MAISA KELY DE MELO

O LEMA DE BUTLER-MCGEHEE E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T
M528l
2013

Melo, Maísa Kely de, 1989-
O Lema de Butler-McGehee e aplicações / Maísa Kely de Melo. – Viçosa, MG, 2013.
vi, 63f. : il. (algumas color) ; 29cm.

Orientador: Kennedy Martins Pedroso.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.62-63.

1. Sistema dinâmicos diferenciais. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.39

MAISA KELY DE MELO

O LEMA DE BUTLER-MCGEHEE E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós - Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 30 de julho de 2013.

Alexandre Miranda Alves
(Coorientador)

Anderson Luís A. de Araújo
(Coorientador)

José Barbosa Gomes

Sônia Pinto de Carvalho

Kennedy Martins Pedroso
(Orientador)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me concedido a vida e as oportunidades que tive. À minha mãe pelo apoio incondicional a todas as minhas decisões. Ao meu orientador Kennedy pelos ensinamentos em matemática. Aos membros da banca examinadora por aceitarem participar deste trabalho. À todos os funcionários da UFV por terem me atendido extraordinariamente bem em todas as vezes que deles precisei. À CAPES pelo apoio financeiro que me permitiu realizar este trabalho.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

Introdução **1**

1 Fluxos no Espaço Euclidiano **4**

1.1 Definição de um Sistema Dinâmico Contínuo 4

1.2 Conceitos Elementares 6

1.3 Conjuntos Limites das Trajetórias 12

1.4 Estabilidade em Sistemas Dinâmicos 16

1.5 Resultados de Equações Diferenciais 20

2 O Lema de Butler-McGehee **26**

2.1 Lema de Butler-McGehee (Butler e Waltman, 1986) 26

2.2 Lema de Butler-McGehee (Smith e Waltman, 1995) 31

2.3 Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011) 34

3 A Dinâmica de um Biorreator **37**

3.1 Introdução 37

3.2 O Modelo 38

3.3 Um Teorema de Estabilidade Global para Sistemas Parcialmente Lineares . 41

3.4 Resultado da Competição do Sistema 3.1 44

3.5 Algumas Simulações Numéricas 47

4 O Modelo de May-Leonard Para Competição Entre Três Espécies 50

4.1 Introdução 50

4.2 O Modelo 51

4.3 Estudo do comportamento dos pontos críticos 51

4.4 Estudo do comportamento das órbitas positivas 57

4.5 Resultado Principal 58

4.6 Simulação numérica 60

Conclusão 61

Referências Bibliográficas 62

Resumo

MELO, Maisa Kely de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2013. **O Lema de Butler-McGehee e aplicações**. Orientador: Kennedy Martins Pedroso. Coorientadores: Alexandre Miranda Alves e Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

Nesta dissertação estudam-se conceitos e resultados de sistemas dinâmicos com ênfase no Lema de Butler-McGehee. O objetivo é apresentar e demonstrar três versões do Lema de Butler-McGehee, bem como, duas aplicações deste lema. Tais aplicações tratam da análise global do comportamento de soluções de sitemas de equações diferenciais ordinárias que representam as populações de espécies que interagem num mesmo ambiente. Com as condições adotadas, para o sistema com duas espécies mostra-se que uma das espécies é extinta e a outra tende a se manter constante. Já no sistema com três espécies mostra-se que há a coexistência entre as três espécies. Conclui-se que o Lema de Butler-McGehee é uma ferrramenta eficiente que auxilia na obtenção de informações a cerca das regiões de atração e repulsão de determinados conjuntos.

Abstract

MELO, Maisa Kely de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July 2013. **Butler-McGehee Lemma and applications**. Advisor: Kennedy Martins Pedroso. Co-advisor: Alexandre Miranda Alves e Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

In this dissertation we study concepts and results about dynamical systems with emphasis at Butler-McGehee Lemma. The purpose of this work is to introduce and to prove three versions of Butler-McGehee Lemma, as well as, two applications of this lemma. Such applications deal with the behavior of solutions to the systems of Ordinary Differential Equations that describe populations of species that interact in the same environment. The adopted conditions show that in the system with two species, one specie is going to extinguish and another is going to survive with constant population. In the system with three species there is coexistence among the species. The Butler-McGehee Lemma has been found to be an efficient tool that helps to acquire information about the regions of attraction and repulsion of certain sets.

Introdução

O Lema de Butler-McGehee surgiu na década de 1980 no desenvolvimento da Teoria da Persistência. Do ponto de vista biológico, persistência significa a sobrevivência de toda a população de um sistema num tempo futuro. Matematicamente, persistência de um sistema significa que soluções estritamente positivas não possuem pontos omega limite na fronteira do cone não negativo.

Curiosamente, as provas dadas para o Lemma de Butler-McGehee surgiram de forma independente realizadas por Geofrey Butler e Richard McGehee.

A versão apresentada por McGehee é dada (e demonstrada) como Lema $A1$ em [5]. Nesta versão, McGehee mostra que se um ponto crítico hiperbólico P está no conjunto omega limite de um ponto x, então ou P é o conjunto omega limite de x ou o conjunto omega limite de x possui interseção com as variedades estáveis e instáveis de P. Intuitivamente, esta versão diz que não é possível uma órbita "serpentear" dentro e fora de uma vizinhança de um ponto crítico hiperbólico infinitas vezes sem ter pontos de acumulação nas variedades estáveis e instáveis deste ponto.

Já a versão atribuida a Butler é dada (e demonstrada) pelo Teorema 4.1 em [2], e diz que num conjunto compacto invariante isolado (M) para um fluxo num espaço métrico localmente compacto, o conjunto omega limite dos pontos que estão (estritamente) na região de atração fraca de M possuem interseção com a região de atração (forte) de M.

Após as primeiras versões dadas em [5] e [2], apareceram vários resultados que utlizaram o Lema de Butler-McGehee para tratar de questões de Persistência em Sistemas Dinâmicos. Dentre eles podemos ressaltar o livro *The theory of the chemostat*, o qual trás a versão atribuída a McGehee e utiliza o Lema de Butler-McGehee na demonstração do principal teorema para competição entre dois competidores realizada em um biorreator. Há uma generalização da versão do Lema de Butler-McGehee (versão dada por Butler) em [4]. A versão mais recente encontra-se no livro *Dynamical systems and population persistence*, no qual o Lema de Butler-McGehee foi "promovido" a teorema.

O Lema de Butler-McGehee é utilizado, por exemplo, para garantir a persistência uniforme de um sistema de interação entre três espécies sempre que houver um número finito de ciclos limites no plano xy, como pode ser visto no Teorema 2 de [10]. E também pode ser utilizado para concluir que se a variedade estável de um ponto crítico hiperbólico

P está contida na fronteira (do cone positivo), então nenhuma trajetória do interior do cone positivo pode ter P como ponto omega limite (ver Corolário 2.1).

Uma ilustração do Lema de Butler-McGehee pode ser vista considerando o sistema

$$\begin{aligned} x' &= \sin x(-0.1\cos x - \cos y) \\ y' &= \sin y(\cos x - 0.1\cos y). \end{aligned} \tag{1}$$

Para o sistema (1), no conjunto $[0,\pi]\times[0,\pi]$, todas as soluções que surgem de $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ têm conjunto omega limite igual ao quadrado limitado pelas retas $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ e $y=\pi$, sendo os pontos $(0,0),(0,\pi),(\pi,0),(\pi,\pi)$ os vértices deste quadrado. Considere uma órbita que surge de $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e denomine-a por φ. O ponto $(0,0)$ é um ponto crítico hiperbólico do sistema (1) cuja variedade estável é constituída pelo lado do quadrado contido na reta $y=0$ e o próprio $(0,0)$. Note que o ponto $(0,0)$ pertence ao conjunto omega limite de φ, mas não coincide com este conjunto. Nestas condições, o Lema de Butler-McGehee garante que o conjunto omega limite de φ tem interseção não trivial com a variedade estável de $(0,0)$. Neste caso, esta interseção é o lado do quadrado contido na reta $y=0$ e o ponto $(0,0)$. O comportamento descrito acima para o sistema (1) referente ao conjunto $[0,\pi]\times[0,\pi]$ pode ser visto na Figura 1.

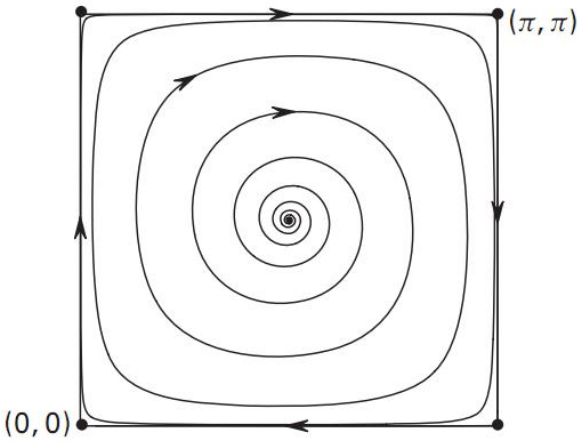

Figura 1: O conjunto omega limite de qualquer solução que surge de $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ é o quadrado limitado pelos quatro equilibrios e as órbitas heteroclínicas.

Em nosso trabalho apresentamos três versões do Lema de Butler-McGehee de forma que a primeira versão é a versão atribuída a Butler (dada em [2]), as outras duas versões são as versões dadas em [14] e [13] e aqui elas são apresentadas (e demonstradas) como corolário da primeira versão. Provamos um Teorema de Convergência em que dado um sistema dinâmico é possível conhecer o comportamento global de suas trajetórias a partir da análise de um sistema dinâmico secundário que é obtido quando "vemos" o sistema dinâmico principal numa dimensão menor. Ainda, apresentamos duas aplicações

do Lema de Butler-McGehee a cerca da sobrevivência de competição entre espécies de microorganismos. O desenvolvimento do nosso trabalho ocorre na seguinte sequência:

No Capítulo 1 definimos o que é um sistema dinâmico, bem como os entes matemáticos que são inerentes a ele, por exemplo, órbitas, pontos críticos e conjunto omega limite. Enunciamos e provamos resultados básicos sobre fluxos num espaço euclidiano. Apresentamos resultados importantes que relacionam o fluxo de um sistema dinâmico com a solução de uma equação diferencial ordinária.

No Capítulo 2 apresentamos (e demonstramos) a versão do Lema de Butler-McGehee dada em [2] e provamos como corolário dela as versões dadas em [14] e [13], obtendo assim demostrações que distanciam-se completamente das demonstrações originais.

No Capítulo 3 utilizamos o Lema de Butler-McGehee para demonstrarmos o Teorema de Convergência referido anteriormente. Enunciamos (e demonstramos) um teorema que garante, sob certas condições, a sobrevivência e extinção de dois microorganismos interagindo em um biorreator.

No Capítulo 4 trazemos uma aplicação do Lema de Butler-McGehee (versão mais recente) que garante, sob certas condições, que as soluções do sistema de interação entre três espécies considerado neste capítulo são atraídas para um ciclo heteroclínico, possibilitando a coexistência entre as espécies.

Capítulo 1

Fluxos no Espaço Euclidiano

A proposta deste capítulo é apresentar um estudo básico da teoria de fluxos num Espaço Euclidiano. Nas Seções 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4 apresentamos os entes matemáticos que rodeiam um sistema dinâmico tais como, órbita e conjuntos limites e abordamos em detalhe resultados que envolvem tais conceitos. É importante ressaltar que o estudo realizado nestas seções ocorre sem qualquer menção à equações diferenciais e teve como principal referência o livro [1].

Somente na Seção 1.5 entram em cena as equações diferenciais ordinárias. Nesta seção há vários resultados que relacionam um fluxo com uma equação diferencial ordinária, resultados estes que estabelecem por exemplo, as condições necessárias para garantir que um fluxo é solução de uma equação diferencial ordinária. Há ainda outros resultados importantes que são necessários nos capítulos posteriores.

1.1 Definição de um Sistema Dinâmico Contínuo

Sejam E um espaço Euclidiano n-dimensional com métrica d e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Para qualquer subconjunto M de E usaremos os símbolos $intM$, ∂M e $\overline{M}$ para denotar respectivamente o interior, a fronteira e o fecho de M.

Definição 1.1. *Uma aplicação $\pi : E \times \mathbb{R} \to E$ define um **fluxo** $\mathfrak{F} = (E, \mathbb{R}, \pi)$ em E se esta aplicação possui as seguintes propriedades:*

i) $\pi(x, 0) = x$ *para todo* $x \in E$*;*

ii) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s)$ *para todo* $x \in E$ *e todo* $t, s \in \mathbb{R}$*;*

iii) π *é contínua.*

Para todo $x \in E$ a aplicação π induz uma aplicação contínua $\pi_x : \mathbb{R} \to E$ tal que $\pi_x(t) = \pi(x,t)$. Esta aplicação π_x é chamada **movimento sobre** x.

Para todo $t \in \mathbb{R}$ a aplicação π induz uma aplicação contínua $\pi^t : E \to E$ tal que $\pi^t(x) = \pi(x,t)$. A aplicação π^t é chamada **ação**.

Teorema 1.1. *A aplicação π^{-t} definida por*

$$\pi^{-t}(x) = \pi(x, -t)$$

é o inverso da aplicação π^t.

Demonstração. De fato,

$$\pi^{-t} \circ \pi^t(x) = \pi^{-t}(\pi(x,t)) = \pi(\pi(x,t), -t) \overset{Axioma\ ii}{=} \pi(x, t-t) \overset{Axioma\ i}{=} \pi(x, 0) = x.$$

Da mesma maneira, $\pi^t \circ \pi^{-t}(x) = x$. □

Teorema 1.2. *A aplicação π^t é um homeomorfismo de E em E.*

Demonstração. Afirmações:

i) π^t é sobrejetora.

De fato, dado $x \in E$, $\pi^t(x, -t) = x$.

ii) π^t é injetora.

De fato, dados $x, y \in E$ e $t \in \mathbb{R}$ fixo, suponha que $\pi^t(x) = \pi^t(y)$. Aplicando π^{-t} em ambos os lados na última igualdade obtemos $\pi^{-t} \circ \pi^t(x) = \pi^{-t} \circ \pi^t(y)$, pelo Teorema 1.1, $x = y$.

Ainda, como π é contínua (Definição 1.1), π^t e π^{-t} são contínuas.

Portanto, π^t é um homeomorfismo de E em E.

□

Como consequência deste fato, segue que o sistema dinâmico $\mathfrak{F}$ é um grupo de um parâmetro, que para cada $t \in \mathbb{R}$ um homeomorfismo é definido. As transformações π^t formam um grupo, isto é, o conjunto $\{\pi^t\}$, $t \in \mathbb{R}$ é um grupo (abeliano) cuja operação é definida por

$$\pi^t \circ \pi^s = \pi^{t+s}.$$

1.2 Conceitos Elementares

Definição 1.2. *Para todo $x \in E$ fixo, a* ***órbita****, através de x é o conjunto*

$$\mathcal{O}(x) = \{\pi(x,t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{O}^+(x) = \{\pi(x,t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ e $\mathcal{O}^-(x) = \{\pi(x,t) : t \in \mathbb{R}^-\}$ são chamados ***semi-órbita de x positiva e negativa****, respectivamente.*

Podemos dizer que o movimento π_x sobre o ponto $x \in E$ é o local de $\pi(x,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, parametrizado por t. O movimento pode ser visto como a "lei" que $\pi(x,t)$ segue para mover-se em $\mathcal{O}(x)$. Para compreendermos melhor a diferença básica entre o conceito de trajetória $\mathcal{O}(x)$ e movimento π_x, podemos pensar em $\mathcal{O}(x)$ como o "trilho" que um ponto x se move ao seguir a "lei" π_x.

Definição 1.3. *Um ponto $x \in E$ que possui a propriedade*

$$\mathcal{O}(x) = \{x\}$$

é chamado ***ponto crítico****.*

Definição 1.4. *Um ponto $x \in E$ cujo movimento π_x tem a propriedade*

$$\pi_x(t) = x(t) = x, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

também é chamado um ***ponto crítico****.*

Pontos críticos são pontos fixados pela aplicação $\pi^t : E \to E$. Observe que a Definição 1.3 define ponto crítico como um tipo particular de trajetória.

Vejamos agora algumas propriedades de pontos críticos.

Teorema 1.3. *Se para $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in E$ ocorre*

$$\{\pi(x,t) : t \in [a,b]\} = \{x\},$$

x é um ponto crítico.

Teorema 1.4. *O conjunto de todos os pontos críticos é fechado.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{C}$ o conjunto dos pontos críticos. Considere $\{x_n\}$ uma sequência em $\mathfrak{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$. Vejamos que $\overline{x} \in \mathfrak{C}$.

Sendo $x_n \in \mathfrak{C}, \forall n$ segue,

$$\{\pi(x_n,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{x_n\} \;\Leftrightarrow\; \pi(x_n,t) = x_n, \;\forall t \in \mathbb{R}.$$

Daí

$$\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \pi(x_n,t) \overset{\pi \text{ é contínua}}{=} \pi(\overline{x},t), \;\forall t \in \mathbb{R}.$$

Da Definição 1.4 segue que $\overline{x}$ é um ponto crítico, resultando que $\mathfrak{C}$ é um conjunto fechado. □

Definição 1.5. *Seja M um conjunto não vazio de E, $x \in E$ e $\delta > 0$. O conjunto $S(M, \delta)$ é definido por*

$$S(M, \delta) = \{x \in E : d(x, M) < \delta\},$$

onde $d(x, M) = inf\{d(x, y) : y \in M\}$ e $d(x, y)$ é a distância euclidiana entre x e y.

Teorema 1.5. *Se para todo $\epsilon > 0$ existe pelo menos um $y \in S(x, \epsilon)$ tal que, ou $\mathcal{O}^+(y) \subset S(x, \epsilon)$ ou $\mathcal{O}^-(y) \subset S(x, \epsilon)$, então x é um ponto crítico.*

Corolário 1.1. *Para $x, y \in E$, se $\lim_{t\to\infty} \pi(y, t) = x$, então x é um ponto crítico.*

Demonstração. Temos $\lim_{t\to+\infty} \pi(y, t) = x$, daí

$$\forall \epsilon > 0,\ \pi(y, t) \in B(x, \epsilon),\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Consequentemente, $\mathcal{O}^+(y) \subset S(x, \epsilon)$. Então, pelo Teorema1.5 x é um ponto crítico. □

Teorema 1.6. *Nenhum movimento atinge um ponto crítico dentro de um valor finito de t.*

Demonstração. Seja x um ponto crítico. Suponha, por absurdo, que x é alcançado por um valor finito de tempo, isto é, existem $\tau \in \mathbb{R}$ e $y \in E$, $y \neq x$, tais que, $\pi(y, \tau) = x = \pi(x, 0)$. Assim,

$$y = \pi(y, 0) = \pi(y, \tau - \tau) = \pi(\pi(y, \tau), -\tau) = \pi(\pi(x, 0), -\tau) = \pi(x, -\tau).$$

Isto é, está ocorrendo um deslocamento de x, o que é uma contradição, uma vez que x é um ponto crítico. □

Definição 1.6. *Um movimento que para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $\tau \neq 0$ satisfaz a condição*

$$\pi_x(t + \tau) = \pi_x(t) \tag{1.1}$$

*é chamado **movimento periódico**.*

Pelo axioma *ii*) da Definição 1.1 (de sistemas dinâmicos) segue da Definição 1.6 que para todo inteiro n,

$$\pi_x(t + n\tau) = \pi_x(t).$$

O menor número positivo τ satisfazendo a Definição 1.6 é chamado o **período do movimento periódico** π_x. Se o movimento periódico não possui tal menor período τ, então π_x define um ponto crítico.

Teorema 1.7. *Se existe pelo menos um $s \in \mathbb{R}$ e um $\tau \neq 0, \tau \in \mathbb{R}$, tal que,*

$$\pi_x(s+\tau) = \pi_x(s), \tag{1.2}$$

então π_x é periódico.

