

NELSON BERROCAL HUAMANÍ

**GRAFOS ASSOCIADOS ÀS APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE
3-VARIEDADES FECHADAS E ORIENTADAS NO \mathbb{R}^3**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

B533g
2015

Berrocal Huamaní, Nelson, 2015-

Grafos associados às aplicações estáveis de 3-variedades
fechadas e orientadas no R^3 / Nelson Berrocal Huamaní. –
Viçosa, MG, 2015.

ix, 72f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Inclui bibliografia.

1. Espaços topológicos. 2. Topologia. 3. Análise
matemática. 4. Teoria dos grafos. 5. Variedades (Matemática).

I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.

II. Título.

CDD 22. ed. 514.3

NELSON BERROCAL HUAMANÍ

**GRAFOS ASSOCIADOS ÀS APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE
3-VARIEDADES FECHADAS E ORIENTADAS NO \mathbb{R}^3**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 04 de Dezembro de 2015.

Elíris Cristina Rizzioli

Mercio Botelho Faria

Catarina Mendes de Jesus
(Orientadora)

*A Deus que com amor um dia me deu
uma nova vida, a minha mãe que com
grande esforço me soube educar.*

Sumário

Lista de Figuras	v
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Complexos regulares e característica de Euler	3
1.2 Variedades 2 e 3 dimensionais	5
1.2.1 Superfícies	6
1.2.2 3-variedades	7
1.3 Homologia Singular	9
1.4 Grafos	14
2 Grafos associados a decomposição de 3-variedades fechadas	17
2.0.1 Grafo associado a decomposição de 3-variedades	18
2.0.2 Cirurgias em decomposição de 3-variedades	23
3 Aplicações estáveis entre variedades	27
3.1 Aplicações Estáveis	27
3.2 Aplicações estáveis de 3-variedade fechada no \mathbb{R}^3	28
3.2.1 Conjunto singular Σf e bifurcação $Bf = f(\Sigma f)$	29
3.2.2 Aplicações de codimensão 1	32

3.2.3	Transição de codimensão 1	33
3.3	Efeitos de transições de codimensão 1	36
4	Grafos associado às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas no \mathbb{R}^3	40
4.1	Grafos de aplicações estáveis	41
4.1.1	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f	41
4.2	Cirurgia de aplicações estáveis	47
5	Realização de grafos bipartidos	55
5.1	Realização de grafos com $M = S^3$	55
5.2	Realização de grafos com $M = S^2 \times S^1$	60
5.3	Realização de grafos com $M = T^3$	64
5.4	Realização de grafos com M homeomorfo a S^3 com k asas	65
	Apêndice I	68
	Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

1.1	Construção de um 3 complexo.	4
1.2	Construção de um 3 complexo.	6
1.3	T^3 como identificação de um cubo cheio pelas faces opostas. . . .	8
1.4	Exemplos de grafos.	14
1.5	Grafo pesado.	16
2.1	Decomposição de S^3	18
2.2	Decomposição da S^3	19
2.3	Decomposição distinta com mesmo grafo.	20
2.4	Decomposição da $S^2 \times S^1$	21
2.5	Decomposição da $S^2 \times S^1$	22
2.6	Uma decomposição do T^3	22
2.7	Grafo da cirurgia tipo I.	24
2.8	Exemplo da cirurgia tipo I do grafo da S^3	24
2.9	Grafo da cirurgia tipo II.	25
2.10	Grafo da cirurgia tipo II na S^3	25
3.1	Aplicações estáveis	29
3.2	Rabo de andorinha positivo e negativo.	30
3.3	Orientação dos componentes de f	31
3.4	Exemplos de aplicações dobra da S^3 e do tritoro T^3	31
3.5	$C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ e Δ	32
3.6	Transições codimensão 1 mono-germes. Estas imagens foram tiradas do Gurynov [6].	33

3.7	Alguns transições codimensão 1 mono-germes. Estas imagens foram tiradas do Gurynov [6].	34
3.8	Exemplos de orientação do conjunto Bf	36
3.9	Transição da S^3	37
3.10	Transição da S^3	38
4.1	Grafo associado a aplicações.	41
4.2	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f	42
4.3	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso I.	43
4.4	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(a) com $A_2^{\sigma,+,-}$	43
4.5	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(a) com $A_2^{\sigma,-,-}$	44
4.6	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(b).	44
4.7	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(b).	45
4.8	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 2(a).	46
4.9	Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 2(b).	47
4.10	Grafo associado a cirurgia tipo I.	48
4.11	Cirurgia tipo I na $S^2 \times S^1$ (adicionamos a $S^2 \times S^1$ uma asa).	49
4.12	Grafo da cirurgia tipo II.	50
4.13	cirurgia tipo II (soma conexa tipo 2) entre dois aplicações da S^3	50
4.14	cirurgia tipo II numa mesma aplicação f_3 da S^3	51
4.15	Aplicações distintas que vem de variedades não homeomorfas mais com grafos associados iguais.	54
5.1	Grafos possíveis de aplicações estáveis de S^3 no \mathbb{R}^3 , para $\mu \leq 3$	56
5.2	Grafos básicos para $\mathcal{G}(S^3)$	57
5.3	Esquema da demonstração do Teorema 5.3.	58
5.4	Árvore \mathcal{G}_g	58
5.5	Construção da aplicação $g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a árvore \mathcal{G}_g	59
5.6	Todos os grafos possíveis de aplicações estáveis de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 até com 3 arestas.	60
5.7	Realização dos grafos básicos $\mathcal{G}_{g_{2^p}}$	61

5.8	Grafos básicos para $\mathcal{G}(S^2 \times S^1)$	62
5.9	Aplicações f_1 e f_2	66
5.10	Esquema de realização de grafos bipartidos com pesos nos vértices e arestas.	67
5.11	Partes de uma imagem 1.	68
5.12	Partes de uma imagem 2.	69

Resumo

HUAMANÍ, Nelson Berrocal , M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2015. **GRAFOS ASSOCIADOS ÀS APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE 3-VARIEDADES FECHADAS E ORIENTADAS NO \mathbb{R}^3** . Orientadora: Catarina Mendes de Jesus.

A proposta aqui apresentada pretende estudar, do ponto de vista global, aplicações de 3-variedades fechadas no \mathbb{R}^3 , com grafos associados ao conjunto singular destas aplicações que servem como invariantes topológicos na classificação destas e também como ferramenta para a construção de aplicações.

Abstract

HUAMANÍ, Nelson Berrocal , M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, december, 2015. **GRAFOS ASSOCIADOS ÀS APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE 3-VARIEDADES FECHADAS E ORIENTADAS NO \mathbb{R}^3** . Adviser: Catarina Mendes de Jesus.

The proposal presented here wants to study, from a global point of view, applications of 3-manifolds closed in \mathbb{R}^3 associating graphs the single set of these applications that serves as topological invariant in the classification of these as well as a tool for building applications.

Introdução

As aplicação estáveis de uma 3-variedade no 3-espaço \mathbb{R}^3 , localmente podem ser vistas como aplicações do 3-espaço no 3-espaço. De acordo com um resultado clássico de Whitney [26], o conjunto de aplicações estáveis $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ formam um subconjunto aberto e denso no espaço $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Para cada classe de homotopia de uma aplicação destas aplicações existe uma aplicação estável.

Se W é uma 3-variedade fechada e orientada e $f : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ é estável, o conjunto singular Σf consiste de uma coleção de superfícies fechadas e orientadas (mergulhadas e disjuntas em W) que separa as componentes regulares de f cujo bordo está em Σf . O conjunto imagem do conjunto singular $f(\Sigma f)$, conhecido como conjunto de ramificação, consiste de uma coleção de superfícies fechadas e orientadas imersas em \mathbb{R}^3 , com possíveis interseções transversais e singularidades correspondentes a eixos cuspidais e rabos de andorinha isoladas, sendo ambas em número finito.

Em [7], Hacon-Mendes-Romero introduziram grafos com pesos nos vértices associado ao conjunto singular e regular de aplicações estáveis entre superfícies que auxilia na classificação destas, além de ser útil na construção das mesmas. Em [12] e [22] estes resultados foram adaptados para aplicações de 3-variedades fechadas e orientadas no 3-espaço. Em [6], Goryunov apresenta uma lista de invariantes locais, baseados na coorientação do conjunto de ramificação, ampliando os resultados locais apresentados em [22].

Em [1], Dias dissertou sobre os grafos associados às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas e orientadas no 3-espaço, baseado em [12, 22]. O trabalho aqui proposto é um complementar ao dissertado por Dias. Baseado em [12], [22] e [6], estudamos essas aplicações do ponto de vista global enfocando os conjuntos singulares, regulares e contorno aparente, principalmente com exemplos de aplicações e técnicas que auxilia o leitor na construção de novas aplicações, facilitando uma melhor compreensão sobre este tema.

Este trabalho foi dividido em capítulos da seguinte forma:

O objetivo do primeiro capítulo é introduzir algumas definições e resultados que serão usados ao longo deste trabalho, como alguns conceitos relativos à topologia de superfícies e 3-variedades e noções básicas sobre homologia singular e grafos.

No capítulo 2, introduziremos um tipo de decomposição de uma 3-variedade associado a um conjunto de superfícies mergulhadas na 3-variedade e a esta mesma decomposição associaremos um grafo com peso, definiremos dois tipos de cirurgias entre 2 decomposições e estudaremos o conjunto singular de aplicações estáveis de uma 3-variedade M em \mathbb{R}^3 .

No capítulo 3, estudaremos as aplicações de uma 3-variedade no \mathbb{R}^3 , algumas propriedades topológicas e nos centraremos no estudo do espaço nas aplicações estáveis de 3-variedades (compactas, orientadas e sem bordo) no \mathbb{R}^3 , as transições de codimensão 1 e no conjunto de bifurcação (ou contorno aparente) das aplicações estáveis.

No capítulo 4, associaremos grafos com pesos as aplicações estáveis e estudaremos as alterações destes grafos quando uma aplicação estável é submetida a transições de codimensão 1. Também definiremos dois tipos de cirurgia entre aplicações estáveis e seus efeitos nos grafos associados.

No capítulo 5, definiremos quando um grafo é realizável e realizaremos os grafos bipartidos associados a aplicações $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, quando M é homeomorfo a S^3 , $S^2 \times S^1$ e T^3 . Por fim, apresentaremos alguns teoremas que podem ser usados na construção de aplicações estáveis via cirurgias e transição de codimensão 1, dado um grafo qualquer \mathcal{G} com pesos.

As figuras presentes nesta dissertação foram feitas utilizando os programas Rhinoceros [29] e Inkscape [28].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para o entendimento deste trabalho, tais como: complexos regulares, característica de Euler de superfícies, 3-variedades compacta (com e sem bordo) e Teoria de Grafos.

1.1 Complexos regulares e característica de Euler

Um dos problemas clássicos em Topologia é a classificação dos espaços topológicos. Uma ferramenta importante para este propósito são os invariante topológicos. Tendo como pré-requisito os complexos, nesta seção apresentaremos a característica de Euler como um invariante topológico completo para diferenciar superfícies compactas e outras aplicações em 3-variedades.

As referências utilizadas são [8], [10], [13], [14], [15] e [19].

Definição 1.1. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff conexo, um n -complexo regular K em X é definido como $K = \bigcup_{k=0}^n K_k$ e K_k esta dado por:*

K_0 é um conjunto finito de pontos em X . Os elementos de K_0 são chamados de vértices ou 0-células.

K_1 é um conjunto finito de arestas. Onde as arestas unem os vértices de K_0 , também são chamadas 1-células.

K_2 é um conjunto finito de polígonos planos cujos bordos são arestas de K_1 , também são chamadas 2-células. Por indução,

K_k é um conjunto objetos geométricos, cujos bordos pertencem ao conjunto K_{k-1} , também são chamadas k -células.

Observe que, $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n$ tais que todos os pontos em X estão em uma célula em algum K_i , $i = 0, \dots, n$.

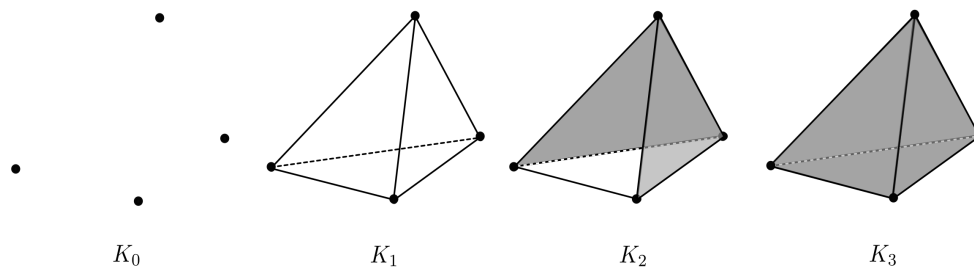


Figura 1.1: Construção de um 3-complexo.

Observação 1.2. O espaço X é um conjunto de pontos, enquanto o n -complexo K é um conjunto de células.

Definição 1.3. Seja K um n -complexo regular, **espaço subjacente** X de K , denotado por $|K|$, é o conjunto:

$$|K| = \{x : x \in \gamma \in K; \gamma \text{ é uma célula em } K\}$$

Definição 1.4. A **característica de Euler** de uma n -complexo regular K , denotada por $\chi(K)$, é definida pela soma alternada das células do complexo K , isto é,

$$\chi(K) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \text{card}(k\text{-célula}),$$

onde $\text{card}(k\text{-célula})$ denota o número de k -células do complexo K .

Exemplo 1.5. Para um 2-complexo, sejam v o número de vértices, a o número de arestas e f o número de faces. A característica de Euler é dada por

$$\chi(K) = v - a + f.$$

1.2 Variedades 2 e 3 dimensionais

Nesta seção apresentaremos resultados de duas classes de complexos: as 2-variedades (superfícies) e as 3-variedades. As referências são [8], [15],[17] e [19]

Definição 1.6. *Uma n -variedade é um espaço topológico de Hausdorff tal que todo ponto x possui uma vizinhança equivalente a um disco aberto n -dimensional, centrado em x e com raio r , $B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$.*

Definição 1.7. *Uma n -variedade com bordo é um espaço topológico tal que todo ponto tem uma vizinhança topologicamente equivalente ou a um disco n -dimensional ou a meio disco $B_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}$.*

Os **pontos do bordo** de uma n -variedade são os pontos cuja vizinhança é um meio disco.

Definição 1.8. *Dados N_1, N_2 variedades n -dimensionais, a **soma conexa** de M com N , denotado por $N_1 \# N_2$, é obtida da seguinte forma: $B_1^n \subset N_1$ e $B_2^n \subset N_2$. Escolha um homeomorfismo $h : \partial B_1^n \rightarrow \partial B_2^n$. então $N_1 \# N_2$ é o espaço quociente de $\text{int}(B_1^n) \cup \text{int}(B_2^n)$, obtido identificando os pontos x e $h(x)$, com $x \in \partial B_1^n$.*

Definição 1.9. *Uma **triangulação** de uma n -variedade N é uma subdivisão de N em triângulos (ou tetraedros se $n = 3$) topológicos n -dimensionais (ou n complexos tetraédricos) que se tocam em vértices ou arestas (ou caras) completas.*

Dado uma 2-variedade S , um triângulo topológico nesta 2-variedade é um subconjunto fechado $T \subset S$ homeomorfo a um triângulo T' que é um 2-complexo de 3 vértices, 3 arestas e uma face.

Propriedades básicas da característica Euler

Seja X e Y n -variedades que admitem triangulação então:

- $\chi(\{\text{ponto}\}) = 1$.
- $\chi(X) = \chi(Y)$, se X é homeomorfo a Y .
- $\chi(X) = \chi(C) + \chi(X \setminus C)$, para todo fechado (ou aberto) $C \subset X$.
- $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$.

- Se $X = S_1 \cup S_2$ onde $S_1, S_2 \subset X$ então

$$\chi(X) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - \chi(S_1 \cap S_2).$$

Para mais detalhes da característica Euler veja [17].

Observação 1.10. Sejam X e Y duas variedades compacta e conexa. (a) X e Y são 2-variedades homeomorfas se e, somente se $\chi(X) = \chi(Y)$. (b) E Se X e Y são 3-variedades homeomorfas então $\chi(X) = \chi(Y)$, a volta não é verdade pois se $X = S^3$ e $Y = S^2 \times S^1$ temos que $\chi(S^3) = \chi(S^2 \times S^1) = 0$, entretanto S^3 e $S^2 \times S^1$ não são homeomorfos.

1.2.1 Superfícies

Definição 1.11. Uma **superfície compacta e orientada** é uma 2-variedade.

Exemplo 1.12. A esfera e o k-toro são exemplos de superfícies compactas e orientadas.

Seja M uma superfície compacta e conexa. Pode-se provar (ver [10]) que todo 2-complexo regular K , tal que $|K|$ é homeomorfo a M , possui a mesma característica de Euler. Este número comum a estes 2-complexos é então chamado de **característica de Euler** da superfície M .

Exemplo 1.13. Para calcular a característica de Euler do disco fechado B^2 , esfera S^2 e o toro T^2 , basta construir complexos regulares K_1, K_2 e K_3 tais que seus espaços subjacentes são homeomorfos as superfícies mencionadas respectivamente assim como na figura seguinte, onde em K_1 , $v = 3$, $a = 3$ e $f = 1$. Assim, $\chi(B^2) = 1$. Em K_2 , $v = 2$, $a = 2$ e $f = 2$. Assim, $\chi(S^2) = 2$. Em K_3 , $v = 1$, $a = 2$ e $f = 1$. Assim, $\chi(T^2) = 0$.

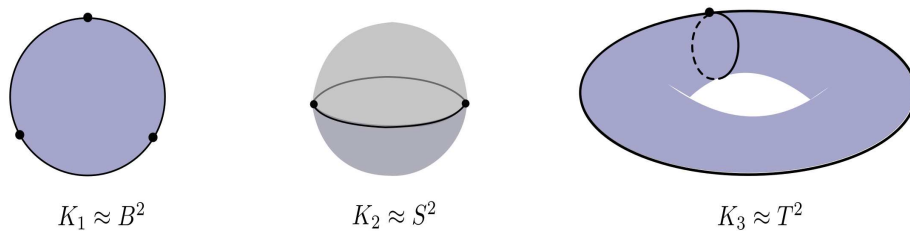


Figura 1.2: Construção de um 3 complexo.

Teorema 1.14. *Toda superfície com o sem bordo admite uma triangulação finita.*

Teorema 1.15. *(Teorema de Classificação das Superfícies) Toda superfície M compacta é homeomorfa a soma conexa de g -toros e m -planos projetivos com a esfera, isto é:*

$$M \cong S^2 \# gT^2 \# mP^2,$$

para algum $g \geq 0$ e $m \geq 0$, onde S^2 é a esfera, T^2 é o toro e P^2 é o plano projetivo.

Definição 1.16. *Uma superfície S é dita **orientável** se não contém uma faixa de Moebius. Caso contrário, S é **não-orientável**.*

Definição 1.17. *Dada uma superfície compacta orientável $S \cong S^2 \# gT$, o número $g = g(S)$ é dito de **gênero** de S .*

Teorema 1.18. *Seja S uma superfície orientável com k componentes de bordo. A característica de Euler de S é dada por*

$$\chi(S) = 2 - 2g(M) - k.$$

Corolário 1.19. *Se S é uma superfície orientável sem bordo, então*

$$\chi(S) = 2 - 2g(M).$$

Corolário 1.20. *Se S_1 e S_2 são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(S_1 \cup S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - \chi(S_1 \cap S_2).$$

A característica de Euler da soma conexa de duas superfícies, S_1 e S_2 , é dada por $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

1.2.2 3-variedades

Entendemos por 3-variedade como sendo um espaço topológico de Hausdorff que localmente é homeomorfo a \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.21. *A S^3 , $S^2 \times S^1$ e T^3 podem ser apresentadas como:*

- A 3-esfera S^3 resulta da identificação de dois B^3 (3-bola) pela fronteira.
- A 3-variedade $S^2 \times S^1$ resulta ao identificar as duas fronteiras de $S^2 \times I$.

- A 3-variedade $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, pode ser obtida ao identificar um cubo cheio pelas faces opostas. Dado o cubo \mathcal{C} Se identificamos as primeiras 2 faces opostas obtemos uma variedade \mathcal{C}' homeomorfa a $B^2 \times S^1$ um toro cheio. Ao identificar as outras 2 faces opostas de \mathcal{C}' obtemos de \mathcal{C} outra variedade \mathcal{C}'' homeomorfa a $T^2 \times I$, por último ao identificar as últimas faces de \mathcal{C}'' obtemos a variedade T^3 .

Teorema 1.22. [15] *Toda 3-variedade pode ser triangularizável.*

Lema 1.23. *Se S é qualquer superfície fechada em \mathbb{R}^3 , a região delimitada por S pode subdividir-se em regiões homeomorfas a poliedros convexos.*

Corolário 1.24. [19] *Toda 3-variedade compacta, conexa, orientável e sem bordo, pode ser obtido a partir de um poliedro identificando suas faces por pares.*

Seja M uma 3-variedade dividida em tetraedros ou outros poliedros convexos que se tocam em vértices, arestas ou faces completas.

A **característica de Euler** de M é

$$\chi(M) = v - a + f - p$$

onde, $v = \#\text{vértices}$, $a = \#\text{arestas}$, $c = \#\text{faces}$ e $p = \#\text{poliedros}$.

Exemplo 1.25. Seja T^3 do exemplo 1.21.

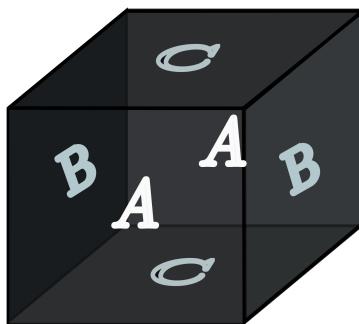


Figura 1.3: T^3 como identificação de um cubo cheio pelas faces opostas.

Assim $\chi(T^3) = v - a + f - p = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$.

Teorema 1.26. *A característica de Euler de cada 3-variedade fechada é 0.*

Corolário 1.27. *Se M é uma 3-variedade com bordo, $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$.*

Demonstração: Seja $2M$ a variedade que se obtém colando duas cópias de M pelas fronteiras. Então

$$0 = \chi(2M) = \chi(M) + \chi(M) - \chi(\partial M),$$

$$\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M).$$

□

Corolário 1.28. *O espaço que se obtém identificando as faces de um poliedro por pares é uma 3-variedade se e somente se sua característica de Euler é 0.*

Teorema 1.29. [15] *Se M é uma 3-variedade com bordo, então ∂M é uma 2-variedade sem bordo.*

1.3 Homologia Singular

As referências utilizadas nesta seção são [11], [18] e [23].

Definição 1.30. *Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se, dados x e y em C , o segmento que vai de x a y está inteiramente contido em C . Note que uma interseção arbitrária de conjuntos convexos é convexa.*

Definição 1.31. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, a envoltória convexa (o fecho convexo) de A é a interseção de todos os conjuntos convexos do \mathbb{R}^n que contêm A .*

Definição 1.32. *Um p -simplexo s em \mathbb{R}^n é a envoltória convexa de uma coleção de $(p + 1)$ pontos $\{x_0, \dots, x_p\}$ em \mathbb{R}^n no qual $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$ formam um conjunto linearmente independentes. Note que isto é independente da escolha do ponto x_0 . Os elementos x_0, \dots, x_p são chamados vértices de s .*

Observação 1.33. Observe que um 1-simplexo é um segmento de reta, um 2-simplexo é um triângulo cheio (*fronteira + interior*), um 3-simplexo é um tetraedro cheio (*faces + interior*), e assim por diante. Se aos vértices de s for dada uma ordenação específica, então s é um simplexo ordenado. Assim, s é um simplexo ordenado com vértices x_0, \dots, x_p .

Vamos denotar por σ_p o p -simplexo do \mathbb{R}^{p+1} com vértices

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1).$$

σ_p é chamando p -simplexo padrão com ordem natural. Os pontos

$$x_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_p = (0, \dots, 0, 1)$$

são chamados vértices de σ_p .

Definição 1.34. *Seja X um espaço topológico. Um p -simplexo singular em X é uma função contínua $\phi : \sigma_p \rightarrow X$ sendo σ_p o p -simplexo padrão.*

Definição 1.35. *Se ϕ é um p -simplexo singular e i é um inteiro com $0 \leq i \leq p$, definimos $\partial_i(\phi)$, um $(p-1)$ -simplexo singular em X , por*

$$\partial_i(\phi)(t_0, \dots, t_{p-1}) = \phi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Temos que $\partial_i(\phi)$ é a i -ésima face de ϕ .

Definição 1.36. *Se X é um espaço topológico, definimos $S_n(X)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todos n -simplexos singulares de X . Um elemento de $S_n(X)$ é chamado uma n -cadeia singular de X se tem a forma*

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi,$$

onde, n_{ϕ} é um inteiro, igual a zero para todo, exceto para um número finito de ϕ 's. Como o i -ésimo operador ∂_i é uma função do conjunto de n -simplexos singulares no conjunto de $(n-1)$ -simplexos singulares, existe uma única extensão a um homomorfismo

$$\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

dado por

$$\partial_i \left(\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi \right) = \sum_{\phi} n_{\phi} \partial_i \phi.$$

Definição 1.37. *O operador bordo, denotado ∂ , é dado pelo homomorfismo*

$$\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

onde,

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i.$$

Proposição 1.38. *A composição ∂' o ∂'' em*

$$S_n(X) \xrightarrow{\partial'} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial''} S_{n-2}(X)$$

é a aplicação nula.

A sequência

$$\cdots \longrightarrow S_n(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-2}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \longrightarrow 0$$

é chamado de **complexo de cadeias singulares** associado ao espaço topológico X .

Definição 1.39. Um elemento $c \in S_n(X)$ é um n -ciclo se $\partial(c) = 0$ (ou $\partial^n(c) = 0$). Um elemento $d \in S_n(X)$ é um n -bordo se existe $e \in S_{n+1}(X)$ tal que $d = \partial(e)$ (ou $d = \partial^{n+1}(e)$). Visto que ∂ é um homomorfismo, definimos $Z_n(X) := \text{Ker} \partial = \ker \partial^n = \{c \in S_n(X) \mid c \text{ é um } n\text{-ciclo}\}$ e $B_n(X) := \text{Im} \partial = \text{Im} \partial^n = \{d \in S_n(X) \mid d \text{ é um } n\text{-ciclo}\}$.

Observação 1.40. A Proposição anterior implica que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$ como subgrupo.

Definição 1.41. Seja X um espaço topológico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ o grupo quociente

$$H_n(X) := \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

é chamado de n -ésimo **grupo de homologia singular de X** .

