

WILSON BERROCAL MEZA

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS COM
SÍSTOLE MÁXIMA

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

B533c Berrocal Meza, Wilson, 1987-
2017 Construção de superfícies hiperbólicas com sístole máxima
/ Wilson Berrocal Meza. – Viçosa, MG, 2017.
x, 93f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Mércio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.92-93.

1. Geometria hiperbólica. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

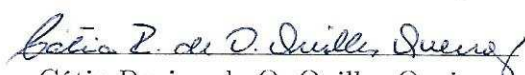
CDD 22 ed. 516.9

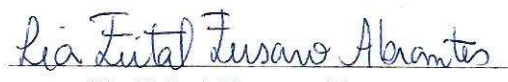
WILSON BERROCAL MEZA

CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS COM
SÍSTOLE MÁXIMA

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de Fevereiro de 2017


Cátia Regina de O. Quilles Queiroz


Lia Feital Fusaro Abrantes


Mercio Botelho Faria
(Orientador)

WILSON BERROCAL MEZA

**CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS COM
SÍSTOLE MÁXIMA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de Fevereiro de 2017

Cátia Regina de O. Quilles Queiroz

Lia Feital Fusaro Abrantes

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Pelágio e Alejandrina.*

Depois de escalar uma montanha muito alta, descobrimos que há muitas outras montanhas por escalar.

NÉLSON MANDELA

Agradecimentos

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Pelágio e Alejandrina, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço ao meu orientador, Mércio Faria, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço aos meus irmãos, Marline, Adrián e Diany, que me deram coragem e incentivo para que pudesse encarar esse desafio.

Agradeço a minha namorada, Margoth, pelo apoio desde o primeiro momento, que mesmo estando tão longe me incentivou a todo instante.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Geometria hiperbólica e grupos fuchsianos	3
1.1 Transformações de Möbius	3
1.1.1 Inversões e reflexões	3
1.1.2 O grupo de Möbius e o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$	5
1.2 Modelos hiperbólicos	7
1.2.1 O modelo do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$	7
1.2.2 O modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	9
1.3 Polígonos hiperbólicos	10
1.3.1 Triângulos hiperbólicos	10
1.3.2 Área hiperbólica	11
1.3.3 Polígonos convexos	12
1.4 Grupos fuchsianos e domínios de Dirichlet	12
1.4.1 Grupos discretos e propriamente descontínuos	15
1.4.2 Domínios fundamentais e de Dirichlet	16
1.4.3 Grupos fuchsianos co-compactos	20

2	Superfícies de Riemann isométricas ao plano hiperbólico	22
2.1	Estrutura hiperbólica	22
2.2	Esquema de colagem	26
2.3	A cobertura universal	30
2.4	Curvas perpendiculares e geodésicas fechadas	31
2.5	Os parâmetros Fenchel-Nielsen	35
2.6	Trigonometria hiperbólica	38
2.6.1	O modelo hiperboloide	39
2.6.2	Triângulos	40
2.6.3	Tri retângulos e pentágonos	43
2.7	Parâmetros de torção e teorema do colar	45
3	Construção de superfícies hiperbólicas com sístole máxima	52
3.1	Problema de sístole grande	52
3.2	Superfícies compactas e sístole máxima	54
3.3	Superfícies com cúspides e sístoles maximais	62
4	Sístoles em superfícies geradas por grupos fuchsianos	72
4.1	Sístole na superfície $S = \mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$	72
4.1.1	$\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ por emparelhamento usual	74
4.1.2	$\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ por emparelhamento diametralmente oposto	77
4.2	Sístole na superfície $S = \mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$	80
4.3	Cálculo do $\text{msys}(g)$ em $\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ e $\mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$	87
4.4	Construção de Buser e Sarnak	87
4.4.1	Álgebra dos quatérnios e ordem dos quatérnios	87
4.4.2	Teorema de Buser e Sarnak	89
	Considerações Finais	91
	Referências Bibliográficas	92

Lista de Figuras

1.1	Modelo do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ ou plano de Lobatchevsky.	7
1.2	Geodésicas no modelo de semiplano superior $\mathbb{H}^2$	9
1.3	Modelo do disco unitário $\mathbb{D}^2$ ou disco de Poincaré.	10
1.4	Geodésicas no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	11
1.5	Triângulos no semiplano superior $\mathbb{H}^2$	11
1.6	Polígono regular e convexo em $\mathbb{D}^2$	13
1.7	Polígono regular e convexo em $\mathbb{D}^2$	17
1.8	Domínio fundamental de grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = e^{i\frac{\pi}{6}} \rangle$	19
2.1	Coordenadas polares em $\mathbb{D}^2$	23
2.2	Coordenadas horo círculos em $\mathbb{H}^2$	24
2.3	Colagem de dois polígonos em $\mathbb{H}^2$	26
2.4	Cilindro hiperbólico.	27
2.5	Colagem de geodésicas fechadas.	28
2.6	Cobertura universal.	31
2.7	Homotopias no disco $\mathbb{D}^2$	32
2.8	Algumas homotopias.	34
2.9	Cúspide gerada por $\Gamma = \langle T(z) = z + c \rangle$ em $\mathbb{H}^2$	35
2.10	Existência de um hexágono em $\mathbb{H}^2$	36
2.11	Construção de uma superfície Y	36
2.12	Construção com parâmetros de Fenchel-Nielsen.	37
2.13	Esquema e colagem numa calça Y	38
2.14	Triângulo em $\mathcal{H}$	40

2.15	Ângulo de rotação.	41
2.16	Lados e ângulos subsequentes.	42
2.17	Triângulos generalizados.	43
2.18	Triângulo generalizado.	44
2.19	Pentágono reto.	45
2.20	Descomposição de uma calça em hexágonos H	46
2.21	Homeomorfismo do colar para um parâmetro de torção a	47
2.22	Levantamento das curvas μ_p e β em $\mathbb{H}^2$	50
3.1	Colar da curva η e colar maximal de η	55
3.2	Existência do arco geodésico δ no colar maximal de α	55
3.3	Identificação das geodésicas fronteiras de S_i^c	56
3.4	Geodésicas fechadas na superfície S' de gênero $k(g-1)+1$	59
3.5	Esquema de colagem de S^c e $F_{\max}$	60
3.6	A superfície de assinatura de $(0, 4, 3)$	64
4.1	$\mathcal{P}_8$ por emparelhamento usual de arestas.	74
4.2	$\mathcal{P}_8$ por emparelhamento diametralmente oposto de arestas.	78
4.3	$\mathcal{P}_{18}$ emparelhado pelo conjunto Φ_{18}	81

Resumo

MEZA, Wilson Berrocal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES HIPERBÓLICAS COM SÍSTOLE MÁXIMA**. Orientador: Mércio Botelho Faria.

O presente trabalho abordará o estudo de algumas desigualdades sistólicas em superfícies hiperbólicas compactas de gênero $g \geq 2$ com sístoles máximas. Utilizaremos a técnica de corte e colagem para construir superfícies hiperbólicas compactas com sístole grande a partir de superfícies maximais. Derivaremos desigualdades semelhantes para superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides. Além disso, apresentaremos alguns resultados sobre sístole em superfícies e avaliaremos um tipo de sístole de superfícies relacionadas a tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$ para $g \geq 2$.

Abstract

MEZA, Wilson Berrocal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017.
CONSTRUCTION OF HYPERBOLIC SURFACES WITH MAXIMUM SYSTOLE. Adviser: Mércio Botelho Faria.

The present work will study some systolic inequalities in compact hyperbolic surfaces of genus $g \geq 2$ with maximum systoles. We use cutting and pasting techniques to construct compact hyperbolic surfaces with large systole from maximum surfaces. We will similar inequalities for non- compact hyperbolic surfaces with cusps. Furthermore we will present some results on systoles on surfaces and evaluate a types of surfaces systole related to $\{4g, 4g\}$ and $\{12g-6, 3\}$ tessellations for $g \geq 2$.

Introdução

Uma sístole numa superfície hiperbólica compacta S de gênero $g \geq 2$, é uma geodésica fechada simples de menor comprimento, e denotaremos o comprimento por $\text{sys}(S)$. Seja $\text{msys}(g)$ o valor máximo atingido por $\text{sys}(\cdot)$ entre todas as superfícies hiperbólicas compactas de gênero g . Chamaremos superfície maximal $S_{\max}$ a uma superfície hiperbólica compacta de gênero g cuja sístole tem comprimento $\text{msys}(g)$ [19]. Usando a técnica de corte e colagem construiremos superfícies hiperbólicas compactas com sístole grande numa superfície maximal. Isto nos permitirá mostrar várias desigualdades relacionadas com $\text{msys}(\cdot)$ para diferentes gêneros. Por último, mostraremos desigualdades semelhantes para superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides.

Usando grupos fuchsianos aritméticos Buser e Sarnak em [8] mostraram que existe uma sequência $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com

$$\text{sys}(S_k) \geq \frac{4}{3} \log(g_k) - c_0,$$

onde c_0 é constante. Esta construção foi generalizada por Katz, Schaps e Vishne em [18], encontrando mais famílias de superfícies hiperbólicas compactas satisfazendo a desigualdade acima. Makisumi em [20], mostrou que o fator $3/4$ é o melhor valor alcançado até hoje na construção feita por Katz, Schaps e Vishne.

O estudo de superfícies cuja sístole tem comprimento máximo no espaço módulo $\mathcal{M}_g$ de superfícies hiperbólicas compactas de gênero $g \geq 2$, foi começado por Schmutz em [24], [25] e [26]. Propriedades interessantes destas superfícies foram obtidos por: Barvard e Schmutz em [3] e [25], os quais mostraram que uma superfície máxima de gênero g tem pelo menos $6g - 5$ sístoles; Schmutz em [25] mostrou que existe somente um número finito de superfícies maximais de gênero g e Parlier em [21] mostrou que toda sístole de uma superfície máxima é não separável. Em [25], Schmutz Schaller generalizou o conceito de sístole, considerando uma família de k geodésicas fechadas simples e disjuntas, associando a cada uma delas uma função comprimento que corresponde ao comprimento da maior geodésica, então ele introduziu k -sístoles como a menor função destes comprimentos.

Diante destes estudos e com objetivo de calcular as sístoles sobre uma superfície gerada pelas tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$ que fornecem superfícies compactas com gênero $g \geq 2$. Calcularemos através do emparelhamento das arestas dos polígonos $\mathcal{P}_{4g}$ e $\mathcal{P}_{12g-6}$ fornecidos pelos trabalhos em [11] e [28], os comprimentos das geodésicas que tem um representante na classe dos eixos das transformações hiperbólicas, dividimos nosso trabalho da seguinte forma.

No Capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos que serão usados no desenvolvimento de nosso trabalho. Iniciaremos falando de transformações de Möbius, onde se apresentará dois tipos de transformações (inversão e reflexão). Logo falaremos da geometria hiperbólica plana sobre os modelos mais usados: semiplano superior $\mathbb{H}^2$ e o disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Também explanaremos conceitos e resultados de grupos fuchsianos, domínios fundamentais e alguns resultados de grupos fuchsianos co-compactos.

No Capítulo 2, apresentaremos algumas propriedades geométricas de superfícies que são localmente isométricas ao plano hiperbólico. Iniciaremos falando da construção destas superfícies por meio da técnica de corte e colagem. Em seguida, falaremos de superfícies com limites geodésicos por partes, os teoremas de existência e unicidade para geodésicas em vários tipos de classes de homotopia e faremos um esboço dos parâmetros Fenchel-Nielsen. Uma ferramenta de muita utilidade para nosso trabalho (Capítulo 3) é a trigonometria hiperbólica, que será apresentada no modelo hiperbolóide, logo falaremos dos parâmetros de torção, importantes na construção de superfícies. Finalmente apresentaremos uma das propriedades mais fundamentais de superfícies hiperbólicas, conhecida como Teorema do colar.

No Capítulo 3, temos como objetivo demonstrar os Teoremas 3.6 e 3.8. Para isto, iniciaremos falando da sístole em uma superfície hiperbólica compacta S de gênero $g \geq 2$. Em seguida, apresentaremos o problema de sístole grande, além disso algumas definições e resultados de sístoles. Deste modo, usando a técnica de corte e colagem construiremos superfícies hiperbólicas compactas com sístoles grandes de uma superfície maximal. Antes das demonstrações dos teoremas apresentaremos o lema do colar para sístole, o qual nos permite mostrar várias desigualdades relacionadas com $\text{msys}(\cdot)$ para diferentes gêneros. Por último, mostraremos desigualdades semelhantes para superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides.

No Capítulo 4, temos como objetivo calcular as sístoles de superfícies geradas pelas tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$, que fornecem uma superfície hiperbólica compacta com gênero $g \geq 2$. Começaremos calculando, através dos emparelhamentos das arestas dos polígonos $\mathcal{P}_{4g}$ e $\mathcal{P}_{12g-6}$ fornecido nos trabalhos de Vieira [28] e Faria [11], o comprimento das geodésicas que tem um representante na classe dos eixos da transformação hiperbólica. Para isto, usaremos uma ferramenta importante: o Teorema 4.1. Além disso, faremos uma introdução da ordem dos quatérnios e da existência de um isomorfismo entre a álgebra dos quatérnios e o grupo das matrizes. E concluiremos apresentando a construção de Buser e Sarnak em [8].

Capítulo 1

Geometria hiperbólica e grupos fuchsianos

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento de nosso trabalho. Por serem resultados familiares, omitimos as demonstrações. Iniciaremos falando de transformações de Möbius, onde se apresentará dois tipos de transformações (Inversão e Reflexão). Logo falaremos da geometria hiperbólica plana sobre os modelos mais usados: semiplano superior $\mathbb{H}^2$ e o disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Explanaremos alguns conceitos e resultados de grupos fuchsianos, domínios fundamentais e alguns resultados de grupos fuchsianos co-compactos.

As principais referências são: [1], [4], [13], [17], [28], e outras referências que serviram na complementação da teoria foram [5], [11], [10].

1.1 Transformações de Möbius

As transformações de Möbius aparecem no estudo de análise complexa e superfícies de Riemann, como transformações que mantêm um disco ou semi-espaço invariante. O principal estudo é sobre o caso do plano hiperbólico bidimensional. Inicialmente, introduzimos as transformações de Möbius para dimensão arbitrária, especificamente de dois tipos distintos de transformações, as reflexões e inversões. Logo trataremos do caso das transformações no caso bidimensional.

1.1.1 Inversões e reflexões

Começamos considerando o espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ e sua compactificação por um ponto $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, onde chamamos o ponto ∞ de ponto ideal e suas vizinhanças são os conjuntos da forma $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup \{\infty\}$, onde A é um compacto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Mostraremos que com essa topologia¹, $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é

¹Uma topologia sobre um conjunto X , é uma família $\mathfrak{S} \subset P(X)$, verificando $\emptyset, X \in \mathfrak{S}$; se $A, B \in \mathfrak{S}$, então $A \cap B \in \mathfrak{S}$ e, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{S}$.

homeomorfo à esfera

$$S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \right\}.$$

De fato, consideremos a imersão $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ e o ponto $N = (0, \dots, 0, 1)$ o polo norte da esfera. Podemos definir a projeção estereográfica

$$\pi_N = S^n \setminus \{N\} \rightarrow i(S^n) \cong \mathbb{R}^n.$$

Essa projeção é definida do seguinte modo: dado um ponto $x \in S^n \setminus \{N\}$, existe uma única reta determinada por x e por N . Sendo $x \neq N$, sua última coordenada é diferente de 1, logo a reta por x e por N interceptará o hiperplano $i(\mathbb{R}^n)$ em um único ponto que denotaremos por $\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0)$. Mais ainda, podemos verificar que π_N é um homeomorfismo.