Demonstração. Note que a igualdade (1.2) vale para pelo menos um $s \in \mathbb{R}$, enquanto a igualdade (1.1) requer que valha para todo $t \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que (1.2) $\Rightarrow$ (1.1). Para qualquer $t' \in \mathbb{R}$ temos,

$$\pi(x, s+t') = \pi(\pi(x,s), t') \overset{(1.2)}{=} \pi(\pi(x, s+\tau), t') = \pi(x, s+\tau+t').$$

Assim, se tomarmos $t = t' + s$ temos $\pi(x,t) = \pi(x, t+\tau)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, que caracteriza um movimento periódico. □

Corolário 1.2. *Se $\{\pi(x,t) : t \in [a,b]\} = \{x\}, a < b, x$ é um ponto crítico.*

Demonstração. Pelo fato de $\{\pi(x,t) : t \in [a,b]\} = \{x\}$ temos $\pi(x,t) = x$ para todo $t \in [a,b]$. Em particular, $\pi(x,a) = x$, pelo Teorema 1.7, segue que π_x é periódico.

Seja $\tau \in \mathbb{R}$ tal que, $0 \leq \tau \leq b-a \Rightarrow a \leq a+\tau \leq b$. Nestas condições $\pi(x, a+\tau) = x$ para todo $\tau \in [0, b-a]$, o que implica x ser periódico de período $\tau \in [0, b-a]$. Daí, concluímos que x é ponto crítico, pois se não fosse, existiria um período mínimo tal que $\pi(x, a+\tau) \neq x$, o que é uma contradição. □

Teorema 1.8. *O conjunto de todas as órbitas periódicas com período $\tau \in [0,T]$, $T \in \mathbb{R}^+$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja $\{\pi(x_n, t) : t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de órbitas periódicas de período τ. Suponha que $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n, t) = \pi(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\mathcal{O}(x)$ é uma órbita periódica de período τ. Isto é simples de ver, uma vez que $\pi(x_n, t) = \pi(x_n, t+\tau)$ e

$$\pi(x,t) = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n, t) = \lim_{n\to\infty} \pi(x_n, t+\tau) = \pi(x, t+\tau).$$

□

Observação 1.1. *É possível mostrar que uma trajetória associada com um movimento periódico é fechada e limitada.*

Se $x \in E$ não é um ponto crítico e $\mathcal{O}(x)$ não é uma órbita periódica, então para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, os segmentos da trajetória $\{\pi(x,t), t \in [a,b]\}$ são arcos (imagens homeomorfas de segmentos). No caso que $\mathcal{O}(x)$ é uma órbita periódica, $\{\pi(x,t), t \in [a,b]\}$ é ainda um arco para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com, $a < b$ e $(b-a) < \tau$, onde τ é o período.

Definição 1.7. *O conjunto $M \subset E$ é chamado* ***invariante*** *se sobre toda transformação do grupo $\{\pi^t\}$, M é levado em si mesmo. Isto é, se para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\pi^t(M) = M.$$

Analogamente, definimos o conjunto $M \subseteq E$ invariante positivo e negativo como o conjunto que possui a propriedade $\pi(M, \mathbb{R}^+) = M$ e $\pi(M, \mathbb{R}^-) = M$, respectivamente. Conjuntos que são invariantes positivos ou negativos algumas vezes serão chamados de semi-invariantes.

Teorema 1.9. *Seja $M \subset E$ um conjunto. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M é invariante (em relação a $\mathfrak{F}$);*
2. *$\mathcal{O}(x) \subseteq M$, para todo $x \in M$;*
3. *$\pi_x(\mathbb{R}) \subseteq M$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: Seja $M \subset E$ um conjunto invariante. Dado $x \in M$, temos $\pi(x,t) \overset{(✠)}{=} \overline{x} \in M$, para todo $x \in M$. Considere $y \in \mathcal{O}(x)$, então $y = \pi(x,t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Mas, por (✠) temos $y = \pi(x,t) = \overline{x} \in M$. Logo, $\mathcal{O}(x) \subseteq M$.

Que $1 \Leftrightarrow 2$ é imediato, pois

$$\mathcal{O}(x) = \{\pi(x,t) : t \in \mathbb{R}\} = \pi_x(\mathbb{R}), \text{ para todo } x \in M.$$

$3 \Rightarrow 1$: Por hipótese temos $\pi^t(M) \subseteq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular, para $-t \in \mathbb{R}$. Sendo assim,

$$\pi^{-t}(M) \subseteq M \;\Rightarrow\; \pi^t(\pi^{-t}(M)) \subseteq \pi^t(M) \;\Rightarrow M \subseteq \pi^t(M).$$

Logo, como $t \in \mathbb{R}$ é arbitrário, $\pi^t(M) = M$, para todo $t \in \mathbb{R}$, provando que M é um conjunto invariante (com relação a $\mathfrak{F}$). □

Assim, se um ponto x pertence ao conjunto invariante M, então $\mathcal{O}(x) \subset M$. Isto é equivalente a dizer que conjuntos invariantes consistem de trajetórias completas.

Teorema 1.10. *Se um conjunto $M \subset E$ é invariante, então ambos, a fronteira (∂M) e seu interior ($\operatorname{int} M$) são invariantes.*

Para demonstrar o Teorema 1.10 serão necessários os seguintes lemas:

Lema 1.1. *Se os conjuntos $M_i \subset E$, $(i = 1, \cdots, n)$ são invariantes então os conjuntos $\bigcup_i M_i$, $\bigcap_i M_i$ e $M_j \backslash M_i$, $(j = 1, \cdots, n)$ são invariantes.*

Demonstração. Que $\bigcup_i M_i$ é invariante é fácil, pois dado $x \in \bigcup_i M_i$, temos $x \in M_i$, para algum $i = 1, ..., n$. Como M_i é invariante, temos $\mathcal{O}(x) \subseteq M_i \subseteq \bigcup_i M_i$. Agora, seja $x \in \bigcap_i M_i$. Então $x \in M_i$, para todo $i = 1, ..., n$. Como cada M_i é invariante, temos $\mathcal{O}(x) \subseteq M_i$, para todo $i = 1, ..., n$. Logo, $\mathcal{O}(x) \subseteq \bigcap_i M_i$. Finalmente, se $M_j \backslash M_i$ não fosse invariante, existiriam um $t \in \mathbb{R}$ e um $x \in M_j \backslash M_i$ tais que, $\pi(x,t) = y \in M_i$. Como M_i é invariante, temos $x = \pi(y, -t) \in M$, contradição! Logo $M_j \backslash M_i$ é invariante. □

Lema 1.2. *Se o conjunto $M \subset E$ é invariante, então seu fecho é invariante.*

Demonstração. Seja $\{x_n : x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência tal que, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Então $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n, t) \overset{\pi \text{ é contínua}}{=} \pi(x,t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como M é invariante, temos $\pi^t(M) = M$. Daí, $\pi(x,t) \in M$. De onde vem que, $\pi(x,t) \in \overline{M}$. Assim, como $x \in \overline{M}$ e $\pi(x,t) \in \overline{M}$ segue que $\overline{M}$ é invariante. □

Demonstração. **(Do Teorema 1.10):** Seja M um conjunto invariante.

Afirmação: $C(M) = E \backslash M$ é invariante. De fato, seja $x \in C(M)$. Suponha que $\mathcal{O}(x) \subsetneq C(M)$, então $\mathcal{O}(x) \subseteq M$. Daí, $x \in M$. Contradição! Logo, $\mathcal{O}(x) \subseteq C(M)$, consequentemente, $C(M)$ é invariante. Pelo Lema 1.2, segue que $\overline{M}$ e $C(\overline{M})$ são invariantes. E, pelo Lema 1.1, segue que $\partial M = \overline{M} \cap C(\overline{M})$ e $int(M) = \overline{M} \backslash \partial M$ são invariantes. □

Teorema 1.11. ***(Teorema da Alfândega)*** *Sejam C, X subconjuntos de um espaço métrico E. Se C é conexo e tem pontos em comum com X e $E \backslash X$, então algum ponto de C pertence à fronteira de X.*

Demonstração. As hipóteses $C \cap X \neq \emptyset$ e $C \cap (E \backslash X) \neq \emptyset$ significam que o subconjunto $C \cap X$ do espaço métrico conexo C não é vazio nem é o espaço C inteiro, pois, se $C \cap X = C$, como $X \neq \emptyset$ teríamos $X = C \Rightarrow X \cap (E \backslash X) \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Logo, existe algum ponto c pertencente à fronteira de $C \cap X$ no subespaço C. Mostraremos agora que c também pertence à fronteira de X em M. De fato, para todo $\epsilon > 0$, existem $s \in C \cap X \subset X$ com $d(c,s) < \epsilon$ e $t \in C \backslash (C \cap X) = C \backslash X \subset E \backslash X$ com $d(c,t) < \epsilon$. □

Lema 1.3. *Seja $M \subset E$. Se existem $x \in intM$ e $s \in \mathbb{R}$ tais que $\pi(x,s) \notin intM$, então existe $\tau \in \mathbb{R}$ com $\pi(x,\tau) \in \partial M$.*

Demonstração. Seja $x \in intM = X$ tal que existe $s \in \mathbb{R}$ com $y = \pi(x,s) \notin X$. Sabemos que a aplicação π_x é contínua. Logo, a imagem do intervalo $[0,s]$ por π_x é um conjunto conexo, que chamaremos de C. Como $\pi_x(0) = x$ e $\pi_x(s) = y$ temos $x \in C \cap X$ e $y \in C \cap (E \backslash X)$. Daí, pelo Teorema 1.11, existe $z \in C \cap \partial X = \partial M$. Logo, existe $\tau \in [0,s]$ tal que $\pi(x,\tau) = z \in \partial M$. □

Lema 1.4. *Seja $M \subset E$. Se ∂M é invariante, então $intM$ é invariante.*

Demonstração. Seja $x \in \text{int}M$. Suponha que $\text{int}M$ não seja invariante. Então existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x, \tau) = y \in \partial M$. Por outro lado, como ∂M é invariante temos $\pi(y, t) \in \partial M$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular para $t = -\tau$, daí

$$\pi(y, -\tau) = \pi(\pi(x, \tau), -\tau) = x \in \partial M.$$

Contradição! Portanto, $\text{int}M$ é invariante. □

Corolário 1.3. ***(Do Teorema 1.10)***

Seja $M \subset E$. Se ∂M é invariante, então $\overline{M}$ é invariante. Se M é ou fechado ou aberto e ∂M é invariante, então M é invariante.

Demonstração. Como ∂M é invariante, segue pelo lema acima que $\text{int}M$ é invariante. Como $\overline{M} = intM \cup \partial M$, segue pelo Lema 1.1 que $\overline{M}$ é invariante.

Se M é fechado, temos $M = \overline{M}$, segue pelo que acabamos de ver que M é invariante.

Se M é aberto, temos $M = intM$. Como $\text{int}M$ é invariante, segue que M é invariante. □

O próximo teorema é uma versão mais fraca do Teorema 1.10 onde são considerados conjuntos semi-invariantes.

Teorema 1.12. *Se $M \subset E$ é um conjunto invariante positivo (negativo), então ambos, $intM$ e $\overline{M}$ são conjuntos invariantes positivos (negativos).*

Observe que se M é invariante positivo, mas não é invariante, sua fronteira, ∂M, não preserva necessariante a mesma propriedade de invariância como o faz o interior de M.

Teorema 1.13. *Nenhum conjunto invariante $M \subset E$ é atingido por um ponto $x \notin M$ num tempo finito.*

Introduziremos agora uma subclasse importante dos conjuntos invariantes: Os conjuntos minimais.

Definição 1.8. *Um conjunto $Q \subseteq E$ é chamado* ***minimal*** *se é não vazio, fechado, invariante e não possui nenhum subconjunto próprio com essas três propriedades.*

Exemplo 1.1. ***(de Conjuntos minimais)*** *Os exemplos triviais de conjuntos minimais são pontos críticos e trajetórias compactas que não contenham pontos críticos.*

O interesse por conjuntos minimais compactos é justificado a seguir:

Teorema 1.14. *Todo conjunto invariante, não vazio, compacto $M \subset E$ contém algum conjunto minimal.*

Teorema 1.15. *Um conjunto $M \subset E$ é minimal se, e somente se, para cada $x \in M$, $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$.*

1.3 Conjuntos Limites das Trajetórias

Nesta seção introduzimos o conceito de conjunto limite de uma trajetória. Este conceito foi inicialmente estudado por Henry Poincaré na última metade do século XIX (ver [3]). Através dos conjuntos limites é possível resolver problemas de equações diferenciais a partir de problemas topológicos. Sendo possível, em muitas vezes, entender o comportamento da equação diferencial sem efetivamente encontrar a solução.

Definição 1.9. *Diz-se que $y \in E$ é um* ***ponto omega limite*** *de $x \in E$ se existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, quando $t_n \to +\infty$*

$$\pi(x, t_n) \to y.$$

O conjunto de todos os pontos omega limite de $x \in E$ será chamado de **conjunto omega limite** de x e denotado por $\omega(x)$. Isto é,

$$\omega(x) = \{y \in E : \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tal que, } t_n \to +\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \to y\}. \tag{1.3}$$

O conjunto de todos os pontos omega limite de todos os pontos $x \in B \subset E$ será chamado conjunto omega limite de B e denotado por $\omega(B)$. Isto é,

$$\omega(B) = \bigcup \{\omega(x) : x \in B\}.$$

Analogamente é definido o **conjunto dos pontos alfa limite** de um ponto $x \in E$ como:

$$\alpha(x) = \{y \in E : \exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}^- \text{ tal que, } t_n \to -\infty \text{ e } \pi(x, t_n) \to y\}.$$

Ainda, o conjunto alfa limite de um conjunto $B \subset E$ pode ser definido como

$$\alpha(B) = \bigcup \{\alpha(x) : x \in B\}.$$

Observação 1.2. *Se um ponto $x \in E$ possui um ponto limite y, este ponto limite é comum a todos os pontos de $\mathcal{O}(x)$. Isto é, todos os pontos da órbita de x possuirão ponto limite, que por sua vez coincidem com y.*

Um ponto limite pode ser considerado tanto como uma propriedade do movimento π_x definido por x, como uma propriedade da trajetória correspondente.

Exemplo 1.2. ***(de conjunto limite)*** *Na Figura 1.1 os conjuntos ω e α limite de qualquer ponto coincidem. Na verdade, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$ os conjuntos $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são o círculo centrado na origem que passa por x.*

Em todos os teoremas a seguir, os resultados obtidos para o conjunto ω também são válidos (com as alteração necessárias) para o caso do conjunto α.

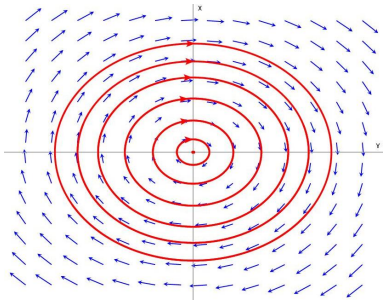

Figura 1.1: Exemplo de conjuntos ω e α limite

Proposição 1.1. *Se $q \in \omega(p)$ então $\omega(q) \subset \omega(p)$.*

Demonstração. Sejam $q \in \omega(p)$ e $r \in \omega(q)$. Então existem seguências $\{t_n\}, \{\tau_n\}$ tais que

$$\pi(p, t_n) \to q \ \ e \ \ \pi(q, \tau_n) \to r,$$

quando $t_n \to \infty$ e $\tau_n \to \infty$ respectivamente.

Considere a sequência $\xi_n = t_n + \tau_n$. Então,

$$\pi(p, \xi_n) = \pi(\pi(p, t_n), \tau_n) \to r,$$

quando $\xi_n \to \infty$. Isto é, $r \in \omega(p)$. Portanto $\omega(q) \subset \omega(p)$. □

Teorema 1.16. *Para todo $x \in E$:*

i) *$\omega(x)$ é fechado e invariante;*

ii) $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = \mathcal{O}^+(x) \cup \omega(x)$;

Demonstração. **i)** Dado $y \in \omega(x)$, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, quando $n \to \infty$, $t_n \to \infty$ e $\pi(x, t_n) \to y$. Note que

$$\pi(x, t + t_n) = \pi(\pi(x, t_n), t) \to \pi(y, t), \ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Portanto, $\pi(y, t) \in \omega(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e $\omega(x)$ é positivamente invariante. Da mesma maneira verifica-se que $\omega(x)$ é negativamente invariante.

Seja $\{y_n\}$, com $y_n \in \omega(x)$ tal que $y_n \to y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $t_n > n$ e $|\pi(x, t_n) - y_n| < \dfrac{1}{n}$.

Note que $\pi(x, t_n) = (\pi(x, t_n) - y_n) + y_n \to y$ quando $n \to \infty$. Portanto, $y \in \omega(x)$ e $\omega(x)$ é fechado.

ii) Que $(\mathcal{O}^+(x) \cup \omega(x)) \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}$ é imediato.

Agora, dado $y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)}$, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, $\pi(x, t_n) \overset{t_n \to \infty}{\longrightarrow} y$, daí $y \in \omega(x)$.

Por outro lado, $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = \mathcal{O}^+(x) \cup \partial\mathcal{O}^+(x)$. Logo, se $y \notin \partial\mathcal{O}^+(x)$, segue que $y \in \mathcal{O}^+(x)$. Portanto, $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset \mathcal{O}^+(x) \cup \omega(x)$.

□

Teorema 1.17. *Se $x \in E$ e $\omega(x)$ é compacto, $\overline{\mathcal{O}^+(x)}$ é compacta.*

O teorema a seguir traz uma relação entre órbita e conjunto omega limite (compacto).

Teorema 1.18. *Se $x \in E$ e $\omega(x)$ é compacto e não vazio, então*

$$\lim_{t \to +\infty} d[\mathcal{O}^+(x), \omega(x)] = 0. \tag{1.4}$$

Demonstração. Suponha que (1.4) não aconteceça. Então, existem $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\delta > 0$ tais que,

$$d(\mathcal{O}^+(x), \omega(x)) > \delta \text{ quando } t_n \to \infty. \tag{1.5}$$

Note que a sequência $\{\pi(x, t_n)\} \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}$, que por sua vez é compacta (pelo Teorema 1.17). Logo,

$$\pi(x, t_n) \overset{t_n \to \infty}{\longrightarrow} y \in \omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}^+(x)}. \tag{1.6}$$

Mas, por (1.5) $d(\mathcal{O}^+(x), \omega(x)) > \delta$ quando $t_n \to \infty$, o que contradiz (1.6). Com esta contradição concluímos a demonstração. □

O próximo teorema traz as propriedades de conjuntos limites de órbitas periódicas e conjuntos minimais em geral.

Teorema 1.19. *Se para $x \in E$, π_x define um movimento periódico, então*

$$\omega(x) = \alpha(x) = \mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Demonstração. Como o movimento é periódico, segue do Teorema 1.8 que $\mathcal{O}(x)$ é um conjunto fechado, daí $\mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}$. Suponha que o período seja τ. Dado $y \in \mathcal{O}(x)$, existe t_0 tal que, $y = \pi(x, t_0) = \pi(x, t_0 + n\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Ainda, como $\lim_{n \to \infty} (t_0 \pm n\tau) = \pm\infty$, segue que $\lim_{n \to \infty} \pi(x, t_0 + n\tau) = y$. Logo, $y \in \omega(x)$ e $y \in \alpha(x)$. Concluímos que,

$$\mathcal{O}(x) \subset \omega(x) \text{ e } \mathcal{O} \subset \alpha(x).$$

Agora, dado $z \in \omega(x)$, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que,

$$\pi(x, t_n) \longrightarrow z, \text{ quando, } t_n \to \infty. \tag{1.7}$$

Considere cada $t_n = k\tau + t'_n$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq t'_n < \tau$. Da forma que foi definida, $\{t'_n\}$ é uma sequência limitada, portanto possui subsequência convergente. Suponha $t'_n \to \tau_0$. Então,

$$\pi(x, t_n) = \pi(x, k\tau + t'_n) \longrightarrow \pi(x, k\tau + \tau_0) = \pi(x, \tau_0) \text{ quando, } t_n \to \infty. \tag{1.8}$$

Pela unicidade dos limites (1.7) e (1.8) seque que $z = \pi(x, \tau_0) \in \mathcal{O}(x)$. Portanto,

$$\omega(x) \subset \mathcal{O}(x).$$

Analogamente, $\alpha(x) \subset \mathcal{O}(x)$. □

Teorema 1.20. *Seja $x \in E$ tal que $\omega(x) = \alpha(x) = \emptyset$, então $\mathcal{O}(x)$ é minimal.*

Demonstração. Note que $\mathcal{O}(x)$ não contém qualquer subconjunto próprio invariante.