Observação 1.42. O n -ésimo grupo de homologia singular de X mede o número de n -ciclos que não são $n+1$ -bordos. Geometricamente, os ciclos são objetos (combinações lineares de n -implexos) que “começam” e “terminam” no mesmo lugar. Dizer que não são bordos (fronteira) é o mesmo que dizer que existem “buracos” no espaço. O número de gerador de $H_n(X)$ fornece o número de buracos n -dimensionais de X .

Para apresentarmos alguns exemplos de determinação dos grupos de homologia singular de certos espaços topológicos vamos necessitar dos seguintes resultados:

Teorema 1.43. Se X é conexo por caminhos então $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver Pg. 8 de [23]. □

Teorema 1.44. Se X tem o mesmo tipo de homotopia de Y então $H_k(X) \cong H_k(Y)$, para todo $k \geq 0$. Em particular se X é homeomorfo a Y então $H_k(X) \cong H_k(Y)$, para todo $k \geq 0$.

Demonstração: Ver Pg. 16 de [23]. \square

Veremos agora duas ferramentas poderosas para o cálculo do grupo de homologia de espaços, o Teorema de **Mayer-Vietoris** e o Teorema da **Fórmula de Kunnet**.

Teorema 1.45. (Mayer-Vietoris) *Sejam U, V subconjuntos de uma espaço topológico X tais que $X = \text{Int}(U) \cup \text{Int}(V)$. Então, existe um sequência exata longa*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_n} H_n(U \cap V) \xrightarrow{g_*^n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{h_*^n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_{n-1}} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_*^{n-1}} \cdots$$

onde $g_*^n(x) = (j_{1*}^n(x), j_{2*}^n(x))$, $h_*^n(y, z) = i_{1*}^n(y) + i_{2*}^n(z)$ e Δ é o homomorfismo conexão, com $j_1^n : U \cap V \rightarrow U$; $j_2^n : U \cap V \rightarrow V$; $i_1^n : U \rightarrow X$; $i_2^n : V \rightarrow X$; denotado as inclusões naturais.

Demonstração: Ver Pg. 108 de [9]. \square

Teorema 1.46. (Fórmula de Kunnet) *Se X e Y são espaços topológicos, existe um isomorfismo natural*

$$H_n(X \times Y) \cong \left(\bigoplus_{p=0}^n H_p(X) \otimes H_{n-p}(Y) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p=0}^n \text{Tor}(H_p(X), H_{n-p-1}(Y)) \right),$$

para todo n .

Demonstração: Ver Pg. 128 de [23]. \square

Corolário 1.47. *Se M e N são n -variedades orientáveis sem bordo então*

$$H_n(M \times N) \cong \bigoplus_{p=0}^n H_p(M) \otimes H_{n-p}(N),$$

para todo n .

Lema 1.48. [23] *Se M é uma n -variedade com bordo, então $H_i(M) = 0$, para $i \geq n$.*

Exemplo 1.49. Segundo grupo de homologia para alguns espaços:

- $H_2(\{x_0\}) \cong \{0\}$, para todo $x_0 \in X$.
- $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

- $H_2(S^n) \cong \{0\}$, para todo $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$.
- $H_2(T^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Definição 1.50. Dado o espaço X , definimos como o r -ésimo número de Betti como sendo o número $b_r(X)$ dado por

$$b_r(X) = \dim(H_r(X)),$$

para todo $r \geq 0$.

Exemplo 1.51. Números de Betti de alguns 3-variedades:

S^3	T^3	$S^2 \times S^1$
$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$	$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$	$H_0 \cong \mathbb{Z}, \quad b_0 = 1$
$H_1 \cong \{0\}, \quad b_1 = 0$	$H_1 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad b_1 = 3$	$H_1 \cong \mathbb{Z}, \quad b_1 = 1$
$H_2 \cong \{0\}, \quad b_2 = 0$	$H_2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad b_2 = 3$	$H_2 \cong \mathbb{Z}, \quad b_2 = 1$
$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$	$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$	$H_3 \cong \mathbb{Z}, \quad b_3 = 1$

$H_n \cong \{0\}$, assim $b_n = 0$, para todo $n \geq 4$.

Teorema 1.52. Dado o espaço topológico X , a característica de Euler de X está dado por

$$\chi(X) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r b_r(X).$$

Proposição 1.53. Seja M uma 3-variedade fechada orientável com bordo ∂M . Se ∂M é uma superfície fechada então o gênero de ∂M é dado por

$$g(\partial M) = b_1(M) - b_2(M).$$

Demonstração: Dado a 3-variedade M com bordo ∂M , pelo Corolário 1.27 temos $\chi(M) = \chi(\partial M)/2$. Agora do Corolário 1.52 se tem, $[(2 - 2g(\partial M)]/2 = 1 - b_1(M) + b_2(M) - 0$. E pelo Corolário 1.19 temos, $b_0(M) = 1$ e $b_3(M) = 0$. Logo

$$g(\partial M) = b_1(M) - b_2(M).$$

□

1.4 Grafos

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos da Teoria de Grafos necessários para este trabalho.

Definição 1.54. Um **grafo** \mathcal{G} é um 1-complexo regular conexo.

Uma aresta em \mathcal{G} conectando dois vértices u e w será denotada pelo par $[u, w]$ ou simplesmente por uw , quando não houver confusão. Neste caso, dizemos que os vértices u e w são **adjacentes**. As arestas de um vértice u são aquelas que se conectam a esse vértice, isto é, as arestas de \mathcal{G} do tipo uw .

Definição 1.55. Quando u possui uma única aresta, u é chamado **vértice extremo** e neste caso, a aresta de u é dita **aresta extrema**. **Arestas adjacentes** são duas arestas com um extremo em comum. Um **loop** em \mathcal{G} é uma aresta da forma uu .

Definição 1.56. Um caminho em \mathcal{G} é uma sequência alternada de vértices (distintos) e arestas

$$v_0, [v_0, v_1], v_1, [v_1, v_2], v_2, \dots, v_{t-1}, [v_{t-1}, v_t], v_t.$$

O número natural t é chamado de **tamanho** do caminho. Supondo que ocorra $v_0 = v_t$, neste caso o caminho será chamado de **ciclo**.

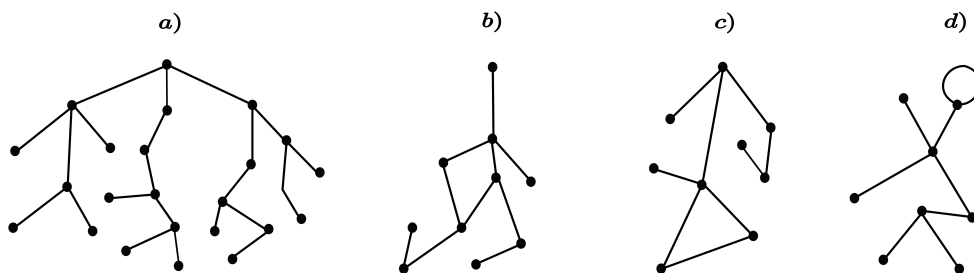


Figura 1.4: Exemplos de grafos.

Exemplo 1.57. A Figura 1.4 ilustra quatro exemplos de grafos. O grafo em (a) não tem ciclos, em (b) e (c) tem um ciclo e em (d) tem um laço (ciclo com única aresta).

Definição 1.58. O número de ciclos de um grafo \mathcal{G} é chamado de **número de Betti** de \mathcal{G} e é denotado por $b_1(\mathcal{G})$.

Lema 1.59. [10] *Seja \mathcal{G} um grafo, o número de ciclos é dado por*

$$b_1(\mathcal{G}) = \mu - V + 1,$$

onde V e μ são, respectivamente, o número de vértices e arestas de \mathcal{G} .

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre o número de arestas. O grafo com uma aresta e dois vértices claramente satisfaz o lema. Suponha agora que vale para qualquer grafo com μ arestas e considere um grafo \mathcal{G} com $\mu + 1$ aresta. Se o grafo tem loop, remova uma das arestas no loop. O grafo resultante \mathcal{G}_r tem μ arestas, logo $b_1(\mathcal{G}_r) = \mu - V + 1$. Se adicionarmos a aresta removida estaremos adicionando um loop. Então temos que $b_1(\mathcal{G}) = b_1(\mathcal{G}_r) + 1 = (\mu + 1) - V + 1$. Se o grafo não tem loop, remova uma aresta e vértice que não esteja ligado a nenhuma outra aresta (uma aresta *final*). o grafo resultante \mathcal{G}_r tem μ arestas e por tanto $b_1(\mathcal{G}_r) = \mu - V_r + 1$, $V_r = V - 1$. Se adicionarmos a aresta novamente temos que $b_1(\mathcal{G}) = b_1(\mathcal{G}_r) = \mu - V_r + 1 = \mu - (V - 1) + 1 = (\mu + 1) - V + 1$. \square

Definição 1.60. *Uma **árvore** é um grafo \mathcal{G} que não possui ciclos.*

Por exemplo, o grafo ilustrado em 1.4 (a) é uma árvore.

Observação 1.61. No caso em que \mathcal{G} é uma árvore, temos $V = A + 1$.

Definição 1.62. *Dado que um grafo \mathcal{G} é um 1-complexo, então a característica de Euler de um grafo é dada por*

$$\chi(\mathcal{G}) = V - A.$$

Teorema 1.63. [10] *Dado um grafo \mathcal{G} , se \mathcal{G} é uma árvore, então $\chi(\mathcal{G}) = 1$.*

Teorema 1.64. [10] *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

Definição 1.65. *Um grafo \mathcal{G} é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais \pm a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que \mathcal{G} é **não-bipartido**.*

Teorema 1.66. [25] *Um grafo \mathcal{G} é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm tamanho par. Caso contrário, se \mathcal{G} têm um ciclo de tamanho ímpar, ele é não-bipartido. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.*

Exemplo 1.67. Na figura 1.4, o grafo (b) é bipartido pois tem ciclo de tamanho quatro, enquanto o grafo (c) não é bipartido por ter um ciclo de tamanho três.

Definição 1.68. Um **grafo pesado** é um grafo onde cada um dos seus vértices e arestas pode ser associado um número natural, como na Figura 1.5.

Neste trabalho, os grafos considerados são apenas os grafos bipartidos com pesos e sem loop, os quais a partir de agora, serão chamados apenas de **grafos pesados**, (ou grafos com peso).

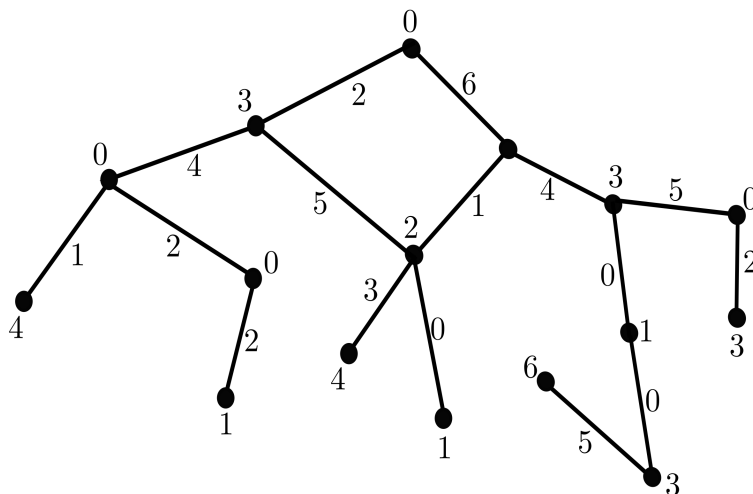


Figura 1.5: Grafo pesado.

Capítulo 2

Grafos associados a decomposição de 3-variedades fechadas

O interesse de decompor uma 3-variedade fechadas como a união de 3-variedades com bordo, tem o objetivo de analisar como se colam estas peças e assim reduzir o estudo da variedade a problemas em variedades mais simples. Existem várias maneiras de fazer esta divisão (ver [8]). Neste trabalho usaremos outro método de acordo a nosso objetivo que esta dada pela Definição 2.1.

Notação: Seja T uma superfície compacta e orientada sem bordo. Denotaremos por T_s a uma 3-variedade que tem como bordo T , junto com o espaço que esta limitada pela superfície T em \mathbb{R}^3 (T_s também é chamada de superfície cheia).

Definição 2.1. *Seja S uma superfície orientada mergulhada em uma 3-variedade compacta M . Fazendo $M_1 = S_s$, $M_2 = \overline{M \setminus S_s}$ então M pode ser obtido o colar, ou identificar, M_1 e M_2 pela fronteira. Denotamos por $M_1 \otimes M_2$ a identificação de M_1 e M_2 pela fronteira. Naturalmente $S = M_1 \cap M_2$ e $M_1 \otimes M_2 = M$.*

*Esta maneira de decompor M será dita de **decomposição simples**.*

Exemplo 2.2. Dada S^3 a 3-esfera, o qual é uma 3-variedade compacta, e S^2 , uma esfera bidimensional mergulhada na S^3 , então

$$M_1 = (S^2)_s = B^3, \quad M_2 = \overline{S^3 \setminus (S^2)_s} \approx \overline{S^3 \setminus B^3} \approx B^3.$$

A menos de homeomorfismo, $M_1 = B^3$ e $M_2 = B^3$. Assim $B^3 \otimes B^3 = S^3$. Esta é uma decomposição simples de S^3 e coincide com uma maneira de obter S^3 . A Figura 2.1 dá uma ideia desta decomposição:

- Em **i)** a S^3 como a identificação de dois 3-bolas pela fronteira a e o M_1 que é uma 3-bola que resulta de mergulhar uma esfera S^2 na S^3 , cuja fronteira é b .
- Em **ii)** temos M_2 o qual é o complemento da 3-bola M_1 em S^3 assim M_2 é homeomorfa a uma 3-bola, cuja fronteira é b .
- Em **iii)** temos que se identificamos M_1 e M_2 pela fronteira b obtemos a S^3 . Concluimos que a esfera S^2 , mergulhada numa S^3 , decompõe a S^3 em duas 3-bolas como no Exemplo 2.2.

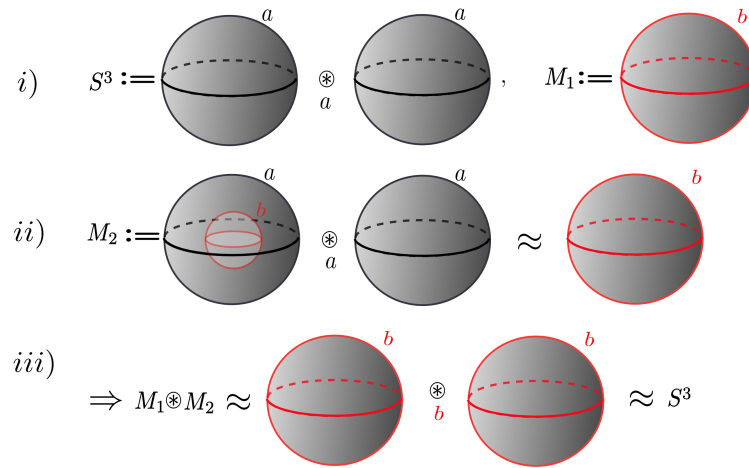


Figura 2.1: Decomposição de S^3 .

Em geral, dada $\bigcup_{i=1}^n S_i \subset M$, uma coleção de superfícies mergulhadas, orientadas e disjuntas na 3-variedade compacta M , como na Definição 2.1, podemos decompor M em $n + 1$ subvariedades. Se mergulharmos mais superfícies nestas novas subvariedades, ainda podemos decompor em muitas mais partes a nossa variedade inicial M . A seguir, associaremos um grafo pesado nesta decomposição simples de M , que será muito útil mas em diante.

2.0.1 Grafo associado a decomposição de 3-variedades

Definição 2.3. *Seja $\bigcup_{i=1}^n S_i \subset M$ uma coleção de superfícies mergulhadas orientadas disjuntas em uma 3-variedade compacta. Definimos o grafo pesado \mathcal{G} associado a esta coleção de superfícies em M como segue: associamos a cada superfície S_i uma aresta e a cada componente M_j de $M - \bigcup_{i=1}^n S_i$ um vértice. Dado um vértice v_j (correspondente a região M_j) definimos seu peso como $c_j =$*

$b_2(M_j) - s_j + 1$, onde s_j é o número de componentes conexas do bordo de M_j . Intuitivamente, c_j pode ser visto como o número de geradores de $H_2(M)$ em M_j que não são determinados pelo bordo de M_j . A cada aresta associamos o peso dado pelo gênero g_i da superfície S_i que ele representa.

Chamaremos de μ o número de arestas (que é o número de superfícies S_i) do grafo e de V o número de vértices.

Exemplo 2.4. Do Exemplo 2.2, temos que $M = S^3$, $S_1 = S^2$ e as componentes $M_1 = B^3$ e $M_2 = B^3$. O grafo associado a esta variedade S^3 está dado na Figura 2.2, onde $c_1 = b_2(M_1) - s_1 + 1 = b_2(B^3) - s_1 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$, $c_2 = b_2(M_2) - s_1 + 1 = b_2(B^3) - s_1 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$, $g(S^2) = 0$.

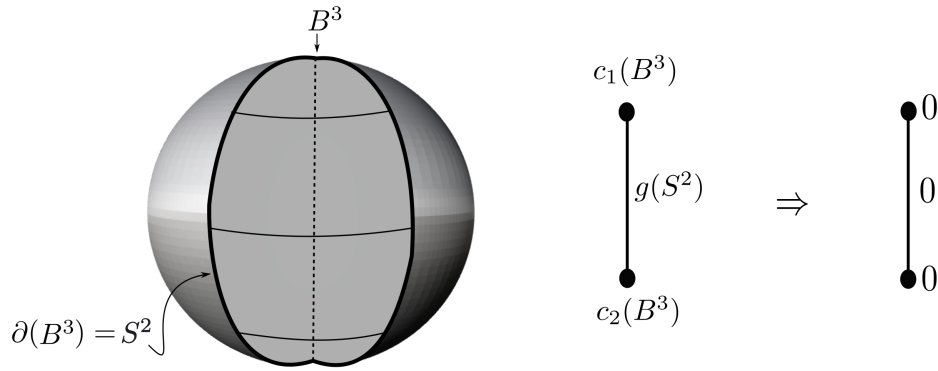


Figura 2.2: Decomposição da S^3 .

Proposição 2.5. Se $M = S^3$ então $c_j = 0$, para todo j .

Demonstração: Seja $\bigcup_{i=1}^n S_i$ um conjunto de superfícies fechadas, compactas, orientadas e disjuntas, considere $\bigcup_{i=1}^n S_i \subset S^3$ e sejam $M_1 = \overline{S^3 \setminus \bigcup_{i=1}^n (S_i)_s}$ e $M_2 = \bigcup_{i=1}^n (S_i)_s$. Para calcular o segundo número de Betti de M_1 .

Observe que $M_1 \cap M_2 = \bigcup_{i=1}^n S_i$ e $M_1 \cup M_2 = S^3$. Agora considere a sequência exata de Mayer-Vietoris para esta partição de S^3 :

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_3(M_1) \oplus H_3(M_2) &\xrightarrow{h_*^3} H_3(S^3) \xrightarrow{\Delta_2} H_2(M_1 \cap M_2) \cdots \\ &\xrightarrow{g_*^2} H_2(M_1) \oplus H_2(M_2) \xrightarrow{h_*^2} H_2(S^3) \xrightarrow{\Delta_1} H_1(M_1 \cap M_2) \cdots \end{aligned}$$

Como $H_3(M_1) = 0$, $H_3(M_2) = 0$, $H_3(S^3) = H_2(S^3) = 0$, $H_2(M_1 \cap M_2) = \mathbb{Z}^n$, $H_2(M_2)$ e $H_1(M_1 \cap M_2) = 0$. Substituindo na sequência a informação que temos, obtemos a seguinte sequência:

$$\cdots \longrightarrow 0 \oplus 0 \xrightarrow{h_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{g_*^2} \mathbb{Z}^{b_2(M_1)} \oplus 0 \xrightarrow{h_*^2} 0 \cdots$$

Usando o primeiro teorema do isomorfismo (ver [28]) e o fato de que a sequência é exata, temos que

$$\frac{H_3(S^3)}{Ker(\Delta_2)} = \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong Im(\Delta_2) = Ker(g_*^2) \Rightarrow Ker(g_*^2) \cong \mathbb{Z}$$

$$\frac{H_2(M_1 \cap M_2)}{Ker(g_*^2)} = \frac{\mathbb{Z}^n}{\mathbb{Z}} \cong Im(g_*^2) = Ker(h_*^2) \Rightarrow Ker(h_*^2) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$$

$$\frac{H_2(M_1) \oplus H_2(M_2)}{Ker(h_*^2)} = \frac{\mathbb{Z}^{b_2(M_1) \oplus 0}}{\mathbb{Z}^{n-1}} \cong Im(h_*^2)$$

e como, $Im(h_*^2) = 0$, então

$$\frac{\mathbb{Z}^{b_2(M_1)}}{\mathbb{Z}^{n-1}} \cong Im(h_*^2) = 0.$$

Por tanto, $b_2(M_1) = n - 1$, pois $(\mathbb{Z}^{b_2(M_1)}/\mathbb{Z}^{n-1}) \cong 0$. Assim $c_0(M_1) = b_2(M_1) - s_i + 1 = (n - 1) - n + 1 = 0$ e $c_i((S_i)_s) = b_2((S_i)_s) - s_i + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$, para todo i . \square

Observação 2.6. Dada uma 3-variedade, os grafos associados a decomposições destas não caracterizam por completo a decomposição, como acontece no caso das superfícies (ver [7]), pois um grafo pode corresponder a decomposições distintas de uma 3-variedade. Para nosso objetivo isto não vai fazer diferença, No próximo exemplo damos um grafo com duas decomposições distintas.

Exemplo 2.7. Considere o grafo ilustrado na Figura 2.3. Ele representa dois toros em S^3 . A componente do complemento entre os dois toros é uma 3-variedade com os dois toros como fronteira, onde b_2 é igual a 1 e seu $c_1 = 0$. Mas isso não distingue do caso onde sua componente é topologicamente $T^2 \times I$ ou $T_s^2 \natural T_s^2$. O que distingue essas duas situações é o segundo grupo de homotopia π_2 .

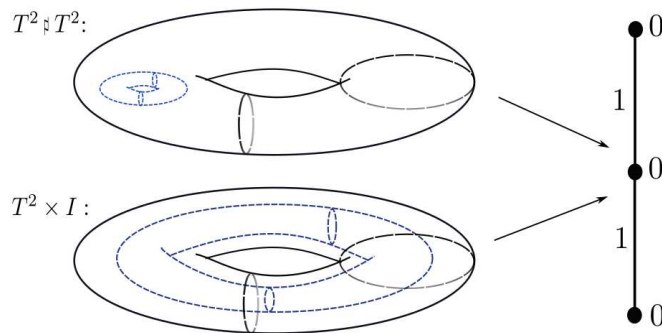


Figura 2.3: Decomposição distinta com mesmo grafo.

Uma 3-variedade M pode ser decomposta em várias 3-variedades com bordo,

como nos Exemplos 2.4 , 2.7. Cada uma destas decomposições tem associados um grafo o qual permite reconstruir M . Daqui em diante estudaremos que tipo de grafos resultam de decompor uma 3-variedade dada.

Decomposição da S^3

A S^3 pode ser decomposta como no Exemplo 2.4. Em geral dada uma coleção de superfícies fechadas orientadas $(S_i)_{i=1}^{\mu}$ em S^3 . Mostraremos no Capítulo 4 que o grafo \mathcal{G} associado a estas superfícies (ou decomposição) é uma árvore e cumpre que $\sum_{j=1}^V c_j = 0$ e $b_2(S^3) \leq \sum_{i=1}^{\mu} g_i$, onde a igualdade é alcançada quando $g_i = 0$, $i = 1, \dots, \mu$ (quando $(S_i)_{i=1}^{\mu}$ são esferas).

Decomposição da $S^2 \times S^1$

A 3-variedade $S^2 \times S^1$ resulta ao identificar $S^2 \times I$ pela fronteira. Agora apresentaremos exemplos para decompor $S^2 \times S^1$.

Exemplo 2.8. Seja $M = S^2 \times S^1$, considere um círculo $S^1 \subset S^2 \times p$, em que $p \in S^1$. Seja o toro $T^2 = S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^1$. O grafo associado à esta decomposição é uma árvore, porque tem somente uma aresta, com peso 1, e dois vértices com peso 0 (cada vértice representa um toro sólido). Como $b_2(S^2 \times S^1) = 1$ (ver isto na Figura 2.4), onde $c_1(T_s^2) = c_2(T_s^2) = b_2(T_s^2) - 1 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$, pois $g(T^2) = 1$ e $s_j = 1$ correspondente a única componente de bordo de T^2 .

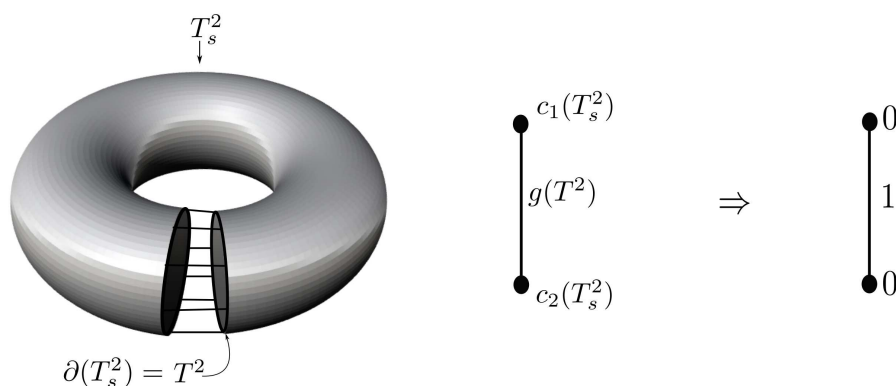


Figura 2.4: Decomposição da $S^2 \times S^1$.

Exemplo 2.9. Seja $M = S^2 \times S^1$. Podemos obter esta 3-variedade ao identificar $S^2 \times I$ pela fronteira. Isto é equivalente a dizer que duas copias $S^2 \times I$ pode ser

identificada o par de bordo de uma com o par de bordo da outra resultando nesta 3-variedade. Assim, o grafo associado a esta decomposição de $S^2 \times S^1$ tem dois vértices, com $S^2 \times I$ correspondente a ambos vértices e duas arestas, que ligam estes vértices, com peso 0 (ver na Figura 2.5), onde $c_1(S^2 \times I) = c_2(S^2 \times I) = b_2(S^2 \times I) - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, pois $s_j = 2$ já que $S^2 \times I$ tem 2 componentes de bordo e $g(S^2) = 0$.