Agora, se temos que $(x^n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em S^n , constatamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = N \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_N(x^n)| = \infty.$$

Portanto, ao adicionarmos um ponto ideal a $\mathbb{R}^n$ e definirmos suas vizinhanças como acima, a projeção estereográfica se estende a um homeomorfismo $\pi : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$. Denotaremos por $S_r(a)$ a esfera de $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio r .

Uma esfera $S_r(a)$ em $\mathbb{R}^n$ é dada por $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n / |x - a| = r\}$, onde $r > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$. O conjunto $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ é chamado compactificação por um ponto ideal.

Definição 1.1. *Dada uma esfera $S = S_r(a)$ no espaço euclidiano a inversão $i_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ em torno de S é a aplicação tal que $i_S(a) = \infty, i_S(\infty) = a$ e para cada $x \notin \{a, \infty\}$, $i_S(x)$ é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{ax}$ tal que $|a - x||a - i_S(x)| = r^2$.*

Dada a esfera $S = S_r(a)$, temos que para todo $x \neq a, \infty$, a forma explícita da inversão é

$$i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}.$$

Definição 1.2. *Uma aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita conforme se Φ preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.*

Uma observação da inversão é que, para toda esfera $S = S_r(a)$, a inversão i_S é uma aplicação conforme de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

Para definir a seguinte aplicação, faremos algumas considerações. Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$P_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle = t\},$$

onde $\langle x, a \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

P_t é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ e $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$ é chamado hiperplano compactificado.

Definição 1.3. A reflexão i_P em P é a aplicação que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa um ponto $i_P(x)$ tal que o segmento de reta por x e $i_P(x)$ é ortogonal a P e intercepta o plano P em seu ponto médio.

Em particular, i_P mantém fixos os pontos de $P_t(a)$ e por definição $i_P(\infty) = \infty$. Para finalizar esta subseção, damos algumas observações da aplicação reflexão.

1. Dado o hiperplano P , a forma explícita da aplicação reflexão é dada por

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a.$$

2. Dados um hiperplanos P e pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| = |i_P(x) - i_P(y)|$.
3. Seja i_P uma reflexão em um hiperplano P . Então, para toda esfera S_r , $i_P(S_r)$ é uma esfera.
4. Para todo hiperplano $P = P_t(a)$ a reflexão i_P é conforme.

1.1.2 O grupo de Möbius e o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$

Agora apresentaremos as transformações de Möbius e seu grupo geral e veremos sua particularização para o plano complexo.

Definição 1.4. Uma transformação de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O conjunto de transformações de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é chamado de grupo geral de Möbius e é denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Definição 1.5. O grupo de Möbius $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ formado pelas transformações de $\mathbb{R}^n$ que preservam a orientação.

Consideremos o plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty$ e a transformação $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ onde os coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e supondo $ad - bc \neq 0$ temos transformações não-singulares. No caso $ad - bc = 0$ teríamos $ad = bc$, em consequência temos $T'(z) = 0$ ou seja, T é constante. Além disso, se $c \neq 0$, definimos $T(-d/c) = \infty$ o ponto no infinito, $T(\infty) = a/c$ e se $c = 0$ definimos $T(\infty) = \infty$. Logo, podemos definir.

Definição 1.6. Uma transformação de Möbius de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$ é uma aplicação da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

onde a, b, c, d são constantes complexas satisfazendo $ad - bc \neq 0$.

E como vimos na Definição 1.5, o conjunto dessas transformações é um grupo não abeliano com a operação usual de composição de transformações o que denotaremos daqui em diante simplesmente por G .

Continuando a subseção, consideremos o subgrupo de $M(2, \mathbb{R})$ das matrizes 2×2 , e seja

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\},$$

o grupo com a operação usual de multiplicação das matrizes 2×2 inversíveis. E agora consideremos o conjunto

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}, \quad (1.1)$$

que é um subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ com determinante igual a 1. Neste caso dizemos que A está normalizada. Então, para cada matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$ associamos a uma transformação $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Considerando

$$D = \left\{ S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in G / ad - bc = 1 \right\},$$

temos que D é um subgrupo de G .

E também, para cada transformação $S_A \in D$ existe uma transformação $S_{A^{-1}}$, tal que $S_A \circ S_{A^{-1}} = Id$. Basta observar, que $S_A \circ S_{A^{-1}}(z) = S_{AA^{-1}}(z) = S_I(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1} = z = Id(z)$, onde Id é a transformação identidade de D e I é a matriz identidade de $SL(2, \mathbb{R})$. Com isso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1. ([13], pág.: 33) Como o $\{\pm I_{2 \times 2}\}$ é subgrupo normal de $SL(2, \mathbb{R})$, onde $I_{2 \times 2}$ é matriz identidade. Então, $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_{2 \times 2}\}} \simeq D$.

Desde agora denotaremos $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_{2 \times 2}\}}$ por $PSL(2, \mathbb{R})$. Conhecido como grupo projetivo especial linear.

Além disso temos outro grupo que esta definido da seguinte forma

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1 \right\} \quad (1.2)$$

em $\mathbb{C}$ determinado por

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

1.2 Modelos hiperbólicos

Neste seção apresentaremos os dois modelos mais utilizados na geometria hiperbólica que são o semiplano superior (ou plano de Lobatchevsky) e o disco unitário (ou disco de Poincaré). A escolha de um modelo depende do trabalho que se deseja realizar. Por exemplo, uma vantagem do modelo de disco é que é um conjunto limitado no plano, o que facilita nas visualizações geométricas. E a vantagem do modelo de semiplano superior $\mathbb{H}^2$ é a facilidade com que as coordenadas cartesianas podem ser usadas em cálculos.

1.2.1 O modelo do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$$

dotado com a métrica

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{\text{Im}(z)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

onde $z = x + iy$ e assumiremos que sua fronteira é dada por

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}.$$

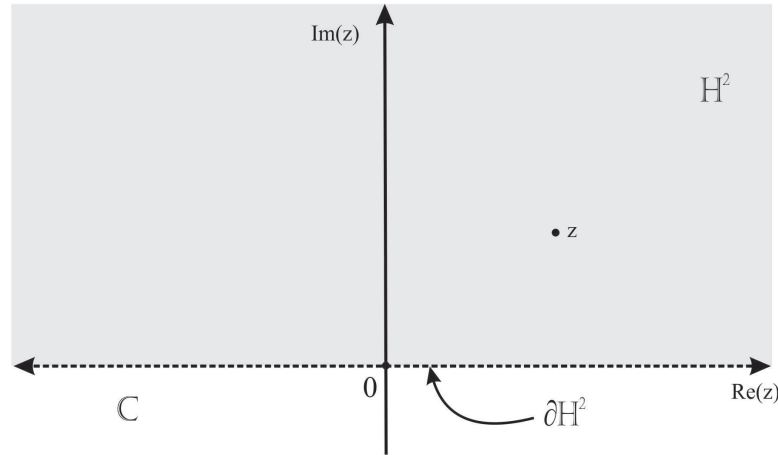


Figura 1.1: Modelo do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ ou plano de Lobatchevsky.

$\mathbb{H}^2$ é chamado semi-plano superior (veja a Figura 1.1). Observe que podemos trabalhar com os elementos de $\mathbb{H}^2$ como número complexos ou como os pontos de $\mathbb{R}^2$.

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então, definimos o comprimento

$\|\gamma\|$ da curva $\gamma(I)$ por

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt.$$

Definição 1.7. *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, a distância entre p e q é definida pela fórmula*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2},$$

onde o ínfimo é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Para melhor compreensão das definições anteriores, damos um exemplo.

Exemplo 1.1. *Sejam $I = [a, b]$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^2, 2)$ uma curva diferenciável, então seu comprimento hiperbólico é*

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{4t^2 + 0}}{2} dt = \int_0^1 t dt = 1/2.$$

Definição 1.8. *Uma isometria em $\mathbb{H}^2$ é uma transformação de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ que preserva a distância hiperbólica. O grupo formado por todas isometrias em $\mathbb{H}^2$ é denotado por $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.*

Tendo definido a distância induzida por uma métrica riemanniana, podemos definir as curvas chamadas geodésicas.

Definição 1.9. *Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é dita geodésica se para quaisquer pontos $s, t \in [a, b]$, com $s \neq t$ tivermos*

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} dt,$$

ou seja, se γ minimiza as distâncias entre os pontos de seu traçado.

Uma consequência das definições de comprimento de uma curva e geodésica, é que as semi-retas ortogonais à fronteira $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ são geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.2. ([13], pág.: 21) *A métrica riemanniana*

$$ds^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y}$$

de $\mathbb{H}^2$ é invariante pela ação de elementos de $T \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, ou seja, $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2) \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Teorema 1.3. ([17], pág.: 4) *As geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ (veja Figura 1.2).*

O conhecimento das geodésicas em $\mathbb{H}^2$ nos permite explicitar a função distância em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.4. ([17], pág.: 6) Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, são válidas as seguintes igualdades:

1. $d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$
2. $\sinh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(Im(z)Im(w))^{1/2}}.$
3. $\tanh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$
4. $\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2Im(z)Im(w)}.$
5. $\sinh \frac{1}{2}d(z, w) = \frac{|z - w|}{2(Im(z)Im(w))^{1/2}}.$

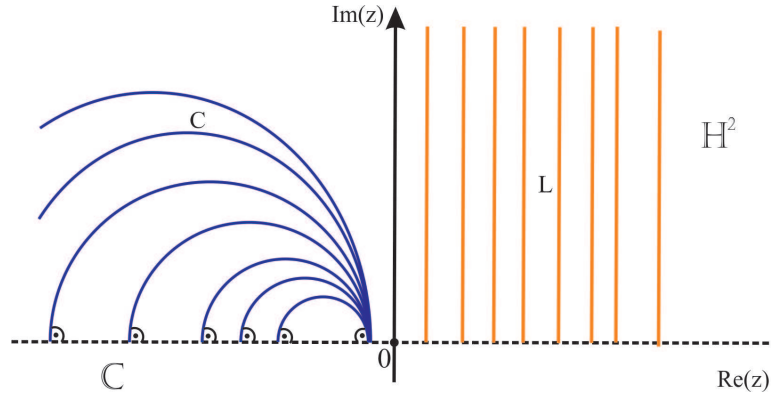


Figura 1.2: Geodésicas no modelo de semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

1.2.2 O modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

Considere o conjunto

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |(x, y)| < 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\},$$

chamado de disco unitário ou disco de Poincaré, dotado da métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{1 - (x^2 + y^2)}$$

e com sua fronteira sendo $\partial_\infty \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}/|(x, y)| = 1\}$ (veja a Figura 1.3)

Consideremos a aplicação $\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por $\eta(z) = \frac{z - i}{z + i}$, e a aplicação $\mu : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\mu(z) = \frac{zi + i}{1 - z}$, temos que estas são inversas uma da outra, ou seja, $\mu = \eta^{-1}$. Logo $\mu \circ \eta(z) = \eta \circ \mu(z) = Id(z)$. Portanto, a aplicação η é uma bijeção de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$, isto é, η transforma $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$. Seja $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ um caminho diferenciável no disco de Poincaré. Então, a curva $\mu \circ \rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$.

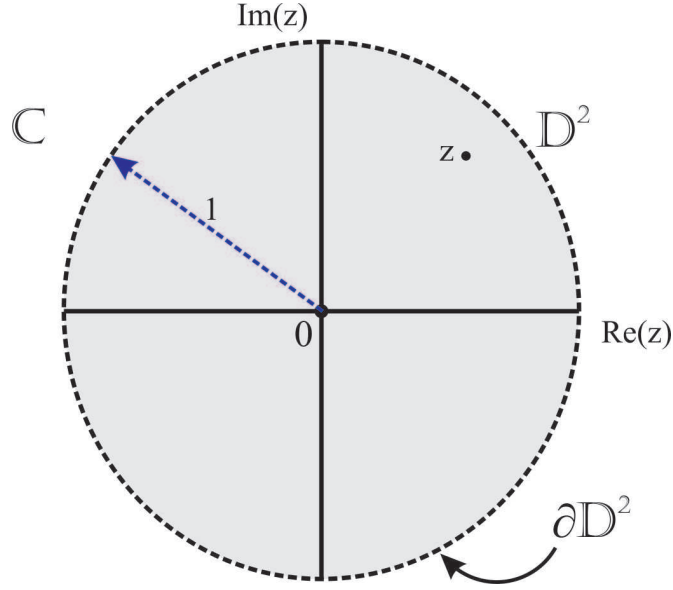


Figura 1.3: Modelo do disco unitário $\mathbb{D}^2$ ou disco de Poincaré.

Definição 1.10. O comprimento hiperbólico em $\mathbb{D}^2$ é dado como

$$\|\rho\|_{\mathbb{D}^2} = \|\mu \circ \rho\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|\mu \circ \rho'(t)|}{\text{Im}(\mu \circ \rho(t))} dt = \int_0^1 \frac{|\mu'(\rho(t))| |\rho'(t)|}{\text{Im}(\mu \circ \rho(t))} dt = \int_0^1 \frac{2|\rho'(t)|}{1 - |\rho(t)|^2} dt.$$

Definição 1.11. Definimos a distância entre dois pontos z, w em $\mathbb{D}^2$ por

$$d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(z), \eta^{-1}(w)).$$

Pelas duas definições anteriores pode-se concluir que, dada γ uma curva em $\mathbb{H}^2$, então $\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ é uma curva em $\mathbb{D}^2$. Além disso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.5. ([28], pág.: 16) As geodésicas de $\mathbb{D}^2$ são os seus diâmetros e os arcos de círculos que interceptam perpendicularmente a fronteira $\partial_{\infty} \mathbb{D}^2$ (veja a Figura 1.4).

1.3 Polígonos hiperbólicos

Tal como na geometria euclidiana, o polígono é um dos objetos básicos da geometria hiperbólica. A seguir apresentamos informações sobre triângulos e polígonos hiperbólicos.

1.3.1 Triângulos hiperbólicos

Seja $\overline{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial \mathbb{H}^2$. Dados três pontos $v_1, v_2, v_3 \in \overline{\mathbb{H}}^2$, se considerarmos as geodésicas ou segmentos geodésicos que ligam estes pontos, obtemos assim um triângulo geodésico. Note que estamos considerando a possibilidade de ter um ou

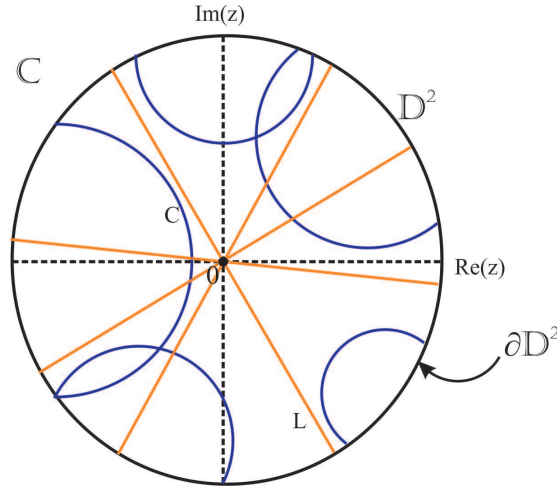


Figura 1.4: Geodésicas no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$.

mais vértice na fronteira $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, por isso admitimos a possibilidade de ter arestas formadas por geodésicas completas. Esses vértices da fronteira são chamados de vértices ideais. A mesma construção pode ser feita em $\mathbb{D}^2$.

