido por L é dada por

$$L_t(x, y, z) = (xe^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t}, ze^{\lambda_3 t}). \tag{4.2}$$

Denotaremos por $\hat{x} = (x, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, y, 0)$, $\hat{z} = (0, 0, z)$ as linhas e por $\hat{xz} = (x, 0, z)$, $\hat{xy} = (x, y, 0)$, $\hat{yz} = (0, y, z)$ os planos. Note que as linhas e os planos são preservados por L_t, $t \geq 0$. De fato, por exemplo

$$\begin{aligned} L_t(0, y, 0) &= (0e^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t}, 0e^{\lambda_3 t}) \\ &= (0, ye^{\lambda_2 t}, 0) \end{aligned}$$

Em particular, a linha $\hat{y}$ e o plano $\hat{xz}$ são invariantes pelo fluxo L_t.

Agora, existe uma aplicação Φ definida da seção transversal $S = \{z = 1\}$ em $\Sigma = \{x = \pm 1\}$. Na verdade Φ só é definido em $\widetilde{S} = S \backslash \{(0, y, 1)\}$. (Ver Figura 4.10).

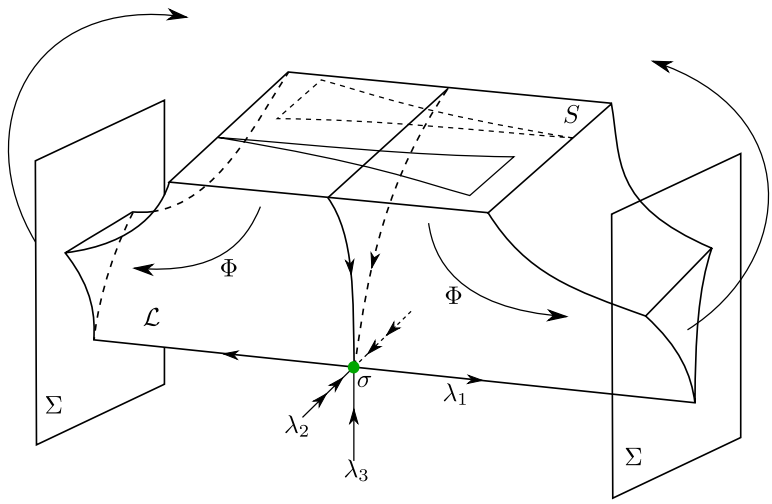

Figura 4.10: Conjunto $\mathcal{L}$.

Para qualquer $q \in \widetilde{S}$, seja $t(q) > 0$ o primeiro tempo positivo ao longo da órbita de q para que $L_{t(q)} \in \Sigma$. Então, $\Phi(q) = L_{t(q)}(q)$. Defina as regiões

$$\widetilde{R} = \{(L_t(q), t) : (q, t) \in \widetilde{S} \times [0, t(q)]\}$$

$$R = \widetilde{R} \cup W^s_\epsilon(\sigma) \cup W^u_\epsilon(\sigma).$$

Aqui $W^l_\epsilon(\sigma)$ é uma variedade estável local (respectivamente instável) associado a σ, com $l = s, u$. Nota-se que R é uma região linear que é comprimida ao longo de $W^u_\epsilon(\sigma)$, devido a ação da contração do autovalor λ_2.

Seja $f : \Sigma \to S$ um homeomorfismo tal que tem uma extensão C^∞ para vizinhanças pequenas de ambas componentes conexas de Σ. Identificamos em $R, (\Phi(q), t(q))$ com $(f(\Phi(q)), 0)$ para $q \in \widetilde{S}$ e $q \in W^u_\epsilon(\sigma) \cap \Sigma$ com $(f(q), 0)$.

Com esta identificação obtemos uma nova variedade $\mathcal{L}_f$, conhecida como *Branched Manifold*, e um fluxo agindo sobre ele. Nós chamamos este sistema a suspensão singular de Φ, por analogia com a suspensão de aplicações.