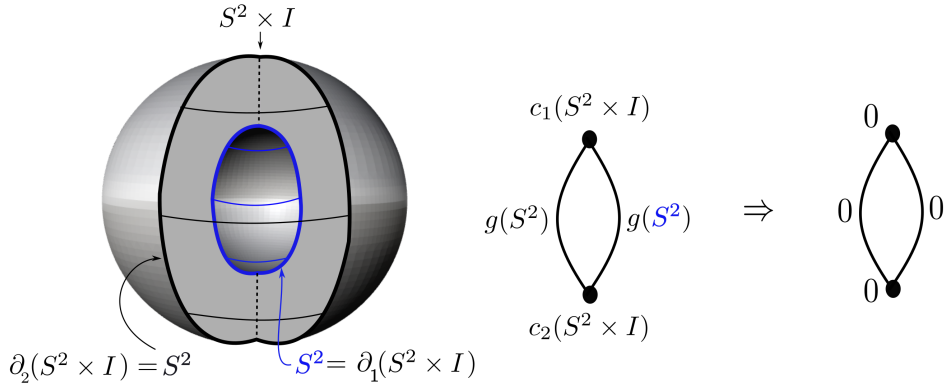


Figura 2.5: Decomposição da $S^2 \times S^1$.

Decomposição do tritoro $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$

Exemplo 2.10. A 3-variedade $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ resulta ao identificar as duas fronteiras de $T^2 \times I$. Isto é equivalente a identificar os bordos de dois copias de $T^2 \times I$. O grafo associado a esta decomposição de T^3 tem dois vértices, correspondentes e duas arestas, que ligam estes vértices, com peso 1 como ilustra a Figura 2.6. Calculando os pesos do grafo temos que $c_1(T^2 \times I) = c_2(T^2 \times I) = b_2(T^2 \times I) - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, pois $s_j = 2$ já que $T^2 \times I$ tem 2 componentes de bordo e $g(T^2) = 1$.

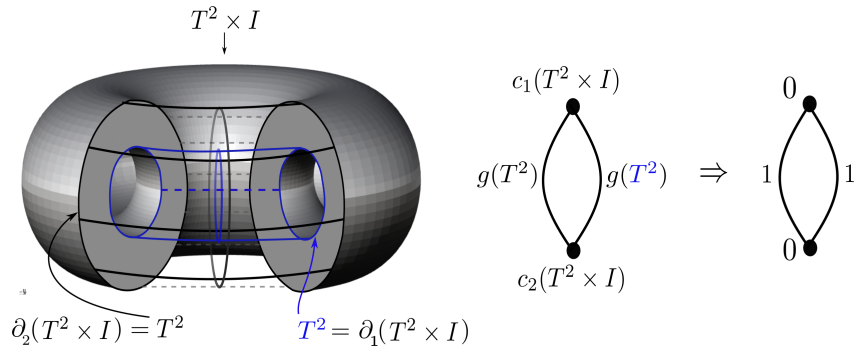


Figura 2.6: Uma decomposição do T^3 .

2.0.2 Cirurgias em decomposição de 3-variedades

Introduziremos agora dois tipos de cirurgia em 3-variedades e veremos seus efeitos no grafo associado. Chamaremos de **cirurgia tipo I** e **cirurgia tipo II**.

Cirurgia tipo I

Definimos a Cirurgia tipo I nos seguintes passos.

- 1) Considere M, N duas 3-variedades e sejam $\bigcup_{i=1}^n S_i \subset M$ e $\bigcup_{j=1}^m S_j \subset N$, superfícies que decompõem M e N , respetivamente.

Definimos a cirurgia $M \# N$ como segue:

- 2) Removendo duas 3-bolas B_1^3 e B_2^3 em M e N respetivamente, tais que $\bigcup_{i=1}^n S_i \cap M = B_1^2$ e $\bigcup_{j=1}^m S_j \cap N = B_2^2$, onde B_1^2 e B_2^2 são dois discos.
- 3) Juntamos as variedades em ∂B_1^3 e ∂B_2^3 por um tubo $S^2 \times I$ (onde B_1^2 e B_2^2 são conectados por um tubo $S^1 \times I$).

A projeção no \mathbb{R}^3 deste tubo não intersepta nenhuma parte das superfícies mergulhadas que decompõem as variedades M e N . Para poder fazer isto, as superfícies originais mergulhadas nas variedades, que tem intersecção com $S^2 \times I$, podem ser movidos para diferentes semi-espacos de \mathbb{R}^3 . As superfícies mergulhadas que decompõe a nova 3-variedade $M \# N$ é a soma conexa $\bigcup_{i=1}^n S_i \# \bigcup_{j=1}^m S_j$.

- 4) Seja $\mathcal{G}(M)$ e $\mathcal{G}(N)$ os grafos associados as 3-variedades M e N . O efeito desta cirurgia sobre $\mathcal{G}(M)$ e $\mathcal{G}(N)$ é mostrado na Figura 2.7.

A soma conexa das superfícies mergulhadas nas variedades M e N é equivalente a soma conexa de superfícies onde o gênero igual a soma das duas superfícies envolvidas.

- 5) O peso no vértice resultante da identificação de dois vértices, correspondente ao peso dos vértice envolvidos, pois se M_i e M_j são as regiões correspondentes aos dois vértices envolvidos com pesos c_i e c_j e M_k é a região resultante, então temos

$$c_k = b_2(M_k) - s_k + 1 = b_2(M_i) + b_2(M_j) - (s_i + s_j - 1) + 1 = c_i + c_j.$$

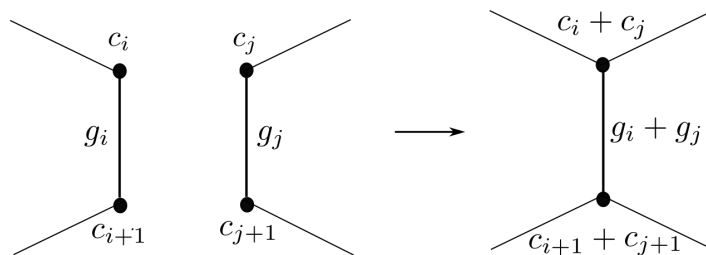


Figura 2.7: Grafo da cirurgia tipo I.

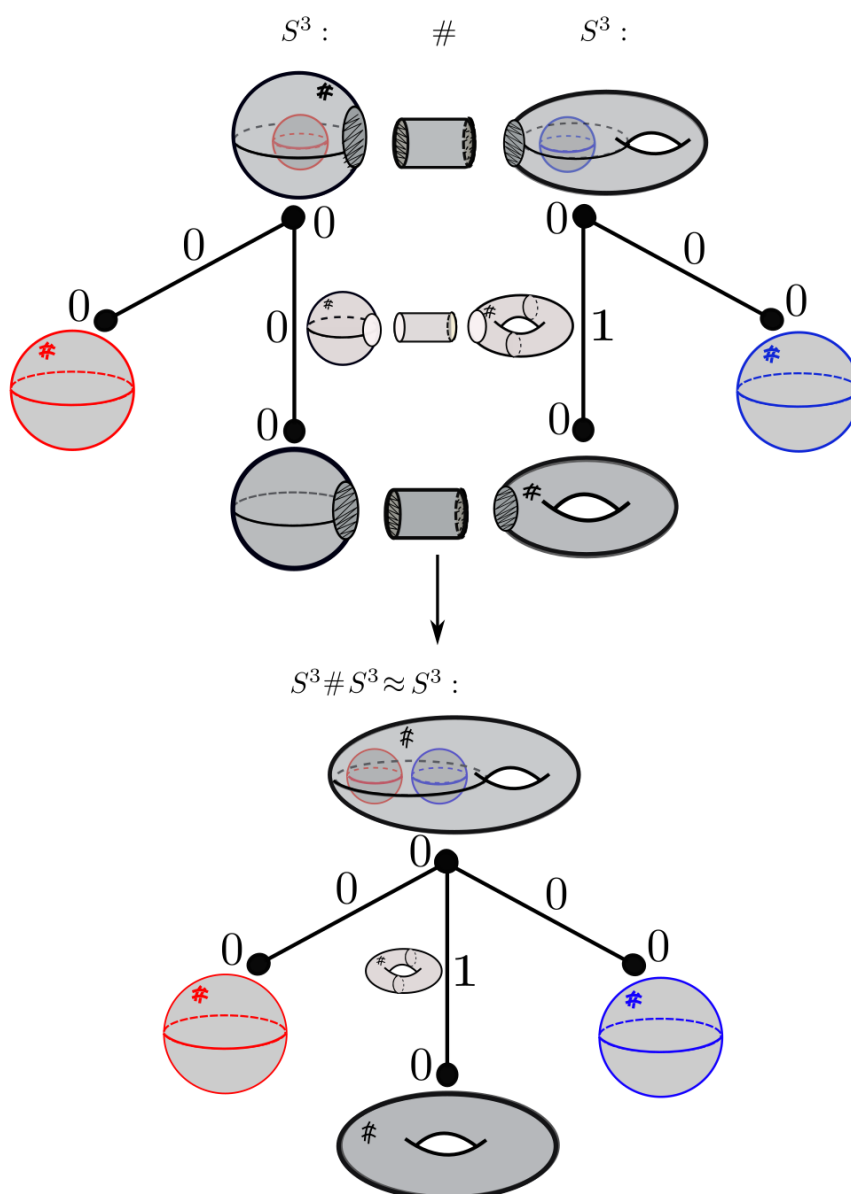


Figura 2.8: Exemplo da cirurgia tipo I do grafo da S^3 .

Exemplo 2.11. A Figura 2.8 ilustra uma cirurgia do tipo I, entre duas decomposições da S^3 , correspondentes a grafos com duas arestas.

Cirurgia tipo II

A cirurgia tipo II é construída da seguinte forma: seja $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ um conjunto de superfícies que decompõem a 3-variedade M , não necessariamente conexa. Remova duas 3-bolas B_1^3 e B_2^3 em M , sem interceptar S . Una os bordos de $M \setminus B_1^3 \cup B_2^3$ por um tubo $S^2 \times I$, com S^2 que separa este tubo em dois tubos iguais. Esta cirurgia adiciona uma S^2 a S , e é adjacente aos dois componentes das superfícies originais, onde as duas 3-bolas foram retiradas acrescentadas com parte do tubo. Chamaremos a 3-variedade resultante desta cirurgia de M_ν . As duas regiões envolvidas, após a cirurgia, tem um novo gerador de H_2 . A S^2 é adicionada ao conjunto S , mas as duas componentes regulares tem uma nova superfície no bordo (a mesma S^2), então o peso não varia. O grafo resultante pode ser visto na Figura 2.9.

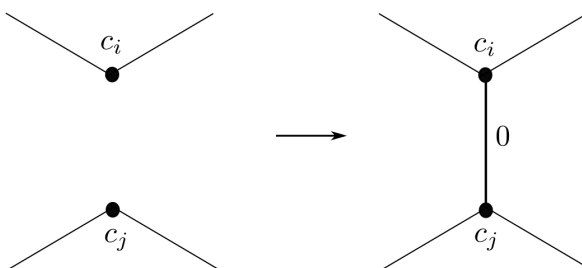


Figura 2.9: Grafo da cirurgia tipo II.

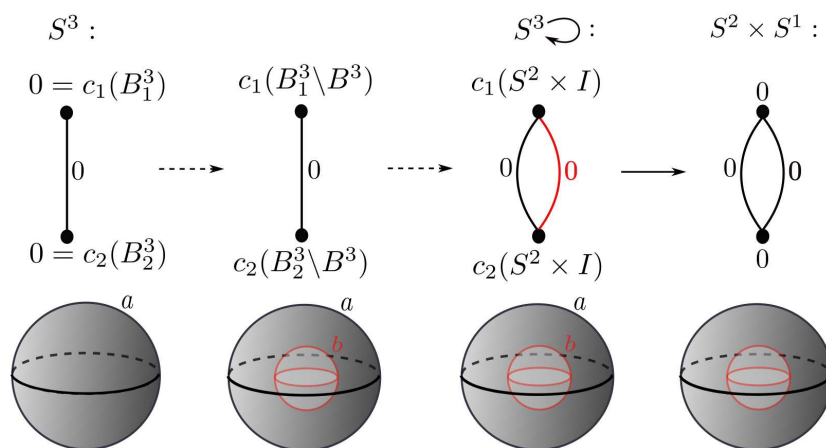


Figura 2.10: Grafo da cirurgia tipo II na S^3 .

Exemplo 2.12. Considere a decomposição da S^3 no Exemplo 2.4. Primeiro fazendo uma cirurgia do tipo 2 nesta variedade. Sabemos que $S^3 = B_1^3 \otimes B_2^3$, onde B_i^3 são bolas tridimensionais. Retiramos uma bola B^3 de cada uma das bolas B_i^3 , $i = 1, 2$. Unimos os bordos do complementar das bolas retiradas com

o tubo $S^2 \times I$. Esta colagem pode ser feita como na cirurgia do tipo 2. Assim, o resultado desta cirurgia é a variedade $S^2 \times S^1$. Graficamente temos isto na Figura 2.10.

Teorema 2.13. *Qualquer grafo pesado pode ser visto como o grafo de algum par (M, S) , onde S é uma coleção de superfícies fechadas mergulhadas em M .*

Demonstração: Suponha primeiro que \mathcal{G} é um grafo com peso 0 em todos seus vértices e pesos p_j aleatórios em suas arestas.

Seja \mathcal{G}_i o fecho do subconjunto de \mathcal{G} composto pelo vértice v_i e todas as semi-arestas (arestas cortadas nos seus pontos médios) incidentes a ele. Associamos então à \mathcal{G}_i uma 3-variedade com bordo em \mathbb{R}^4 da seguinte forma: Mergulhe \mathcal{G}_i em \mathbb{R}^4 e seja R_i uma vizinhança tubular de \mathcal{G}_i em \mathbb{R}^4 . Esta vizinhança tubular pode ser vista como a união de vizinhanças tubulares do vértice V_i , das semi-arestas e dos pontos finais de cada semi-aresta. Em cada um desses pontos finais podemos considerar o bordo S^3 de um 4-disco.

Esta S^3 pode ser decomposta como a união de dois p -toros orientáveis sólidos com seus bordos convenientemente identificados, onde p é o peso da aresta correspondente.

Unindo convenientemente todas essas 3-variedades pelo seu bordo, de acordo com a distribuição dos seus vértices no grafo, obtemos uma 3-variedade M_1 compacta e com bordo e uma coleção de superfícies orientáveis fechadas cujo grafo associado ao par (M, S) é \mathcal{G} .

Agora, se os vértices de \mathcal{G} tem pesos não nulos, precisamos apenas adicionar em cada região M_i da construção anterior tantas alças do tipo $S^2 \times I$ quanto indicadas pelo peso do vértice correspondente pois cada alça aumenta por 1 o b_2 e não altera o número de componentes do bordo, conseqüentemente o peso c_i no vértice v_i aumenta por 1. □

Capítulo 3

Aplicações estáveis entre variedades

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades, de aplicações estáveis entre 3-variedades. As referências para este capítulo são [6], [21], [24].

3.1 Aplicações Estáveis

Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades diferenciáveis de classe \mathcal{C}^∞ de dimensões m e n , respetivamente. Considere $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ o conjunto de todas as aplicações de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{M} em \mathcal{N} . A **topologia** \mathcal{C}^∞ de **Whitney** em $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ é definida como segue. Seja $\epsilon > 0$ um número real, então uma vizinhança fundamental de $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ é o conjunto

$$\{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}) : \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha} - \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial^\alpha} \right| < \epsilon\},$$

onde α percorre todas as n -*uplas* de números naturais $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Além disso,

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_n}}.$$

Espaço $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Consideremos $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}, f \in \mathcal{C}^\infty\}$ o conjunto das aplicações suaves de \mathcal{M} em \mathcal{N} .

Definição 3.1. *Sejam f e g elementos de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, então f é **A-equivalente** à g se existem difeomorfismos $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ e $k : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ tais que o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ h \downarrow & \searrow & \downarrow k \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{g} & \mathcal{N} \end{array}$$

Definição 3.2. *Uma aplicação $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ é **estável** se existe uma vizinhança aberta \mathcal{W}_f de f em $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ com a topologia C^∞ – Whitney, tal que cada $g \in \mathcal{W}_f$ é A-equivalente a f .*

O conjunto das aplicações estáveis de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ é denotado por $\mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Definição 3.3. *O conjunto $\Delta = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, complementar do conjunto das aplicações estáveis em $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, é chamado de conjunto **discriminante**.*

Definição 3.4. *Duas aplicações $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ são ditas **isotopicamente estáveis** se existe uma aplicação de classe C^∞ , $F : \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$ tal que*

- $F_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é estável para cada $t \in [0, 1]$, sendo $F_t(p) = F(p, t)$.
- $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

Temos $F_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é continua para cada $t \in [0, 1]$, sendo $F_t(p) = F(p, t)$; $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

3.2 Aplicações estáveis de 3-variedade fechada no \mathbb{R}^3

No presente trabalho, estamos interessados no estudo de aplicações estáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é uma 3-variedade compacta, orientável e sem bordo. Por essa razão, a partir de agora, a menos que façamos menção do contrário, vamos a considerar aplicações estáveis deste tipo.

Nesta secção, vamos apresentar alguns resultados relativos à aplicações estáveis em $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$. Os teoremas apresentados nesta secção são devidos a Whitney [3],[26] e [27].

Teorema 3.5. *As aplicações estáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ formam um conjunto denso no espaço das aplicações $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.*

Definição 3.6. *Seja $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ uma aplicação suave. O **conjunto singular** de f , denotado por Σf , é o conjunto formado pelos pontos de M , onde a diferencial de f não tem posto máximo. A imagem do conjunto singular, $f(\Sigma f)$, é chamado de **conjunto de bifurcação** de f e é denotado por Bf .*

Definição 3.7. *Um ponto $r \in M - \Sigma f$ é dito um **ponto regular** de f . Um ponto $z \in \mathbb{R}^3$ é chamado **valor regular** de f se $f^{-1}(z)$ contém somente pontos regulares.*

3.2.1 Conjunto singular Σf e bifurcação $Bf = f(\Sigma f)$

Segundo Whitney, o conjunto singular Σf de uma aplicação estável f consiste de superfícies disjuntas mergulhadas em M . Cada superfície consiste de **pontos de dobra**, curvas de **pontos cuspidais** (pontos cuja imagem é um ponto de cúspide do conjunto discriminante $f(\Sigma f)$), onde podem existir **pontos de rabo de andorinha** isolados (ver Figura 3.1).

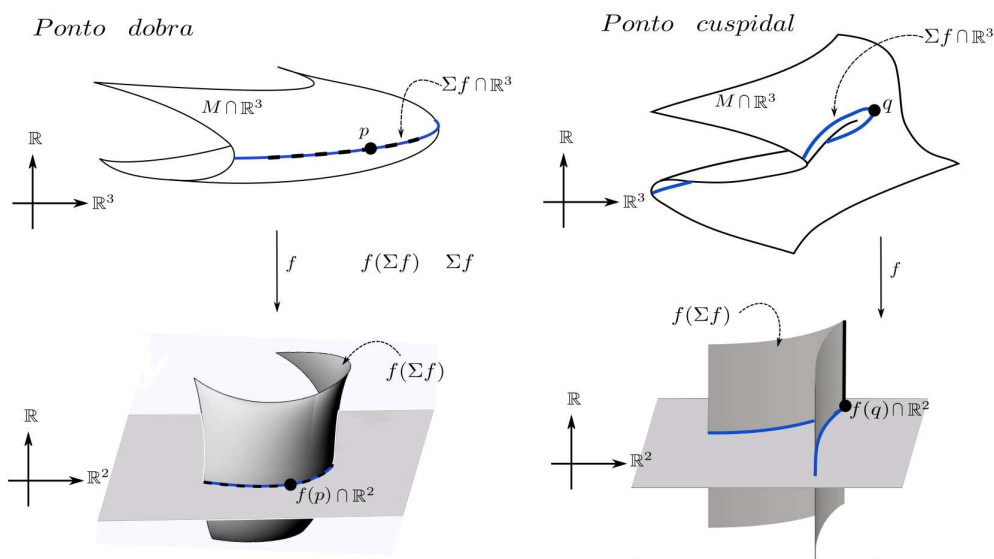


Figura 3.1: Aplicações estáveis

O conjunto de bifurcação de f , denotado por $Bf = f(\Sigma f)$, consiste de um conjunto de superfícies no 3-espaço, não necessariamente disjuntas (pode ter auto-interseções). A seguir, temos as formas normais dos germes desses pontos singulares no conjunto de bifurcação Bf :

A_1 ; ponto de dobra, onde localmente podemos escrever f como $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$;

A_2^\pm ; aresta cuspidal, composta por pontos de cúspide, ou seja, onde localmente f tem forma normal $(x, y, z) \mapsto (\pm x^3 + yx, y, z)$;

A_3^\pm ; pontos rabo de andorinha, onde localmente f é $(x, y, z) \mapsto (\pm x^4 + yx^2 + zx, y, z)$;

Por outro lado, o conjunto de bifurcação $Bf = f(\Sigma f)$ de uma aplicação estável f pode ter auto-interseções das seguintes formas:

A_1^2 ; Interseção transversal de duas superfícies dobra (ao longo de curvas regulares);

A_1^3 ; pontos triplos isolados, obtidos pela intersecção de superfícies dobra;

$A_2^\pm A_1$; interseção transversais de de aresta cuspidal com uma superfície dobra.

Dois arestas cúspidas de sinais opostos se encontram em um rabo de andorinha. Um rabo de andorinha é positivo caso o flanco positivo gira para a borda negativa sentido anti-horário como visto do lado piramidal da superfície (ver Figura 3.2).

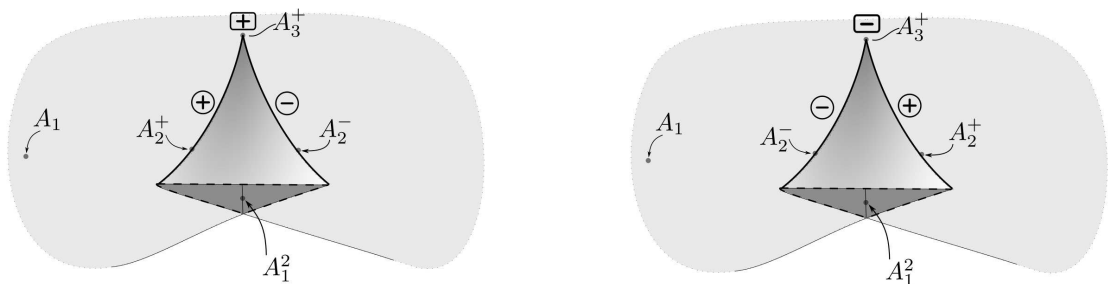


Figura 3.2: Rabo de andorinha positivo e negativo.

As componentes (superfícies) do conjunto singular Σf , de uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, separam a 3-variedade M em regiões conexas, que são as componentes do complemento $M - \Sigma f$.

Observação 3.8. Existe uma maneira natural de atribuir sinais \pm a cada uma das regiões do complemento $M - \Sigma f$. Dado uma orientação para a 3-variedade M , uma região R do complemento $M - \Sigma f$ é positiva se em R a aplicação f preserva a orientação, caso contrário, se f inverte a orientação, R é negativa.

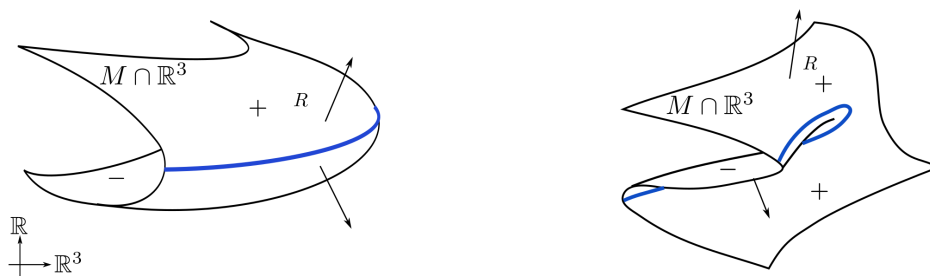


Figura 3.3: Orientação dos componentes de f .

Note que uma superfície de Σf está sempre separando as regiões de sinais opostos.

Exemplo 3.9. Na Figura 3.4 temos f_1, f_2 exemplos de aplicações dobra da 3-esfera S^3 no espaço \mathbb{R}^3 . As superfícies que compõem o conjunto singular (as superfícies de dobra) não podem ser desenhadas na 3-variedade, na Figura 3.4 são mostradas as imagens do conjunto singular que formam as superfícies do conjunto de bifurcação (superfícies mergulhadas no \mathbb{R}^3). Na aplicação f_1 temos como conjunto singular 3 superfícies disjunta homeomorfas a uma S^2 e divide a S^3 em 4 componentes, na aplicação f_2 temos 5 superfícies como conjunto singular e divide S^3 em 6 componentes.

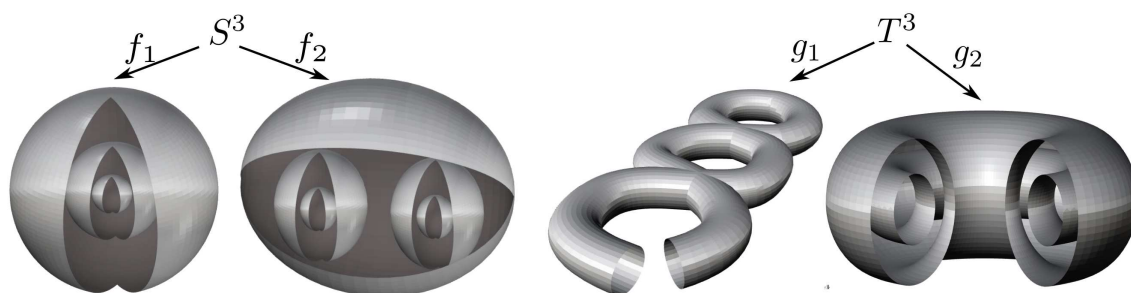


Figura 3.4: Exemplos de aplicações dobra da S^3 e do tritoro T^3 .

Observação 3.10. As aplicações estáveis que estamos estudando, isto é, aplicações estáveis de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, não são sobrejetoras já que seus domínios são 3-variedades compactas (também orientáveis e sem bordo).

3.2.2 Aplicações de codimensão 1

Lembremos que $\Delta = C^\infty(M, \mathbb{R}^3) \setminus \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$, onde $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ é o conjunto de todas as aplicações de M em \mathbb{R}^3 e $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ é o conjunto das aplicações estáveis de M em \mathbb{R}^3 . Consideremos uma homotopia

$$F : M \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, t) \longrightarrow F(x, t) = F_t(x)$$

entre duas aplicações estáveis $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, no conjunto $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$. A medida em que t varia no intervalo $[a, b]$ o conjunto de bifurcação de $F_a = f$ é deformado no conjunto de bifurcação de $F_b = h$. Pode acontecer que para algum $t_0 \in [a, b]$ a aplicação F_{t_0} está em Δ . Se f e h são \mathcal{A} -equivalentes, então não necessariamente existe o $t_0 \in [a, b]$ tal que $F_{t_0} \in \Delta$. Agora se f e h não são \mathcal{A} -equivalentes então necessariamente existe pelo menos um $t_0 \in [a, b]$ tal que $F_{t_0} \in \Delta$. (ver Figura 3.5).