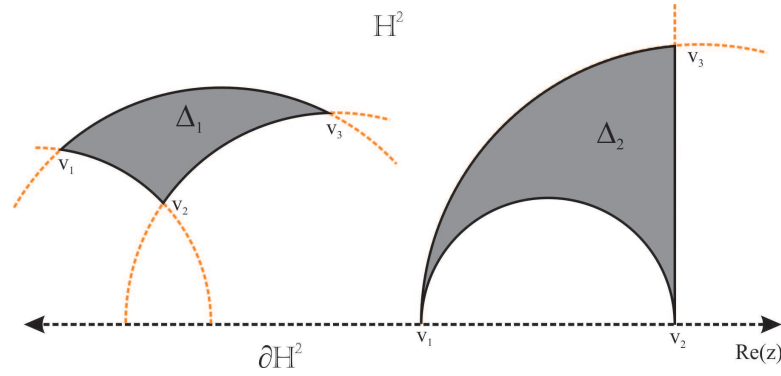


Figura 1.5: Triângulos no semiplano superior $\mathbb{H}^2$.

Agora vamos mostrar a ideia de construir polígonos nos modelos hiperbólicos que estamos estudando, como no caso euclidiano, onde os polígonos no plano são obtidos por interseção de segmentos geodésicos (as retas), o mesmo é feito no caso hiperbólico.

Definição 1.12. *Um polígono hiperbólico em $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{D}^2$ de n -arestas é um conjunto fechado convexo delimitado por n segmentos geodésicos hiperbólicos.*

1.3.2 Área hiperbólica

Começaremos com a seguinte definição:

Definição 1.13. *A área hiperbólica $A_{\mathbb{H}^2}(X)$ de um subconjunto X de $\mathbb{H}^2$ é dada pela integral*

$$A_{\mathbb{H}^2}(X) = \int_X \frac{dx dy}{(\text{Im}(z))^2},$$

onde $z \in \mathbb{H}^2$.

Teorema 1.6. ([1], pág.: 165) *A área hiperbólica em $\mathbb{H}^2$ é invariante sob a ação do grupo de Möbius $M(\mathbb{H}^2)$. Isto é, se X é um subconjunto em $\mathbb{H}^2$ cuja área hiperbólica é $A_{\mathbb{H}^2}(X)$ e se $T \in M(\mathbb{H}^2)$, então*

$$A_{\mathbb{H}^2}(X) = A_{\mathbb{H}^2}(T(X)). \quad (1.3)$$

Agora, damos uma versão simplificada do Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 1.7. ([1], pág.: 172) *Seja Δ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ e seja α, β, γ seus ângulos internos. Então,*

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (1.4)$$

Podemos generalizar o Teorema 1.7 para todo polígono hiperbólico $\mathcal{P}$.

Teorema 1.8. ([1], pág.: 172) *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico com um número finito de arestas, vértices (ideais ou não) $v_1, \dots, v_n$ e ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$, respectivamente. Então,*

$$A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \theta_k. \quad (1.5)$$

A ideia central da demonstração desse teorema, vem do fato de que podemos decompor o polígono em triângulos e em seguida utilizar o Teorema 1.7 em cada triângulo.

1.3.3 Polígonos convexos

Apresentaremos dois resultados em polígonos hiperbólicos. O primeiro é uma condição necessária e suficiente para que um polígono seja convexo, e o segundo estabelece a existência de polígonos convexos com ângulos prescritos.

Teorema 1.9. ([4], pág.: 154) *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico com seus ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então $\mathcal{P}$ é convexo se, e somente se, para todo $k = 1, \dots, n$, temos $0 \leq \theta_k \leq \pi$.*

Teorema 1.10. ([4], pág.: 155) *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ ângulos ordenados por alguma n -upla e $0 \leq \theta_k \leq \pi$, para todo $k = 1, \dots, n$. Então existe um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ formados nesta ordem ao redor da $\partial \mathcal{P}$ se, e somente se*

$$\sum_{k=1}^n \theta_k < (n - 2)\pi. \quad (1.6)$$

1.4 Grupos fuchsianos e domínios de Dirichlet

O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ como vimos na seção anterior, tem seus elementos associados a uma matriz de $SL(2, \mathbb{R})$. Agora apresentaremos as classificações dessas

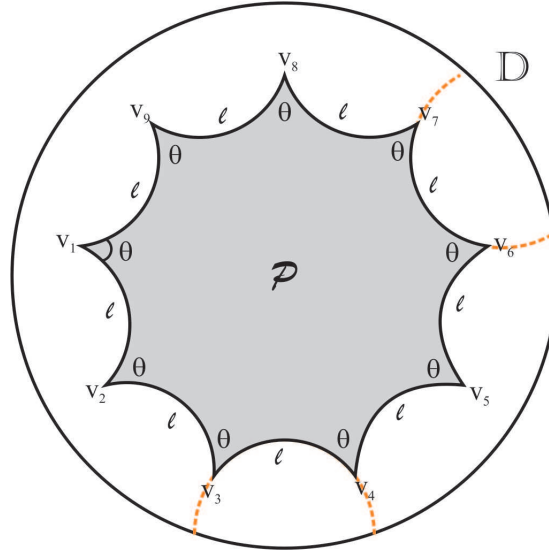


Figura 1.6: Polígono regular e convexo em $\mathbb{D}^2$.

transformações $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ associadas as matrizes $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Essa classificação é feita em três diferentes tipos, de acordo com o valor da função $Tr : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $Tr(T_A) = |\text{traço}(A)|$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \text{ e } \text{traço}(A) = a + d.$$

Definição 1.14. Dizemos que a transformação $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, onde $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é:

1. Elíptica se $Tr(T_A) < 2$.
2. Parabólica se $Tr(T_A) = 2$.
3. Hiperbólica se $Tr(T_A) > 2$.

Como o traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é, $Tr(BAB^{-1}) = Tr(A)$, para todas as matrizes $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, temos que a classificação acima é invariante por conjugação. Agora, duas transformações de Möbius T_{A_1}, T_{A_2} são conjugadas, se existir uma outra transformação Möbius T_B , onde $T_{A_1} = T_B^{-1}T_{A_2}T_B = T_{B^{-1}A_2B}$.

Neste ponto podemos classificar essas transformações pelo número de pontos fixos de $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Observe que um ponto fixo de T_A é obtido quando $T_A(z) = z$, ou seja, $\frac{az+b}{cz+d} = z$ se, e somente se, $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ que é uma equação quadrática, que tem no máximo duas soluções, dadas pela expressão

$$z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}.$$

Mas como $A \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que $ad - bc = 1$, e com isso obtemos

$$z = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(Tr(T_A))^2 - 4}.$$

Logo, temos que:

1. Uma isometria de $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ com exatamente um ponto fixo ordinário (ou seja, um ponto que não é ideal), é dita isometria elíptica e é conjugada a transformação

$$T_{A_\theta}(z) = \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta + \cos \theta},$$

com $0 < \theta < 2\pi$, associada à matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Notemos que, para $\theta \neq k\pi$, temos $Tr(A_\theta) = |2 \cos \theta|$, ou seja é de fato uma isometria elíptica. Além disso tem como ponto fixo $T_{A_\theta}(i) = i$.

2. Uma isometria com exatamente um ponto fixo ideal, ou seja, um ponto fixo na fronteira de $\mathbb{H}^2$, é dita isometria parabólica e é conjugada à transformação da forma $T_{A_t}(z) = z + t$, associada à matriz

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Notemos que $Tr(A_t) = |1 + 1| = 2$, ou seja é uma isometria parabólica. E tem como ponto fixo $T_t(\infty) = \infty$ ideal.

3. Uma isometria com dois pontos fixos ideais é dita isometria hiperbólica e é conjugada a uma transformação do forma $T_{A_k} = e^k z$, $k \neq 0$, associada à matriz,

$$A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Assim, temos $Tr(A_k) = \left| \sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} \right| > 2$, que é uma isometria hiperbólica. E tem como pontos fixos $T_k(0) = 0$ e $T_k(\infty) = \infty$.

Como o traço da matriz é invariante por conjugação, temos que:

1. As matrizes da forma $BA_\theta B^{-1}$ induzem isometrias elípticas,
2. As matrizes da forma $BA_t B^{-1}$ induzem isometrias parabólicas,
3. As matrizes da forma $BA_k B^{-1}$ induzem isometrias hiperbólicas,

onde $B \in GL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 1.11. ([28], pág.: 18) Dada uma transformação $Id \neq T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ existe $B \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ é da forma T_θ, T_t ou T_k .

1.4.1 Grupos discretos e propriamente descontínuos

Além de $PSL(2, \mathbb{R})$ ser um subgrupo de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$, também é um espaço topológico no qual a transformação $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ pode ser identificada com o ponto $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Precisamente, o espaço topológico $PSL(2, \mathbb{R})$ é identificado como o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$\{(a, d, c, d) \in \mathbb{R}^4 / ad - bc = 1\} \subset \mathbb{R}^4.$$

A norma de $PSL(2, \mathbb{R})$ pode ser induzida pela norma de $\mathbb{R}^4$, então para $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $ad - bc = 1$, definimos

$$\|T\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

onde $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, logo a métrica em $PSL(2, \mathbb{R})$ é definida por

$$\text{dist}(T_A, T_B) = \|T_A - T_B\|, \quad \text{com } T_A, T_B \in PSL(2, \mathbb{R}).$$

Antes das seguintes definições vamos fazer uma consideração. Uma permutação de um conjunto X é uma bijeção de X em X . Seja G o grupo das permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$.

1. Dado um $x \in X$ chamamos de estabilizador de x ao subgrupo de G

$$G_x = \{f \in G / f(x) = x\}.$$

2. Uma órbita de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$G(x) = \{f(x) \in X / f \in G\}.$$

Definição 1.15. Um subgrupo Γ de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é chamado discreto se a topologia induzida em Γ for uma topologia discreta, isto é, se Γ é um conjunto discreto no espaço topológico de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Definição 1.16. Uma família $\{X_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ (Λ um conjunto de índices) de subconjuntos de um espaço métrico X é dita localmente finita se para todo compacto $K \subseteq X$, o conjunto

$$\{\alpha \in \Lambda | X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

for finito.

Definição 1.17. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X . Dizemos que a ação de Γ é propriamente descontínua se para todo $x \in X$ a família $\{\{f(x)\} / f \in \Gamma\}$ for localmente finita.

O Teorema abaixo estabelece equivalências importantes envolvendo conceitos definidos acima.

Teorema 1.12. ([13], pág.: 57) Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X localmente compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A ação de Γ é propriamente descontínua.
2. $\forall x \in X, \exists V_x$ vizinhança de x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.
3. Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U_x tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica que $g(x) = x$.
4. Dado $K \subseteq X$ compacto, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.

Agora, podemos apresentar a definição de grupo fuchsiano.

Definição 1.18. *Um grupo discreto de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é dito um grupo fuchsiano se consiste de transformações que preservam a orientação, ou seja, o grupo fuchsiano é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Alguns dos resultados interessantes.

Teorema 1.13. *([13], pág.: 26) Seja H um subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$. Então H é discreto se, e somente se, não existe uma sequência $A_n \in H, n \in \mathbb{N}$, de elementos distintos, tais que $A_n \rightarrow I$, onde I é a matriz identidade.*

Teorema 1.14. *([17], pág.: 32) Um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.*

Exemplo 1.2. *O subgrupo $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é um grupo fuchsiano.*

1.4.2 Domínios fundamentais e de Dirichlet

Seja X um espaço topológico e Γ um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X . Considerando o espaço quociente X/Γ , temos então um recobrimento $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$ no sentido topológico. A importância dos domínios fundamentais $\mathcal{D}$ de um grupo fuchsiano Γ é que nos ajuda ver como Γ age em $\mathcal{D}$.

Definição 1.19. *Seja X um espaço métrico e Γ um grupo de homeomorfismos agindo em X de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é dito domínio fundamental de Γ se satisfizer as seguintes condições:*

1. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X$.
2. $\text{int}\mathcal{D} \cap T(\text{int}\mathcal{D}) = \emptyset$, para todo $Id \neq T \in \Gamma$.
3. $\text{int}\mathcal{D} \neq \emptyset$.

O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} - \text{int}\mathcal{D}$ é a fronteira de $\mathcal{D}$ e a família

$$\{T(\mathcal{D})/T \in \Gamma\}$$

é dita um ladrilhamento ou tesselação de X .

Exemplo 1.3. Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ o subgrupo cíclico gerado por $T(z) = 2z$. Temos que então para todo $k > 0$, o semi-anel

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2 | k \leq |z| \leq 2k\}$$

é um domínio fundamental de Γ e a família $\{\mathcal{D}_{2^n k} | n \in \mathbb{Z}\}$ é o ladrilhamento determinado por este domínio (veja Figura 1.7).

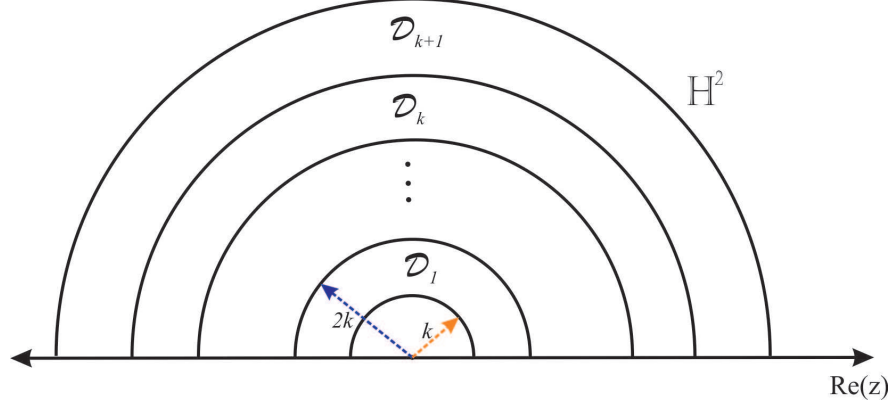


Figura 1.7: Polígono regular e convexo em $\mathbb{D}^2$.

De fato, mostraremos que $T^n(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{2^n k}$. Temos que

$$T^n(\mathcal{D}_k) = \{T^n(z) = 2^n z \in \mathbb{H}^2 | k \leq |z| \leq 2k\}$$

e

$$\mathcal{D}_{2^n k} = \{z \in \mathbb{H}^2 | 2^n k \leq |z| \leq 2^{n+1} k\}.$$

Agora, seja $z' \in T^n(\mathcal{D}_k)$, ou seja, $z' = 2^n z \in \mathbb{H}^2$ com $k \leq |z| \leq 2k$ de modo que

$$2^n k \leq |x| \leq 2^{n+1} k$$

o que implica que $z' \in \mathcal{D}_{2^n k}$, então, $T^n(\mathcal{D}_k) \subset \mathcal{D}_{2^n k}$. Por outro lado, seja $z \in \mathcal{D}_{2^n k}$ e tomemos em $w = 2^{-n} z \in \mathbb{H}^2$, e como $2^n k \leq |z| \leq 2^{n+1} k$ temos que $w \in \mathcal{D}_k$, pois $k \leq |2^{-n} z| \leq 2k$.