Evidentemente $\mathcal{O}(x) \neq \emptyset$, pois $x = \pi(x, 0) \in \mathcal{O}(x)$.

A fim de que $\mathcal{O}(x)$ seja minimal devemos ter $\mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}$. Para isto considere a sequência $\{\pi(x, t_n)\}$. Suponha que

$$\pi(x, t_n) \longrightarrow y. \tag{1.9}$$

A sequência $\{t_n\}$ necessariamente é limitada, caso contrário, $y \in \omega(x) \cup \alpha(x)$, o que é um absurdo. Logo $\{t_n\}$ possui subsequência convergente. Suponha $t_n \to \tau_0$. Então

$$\pi(x, t_n) \longrightarrow \pi(x, \tau_0). \tag{1.10}$$

Pela unicidade dos limites (1.9) e (1.10), seque que $\pi(x, \tau_0) = y$. Portanto $y \in \mathcal{O}(x)$. Consequentemente $\mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}$. □

Teorema 1.21. *Se $x \in E$ não é um ponto crítico, então uma condição necessária e suficiente para $\mathcal{O}(x)$ ser periódica é que $\mathcal{O}(x) = \overline{\mathcal{O}(x)} = \omega(x) = \alpha(x)$.*

A classe de conjuntos minimais não compactos em E^2 contém somente um elemento, como traz o teorema a seguir:

Teorema 1.22. *Se o conjunto minimal $M \subset E^2$ não é compacto, então M consiste de uma única trajetória com conjuntos omega e alfa limite vazios.*

Em alguns casos pode ser importante distinguir o caminho pelo qual as trajetórias tendem ao conjunto limite. Isto pode ser feito pela introdução de trajetória assintótica.

Definição 1.10. *Uma trajetória $\mathcal{O}(x)$ é chamada* ***positivamente assintótica*** *se*

$$\mathcal{O}^+(x) \cap \omega(x) = \emptyset.$$

Do resultado (ii) do Teorema 1.16 segue em particular que

$$\omega(x) = \overline{\mathcal{O}^+(x)} \backslash \mathcal{O}^+(x).$$

Isto é, o conjunto omega limite consiste somente dos pontos que pertencem a fronteira de $\mathcal{O}^+(x)$.

1.4 Estabilidade em Sistemas Dinâmicos

Nesta seção preocuparemo-nos com o que pode ser chamado a "fisiologia" do sistema dinâmico, isto é, o estudo do comportamento, as relações e propriedades relativas dos elementos.

Definição 1.11. *Sejam $M \subset E$ um conjunto compacto e $B \subseteq E$ tal que para todo $x \in B$, $\omega(x) \neq \emptyset$ e $\omega(x) \subseteq M$. Então M é chamado um* ***atrator relativo a*** *B.*

O maior conjunto B será denotado por $A(M)$ e chamado de região de atração de M. Assim,

$$A(M) = \{x \in E : \omega(x) \neq \emptyset \text{ e } \omega(x) \subseteq M\}. \tag{1.11}$$

Se existe um $\delta > 0$ tal que $S(M, \delta) \subseteq A(M)$, então M é chamado um atrator. Se $A(M) = E$, então M é chamado um **atrator global**.

Se existe um $\delta > 0$ tal que, $x \in S(M, \delta)$ implica $\omega(x) \cap M \neq \emptyset$, então M é chamado **atrator fraco**. O conjunto

$$A_\omega(M) = \{x \in E : \omega(x) \neq \emptyset \text{ e } \omega(x) \cap M \neq \emptyset\}$$

é chamado **região de atração fraca**.

Se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $x \in S(M, \delta)$ implica que $\mathcal{O}^+(x) \subset S(M, \epsilon)$, M é chamado **estável**. Se um conjunto compacto não é estável, então ele é chamado **instável**.

Observação 1.3. *Se $M \subset E$ é um atrator, então*

$$\partial A(M) \cap \partial M = \emptyset.$$

Definição 1.12. *Seja $M \subset E$ um conjunto compacto. Então M é um* ***atrator negativo*** *se existe um $\delta > 0$ tal que $x \in S(M, \delta)$ implica que $\alpha(x) \neq \emptyset$ e $\alpha(x) \subseteq M$. A* ***região de atração negativa ou região de repulsão*** *$A^-(M)$ é definida similarmente à feita em (1.11).*

Estudaremos agora as propriedades básicas do conjunto $A(M)$.

Teorema 1.23. *Se $M \subset E$ é um atrator compacto, o conjunto $A(M) \backslash M$ é aberto.*

Teorema 1.24. *Seja $M \subset E$ um conjunto compacto. Então se M é um atrator, os conjuntos $A(M)$ e $\partial(A(M))$ são invariantes.*

Definição 1.13. *Seja $M \subset E$ um atrator compacto. Se existe um ponto $x \notin M$ tal que $\alpha(x) \cap M \neq \emptyset$, então o conjunto M será chamado um* ***atrator instável****.*

Definição 1.14. *Seja $M \subset E$ um conjunto atrator compacto positivamente invariante. O conjunto M será chamado um* ***conjunto atrator estável ou um conjunto atrator assintoticamente estável*** *se existe um $\eta > 0$ tal que $x \in S(M, \eta) \backslash M$ implica $\alpha(x) \cap M = \emptyset$.*

O conjunto $A(M)$ definido em (1.11) neste caso será chamado ***região de estabilidade assintótica*** *de M. Se $A(M) = E$, o conjunto M será chamado* ***globalmente assintoticamente estável****.*

Definição 1.15. *Seja $M \subset E$ um atrator negativo como na Definição 1.12, se existe um $\eta > 0$ tal que $x \in S(M, \eta) \backslash M$ implica que $\omega(x) \cap M = \emptyset$, M será dito ser* ***completamente instável (ou negativamente assintoticamente estável)****.*

Observação 1.4. *Invertendo a direção do movimento ao longo da trajetória, conjuntos que são completamente instáveis tornam-se assintoticamente estáveis e vice-versa.*

Teorema 1.25. *Se $M \subset E$ é fechado e estável, então M é positivamente invariante.*

Corolário 1.4. *Se um conjunto compacto $M \subset E$ é estável, então ele é positivamente invariante. Se além de estável, M é um atrator, então M é assintoticamente estável.*

O próximo teorema clarificará a estrutura de conjuntos assintoticamente estáveis e suas regiões de atração.

Teorema 1.26. *Se $M \subset E$ é um conjunto compacto minimal que é assintoticamente estável, então para todo $x \in A(M)$ o conjunto compacto $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset E$ é assintoticamente estável.*

Discutiremos agora algumas propriedades topológicas de atratores para fluxos.

Definição 1.16. *Diremos que um conjunto compacto $M \subset E$ tem* ***propriedade de estabilidade forte*** *se ele é ou assintoticamente estável ou completamente instável.*

Teorema 1.27. *Seja $M \subset E$ um conjunto minimal compacto que é um atrator global fraco. Então M é um ponto crítico.*

Corolário 1.5. *Seja $M \subset E$ um conjunto minimal com propriedades de estabilidade global fortes, então M é um ponto crítico.*

O teorema a seguir é uma generalização de um dos resultados principais da Teoria de Poincaré-Bendixon (o Teorema 1.38). Isto é claro quando notamos que uma trajetória periódica e seu interior formam um conjunto invariante homeomorfo ao disco unitário.

A prova de tal teorema é uma aplicação elementar do Teorema do ponto fixo de Brouwer e do seguinte lema.

Lema 1.5. *Sejam $M \subset X$ um conjunto compacto positivamente invariante e $\{\mathcal{O}_n\}$ uma sequência de trajetórias periódicas com período T_n, tal que $\mathcal{O}_n \subset M$ e $T_n \to 0$. Então M contém um ponto crítico.*

Teorema 1.28. *Seja $M \subset E$ um conjunto compacto positivamente invariante que é homeomorfo à bola unitária fechada em E. Então M contém um ponto crítico.*

Demonstração. Considere uma sequência de tempos positivos $\{\tau_n\}$ tal que $\tau_n \to 0$ e a sequência de aplicações $\{\pi_n\}$ definidas por,

$$\begin{aligned} \pi_n : \quad E &\to E \\ x &\mapsto \pi_n(x) = \pi(x, \tau_n). \end{aligned}$$

Como π é contínua, cada uma das aplicações π_n é contínua.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a restrição $\widetilde{\pi}_n = \pi_n\Big|_M$. Como M é positivamente invariante, cada $\widetilde{\pi}_n$ é uma aplicação de M em si mesmo.

Teorema 1.29. ***Teorema do Ponto Fixo de Brouwer:*** *Seja B a bola unitária fechada centrada na origem em E. Toda aplicação contínua $f : B \to B$ possui (pelo menos) um ponto fixo.*

Como M é homeomorfo à bola fechada unitária em E e cada $\widetilde{\pi}_n$ é contínua, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer segue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\pi}_n$ possui (pelo menos) um ponto fixo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $x_n \in M$ um ponto fixo de $\widetilde{\pi}_n$. Pela definição de π_n temos

$$x_n = \widetilde{\pi}_n(x_n) = \widetilde{\pi}(x_n, \tau_n).$$

Logo, pela definição de fluxo temos

$$\widetilde{\pi}(x_n, t) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\pi}(x_n, \tau_n), t) = \widetilde{\pi}(x_n, t + \tau_n), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, segue que $\mathcal{O}^+(x_n)$ é periódica.

Como M é positivamente invariante temos $\mathcal{O}^+(x_n) \subset M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo, pelo Lema 1.5, segue que M contém um ponto crítico. □

Corolário 1.6. *Sejam X um conjunto invariante compacto e $M \subset X$, $M \neq X$ um atrator fraco com $A_\omega(M) = X$. Então M não é estável.*

Finalizamos esta seção de estabilidade introduzindo o conceito de estabilidade no sentido de Poisson, que pode ser definida como propriedade das trajetórias de seus conjuntos limites.

Definição 1.17. *Um movimento π_x é chamado*

- ***positivamente estável no sentido de Poisson**, P^+-estável, se $x \in \omega(x)$,*
- ***negativamente estável no sentido de Poisson**, P^--estável, se $x \in \alpha(x)$,*
- ***estável no sentido de Poisson**, P-estável, se ambos $x \in \omega(x)$ e $x \in \alpha(x)$ acontecem.*

Observe que se x é P^+-estável ou P^--estável, pelo fato de sempre ocorrer $x \in \mathcal{O}(x)$, tem-se

$$\mathcal{O}(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset \ \ ou \ \ \mathcal{O}(x) \cap \alpha(x) \neq \emptyset.$$

Podemos então provar que

Teorema 1.30. *Se x é P^+-estável então,*

$$\alpha(x) \subset \omega(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Se x é P^--estável então

$$\omega(x) \subset \alpha(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

e se x é P-estável, então

$$\omega(x) = \alpha(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}.$$

Demonstração. Façamos algumas observações:

a) $\alpha(x) \subset \overline{\mathcal{O}^-(x)}$:

Seja $y \in \alpha(x)$. Então, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^-$ tal que, quando $t_n \to -\infty$, $\pi(x, t_n) \to y$. Logo, $y \in \overline{\mathcal{O}^-(x)}$.

b) $\overline{\mathcal{O}^-(x)} \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$ e $\overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$.

c) $\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \omega(x)$:

Seja $y \in \mathcal{O}(x)$, então existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x, t_0) = y$. Como x é P^+-estável, $x \in \omega(x)$. Daí, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$, tal que quando $t_n \to +\infty$, $\pi(x, t_n) \to x$.

Considere a sequência $\tau_n = t_n + t_0$. Temos

$$\pi(x, \tau_n) = \pi(x, t_n + t_0) = \pi(\pi(x, t_n), t_0) \to \pi(x, t_0) = y.$$

Logo, $y \in \omega(x)$. Como o conjunto $\omega(x)$ é fechado podemos concluir que

$$\overline{\mathcal{O}(x)} \subset \omega(x).$$

d) $\omega(x) \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$:

Seja $x \in \omega(x)$. Então existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, quanto $t_n \to +\infty$, $\pi(x, t_n) \to y$. Logo, $y \in \overline{\mathcal{O}^+(x)} \subset \overline{\mathcal{O}(x)}$.

Portanto, $\alpha(x) \subset \omega(x) = \overline{\mathcal{O}(x)}$.

O segundo item do teorema segue de forma análoga, sendo o último item apenas uma rápida conclusão dos itens anteriores. □

Teorema 1.31. *Um movimento π_x é P^+-estável se, e somente se, a trajetória $\mathcal{O}(x)$ não é positivamente assintótica.*

Demonstração. Se x é P^+-estável, então

$$x \in \omega(x) \Rightarrow \mathcal{O}(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{O}(x) \text{ não é positivamente assintótica.}$$

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{O}(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$ e considere $y \in \mathcal{O}(x) \cap \omega(x) \neq \emptyset$. Então existem $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\{t_n\} \in \mathbb{R}^+$ tais que $\pi(x, t_0) = y$ e $\pi(x, t_n) \to y$. Considere a sequência $\tau_n = t_n - t_0$, temos

$$\pi(x, \tau_n) = \pi(\pi(x, t_n), -t_0) \to \pi(y, -t_0) = x.$$

Portanto, $x \in \omega(x)$, isto é, x é P^+-estável. □

1.5 Resultados de Equações Diferenciais

Considere o sistema de equações diferenciais

$$x' = f(x), \tag{1.12}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Seja $x : J \to \mathbb{R}^n$ uma solução deste sistema em algum $J \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in J$,

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Geometricamente $x(t)$ é a curva em $\mathbb{R}^n$ cujo vetor tangente $x'(t)$ existe para todo $t \in J$ e coincide com $f(x(t))$. A aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ define um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$. Uma condição inicial para uma solução $x : J \to \mathbb{R}^n$ é uma condição da forma $x(t_0) = x_0$, onde $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para simplificar, quando for conveniente, usamos $t_0 = 0$.

O principal problema em equações diferenciais é encontrar a solução de qualquer problema de valor inicial, isto é, determinar a solução do sistema (1.12) que satisfaz a condição inicial $x(0) = x_0$ para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir diz que, se as soluções $x(t)$ e $y(t)$ começam perto, então elas devem permanecer perto para t próximo de t_0. Estas soluções podem distanciar uma da outra, mas isto não ocorre mais rápido do que de forma exponencial. Para mais detalhes dos teoremas a seguir veja a seção 7.3 de [6].

Teorema 1.32. *Considere a equação diferencial $x' = f(x)$ onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^1. Suponha que $x(t)$ é uma solução desta equação que está definida no intervalo fechado $[t_0, t_1]$ com $x(t_0) = x_0$. Então, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 e uma constante k tal que, se $y_0 \in U$, então existe uma única solução $y(t)$ também definida em $[t_0, t_1]$ com $y(t_0) = y_0$. Mais ainda, $y(t)$ satisfaz*

$$|y(t) - x(t)| \leq k|y_0 - x_0|e^{k(t-t_0)},$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Em particular, pelo Teorema 1.32, como o lado direito da desigualdade depende de $|y_0 - x_0|$, que podemos assumir pequeno, temos:

Corolário 1.7. ***(Dependência contínua das condições iniciais)*** *Seja $\varphi(x, t)$ o fluxo do sistema $x' = f(x)$, onde f é C^1. Então φ é uma função contínua de x.*

Equações diferenciais frequentemente dependem de parâmetros. Por isso, uma questão natural é como as soluções destas equações dependem destes parâmetros? Suponha que o sistema $x' = f_a(x)$ depende do parâmetro a de forma C^1. O teorema que apresentaremos agora usa o resultado sobre dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais para verificar que as soluções do sistema original $x' = f(x)$, dependem continuamente de a.

Teorema 1.33. ***(Dependência contínua dos parâmetros)*** *Seja $x' = f_a(x)$ um sistema de equações diferenciais no qual f_a é continuamente diferenciável em x e em a. Então o fluxo deste sistema depende continuamente de a.*

De encontro ao Teorema 1.33 vem um resultado que estará presente fortemente nas aplicações que estudaremos nos Capítulos 3 e 4. Em termos práticos, o resultado a seguir diz que as soluções de um sistema $x' = f(x, t)$ são invariantes no cone positivo. Considere por cone positivo de $\mathbb{R}^n$ o conjunto $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Proposição 1.2. *Suponha que f em $x' = f(x, t)$ tem a propriedade que soluções de problema de valores iniciais $x(t_0) = x_0 \geq 0$ são únicas e, para todo i, $f_i(t, x) \geq 0$ sempre que $x \geq 0$ satisfaz $x_i = 0$. Então $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$, no qual está definida, sendo $x(t_0) \geq 0$.*

Demonstração. Na condição forte: quando para cada i, temos $x_i = 0$ e $f_i(x, t) > 0$ para $x \geq 0$, segue que $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$.

Para resolver o caso geral faremos uma translação da função f, de modo que tenhamos a condição forte. Para $s > 0$, defina a família de funções

$$f_s(x, t) = f(x, t) + sv,$$

onde v é um vetor com todas as entradas iguais a 1. Podemos supor s de modo que f_s satisfaz a condição forte, e então soluções de $x' = f_s(x,t)$ que começam não negativas permanecem não negativas no futuro.

Como a solução de $x' = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0 \geq 0$ pode ser aproximada em qualquer $t \geq t_0$ fixo por soluções de problemas de valor inicial correspondentes para f_s, para $s > 0$ suficientemente pequeno, pela continuidade de soluções com respeito aos parâmetros, segue que $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$. □

O campo de vetores $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associado com um fluxo $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é definido por

$$f(x) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)\Big|_{t=0}. \tag{1.13}$$

Este campo de vetores é interessante porque o fluxo é uma solução da equação diferencial $x' = f(x)$, como é visto no seguinte

Lema 1.6. *Se $\varphi_t(x)$ é um fluxo, então ele é uma solução do problema de valor inicial*

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0)), \quad \varphi_0(x_0) = x_0,$$

para o campo de vetores definido em (1.13).

Agora, nem toda equação diferencial define um fluxo completo, pois as soluções não necessariamente existem para todo tempo. No entanto, se elas estão definidas para todo tempo, o fluxo é completo.

Garantir que uma solução de um campo de vetores possui intervalo maximal sendo o conjunto dos números reais pode se tornar uma tarefa um tanto quanto árdua. No entanto, dispomos de alguns resultados que sob certas condições a cerca do campo de vetores $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, asseguram que as soluções de $x' = f(x)$ estão definadas em toda a reta. São os seguintes resultados, onde estamos considerando:

Lema 1.7. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores C^1 tal que o problema de valor inicial*

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

tem uma solução $u(t, x_0) \in U$, que existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x_0 \in U$. Então $\varphi_t(x_0) = u(t, x_0)$ é um fluxo completo.

Para as demonstrações dos Lema 1.6 e Lema 1.7 veja a Seção 4.2 de [12].

Teorema 1.34. ***(Existência Global Limitada)*** *Se f é localmente Lipschitz e limitada, então as soluções de (**??**) definem um fluxo completo.*

Teorema 1.35. *Se $f(x)$ é localmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n$, então (**??**) é equivalente a*

$$\frac{dy}{d\tau} = F(y) = \frac{f(y)}{1 + |f(y)|}$$

com uma reparametrização do tempo. O campo de vetores F define um fluxo em $\mathbb{R}^n$ que é Lipschitz e limitado.

Teorema 1.36. ***(Existência Global Lipschitz)*** *Suponha que $f(x)$ é globalmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n$. Então as soluções de $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ existem para todo tempo e portanto definem um fluxo.*

Para verificar as demonstrações dos Teorema 1.34, Teorema 1.35 e Teorema 1.36 consulte a Seção 4.3 de [12].

Os resultados desta seção nos dão liberdade para aplicar as propriedades do fluxo $\mathfrak{F} = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \pi)$ às soluções do sistema $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$. Por isso, quando for necessário, trabalharemos com uma solução de $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ utilizando as propriedades do fluxo π vistas nas seções anteriores.

Introduziremos agora a definição de um sistema de equações diferenciais do tipo Kolmogorov, na qual se configuram os sistemas estudados nas aplicações dos Capítulos 3 e 4.