Observação 3.11. As aplicações estáveis em $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ tem **codimensão zero** dentro do espaço $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ e o conjunto discriminante Δ está formado pelas aplicações não estáveis de codimensão maior ou igual a 1. A codimensão de uma aplicação f , no espaço $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ pode ser vista na referência [4] não aprofundaremos em mais detalhes deste trabalho. O necessário aqui será conhecer as informações topológicas no domínio e imagem das aplicações de codimensão 1.

O conjunto discriminante Δ pode ser visto como “paredes” (de dimensão infinita) formado pelas aplicações de codimensão 1 e nas intersecções destas paredes estão as aplicações de codimensões maiores que 1. Δ separa $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ em componentes conexas por caminhos em $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$. A Figura 3.5 ilustra uma configuração simbólica de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ e Δ que pode ser obtido pela interseção se um plano com o conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$.

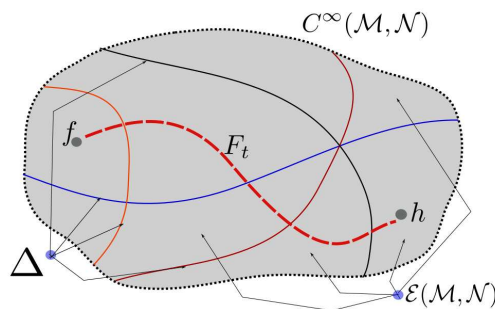


Figura 3.5: $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$, $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^3)$ e Δ .

3.2.3 Transição de codimensão 1

A Figura 3.6 mostra algumas transições de codimensão 1 (multi-germes) dadas em [5]. Estas transições não serão estudadas neste trabalho pois não alteram o conjunto singular de uma aplicação. As transições que alteram o conjunto singular estão dadas na Figura 3.7.

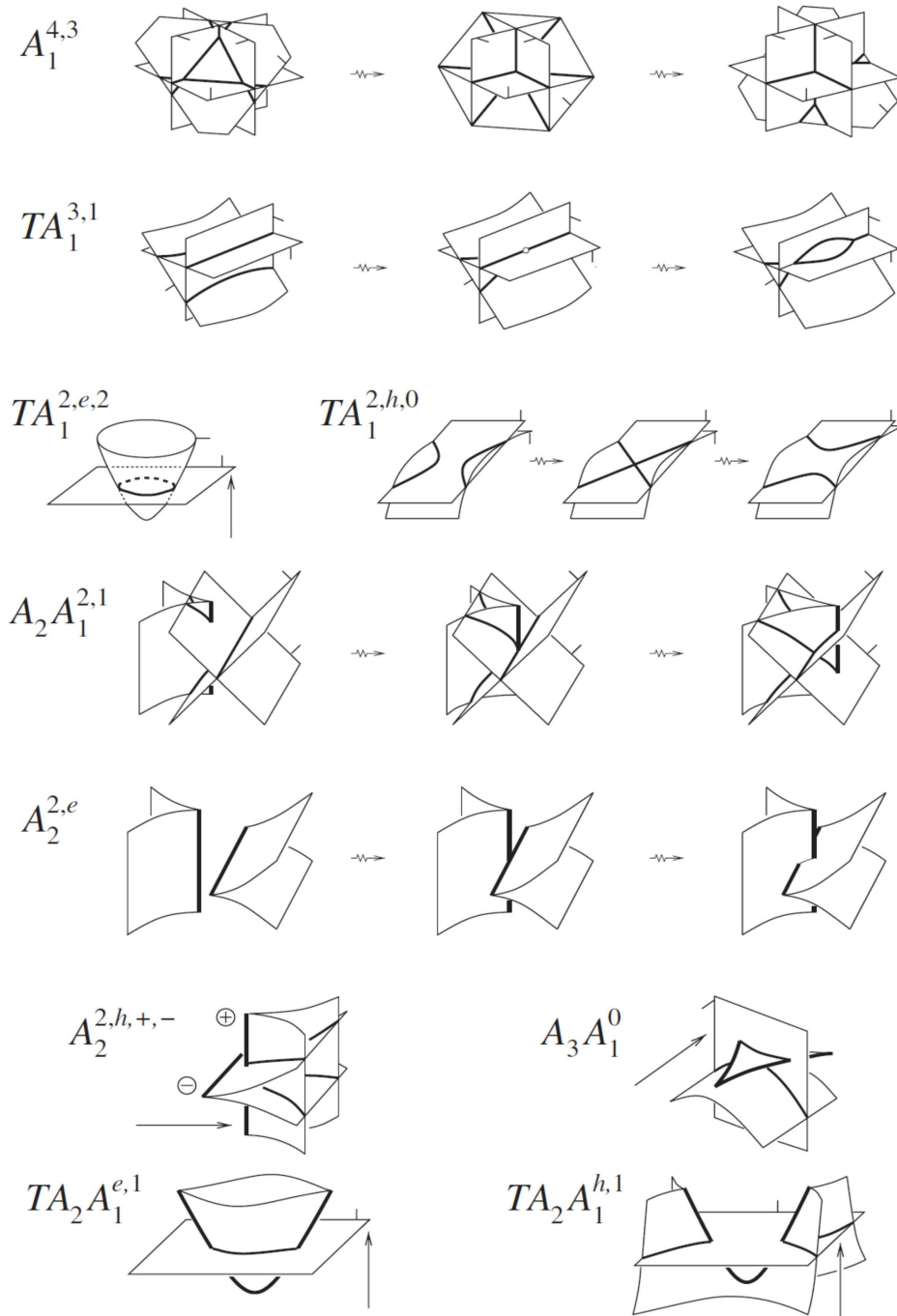


Figura 3.6: Transições codimensão 1 mono-germes. Estas imagens foram tiradas do Gurnov [6].

A Figura 3.7 mostra transições de codimensão 1 (uni-germes). As formas normais das aplicações de transição são tomadas de [5]. O sinal do parâmetro λ real, nas fórmulas locais nos diz que:

As aplicações são estáveis para $\lambda \neq 0$ e não estáveis para $\lambda = 0$ (figuras dos extremos esquerdo e direito são estáveis e as figuras do centro são as não estáveis, dadas na Figura 3.7). Visto que todas as famílias têm formas normais $(h(x, y, z, \lambda), y, z)$, estamos listando apenas as funções h .

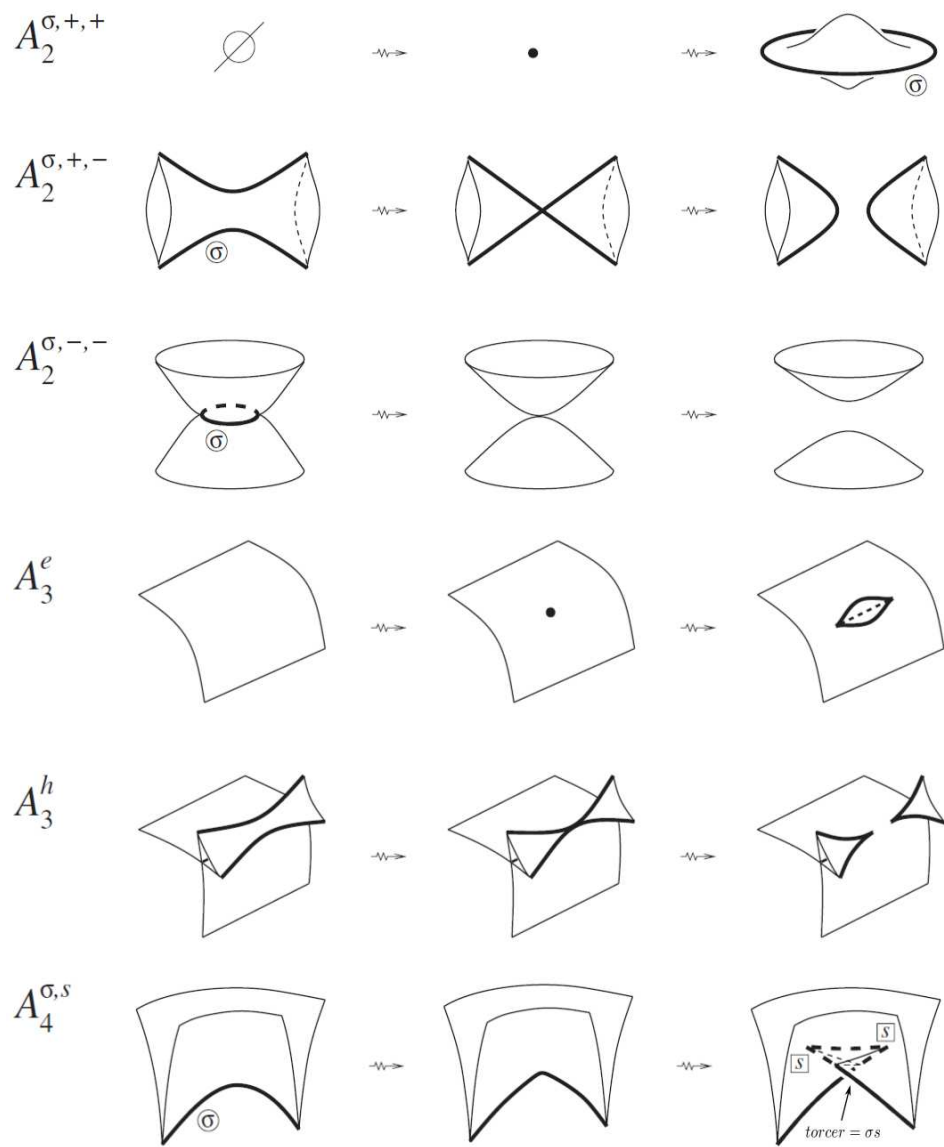


Figura 3.7: Alguns transições codimensão 1 mono-germes. Estas imagens foram tiradas do Gurynov [6].

$A_2^{\sigma,+,+} : \pm(x^3 + (y^2 + z^2 - \lambda)x)$, nascimento de um disco voador. Aqui σ é o sinal do eixo cuspidal, e os dois mais na notação são os sinais dos quadrados dos

coeficiente de x ;

$A_2^{\sigma,+,-}$: $\pm(x^3 + (y^2 - z^2 + \lambda)x)$, transformação hiperbólica de um eixo cuspidal;

$A_2^{\sigma,-,-}$: $\pm(x^3 - (y^2 + z^2 + \lambda)x)$, morte de uma componente compacta de um eixo cuspidal;

A_3^e : Nascimento do lábio cuspidal com dois pontos de rabo de andorinha;

A_3^h : Bifurcação de bicos num eixo cuspidal.

Para nosso trabalho só precisaremos estas 5 transições listadas $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$, $A_2^{\sigma,-,-}$, A_3^e , A_3^h . Outras transições de codimensão 1 (1 – *germes* e 2 – *germes*) consultar [6],[21].

Observação 3.12. Então diremos que uma transição tem sentido positivo, se a transição segue na direção que indicam as setas “ \rightsquigarrow ”, como nas Figuras 3.6 e 3.7. Agora se as transições seguem o sentido oposto (se as setas são invertidas nas Figuras 3.6 e 3.7). Então dissemos que as transições tem sentido negativo, denotaremos isto com um sinal negativo frente ao símbolo da transição.

- Se a transição tem sinal positivo, escrevemos: $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$, $A_2^{\sigma,-,-}$, A_3^e , A_3^h .
- Se a transição tem sinal negativo, escrevemos: $-A_2^{\sigma,+,+}$, $-A_2^{\sigma,+,-}$, $-A_2^{\sigma,-,-}$, $-A_3^e$, $-A_3^h$.

Observação 3.13. As classes de homotopia de $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ são conexas por caminhos, logo existe um caminho em $C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ que conecta duas aplicações em diferentes componentes conexas de cada classe de homotopia que atravessa Δ , passando somente por aplicações de codimensão 1.

Orientação das superfícies do conjunto de bifurcação $Bf = f(\Sigma f)$

Dada uma aplicação f , lembremos que o conjunto de bifurcação Bf esta formado por superfícies fechadas mergulhadas em \mathbb{R}^3 . Existe uma maneira natural de definir uma orientação para cada uma destas superfícies.

Definição 3.14. Dada uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $T_i \in Bf$ (superfície em \mathbb{R}^3), existe um $S_i \in \Sigma f$ tal que $T_i = f(S_i) \subset \mathbb{R}^3$. Definimos uma orientação para a superfície T_i na direção onde a 3-variedade é dobrada por f , nas vizinhanças

dos pontos de S_i . Como T_i é uma superfície, então sua orientação por f é para fora o para dentro da superfície. Denotaremos isto por uma linha “|” na direção da orientação da superfície (ver Figura 3.8), apontando para o lado que aumenta o número de pré-imagem.

A orientação definida em 3.14 é útil para diferenciar aplicações, como podemos notar entre as aplicações f e h_2 dadas na Figura 3.8.

Duas superfícies no conjunto de bifurcação Bf serão ditas que são bordos da mesma região se tem orientações opostas, como podemos notar nas aplicações h_2 .

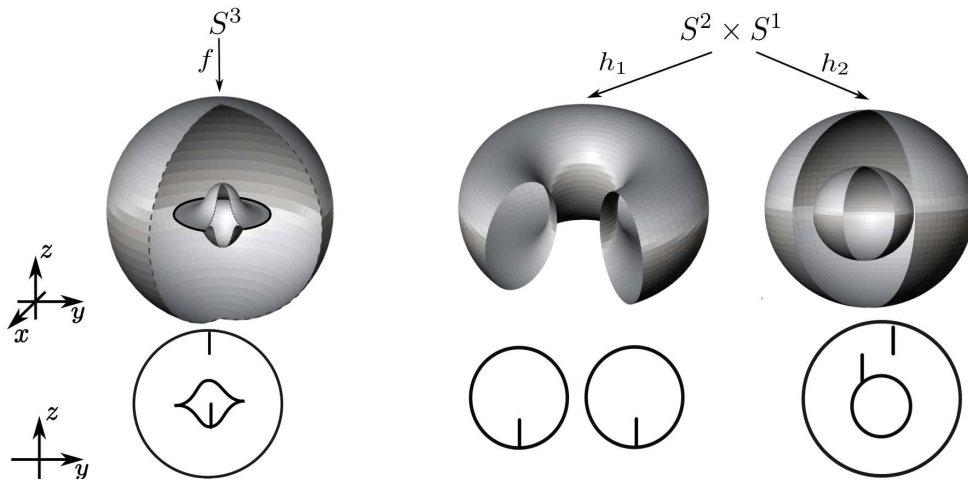


Figura 3.8: Exemplos de orientação do conjunto Bf .

3.3 Efeitos de transições de codimensão 1

O nosso interesse nestas transições de codimensão 1, são aquelas que alteram o número de componentes singulares de Σf e o número de componentes em $M - \Sigma f$. Também as que alteram na imagem o número de eixos cuspidais e pontos de rabo de andorinha. As transições que fazem isto são as 5 transições dadas na Figura 3.7 que são: $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$, $A_2^{\sigma,-,-}$, A_3^e e A_3^h .

- A transição $A_2^{\sigma,+,+}$, mais especificamente cria (ou remove) uma componente no conjunto singular, uma componente em $M - \Sigma f$ e cria (o remove) um eixo cuspidal no conjunto de bifurcação $f(\Sigma f)$.
- A transições $A_2^{\sigma,+,-}$ e $A_2^{\sigma,+,+}$, sentido positivo mudam o genus da superfície no conjunto singular, se as duas componentes locais no fim da transição pertencem a mesma componente conexa, no outro caso cria uma nova componente em $M - \Sigma f$ e uma superfície no conjunto singular Σf .

Na Figura 3.9 temos um exemplo de transições de aplicações de $h_i : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ com as transições $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$ e $A_2^{\sigma,-,-}$.

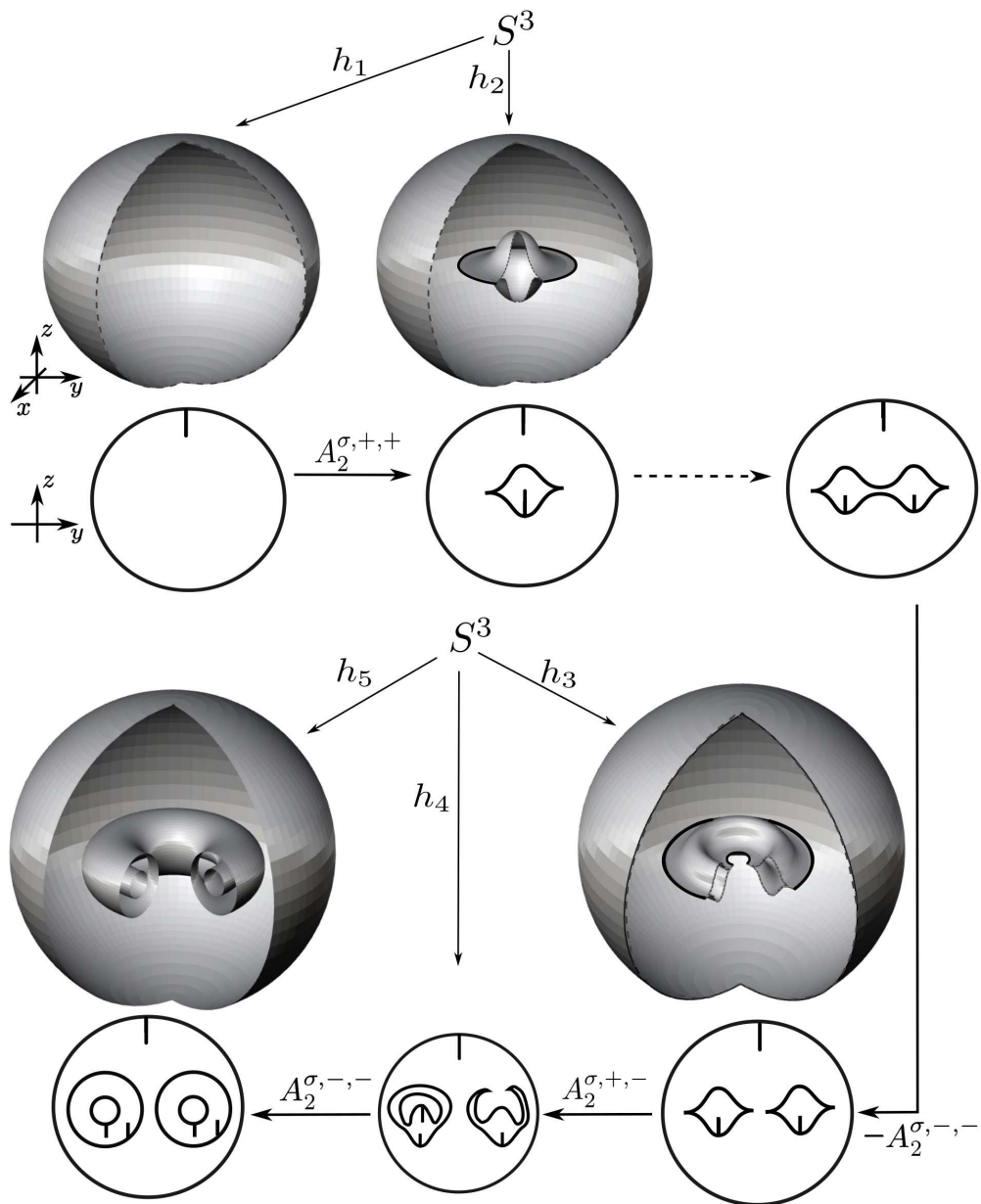


Figura 3.9: Transição da S^3 .

- A transição A_3^e , cria (o remove) um lábio cuspidal (rabo de andorinha) que esta formada por dois metades de um eixo cuspidal (de sinais opostas) e unidas por dois pontos de rabo de andorinha.
- **a)** A transição A_3^h no sentido positivo cria um lábio cuspidal. **b)** Se a transição A_3^h vai no sentido oposto (negativo) então cria dois eixos cuspidais e remove um lábio cuspidal, quando os pontos de rabo de andorinha

pertencem a um mesmo lábio cuspidal. E remove um lábio cuspidal se os pontos de rabo de andorinha pertencem a dois lábios cuspidais distintos.

Na Figura 3.10 temos um exemplo de transições de aplicações $f_i : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ com as transições $A_2^{\sigma, -, -}$, A_3^e e A_3^h .

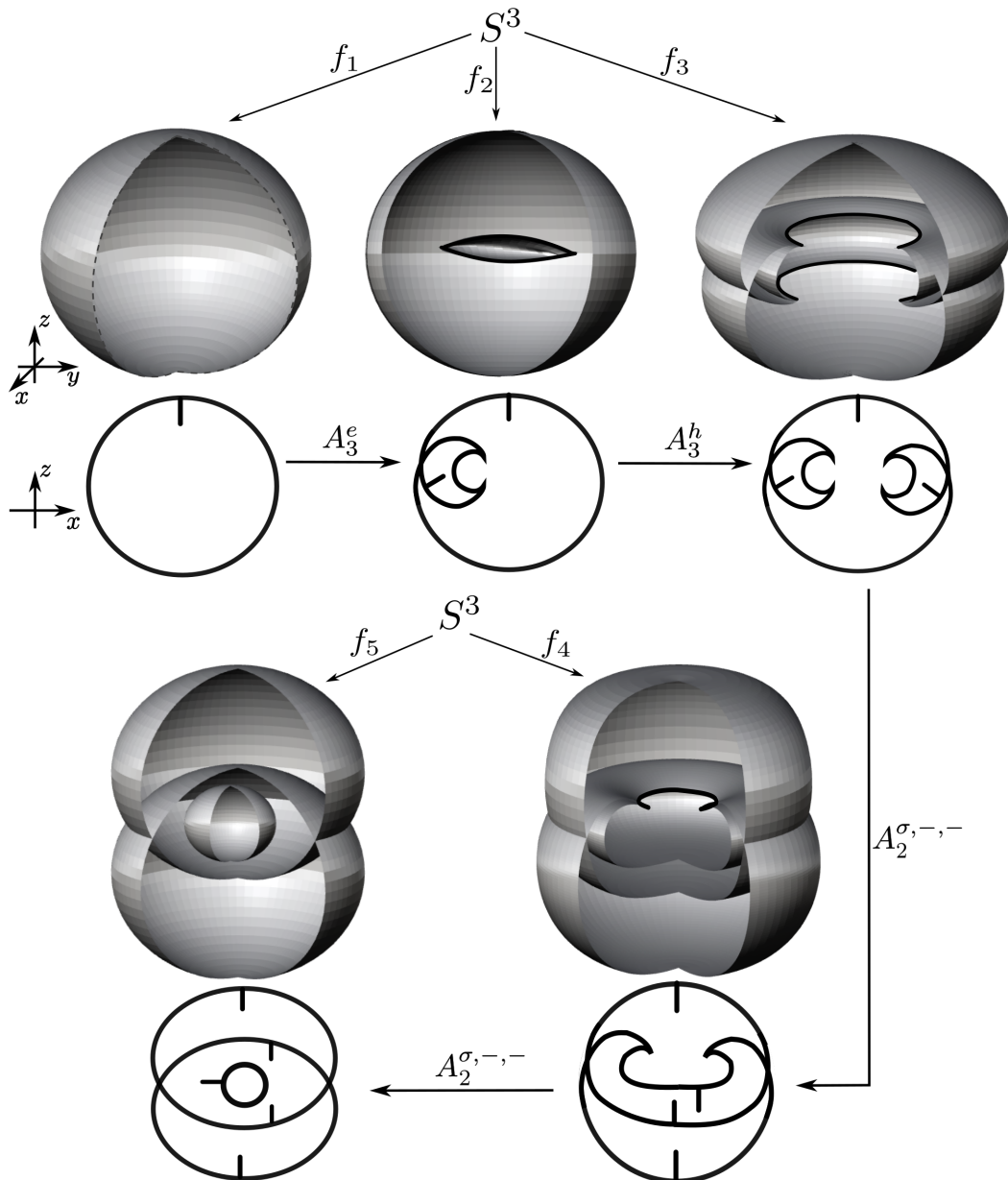


Figura 3.10: Transição da S^3 .

Da Figura 3.10, o conjunto singular é alterado da com as transições na figura da seguinte forma:

- i) A_3^e cria um eixo cuspidal com dois rabos de andorinha que une curvas de

pontos duplos. Isto nas aplicações f_1 e f_2 .

ii) A_3^h cria dois eixos cuspidais ao tempo que remove um lábio cuspidal. Isto nas aplicações f_2 e f_3 .

iii) $A_2^{\sigma, -, -}$ cria uma componente do conjunto singular, uma componente no conjunto $M - \Sigma f$ e remove um eixo cuspidal no conjunto de bifurcação. Isto nas aplicações f_3 e f_4 .

iv) $A_2^{\sigma, -, -}$ cria uma componente do conjunto singular, uma componente no conjunto $M - \Sigma f$ e remove um eixo cuspidal no conjunto de bifurcação. Isto nas aplicações f_4 e f_5 .

Capítulo 4

Grafos associado às aplicações estáveis de 3-variedades fechadas no \mathbb{R}^3

No Teorema 2.13 do Capítulo 2, vimos que todo grafo pesado (grafos com pesos nos vértices e arestas) pode ser associado a um par (M, \mathcal{C}) , onde M é uma 3-variedade fechada e \mathcal{C} é um conjunto de superfícies fechadas, sem auto-intersecção e disjuntas mergulhadas em M . Deste modo aparecem várias perguntas que podem ser feitas:

- Existe alguma aplicação estável de M sobre \mathbb{R}^3 que tenha \mathcal{C} como conjunto singular? Esta pergunta equivale a seguinte pergunta:
- Quais grafos com pesos inteiros nos vértices e arestas estão associados a alguma aplicação de M em \mathbb{R}^3 ?
- Quais são os possíveis grafos para aplicações estáveis de uma dada 3-variedade fechada M em \mathbb{R}^3 ?

O objetivo deste capítulo é estudar como o grafo associado a uma aplicação estável altera quando é submetido as transições $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$, $A_2^{\sigma,-,-}$, A_3^e e A_3^h , estudadas no Capítulo 3.

Apresentamos também técnicas de cirurgias de aplicações estáveis e seus efeitos nos grafos associados a estas aplicações. Estas técnicas são aplicadas para responder as perguntas acima.