Obtemos que $z = 2^n w \in T^n(\mathcal{D}_k)$, ou seja, $\mathcal{D}_{2^n k} \subset T^n(\mathcal{D}_k)$. Assim, temos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{D}_k) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{2^n k} = \mathbb{H}^2.$$

Agora, mostraremos que; se $n \neq m$ com $n, m \in \mathbb{Z}$ temos $\text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \cap \text{int}(\mathcal{D}_{2^m k}) = \emptyset$. Suponhamos que existe $z \in \text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \cap \text{int}(\mathcal{D}_{2^m k})$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$2^n k < |z| < 2^{n+1} k \quad \text{e} \quad 2^m k < |z| < 2^{m+1} k, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Suponhamos sem perda de generalidade que $m > n$, então existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $m = n + r$, logo

$$2^n k < 2^m k \Rightarrow 2^n k < 2^{n+1} k \leq 2^m k$$

podemos obter que $|z| \leq 2^m k$, o que é uma contradição, pois $2^m k < |z|$, então $\text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \cap \text{int}(\mathcal{D}_{2^m k}) = \emptyset$. Além disso, $\text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

O seguinte resultado sobre domínios fundamentais é dado quando o conjunto das isometrias Γ é um grupo fuchsiano, e trata da invariância da área.

Teorema 1.15. ([4], pág.: 205) *Sejam $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ domínios fundamentais de um grupo fuchsiano Γ com $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) < \infty$. Suponha que as fronteiras de $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ tenham áreas $A_{\mathbb{H}^2}(\partial\mathcal{D}_1) = A_{\mathbb{H}^2}(\partial\mathcal{D}_2) = 0$. Então $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) = A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2)$.*

Através dos grupos fuchsianos, podemos garantir a existência de domínios fundamentais satisfazendo condições bem proveitosas e úteis, estes são chamados domínios de Dirichlet.

Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$, tal que $T(p) \neq p$ para todo $T \in \Gamma$. Este ponto existe pois o conjunto dos pontos fixos por algum elemento de Γ é discreto. Definimos domínio de Dirichlet centrado em p como sendo o conjunto

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, T(p)), \forall T \in \Gamma\}.$$

Podemos definir para cada $T \in \Gamma$ ($T \neq Id$) o conjunto

$$L_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) = d(z, T(p))\},$$

chamado de bissetor perpendicular de p e $T(p)$ com sua fronteira topológica como sendo o conjunto

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, T(p))\}.$$

Note que $L_p(T)$ é uma geodésica (não contendo p) e $H_p(T)$ é o semi-plano contendo p e delimitado por $L_p(T)$. Contudo podemos definir:

Definição 1.20. *O domínio de Dirichlet de Γ centrado em p é definido por*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \bigcap_{Id \neq T \in \Gamma} H_p(T).$$

Agora mostraremos o resultado no que a partir de um grupo fuchsiano temos um domínio fundamental, ou seja, o resultado que garante que um domínio de Dirichlet é um domínio fundamental.

Teorema 1.16. ([13], pág.: 84) *Seja Γ um grupo fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ o domínio de Dirichlet centrado em p . Então $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ .*

Exemplo 1.4. *Seja Γ um grupo fuchsiano gerado por uma isometria elíptica T . Temos então que Γ é cíclico de alguma ordem k . Consideremos um ponto fixo de Γ e $p \neq q$ ponto qualquer. Então temos que o bissetor perpendicular $L_p(T)$ é a geodésica passando pelo ponto médio da reta $\overline{pT(p)}$ e pelo ponto fixo q . O mesmo raciocínio funciona para T^{-1} . Temos então que $H_p(T) \cap H_p(T^{-1})$ é uma região que tem como fronteira dois raios geodésicos com ponto inicial q , sendo que um destes passa pelo ponto médio de $\overline{pT(p)}$ e o outro pelo ponto meio de $\overline{pT^{-1}(p)}$. Logo $\mathcal{D}_p(\Gamma) \subset H_p(T)^{-1}$. Além disso pode-se ver que $\mathcal{D}_p(\Gamma) \subset H_p(T)^{-1}$ é um domínio fundamental de Γ , de modo que $\mathcal{D}_p(\Gamma) = \mathcal{D}_p(\Gamma) \subset H_p(T)^{-1}$.*

Se considerarmos o modelo do disco de Poincaré e assumirmos que $q = 0$,

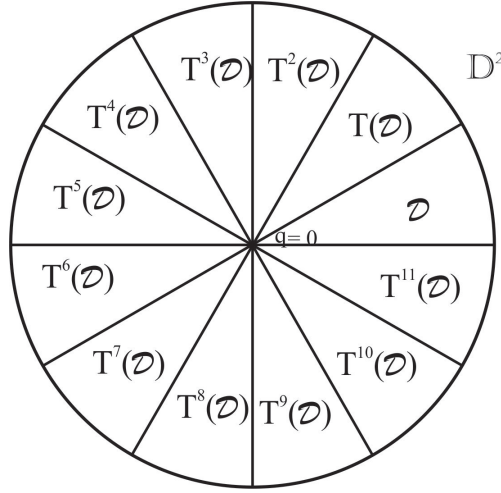


Figura 1.8: Domínio fundamental de grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = e^{i\frac{\pi}{6}} \rangle$.

teremos que os domínios de Dirichlet de Γ (veja Figura 1.8) serão da forma

$$\left\{ z \in \mathbb{D}^2 / \theta \leq \arg(z) \leq \theta + \frac{2\pi}{k} \right\}.$$

Teorema 1.17. ([13], pág.: 87) Seja Γ grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet centrado em p . Então o ladrilhamento $\{T(\mathcal{D})/T \in \Gamma\}$ é localmente finito.

Corolário 1.18. ([13], pág.: 90) Dado $z \in \partial(\mathcal{D}_p(\Gamma))$, existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $T(z) \in \partial(\mathcal{D}_p(\Gamma))$.

Continuaremos os estudos de domínios de Dirichlet observando que a fronteira de tal domínio é formada pela união de geodésicas. A estas geodésicas chamaremos de arestas ordinárias e um ponto da fronteira do domínio de Dirichlet é chamado de vértice ordinário, se este for interseção de duas arestas ordinárias distintas de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$.

Teorema 1.19. ([13], pág.: 91) Seja $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ um domínio de Dirichlet de Γ , então:

1. Se τ é uma aresta de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, então existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $\tau \subset \mathcal{D}_p(\Gamma) \cap T(\mathcal{D}_p(\Gamma))$.
2. Se V é vértice de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, então V é vértice ordinário se, e somente se, existem elementos distintos $Id \neq T_1, T_2 \in \Gamma$ tais que $V = \mathcal{D}_p(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_p(\Gamma)) \cap T_2(\mathcal{D}_p(\Gamma))$.

Observe que $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é uma região poligonal com um número finito de arestas, este sendo necessariamente um número par. Temos também que dada uma aresta τ_1 existe uma única aresta $\tau_2 \neq \tau_1$ e um único elemento $T \in \Gamma$ que satisfaz $T(\tau_1) = \tau_2$. Dizemos neste caso que $\{\tau_1, \tau_2\}$ é um par de arestas congruentes e T emparelha as arestas.

1.4.3 Grupos fuchsianos co-compactos

Buscamos condições para que o quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ seja compacto. Para isso, estudamos os seguintes resultados.

Teorema 1.20. ([17], pág.: 74) *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ . Considere o conjunto*

$$\{T_i/i \in \Lambda\}$$

de elementos de Γ que relacionam arestas de $\mathcal{D}$. Então $\{T_i/i \in \Lambda\}$ é o conjunto de geradores de Γ .

Definição 1.21. *Definimos um ciclo como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como sendo um conjunto da forma*

$$\{T(z)/T \in \Gamma, \quad z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } \mathcal{D}_p(\Gamma)\}.$$

Definição 1.22. *Um grupo fuchsiano Γ é dito co-compacto se o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ for compacto.*

Teorema 1.21. ([13], pág.: 125) *Seja Γ um grupo fuchsiano e suponha que Γ possua domínio fundamental convexo e não compacto. Então, $\mathbb{H}/\Gamma$ não é compacto.*

Corolário 1.22. ([13], pág.: 125) *Um grupo fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Dirichlet de Γ for compacto.*

Teorema 1.23. ([13], pág.: 128) *Um grupo fuchsiano é co-compacto se, e somente se, não possui elementos parabólicos e $A_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$.*

Os seguintes resultados são de muita importância para nosso trabalho, especificamente no Capítulo 4.

Teorema 1.24. ([17], pág.: 72) *Seja $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ . Sejam $v_1, \dots, v_r$ vértices de um ciclo de vértices e sejam $\theta_1, \dots, \theta_r$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem do estabilizador em Γ de um dos vértices do ciclo, temos que*

$$\theta_1 + \dots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}.$$

Definição 1.23. *Seja Γ um grupo fuchsiano. Então $\mathcal{P}$ é dito um polígono fundamental convexo de Γ quando $\mathcal{P}$ é convexo e localmente finito em um domínio fundamental de Γ .*

Consideremos um polígono $\mathcal{P}$ fechado conexo em $\mathbb{H}^2$ e $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as arestas de $\mathcal{P}$

Definição 1.24. *Um emparelhamento de arestas é o conjunto $\Phi = \{\gamma_\tau/\tau \in \mathcal{U}\}$ de isometrias tal que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{U}$*

1. *Existe uma aresta $\tau \in \mathcal{U}$ com $\gamma_\tau(\tau') = \tau$.*

2. As isometrias γ_τ e $\gamma_{\tau'}$ satisfazem a relação $\gamma_{\tau'} = \gamma_\tau^{-1}$.
3. Se τ for aresta de $\mathcal{P}$, então $\tau' = \mathcal{P} \cap \gamma_\tau^{-1}(\mathcal{P})$.

Antes de apresentar o próximo resultado, faremos algumas considerações. Seja Γ um grupo fuchsiano co-compacto. Temos que todo domínio de Dirichlet é compacto e portanto Γ é geometricamente finito. Se considerarmos então um domínio de Dirichlet $\mathcal{D}$ de Γ , temos um número finito de vértices de um ponto fixo de elementos elípticos de Γ . Se v_1, v_2 forem vértices de um mesmo ciclo, então os estabilizadores Γ_{v_1} e Γ_{v_2} são conjugados, e tem portanto a mesma ordem, então podemos assim falar da ordem de um ciclo. Sejam $m_1, \dots, m_r$ as ordens dos distintos ciclos elípticos de $\mathcal{D}$. Notemos que os pontos fixos de elementos elípticos devem estar contidos na fronteira de qualquer domínio fundamental, de modo que cada ciclo é representado na fronteira de qualquer domínio fundamental. Temos então que os números $m_1, \dots, m_r$ não dependem de $\mathcal{D}$, mas apenas de Γ . Desta forma $\mathcal{D}/\Gamma$ é uma superfície compacta, orientável, de gênero g com r pontos $p_1, \dots, p_r$ diferenciados.

Definição 1.25. *Nas condições acima, chamamos de assinatura de Γ ao conjunto de inteiros $(g, m_1, \dots, m_r)$.*

Assim podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.25. *([17], pág.: 91) Seja Γ grupo fuchsiano co-compacto e $(g, m_1, \dots, m_r)$ sua assinatura. Temos*

$$\mu\left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}\right) = 2\pi \left[(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \right].$$

Capítulo 2

Superfícies de Riemann isométricas ao plano hiperbólico

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades geométricas de superfícies que são localmente isométricas ao plano hiperbólico. A maneira de construção destas superfícies é por meio da técnica de corte e colagem. Incluiremos superfícies com limites geodésicos por partes, os teoremas de existência e unicidade para geodésicas em vários tipos de classes de homotopia e faremos um esboço dos parâmetros Fenchel-Nielsen. Uma ferramenta de muita utilidade para nosso trabalho (Capítulo 3) é a trigonometria hiperbólica, que será apresentada no modelo hiperboloide, logo falaremos dos parâmetros de torção, que serão importantes no capítulo seguinte. Finalmente apresentaremos uma das propriedades mais fundamentais de superfícies hiperbólicas, conhecida como Teorema do colar. Trata-se de uma vizinhança tubular ao longo de uma geodésica fechada, que é topologicamente um cilindro.

As principais referências são: [6], [7], [9], [16], [27], e outras referências que podem ser de complementação da teoria foram [1], [4], [8], [26] e [23].

2.1 Estrutura hiperbólica

Uma variedade Riemanniana de curvatura constante -1 é localmente isométrico ao plano hiperbólico. Uma abordagem mais precisa destas variedades, é obtida definindo um atlas hiperbólico onde as vizinhanças coordenadas são levadas para o espaço hiperbólico. Daqui em diante, uma superfície será sempre uma variedade bidimensional suave e orientável, possivelmente com fronteiras suaves. Um atlas com sistemas de coordenadas (U, φ) , onde U é uma vizinhança coordenada e φ um homeomorfismo local, será sempre uma estrutura diferenciável.

Para começar nesta seção, apresentaremos alguns sistemas de coordenadas.

Coordenadas polares em $\mathbb{D}^2$

Sejam $p_0 \in \mathbb{H}^2$ um ponto base arbitrário e v_0 um vetor tangente unitário em p_0 . Para cada ponto $p \in \mathbb{H}^2 - \{p_0\}$, existe uma geodésica parametrizada por comprimento de arco $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que $\gamma(0) = p_0$ e passando por p . Consideremos $\theta = \theta(p) \in [-\pi, \pi)$ o ângulo diretor do vetor inicial v_0 ao vetor tangente de γ em p , e seja $\rho = \rho(p) \in [0, +\infty)$ a distância de p_0 para p tal que $\gamma(\rho(p)) = p$. Então temos uma parametrização da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : [0, \infty) \times [-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ (\rho, \theta) &\rightarrow \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) e^{i\theta}, \end{aligned}$$

onde $(\rho, \theta) = (\rho(p), \theta(p))$ é chamado coordenada polar de p com respeito a p_0 e v_0 . Em coordenadas polares a métrica hiperbólica tem a seguinte expressão:

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2. \quad (2.1)$$

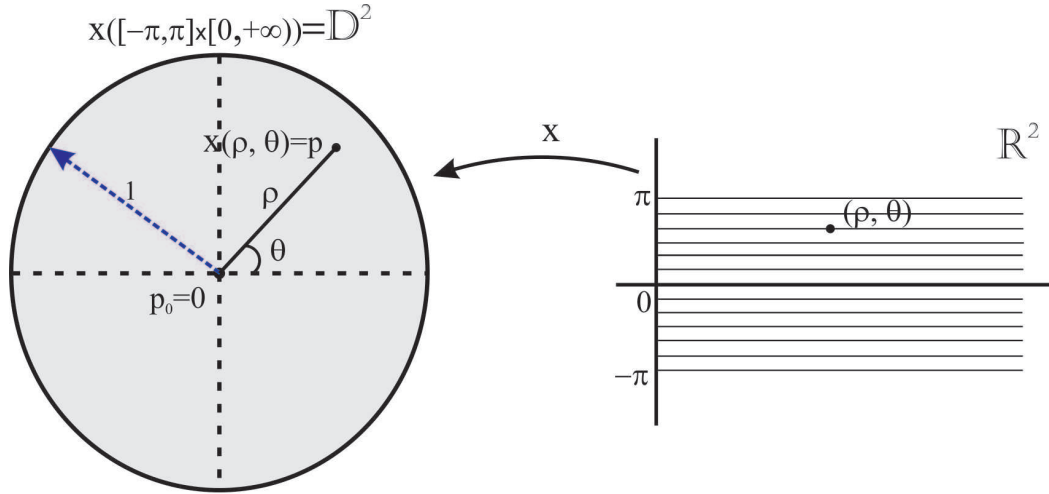


Figura 2.1: Coordenadas polares em $\mathbb{D}^2$.