Definição 1.18. *Um sistema de equações diferenciais da forma*

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i f_i(x,t), \;\; x_i \geq 0, \;\; 1 \leq i \leq n, \\ x &= (x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

*é chamado de **sistema Kolmogorov.***

Observação 1.5. *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$x' = F(x), \tag{1.14}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores de classe C^1. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ o fluxo gerado pelo campo F. Dado um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que E é invariante por ϕ se para qualquer $x_0 \in E$ tem-se $\phi(x_o, t) \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\phi_{x_0}(t)$ é a curva em $\mathbb{R}^n$ cujo vetor tangente $\phi'_{x_0}(t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e coincide com $F(\phi_{x_0}(t))$, dizemos que E é invariante por ϕ sempre que F é tangente a E, isto é, sempre que $\phi_{x_0}(t)$ é solução de (1.14) para todo $x_0 \in E$.

Trabalhar com um sistema de equações diferenciais do tipo Kolmogorov apresenta algumas vantagens, dentre elas destaca-se a seguinte proposição, que será requisitada algumas vezes neste texto.

Proposição 1.3. *Para um sistema de equações diferenciais do tipo Kolmogorov em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$, os semi-eixos e as faces positivas são invariantes pelo fluxo gerado por este sistema.*

Demonstração. Faremos a demonstração para $\mathbb{R}^3$, o caso $\mathbb{R}^2$ é análogo.

Considere o campo de vetores $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3_+$ dado por

$$F(x, y, z) = (xf_1(x, y, z), yf_2(x, y, z), zf_3(x, y, z)),$$

onde $f_i : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, 2, 3$ são funções de classe C^1 e o conjunto $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0\}$. Seja $\phi : \mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3_+$ o fluxo gerado pelo campo F. Note que $F\Big|_E$ é dado por

$$F(0, 0, z) = (0, 0, zf_3(0, 0, z)).$$

Então, $F\Big|_E$ é tangente ao conjunto E, pois o vetor tangente a uma reta (em qualquer ponto) é a própria reta (neste caso, o eixo z). Pela Observação 1.5 isto significa que o semi-eixo positivo z é invariante por ϕ. O mesmo vale para os demais semi-eixos positivos.

Seja M a face não negativa do plano xy. Note que a face positiva do plano xy é $intM$ e $\partial M =$semi-eixo$x\cup$semi-eixo$y$. Como o semi-eixo x e o semi-eixo y são invariantes por ϕ, segue pelo Lema 1.1 que semi-eixo$x\cup$semi-eixo$y$ é invariante por ϕ. Portanto ∂M é invariante por ϕ, o que pelo Lema 1.4 garante que $intM$ é invariante por ϕ, por conseguinte, a face positiva do plano xy é invariante por ϕ. Da mesma maneira, mostra-se que as faces positivas dos planos xz e yz são invariantes por ϕ.

□

Enunciaremos agora dois resultados clássicos decorrentes da Teoria de Poincaré-Bendixson que serão úteis na demonstração do Teorema 3.2. É interessante ressaltar que estes resultados são válidos para sistemas de dimensão 2. Tais resultados garantem (sob certas condições) a existência de órbitas periódicas e pontos críticos.

Teorema 1.37. ***(Tricotomia de Poincaré-Bendixson)*** *Seja $\mathcal{O}^+(y_0)$ uma órbita positiva de (1.12) que permanece num subconjunto $K \subset \mathbb{R}^2$ fechado e limitado e suponha que K possui um número finito de pontos críticos. Então uma das seguintes afirmações acontece:*

a) *$\omega(y_0)$ é um ponto crítico;*

b) *$\omega(y_0)$ é uma órbita periódica;*

c) *$\omega(y_0)$ contém um número finito de pontos críticos e semi-órbitas cujos conjuntos omega e alfa limite consistem de um desses pontos críticos para cada semi-órbita.*

Teorema 1.38. *Se $\mathcal{O}$ é uma órbita fechada tal que seu interior está contido num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, então existe um ponto crítico contido em $int\mathcal{O}$.*

De encontro a esses dois últimos teoremas apresentamos um teorema que fala sobre a não existência de órbitas periódicas.

Antes de enunciarmos o próximo teorema é necessário estabelecer a seguinte definição.

Definição 1.19. *Seja $x' = f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, f definida num subconjunto conexo G de $\mathbb{R}^2$. Uma função positiva B em G tal que o campo de vetores Bf possui divergente positivo (ou negativo) em todo ponto é chamada* ***Função de Dulac****, sendo o divergente de f dado por $div f = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$.*

Teorema 1.39. *Suponha que D é um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$. Se a expressão $div(f,g) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} > 0$ em D, então não há órbitas periódicas do sistema*

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (f(x,y), g(x,y)) \,. \tag{1.15}$$

O resultado também vale se $div(f,g) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} < 0$ em D.

Demonstração. Veja página 32 de [8]. □

Capítulo 2

O Lema de Butler-McGehee

Com origem na década de 1980, o Lema de Butler-McGehee constitui-se de uma poderosa ferramenta para análise do comportamento da região de atração de um conjunto compacto invariante isolado. Num contexto hiperbólico o Lema de Butler-McGehee ajuda o Teorema da Variedade Estável a obter mais informações sobre o comportamento das órbitas próximo de um ponto crítico hiperbólico. Ainda, o Lema de Butler-McGehee traz um resultado análogo ao Teorema da Variedade Estável (no sentido de indicar elementos que estão na região de atração) para os conjuntos estável e instável, sem assumir que o conjunto invariante tenha estrutura hiperbólica.

Neste capítulo apresentaremos três versões do Lema de Butler-McGehee, sendo que demonstraremos a primeira versão dada por Butler e Waltman em 1986 em [2]. Mostraremos que as outras versões dadas por [14] e [13] são decorrentes da primeira versão, observando que demonstraremos a versão dada em [13] para um caso particular.

2.1 Lema de Butler-McGehee (Butler e Waltman, 1986)

Para as definições básicas e resultados considere um fluxo $\mathfrak{F} = (E, \mathbb{R}, \pi)$, onde E é um subconjunto fechado de um espaço métrico localmente compacto.

Definição 2.1. *Um subconjunto não vazio M de E, invariante por $\mathfrak{F}$, é chamado um* ***conjunto invariante isolado*** *se ele é o conjunto invariante maximal em alguma vizinhança, isto é, é o maior conjunto invariante desta vizinhança. A vizinhança é chamada uma* ***vizinhança isolante****.*

Definição 2.2. *Os* ***conjuntos estável e instável*** *de um conjunto invariante isolado M são definidos respectivamente, por*

$$W^+(M) = \{x \in E : \omega(x) \neq \emptyset, \omega(x) \subset M\},$$

e

$$W^-(M) = \{x \in E : \alpha(x) \neq \emptyset, \alpha(x) \subset M\}.$$

Note que os conjunto estável e instável definidos acima coincidem com a região de atração e região de repulsão, respectivamente, dadas no início da Seção 1.4

Proposição 2.1. *Seja $M \subset E$ um conjunto compacto. Se $W^+(M) \neq \emptyset$ então o conjunto $W^+(M)$ é invariante.*

Demonstração. Seja $x \in W^+(M)$. Então $x \in E$, $\omega(x) \neq \emptyset$ e $\omega(x) \subset M$. Seja $y \in \mathcal{O}(x)$, então $y = \pi(x, t_0)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Como $\omega(x) \neq \emptyset$, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, quando $n \to \infty$, $t_n \to \infty$ e $\pi(x, t_n) \to z$. Note que, quando $t_n \to \infty$,

$$\pi(y, t_n) = \pi(\pi(x, t_0), t_n) = \pi(\pi(x, t_n), t_0) \to \pi(z, t_0). \tag{2.1}$$

De (2.1) concluímos que $\omega(y) \neq \emptyset$ pois, $\pi(z, t) \in \omega(y)$. Por outro lado, dado $z \in \omega(y)$, existe $\{\tau_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que, quando $n \to \infty$, $\tau_n \to \infty$ e $\pi(y, \tau_n) \to z$. Mas,

$$\pi(y, \tau_n) = \pi(\pi(x, t_0), \tau_n) = \pi(x, \tau_n + t_0) \to z,$$

logo $z \in \omega(x)$ e, portanto $\omega(y) \subset \omega(x)$, mostrando assim que $W^+(M)$ é invariante. □

Observação 2.1. *Se M é compacto, $x \in W^+(M)$ é equivalente a $\lim_{t\to\infty} d(\pi(x, t), M) = 0$, com afirmação similar se mantendo para $W^-(M)$.*

Definição 2.3. *Os* ***conjuntos estável fraco e instável fraco*** *de um conjunto invariante isolado M são definidos respectivamente, por*

$$W_w^+(M) = \{x \in E : \omega(x) \cap M \neq \emptyset\},$$

e

$$W_w^-(M) = \{x \in E : \alpha(x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Observação 2.2. *Note que $W^+(M) \subset W_w^+(M)$, pois se $x \in W^+(M)$ então, $x \in E$, $\omega(x) \neq \emptyset$ e $\omega(x) \subset M \Rightarrow x \in E$ e $\omega(x) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow x \in W_w^+(M)$.*

A proposição a seguir encontra-se como observação em [9], página 235 e será utilizada na demonstração da Proposição 2.3.

Proposição 2.2. *M é localmente compacto se, e somente se, para cada $x \in M$ existe $r > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B(x, r)}$ é compacta.*

Proposição 2.3. *Se M é um conjunto compacto invariante isolado de um espaço métrico localmente compacto E, então existe V compacto tal que $V \supset M$ e $\partial V \supset \partial M$ de forma que M é invariante isolado com relação a V.*

Demonstração. Seja U o aberto que isola M. Note que $M \subset \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, r_x)}$. Assim, $\mathfrak{C} = \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, r_x)}$ é uma cobertura de M. Ainda, sendo E localmente compacto, pela Proposição 2.2, $\mathfrak{C}$ é uma cobertura com bolas compactas.

Observe que $\bigcup_{x \in M} B(x, r_x)$ também cobre M. Daí, como M é compacto, M admite uma subcobertura finita, digamos $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Da mesma maneira é possível obter uma subcobertura finita para ∂M, suponha $\partial M \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j$. Desta forma, $\{\bigcup_k \overline{B}_k\} \cup \{\bigcup_j \overline{C}_j\}$ fornece uma cobertura finita de M.

Nestas condições, $V^* = \big(\bigcup_k \{\overline{B}_k\}\big) \cup \big(\bigcup_j \{\overline{C}_j\}\big)$ é um conjunto compacto tal que $V^* \supset M$ e $\partial V^* \supset \partial M$.

A fim de assegurar que o conjunto compacto que estamos procurando não "escape" de U, basta considerarmos

$$V = \big(\bigcup_k (\overline{B}_k \cap \overline{U})\big) \cup \big(\bigcup_j (\overline{C}_j \cap \overline{U})\big)$$

e temos o resultado desejado. □

O Lema 2.1 e o Lema 2.2 foram apresentados em [2] em 1986 por Butler e Waltman, sendo que o Lema 2.2 é o resultado ao qual estamos chamando de Lema de Butler-McGehee (Butler e Waltman, 1986).

Lema 2.1. *Seja M um conjunto compacto e invariante isolado. Suponha que $W_w^+(M) \backslash M \neq \emptyset$. Então $W^+(M) \backslash M \neq \emptyset$.*

Demonstração. Queremos mostrar que $W^+(M) \backslash M \neq \emptyset$, ou seja, que existe $y \in W^+(M)$ e $y \notin M$.

Para isto, exibiremos uma sequência em $\{y_k\} \subset \partial V$ tal que $y_k \to y \in \partial V$, onde V é uma vizinhança compacta de M que isola M (isso significa que M é o invariante maximal em V). Em seguida, mostraremos que $\mathcal{O}^+(y) \subset V$, de onde concluímos que $\omega(y) \subset V$. Daí, como $\omega(y)$ é compacto e invariante, pelo isolamento de M, deve-se $\omega(y) \subset M$. Da última inclusão ocorre que $y \in W^+(M)$. Ainda, como M está contido propriamente em V (Proposição 2.3) e $y \in \partial V$, temos que $y \notin M$. Como queríamos mostrar.

Vejamos agora como a sequência $\{y_k\}$ é construída.

Seja $x \in W_w^+(M) \backslash M$. Se $x \in W^+(M)$, não há o que fazer. Suponha então que $x \notin W^+(M)$.

Note que $\mathcal{O}^+(x)$ deve entrar em V, pois $\omega(x) \cap M \neq \emptyset$. Por outro lado, a $\mathcal{O}^+(x)$ deve sair de V, pois se não saísse teríamos que V é positivamente invariante, o que contradiz o fato de M ser invariante maximal. Neste sentido, a $\mathcal{O}^+(x)$ entra e sai de V infinitas vezes.

Assim, pela compacidade de M, é possível escolher uma sequência de pontos $\{x_k\} \subset \mathcal{O}^+(x)$ e uma sequência de tempos negativos $\{t_k\}$ tais que,

$$\lim_{k\to\infty} d(x_k, M) = \lim_{k\to\infty} d(\pi(x, t_k), M) = 0.$$

No procedimento de $\mathcal{O}^+(x)$ entrar e sair infinitas vezes de V, ao escolhermos $\{t_k\}$, podemos considerá-la de modo que,

$$\pi(x_k, [t_k, 0]) \subset V \text{ e } \pi(x_k, t_k) \in \partial V.$$

Como M é compacto e invariante, a dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais implica que $t_k \to -\infty$ quando $k \to \infty$.

Seja $y_k = \pi(x_k, t_k) \in \partial V$. Como ∂V é compacta, podemos escolher uma subsequência y_{n_k} convergindo a $y \in \partial V$. Para cada $t > 0$ temos

$$\pi(y, t) = \lim_{k\to\infty} \pi(\pi(x_{n_k}, t_{n_k}), t) = \lim_{k\to\infty} \pi(x_{n_k}, t_{n_k} + t).$$

Escolhendo k suficientemente grande tal que $t_{n_k} + t < 0$, temos $t_{n_k} + t \in [t_k, 0]$ e $\pi(x_{n_k}, t_{n_k} + t) \in V$. Pela compacidade de V temos $\pi(y, t) \in V$.

Daí, fixando y, ao variarmos t em $\mathbb{R}^+$ concluímos que $\mathcal{O}^+(y) \subset V$, ou ainda, $\overline{\mathcal{O}^+(y)} \subset \overline{V} = V$. Como $\overline{\mathcal{O}^+(y)} = \mathcal{O}^+(y) \cup \omega(y)$, em particular, $\omega(y) \subset V$. Tendo em vista que $\omega(y)$ é um subconjunto fechado de um conjunto compacto (V), segue que $\omega(y)$ é compacto. □

Lema 2.2. *Seja M um conjunto compacto e invariante isolado para algum fluxo contínuo $\mathfrak{F}$ num espaço métrico localmente compacto. Então, para qualquer $x \in W_w^+(M) \backslash W^+(M)$ segue que*

$$\omega(x) \cap W^+(M) \backslash M \neq \emptyset \ \text{ e } \ \omega(x) \cap W^-(M) \backslash M \neq \emptyset.$$

(Análogo para $\alpha(x)$).

Demonstração. Seja $x \in W_w^+(M) \backslash W^+(M)$. Por argumentos análogos aos da demonstração do Lema 2.1, existe uma vizinhança compacta V de M na qual $\mathcal{O}^+(x)$ entra e sai infinitas vezes a medida que $t \to +\infty$. Sem perda de generalidade podemos supor que $x \in V$, (caso não pertença, podemos tomar V maior necessário até que isto aconteça).

Agora, seja $\{t_k\} \subset \mathbb{R}$ tal que $d(x_k, M) \to 0$ quando $k \to \infty$ ($t_k \to \infty$), onde $x_k = \pi(x, t_k) \in \mathcal{O}^+(x)$. Sabemos que $d(x_k, M) \to 0$, quando $k \to$ pelo fato de $x \in W_w^+(M) \backslash W^+(M)$ e M ser compacto.

Escolha $\tau_k < 0$ tal que

$$\pi(x_k, [\tau_k, 0]) \subset V \text{ e } \pi(x_k, \tau_k) = \pi(x, \tau_k + t_k) \in \partial V.$$

Como M é invariante e compacto, segue da continuidade de π que $\tau_k \to -\infty$ quando $k \to \infty$.

Sendo

$$x \in W_w^+(M) \backslash W^+(M), \tag{2.2}$$

segue que $x \in W_w^+(M) \backslash M$, pois se $x \in M$, pela invariância e compacidade de M deveríamos ter $\omega(x) \subset M \Rightarrow x \in W^+(M)$, o que contradiz (2.2). Logo $W_w^+(M) \backslash M \neq \emptyset$, o que pelo Lema 2.1 garante que $W^+(M) \backslash M \neq \emptyset$.

Na demonstração do Lema 2.1 vimos que existe $y \in \partial V \cap W^+(M)$, logo $V \cap W^+(M) \neq \emptyset$ (V é fechado). Ainda, sendo $W^+(M)$ invariante, se $W^+(M) \subset V$ o isolamento de M implica que $W^+(M) \subset M$ o que contradiz o fato de existir $y \in \partial V \cap W^+(M)$. Portanto, $W^+(M) \not\subset V$.

Suponha que exista uma subsequência $\{n_k\}$, para a qual $t_{n_k} + \tau_{n_k} < 0$ quando $n_k \to \infty$. Fazendo $k \to \infty$ e usando as definições de t_{n_k} e τ_{n_k} segue que

$$\mathcal{O}^+(x) \subset V \;\Rightarrow\; \overline{\mathcal{O}^+(x)} = (\mathcal{O}^+(x) \cup \omega(x)) \subset \overline{V} = V.$$

Em particular, $\omega(x) \subset V$. Sendo $M \subset V$, o subconjunto $M \cup \omega(x)$ é um subconjunto fechado e invariante de V. Pelo isolamento de M, devemos ter $(M \cup \omega(x)) \subset M$, o que implica $\omega(x) \subset M$ e contradiz (2.2). Portanto, para k suficientemente grande devemos ter $t_k + \tau_k > 0$.

Seja $y_k = \pi(x, t_k + \tau_k) = \pi(x_k, \tau_k) \in \partial V$. Pela compacidade da fronteira podemos supor que existe $\{n_{k'}\} \subset \{n_k\}$ tal que $\lim\limits_{k' \to \infty} y_{k'} = y \in \partial V$. Para cada $t > 0$ temos

$$\pi(y, t) = \lim_{k' \to \infty} \pi(\pi(x_{k'}, \tau_{k'}), t).$$

Tomando k' suficientemente grande de modo que $\tau_{k'} + t < 0$, temos $\tau_{k'} + t \in [\tau_{k'}, 0]$. Daí $\pi(x_{k'}, \tau_{k'} + t) \in V$, pela compacidade de V, $\pi(y, t) \in V$. Como t foi considerado arbitrariamente, variando t em $\mathbb{R}^+$, temos $\mathcal{O}^+(y) \subset V$. Consequentemente, $\omega(y) \subset V \Rightarrow \omega(y) \subset M$, isto é, $y \in W^+(M)$.

Como $t_k + \tau_k > 0$, para k suficientemente grande, uma possibilidade é a sequência $t_k + \tau_k$ possuir uma subsequência limitada convergindo a τ, onde $y = \pi(x, \tau)$. Daí decorre que $x = \pi(y, -\tau)$ e pela invariância de $W^+(M)$ segue que $x \in W^+(M)$, mas $x \notin W^+(M)$.

A outra possibilidade é $t_k + \tau_k \to \infty$ quando $k \to \infty$, o que ocasiona $y \in \omega(x)$ e então

$$\omega(x) \cap (W^+(M) \backslash M) \neq \emptyset.$$

Agora escolha σ_k de modo que

$$\pi(x_k, [0, \sigma_k]) \subset V \text{ e } \xi_k = \pi(x_k, \sigma_k) \in \partial V.$$

Então $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \infty$. Pela compacidade de ∂V, podemos escolher $\{k'\} \subset \{k\}$ tal que $\lim_{k'\to\infty} \xi_{k'} = \xi \in \partial V$. Para cada $\sigma < 0$, escolhendo k' satisfatoriamente grande de modo que $\sigma_{k'} + \sigma > 0$ temos $\pi(x_{k'}, \sigma_{k'} + \sigma) \in V$, resultando $\pi(\xi, \sigma) \in V$.