4.1 Grafos de aplicações estáveis

Dada uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde M uma 3-variedade, Σf é o conjunto singular de f (que são superfícies orientadas mergulhadas em M). Pela Definição 2.3 temos um grafo pesado \mathcal{G}_f associado ao par $(M, \Sigma f)$. Na Figura 4.1 temos três exemplos de aplicações da S^3 no \mathbb{R}^3 .

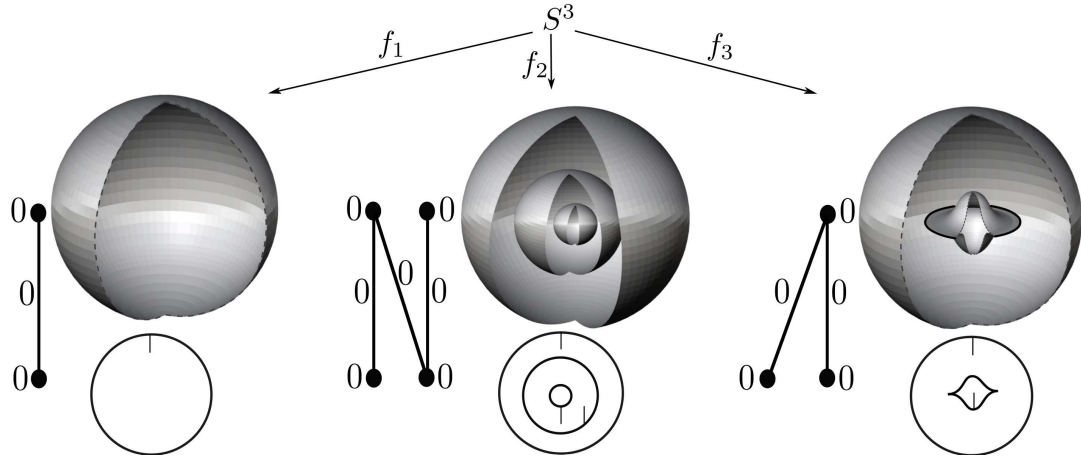


Figura 4.1: Grafo associado a aplicações.

Proposição 4.1. *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação estável, então \mathcal{G}_f é bipartido, onde \mathcal{G}_f é o grafo associado à f .*

Demonstração: Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação estável e \mathcal{G}_f o grafo associado a esta aplicação. Vimos na Observação 3.8 que cada região do complemento $M - \Sigma f$ recebe um sinal \pm . Isto dá uma maneira natural de atribuir sinais aos vértices de \mathcal{G}_f , onde cada vértice recebe o sinal da região correspondente. Como Σf separa regiões de sinais opostos, cada aresta de \mathcal{G}_f conecta vértices de sinais opostos. Com isso, \mathcal{G}_f é bipartido. \square

4.1.1 Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f

Vimos na Seção 3.3 do Capítulo 2, que as transições que alteram o conjunto singular são $A_2^{\sigma,+,+}$, $A_2^{\sigma,+,-}$ e $A_2^{\sigma,-,-}$, são as mesmas que alteram o grafo \mathcal{G}_f associado ao par $(M, \Sigma f)$. A Figura 4.2 mostra os efeitos e são como segue:

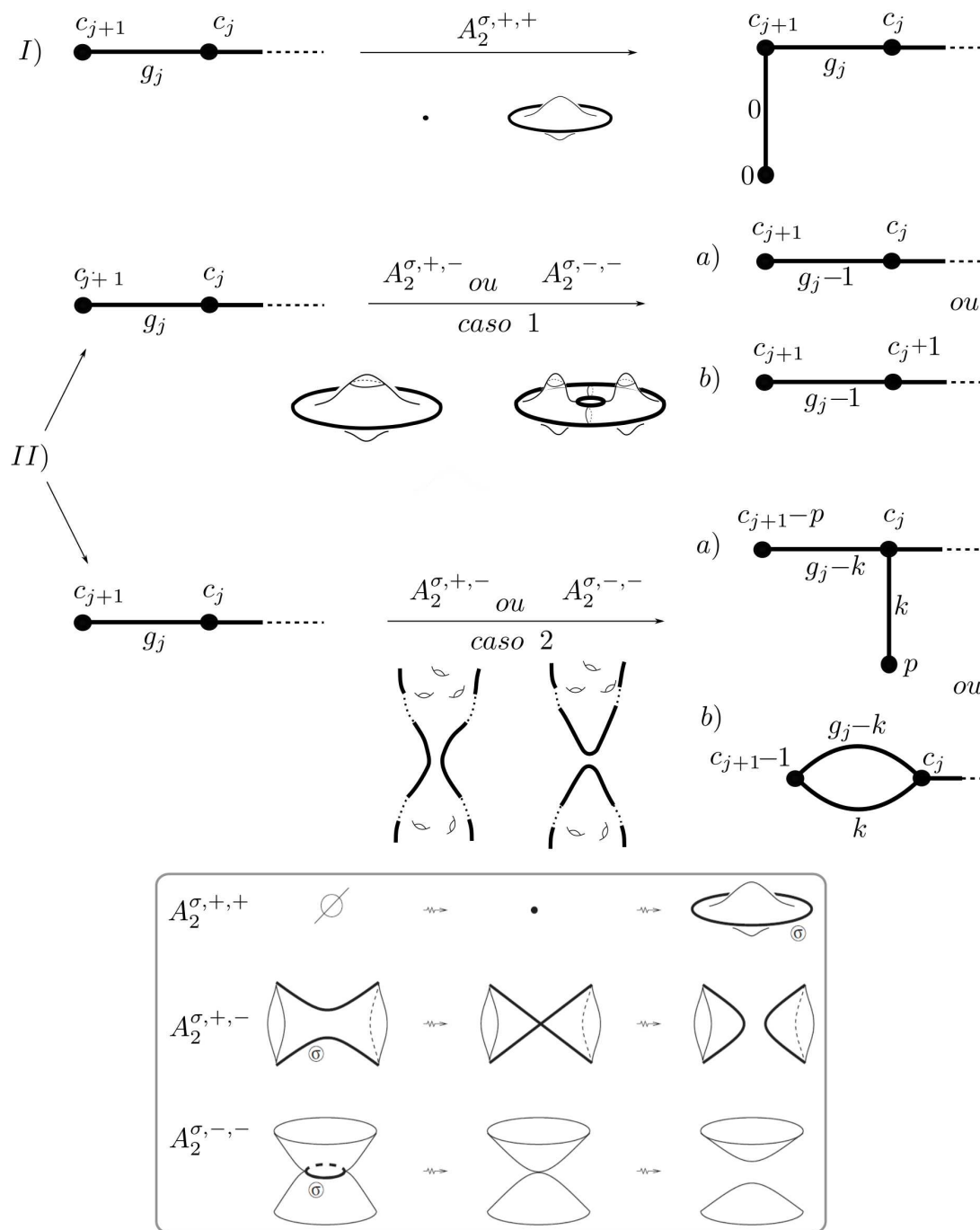


Figura 4.2: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f .

I) A singularidade $A_2^{\sigma,+,+}$ cria (ou remove) uma aresta com peso zero que termina em um vértice de peso zero. Um exemplo disto ocorre na Figura 4.3.

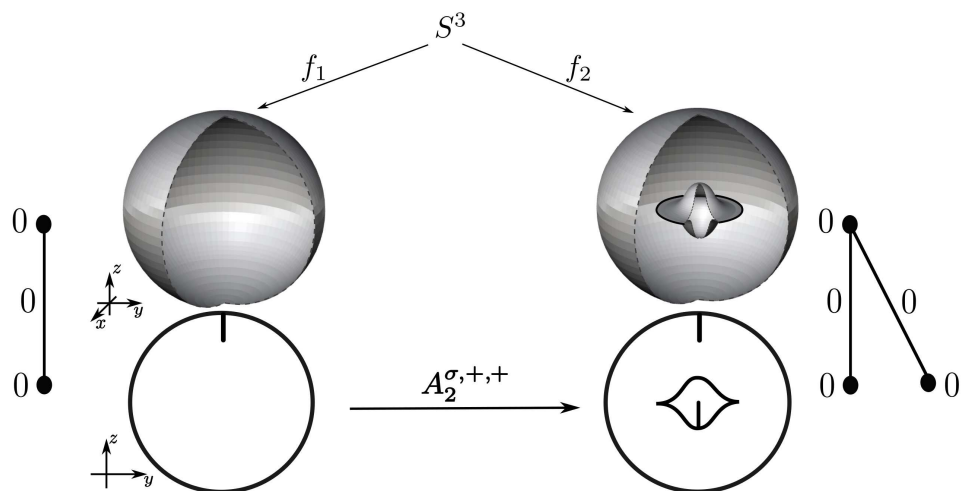


Figura 4.3: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso I.

II) Aqui dividimos em dois casos:

Caso 1 precisamos distinguir entre a situação onde a superfície (antes da transição) é contrátil no domínio principal. (Caso 1(a) ou não Caso 1(b)).

- **Caso 1(a)** Neste caso, as transições $A_2^{\sigma,+,-}$ ou $A_2^{\sigma,-,-}$, adiciona (ou diminui) em 1 o peso da aresta. Temos dois exemplos nas Figuras 4.4 e 4.5.

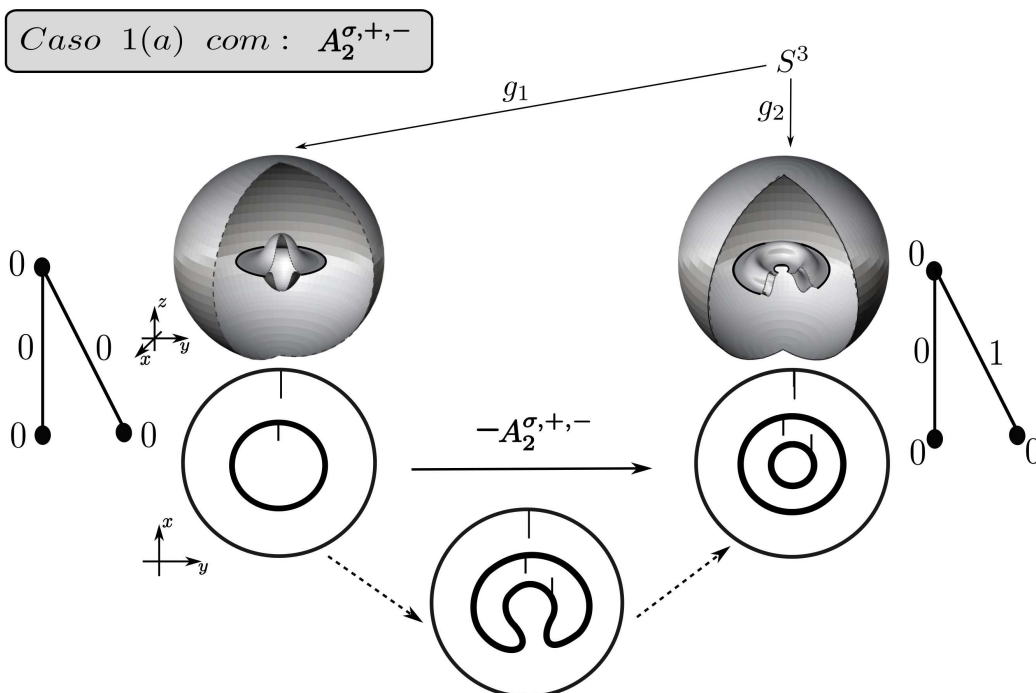


Figura 4.4: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(a) com $A_2^{\sigma,+,-}$.

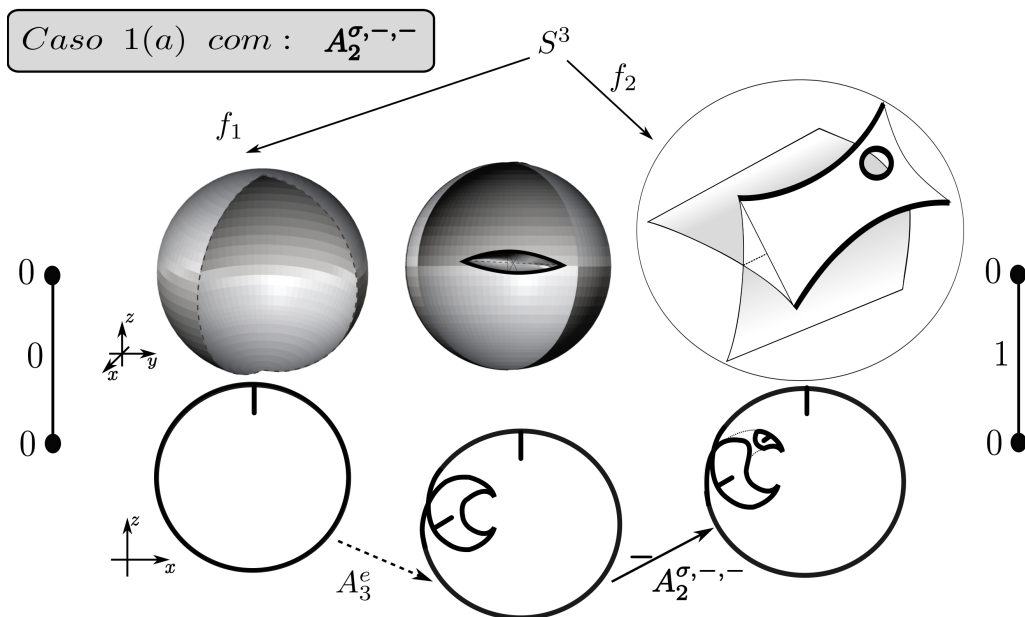


Figura 4.5: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(a) com $A_2^{\sigma,-,-}$.

- **Caso 1(b)** Neste caso, as transições $A_2^{\sigma,+,-}$ ou $A_2^{\sigma,-,-}$ adiciona (ou diminui) em 1 o peso da aresta e o peso do vértice c_j . Temos dois exemplos nas Figuras 4.6 e 4.7. Notemos que este caso não é para grafos que vem de aplicações da S^3 .

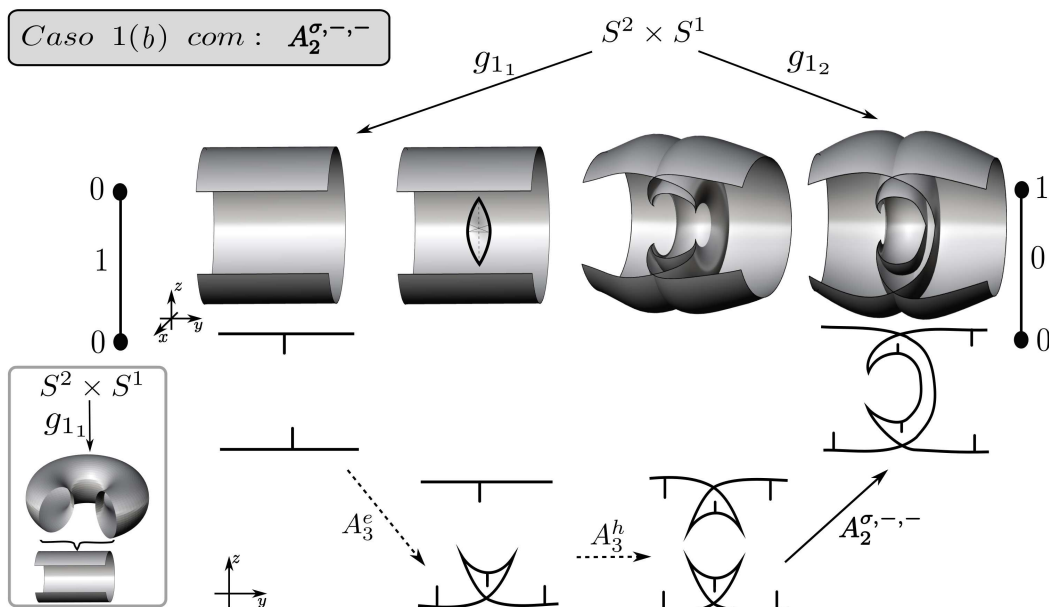
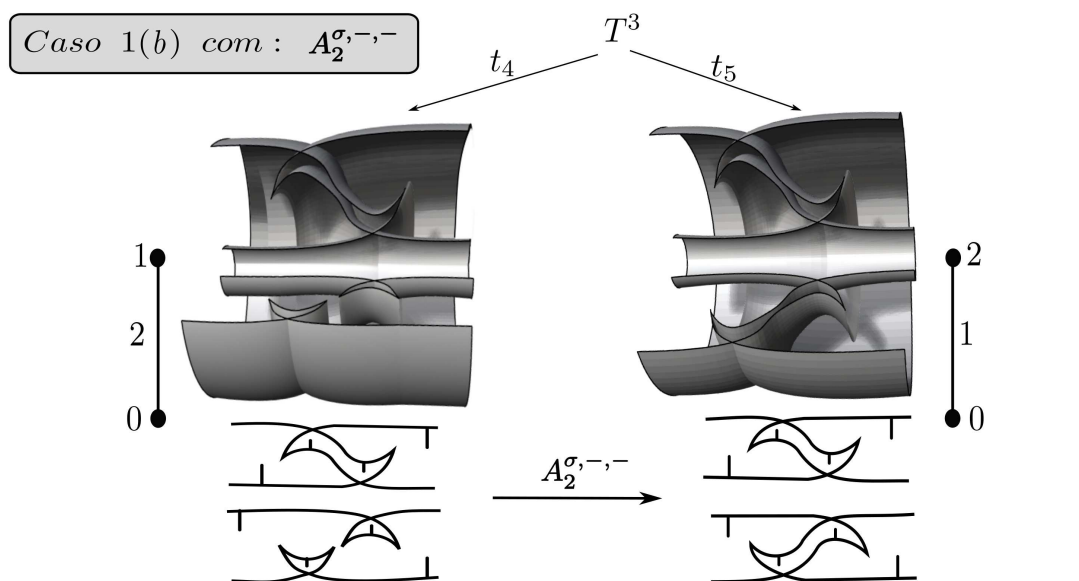


Figura 4.6: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(b).



A aplicação t_4 pode ser obtida da seguinte forma:

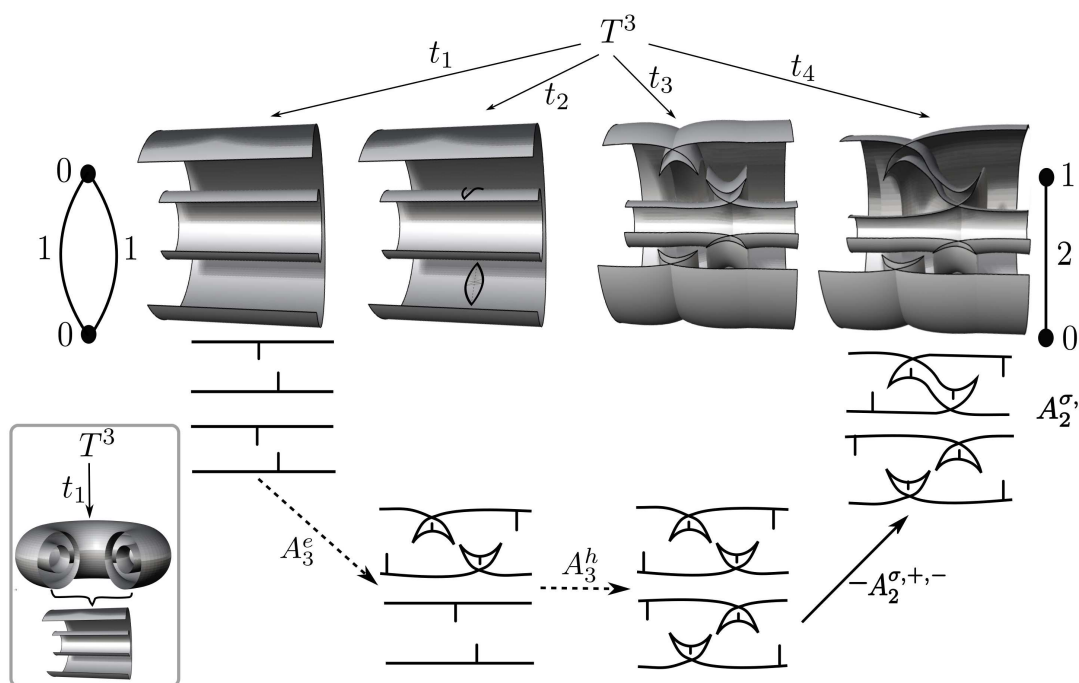


Figura 4.7: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 1(b).

- **Caso 2(a)** Neste caso, a singularidade divide a superfície em duas partes (uma nova aresta é criada). Então o gênero desta superfície é dividido entre as duas novas superfícies, assim como o b_2 de c_{j+1} (isto é, o peso do vértice é afetado). Isto precisa ser levado em conta quando $b_2(M) = 0$. Temos dois exemplos na Figura 4.8.

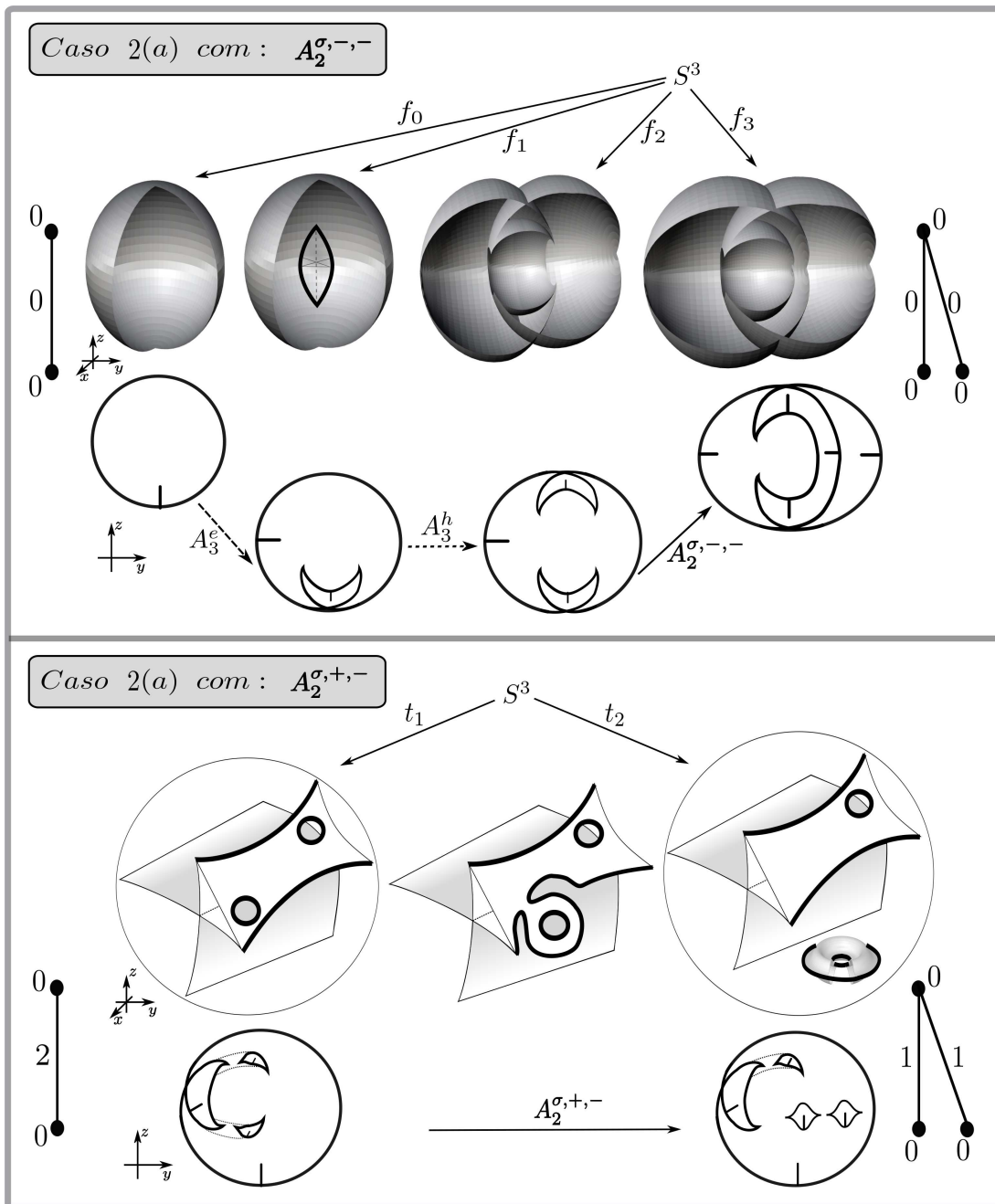


Figura 4.8: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 2(a).

- **Caso 2(b)** Este caso cumpre todas as condições do caso 2(a). A diferença é que a nova aresta criada une os vértices c_{j+1} e c_j criando um ciclo, neste caso $c_{j+1} \neq 0$. Temos dois exemplos na Figura 4.9.

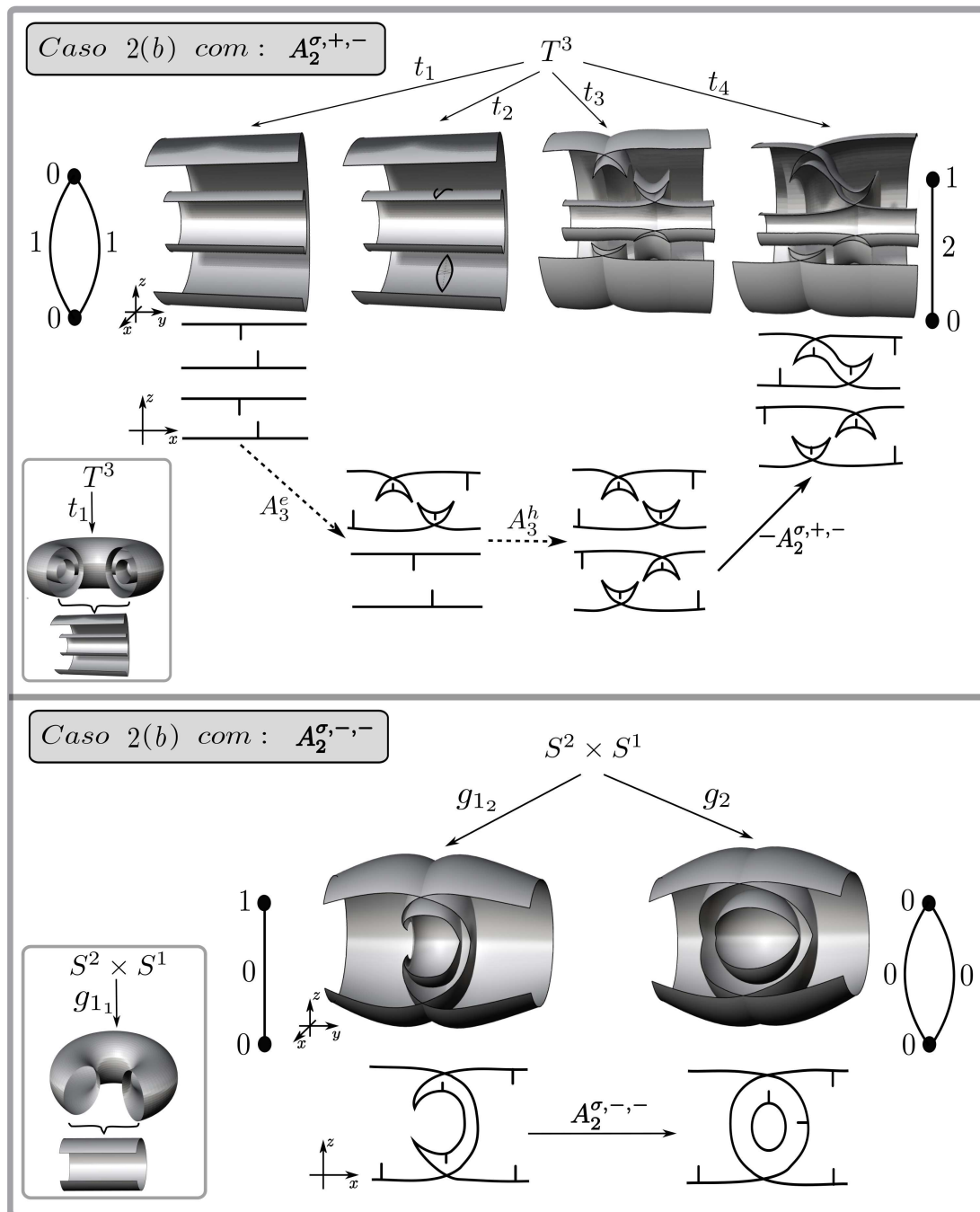


Figura 4.9: Efeito das transições nos grafos \mathcal{G}_f caso 2(b).