Coordenadas fermi em $\mathbb{H}^2$

Se substituirmos uma linha base no ponto p_0 , obtemos coordenadas Fermi. Seja η uma geodésica no plano hiperbólico, parametrizado por comprimento de arco $t \rightarrow \eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Então η separa $\mathbb{H}^2$ em dois semiplanos; um do lado esquerdo e um do lado direito de η . Para cada $p \in \mathbb{H}^2$ temos distância ρ de p para η , positivo de um lado e negativo do outro. Existe um único t tal que a perpendicular de p para η encontra-se η em $\eta(t)$. Agora o par (ρ, t) é chamado coordenada Fermi de p em relação a η , onde a métrica tem a forma

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2. \quad (2.2)$$

Coordenadas horo círculos em $\mathbb{H}^2$

Sejam $\mathbb{H}^2$ e um ponto p_0 no plano complexo compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que se encontra no eixo real ou no infinito. Este ponto é chamado fronteira ou ponto infinito de $\mathbb{H}^2$. Os círculos generalizados que estão contidos em $\mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}$ passando por p_0 , são chamados os horo círculos com centro p_0 .

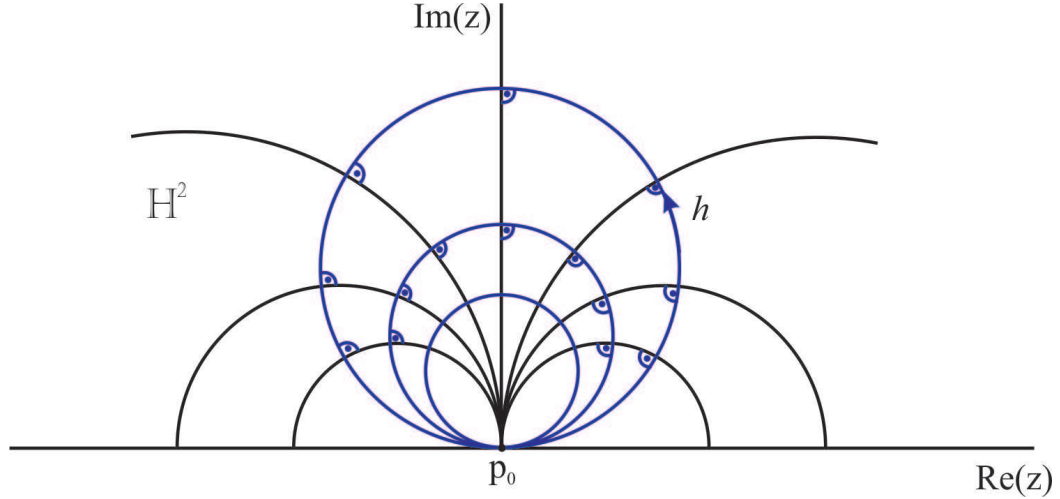


Figura 2.2: Coordenadas horo círculos em $\mathbb{H}^2$.

As transformações de $PSL(2, \mathbb{R})$ levam horo círculos em horo círculos. No caso particular $p_0 = \infty$, os horo círculos são as retas horizontais, e as retas verticais são geodésicas com ponto final p_0 . As linhas retas horizontais e verticais se cruzam ortogonalmente. Segue-se que para qualquer posição de p_0 , as geodésias passando por p_0 e os horo círculos em p_0 formam uma família mutuamente ortogonal.

Agora, consideremos h um horo ciclo parametrizado por comprimento de arco na forma $h(t) \in \mathbb{H}^2$, $t \in \mathbb{R}$. O plano hiperbólico é novamente separado em um lado esquerdo e um lado direito. Deixamos a parametrização de h tal que p_0 esteja no lado esquerdo de h , e tomamos a distância ρ de um ponto p para h como negativo à esquerda e positivo à direita. Isto é pela convenção do sinal para as coordenadas de Fermi.

Mais uma vez, existe um único t tal que a geodésica perpendicular de p para h encontra-se h em $h(t)$, e (p, t) é, por definição, o par de coordenadas horo círculos em relação a h . Em particular $th \rightarrow h(t) = x(t) + iy(t) = t + i$, $t \in \mathbb{R}$, (e $p_0 = \infty$), encontraremos a seguinte fórmula da métrica.

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{2\rho} dt^2. \quad (2.3)$$

Consideremos duas definições: uma para superfícies sem fronteiras e outra para superfícies com fronteiras.

Definição 2.1. *Seja S uma superfície sem fronteiras, um atlas $\mathcal{A}$ de S , é chamado hiperbólico, se ele tem as seguintes propriedades:*

1. $\varphi(U) \subset \mathbb{H}^2$, para todo $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$,

2. Se (U, φ) e $(U', \varphi') \in \mathcal{A}$, então para cada componente conexo V de $U \cap U'$, existe uma isometria $T \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tal que $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ coincide com T em $\varphi(V)$.

Como acontece em outro tipo de atlas, cada atlas hiperbólico estende-se a um único atlas maximal. Cada atlas hiperbólico induz uma métrica riemanniana de curvatura constante -1 em S . Por outro lado, toda métrica riemanniana de curvatura constante -1 em S é obtida desta forma, pelo que a métrica é localmente isométrica ao plano hiperbólico.

Antes de definir atlas hiperbólico para superfícies com fronteira fazemos algumas considerações: seja $\delta > 0$ e $0 < \lambda < 2\pi$. Um conjunto V de $\mathbb{H}^2$ é chamado setor circular de raio δ e ângulo λ em $p_0 \in \mathbb{H}^2$, se tem a seguinte forma, onde (ρ, θ) são as coordenadas polares

$$V = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{H}^2 / 0 < \rho < \delta, 0 \leq \theta \leq \lambda\} \cup \{p_0\}.$$

Um meio disco é um setor circular de ângulo π . Agora seja S uma superfície com $\partial S \neq \emptyset$. O conjunto

$$\text{int}S = S - \partial S$$

é chamado o interior de S . A fronteira ∂S de S é composta de arcos suaves, os lados de S . Uma curva de fronteira fechada suave é um lado sem nenhum ponto extremo. Qualquer ponto extremo de um lado que é ponto extremo de outro lado é chamado vértice de S . Um ponto que não é um vértice é chamado ponto de fronteira ordinário.

Definição 2.2. *Seja S uma superfície que tem $\partial S \neq \emptyset$. Um atlas $\mathcal{A}$ de S é chamado hiperbólico se tem as seguintes propriedades:*

1. Para cada $p \in S$ existe um sistema coordenado $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ com $p \in U$ tal que $\varphi(U) \subset \mathbb{H}^2$ é
 - (a) Um setor circular de ângulo $\lambda \leq \pi$ em $\varphi(p)$, se p é um vértice.
 - (b) Um meio disco em $\varphi(p)$, se p é um ponto fronteira ordinário.
 - (c) Um disco aberto com centro $\varphi(p)$, se p é um ponto interior.
2. Se (U, φ) e $(U', \varphi') \in \mathcal{A}$, então para cada componente conexo V de $U \cap U'$ existe uma isometria $T \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ tal que $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ coincide com T em $\varphi(V)$.

Seja S uma superfície. Um atlas hiperbólico maximal em S é chamado uma estrutura hiperbólica. A estrutura hiperbólica é chamada completa, se sua métrica induzida em S é completa no sentido do espaço métrico. Uma superfície junto com uma estrutura hiperbólica completa é chamada superfície hiperbólica.

Teorema 2.1. *Seja S uma superfície hiperbólica e seja $\Gamma \subset \text{Isom}^+(S)$ um subgrupo com ação propriamente descontínua e sem pontos fixos em S . Então o quociente S/Γ determina unicamente uma estrutura hiperbólica completa, tal que a projeção natural $\pi_S : S \rightarrow S/\Gamma$ é uma isometria local.*

Demonstração. Definimos o atlas $\mathcal{A}'$ para S/Γ usando o atlas $\mathcal{A}$ de S . Seja $q \in S/\Gamma$, então existe $p \in S$ tal que $p \in \pi^{-1}(q) \subset S$, mas como S é uma superfície hiperbólica, temos que existe um sistema coordenado $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ como na Definição 2.2, onde $p \in U \subset S$. Para $\delta > 0$ pequeno, a restrição $\pi|_U$ de U para U é um homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_S} & S/\Gamma \\ \varphi \downarrow & \swarrow \varphi \circ (\pi_S|_U)^{-1} & \\ \varphi(U) \subset \mathbb{H}^2 & & \end{array}$$

Definimos $(\pi_S(U), \varphi \circ (\pi_S|_U)^{-1})$ os elementos de $\mathcal{A}'$. Este atlas define uma estrutura diferenciável em S/Γ e satisfaz as condições da Definição 2.2.

Como a projeção natural $\pi_S : S \rightarrow S/\Gamma$ é uma função de cobertura, ou seja $\pi_S(S) = S/\Gamma$, temos que S/Γ é completa. $\square$

2.2 Esquema de colagem

Sejam S e S' polígonos geodésicos convexos e disjuntos em $\mathbb{H}^2$ tal que todos os ângulos internos não são maiores que π . Usamos uma isometria $T \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ para movê-los, como na Figura 2.3, então $S^* = T(S) \cup S'$ obtemos outra vez um polígono hiperbólico geodésico.

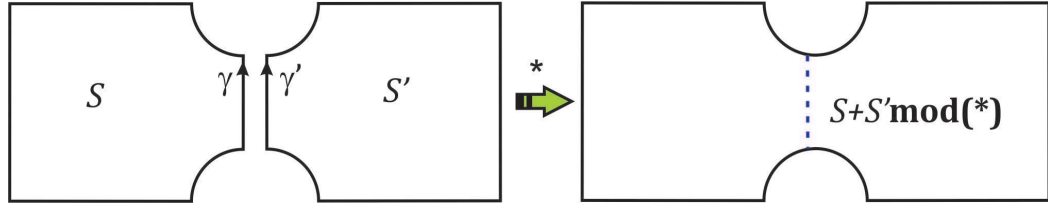


Figura 2.3: Colagem de dois polígonos em $\mathbb{H}^2$.

Para construir S^* não precisamos mover S . Podemos colar S e S' juntos ao longo dos lados γ e γ' como segue. Suponhamos que S e S' são disjuntos, e sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$, $\gamma' : [0, 1] \rightarrow S'$ as parametrizações dos lados, tendo a mesma velocidade constante e com orientações opostas, também consideremos que os lados γ e γ' tem o mesmo comprimento $l(\gamma) = l(\gamma')$. Então existe uma isometria $T \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, tal que

$$T(\gamma(t)) = \gamma'(t), \quad t \in [0, 1].$$

Então definimos uma relação de equivalência na união disjunta $S \cup S'$ por. Para cada ponto $p = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, a classe de equivalência consiste em dois pontos $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$, e para qualquer ponto $p \notin \gamma \cup \gamma'$ a classe de equivalência consiste do único ponto p . Esta relação de equivalência assim definida determina uma condição de colagem

$$\gamma(t) = \gamma'(t), \quad t \in [0, 1] \quad (2.4)$$

e denotado por $F = S + S' \mod (2.4)$ o espaço quociente de $S \cup S'$ com respeito à relação de equivalência. si projetamos a métrica de $S \cup S'$ em F , temos que F é isométrico ao domínio $S^* = T(S) \cup S'$.

Agora assumimos $S_1, \dots, S_m$ superfícies hiperbólicas mutuamente disjuntas, e seja $\gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2, \dots, \gamma_m, \gamma'_m$ os lados diferentes de $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$. Suponhamos que para cada k os lados γ_k e γ'_k estão parametrizadas $\gamma_k : I_k \rightarrow S$, $\gamma'_k : I_k \rightarrow S$ com a mesma velocidade constante, onde I_k é um intervalo. Novamente definimos uma relação de equivalência em S pela condição de colagem ou esquema de colagem.

$$\gamma_k(t) = \gamma'_k(t), \quad t \in I_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Definição 2.3. *Sobre as mesmas premissas acima*

$$F = S_1 + \dots + S_m \mod (2.5)$$

é o espaço quociente da união disjunta $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$ com respeito à relação de equivalência definido por (2.5).

Antes de continuar, apresentaremos dois exemplos para o esquema de colagem.

Exemplo 2.1. (Cilindro Hiperbólico) Consideremos a geodésica $t \rightarrow \eta(t) = ie^t \in \mathbb{H}^2$, $t \in \mathbb{R}$. Sejam γ e γ' geodésicas que interceptam η perpendicularmente em a e b como na Figura 2.4, com $|a| < |b|$. A faixa fechada S limitada entre γ e γ' é uma superfície hiperbólica com atlas $\mathcal{A} = \{(S, Id)\}$. Agora consideremos γ

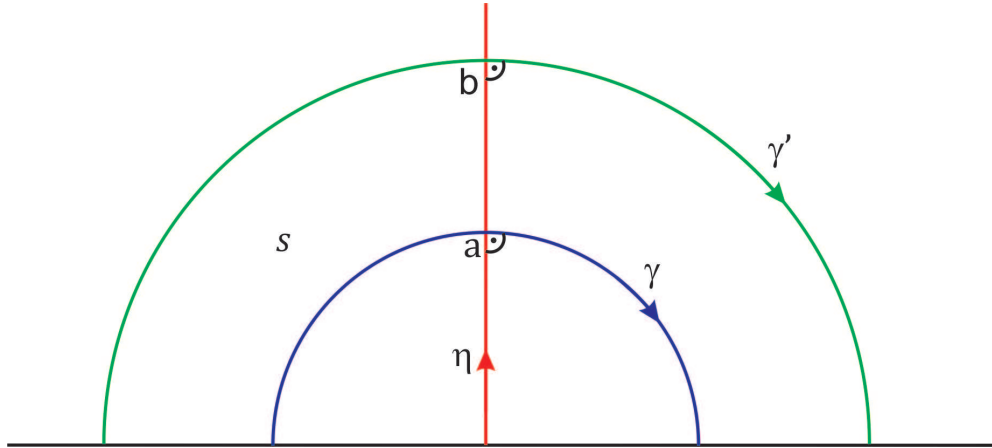


Figura 2.4: Cilindro hiperbólico.

e γ' parametrizações por comprimento de arco e de orientações opostas, tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = b$. A isometria T dada por

$$T(z) = \frac{b}{a}z, \quad z \in \mathbb{H}^2$$

leva η sobre ela mesma e satisfaz a equação $T(\gamma(t)) = \gamma'(t)$, $t \in \mathbb{R}$. A condição de colagem

$$\gamma(t) = \gamma'(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

gera uma superfície hiperbólica

$$C = S \mod (2.6), \quad (2.7)$$

onde o arco geodésico $\eta : I \rightarrow S$ com $I = [\ln(a), \ln(b)]$, projeta sobre uma geodésica fechada η_1 em C de comprimento

$$l = l(\eta_1) = \ln\left(\frac{a}{b}\right). \quad (2.8)$$

Por outro lado, seja $\Gamma = \{T^k/k \in \mathbb{Z}\} \subset PSL(2, \mathbb{R})$ um subgrupo cíclico gerado por T , então o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ transporta uma estrutura hiperbólica natural, tal que $\pi_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma isometria local (Teorema 2.1). Portanto podemos identificar $\mathbb{H}^2/\Gamma$ com C .