A estrutura topológica de $\mathcal{L}_f$ é conhecida. Não é uma variedade diferenciável devido à região comprimida na variedade instável local, mas pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^3$ se f preservar orientação. Isto é suficiente para a nossa proposta. O campo vetorial linear (4.1) relacionado ao campo vetorial em $\mathcal{L}_f$, leva um fluxo positivo de L cuja dinâmica está relacionado com a aplicação f. Nós temos as seguintes propriedades no que diz respeito ao sistema de coordenadas naturais (x, y, z) em $\mathcal{L} = \mathcal{L}_f$:

(i) L preserva a decomposição $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$, onde $E = \hat{y}$ e $F = \hat{xz}$;

(ii) o fluxo de L é dado por $L_t(x, y, z) = (xe^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t}, ze^{\lambda_3 t})$.

Observe que embora se possa escolher f de modo que L satisfaz (i) acima, não é possível escolher, de tal modo que L preserve nem a linha $(x, 0, 0)$, nem a linha $(0, 0, z)$, devido a obstruções topológicas óbvias.

Afirmamos que $\mathcal{L}$ é um conjunto singular hiperbólico. De fato, tem-se

$$DL_t(x, y, z) \cdot v = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} v.$$

Assim,

(I) Se $v \in E$, ou seja, $v = (0, b, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} DL_t(x, y, z) \cdot v &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (0, be^{\lambda_2 t}, 0) \\ &= e^{\lambda_2 t} v. \end{aligned}$$

Logo, $\| DL_t|_E \| = e^{\lambda_2 t}$, e portanto E é contraida pela derivada do fluxo.

(II) Se $v \in F$, ou seja, $v = (a, 0, c)$, temos que

$$\begin{aligned} DL_t(x, y, z) \cdot v &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \\ &= (ae^{\lambda_1 t}, 0, ce^{\lambda_3 t}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$DL_t|_F = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Com isso, já que $| \, det(DL_t|_F) \, | = e^{(\lambda_1 + \lambda_3)t}$ e $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$, temos que F expande área.

(III) Como $m(DL_t|_F) \geq e^{\lambda_3 t}$, temos que

$$\frac{\| DL_t|_E \|}{m(DL_t|_F)} \leq \frac{e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_3 t}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_3)t}.$$

Já que $\lambda_2 - \lambda_3 < 0$, logo E domina F.

Isto prova que o conjunto $\mathcal{L}$ é Singular Hiperbólico para o campo L. Pela construção, temos que $\mathcal{L} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} L_t(U)$, onde U é uma região limitada que é homeomorfa a um bitoro. Além disso, $\Omega(L) = \mathcal{L}$ e $\omega(p) = \mathcal{L}$ para algum $p \in \mathcal{L}$ e isto prova que L é um Campo Singular Axioma A. (Ver Figura 4.11).

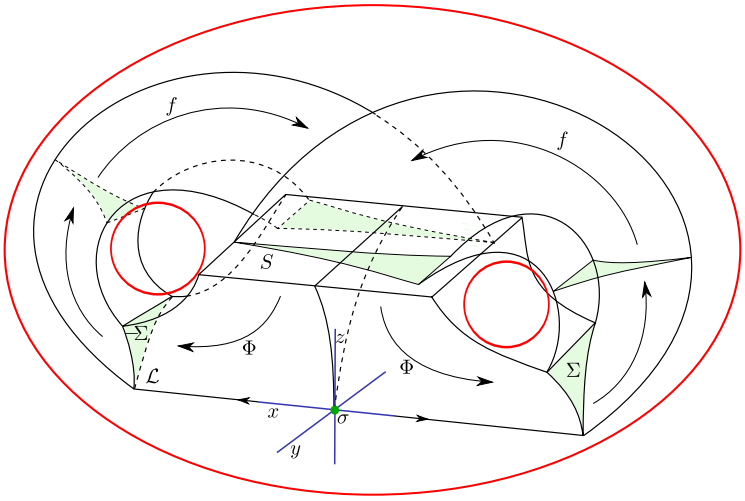

Figura 4.11: Um Campo Singular Axioma A no conjunto $\mathcal{L}$.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, V.; PACIFICO, M.J. *Three-dimensional flows.* Vol. 53 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics Springer, Heidelberg, (2010).