4.2 Cirurgia de aplicações estáveis

Introduziremos agora dois tipos de cirurgia em aplicações entre 3-variedades e seus efeitos no seu grafo associado \mathcal{G} , que chamaremos de **cirurgia tipo I** e **cirurgia tipo II**, como um paralelo da Seção 2.0.2 no Capítulo 2.

Cirurgia tipo I entre aplicações

Considere duas aplicações estáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : N \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde M e N são 3-variedades. Definimos a **cirurgia tipo I** $f \# g : M \# N \rightarrow \mathbb{R}^3$ como segue: começamos removendo duas 3-bolas B_1^3 e B_2^3 em M e N , respetivamente, tais que suas interseções com o conjunto singular de f e g são dois discos B_1^2 e B_2^2 de pontos dobra (não interceptam curvas cuspidais ou curvas dobradas duplas). Depois conectamos as variedades M e N em ∂B_1^3 e ∂B_2^3 por um tubo $S^2 \times I$, (onde B_1^2 e B_2^2 são juntados por um tubo $S^1 \times I$). A projeção no \mathbb{R}^3 deste tubo não intercepta parte alguma do conjunto de bifurcação. O conjunto de bifurcação da aplicação resultante é a soma conexa dos conjuntos de bifurcação de f e g . Sejam \mathcal{G}_f e \mathcal{G}_g os grafos associados às aplicações f e g respetivamente. O efeito desta cirurgia sobre \mathcal{G}_f e \mathcal{G}_g é mostrado na Figura 4.10. A soma conexa dos conjuntos singulares (que não é nada mais que a soma conexa de superfícies) se torna uma superfície com gênero igual a soma das duas superfícies envolvidas. O peso dos vértices são somados também, pois se M_i e M_j são as regiões correspondentes aos dois vértices envolvidos com pesos c_i e c_j e M_k é a região resultante, então temos

$$c_k = b_2(M_k) - s_k + 1 = b_2(M_i) + b_2(M_j) - (s_i + s_j - 1) + 1 = c_i + c_j.$$

Temos exemplos na Figura 4.11 e 5.5.

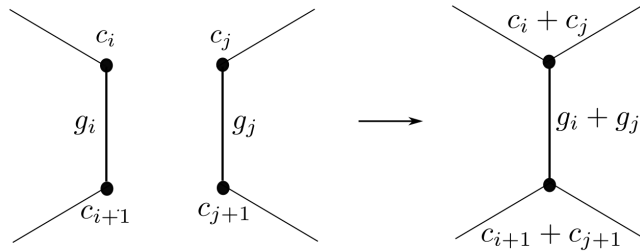


Figura 4.10: Grafo associado a cirurgia tipo I.

Observação 4.2. (a) Se a cirurgia tipo 1 é feita entre duas aplicações que são provenientes de duas 3-variedades separadas M e N é chamada de **soma conexa tipo 1**. Um exemplo para esta observação temos na Figura 5.5.

(b) Se a cirurgia tipo 1 é feita na mesma aplicação da 3-variedade M , é chamada de **cirurgia tipo 1 em M** .

Exemplo 4.3. Figura 4.11 é um exemplo para a observação **b)** dada acima.

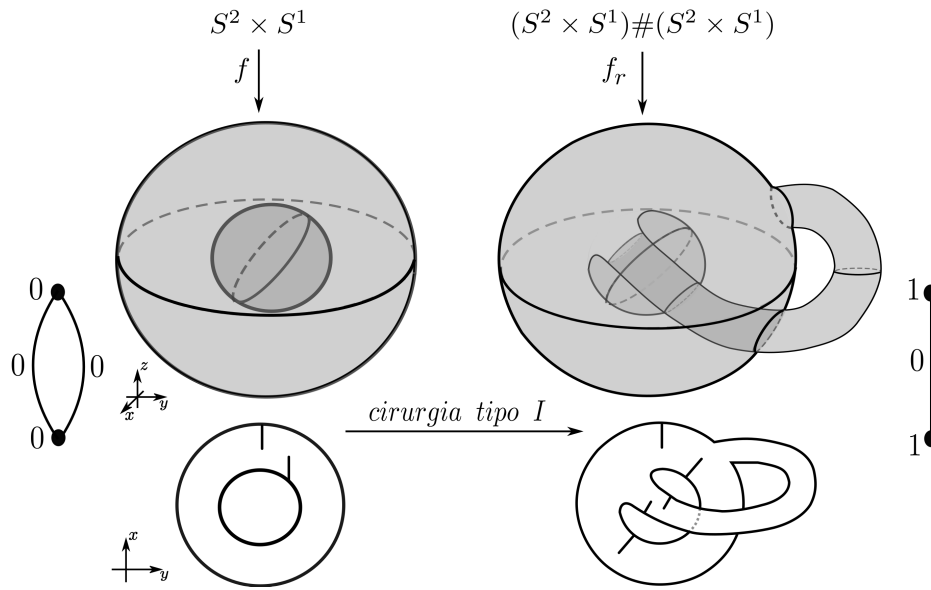


Figura 4.11: Cirurgia tipo I na $S^2 \times S^1$ (adicionamos a $S^2 \times S^1$ uma asa).

Os pesos no grafo da aplicação f_r são calculados da seguinte forma: para começar temos que os pesos nos dois vértices são iguais pois a aplicação f_r é a aplicação projeção (que $f_r(S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1)$ é exatamente homeomorfa a metade de $S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$). A componente do bordo da imagem de f_r é homeomorfo a uma esfera e seu segundo número de Betti é dado por $b_2(Im(f_r)) = 1$. Assim, os pesos nos vértices são $c_1 = c_2 = b_2(Im(f_r)) - s_j + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$, onde $s_j = 1$, pois só tem uma componente do bordo.

Cirurgia tipo II entre aplicações

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação estável, onde M é uma 3-variedade não necessariamente conexa. Remova duas 3-bolas B_1^3 e B_2^3 em M , nas regiões U_1 e U_2 correspondentes aos vértices v_1 e v_2 , sem intersepar o conjunto singular Σf e tais que tenham a mesma imagem em \mathbb{R}^3 . Uma das regiões preservando orientação e a outra aplicada revertendo orientação. Depois una os bordos $M \setminus B_1^3 \cup B_2^3$ por um tubo $S^2 \times I$, de forma que tenha uma superfície S^2 com uma superfície singular, que divide em duas partes iguais o tubo cujas imagens coincidem quando a aplicação é estendida sobre os mesmos. Esta cirurgia adiciona uma S^2 ao conjunto singular adjacente aos dois componentes do conjunto singular da aplicação original de onde as duas 3-bolas foram retiradas acrescentadas com parte do tubo. No grafo corresponde a conectar uma aresta nos vértices v_1 e v_2 . Chamaremos a aplicação resultante desta cirurgia de f_r . As duas regiões envolvidas (correspon-

dentes aos vértices v_1 e v_2), após a cirurgia, tem um novo gerador de H_2 , que é a S^2 adicionada ao conjunto singular. Mas as componentes regulares correspondente tem uma nova superfícies no bordo (a mesma S^2), então o peso não varia. O grafo resultante pode ser visto na Figura 4.12. Temos um exemplo na Figura 4.13.

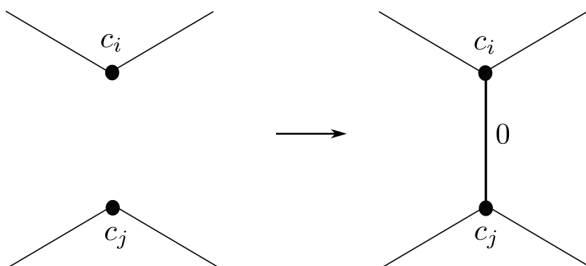


Figura 4.12: Grafo da cirurgia tipo II.

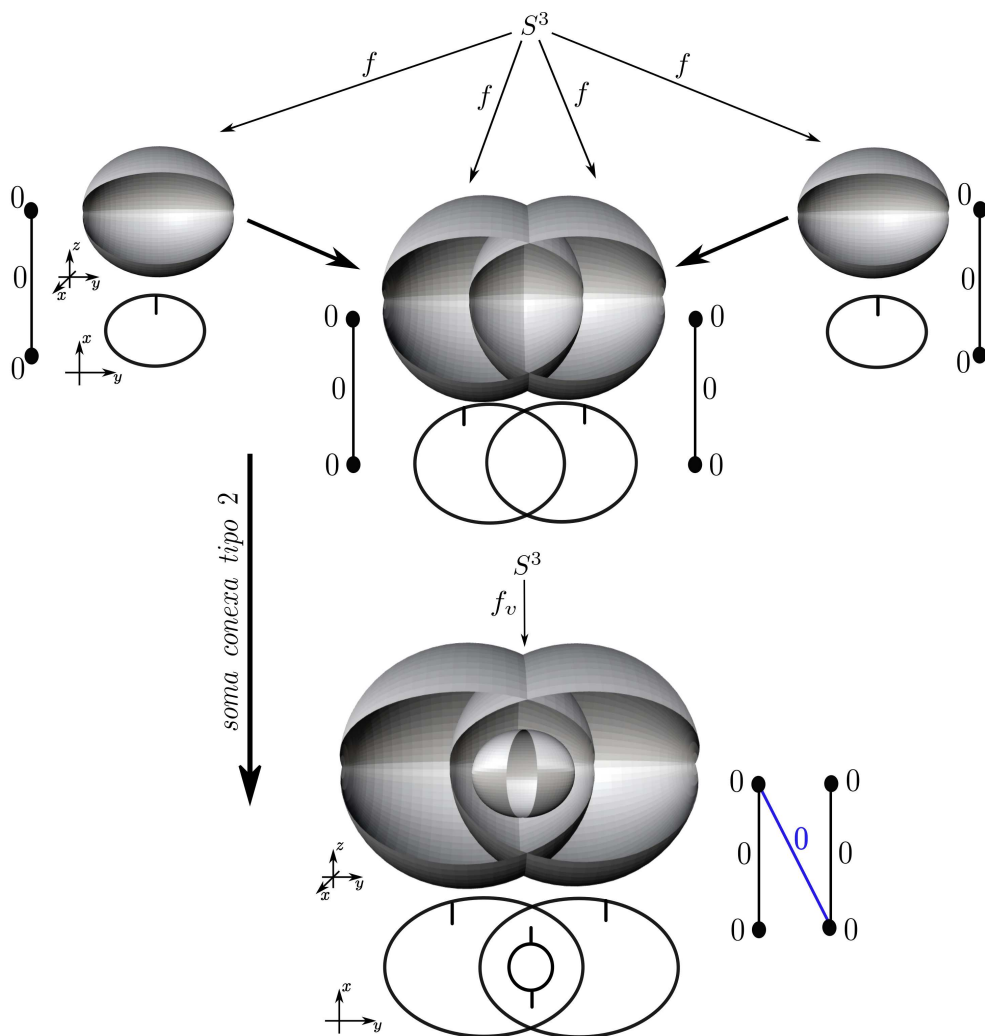


Figura 4.13: cirurgia tipo II (soma conexa tipo 2) entre dois aplicações da S^3 .

Observação 4.4. (a) A cirurgia tipo 2 é feita entre duas aplicações que vem de duas 3-variedades separadas M e N é chamada de **soma conexa tipo 2**. (veja a Figura 4.13). (b) A cirurgia tipo 1 é feito na mesma aplicação, de uma 3-variedade M , é chamada de **cirurgia tipo 2**. Um exemplo para esta observação temos na Figura 4.14.

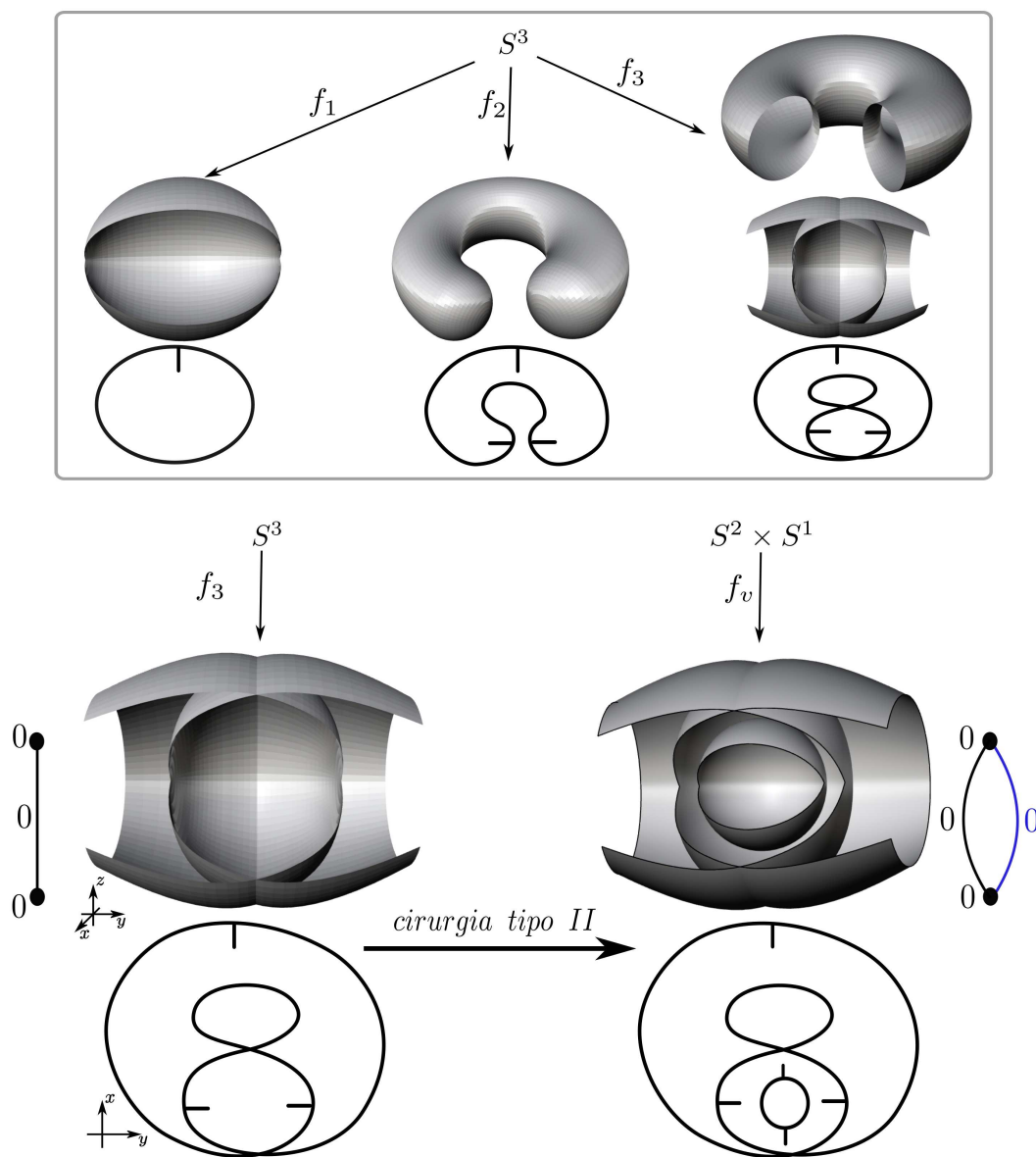


Figura 4.14: cirurgia tipo II numa mesma aplicação f_3 da S^3 .

Corolário 4.5. [20] Seja W uma p -variedade compacta orientável com bordo $p = 2s + 1$. A dimensão de $H_s(\partial W; \mathbb{Z})$ é par e a dimensão do kernel de $i_* : H_s(\partial W; \mathbb{Z}) \rightarrow H_s(W; \mathbb{Z})$ é igual a metade da dimensão de $H_s(\partial W; \mathbb{Z})$, onde $i_* : \partial W \rightarrow W$ é a aplicação inclusão.

Teorema 4.6. Dada uma 3-variedade M orientável e uma coleção de superfícies

fechadas orientáveis $(S_i)_{i=1}^\mu$ em M , suponha que \mathcal{G} é o grafo associado ao par $(M, S_i)_{i=1}^\mu$. Se \mathcal{G} é um grafo bipartido, então

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) \leq b_2(M) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^\mu g_i$$

A igualdade ocorre quando $g_i = 0$, $i = 1, \dots, \mu$.

Demonstração: Pela Definição 2.3, temos que $\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^V (b_2(M_j) - s_j + 1) + b_1(\mathcal{G}) = \sum_{j=1}^V b_2(M_j) - 2\mu + V + b_1(\mathcal{G})$, pois o grafo é bipartido. Cada superfície é contada duas vezes ela faz fronteira com duas componentes conexas do complemento.

Pelo Lema 1.59, temos que $b_1(\mathcal{G}) = \mu - V + 1$, o que é o suficiente para provar que $\sum_{j=1}^V b_2(M_j) - \mu + 1 \leq b_2(M)$, usando a sequência longa exata de Mayer-Vietoris associada a uma decomposição conveniente de M em 3-variedades com bordo. Dado que o grafo é bipartido, o complemento do conjunto singular pode ser separado em duas 3-variedades com bordo N_1 e N_2 . Seja N'_1 e N'_2 as suas extensões adicionando um colar seus bordos em comum. Então podemos definir a sequência de Mayer-Vietoris associada a cobertura (N'_1, N'_2) de M . Claramente, a homologia de N'_i coincide com a de N_i e que $N'_1 \cap N'_2 = N_1 \cap N_2$. Então a sequência de Mayer-Vietoris pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_3(N_1) \oplus H_3(N_2) &\xrightarrow{h_*^3} H_3(M) \xrightarrow{\Delta_2} H_2(N_1 \cap N_2) \dots \\ &\xrightarrow{g_*^2} H_2(N_1) \oplus H_2(N_2) \xrightarrow{h_*^2} H_2(M) \xrightarrow{\Delta_1} H_1(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{g_*^1} \dots \end{aligned}$$

Substituindo na sequência a informação que temos, obtemos a seguinte sequência

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow 0 \oplus 0 &\xrightarrow{h_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z}^\mu \dots \\ &\xrightarrow{g_*^2} \mathbb{Z}^{b_2(N_1)} \oplus \mathbb{Z}^{b_2(N_2)} + T_1 \xrightarrow{h_*^2} \mathbb{Z}^{b_2(M)} + T_2 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z}^{2\sum_{i=1}^\mu g_i} \xrightarrow{g_*^1} \dots \end{aligned}$$

onde g_i é o gênero da superfície S_i .

Os grupos $H_2(M)$ e $H_2(N_1) \oplus H_2(N_2)$ podem ter partes de torção, que são T_1 e T_2 respectivamente. Nos estamos preocupados com as dimensões de todos os grupos que aparecem, que dependem somente das partes livres.

Temos que $\sum_{j=1}^2 b_2(N_j) = \sum_{j=1}^V b_2(M_j)$. Como a sequência é exata temos que $0 = \text{Im}(h_*^3) = \text{Ker}(\Delta_2)$. Pelo primeiro teorema do isomorfismo (ver [28]),

$$\frac{H_3(M)}{\text{Ker}(\Delta_2)} = \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \text{Im}(\Delta_2) = \text{Ker}(g_*^2) \Rightarrow \text{Ker}(g_*^2) \cong \mathbb{Z},$$

$$\frac{H_2(N_1 \cap N_2)}{Ker(g_*^2)} = \frac{\mathbb{Z}^\mu}{\mathbb{Z}} \cong Im(g_*^2) = Ker(h_*^2) \Rightarrow Ker(h_*^2) \cong \mathbb{Z}^{\mu-1},$$

$$\frac{H_2(N_1) \oplus H_2(N_2)}{Ker(h_*^2)} = \frac{\mathbb{Z}^{\sum_{j=1}^2 b_2(N_j)} \oplus T_1}{\mathbb{Z}^{\mu-1}} \cong Im(h_*^2) = Ker(\Delta_1) \Rightarrow$$

$$dim(Ker(\Delta_1)) = \sum_{j=1}^2 b_2(N_j) - \mu + 1,$$

$$\frac{H_2(M)}{Ker(\Delta_1)} = \frac{\mathbb{Z}^{b_2(M)} \oplus T_2}{\mathbb{Z}^{\sum_{j=1}^2 b_2(N_j) - \mu + 1}} \cong Im(\Delta_1) = Ker(g_*^1) \Rightarrow$$

$$dim(Ker(g_*^1)) = b_2(M) - \sum_{j=1}^2 b_2(N_j) + \mu - 1.$$

Como $\sum_{j=1}^2 b_2(N_j) = \sum_{j=1}^V b_2(M_j)$ e $dim(Ker(g_*^1)) \geq 0$, temos que

$$\sum_{j=1}^V b_2(M_j) - \mu + 1 \leq b_2(M),$$

Que é a primeira desigualdade.

Para verificar a segunda desigualdade, basta mostrar que $dim(Ker(g_*^1)) \leq \sum_{i=1}^\mu g_i$. Pelo Corolário 4.5, temos que se W é uma 3-variedade com bordo e $i : \partial W \rightarrow W$ é a aplicação inclusão, então $dim(ker(i_*)) = \frac{1}{2}dim(H_1(\partial W))$, onde

$$i_* : H_1(\partial W) \rightarrow H_1(W).$$

Dado que $N_1 \cap N_2 = \partial N_1 = \partial N_2$, temos que $dim(ker(g_*^1)) = dim(ker(g_*^2)) = \frac{1}{2}dim(H_1(N_1 \cap N_2)) = \sum_{i=1}^\mu g_i$, onde $g_*^1 = (g_*^1, g_*^2)$. Como $ker(g_*^1) = g_*^1 \cap g_*^2$, então $dim(ker(g_*^1)) \leq \sum_{i=1}^\mu g_i$, o que prova a segunda desigualdade e se $g_i = 0$ então vale a igualdade para todo i . Se g_*^1 é injetiva, a primeira igualdade se cumpre. Em este caso, dado $b_1(M) = b_2(M)$, temos determinado a homologia de M exceto para possíveis partes de torção. \square

As consequências deste teorema são:

Corolário 4.7. $M = S^3 \Rightarrow \mathcal{G}$ é uma árvore e $\sum_{j=1}^V c_j = 0$.

Corolário 4.8. $b_2(M) = 0 \Rightarrow \mathcal{G}$ é um árvore e $\sum_{j=1}^V c_j = 0$.

A volta disto não é verdadeira, como pode ser visto no seguinte contra-exemplo.

Exemplo 4.9. Seja $M = S^2 \times S^1$. Tomando em conta o círculo $S^1 \subset S^2 \times p$, onde $p \in S^1$ e seja o toro $T^2 = S^1 \times S^1 \subset S^2 \times S^1$. O grafo associado a esta situação é

uma árvore pois tem uma só aresta com peso 1 e dois vértices com peso 0, pois $b_2(S^2 \times S^1) = 1$.

Observação 4.10. O grafo \mathcal{G}_f associado a uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ não identifica completamente a variedade M , pois um grafo \mathcal{G} pode ser associado a aplicações que vem de duas 3-variedades diferentes, como na Figura 4.15.

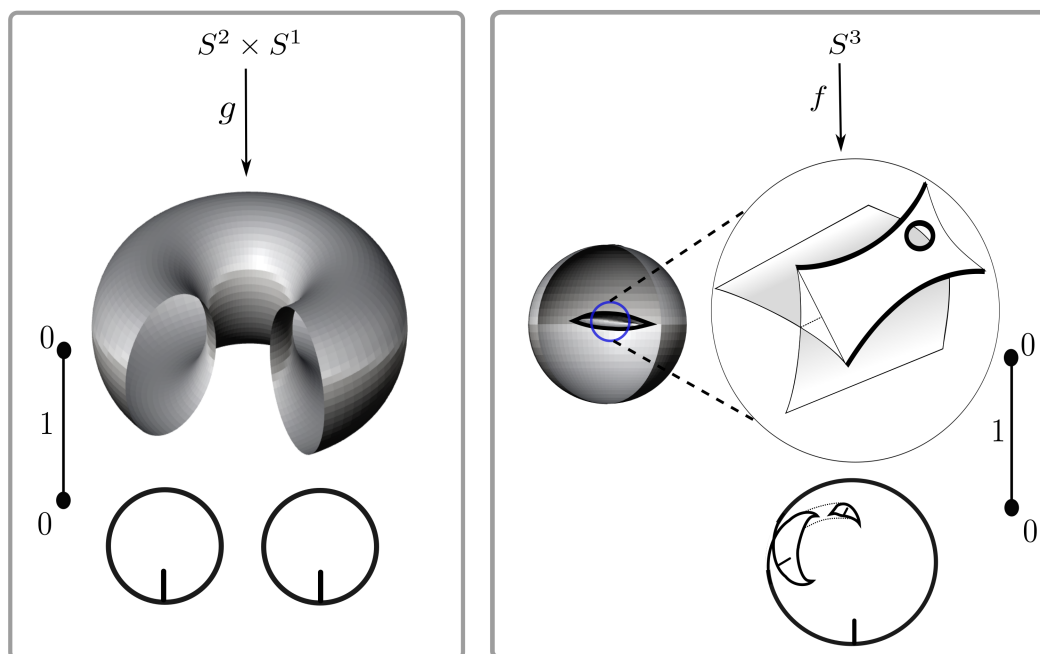


Figura 4.15: Aplicações distintas que vem de variedades não homeomorfas mais com grafos associados iguais.