Introduzindo coordenadas Fermi com base em η (veja equação (2.2)), obtemos uma descrição de C como uma superfície

$$C = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/[t \rightarrow t + l], \quad (2.9)$$

onde l é como em (2.8), com a métrica riemanniana

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2. \quad (2.10)$$

Em qualquer das formas de (2.7) ou (2.9), C é chamado um cilindro hiperbólico. Observe que η_1 foi parametrizado por comprimento de arco. Se η é parametrizada com velocidade l , então (2.10) fica

$$ds^2 = d\rho^2 + l^2 \cosh^2 \rho dt^2.$$

Exemplo 2.2. (Colagem de geodésicas fechadas) Sejam S e S' superfícies hiperbólicas, e suponhamos que γ em S e γ' em S' são geodésicas de fronteiras fechadas com o mesmo comprimento $l = l(\gamma) = l(\gamma')$.

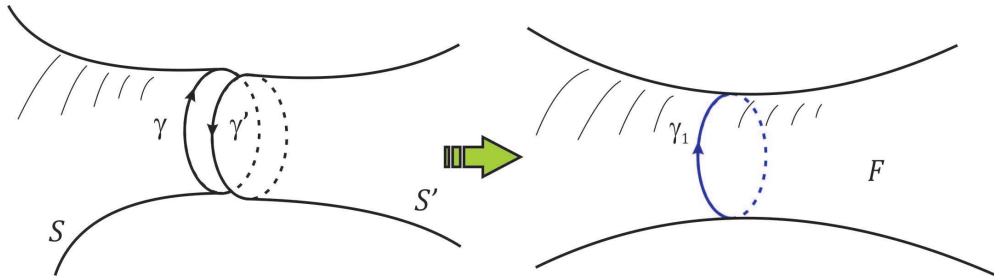


Figura 2.5: Colagem de geodésicas fechadas.

Parametrizando γ e γ' periodicamente em $\mathbb{R}$ com período 1 e velocidade l , se S coincide com S' , então podemos assumir que γ e γ' são diferentes, tendo a mesma orientação. Então definimos a relação de equivalência por

$$F = S + S' \mod (\gamma(t) = \gamma'(-t), t \in \mathbb{R}). \quad (2.11)$$

As duas geodésicas γ e γ' projetam uma geodésica fechada simples γ_1 de com-

primento l em F . Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequena, as seguintes vizinhanças tubulares são isométricas

$$\{p \in F / \text{dist}(p, \gamma_1) < \epsilon\} \quad e \quad \{p \in C / \text{dist}(p, \eta_1) < \epsilon\},$$

onde C é do Exemplo 2.1 com $l(\eta_1) = l(\gamma_1)$. A condição de colagem em (2.11) pode ser substituído por

$$\gamma(t) = \gamma'(a - t), \quad t \in \mathbb{R}$$

com parâmetro de torção arbitrária $a \in \mathbb{R}$, mas para um $\epsilon > 0$ a vizinhança tubular de γ_1 geometricamente permanece o mesmo. Em geral, as superfícies obtidas de diferentes a não são globalmente isométricos.

Antes de apresentar o seguinte teorema vamos fazer uma consideração. Um ciclo de vértices é o conjunto de todos os vértices de $S_1, \dots, S_m$ que em conjunto definem um ponto único de F (o ponto pode ser interior ou ponto fronteira de F).

Teorema 2.2. *Seja $F = S_1 + \dots + S_m \pmod{(2.5)}$ e suponhamos que as seguintes condições cumprem:*

1. *Para cada ciclo de vértice produz um ponto interior de F , onde a soma dos ângulos internos de um vértices é 2π .*
2. *Para cada ciclo de vértice que produz um ponto fronteira de F , e a soma dos ângulos internos é $\leq \pi$*

Então F leva uma única estrutura hiperbólica tal que a projeção natural $\pi_S : S_1 \cup \dots \cup S_m \rightarrow F$ é uma isometria local.

Demonstração. Nós limitaremos a um caso particular para a construção do atlas hiperbólico $\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ as estruturas hiperbólicas de $S_1, \dots, S_m$ respetivamente, e seja $p \in F$ um ponto fronteira cuja imagem inversa sob π_S é o ciclo de vértice $p_1, \dots, p_r$ com ângulos internos correspondentes $\theta_1, \dots, \theta_r$ e cuja soma é $\theta = \theta_1 + \dots + \theta_r \leq \pi$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequena as ϵ -vizinhanças

$$U_i = \{x \in S_1 \cup \dots \cup S_m / \text{dist}(x, p_i) < \epsilon\}$$

são disjuntos dois a dois para $i = 1, \dots, r$, então obtemos sistemas de coordenadas $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_m$ tal que $\varphi_i(U_i)$ é um setor circular V_i em $\mathbb{H}^2$ de raio ϵ e ângulo θ_i . Suponhamos que o ciclo é numerado de modo que o lado esquerdo de U_i é identificado com o lado direito de U_{i+1} para cada $i = 1, \dots, r - 1$.

Então podemos encontrar isometrias que preservem orientação $T_1, \dots, T_r$ de $\mathbb{H}^2$ tal que $V = T_1(V_1) \cup \dots \cup T_r(V_r)$ é um setor circular de ângulo θ , tal que para cada $i = 1, \dots, r - 1$ o lado esquerdo de $T_i(V_i)$ coincide com o lado direito de $T_{i+1}(V_{i+1})$. Segue-se que $x \in U_i$ e $y \in U_j$ são equivalentes $\pmod{(2.5)}$, se e só se $T_i(\varphi_i(x)) =$

$T_j(\varphi_j(y))$.

Deste modo, nós temos uma função bem definida

$$\varphi = T_1 \circ \varphi_1 + \dots + T_r \circ \varphi_r \quad \text{mod (2.5)}$$

para $U = U_1 + \dots + U_r \quad \text{mod (2.5)}$ sobre V , e considerando (U, φ) um elemento de $\mathcal{A}$. De forma semelhante obtemos vizinhanças coordenadas em todos os outros casos, e podemos verificar que o atlas $\mathcal{A}$ assim definido é hiperbólico e a função $\pi_S : S \rightarrow F$ é uma isometria local. $\square$

Para concluir, mencionamos o processo inverso da colagem.

Definição 2.4. *Seja $F = S_1 + \dots + S_m \quad \text{mod (2.5)}$ como acima com a projeção natural $\pi_S : S_1 \cup \dots \cup S_m \rightarrow F$, e seja*

$$Z = \pi_S(\gamma_1) \cup \dots \cup \pi_S(\gamma_n) = \pi_S(\gamma'_1) \cup \dots \cup \pi_S(\gamma'_n).$$

Então dizemos que $S_1, \dots, S_m$ são obtidos cortando F ao longo de Z .

Se Z é um conjunto de geodésicas fechadas disjuntas em uma superfície hiperbólica S , então S pode ser cortada ao longo de Z .

2.3 A cobertura universal

Cada superfície completa sem fronteiras de curvatura constante -1 é universalmente coberta pelo plano hiperbólico. Agora adaptaremos isso para superfícies hiperbólicas completas com fronteira, o estudo fica mais fácil devido ao seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Qualquer superfície hiperbólica S com fronteiras é isométricamente imersa em uma superfície hiperbólica S^* sem fronteiras, tal que S é uma deformação de retração de S^* .*

Demonstração. Colaremos as fronteiras como segue. Ao longo das fronteiras que são geodésicas fechadas γ de comprimento $l(\gamma)$ colamos um meio cilindro

$$C_{1/2} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}/[t \rightarrow t+l]$$

com a métrica $ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2$ como no Exemplo 2.2. Ao longo de cada lado não fechado de comprimento a colamos uma faixa

$$\mathbb{F}_1 = [0, +\infty) \times [0, a]$$

com a métrica $ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2$. Para os lados de comprimento infinito, colamos

$$\mathbb{F}_2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

com a métrica $ds^2 = d\rho^2 + \cosh^2 \rho dt^2$. Agora como as faixas são de ângulo reto, temos que para cada vértice $p \in S$ com ângulo interior θ , colamos um setor circular infinito

$$\Sigma = \{p\} \cup (0, +\infty) \times [0, \pi - \theta]$$

com métrica $ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\sigma^2$ (por equação (2.1)), entre as faixas adjacentes de ângulos retos, previamente colados como mostra a Figura 2.6. Pelo Teorema 2.2 uma superfície S^* obtida desta forma é uma superfície hiperbólica que verifica as propriedades requeridas. $\square$

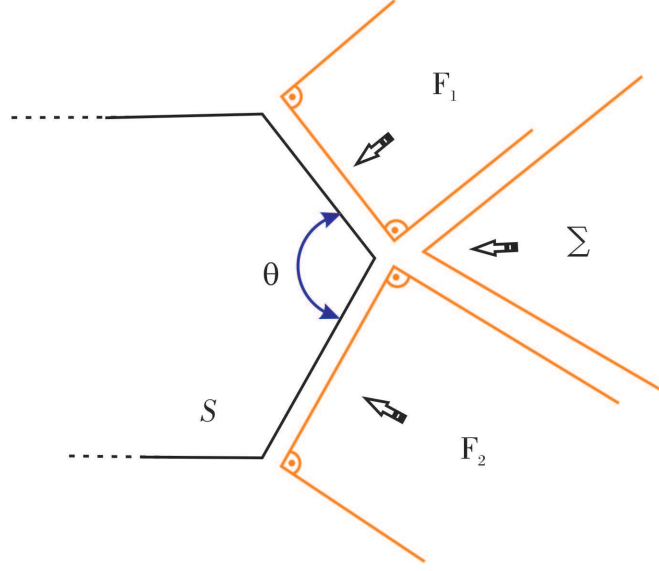


Figura 2.6: Cobertura universal.

Daqui para frente, uma cobertura universal de uma superfície será como um levantamento da estrutura em uma nova superfície hiperbólica.

Teorema 2.4. ([7], pág.: 16) *Seja S uma superfície hiperbólica. A cobertura universal $\tilde{S}$ de S é isométrica a um domínio conexo em $\mathbb{H}^2$ com fronteiras seccionalmente geodésicas. Se S é sem bordo, então $\tilde{S}$ é isométrica a $\mathbb{H}^2$.*

Para melhor referência do seguinte Teorema, consideremos uma aplicação $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ que é a cobertura universal da superfície hiperbólica S e p é um ponto de S e $\tilde{p}$ é um ponto de cobertura de p .

Teorema 2.5. ([7], pág.: 17) **(Propriedade de levantamento único)** *Seja I um intervalo ou produto de intervalos, e seja $x \in I$. Para qualquer função contínua $\phi : I \rightarrow S$ satisfazendo $\phi(x) = p$, existe uma função única $\tilde{\phi} : I \rightarrow \tilde{S}$ tal que $\tilde{\phi}(x) = \tilde{p}$ e $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$.*

2.4 Curvas perpendiculares e geodésicas fechadas

Sejam $p \in \mathbb{H}^2$ e γ uma geodésica em $\mathbb{H}^2$, então no plano hiperbólico existe uma curva geodésica perpendicular que liga p e γ . Além disso, se duas geodésicas

no plano hiperbólico tem distância positiva, então existe uma geodésica perpendicular ligando as duas geodésicas. Os seguintes resultados que apresentaremos, vão explicar melhor estas afirmações.

Na seguinte definição, S é uma superfície suave com fronteiras suaves por partes.

Definição 2.5. *Sejam $A, B \subset S$ subconjuntos fechados conexos. Suponhamos que $c, \gamma : [a, b] \rightarrow S$ são curvas contínuas com pontos iniciais $c(a), \gamma(a) \in A$ e com pontos finais $c(b), \gamma(b) \in B$. Dizemos que c é homotópico a γ com pontos de extremidades em A e B , se existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S$ tal que*

$$\begin{aligned} H(0, t) &= c(t), & H(1, t) &= \gamma(t), & a \leq t \leq b \\ H(s, a) &\in A, & H(s, b) &\in B, & 0 \leq s \leq 1. \end{aligned}$$

Um exemplo de homotopia no plano hiperbólico é dado na Figura 2.7 com $A = \alpha$ e $B = \{p\}$, como também com $A = \alpha$ e $B = \beta$, onde α e β são geodésicas.

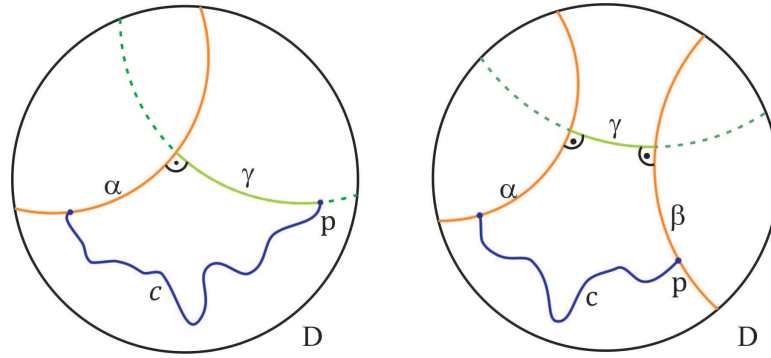


Figura 2.7: Homotopias no disco $\mathbb{D}^2$.

No seguinte teorema teremos uma situação semelhante em uma superfície hiperbólica.

Teorema 2.6. *Seja S , uma superfície hiperbólica e seja $c : [a, b] \rightarrow S$ uma curva com $c(a) \in A$ e $c(b) \in B$, onde A e B são geodésicas fechadas de fronteiras, e disjuntas de S . Na classe de homotopia de c com pontos finais percorrendo em A e B , existe uma única geodésica γ . Em seus pontos finais encontra-se perpendicularmente em A e B . Todos os outros pontos de γ estão no interior de S .*

Demonstração. Seja C o conjunto da classe de homotopia de c . Então C contém curvas suaves, agora consideremos $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset C$ uma sequência com comprimentos $l(\gamma_n)$ que converge a um ínfimo L quando $n \rightarrow \infty$. Parametrizando cada curva no intervalo $[a, b]$ com velocidade constante, então a família $\{\gamma_n\}_n$ é equicontínua e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, temos uma subsequência convergente a uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ de comprimento $l(\gamma) = L$.

As fronteiras de S são seccionalmente suaves, então temos que γ pertence a C .

Os ângulos internos de S são menores ou iguais a π , e como γ tem comprimento minimal, γ é um arco geodésico com os pontos extremos em ∂S . Como A e B são geodésicas fechadas e γ tem comprimento minimal, então γ encontra-se em A e B perpendicularmente.

Para provar a unicidade, consideramos a cobertura universal $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ onde $\tilde{S} \subset \mathbb{H}^2$ do Teorema 2.4. Consideramos $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{\gamma}$ o levantamento de A , B e γ em $\mathbb{H}^2$ tal que $\tilde{\gamma}$ é uma curva perpendicular de $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$. Cada curva homotópica de γ tendo pontos de extremidade percorrendo em A e B , eleva curvas homotópicas de $\tilde{\gamma}$ com pontos de extremidade percorrendo em $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ (Teorema 2.5). A unicidade de γ em S segue-se da unicidade de curva perpendicular em $\tilde{A}$ para $\tilde{B}$ em $\mathbb{H}^2$. $\square$

O seguinte teorema é uma versão mais completa, no qual podemos coletar propriedades semelhantes em diversas situações. Um subconjunto $A \subset S$ de uma superfície hiperbólica é admissível, se $A = \{p\}$ ou A é um subconjunto compacto conexo de ∂S .