Variando σ em $\mathbb{R}^-$ temos $\mathcal{O}^-(\xi) \subset V$. Daí, $\alpha(\xi) \subset V$. Pela propriedade de isolamento de M segue que $\alpha(\xi) \subset M$ de onde decorre que $\xi \in W^-(M)$. Como ξ também pertence a $\partial V \not\subset M$, temos $\xi \in W^-(M) \backslash M$. Como

$$\lim_{k'\to\infty} \pi(\pi(x, t_{k'}), \sigma_{k'}) = \lim_{k'\to\infty} \pi(x, t_{k'} + \sigma_{k'}) = \xi$$

e $t_{k'} + \sigma_{k'} \to \infty$ quando $k \to \infty$ segue que $\xi \in \omega(x)$. Pelo que havíamos visto, terminamos a prova ao concluir que $\omega(x) \cap W^-(M) \backslash M \neq \emptyset$. □

2.2 Lema de Butler-McGehee (Smith e Waltman, 1995)

A versão do Lema de Butler-McGehee apresentada nesta seção é uma particularização do Lema 2.2, em que M é um ponto crítico hiperbólico. Utilizaremos esta versão na aplicação do Capítulo 3.

Nesta seção considere o sistema

$$x' = f(x) \tag{2.3}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.4. *Um sistema dinâmico é dito ser* ***dissipativo*** *se todas as órbitas positivas pertencem a um conjunto limitado.*

Observação 2.3. *Se o sistema (2.3) é dissipativo, então o conjunto omega limite de qualquer órbita deste sistema é não vazio, compacto e conexo.*

Demonstração. Sejam $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ o fluxo gerado por $x' = f(x)$ e $p \in \mathbb{R}^n$. Como o sistema é dissipativo, segue que $\mathcal{O}^+(p) \subset K$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Então, $|\pi(p, t_n)| < \mu$, $\mu > 0$, $\forall n$, para qualquer sequência $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$. Portanto, $\{\pi(p, t_n)\}$ possui

subsequência convergente, ou seja, $\pi(p, t_{n_k}) \to y$ e assim, $\omega(p) \neq \emptyset$, pois $y \in \omega(p)$. Como $\omega(p) \subset \overline{\mathcal{O}^+(p)} \subset K$ e $\omega(p)$ é fechado (ver Teorema 1.16), segue que $\omega(p)$ é compacto.

Suponha que $\omega(p)$ não seja conexo, isto é, que existem dois conjuntos fechados e disjuntos A e B tais que $\omega(p) = A \cup B$. Por definição, para qualquer $z_A \in A$, existe $\{t_{k_A}\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\pi(p, t_{k_A}) \to z_A$ quando $t_{k_A} \to \infty$. O mesmo ocorre para qualquer $z_B \in B$. Como para cada sequência $t_k \to \infty$, existem infinitos valores de tempo tais que $t_{k_A} < t < t_{k_B}$ então, o segmento de órbita $\{\pi(p,t) : t_{k_A} \leq t \leq t_{k_B}\}$ conecta pontos arbitrariamente perto de z_A a pontos arbitrariamente perto de z_B. Como $\omega(p)$ é fechado, ele contém os limites destes segmentos e portanto não pode ser desconexo. □

O sistema

$$x' = Jf(y^*)x \tag{2.4}$$

é dito ser a linearização do sistema (2.3) referente ao ponto crítico y^*, onde $Jf(y^*)$ é a matriz Jacobiana de f no ponto y^*.

Se todos os autovalores da matriz Jacobiana têm parte real negativa, então y^* é um ponto crítico assintoticamente estável de $x' = f(x)$.

Se todos os autovalores da matriz Jacobiana de um ponto crítico têm parte real positiva (negativa), então este ponto crítico é dito ser um **repulsor** (**atrator**). Um ponto crítico repulsor não pode estar no conjunto omega limite de qualquer outra órbita que não seja ele mesmo.

Definição 2.5. *Quando nenhum autovalor da matriz jacobiana tem parte real nula, o ponto crítico é dito ser* ***hiperbólico****.*

Observação 2.4. *Na Definição 2.2 não assumimos qualquer estrutura especial para M, $W^+(M)$ ou $W^-(M)$, mas quando E é uma variedade diferenciável e M é um ponto crítico temos que $W^+(M)$ e $W^-(M)$ têm (localmente) estrutura de varidade.*

Proposição 2.4. *Seja P um ponto crítico hiperbólico para o fluxo $\mathfrak{F} = (E, \mathbb{R}, \pi)$. Então existe uma vizinhança V de P em que todo subconjunto invariante por $\mathfrak{F}$ coincide com P.*

Demonstração. Sejam $V = B(P, \varepsilon)$ uma vizinhança de P e $M = B(P, \frac{\varepsilon}{2})$ um subconjunto de V invariante por $\mathfrak{F}$ (note que $M \not\subset \{P\}$). Como P é um ponto crítico hiperbólico devemos considerar três casos:

1^0 **caso:** P possui apenas variedade estável (é atrator). Neste caso, dado $y \in M$, $y \neq P$, como P é atrator, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(y, t_0) \in B(P, \frac{\varepsilon}{3})$. Da mesma maneira, existe $t_1 \in \mathbb{R}$, tal que $\pi(\pi(y, t_0), t_1) \in B(P, \frac{\varepsilon}{4})$. Procedendo assim sistematicamente existirá um $t_n \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\pi(\pi(y, t_n), t_1 + \cdots + t_{n-1}) \in B(P, \frac{\varepsilon}{n}).$$

Para n infinitamente grande temos $\pi(y, t_0 + \cdots + t_n) \in B(P, 0) = P$. Mas, como P é um ponto crítico, segue que $\pi(P, t) = P$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\pi(\pi(y, t_1 + \cdots + t_n), t) = \pi(P, t), \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

o que é um absurdo, visto que $y \neq P$.

2^0 **caso:** P possui apenas variedade instável (é repulsor). Neste caso, como P é repulsor, dado $y \in M$, existe $t_1 \in \mathbb{R}$, tal que $\pi(x, t) \notin M$, para todo $t \geq t_1$ e M não é invariante.

3^0 **caso:** P possui variedades estável e instável (é um ponto de sela). Neste caso, dado $x \in M$, temos

- se x pertence à variedade estável de P, existe $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\pi(x, t) \notin M$, para todo $t \leq t_0$
- se x pertence à variedade instável de P, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que, $\pi(x, t) \notin M$, para todo $t \geq t_1$.

De qualquer maneira, M não é invariante.

□

O lema a seguir é apresentado como Teorema de Butler-McGehee em [14], página 12. A intenção deste resultado é mostrar que uma órbita não pode "serpentear"dentro e fora de uma vizinhança de um ponto hiperbólico P infinitas vezes sem ter pontos de acumulação nas variedades estável e instável deste ponto.

A demonstração deste lema dada aqui é uma aplicação imediata do Lema 2.2, distanciando-se consideravelmente da demonstração apresentada em [14].

Lema 2.3. *(**Lema de Butler-McGehee (Waltman e Smith,** 1995**)) Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que P é um ponto crítico hiperbólico de*

$$y' = f(y) \tag{2.5}$$

que está em $\omega(x)$, mas não é o conjunto omega limite inteiro, ou seja, $\omega(x) \not\subset \{P\}$. Então $\omega(x)$ tem interseção não trivial (diferente de P) com as variedades estável e instável de P.

Demonstração. Para $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\pi(P, t) = P$ é solução de $y' = f(y)$, de onde segue que $\{P\} \subset \mathbb{R}^n$ que é localmente compacto.

Portanto, $\{P\}$ é um conjunto compacto, invariante isolado, para o fluxo contínuo gerado por $y' = f(y)$ num espaço métrico localmente compacto. Por hipótese, para

$x \in \mathbb{R}^n$, $P \in \omega(x)$ e $\omega(x) \not\subset \{P\}$, ou seja, $x \in W_w^+(\{P\})\backslash W^+(\{P\})$. Pelo Lema de Butler-McGehee (Butler e Waltman, 1986) segue que

$$\omega(x) \cap W^+(\{P\})\backslash\{P\} \neq \emptyset \ \ e \ \ \omega(x) \cap W^-(\{P\})\backslash\{P\} \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Como P é um ponto crítico hiperbólico, os conjuntos estável e instável de P possuem estrutra (local) de variedade, sendo assim, (2.6) diz que $\omega(x)$ possui interseção não trivial com as variedades estável e instável de P. □

Exemplo 2.1. *Na Figura 2.1 podemos ver uma ilustração do Lema 2.3. O conjunto omega limite da órbita α é $\{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \psi \cup \beta \cup \varphi$. Considere por exemplo o ponto A. O ponto A não é o conjunto omega limite inteiro da órbita α, mas está contido nele. Ainda, a variedade estável de A é $\beta \cup \{A\}$. Sendo assim, concluímos que o conjunto omega limite da órbita α possui interseção não trivial com a variedade estável de A.*

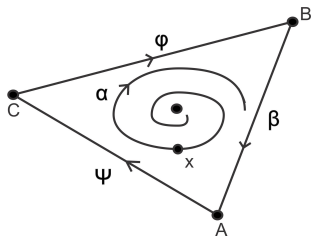

Figura 2.1: Ilustração do Lema 2.3

A seguir apresentamos um corolário do Lema de Butler-McGehee (Waltman e Smith, 1995) que será requisitado na demonstração do Teorema 3.1.

Corolário 2.1. *Se a variedade estável de um ponto crítico hiperbólico P está contida na fronteira do cone positivo, então nenhuma trajetória do interior do cone positivo pode ter P como um ponto omega limite.*

Demonstração. Veja [14] página 13. □

2.3 Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011)

Nesta seção E é um espaço métrico e $\Phi : E \times \mathbb{R} \to E$ é fluxo contínuo.

Definição 2.6. *Um conjunto positivamente invariante $A \subset E$ é dito ser* ***transitivo em cadeia*** *se para quaisquer $a, b \in A$ e para quaisquer $\epsilon > 0$ e $s \in J \subset \mathbb{R}$ existe uma sequência finita de pontos $x_1 = a, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1} = b$ em A e tempos $t_1, t_2, \cdots t_m$ em J tais que*

$$t_i \geq s \ e \ d(\Phi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) \leq \epsilon, \ \ i = 1, \cdots, m.$$

A sequência $\{x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}; t_1, t_2, \cdots, t_m\}$ *é chamada uma* (ϵ, s)***-cadeia*** *em* A *conectando* a *a* b.

Exemplo 2.2. *Um dos exemplos mais comuns de conjuntos transitivos em cadeia é o conjunto omega limite, como pode ser verificado no seguinte lema.*

Lema 2.4. *Seja* $\Phi : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um fluxo contínuo. Então o conjunto omega limite de qualquer órbita positiva pré-compacta é transitivo em cadeia.*

Demonstração. Seja $x \in E$ e $x_n = \Phi\{x, t_n\}$. Suponha que x tem órbita positiva pré-compacta, $\mathcal{O}^+(x) = \{x_n\}$ e denote o conjunto omega limite de $\mathcal{O}^+(x)$ por ω. Então ω é não vazio e compacto. Pelo Teorema 1.18 temos

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \omega) = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de Φ e compacidade de ω, existe $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{2})$ com a seguinte propriedade: Se u, v são pontos na δ-vizinhança aberta U de ω com $d(u, v) < \delta$, então $d(\Phi_{t_n}(u), \Phi_{t_n}(v)) < \frac{\epsilon}{2}$. Como x_n aproxima de ω quando $n \to \infty$, existe $N > 0$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Sejam $a, b \in \omega$ pontos arbitrário. Então existem $k > m \geq N$ tais que

$$d(x_m, \Phi(a, t)) < \frac{\epsilon}{3} \ \ e \ \ d(x_k, \Phi(b, t)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

A sequência

$$\{y_0 = a, y_1 = x_m, \cdots, y_{k-m} = x_{k-1}, y_{k-m+1} = b\}$$

é uma $\frac{\epsilon}{3}$-cadeia em ω conectando a e b.

Para cada $y_i \in U$, para $i = 1, \cdots, k-m$, podemos escolher $z_i \in \omega$ tal que $d(z_i, y_i) < \delta$. Seja $z_0 = a$ e $z_{k-m+1} = b$. Então, para $i = 0, 1, \cdots, k-m$ temos,

$$\begin{aligned} d(\Phi_{t_i}(z_i), z_{i+1}) &\leq \\ &\leq d(\Phi_{t_i}(z_i), \Phi_{t_i}(y_i)) + d(\Phi_{t_i}(y_i), y_{i+1}) + d(y_{i+1}, z_{i+1}) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, a sequência $\{z_0, z_1, \cdots, z_{k-m+1}\}$ é uma ϵ-sequência conectando a e b. □

A demonstração do Lema 2.4 é dada para difeomorfismos em [7].

A seguir apresentamos a versão mais recente do Lema de Butler-McGehee em sua plena generalidade. No entanto, faremos a demonstração para um caso particular, onde o conjunto Y é o conjunto omega limite de um ponto $x \in E$ e M é um ponto crítico hiperbólico, pois esta restrição é suficiente para utilizarmos o lema na aplicação de competição entre três espécies apresentada no Capítulo 4. Para ver a demonstração do caso geral do Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011) veja [13], página 182.

Lema 2.5. *(**Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme,** 2011**)) Sejam M um conjunto fechado, isolado e positivamente invariante e Y um conjunto compacto, invariante e transitivo em cadeia em E. Suponha que $Y \cap M \neq \emptyset$, mas $Y \not\subset M$. Então existe um $y \in Y \backslash M$ tal que $\Phi(y,t) \to M$ quando $t \to \infty$.*

Demonstração. Considere que M é um ponto crítico hiperbólico e para $x \in E$, $Y = \omega(x)$. Suponha que $\omega(x) \cap M \neq \emptyset$ e $\omega(x) \not\subset M$.

Então $x \in W_w^+(M) \backslash M \neq \emptyset$. Pelo Lema 2.2, Lema de Butler-McGehee (Butler e Waltman, 1986),

$$\omega(x) \cap W^+(M) \backslash M \neq \emptyset.$$

Portanto, existe $y \in \omega(x) \cap W^+(M)$ e $y \notin M$. Agora,

$$y \in W^+(M) \Rightarrow \omega(y) \subset M \Rightarrow$$

$$\exists \{t_n\} \subset \mathbb{R}^+ \text{ tal que, quando } n \to \infty, t_n \to \infty \text{ e } \Phi(y, t_n) \to M.$$

□

Capítulo 3

A Dinâmica de um Biorreator

Neste capítulo mostraremos uma aplicação do Lema de Butler-McGehee ao usá-lo para demonstrar um teorema de estabilidade global para sistemas parcialmente lineares, em outras palavras, o Lema de Butler-McGehee é usado para mostrar que (sob certas condições) existem singularidades de um sistema linear associado ao sistema parcialmente linear considerado que formam um ciclo. Como consequência deste resultado provamos um teorema que garante a sobrevivência e extinção de duas espécies de microorganismos interagindo num mesmo ambiente.

Basearemo-nos no trabalho de Smith e Waltman [14] no qual foram utilizados dados obtidos de um experimento realizado num biorreator, que é um equipamento para cultivo sob imersão temporária ou permanente de células vivas de animais, plantas ou microorganismos ou enzimas com o objetivo de propagação das células cultivadas. Num biorreator é utilizado um meio de cultura líquido que permite a renovação do ar durante o cultivo, bem como o monitoramento de alguns parâmetros essenciais ao crescimento do material em cultivo, tais como pH, oxigênio dissolvido, temperatura, concentração de íons, etc.

3.1 Introdução

As bactérias são uma forma de vida presente em diversos ambientes do nosso planeta. Ao longo do tempo elas se mostraram útil em vários aspectos, por exemplo, para produção de pães, cervejas e vinhos, produção de insulina humana, vacinas, biocombustível, tratamento de resíduos, dentre muitos outros. Para avançar na potencialidade do uso dessas bactérias, faz-se necessário conhecer sua reação diante de outro microorganismo ou da influência de determinado tipo de nutriente. Para realização destes estudos (experimentos), entram em cena os biorreatores, onde o desenvolvimento das células ou enzimas de estudo pode ser monitorado e controlado.

Para o experimento que gerou o modelo que iremos estudar, foi utilizado um tipo específico de biorreator, o quimiostato, que se caracteriza por ser um equipamento que permite os nutrientes necessários para o crescimento celular serem fornecidos continuamente a uma taxa específica para o recipiente de cultura por uma bomba ligada a um reservatório com estes nutrientes, enquanto os nutrientes e as células residuais são removidas do recipiente de cultura com a mesma taxa (de entrada) por outra bomba mantendo assim a cultura no quimiostato com um volume constante. Na Figura 3.1 pode-se observar o esquema de um quimiostato simples.

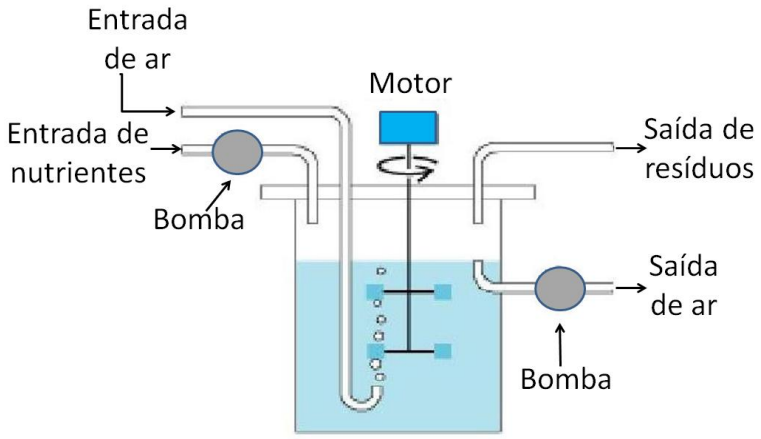

Figura 3.1: Um esquema de um quimiostato simples

3.2 O Modelo

A fim de estudar a competição entre duas espécies num quimiostato, foram introduzidos dois microorganismos diferentes no sistema. Pelo que foi proposto por Smith e Waltman em [14], o sistema que representa a variação de nutrientes e da população dos microorganismos no quimiostato é dado por:

$$\begin{aligned} S' &= 1 - S - \frac{m_1 S x_1}{a_1 + S} - \frac{m_2 S x_2}{a_2 + S}, \\ x_1' &= x_1 \left(\frac{m_1 S}{a_1 + S} - 1 \right), \\ x_2' &= x_2 \left(\frac{m_2 S}{a_2 + S} - 1 \right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$S(0) \geq 0, \ x_1(0) > 0, \ x_2(0) > 0.$$

No sistema (3.1), S representa a quantidade de nutrientes, x_1 e x_2 representam a população de cada microorganismo, m_1 e m_2 representam a taxa de crescimento máxima dos microorganismos x_1 e x_2 respectivamente (a unidade da taxa de crescimento máxima é $\frac{1}{t}$) e a_1 e a_2 são constantes de saturação referentes aos microorganismos x_1 e x_2 respectivamente. As constantes m_1, m_2, a_1 e a_2 podem ser consideradas como parâmetros naturais dos microorganismos no ambiente do quimiostato e podem ser medidos pelo cientista.