Capítulo 5

Realização de grafos bipartidos

Seja M uma 3-variedade fechada e orientada $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação estável sobre \mathbb{R}^3 . A construção de grafos associados às aplicações estáveis entre M e \mathbb{R}^3 garante que existe um grafo $\mathcal{G}(f)$ bipartido e pesado (com pesos nos vértices e arestas). Assim nosso objetivo neste capítulo é determinar quais grafos pesados e bipartido, podem ser associado às aplicações estáveis entre M e \mathbb{R}^3 .

Diremos que um grafos \mathcal{G} é **realizado** por uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ou que a aplicação realiza o grafo, quando \mathcal{G} pode ser associado ao par $(M, \Sigma f)$.

Os resultados são baseados nos trabalhos [12], [21] e [22]. Realizaremos os grafos bipartidos associados a aplicações $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, quando M é homeomorfo a $S^3, S^2 \times S^1$ e T^3 . Por fim, apresentaremos alguns teoremas que podem ser usados na construção de aplicações estáveis via cirurgias e transição de codimensão 1, dado um grafo qualquer \mathcal{G} com pesos.

5.1 Realização de grafos com $M = S^3$

Vimos no Corolário 4.8 que $b_2(S^3) = 0$. Então podemos afirmar que o grafo \mathcal{G} associa a uma aplicação de S^3 no \mathbb{R}^3 é uma árvore com $\sum_{j=1}^V c_j = 0$ (que todos os vértices tem peso zero). Assim, podemos descartar todos os grafos que não são árvores. Nesta seção, mostraremos de duas formas que dado uma árvore qualquer e com $\sum_{j=1}^V c_j = 0$ pode ser realizado por uma aplicação estável $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Na Figura 5.1 temos todos os grafos possíveis de aplicações estáveis de S^3 no \mathbb{R}^3 até com 3 arestas.

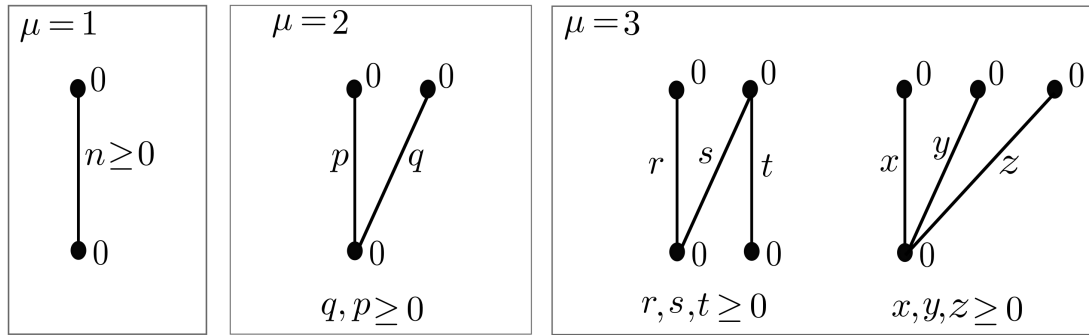


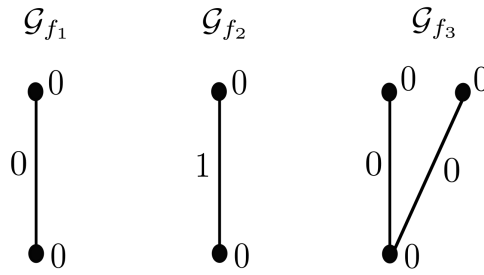
Figura 5.1: Grafos possíveis de aplicações estáveis de S^3 no \mathbb{R}^3 , para $\mu \leq 3$.

Teorema 5.1. [12] *Qualquer árvore com $c_j = 0, \forall j = 1, \dots, V$ pode ser realizado como o grafo de uma aplicação estável $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Demonstração: A ideia é criar um caminho no espaço das aplicações $C^\infty(S^3, \mathbb{R}^3)$ entre uma aplicação básica conhecida e outra aplicação, cujo o grafo é o mesmo que a árvore dada. Isto será feito indutivamente aplicando as transições na Figura 4.2, convenientemente, de forma que mudemos o grafo da aplicação inicial até chegarmos na aplicação desejada. Podemos começar de um grafo com uma única aresta com peso zero desejarmos e assim obtemos ligando dois vértices de peso também zero. Este grafo pode ser realizado como o grafo de uma aplicação cujo conjunto singular é uma simples esfera. Por exemplo, podemos pegar a aplicação estável obtida por dobrar a 3-esfera em seu equador e mandar as duas partes homeomorficamente sobre uma 3-bola em \mathbb{R}^3 . Por meio das singularidades $A_3^{\sigma,+,+}$ podemos adicionar quantas arestas de peso zero desejarmos. Assim que obtemos a árvore desejada, basta ajustar os pesos das arestas para conseguirmos, com exatidão, o grafo que estamos buscando. Isto é feito através das singularidades $A_3^{\sigma,+,-}$ ou das singularidades $A_3^{\sigma,-,-}$. Como a construção toda foi feita apenas com cruzamentos de certos estratos de codimensão 1 em $C^\infty(S^3, \mathbb{R}^3)$, é claro que a aplicação obtida é uma aplicação estável de S^3 em \mathbb{R}^3 . \square

No Teorema 5.3 é uma extensão do Teorema 5.1 para a prova deste, necessitaremos alguns resultados que daremos a seguir.

Definição 5.2. *Sejam f_1, f_2 e $f_3 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, três aplicações, como dadas na Figura 4.5, para f_1 e f_2 , e na Figura 4.8, para f_3 . Denotamos o seus grafos associados por \mathcal{G}_{f_1} , \mathcal{G}_{f_2} e \mathcal{G}_{f_3} . Estes grafos são ditos **Grafos básicos para $\mathcal{G}(S^3)$** e estão ilustrados na Figura 5.2*

Figura 5.2: Grafos básicos para $\mathcal{G}(S^3)$.

Teorema 5.3. *Qualquer árvore com $c_j = 0, \forall j = 1, \dots, V$, pode ser realizado como o grafo de uma aplicação estável $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, construído convenientemente a partir dos grafos básicos da S^3 e cirurgia tipo 1.*

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre o número de arestas em seus respectivos pesos na árvore. A árvore com uma só aresta, $\mu = 1$, e peso g qualquer nesta é realizável pela soma conexa tipo I entre a aplicação f_1 e outras g aplicações do tipo f_2 , onde f_1 e f_2 tem como grafos básicos \mathcal{G}_{f_1} e \mathcal{G}_{f_2} da S^3 (ilustradas nas Figuras 4.5 e 4.8 dada na Definição 5.2). Obtemos assim uma aplicação $f_{\mu_1} : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que realiza a árvore com uma única aresta e peso g qualquer nesta aresta.

Suponha que vale para qualquer árvore \mathcal{G} de $\mu = n$ arestas e pesos quaisquer nas arestas. Considere um grafo \mathcal{G} com $\mu = n + 1$ arestas pesos quaisquer nas arestas. Escolhemos desta árvore uma aresta final qualquer (conectada a um vértice com grau 1). Retiramos o peso g_k desta aresta final. Assim, obtemos um novo grafo \mathcal{G}' com $\mu = n + 1$ arestas. Retiramos de \mathcal{G}' a aresta final escolhida e obtemos um outro grafo \mathcal{G}'' com $\mu = n$ arestas. Por hipótese de indução este grafo é realizável por uma aplicação $f'' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ assim $\mathcal{G}_{f''} = \mathcal{G}''$. Fazendo cirurgia tipo 1 entre a aplicação f'' com uma aplicação tipo a aplicação f_3 , correspondente ao grafo básico \mathcal{G}_{f_3} (ilustrada na Figura 4.8 e dada na Definição 5.2), de maneira que a aplicação resultante tem uma componente a mais que f'' , realizamos a aresta retirada do grafo original \mathcal{G}' para obter \mathcal{G}' . Assim, obtemos uma aplicação $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\mathcal{G}_{f'} = \mathcal{G}'$ e $\mu = n + 1$ no seu grafo associado $\mathcal{G}_{f'}$. Agora, fazendo cirurgia tipo 1 entre a aplicação f' com g_k aplicações do tipo f_2 , correspondente ao grafo básico \mathcal{G}_{f_2} (ilustrada na Figura 4.5 e dada na Definição 5.2), de maneira que a aresta acrescentada no grafo $\mathcal{G}_{f'}$ tem peso g , obtemos assim uma aplicação $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que seu grafo associado é $\mathcal{G}_f = \mathcal{G}$. Logo \mathcal{G} com $\mu = n + 1$ é realizável. \square

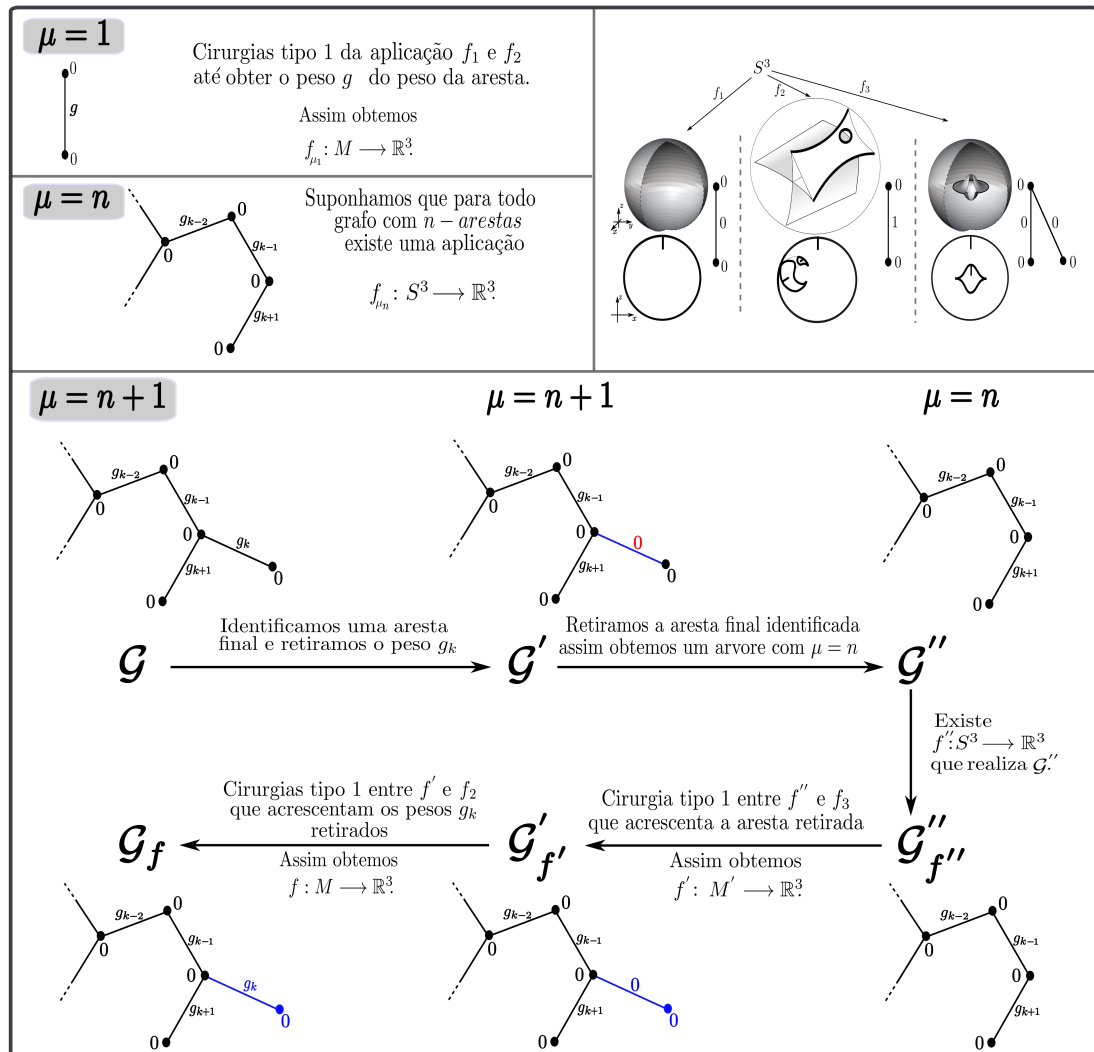


Figura 5.3: Esquema da demonstração do Teorema 5.3.

Exemplo 5.4. A Figura 5.5, ilustra a construção de uma aplicação $g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ correspondente a árvore \mathcal{G}_g , ilustrada na Figura 5.4.

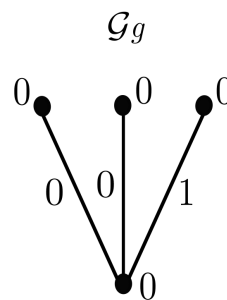


Figura 5.4: Árvore \mathcal{G}_g .

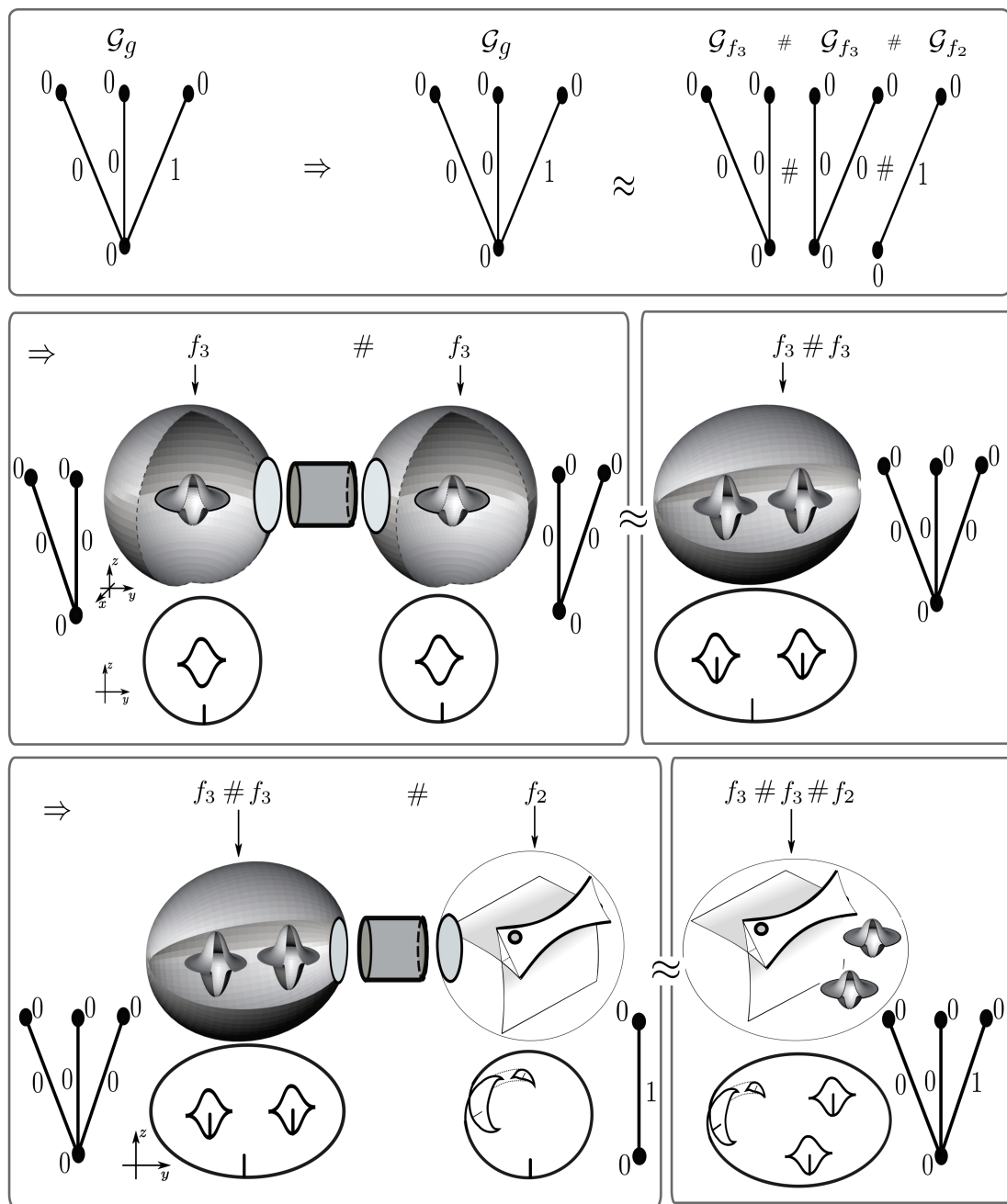


Figura 5.5: Construção da aplicação $g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a árvore \mathcal{G}_g .

Como podemos ver da Figura 5.5 temos uma aplicação g para \mathcal{G}_g é $g = f_3 \# f_3 \# f_2$, assim $\mathcal{G}_g \approx \mathcal{G}_{f_3} \# \mathcal{G}_{f_3} \# \mathcal{G}_{f_2}$.

5.2 Realização de grafos com $M = S^2 \times S^1$

No caso de $S^2 \times S^1$, temos a seguinte observação do Teorema 4.6:

Observação 5.5. Do Teorema 4.6, temos que se o grafo \mathcal{G} satisfaz $\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) > 1$, então o grafo \mathcal{G} não corresponde a uma aplicação estável de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 . Se $\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) < 1$, então deve haver pelo menos uma superfície com gênero $g > 0$ no seu conjunto singular (ou seja, pelo menos uma aresta com peso $g_i \geq 1$). Esta é a melhor caracterização possível para grafos a partir de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 .

Exemplo 5.6. A Figura 5.6 ilustra todos os grafos possíveis de até 3 arestas (ou seja, 3 componentes ligados do conjunto singular).

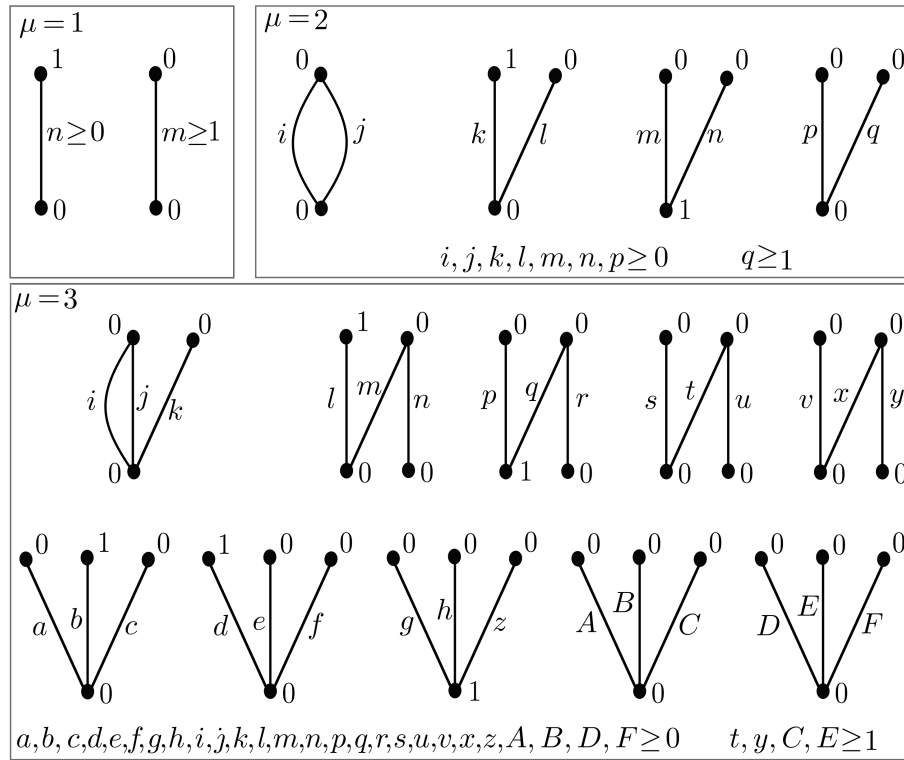


Figura 5.6: Todos os grafos possíveis de aplicações estáveis de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 até com 3 arestas.

Lema 5.7. Qualquer grafo \mathcal{G} bipartido com único ciclo com $2p$ arestas, para p inteiro positivo, pode ser realizado como grafo de uma aplicação estável de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 .

Demonstração: A construção da aplicação ilustrada na Figura 5.7 é uma prova, mostra que o grafo dado é realizável. \square

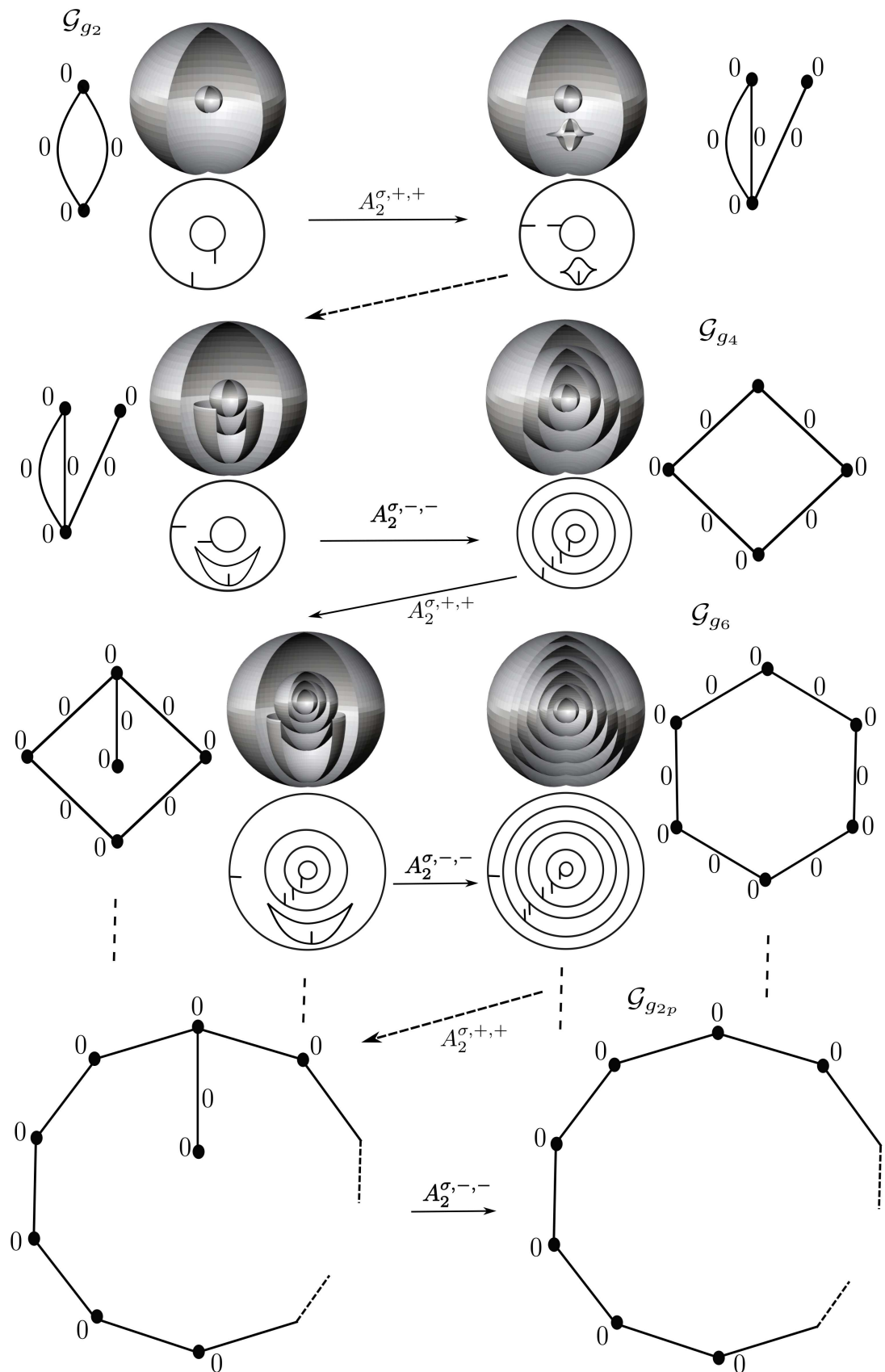


Figura 5.7: Realização dos grafos básicos $\mathcal{G}_{g_{2p}}$.

Proposição 5.8. [22] *Qualquer grafo bipartido com $\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) = 1$ pode ser realizado como grafo de uma aplicação estável de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 .*

Demonstração: A prova é feita com os argumentos construtivos na Figura 4.2 junto com o Lema 5.7. □

Agora daremos um teorema que estende a Proposição 5.8, paralelo ao Teorema 5.3. Mas antes de fazer isto definiremos os grafos básicos para $\mathcal{G}(S^3 \times S^1)$.