Teorema 2.7. ([7], pág.: 18) *Seja S uma superfície hiperbólica e, sejam $A, B \subset S$ subconjuntos admissíveis e seja $c : [a, b] \rightarrow S$ com $c(a) \in A$, $c(b) \in B$ uma curva de A para B (A e B não precisam ser diferentes ou disjuntos). Então cumprem as seguintes afirmações:*

1. *Na classe de homotopia de c com pontos extremos percorrendo em A e B , então existe uma curva de menor comprimento γ . Esta é um arco geodésico.*
2. *Se γ não está contido em ∂S , então γ encontra-se na fronteira somente em seus pontos extremos.*
3. *Se $A = \{p\}$, $p \in S$, e se B é uma das seguintes categorias*
 - (a) *uma curva geodésica de fronteira, fechada e suave.*
 - (b) *um lado de S que se encontra com seus lados adjacentes sob um ângulo $\leq \pi/2$.*

Então γ é um ponto ou é um arco geodésico passando por p e encontra-se com B perpendicularmente. No último caso γ é a única geodésica passando por p e encontra-se com B perpendicularmente, na classe de homotopia de c .

4. *Se A e B são os lados como as categorias em 3 (mas não necessariamente o mesmo), e se γ não é um ponto, então γ é uma curva perpendicular de A para B na classe de homotopias do c .*
5. *Se c no caso 4 é simples e γ não é um ponto, então γ é simples.*
6. *Se A e B são pontos, então γ é única.*

Uma curva $c : [a, b] \rightarrow S$ é chamada simples se c é uma aplicação injetiva. No Teorema 2.7 mencionamos os casos mais frequentes. A Figura 2.8, ilustra alguns casos.

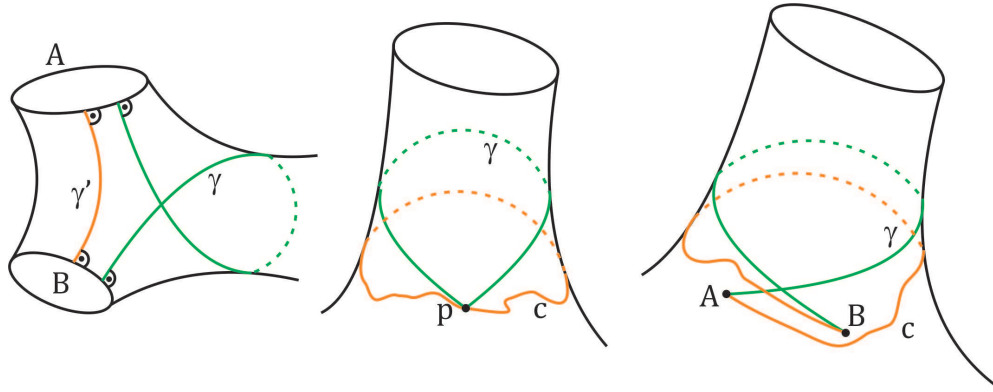


Figura 2.8: Algumas homotopias.

Continuando com os teoremas anteriores, mas agora para geodésicas fechadas. As parametrizações de curvas fechadas serão tanto na reta dos reais, com período 1 ou no espaço quociente S^1

$$S^1 = \mathbb{R}/[t \rightarrow t + 1]. \quad (2.12)$$

Definição 2.6. *Seja M um espaço topológico. Duas curvas fechadas $c, \gamma : S^1 \rightarrow M$ são chamadas livremente homotópicas, se existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow M$*

$$H(0, t) = c(t), \quad H(1, t) = \gamma(t), \quad t \in S^1.$$

Curvas que são livremente homotópicas a um ponto são chamadas homotópicamente triviais.

Nas superfícies hiperbólicas, as classes de homotopias livres e as geodésicas fechadas estão em correspondência um a um.

Definição 2.7. *Duas geodésicas fechadas, parametrizadas por $\gamma, \gamma' : S^1 \rightarrow M$ (de velocidades constantes), são equivalentes, se existe um homeomorfismo $h : S^1 \rightarrow S^1$ da forma $h(t) = t + c$, onde c é constante, tal que $\gamma' = \gamma \circ h$. Uma geodésica fechada é uma classe de equivalência de geodésicas parametrizadas fechadas.*

Note que geodésicas fechadas equivalentes são sempre livremente homotópicas.

Definição 2.8. *Sejam γ e δ geodésicas fechadas e $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Dizemos que γ é m -iterada de δ , se $\gamma(t) = \delta(mt)$, $t \in S^1$. Uma geodésica é primitiva se não é m -iterada de outra geodésica fechada para $m \geq 2$.*

No seguinte teorema assumimos que cada componente de fronteira fechada de S é uma curva primitiva parametrizada.

Teorema 2.8. ([7], pág.: 23) *Seja S uma superfície hiperbólica e seja c uma curva fechada homotópicamente não trivial em S . Então temos:*

1. c é livremente homotópica a uma única geodésica fechada γ .

2. γ ou está contido em ∂S ou $\gamma \cap \partial S = \emptyset$.
3. Se c é simples, então γ é simples.
4. se c é uma componente de fronteira não suave, então γ e c ligam um anel imerso em S .

O seguinte exemplo é para o caso de superfícies hiperbólicas não compactas.

Exemplo 2.3. (Cúspide) *Seja S uma superfície hiperbólica não compacta e seja $\mathfrak{S} \subset S$ um domínio que é isométrico à superfície*

$$(-\infty, 0] \times S^1 = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}/[t \rightarrow t+\pi] \quad (2.13)$$

com a métrica Riemanniana (ver Figura 2.9)

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{2\rho} dt^2. \quad (2.14)$$

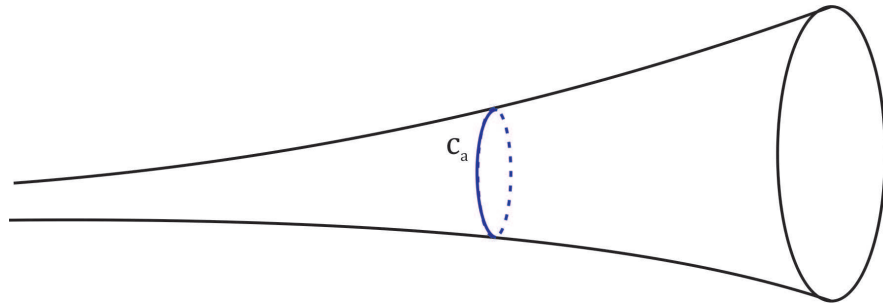


Figura 2.9: Cúspide gerada por $\Gamma = \langle T(z) = z + c \rangle$ em $\mathbb{H}^2$.

Tal domínio é chamado uma cúspide. Do mesmo modo podemos descrever, como o espaço quociente $\mathfrak{S} = \tilde{\mathfrak{S}}/\Gamma$, onde

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{x + iy \in \mathbb{H}^2 / y \geq 1\}$$

e Γ é o grupo cíclico $\Gamma = \{T^m / m \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$, onde $T(z) = z + 1$ para todo $z \in \mathbb{H}^2$.

A horoesfera $h_a = \{x + iy \in \mathbb{H}^2 / y = a, a \geq 1\}$, projeta a curva c_a de comprimento $1/a$ em $\mathfrak{S}$. Todos eles pertencem a mesma classe de homotopia livre não trivial. Esta classe não contém geodésicas fechadas.

2.5 Os parâmetros Fenchel-Niselsen

Nesta seção, daremos uma visão geral dos parâmetros Fenchel-Nielsen e a correspondente construção das superfícies compactas. A construção baseia-se na colagem de hexágonos geodésicos. Começamos com um lema que garante a existência desses hexágonos.

Lema 2.1. *Existe um hexágono geodésico reto no plano hiperbólico com lados emparelhados não adjacentes de comprimentos $l(a), l(b)$ e $l(c)$.*

Demonstração. Consideremos as geodésicas perpendiculares β , a e γ como na Figura 2.10. Seja L a linha reta de todos os pontos em $\mathbb{H}^2$ a uma distância $l(c)$ de β , que se encontram no mesmo lado de β como γ . No modelo do semiplano superior, L é uma linha reta (pois $T(z) = \lambda z$, é uma isometria). Agora consideremos uma geodésica tangente com L , logo movemos α ao longo de L até ter $\text{dist}(\gamma, \alpha) = l(b)$, finalmente chamamos b uma curva perpendicular de γ e α . Pelo que obtemos um hexágono geodésico (veja a Figura 2.10). $\square$

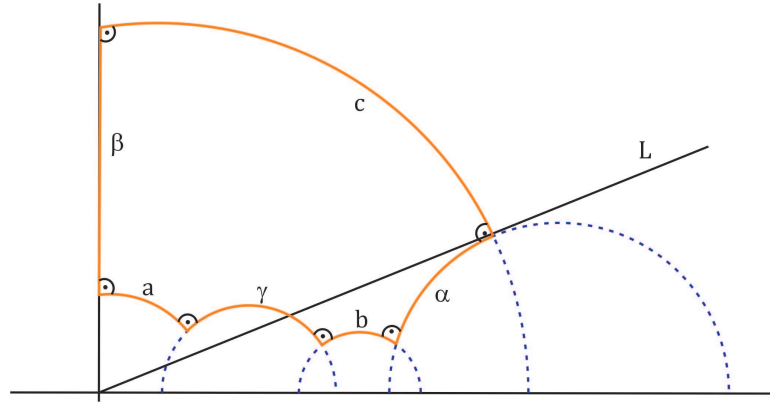


Figura 2.10: Existência de um hexágono em $\mathbb{H}^2$.

Construiremos uma superfície hiperbólica em três passos, da seguinte maneira:

1. Colamos duas copias de um hexágono ao longo de três lados não adjacentes para obter uma superfície hiperbólica Y com três geodésicas fronteiras fechadas (veja Figura 2.11). Pelo Lema 2.1 os comprimentos das geodésicas de fronteiras podem ser arbitrárias.

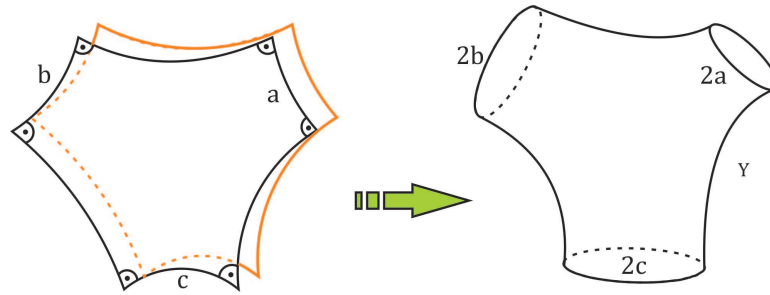


Figura 2.11: Construção de uma superfície Y .

2. Seja G um grafo cúbico com $2g - 2$ vértices e $3g - 3$ arestas, quer dizer um padrão como na Figura 2.12. Para qualquer vértice y de G associamos uma superfície Y e colamos essas superfícies como mostra a Figura 2.12.

As geodésicas de fronteiras para a colagem devem ter os mesmos comprimentos. A superfície S obtida desta forma, contém $3g - 3$ geodésicas fechadas que correspondem as $3g - 3$ arestas de G . Os comprimentos $l_1, \dots, l_{3g-3}$

destas geodésicas podem ser prescritos arbitrariamente. Em adição a estes comprimentos podemos estabelecer parâmetros de torção $a_1, \dots, a_{3g-3}$ (veja seção 2.7) para a colagem das geodésicas fechadas, como no Exemplo 2.2. Os parâmetros $l_1, \dots, l_{3g-3}$ e $a_1, \dots, a_{3g-3}$ são chamados parâmetros de Fenchel-Nielsen, para tais superfícies construídas.

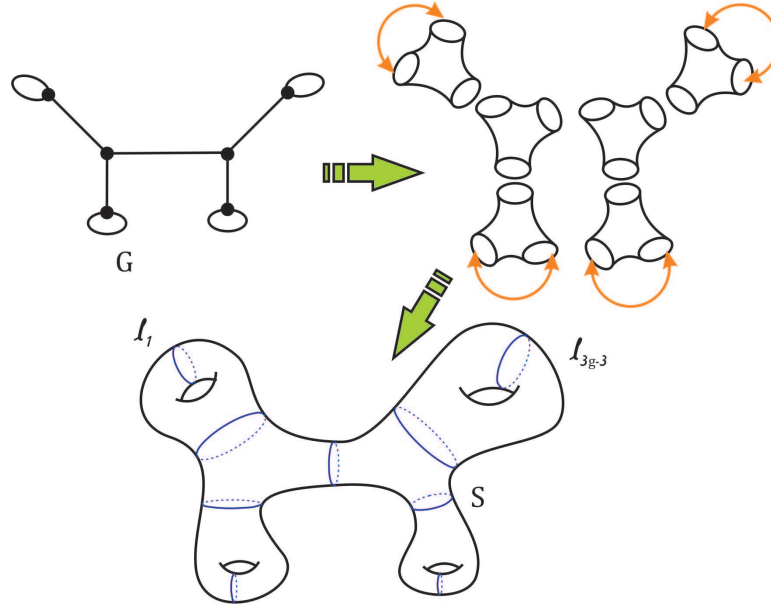


Figura 2.12: Construção com parâmetros de Fenchel-Nielsen.

Definição 2.9. *Uma superfície compacta sem fronteira é chamada uma superfície Riemanniana compacta.*

Para a próxima definição adotamos a seguinte terminologia. Uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) é uma superfície de gênero g com n componentes de fronteiras.

Definição 2.10. *Uma superfície hiperbólica compacta de assinatura (g, n) é uma superfície Riemanniana de assinatura (g, n) se cada componente de fronteira é uma geodésica fechada suave.*

Um exemplo é a superfície Y que tem assinatura $(0, 3)$, e uma superfície de assinatura $(g, 0)$ é uma superfície compacta sem fronteiras.

Agora apresentaremos o esquema de colagem das superfícies Y . Seja H um hexágono geodésico com ângulos retos no plano hiperbólico com lados consecutivos

$$\alpha_1, c_3, \alpha_2, c_1, \alpha_3, c_2$$

e seja H' uma cópia disjunta de H com lados correspondentes

$$\alpha'_1, c'_3, \alpha'_2, c'_1, \alpha'_3, c'_2.$$

Parametrizamos todos os lados no intervalo $[0, 1]$, com uma velocidade constante

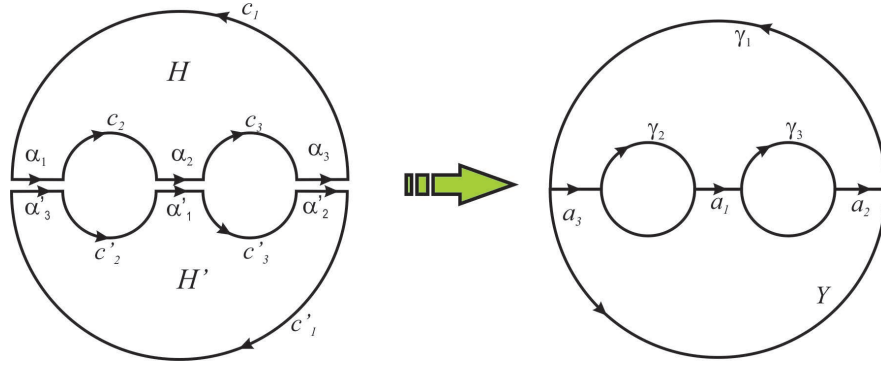


Figura 2.13: Esquema e colagem duma calça Y .

$$\begin{aligned}
 t &\rightarrow \alpha_i(t), \quad t \rightarrow \alpha'_i(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3 \\
 t &\rightarrow c_i(t), \quad t \rightarrow c'_i(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

tal que os lados de H e H' em conjunto formam uma curva de fronteira fechada (veja Figura 2.13). Tomando a condição de colagem

$$\alpha_i(t) = \alpha'_i(t) = a_i(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.16}$$

definimos uma 3-esfera com furos. Seja Y uma superfície tal que

$$Y = H + H' \text{ mod (2.16)}$$

que herda as estruturas hiperbólicas de H e H' .