Ao considerarmos a mudança de variáveis $\Sigma(t) = 1 - S(t) - x_1(t) - x_2(t)$, podemos reescrever o sistema (3.1) como

$$\begin{aligned} \Sigma' &= -\Sigma \\ x_1' &= x_1\left(\frac{m_1(1-\Sigma-x_1-x_2)}{a_1+1-\Sigma-x_1-x_2} - 1\right) \\ x_2' &= x_2\left(\frac{m_2(1-\Sigma-x_1-x_2)}{a_2+1-\Sigma-x_1-x_2} - 1\right) \\ & \Sigma(0) \leq 1,\ x_1(0) > 0,\ x_2(0) > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A primeira equação de (3.2) é resultante de

$$\begin{aligned} \Sigma' &= -S' - x_1' - x_2' = \\ &= -1 + S + \frac{m_1 S x_1}{a_1+S} + \frac{m_2 S x_2}{a_2+S} - x_1\left(\frac{m_1 S}{a_1+S} - 1\right) - x_2\left(\frac{m_2 S}{a_2+S} - 1\right) = \\ &= -1 + S + x_1 + x_2 = -\Sigma. \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *O sistema (3.1) é dissipativo.*

Demonstração. Observe que sendo $\Sigma' = -\Sigma$, então $\Sigma(t) = k_0 e^{-t}$, $k_0 \leq 1$. Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \Sigma(t) = 0.$$

Como $\Sigma(t) = 1 - S(t) - x_1(t) - x_2(t)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} S(t) + x_1(t) + x_2(t) &= \lim_{t\to\infty} |S(t)| + |x_1(t)| + |x_2(t)| \\ &= \lim_{t\to\infty} \big|\big| \left(S(t), x_1(t), x_2(t)\right) \big|\big|_{soma} = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que se $t > t_1$, então

$$\left| \big|\big| \left(S(t), x_1(t), x_2(t)\right) \big|\big|_{soma} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \big|\big| \left(S(t), x_1(t), x_2(t)\right) \big|\big| < \varepsilon + 1.$$

Como as normas num espaço Euclidiano são equivalentes, as trajetórias do sistema (3.1), a partir de um $t > t_1$, estão num conjunto limitado, o que pela Definição 2.4 implica que o sistema (3.1) é dissipativo. □

No plano $\Sigma = 0$, que é difeomorfo ao plano $S + x_1 + x_2 = 1$ as trajetórias de (3.2) satisfazem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\left(\frac{m_1(1-x_1-x_2)}{a_1+1-x_1-x_2}-1\right) \\ x_2' &= x_2\left(\frac{m_2(1-x_1-x_2)}{a_2+1-x_1-x_2}-1\right) \\ & x_1(0)>0,\ x_2(0)>0,\ x_1+x_2\leq 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Encontremos agora os pontos críticos do sistema (3.4), isto é, os pontos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ tais que

$$\begin{cases} x_1\left(\dfrac{m_1(1-x_1-x_2)}{a_1+1-x_1-x_2}-1\right) = 0; \\ x_2\left(\dfrac{m_2(1-x_1-x_2)}{a_2+1-x_1-x_2}-1\right) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos $x_1 = 0$ ou $\dfrac{m_1(1-x_1-x_2)}{a_1+1-x_1-x_2} - 1 = 0$ e $x_2 = 0$ ou $\dfrac{m_2(1-x_1-x_2)}{a_2+1-x_1-x_2} - 1 = 0$.

Portanto, um ponto crítico é a origem e os outros pontos críticos satisfazem às equações

$$\frac{m_1(1-x_1-x_2)}{a_1+1-x_1-x_2} = 1 \text{ e } \frac{m_2(1-x_1-x_2)}{a_2+1-x_1-x_2} = 1. \tag{3.5}$$

Resulta das equações de (3.5) respectivamente que

$$x_1 + x_2 = \frac{a_1}{1-m_1} + 1 \text{ e } x_1 + x_2 = \frac{a_2}{1-m_2} + 1. \tag{3.6}$$

Defina $\lambda_1 = \dfrac{a_1}{m_1 - 1}$ e $\lambda_2 = \dfrac{a_2}{m_2 - 1}$.

Assim, as equações de (3.6) podem ser reescritas como

$$x_1 + x_2 = 1 - \lambda_1 \text{ e } x_1 + x_2 = 1 - \lambda_2.$$

Com tudo, os pontos críticos do sistema (3.4) são

$$E_0 := (0,0),\ \ E_1 := (1-\lambda_1, 0) \text{ e } E_2 := (0, 1-\lambda_2).$$

Em vista dos resultados para crescimento sem um competidor, os únicos casos interessantes (adequados) são aqueles onde $m_i > 1$ e $0 < \lambda_i < 1$, para $i = 1, 2$.

3.3 Um Teorema de Estabilidade Global para Sistemas Parcialmente Lineares

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e A uma matriz de ordem $m \times m$ com entradas reais. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{array}{rcl} y' & = & f(y,z) \\ z' & = & Az. \end{array} \tag{3.7}$$

Vamos supor que o fluxo completo (veja Lema 1.6) gerado por (3.7) tem D como conjunto invariante e dissipativo (veja Definição 1.7 e Definição 2.4). Sendo assim, dado $(y,z) \in D$, teremos $\omega(y,z) \neq \emptyset$ (ver Observação 2.3), onde $\omega(y,z)$ denota o conjunto ω-limite do ponto (y,z).

Observando que a segunda equação de (3.7) é linear e desacoplada da primeira equação, vamos denominar (3.7), ou qualquer sistema que fique na forma de (3.7) depois de uma mudança de variáveis, de **parcialmente linear**. O estudo dos sistemas parcialmente lineares é motivado por suas aplicações na modelagem de biorreatores (veja [14] e [**?**]).

Considere agora o sistema

$$x' = f(x,0). \tag{3.8}$$

Repare que o conjunto $\Omega = \{x : (x,0) \in D\} \subset \mathbb{R}^n$ é invariante pelo fluxo completo gerado por (3.8).

Uma pergunta natural é: *quais são as hipóteses sobre o espaço de fase do sistema (3.8) que nos levam a caracterizar o espaço de fase do sistema (3.7)?*

Começando pelas singularidades, obtemos o seguinte

Lema 3.1. *Suponha que*

(H1) *todos os autovalores da matriz A têm parte real negativa;*

(H2) *o sistema (3.8) tem um número finito de singularidades, denotadas por x_j, $j = 1, \cdots, k$ e todas são hiperbólicas. Então*

(i) *todas as k singularidades do sistema (3.7) são hiperbólicas, em particular, localmente assintoticamente estáveis;*

(ii) *para qualquer $(y,z) \in D, \omega(y,z) \subset \Omega \times \{0\}$.*

Demonstração. **(i)** As singularidades do sistema (3.7) são dadas por

$$\begin{aligned}\{(y,z) \in D : y' = 0 \ e \ z' = 0\} &= \{(y,z) \in D : f(y,z) = 0 \ e \ z = 0\} \\ &= \{(y,z) \in D : f(y,0) = 0\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por sua vez, as singularidades do sistema (3.8) são

$$\{x_j \in \Omega : f(x_j, 0) = 0\}. \tag{3.10}$$

Comparando (3.9) com (3.10) vemos que as singularidades do sistema (3.7) são do tipo $(x_j, 0)$, $j = 1, \cdots, k$. Como as singularidades do sistema (3.8) são hiperbólicas segue que as singularidades do sistema (3.7) também o são. Ainda, como todos os autovalores da matriz A têm parte real negativa, segue que cada x_j, $j = 1, \cdots, k$ é localmente assintocamente estável. Sendo assim, cada $(x_j, 0), j = 1, \cdots, k$ também é localmente assintoticamente estável.

(ii) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ o fluxo gerado por (3.7). Dado $(y,z) \in D$, como D é invariante por φ, segue que $\varphi_{(y,z)}(t) \subset D$. Ainda, como D é dissipativo, $\omega(y,z) \neq \emptyset$. Pelo item (i), cada $(x_j, 0), j = 1, \cdots, k$ é localmente assintoticamente estável. Assim, $\varphi_{(y,z)}(t) \to (x_j, 0)$, quando $t \to \infty$, para algum $i \in \{1, \cdots, k\}$. Portanto, $\omega(y,z) \subset \Omega \times \{0\}$.

□

Sob as hipóteses do Lema 3.1, podemos utilizar o *Teorema das Variedades Estável e Instável* para continuar nosso estudo do espaço de fase do sistema (3.8). Vamos denotar por $M^+(x_j)$, $j = 1, \cdots, k$, as variedades estáveis do sistema (3.8) e por $\Lambda^+(x_j)$, $j = 1, \cdots, k$, as variedades estáveis do sistema (3.7). Podemos enunciar o

Lema 3.2. *Sob as mesmas hipóteses do Lema 3.1, temos*

(i) $dim\Lambda^+(x_j, 0) = m + dimM^+(x_j)$, $j = 1, \cdots, k$;

(ii) $M^+(x_j) \times \{0\} = \Lambda^+(x_j, 0) \cap \{(y,z) \in D : z = 0\}$.

Demonstração. **(i)** Considerando os pontos $(x_j, 0)$ no sistema (3.7) temos $y' = f(x_j, 0)$. Como todos os m autovalores de A têm parte real negativa, segue que $dim\Lambda^+(x_j, 0) = m + dimM^+(x_j)$.

(ii) Para o mesmo fluxo (φ) definido acima temos

$$\begin{aligned}(y,z) \in \Lambda^+(x_j, 0) \cap \{(y,z) \in D : z = 0\} &\Leftrightarrow \\ \varphi_{(y,0)}(t) \to (x_j, 0) &\Leftrightarrow \\ (y,z) \in M^+(x_j) \times \{0\}.\end{aligned}$$

□

Antes de enunciarmos o próximo resultado, faz-se necessário a seguinte

Definição 3.1. *Sejam P e Q pontos críticos hiperbólicos (não necessariamente distintos). P é dito estar* ***encadeado*** *a Q, denotamos $P \to Q$, se existe um elemento x, $x \notin P \cup Q$, tal que $x \in M^-(P) \cap M^+(Q)$. Uma sequência finita $P_1, P_2, \cdots, P_k$ de pontos críticos hiperbólicos é dita ser uma* ***cadeia*** *se $P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_k$ ($P_1 \to P_1$ se $k = 1$). A cadeia será um* ***ciclo*** *se $P_k = P_1$.*

Observação 3.1. *Se $(x_1, 0)$ é um singularidade globalmente assintoticamente estável para o sistema (3.7), então para qualquer $(y_0, z_0) \in D$, segue que $\varphi_{(y_0,z_0)}(t) \to (x_1, 0)$, quando $t \to \infty$, isto é, $\omega(y_0, z_0) = \{(x_1, 0)\}$.*

Como uma aplicação do Lema de Butler-McGehee, o próximo resultado nos mostra como certas condições globais na configuração do espaço de fase do sistema (3.8), determinam o espaço de fase do sistema (3.7).

Lema 3.3. *Sejam $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r < k$ e $S = \{(x_j, 0) : j = 1, \cdots, k\}$ as singularidades do sistema (3.7). Se, além de $(H1)$ e $(H2)$, forem válidas*

$(H0)$ *existe um $(y_0, z_0) \in D$ tal que $(y_0, z_0) \notin \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda^+(x_j, 0)$;*

$(H3)$ *$dim M^+(x_j) = n$ para $j = 1, \cdots, r$ e $dim M^+(x_j) < n$, para $j = r+1, \cdots, k$;*

$(H4)$ $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{k} M^+(x_j)$.

Então existem singularidades do sistema (3.8) que formam um ciclo.

Demonstração.

- De $(H0)$ concluímos que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) \neq (x_j, 0)$, $j = 1, \cdots, k$, onde φ é uma solução do sistema (3.7) que passa pelo ponto (y_0, z_0). Isso significa que existe uma sequência $t_\nu \to +\infty$ tal que $\varphi(t_\nu)$ não converge para qualquer ponto de S. Logo, podemos afirmar que $\omega(y_0, z_0)$ não está contido em S.

- Tome agora um ponto de $\omega(y_0, z_0)$. Pela conclusão (ii) do Lema 3.1, sabemos que esse ponto é da forma $(x, 0)$, com $x \in \Omega$. De $(H4)$ concluímos que existe uma solução do sistema (3.8) que passa por x, convergente para algum x_{j_0}, de onde concluímos que $(x_{j_0}, 0) \in \omega(x, 0) \subset \omega(y_0, z_0)$ (ver Proposição 4.9). Assim concluímos que $\omega(y_0, z_0) \cap S \neq \emptyset$.

- Por $(H3)$, $j_0 \geq r + 1$, porque os pontos $(x_j, 0)$, $j = 1, \cdots, r$ são (globalmente) assintoticamente estáveis e bastaria um ponto desses, digamos $(x_1, 0)$, em $\omega(y_0, z_0)$ para que $\omega(y_0, z_0) = \{(x_1, 0)\}$, e assim teríamos a contradição $\omega(y_0, z_0) \subset S$.

- Usando o fato provado acima de que $\omega(y_0, z_0)$ contém outros pontos além de $(x_{j_0}, 0)$, concluímos através do Lema de Butler-McGehee que existe um ponto $(u, 0) \in \omega(y_0, z_0)$, com $(u, 0) \in \Lambda^-(x_{j_0}, 0)$, distinto de $(x_{j_0}, 0)$. Pela conclusão (ii) do Lema 3.2, obtemos $u \in M^-(x_{j_0})$. Por $(H4)$, $u \in M^+(x_{j_1})$ para algum $j_1 \in \{1, \cdots, k\}$. Como consequência, existe uma órbita heteroclínica ligando x_{j_0} a x_{j_1}, (exatamente a solução do sistema (3.8) que passa por u), ou seja, x_{j_0} e x_{j_1} estão encadeados. Caso tenhamos $j_0 = j_1$, temos um ciclo e o lema está provado. Caso contrário, supondo $j_0 \neq j_1$ e sabendo que $u \in M^+(x_{j_1})$, concluímos que $(x_{j_1}, 0) \in \omega(u, 0) \subset \omega(y_0, z_0)$. Usando novamente o fato de que $\omega(y_0, z_0)$ contém outros pontos além de $(x_{j_1}, 0)$, concluímos através do Lema de Butler-McGehee e de $(H4)$ que existe um $j_2 \in \{1, \cdots, k\}$ de maneira que x_{j_1} e x_{j_2} estão encadeados. Repetindo esse argumento um número finito de vezes, obtemos um ciclo.

□

Teorema 3.1. *Se além das hipóteses $(H1), (H2), (H3)$ e $(H4)$ ainda vale*

$(H5)$ *O sistema (3.8) não possui ciclos.*

Então podemos concluir que

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda^+(x_j, 0),$$

ou seja, as singularidades do sistema (3.7) são globalmente assintoticamente estáveis.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $D \not\subset \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda^+(x_j, 0)$, então vale $(H0)$. Como também são válidas $(H1), (H2), (H3)$ e $(H4)$, pelo Lema 3.3, existem singularidades do sistema (3.8) formando um ciclo, o que contraria $(H5)$. □

3.4 Resultado da Competição do Sistema 3.1

A seguir apresentaremos um teorema que prevê o resultado da competição entre os dois microorganismos referentes ao sistema (3.4). Para garantir que o ponto crítico E_2 não está no conjunto ω-limite de qualquer trajetória com condições iniciais positivas, utilizamos um corolário do Lema de Butler-McGehee (Corolário 2.1)

Teorema 3.2. *Suponha que $m_i > 1, i = 1, 2$ e $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Então qualquer solução do sistema (3.1) com $x_i(0) > 0$ satisfaz*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} S(t) &= \lambda_1, \\ \lim_{t\to\infty} x_1(t) &= 1 - \lambda_1, \\ \lim_{t\to\infty} x_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto $(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0)$ *é um atrator global para o sistema (3.1).*

Demonstração. O primeiro passo é entender o comportamento assintótico dos pontos críticos do sistema (3.4), encontrando os autovalores da matriz Jacobiana associada ao sistema avaliada em cada um desses pontos críticos. O sistema (3.4) pode ser visto como um campo de vetores $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ definido por

$$F(x_1, x_2) = \left(\frac{m_1 x_1 - x_1^2 - x_2 x_1}{a_1 + 1 - x_1 - x_2} - x_1, \frac{m_2 x_2 - x_2^2 - x_2 x_1}{a_2 + 1 - x_1 - x_2} - x_2 \right).$$

A matriz Jacobiana de F em $E_0 = (0, 0)$ é dada por:

$$\begin{aligned} JF(E_0) &= \begin{bmatrix} \dfrac{m_1(a_1+1)}{(a_1+1)^2} - 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{m_2(a_2+1)}{(a_2+1)^2} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{(m_1-1)(m_1-1-a_1)}{(m_1-1)(a_1+1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{(m_2-1)(m_2-1-a_2)}{(m_2-1)(a_2+1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{(m_1-1)(1-\lambda_1)}{a_1+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{(m_2-1)(1-\lambda_2)}{a_2+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $m_i > 1, i = 1, 2$ e $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1, i = 1, 2$, segue que ambos os autovalores são positivos. Daí, $E_0 = (0, 0)$ é um repulsor. Em particular, a origem não está no conjunto omega limite de qualquer trajetória.

Em $E_1 = (1 - \lambda_1, 0)$ temos

$$JF(E_1) = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_1-1)a_1 m_1}{(\lambda_1+a_1)^2} & \dfrac{(\lambda_1-1)a_1 m_1}{(\lambda_1+a_1)^2} \\ 0 & \dfrac{(m_2-1)(\lambda_1-\lambda_2)}{a_2+\lambda_1} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, ambos os autovalores são negativos. Logo, $E_1 = (1 - \lambda_1, 0)$ é um ponto crítico assintoticamente estável.

Em $E_2 = (0, 1 - \lambda_2)$, a matriz Jacobiana de F é dada por

$$JF(E_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{(m_1-1)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2+a_1} & 0 \\ \dfrac{(\lambda_2-1)a_2 m_2}{(\lambda_2+a_2)^2} & \dfrac{(\lambda_2-1)a_2 m_2}{(\lambda_2+a_2)^2} \end{bmatrix}.$$

Temos um autovalor positivo e outro negativo. Como E_2 é um ponto crítico hiperbólico, pelo Teorema da Variedade Estável, a dimensão da variedade estável é o número de autovalores com parte real negativa de $JX(E_2)$, segue então que a dimensão de $M^+(E_2)$ é 1. Portanto, $M^+(E_2)$ é homeomorfa a um segmento de reta. Ainda, E_2 atrai ao longo do eixo $x_1 = 0$, logo $M^+(0, 1 - \lambda_2)$ encontra-se no eixo $x_1 = 0$. Portanto, pelo Corolário 2.1, E_2 não é um ponto omega limite de qualquer trajetória com condições iniciais positivas.

Como E_1 é um atrator local, para provarmos o teorema é suficiente mostrarmos que E_1 é um atrator global. Como dito anteriormente, as condições de estabilidade impedem uma trajetória com condições iniciais positivas de ter E_0 e E_2 em seus conjunto omega limite.

Como o sistema é dissipativo, $\mathcal{O}^+(x)$ permanece num conjunto compacto. Assim, pelo Teorema 1.37, o conjunto omega limite de qualquer trajetória com condições iniciais positivas deve satisfazer um dos três itens deste teorema. Se ele fosse uma órbita periódica, pelo Teorema 1.38 o conjunto omega limite teria um ponto crítico em seu interior. Como já vimos, nenhum dos três pontos críticos satisfaz isso. O item c) do Teorema 1.37 não pode ser satisfeito porque não é possível construir um esquema com E_0, E_1, E_2 e órbitas heteroclínicas de modo que cada um dos pontos críticos seja omega ou alfa limite de alguma das órbitas, pois E_0 é repulsor e E_2 não pode ser omega limite de nenhuma trajetória com condições iniciais positivas. Daí, só nos resta concluir que $\omega(x)$ é um ponto crítico, seguramente $\omega(x) = E_1$. Concluímos então que toda órbita com condições iniciais positivas tende a E_1.

As conclusões obtidas até agora se referem apenas ao plano $\Sigma = 0$, isto é, ao sistema (3.4). Para esboçarmos um comportamento global, precisamos analisar o sistema sem restrições, mais precisamente, a conclusão final deve ser considerada para o sistema (3.2). Para fazer esta análise global iremos utilizar o Teorema 3.1.

As hipóteses dos Teorema 3.1 e Teorema 3.2 se relacionam da seguinte maneira:

- O sistema (3.2) corresponde ao sistema (3.7),
- O sistema (3.4) corresponde ao sistema (3.8),
- $D = \{(\Sigma, x_1, x_2) : x_i > 0,\ x_1 + x_2 + \Sigma \leq 1\}$,
- $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i > 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$,
- $m = 1, n = 2$ e a matriz $A = [-1]_{1\times 1}$.

Vejamos que nas condições do Teorema 3.2 cada uma das (H_i) do Teorema 3.1 são satisfeitas:

(H_1) Sendo $A = [-1]$, o único autovalor desta matriz tem parte real não negativa,

(H_2) O sistema (3.4) possui apenas os pontos críticos $E_0 = (0,0), E_1 = (1-\lambda_1, 0)$ e $E_2 = (0, 1-\lambda_2)$ que são hiperbólicos,

(H_3) $dimM^+(E_0) = 0$, $dimM^+(E_1) = 2$ e $dimM^+(E_2) = 1$,

(H_4) Na primeira parte da demonstração vimos que $M^+(E_2)$ está contida no eixo $x_1 = 0$ e que E_1 atrai todas as trajetórias positivas do sistema (3.4) tais que $x_1 + x_2 \leq 1$, daí $M^+(E_1) = \{(x_1, x_2) : x_i > 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Portanto, $\Omega = M^+(E_1) \cup M^+(E_2)$,

(H_5) Como também foi visto na primeira parte da demonstração, o sistema (3.4) não possui um ciclo de pontos críticos.