[2] BAMON, R.; LABARCA, R.; MANE, R.; PACIFICO, M.J. *The explosion of singular cycles.* Publ. Math. IHES, (1993).

[3] BONATTI, C.; DIAZ L.; VIANA, M. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity: A global geometric and probabilistic perspective, Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Vol. 102, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, (2005).

[4] BOWEN, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Vol. 470 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, (1975).

[5] BOWEN, R.; RUELLE, D. *The ergodic theory of Axiom A flows.* Invent. Math., (1975).

[6] BRIN, M. I.; PESIN, Ya. B. *Partially hyperbolic dynamical systems.* Math. USSR-Izv., (1974).

[7] CASTRO Jr, Augusto Armando de. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias.* Rio de Janeiro: IMPA, (2009).

[8] DEVANEY, Robert L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* - 2. Ed. - United States of America: Westview press, (2003).

[9] DÍAZ, Lorenzo J. *Ferraduras Parcialmente Hiperbólicas.* Matemática Universitária, (2000).

[10] HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. *Invariant Manifolds.* Lec. Not. in Math. 583, Spring-Verlag, (1977).

[11] HIRSCH, M.; PUGH, C. *Stable manifolds and hyperbolic sets,.* Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. 9, (1970).

[12] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *A moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos.* Coordenação e revisão da tradução por Luis Barreira, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, (2005).

[13] LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds.* - 2. Ed. - Graduate Texts in Mathematics 218, Spring, (2012).

[14] LIAO, S. *On the stability conjecture.* Chinese Ann. of Math., (1980).

[15] LIMA, Elon Lages. *Variedades Diferenciáveis.* Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro: IMPA, (2007).

[16] LORENZ E. N. *Deterministic Nonperiodic Flow.* J. Atmos. Sci., (1963).

[17] MAÑÉ, R. *Contributions to the stability conjecture.* Topology, (1978).

[18] MELO, Welington de. *Topologia das Variedades.* Rio de Janeiro: IMPA, (2011).

[19] METZGER, R.; MORALES, C. *Sectional-hyperbolic systems.* Ergodic Theory and Dynamical System, (2008).

[20] MORALES, C. A.; BAUTISTA, S. *Lectures on sectional-Anosov flows.* Rio de Janeiro: UFRJ, (2009).

[21] MORALES, C. A.; PACIFICO, M. J.; PUJALS, E. R. *On C1-robust transitive sets for three-dimensional flows.* C. R. Acad. Sci. Paris 326, (1998).

[22] MORALES, C. A.; PACIFICO, M. J.; PUJALS, E. R. *Singular Hyperbolic Systems.* Proceedings of the American Mathematical Society, (1999).

[23] PALIS, Jacob Jr. *Seminário de Sistemas Dinâmicos.* Rio de Janeiro: IMPA, (1971).

[24] PALIS, Jacob Jr; MELO, Welington de. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos.* Rio de Janeiro: IMPA, (1977).

[25] PALIS, J.; SMALE, S. *Structural stability theorems.* Proc. A. M. S. Symp. Pure Math., (1970).

[26] PLISS, V. *On a conjecture due to Smale.* Differ. Uravn., (1972).

[27] ROBINSON, Clark C. *Dinamical Systems: stability, symbolic dynamics and chaos.* Boca Raton: CRC Press, (1994).

[28] SINAI, Y. *Markov partitions and C-diffeomorphisms.* Func. Anal. and Appl., (1968).

[29] SMALE, S. *Differentiable dynamical systems.* Vol. 73. Bull. Amer. Math. Soc., (1967).

[30] SPARROW, C. *The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and Strange Attractors.* Applied Mathematical Sciens 41, Springer-Verlag, (1982).

[31] TUCKER, W. *The Lorenz attractor exists.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., (1999).