Definição 5.9. *Sejam $\mathcal{G}_{g_{1_1}}, \mathcal{G}_{g_{1_2}}, \mathcal{G}_{g_2}, \mathcal{G}_{g_4}, \mathcal{G}_{g_{2p}}$, os grafos ilustrados na Figura 5.8. As aplicações $g_{1_1}, g_{1_2}, g_2, g_4, g_{2p} : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associadas, respectivamente aos grafos $g_{1_1}, g_{1_2}, g_2, g_4, g_{2p}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, são chamados de **grafos básicos para $\mathcal{G}(S^2 \times S^1)$.***

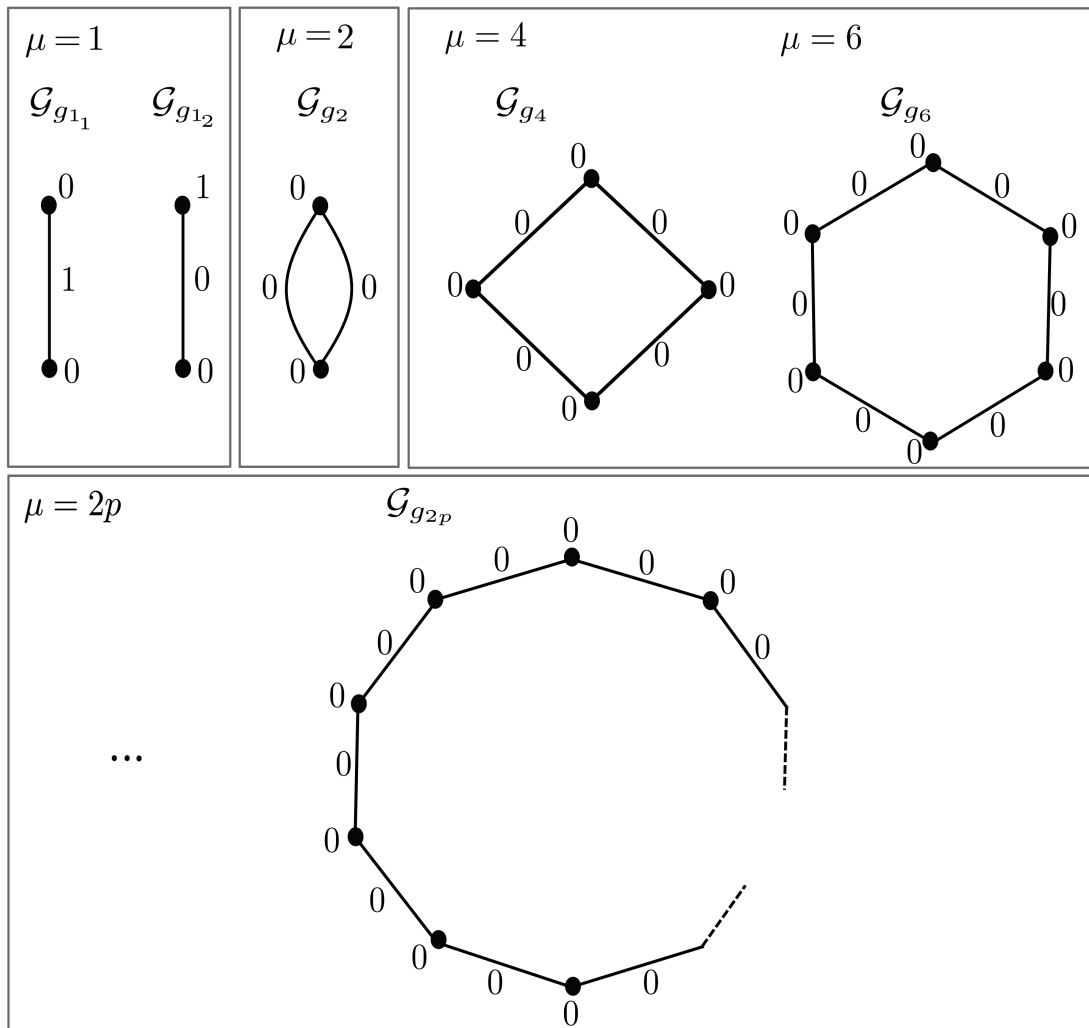


Figura 5.8: Grafos básicos para $\mathcal{G}(S^2 \times S^1)$.

Temos na Figura 4.6 uma realização dos grafos $\mathcal{G}_{g_{1_1}}$, $\mathcal{G}_{g_{1_2}}$ e na Figura 4.9 uma aplicação para \mathcal{G}_{g_2} . Agora na Figura 5.7 temos um algoritmo recursivo para poder realizar os grafos \mathcal{G}_{g_4} e $\mathcal{G}_{g_{2p}}$, para o inteiro $p \geq 2$.

Teorema 5.10. *Qualquer grafo \mathcal{G}_g com*

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}_g) \leq (b_2(S^2 \times S^1) = 1) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}_g) + \sum_{i=1}^{\mu} g_i$$

pode ser realizado como grafo de uma aplicação estável de $S^2 \times S^1$ no \mathbb{R}^3 .

Demonstração: A nossa prova será por construção. Pela Observação 5.5, este teorema pode ser dividida em três casos: Caso 1, se o grafo \mathcal{G}_g é uma árvore com $\sum_{j=1}^V c_j = 0$ e $\sum_{j=1}^{\mu} g_j \geq 1$ então este grafo é realizável. Caso 2, se o grafo \mathcal{G}_g é uma árvore com $\sum_{j=1}^V c_j = 1$ então este grafo é realizável. Caso 3, se o grafo \mathcal{G}_g tem $b_1(\mathcal{G}_g) = 1$ (tem um ciclo) com $\sum_{j=1}^V c_j = 0$ então este grafo é realizável. Por tanto para mostrar este teorema basta mostrar as afirmações nos casos 1,2,3.

Caso 1: Se grafo \mathcal{G}_g com as condições neste caso, este grafo é uma árvore com pesos zero nos vértices e com $\sum_{j=1}^{\mu} g_j \geq 1$ (o grafo \mathcal{G}_g tem pelo menos uma aresta com peso ≥ 1). Diminuindo em 1 o peso da aresta que tem peso ≥ 1 , obtemos o grafo \mathcal{G}' . Pelo Teorema 5.1 este grafo \mathcal{G}' é realizável por uma aplicação $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fazendo a cirurgia tipo 1 entre a aplicação f' com uma aplicação tipo a aplicação g_{1_1} correspondente ao grafo $\mathcal{G}_{g_{1_1}}$ (ilustrada na Figura 4.6 e dado na Definição 5.9), de modo que a cirurgia feita acrescenta em 1 o peso da aresta que retiramos acima. Assim obtemos uma aplicação $f : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ correspondente ao grafo \mathcal{G} , com seus pesos originais.

Caso 2: Dado o grafo \mathcal{G}_g com as condições neste caso, este grafo tem peso 1 em algum vértice e zero no resto, retirando este peso 1 do vértice, obtemos um grafo denotado por \mathcal{G}' com peso zero em todos os vértices. Pelo Teorema 5.1 \mathcal{G}' pode ser realizado por uma aplicação estável $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fazendo cirurgia tipo 1 entre a aplicação f' com uma aplicação tipo a aplicação g_{1_2} correspondente ao grafo $\mathcal{G}_{g_{1_2}}$ (ilustrada na Figura 4.6 e dado na Definição 5.9), para acrescentar o peso do vértice que retiramos, assim obtemos uma aplicação $f : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ correspondente ao grafo \mathcal{G} , com seus pesos originais.

Caso 3: Dado o grafo \mathcal{G}_g com as condições neste caso, este grafo tem um ciclo, retirando uma aresta do ciclo, obtemos um grafo, denotado por \mathcal{G}' . Este grafo é uma árvore. Pelo Teorema 5.1, \mathcal{G}' pode ser realizado por uma aplicação estável $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fazendo a cirurgia tipo 2 na aplicação f' , entre as regiões

correspondentes aos vértices da aresta retirada, unindo as regiões de onde fora tirada a aresta de grafo \mathcal{G} , assim obtemos uma aplicação $f'' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com \mathcal{G}'' como grafo associado. Agora, fazendo cirurgia tipo 1 entre a aplicação f'' com o número necessário de aplicações tipo a aplicação g_{1_1} correspondente ao grafo básico \mathcal{G}_{1_1} (ilustrada na Figura 4.6 e dado na Definição 5.9), obtemos uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ correspondente ao grafo \mathcal{G} , com seus pesos originais. \square

Observação 5.11. Outra maneira de mostrar o Caso 2 e o Caso 3, da demonstração no Teorema 5.10 acima é verificar que esse é consequência imediata da Proposição 5.8.

5.3 Realização de grafos com $M = T^3$

Lema 5.12. [16] $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$.

O lema a seguir nos diz que o tritoro T^3 pode ser obtido pela soma conexa de 3 cópias de $S^2 \times S^1$.

Lema 5.13. *Sejam as 3-variedades $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ e $S^2 \times S^1$ então*

$$T^3 \approx S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1.$$

onde as cirurgias $\#$ são do tipo I e não invertem orientação em cada uma delas.

Demonstração: A 3-variedade T^3 está determinado completamente por seus números de Betti $\beta_0(T^3) = \beta_3(T^3) = \mathbb{Z}$, $\beta_1(T^3) = \beta_2(T^3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\beta_n = 0$, para $n > 3$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Assim basta mostrar que os números de Betti de $3(S^2 \times S^1) = S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$ coincidem com os de T^3 . Como $3(S^2 \times S^1)$ é uma 3-variedade fechada e compacta então $\beta_0 = \beta_3$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\beta_n = 0$, para o inteiro $n > 3$. Sabemos que $\beta_0 = \mathbb{Z}$. Então basta calcular β_1 . Pelo teorema de Seifert-Van Kampen (ver [16]) e pelo Lema 5.12 temos

$$\pi_1(3 - S^2 \times S^1) = \pi_1(S^2 \times S^1) \oplus \pi_1(S^2 \times S^1) \oplus \pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

Como $\pi_1(3(S^2 \times S^1))$ é abeliano, então $\pi_1(3(S^2 \times S^1)) \cong H_1(3(S^2 \times S^1))$ e $\beta_1(3(S^2 \times S^1)) = \beta_2(3(S^2 \times S^1)) = 3$. Assim, concluímos que $T^3 \approx S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1 \# S^2 \times S^1$.

\square

Do Teorema 4.6 temos o seguinte resultado. Uma demonstração mais detalhada será dada no caso geral na Seção 5.4.

Teorema 5.14. *Qualquer grafo \mathcal{G}_g com*

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}_g) \leq (b_2(T^3) = 3) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}_g) + \sum_{i=1}^{\mu} g_i$$

pode ser realizado como grafo de uma aplicação estável de T^3 no \mathbb{R}^3 .

Demonstração: Pelo Lema 5.13, por construção usando os Teoremas 5.1, 5.10 e as cirurgias tipo 1 e tipo 2, dados na Seção 4.2, provamos este teorema. \square

5.4 Realização de grafos com M homeomorfo a S^3 com k asas

Lema 5.15. *Seja M uma 3-variedade homeomorfa a S^3 com k asas (a soma conexa de k cópias de $S^2 \times S^1$ com S^3) uma árvore \mathcal{G} , então existe uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ se, e somente se*

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) \leq b_2(M) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^{\mu} g_i.$$

Demonstração: A ida é dada pelo Teorema 4.6.

Mostraremos a volta por construção. Seja o grafo \mathcal{G} uma árvore, retirando todos os pesos dos vértices obtemos um grafo, denotado por \mathcal{G}' , com peso zero em todos os vértices. Pelo Teorema 5.1, \mathcal{G}' pode ser realizado por uma aplicação estável $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Fazendo cirurgias tipo 1 entre f' com um número necessário de aplicações tipo a aplicação f_2 , ilustrada na Figura 5.9, obtemos uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo grafo associado é o grafo \mathcal{G} com seus pesos originais. \square

Teorema 5.16. *Seja M uma 3-variedade homeomorfa a S^3 com k asas (a soma conexa de k cópias de $S^2 \times S^1$ com S^3) e seja \mathcal{G} um grafo bipartido. Então existe uma aplicação estável $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{G}(f)$ se, e somente se*

$$\sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) \leq b_2(M) \leq \sum_{j=1}^V c_j + b_1(\mathcal{G}) + \sum_{i=1}^{\mu} g_i.$$

Demonstração: A ida é dada pelo Teorema 4.6.

Na Figura 5.10 temos um diagrama para provar a volta deste teorema. Mostraremos por construção, dividindo em dois casos: Caso 1, quando o grafo \mathcal{G} é uma árvore; Caso 2, quando o grafo \mathcal{G} tem ciclos.

Caso 1 Se o grafo \mathcal{G} é uma árvore pelo Lema 5.15, \mathcal{G} é realizável.

Caso 2 Se o grafo \mathcal{G} tem ciclos, a prova é feita nos seguintes 7 passos: **(1)** retiramos todos os pesos dos vértices do grafo \mathcal{G} obtemos um novo grafo \mathcal{G}' , com peso zero em todos seus vértices. **(2)** Do grafo \mathcal{G}' identificamos uma aresta μ_k , com seu respectivo peso g_k , retirando todos os pesos g_k destas arestas identificadas obtemos o grafo \mathcal{G}'' , com peso zero em todas as arestas identificadas. **(3)** Logo do grafo \mathcal{G}'' retiramos as arestas identificadas μ_k assim obtemos o grafo \mathcal{G}''' , que é uma árvore com peso zero nos vértices e seus respectivos pesos nas arestas. **(4)** Pelo Teorema 5.1, \mathcal{G}''' pode ser realizado por uma aplicação estável $f''' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo grafo associado $\mathcal{G}_{f'''}'$ é igual ao grafo \mathcal{G}''' . **(5)** Fazendo cirurgias tipo 2 na aplicação f''' , cada uma entre as duas regiões correspondentes a pares de vértices incidentes a uma das arestas retiradas μ_k de \mathcal{G}'' , assim obtemos uma aplicação $f'' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo grafo associado $\mathcal{G}_{f''}$ é igual ao grafo \mathcal{G}'' . **(6)** Fazendo cirurgias tipo 1 convenientemente entre f'' com um número necessário de aplicações tipo a aplicação f_1 , ilustrada na Figura 5.9, que acrescentam os gêneros g_k dos conjuntos singulares correspondentes as arestas identificadas em \mathcal{G}' , obtemos assim a aplicação $f' : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo grafo associado $\mathcal{G}_{f'}$ é igual ao grafo \mathcal{G}' . **(7)** Por último fazendo cirurgias tipo 1 entre f' com um número necessário de aplicações tipo a aplicação f_2 , ilustrada na Figura 5.9. Assim obtemos uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo grafo associado \mathcal{G}_f é igual ao grafo \mathcal{G} , com seus pesos originais. \square

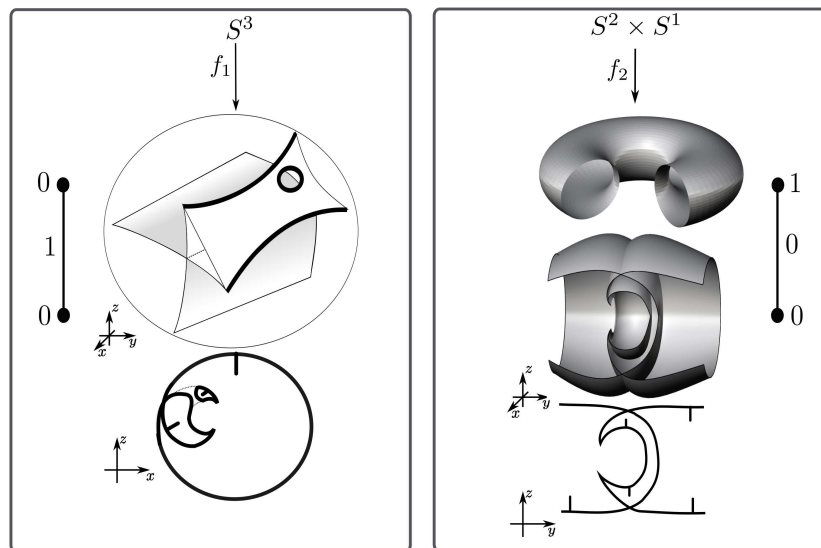


Figura 5.9: Aplicações f_1 e f_2 .

Apêndice I

Neste Apêndice, vamos dar os significados dos detalhes de uma figura geral da dissertação e suas respectivas partes e esta dada na Figura 5.11.

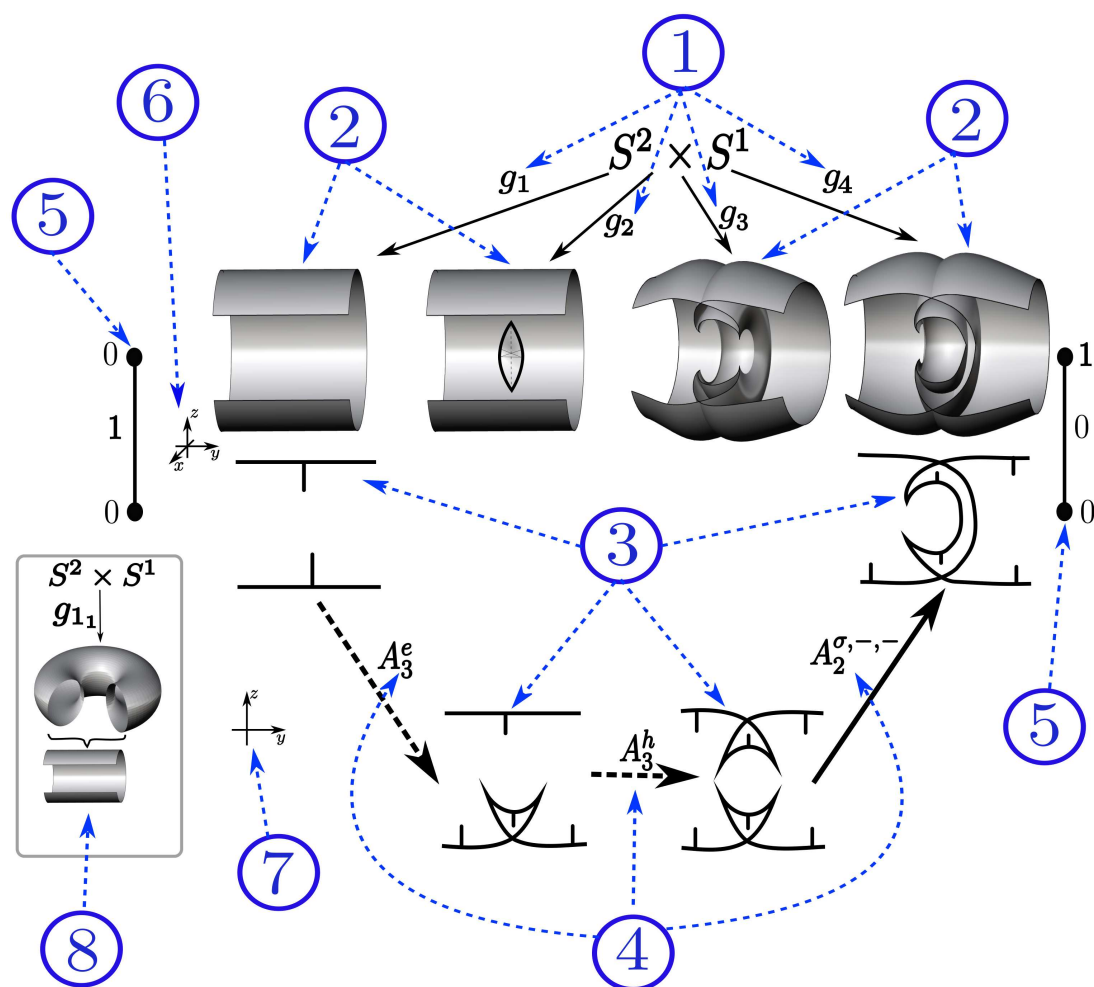


Figura 5.11: Partes de uma imagem 1.

1. Temos que $g_1, g_2, g_3, g_4 : S^2 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são aplicações estáveis.

2. São as imagens completa (ou local), do conjunto de bifurcação $Bg = g(\Sigma g)$ das respectivas aplicações depois de uma transição.
3. Cortes do conjunto de bifurcação $Bg = g(\Sigma g)$ com um plano fixo, neste caso *plano* – xy .
4. Transições de codimensão 1 que sofre a aplicação g_1 até chegar a g_4 .
5. Grafo associado a aplicação estável, grafo da esquerda corresponde as aplicações g_1, g_2, g_3 e o grafo da direita corresponde a aplicação g_4 .
6. O espaço \mathbb{R}^3 onde moram as imagens das aplicações e em particular o conjunto de bifurcação $Bg = g(\Sigma g)$.
7. Plano de corte para cortar 2 e achar 3. Neste caso *plano* xy .

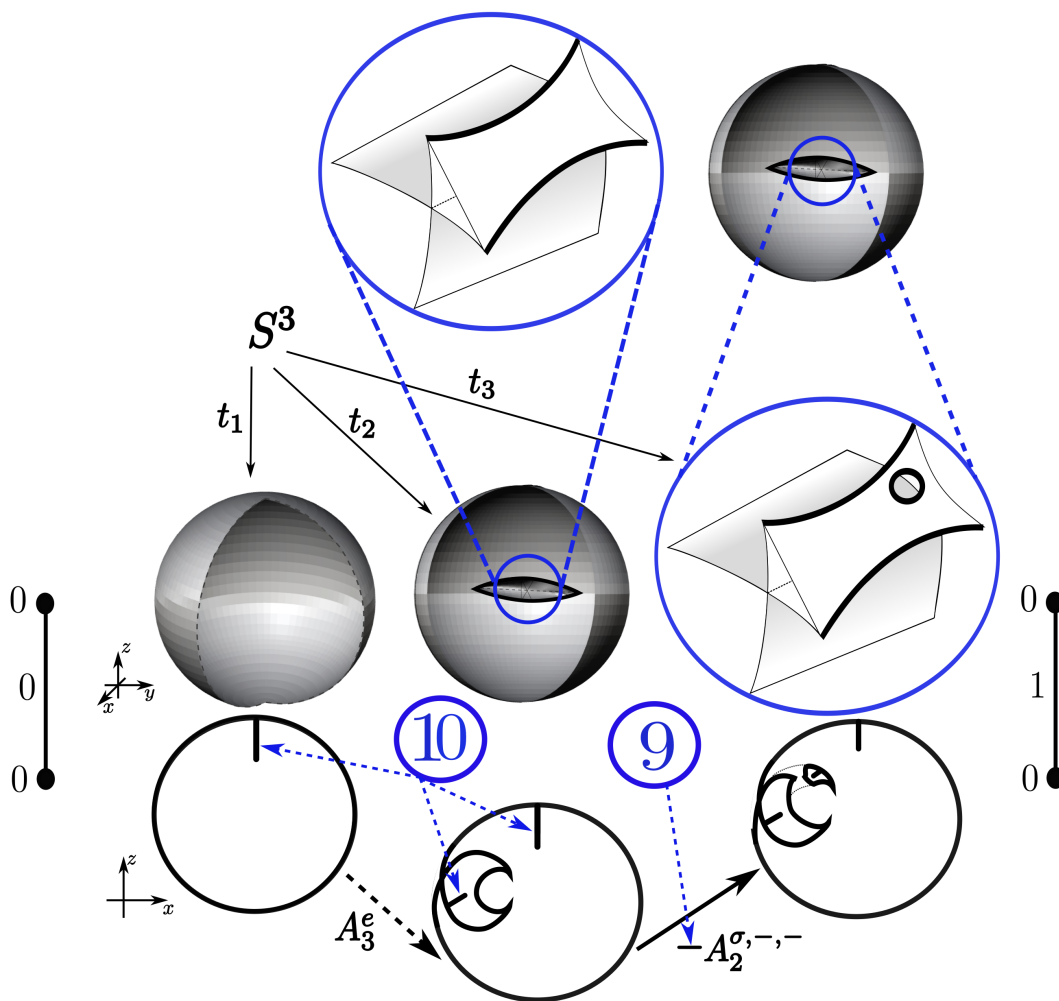


Figura 5.12: Partes de uma imagem 2.

8. Porção do conjunto de bifurcação de uma aplicação, onde acontecem as transições.
9. Sinal que indica em que direção esta dada a transição, (Se a transição é feita na direção da definição dada na Figura 4.2, o sinal é positivo e negativo no caso contrario).
10. Sinal de orientação do conjunto de bifurcação $Bg = g(\Sigma g)$ (superfícies) ver Definição 3.14.

Na Figura 5.12 temos um zoom em uma parte do conjunto de bifurcação, depois da transição A_3^h (nascimento de um rabo de andorinha).

Referências Bibliográficas

- [1] DIAS, M. D. S. S. *Classificação de aplicações estáveis através do uso de grafos*. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, (2012) 64p.
- [2] GARCIA, A.; LEQUAIN, L. *Elementos de álgebra*. Projeto Euclides, Impa. Rio de Janeiro, (2013) 164–165.
- [3] GIBSON, C. G. *Singular Points of Smooth Mappings*. Research Notes in Maths. 25, Pitman, (1979).
- [4] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer Verlag. Berlin (1976) 211p.
- [5] GORYUNOV, V. V. *Singularities of projections of complete intersections*. J. Soviet Math. 27 (1984) 2785–2811.
- [6] GORYUNOV, V. V. *Local invariants of maps between 3-manifolds*. UL, United Kingdom, (2013) 1–20.
- [7] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO FUSTER, M. C. *Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint. Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232, Marcel and Dekker (2003), 227–235.
- [8] HATCHER, A. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Cornell, (1980)72p.
- [9] HU, SZE-TSEN *Homology Theory*. Holden - Day San Francisco. (1966), p. 108.
- [10] KINSEY, L. C. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag. New York, (1997).
- [11] LIMA, E. L. *Homologia Básica*. Projeto Euclides, Impa. Rio de Janeiro, (2012) 191p.
- [12] MENDES DE JESUS, C.; OSET SINHA, R.; ROMERO FUSTER, M. C. *Global topological invariants for stable maps from 3-manifolds to \mathbb{R}^3* . Steklov Inst. Math. 267 (2009), 205–216.
- [13] MACHADO, D. S. *Invariante global de aplicações estáveis de superfície no plano*. Dissertação de mestrado. UFV-Brasil, (2010) 82p.

- [14] MASSEY, W. S. *Algebraic topology An introduction*. Springer-Verlag. New York, (1977) 282p.
- [15] MOISE, E. E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag. New York, (1977) 271p.
- [16] MUNKRES, J. R. *Topología*. 2 ed. Prentice Hall. Madrid, (2002) p. 421.
- [17] NICOLAESCU, L. I. *The Euler Characteristic*. Math Club, (2006) p. 1,2.
- [18] NOVASSATI, H. *Topologia das Variedades Algébricas*. Impa. Rio de Janeiro, (2007) 49p.
- [19] PABLO, I. P. *Modificaciones en Poliedros con Caras Identificadas*. Trabajo de maestría, Medellín-Colombia, (2011) 60p.
- [20] SAEKI, O. *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*. Topology Appl. 49 (no. 3) (1993), 265–293.
- [21] SINHA, R. O. *Topological invariants of stable maps from 3-manifolds to three-space*. UV, España, (2009) 139p.
- [22] SINHA, R. O.; ROMERO FUSTER, M. C. *Graphs of Stable Maps from 3-Manifolds to 3-space*. Mediterr. J. Math. 10 (2013), 1107–1126.
- [23] VICK, J. W. *Homology Theory*. Academic Press, New York, (1973). p. 8, 16, 128.
- [24] VASSILIEV, V. A. *Complements of Discriminants of smooth maps, Topology and applications*. AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [25] WHITE, A. T. *Graphs, Groups and Surfaces*. Mathematics Studies. Nort Holland, (1973).
- [26] WHITNEY, H. *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, Ann. of Math.62 (1955), 374–410.
- [27] YUNG-CHEN, L. *Singularity Theory and Introduction to Catastrophe*. Springer-Verlag. (1976) 211p.
- [28] THE INKSCAPE TEAM. 2003. Disponível em: <[HTTPS://WWW.INKSCAPE.ORG/ES/](https://www.inkscape.org/es/)>. Acesso em: 20 abril 2015.
- [29] ROBERT MCNEEL AND ASSOCIATES. 2012. Disponível em: <[HTTPS://WWW.RHINO3D.COM/ES/](https://www.rhino3d.com/es/)>. Acesso em: 10 maio 2015.