Verificadas todas as hipóteses, o Teorema 3.1 nos permite concluir que todas as trajetórias do sistema (3.2) tendem a um ponto $(E_i, 0)$, sendo E_i um ponto crítico do sistema (3.4).

Conhecendo o comportamento assintótico destes pontos críticos podemos afirmar que o ponto referido acima é E_1. Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} (x_1(t), x_2(t), \Sigma(t)) = (1-\lambda_1, 0, 0).$$

Agora, como $\Sigma(t) = 1 - S(t) - x_1(t) - x_2(t)$ do limite acima segue que,

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \lambda_1.$$

□

O Teorema 3.2 afirma que no modelo considerado, quando $m_i > 1$, $i = 1, 2$ e $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ a população x_1 é vencedora da competição, a população x_2 é extinta, e a concentração de nutrientes tende a se estabilizar, de modo que a partir de certo tempo se mantém em $S(t) = \lambda_1$ $massa/l^3$, isto é, qualquer solução com condições iniciais positivas do sistema (3.1) tende ao ponto $(\lambda_1, 1-\lambda_1, 0)$.

3.5 Algumas Simulações Numéricas

Exemplo 3.1. *Nas figuras abaixo foram considerados retratos de fase do sistema (3.4) em que supomos valores para os parâmetros a_1, a_2, m_1, m_2 de forma que fossem satisfeitas as desigualdades $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Em todos os casos considerados, as soluções abaixo da linha verde (que representa o conjunto $x_1 + x_2 \leq 1$), tendem ao ponto $(1-\lambda_1, 0)$ como previsto pelo teorema. Mais ainda, observe que em cada caso, a região de atração do ponto $(1-\lambda_1, 0)$ ultrapassa o limite da linha verde.*

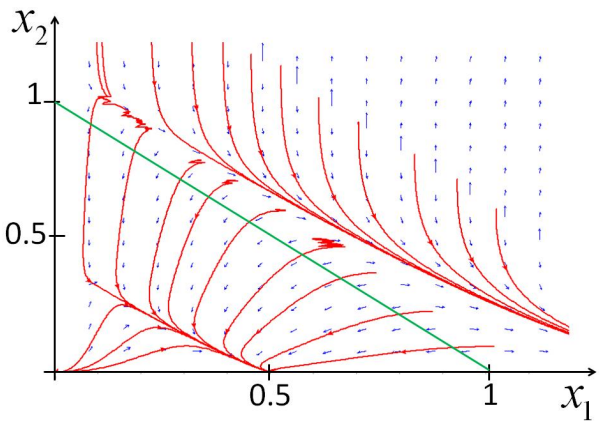

Figura 3.2: $a_1 = 0.1, m_1 = 1.2, \lambda_1 = 0.5, a_2 = 0.6, m_2 = 2, \lambda_2 = 0.6$

Na Figura 3.2 o ponto $(1 - \lambda_1, 0) = (1 - 0.5, 0) = (0.5, 0)$ é um atrator local para o sistema 3.4. Já na Figura 3.3, o ponto $(1 - \lambda_1, 0) = (0.4, 0)$ é atrator local.

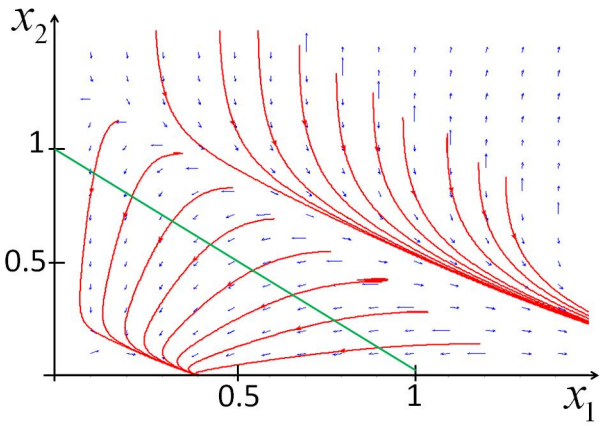

Figura 3.3: $a_1 = 0.3, m_1 = 1.5, \lambda_1 = 0.6, a_2 = 1.1, m_2 = 2.5, \lambda_2 = 0.73$

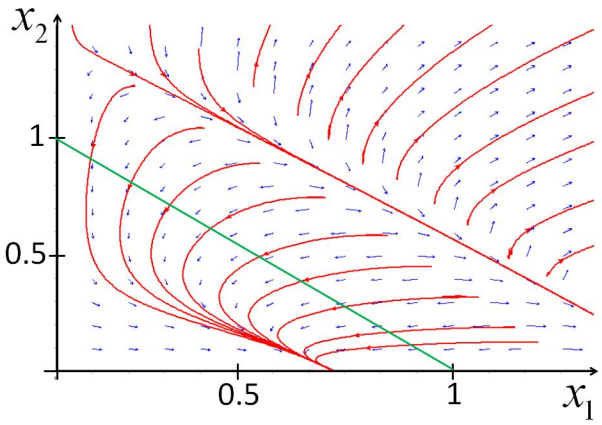

Figura 3.4: $a_1 = 0.45, m_1 = 2.96, \lambda_1 = 0.22, a_2 = 0.776, m_2 = 1.872, \lambda_2 = 0.89$

Na Figura 3.4 o ponto $(1 - \lambda_1, 0) = (0.78, 0)$ é atrator local para o sistema 3.4. Na Figura 3.5 o ponto $(1 - \lambda_1, 0) = (0.45, 0)$ é atrator local para o sistema 3.4. Observe que a região de atração do ponto $(1 - \lambda_1, 0)$ é maior na Figura 3.5 comparada com as demais figuras.

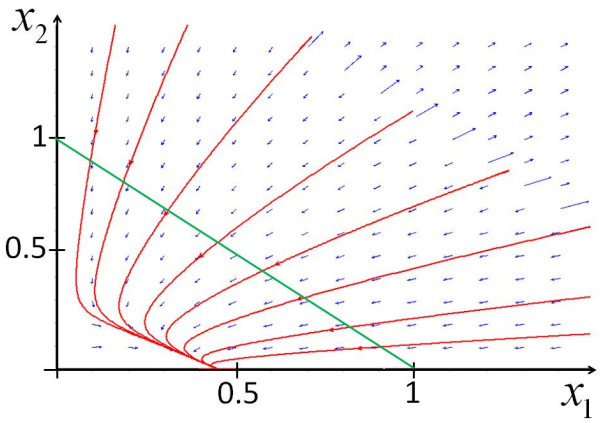

Figura 3.5: $a_1 = 1.1, m_1 = 3, \lambda_1 = 0.55, a_2 = 1.1, m_2 = 2.5, \lambda_2 = 0.73$

Capítulo 4

O Modelo de May-Leonard Para Competição Entre Três Espécies

Saber o comportamento da população de determinadas espécies é uma questão importante em diversas áreas. Para analisar o comportamento de uma população sobre determinado aspecto são necessários modelos matemáticos que sejam tanto precisos e realísticos quanto possíveis. Existem equações diferenciais ordinárias que representam este comportamento, em particular, o comportamento de competição entre três espécies. No entanto, para este caso, mesmo as equações mais simples são não lineares. Consequentemente, determinar as possíveis soluções estáveis da equação considerada requer um estudo mais refinado acerca do comportamento das soluções da equação.

4.1 Introdução

Nossa investigação do modelo para competição entre três espécies foi motivada pela aplicação do Lema de Butler-McGehee utilizada no teorema que garante (sob certas condições) a estabilidade das três populações consideradas. Para o modelo considerado, existe um ciclo heteroclínico, HC, envolvendo as populações das três espécies. Com o Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011), é possível concluir que para qualquer elemento $N = (N_1, N_2, N_3)$ do cone positivo de $\mathbb{R}^3$ que não pertença à linha $l = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_1 = N_2 = N_3\}$ o conjunto omega limite de N contém o ciclo heteroclínico HC. É possível concluir que para o mesmo N, $\omega(N) \subset HC$. Com isso, conclui-se que para o elemento N, $HC = \omega(N)$. Consequentemente, qualquer elemento de $\mathbb{R}^3_+ \backslash l$, converge para HC. Mostrando assim, que existe um equilíbrio entre as populações das três espécies competidoras, isto é, é possível a coexistência entre estas espécies.

4.2 O Modelo

O modelo que estudaremos neste capítulo foi proposto por May e Leonard em [11]. O sistema descreve a dinâmica de 3 populações competindo entre si. O sistema é dado por

$$\begin{array}{rcl} N_1' & = & N_1[1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3], \\ N_2' & = & N_2[1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3], \\ N_3' & = & N_3[1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3]. \end{array} \tag{4.1}$$

$N_i(t), i = 1, 2, 3$ é o número de indivíduos da população i, $i = 1, 2, 3$ respectivamente, no tempo t.

α é o coeficiente de concorrência que mede a extensão à qual a população 2 afeta a taxa de crescimento da população 1, a população 3 afeta a taxa de crescimento da população 2 e a população 1 afeta a taxa de crescimento da população 3.

β é o coeficiente de concorrência que mede a extensão à qual a população 1 afeta a taxa de crescimento da população 2, a população 2 afeta a taxa de crescimento da população 3 e a população 3 afeta a taxa de crescimento da população 1.

Faremos agora um estudo acerca do comportamento das soluções do sistema (4.1). Este estudo foi inicialmente proposto por Smith e Thieme em [13].

Primeiramente observe que o sistema (4.1) é um sistema de equações diferenciais do tipo Kolmogorov. Por isso, pela Proposição 1.3, segue que os semi-eixos (positivos) e as faces do cone positivo de $\mathbb{R}^3$ são invariantes pelas curvas soluções de (4.1). Ainda, a linha $l = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_1 = N_2 = N_3\}$ é invariante como pode ser visto na seguinte:

Proposição 4.1. *A linha $l = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_1 = N_2 = N_3\}$ é invariante pela curva solução de (4.1) que passa pelo ponto $c = (N_1(t_0), N_2(t_0), N_2(t_0))$ no instante t_0.*

Demonstração. Sejam $c = N_1(t_0) = N_2(t_0) = N_3(t_0) > 0$ e $N(t) = (n(t), n(t), n(t))$ tal que $n(t)$ é solução de $n'(t) = n(1 - n - \alpha n - \beta n)$ com $n(t_0) = c$. Repare que $N(t) \in l$ para todo $t \geq t_0$ e que $N(t)$ é solução de (4.1). □

4.3 Estudo do comportamento dos pontos críticos

Encontremos agora os pontos críticos do sistema (4.1), isto é, os pontos $N = (N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+$ tais que,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} N_1'(N) & = & 0 \\ N_2'(N) & = & 0 \\ N_3'(N) & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) & = & 0 \\ N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) & = & 0 \\ N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) & = & 0 \end{array} \right.$$

Claramente a origem é um ponto crítico de (4.1). Com relação aos semi-eixos positivos temos as seguintes conclusões:

- $N_1 > 0, N_2 = 0$ e $N_3 = 0 \Rightarrow N_1(1 - N_1) = 0 \overset{N_1>0}{\Rightarrow} N_1 = 1$ e $E_1 = (1, 0, 0)$ é ponto crítico de (4.1).
- $N_1 = 0, N_2 > 0$ e $N_3 = 0 \Rightarrow N_2(1 - N_2) = 0 \overset{N_2>0}{\Rightarrow} N_2 = 1$ e $E_2 = (0, 1, 0)$ é ponto crítico de (4.1).
- $N_1 = 0, N_2 = 0$ e $N_3 > 0 \Rightarrow N_3(1 - N_3) = 0 \overset{N_3>0}{\Rightarrow} N_3 = 1$ e $E_3 = (0, 0, 1)$ é ponto crítico de (4.1).

Analisemos agora o interior de cada uma das faces do octante positivo. Denomine essas faces por $F_{N_1} = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_1 = 0\}$, $F_{N_2} = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_2 = 0\}$ e $F_{N_3} = \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+ : N_3 = 0\}$.

Em F_{N_1} temos,

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_2(1 - N_2 - \alpha N_3) & = & 0 \\ N_3(1 - \beta N_2 - N_3) & = & 0 \end{array}\right. \overset{N_2,N_3>0}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 1 - N_2 - \alpha N_3 & = & 0 \\ 1 - \beta N_2 - N_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} N_2 + \alpha N_3 & = & 1 \\ \beta N_2 + N_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Logo, se $1 - \alpha\beta \neq 0$, então $N_2 = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$, $N_3 = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ e $P_1 = \left(0, \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\right)$ é ponto crítico de (4.1).

Analogamente, concluímos que se $1 - \alpha\beta \neq 0$, na face F_{N_2} haverá o ponto crítico $P_2 = \left(\dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, 0\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\right)$ e na face F_{N_3} haverá o ponto crítico $P_3 = \left(\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, 0\right)$.

Por outro lado, se $\alpha\beta = 1$, então não existem pontos críticos no interior de F_{N_1}, F_{N_2} e F_{N_3}. Mas, $\alpha\beta = 1$ se, e somente se, $0 < \alpha < 1 < \beta$ ou $\alpha = \beta = 1$. Com isso, acabamos de demonstrar a seguinte:

Proposição 4.2. *Se $0 < \alpha < 1 < \beta$, então não existem pontos críticos do sistema (4.1) no interior de F_{N_1}, F_{N_2} e F_{N_3}.*

A partir de agora considere $0 < \alpha < 1 < \beta$.

Vejamos se existem pontos críticos no interior do cone positivo. Ou seja, encontrar os $(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}^3_+$ tais que

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_1(1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3) & = & 0 \\ N_2(1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3) & = & 0 \\ N_3(1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3) & = & 0 \end{array}\right. \overset{N_1,N_2,N_3>0}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 1 - N_1 - \alpha N_2 - \beta N_3 & = & 0 \\ 1 - \beta N_1 - N_2 - \alpha N_3 & = & 0 \\ 1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolvendo o último sistema obtemos $N_1 = N_2 = N_3 = \dfrac{1+\alpha^2\beta+\beta^2-\beta-\alpha\beta-\alpha}{1+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta}$. Logo concluímos que existe um único ponto crítico no interior do cone positivo dado por

$$E^* = \frac{1}{1+\alpha+\beta}(1,1,1),$$

pois $(1+\alpha^2\beta+\beta^2-\beta-\alpha\beta-\alpha)(1+\alpha+\beta) = 1+\alpha^3+\beta^3-3\alpha\beta$.

Analisemos agora o comportamento assintótico de cada um desses pontos críticos. Podemos olhar o sistema (4.1) como um campo de vetores $F : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^3_+$ dado por

$$F(N_1,N_2,N_3) = (N_1[1-N_1-\alpha N_2-\beta N_3], N_2[1-\beta N_1-N_2-\alpha N_3], N_3[1-\alpha N_1-\beta N_2-N_3]).$$

O comportamento local dos pontos críticos pode ser interpretado através dos autovalores da matriz Jacobiana de F em cada um desses pontos. A matriz jacobiana de F em $N = (N_1, N_2, N_3)$ é dada por

$$JF(N) = \begin{bmatrix} 1-2N_1-\alpha N_2-\beta N_3 & -\alpha N_1 & -\beta N_1 \\ -\beta N_2 & 1-\beta N_1-2N_2-\alpha N_3 & -\alpha N_2 \\ -\alpha N_3 & -\beta N_3 & 1-\alpha N_1-\beta N_2-2N_3 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$JF(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad JF(E^*) = -\frac{1}{1+\alpha+\beta}\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}.$$

$$JF(1,0,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} \quad JF(0,1,0) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{bmatrix}$$

$$JF(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & -\beta & -1 \end{bmatrix}$$

Concluímos que todos os pontos críticos são hiperbólicos, a origem é repulsora, os pontos E_1, E_2, E_3 possuem cada um variedade estável de dimensão um e variedade instável de dimensão dois.

Efetuando os autovalores de $JF(E^*)$ no *software* Maxima (ver [15]), obtemos:

$$\lambda_1 = -1 \ \ e \ \ \lambda_{2,3} = \frac{\alpha+\beta-2 \pm i\sqrt{3}(\beta-\alpha)}{2(1+\alpha+\beta)}.$$

Supondo $\alpha + \beta > 2$, segue que λ_2 e λ_3 possuem parte real positiva e como $\lambda_1 = -1$, segue que E^* é um ponto de sela. Sendo assim, a dimensão das variedades instável e estável de E^* são respectivamente dois e um. Mais ainda, a variedade estável de E^* está contida na linha $l := \{(N_1, N_2, N_3) \in \mathbb{R}_3^+ : N_1 = N_2 = N_3\}$, pois $v = (1, 1, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ e v gera o espaço estável de E^*.

O próximo lema nos proporciona mais informações a respeito do comportamento assintótico dos pontos críticos E_1, E_2 e E_3.

Lema 4.1. a) *E_1 é globalmente assintoticamente estável no hiperplano invariante $N_3 = 0$, $N_1 > 0$ e $N_2 \geq 0$. No entanto, ele é repulsor uniforme fraco para soluções com $N_3(0) > 0$: existe um $\epsilon > 0$ tal que $\limsup_{t\to\infty} |N(t) - E_1| \geq 0$ para qualquer solução com $N_3(0) > 0$.*

b) *E_2 é globalmente assintoticamente estável no hiperplano invariante $N_1 = 0$, $N_2 > 0$ e $N_3 \geq 0$, mas é repulsor fraco uniforme para soluções com $N_1(0) > 0$.*

c) *E_3 é globalmente assintoticamente estável no hiperplano invariante $N_2 = 0$, $N_3 > 0$ e $N_1 \geq 0$, mas é repulsor fraco uniforme para soluções com $N_2(0) > 0$.*

Demonstração. Quando $N_3 = 0$, $N_1 > 0$ e $N_2 \geq 0$ temos

$$\begin{cases} N_1' &= N_1(1 - N_1 - \alpha N_2) \\ N_2' &= N_2(1 - \beta N_1 - N_2) \end{cases} \tag{4.2}$$

A matriz Jacobiana associada ao sistema (4.2) calculada em $(1, 0)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & -\alpha \\ 0 & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Logo $(1, 0)$ é localmente atrator para o sistema (4.2), consequentemente $(1, 0, 0)$ é localmente atrator para as soluções do sistema (4.1) que estão na face F_{N_3}.

Para mostrar que $(1, 0, 0)$ é globalmente assintoticamente estável no interior de F_{N_3} iremos mostrar que não existe outro atrator em F_{N_3} que não seja E_1. Para começar, veja que não existe órbita periódica em F_{N_3}. De fato, considere a função de Dulac $D = \dfrac{1}{N_1 N_2}$ e o campo $\overline{F}(N_1, N_2) = (f(N_1, N_2), g(N_1, N_2))$ dado por

$$\begin{cases} N_1' &= \dfrac{1}{N_1 N_2} N_1(1 - N_1 - \alpha N_2) &= \dfrac{1}{N_2}(1 - N_1 - \alpha N_2) \\ \\ N_2' &= \dfrac{1}{N_1 N_2} N_2(1 - \beta N_1 - N_2) &= \dfrac{1}{N_1}(1 - \beta N_1 - N_2) \end{cases} \tag{4.3}$$

Temos $\dfrac{\partial f}{\partial N_1} = -\dfrac{1}{N_2}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial N_2} = -\dfrac{1}{N_1}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial N_1} + \frac{\partial g}{\partial N_2} = -\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1} < 0.$$

Pelo Critério de Bendixson (Teorema 1.39), o sistema (4.3) não possui órbitas periódicas. Como o comportamento das soluções de (4.3) é o mesmo para as soluções de (4.2) segue que (4.2) não possui órbitas periódicas, pois (4.3) difere de (4.2) apenas por uma mudança na velocidade e isto não afeta as órbitas. Como já vimos que sob a hipótese $0 < \alpha < 1 < \beta$ não há pontos críticos no interior de F_{N_1}, pela Tricotomia de Poincaré-Bendixson, o conjunto omega limite de qualquer $x_0 \in intF_{N_3}$ é uma órbita heteroclínica (ou homoclínica). Como E_1 é localmente atrator, E_1 está no conjunto omega limite desta órbita heteroclínica. Pelo que vimos acima, isto nos leva a concluir que E_1 é globalmente assintoticamente estável.

Suponha que E_1 não é repulsor fraco uniforme para soluções com $N_3(0) > 0$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma solução com $N_3(0) > 0$ e

$$\limsup_{t\to\infty} |N(t) - E_1| < \epsilon. \tag{4.4}$$

Como $N_3(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, após uma translação positiva no tempo, podemos supor

$$|N(t) - E_1| = |((N_1(t), N_2(t), N_3(t)) - (1, 0, 0))| = |(N_1(t) - 1, N_2(t), N_3(t))| < \epsilon.$$

Por (4.1), $\dfrac{N_3'}{N_3} = 1 - \alpha N_1 - \beta N_2 - N_3 \geq 1 - \alpha(1+\epsilon) - \beta\epsilon - \epsilon.$

Como $\alpha < 1$, podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo $\inf\limits_{t\geq 0} \dfrac{N_3'}{N_3} > 0$.

Com isso,

$$\frac{N_3'}{N_3} > 0 \;\Rightarrow\; \ln N_3 > t + c \;\Rightarrow\; N_3(t) > k_0 e^t.$$

Logo, $N_3 \to \infty$ quando $t \to \infty$. O que contradiz a desigualdade (4.4).

□

Com o estudo realizado até o momento e considerando $0 < \alpha < 1 < \beta$ e $\alpha + \beta > 2$ temos as seguintes conclusões a respeito do comportamento assintótico dos pontos críticos:

Ponto Critico	Estabilidade
$(0,0,0)$	Repulsor
$(1,0,0)$	Glob. Assint. Estavel na face F_{N_3} e repulsor fraco para $N_3(0) > 0$
$(0,1,0)$	Glob. Assint. Estavel na face F_{N_1} e repulsor fraco para $N_1(0) > 0$
$(0,0,1)$	Glob. Assint. Estavel na face F_{N_2} e repulsor fraco para $N_2(0) > 0$
$\frac{1}{1+\alpha+\beta}(1,1,1)$	Assint. Estavel na linha invariante l

Proposição 4.3. *Existe um ciclo heteroclínico que relaciona E_1, E_2 e E_3 da seguinte maneira*

$$E_1 \mapsto E_3 \mapsto E_2 \mapsto E_1.$$

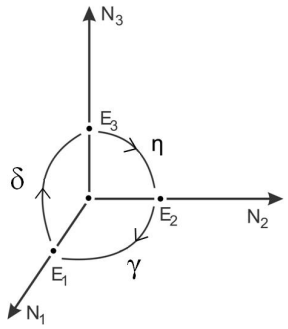

Figura 4.1: Ciclo Heteroclínico HC

Demonstração. Primeiramente lembre que a dimensão das variedades estáveis de E_1, E_2 e E_3 é um. Pela demonstração do Lema 4.1 vimos que o conjunto omega limite de qualquer $x_0 \in intF_{N_3}$ é uma órbita heteroclínica (ou homoclínica) que tende a E_1. Logo esta órbita heteroclíncia está contida na variedade estável de E_1. Como a dimensão da variedade estável de E_1 é um, podemos concluir que na verdade, esta órbita heteroclínica n coincide com a variedade estável de E_1. Por outro lado, o conjunto alfa limite desta órbita heteroclínica é um ponto crítico, mais precisamente E_2, pois E_2 é repulsor para $N_1(0) > 0$, não existem outros pontos críticos nas faces e o único ponto crítico do interior do cone positivo é E^*, que por sua vez, é atrator somente para a linha invariante l.

Da mesma maneira concluímos que existem uma órbita heteroclínica em F_{N_2} que tende a E_3 e possui conjunto alfa limite E_1 e uma órbita heteroclínica em F_{N_1} que tende a E_2 e possui conjunto alfa limite E_3. Logo estas órbitas heteroclínicas constituem um ciclo heteroclínico que iremos denominar por HC. □

Denominaremos por δ a trajetória que está em F_{N_2} e possui conjuntos $\alpha - limite = \{E_1\}$ e $\omega - limite = \{E_3\}$; por η a trajetória que pertence a F_{N_1} e possui conjuntos $\alpha - limite = \{E_3\}$ e $\omega - limite = \{E_2\}$ e por γ a trajetória que está em F_{N_3} e possui conjuntos $\alpha - limite = \{E_2\}$ e $\omega - limite = \{E_1\}$, o ciclo heteroclínico pode ser esquematizado como na Figura 4.1.

Observação 4.1. *Pelo Lema 4.1, podemos ver que os pontos que emanam de E_1, E_2 e E_3 estão localizados respectivamente em $intF_{N_2}$, $intF_{N_3}$ e $intF_{N_1}$. Lembre que a dimensão das variedades instáveis de E_1, E_2 e E_3 é dois. Com isso, podemos concluir que as variedades instáveis de E_1, E_2 e E_3 são respctivamente $intF_{N_2}$, $intF_{N_3}$ e $intF_{N_1}$.*

4.4 Estudo do comportamento das órbitas positivas

Proposição 4.4. *O sistema (4.1) é dissipativo.*

Demonstração. Considere $S(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$. Usando o sistema (4.1) conseguimos mostrar que

$$S - \frac{\alpha+\beta}{2}S^2 \leq \frac{dS}{dt} \leq S(1-S). \tag{4.5}$$

Sendo $\dfrac{dS}{dt} \leq S(1-S)$ e $0 < S(0) < 1$ temos,

$$\int_0^t \frac{S'(\xi)}{S(\xi)(1-S(\xi))}d\xi \leq \int_0^t d\xi = dt \Rightarrow \int_0^t \frac{S'(\xi)}{S(\xi)}d\xi + \int_0^t \frac{S'(\xi)}{1-S(\xi)}d\xi \leq t$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d}{d\xi}(\ln|S(\xi)|)d\xi - \int_0^t \frac{d}{d\xi}(\ln|1-S(\xi)|)d\xi \leq t$$

$$\Rightarrow \ (\ln|S(t)| - \ln|S(0)|) - (\ln|1-S(t)| - \ln|1-S(0)|) \leq t$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{S(t)}{1-S(t)}\right| + \ln\left|\frac{1-S(0)}{S(0)}\right| \leq t \Rightarrow \frac{S(t)}{1-S(t)}\overbrace{\frac{1-S(0)}{S(0)}}^{=k_0} \leq e^t$$

$$\Rightarrow S(t) \leq k_0^{-1}(1-S(t))e^t = k_0^{-1}e^t - k_0^{-1}S(t)e^t$$

$$\Rightarrow S(t) \leq \frac{k_0^{-1}e^t}{1+k_0^{-1}e^t} = \frac{k_0^{-1}}{k_0^{-1}+e^{-t}} < 1.$$

Analogamente, usando o fato que $S - \dfrac{\alpha+\beta}{2}S^2 \leq \dfrac{dS}{dt}$ segue que $S(t) \geq \dfrac{2}{\alpha+\beta}$. Isto é, as soluções de (4.1) são limitadas inferiormente e superiormente. Podemos dizer então que as soluções de (4.1) são atraídas pelo conjunto

$$T = \{N : N_i \geq 0, \frac{2}{\alpha+\beta} \leq N_1 + N_2 + N_3 \leq 1\}.$$

Em particular, o conjunto T é fechado. É possível encontrar um subconjunto fechado (e portanto compacto) em T tal que a partir de um $t \geq t_1 \geq t_0$ as órbitas de (4.1) entram e não saem mais. Com isso, concluímos que (4.1) é dissipativo. □

4.5 Resultado Principal

Antes de apresentarmos o próximo resultado é importante enunciar o Princípio da Invariância de LaSalle.

Teorema 4.1. ***(Princípio da Invariância de LaSalle)*** *Suponha que exista uma vizinhança D de 0 e $V : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 cuja derivada é negativa. Seja I a união de todas as órbitas completas contidas em $\{x \in D : \frac{dV}{dt} = 0\}$. Então, existe uma vizinhança U de 0 tal que, para todo $x_0 \in U$, $\omega(x_0) \subset I$.*

Proposição 4.5. *Suponha que $0 < \alpha < 1 < \beta$ e $\alpha+\beta > 2$. Então o conjunto omega limite de qualquer solução de (4.1) que não está na linha l está contido no ciclo heteroclínico HC.*

Demonstração. Seja x_0 um elemento do cone positivo que não está na linha invariante l. Sabemos que $\omega(x_0) \neq \{E^*\}$, pois a variedade estável de E^* é a própria linha l. Ainda, $\omega(x_0)$ não pode coincidir com E_1, E_2 ou E_3. Pois, se $x_0 \in F_{N_1}$, E_3 é repulsor para $\mathcal{O}^+(x_0)$, se $x_0 \in F_{N_2}$, E_1 é repulsor para $\mathcal{O}^+(x_0)$ e se $x_0 \in F_{N_3}$, E_2 é repulsor para $\mathcal{O}^+(x_0)$.

Seja $P = N_1N_2N_3$. Usando (4.1) e $S = N_1+N_2+N_3$ temos $\frac{dP}{dt} = P[3-(1+\alpha+\beta)S]$.

Seja

$$V = PS^{-3}, \tag{4.6}$$

então

$$\frac{dV}{dt} = PS^{-3}[3-(1+\alpha+\beta)S] - 3PS^{-4}\frac{dS}{dt}, \tag{4.7}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= N_1[1-N_1-\alpha N_2-\beta N_3] \\ &+ N_2[1-\beta N_1-N_2-\alpha N_3] \\ &+ N_3[1-\alpha N_1-\beta N_2-N_3]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7) obtemos

$$\frac{dV}{dt} = -PS^{-4}W,$$

onde

$$\begin{aligned} W &= (1+\alpha+\beta)S^2 - 3N_1[N_1+\alpha N_2+\beta N_3] - \\ &- 3N_2[\beta N_1+N_2+\alpha N_3] - 3N_3[\alpha N_1+\beta N_2+N_3]. \end{aligned}$$

Expandindo e simplificando W obtemos

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\alpha+\beta-2}{2}\frac{P}{S^4}[(N_1-N_2)^2+(N_1-N_3)^2+(N_2-N_3)^2] \leq 0.$$

Seja $D\backslash l$ uma vizinhança de x_0. Considere a função V dada em (4.6) restrita a D, isto é, $V : D \to \mathbb{R}$. Seja I a união de todas as órbitas completas contidas em $A = \{x \in D : \frac{dV}{dt} = 0\}$. Como $\frac{dV}{dt}$ é negativa em D, pelo Princípio da Invariância de LaSalle, existe uma vizinhança $U\backslash l$ de x_0 tal que para todo $y_0 \in U\backslash l$, $\omega(y_0) \subset I$.

Note que $\frac{dV}{dt} = 0$ quando $N_1 = N_2 = N_3$ ou quando $P = 0$, isto é, na linha l ou em F_{N_1}, F_{N_2} ou F_{N_3}. Logo, $A = l \cup F_{N_1} \cup F_{N_2} \cup F_{N_3}$.

Por outro lado, $\omega(y_0) \subset T$. Logo

$$\omega(y_0) \subset T \cap (l \cup F_{N_1} \cup F_{N_2} \cup F_{N_3}). \tag{4.9}$$

Mas, $T \cap l = \{E^*\}$. Lembre que a variedade estável de E^* é a própria linha invariante l, isto significa que todos os pontos que tendem a E^* quando $t \to \infty$ estão na linha l. Segue então que $\mathcal{O}^+(y_0)$ não tende a E^*, pois $y_0 \notin l$. Portanto, $\omega(y_0) \not\subset T \cap l$. Então, podemos ver (4.9) como

$$\omega(y_0) \subset T \cap (F_{N_1} \cup F_{N_2} \cup F_{N_3}). \tag{4.10}$$

Afirmação: $\omega(y_0) \subset HC$.

Seja $z_0 \in \omega(y_0)$. Então, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\varphi(y_0, t_n) \to z_0$, quando $t_n \to \infty$. Onde φ é solução de (4.1). Como $\omega(y_0) \subset T \cap (F_{N_1} \cup F_{N_2} \cup F_{N_3})$, $z_0 \in T \cap F_{N_i}$, para algum $i = 1, 2, 3$. Digamos que $z_0 \in T \cap F_{N_1}$. Como E_2 é o atrator global para as soluções de (4.1) contidas em F_{N_1}, concluímos que $z_0 = E_2$. Daí, $z_0 \in HC$. Como $\omega(y_0)$ é invariante, segue que $\omega(y_0) \subset HC$. □

Na proposição a seguir apresentamos uma aplicação do Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011). A Proposição 4.6 assegura que as soluções positivas, do sistema (4.1) que não pertencem à linha l, tendem ao ciclo heteroclínico HC. O Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme, 2011) é usado para mostrar que o conjunto HC está contido no conjunto omega limite de tais soluções positivas. Para aplicá-lo, o particularizamos considerando $M = \{E_1, E_2, E_3\}$ e $Y = \omega(x_0)$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^3_+\backslash l$.

Proposição 4.6. *Suponha* $0 < \alpha < 1 < \beta$ *e* $\alpha + \beta > 2$. *Então o conjunto omega limite de qualquer solução de (4.1) que não está na linha* l *é o ciclo heteroclínico* HC.

Demonstração. Seja x_0 um ponto de $\mathbb{R}^3_+ \backslash L$. Como $\omega(x_0) \subset HC$, pelo menos um $E_i \in \omega(x_0)$, $i = 1, 2, 3$. Considere $M = \{E_1, E_2, E_3\}$ e $Y = \omega(x_0)$. Então $\omega(x_0) \cap M \neq \emptyset$ e $\omega(x_0) \not\subset M$. Pelo Lema de Butler-McGehee (Smith e Thieme 2011) existe $x \in \omega(x_0) \backslash M$ tal que

$$\pi(x, t) \to M, \text{ quando } t \to \infty.$$

- Se $\pi(x, t) \to E_1$, quando $t \to \infty$ então, $x \in \gamma$. Como $\omega(x_0)$ é invariante, $\gamma \subset \omega(x_0)$.
- Se $\pi(x, t) \to E_2$, quando $t \to \infty$ então, $x \in \eta$. Como $\omega(x_0)$ é invariante, $\eta \subset \omega(x_0)$.
- Se $\pi(x, t) \to E_3$, quando $t \to \infty$ então, $x \in \delta$. Como $\omega(x_0)$ é invariante, $\delta \subset \omega(x_0)$.

Assim, $HC = (\{E_1, E_2, E_3\} \cup \gamma \cup \eta \cup \delta) \subset \omega(x_0)$. Portanto, $HC = \omega(x_0)$.

Como x_0 é um ponto qualquer de $\mathbb{R}^3_+ \backslash l$, segue que todas as soluções contidas em $\mathbb{R}^3_+ \backslash l$ tendem ao ciclo heteroclínico HC. Em outras palavras, considerando tais soluções, $\alpha + \beta > 2$ e $0 < \alpha < 1 < \beta$, nenhuma das três espécies consideradas vão a extinção, pelo contrário, há uma coexistência entre essas espécies. □

4.6 Simulação numérica

Na Figura 4.2, podemos ver o retrato de fase do sistema (4.1) quando são considerados $\alpha + \beta = 2.5$, veja que de fato ocorre a existência do ciclo heteroclínico HC.

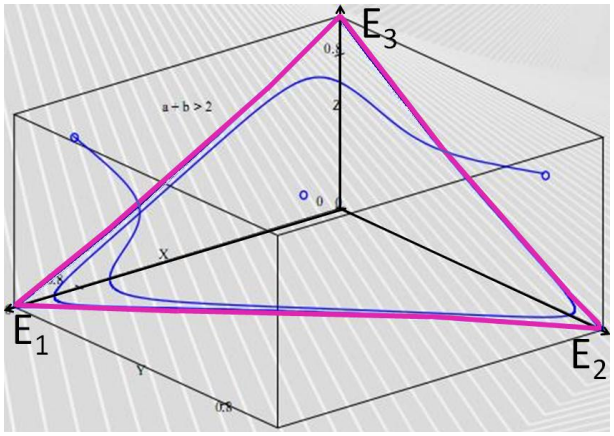

Figura 4.2: Simulação para $\alpha + \beta = 2.5$

Conclusão

Ao longo do nosso trabalho estudamos em vários sentidos o Lema de Butler-McGehee, o que nos permitiu constatá-lo como poderosa ferramenta para estudar o comportamento de soluções de um sistema dinâmico, mais precisamente, a relação entre o conjunto omega limite de um conjunto com os conjuntos estável e instável de um conjunto compacto invariante isolado. Quando o conjunto é um ponto crítico hiperbólico, o Lema de Butler-McGehee complementa as informações dadas pelo Teorema das Variedades Estável e Instável. Indo além da estrutura local, ajuda a caracterizar (sob certas condições) o comportamento global das soluções de um sistema dinâmico, como podemos ver no Teorema 3.1.

Num contexto geral, o Lema de Butler-McGehee estabelece informações a respeito dos conjuntos estável e instável de um conjunto. Por exemplo, o conjunto omega limite do pontos que estão (estritamente) na região de atração fraca de um conjunto compacto invariante isolado possui interseção com a região de atração forte deste conjunto.

No estudo do comportamento de soluções de sistemas que representam competição entre espécies vimos que o Lema de Butler-McGehee desempenha um papel importante na determinação do resultado da competição, no sentido de relacionar os pontos críticos existentes com o conjunto omega limite das órbitas positivas do sistema. Pode ser usado por exemplo, para concluir que determinados pontos críticos não pertencem ao conjunto omega limite, para indicar de que maneira o conjunto omega limite se relaciona com a variedade estável de um ponto crítico hiperbólico, para mostrar a existência de ciclos heteroclínicos e/ou órbitas periódicas.

Referências Bibliográficas

[1] BATHIA, N.P.; SZEGO G.P. *Dynamical Systems: Stability Theory and Applications*. New York: Springer-Veriag, 1967. Vol. 35. Lecture Notes in Math.

[2] BUTLER, G.; WALTMAN, P. *Persistence in dynamical systems*. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol. 63, n.2, 255-263, 1986.

[3] CIESIELSKI, K. *On The Poincaré-Bendixson Theorem*, IMUJ PREPRINT, 2001.

[4] FREEDMAN. H.I.; RUAN. S.; TANG. M. *Uniform Persistence and Flows Near a Closed Positively Invariant Set*. 2002.

[5] FREEDMAN, H.I.; WALTMAN, P. *Persistence in models of three interacting predator-prey populations*, Math. Biosci. 68, 213-231, 1984.

[6] HIRSCH, W.M.; SMALE, S.; DEVANEY, L.R. *Differential equations, dynamical systems and an introdution to chaos*. 2.ed. Elsevier: Elsevier Academic Press, 2004. Pure and Applied Mathematics Series.

[7] HIRSCH, W.M.; SMITH, L.H.; ZHAO Q.X. *Chain transitivity, attractivity and strong repellor for semidynamical systems*. Journal of Dynamics and Differential Equations, vol. 13, n.1, p.107-131, 2001.

[8] HOFBAUER, J.; SIGMUND, Karl. *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge UP. MR 99h:92027, 1998.

[9] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 299 p. Projeto Euclides.

[10] MALTI. A.; PATRA. B.; SAMANTA. G. P. *Persistence and Stability of a Food Chain Model with Mixed Selection of Functional Responses* Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 2, n.2, p.171-185, 2006.

[11] MAY, R.M.; LEONARD, W.J. *Nonlinear aspects of competition between three species*. SIAM Journal On Applied Mathematics. 29, 243-253, 1975.

[12] MEISS, D.J. *Differential Dynamical Systems* Boulder: SIAM, 2007. 412 p.

[13] SMITH, H.L.; THIEME, H.R. *Dynamical systems and population persistence.* Providence: American Mathematical Society, 405p., v.118, 2011.

[14] SMITH, H.L.; WALTMAN, P.*The theory of the chemostat: Dynamics of microbial competition.* Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[15] Software Maxima. Disponível em http://maxima.sourceforge.net/. Acesso em 01 de julho de 2013.