Uma vez que todos os ângulos são ângulos retos, as curvas da fronteira

$$t \rightarrow \gamma_i(t) = \begin{cases} c_i(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ c'_i(2 - 2t), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

são geodésicas fechadas. A equação (2.17) também é interpretada como as parametrizações dos γ_i . Assim, Y é um par de calças.

2.6 Trigonometria hiperbólica

Os resultados desta secção serão amplamente utilizados no próximo capítulo. Neste secção apresentaremos fórmulas trigonométricas baseado no modelo hiperboloide. Na primeira parte utilizamos o grupo de isometrias atingindo sobre o modelo hiperboloide para obter as fórmulas trigonométricas do triângulo comparando, elementos da matriz. E finalmente generalizamos isso para pentágonos.

2.6.1 O modelo hiperboloide

Para começar, seja a forma bilinear

$$h(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \quad X, Y \in \mathbb{R}^3, \quad (2.18)$$

onde x_i, y_j são as coordenadas de X e Y respectivamente. As aplicações lineares $L_\sigma, M_\rho \in GL(3, \mathbb{R})$ são dadas por

$$L_\sigma = \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ \sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\rho = \begin{pmatrix} \cosh \rho & 0 & \sinh \rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh \rho & 0 & \cosh \rho \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

(aplicando em vetores coluna) com sua correspondente forma diferencial

$$dh^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2.$$

Seja $\Omega \subset GL(3, \mathbb{R})$ o subgrupo gerado por todos os L_σ e M_ρ , $\sigma, \rho \in \mathbb{R}$. Agora consideremos o hiperboloide.

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^3 / h(X, X) = -1, x_3 > 0\} \quad (2.20)$$

e seja g a forma diferencial quadrática em $\mathcal{H}$ que é obtida por restrição de dh^2 para os vetores tangentes de $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}$ e g são invariantes sobre Ω . Como g é definido positivo no plano tangente no ponto

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

implica que $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, g)$ é uma variedade Riemanniana, e $\Omega = \text{Isom}^+(\mathcal{H})$. Para provar que $\mathcal{H}$ é um modelo do plano hiperbólico, fazemos da seguinte maneira. Seja $\lambda : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ uma curva com σ fixo, definido por

$$\lambda(\rho) = L_\sigma M_\rho(p_0)$$

que tem velocidade constante igual a 1. Seja outra curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ para $\rho > 0$ definido por

$$\alpha(\sigma) = L_\sigma M_\rho(p_0)$$

que tem velocidade constante igual $\sinh \rho$. Além disso temos que

$$h(\lambda'(\rho), \alpha'(\sigma)) = \langle \lambda'(\rho), \alpha'(\sigma) \rangle = 0$$

ou seja as curvas λ e α se intersectam ortogonalmente. Introduzimos (ρ, σ) como um sistema de coordenadas do ponto $p = L_\sigma M_\rho(p_0)$ para $\rho \in [0, +\infty)$ e $\sigma \in [-\pi, \pi]$. Logo o sistema de coordenadas obtido desta maneira cobre $\mathcal{H} - \{p_0\}$, e o tensor g tem a forma

$$g = ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\sigma^2.$$

Pois para a parametrização $\mathbf{x} : [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{H}$ definida por

$$p = \mathbf{x}(\rho, \sigma) = (\cos \sigma \sinh \rho, \sin \sigma \sinh \rho, \cosh \rho)$$

logo

$$\mathbf{x}_\rho(\rho, \sigma) = (\cos \sigma \cosh \rho, \sin \sigma \cosh \rho, \sinh \rho)$$

$$\mathbf{x}_\sigma(\rho, \sigma) = (-\sin \sigma \sinh \rho, \cos \sigma \sinh \rho, 0)$$

pelo que temos $g_{11} = \langle \mathbf{x}_\rho(\rho, \sigma), \mathbf{x}_\rho(\rho, \sigma) \rangle = 1$, $g_{12} = g_{21} = \langle \mathbf{x}_\rho(\rho, \sigma), \mathbf{x}_\sigma(\rho, \sigma) \rangle = 0$ e $g_{22} = \langle \mathbf{x}_\sigma(\rho, \sigma), \mathbf{x}_\sigma(\rho, \sigma) \rangle = \sinh^2 \rho$. Portanto temos

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\rho & d\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sinh^2 \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ d\sigma \end{pmatrix} = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\sigma^2. \quad (2.21)$$

Isto mostra que $\mathcal{H}$ é isométrico a $\mathbb{H}^2$ e (ρ, σ) é chamada coordenada polar geodésica centrado em p_0 .

2.6.2 Triângulos

Para triângulos geodésicos no plano hiperbólico, denotamos pelos lados a, b e c e por α, β e γ os ângulos opostos correspondentes.

Teorema 2.9. (Triângulos ordinários) *As seguintes fórmulas são satisfeitas para triângulos geodésicos no plano hiperbólico:*

1. $\cosh l(c) = -\sinh l(a) \sinh l(b) \cos \gamma + \cosh l(a) \cosh l(b)$
2. $\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta \cosh l(c) - \cos \alpha \cos \beta$
3. $\frac{\sin \alpha}{\sinh l(a)} = \frac{\sin \beta}{\sinh l(b)} = \frac{\sin \gamma}{\sinh l(c)}$

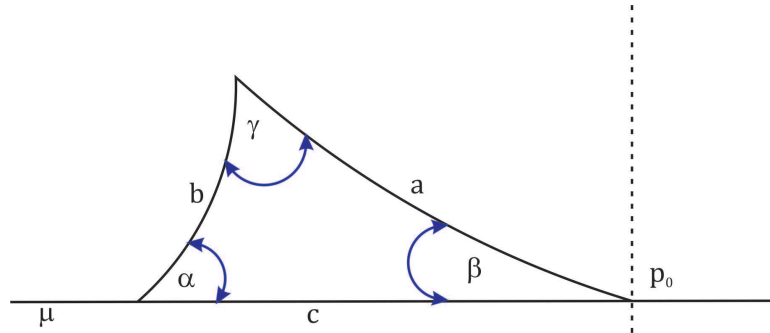


Figura 2.14: Triângulo em $\mathcal{H}$.

Demonstração. Seja o triângulo T imerso em $\mathcal{H}$ tal que β é um ângulo em $p = (0, 0, 1)^t \in \mathcal{H}$, α um ângulo em $M_{-c}(p_0)$ e γ um ângulo em $L_{\pi-\beta}M_a(p_0)$ como na

Figura 2.14. Seja a isometria $L_{\pi-\alpha}M_c$, que primeiro faz uma traslação de T ao longo de μ , traz o ângulo α no ponto p_0 , e logo faz uma rotação de T sobre p_0 em um ângulo $\pi - \alpha$.

Portanto a isometria $L_{\pi-\alpha}M_c$ traz de volta a uma posição como na Figura 2.14, mas agora com lado b ao invés do lado c em μ e com ângulo α ao invés de β em p_0 . Então podemos observar que a isometria $L_{\pi-\beta}M_aL_{\pi-\gamma}M_bL_{\pi-\alpha}M_c$ leva T de novo para sua posição original. Portanto este produto é a identidade. Pelo que temos

$$L_{\pi-\beta}M_aL_{\pi-\gamma}M_bL_{\pi-\alpha}M_c = I, \quad \Rightarrow M_aL_{\pi-\gamma}M_b = L_{\beta-\pi}M_cL_{\alpha-\pi} \quad (2.22)$$

Calculando os componentes em (2.22) obtemos 9 identidades, quatro das quais são aquelas do teorema. $\square$

Teorema 2.10. (Triângulos de ângulo reto) *Para qualquer triângulo hiperbólico com ângulo reto, temos.*

- | | |
|--|--|
| 1. $\cosh l(c) = \cosh l(a) \cosh l(b)$ | 4. $\sinh l(a) = \cot \beta \tanh l(b)$ |
| 2. $\cosh l(c) = \cot \alpha \cot \beta$ | 5. $\cos \alpha = \cosh l(a) \sin \beta$ |
| 3. $\sinh l(a) = \sin \alpha \sinh l(c)$ | 6. $\cos \alpha = \tanh l(b) \coth l(c)$ |

Demonstração. As três primeiras identidades são obtidos do Teorema 2.9 no caso $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Mas as outras três identidades restantes são obtidas por meio de cálculos elementares. $\square$

No que segue, um polígono $\mathcal{P}$ é uma curva fechada seccionalmente geodésica. Os arcos geodésicos de $\mathcal{P}$ são os lados.

Antes da seguinte definição fazemos algumas considerações. Seja (u, w) um par ordenado de lados consecutivos de $\mathcal{P}$ com respeito a uma orientação, e seja p o vértice comum de u e w . O ângulo de $\mathcal{P}$ em p é definido pela rotação $v \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ com p fixo que roda w para u . Dizemos que v é o ângulo subsequente do lado u e w é o lado subsequente do ângulo v (veja Figura 2.15).

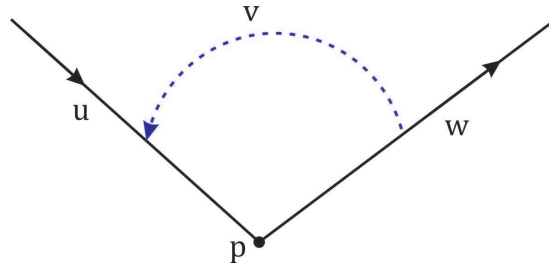


Figura 2.15: Ângulo de rotação.

Definição 2.11. *Sejam x e y pertencentes ao conjunto de lados e ângulos do polígono $\mathcal{P}$. O par ordenado (x, y) é dito tipo ângulo se uma das seguintes condições cumprem:*

1. y é o ângulo subsequente do lado x .
2. (x, y) é um par de lados consecutivos, e y é ortogonal a x .
3. y é o lado subsequente do ângulo x .

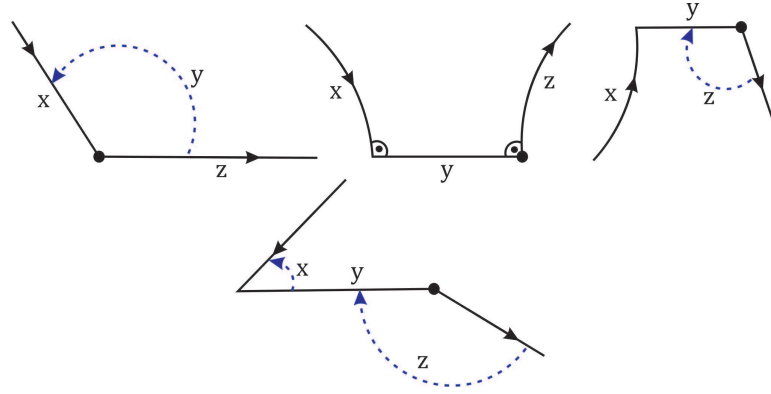
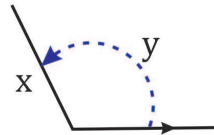


Figura 2.16: Lados e ângulos subsequentes.

Na Figura 2.16 todos os pares (x, y) são tipo ângulo. Agora para cada par (x, y) de tipo ângulo, associamos uma isometria $N_y \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$.

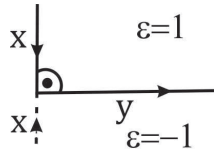
Definição 2.12. As isometrias N_y definimos da seguinte maneira.

1. Se y é o ângulo subsequente do lado x . Então definimos



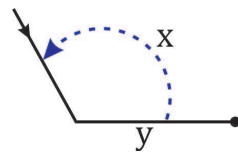
$$N_y = L_{\pi-y} = \begin{bmatrix} -\cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & -\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se (x, y) é um par de lados consecutivos com ângulo $\epsilon\pi/2$, onde $\epsilon = \pm 1$, então definimos



$$N_y = L_{\frac{\epsilon\pi}{2}} M_y = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon \cosh y & 0 & \epsilon \sinh y \\ \sinh y & 0 & \cosh y \end{bmatrix}.$$

3. Se y é o lado subsequente do ângulo x , então definimos



$$N_y = M_y = M_\rho = \begin{bmatrix} \cosh y & 0 & \sinh y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh y & 0 & \cosh y \end{bmatrix}.$$

Definição 2.13. Um triângulo generalizado é um polígono geodésico $\mathcal{P}$ fechado orientado junto com um ciclo $a, \gamma, b, \alpha, c, \beta$ de lados consecutivos e ângulos de $\mathcal{P}$, em que todos os pares $(a, \gamma), (\gamma, b), \dots, (c, \beta), (\beta, a)$ são tipo ângulo.

O seguinte teorema é uma consequência das definições acima:

Teorema 2.11. ([7], pág.: 36) *Para qualquer triângulo generalizado $a, \gamma, b, \alpha, c, \beta$ temos*

$$N_a N_\gamma N_b = (N_\alpha N_c N_\beta)^{-1}$$

Para entender melhor o teorema acima, fazemos um exemplo para dois casos.

Exemplo 2.4. *Seja um triângulo generalizado como na Figura 2.17 temos em ambos casos $N_a N_\gamma N_b = L_{\pi/2} M_a L_{\pi-\gamma} M_b$. Agora vamos observar a diferença entre os dois exemplos para $N_\alpha N_c N_\beta$.*

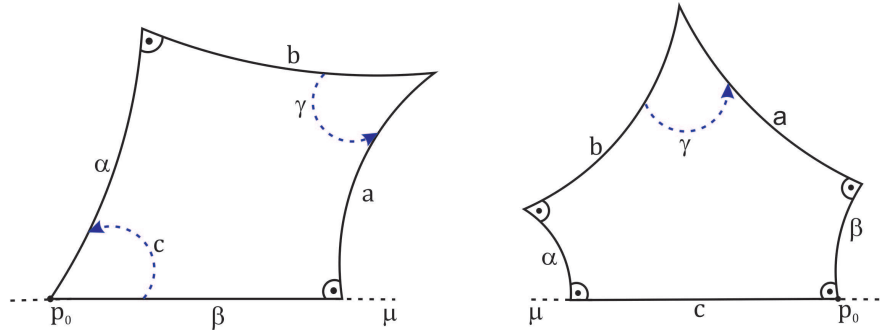


Figura 2.17: Triângulos generalizados.

No primeiro caso temos

$$N_\alpha N_c N_\beta = L_{\pi/2} M_\alpha L_{\pi-c} M_\beta \Rightarrow (N_\alpha N_c N_\beta)^{-1} = M_{-\beta} L_{c-\pi} M_{-\alpha} L_{-\pi/2}$$

e para o segundo caso se tem

$$N_\alpha N_c N_\beta = L_{\pi/2} M_\alpha L_{\pi/2} M_c L_{\pi/2} M_\beta$$

Pelo Teorema 2.11 produzimos para o primeiro caso

1. $\cos c = -\cosh l(a) \cosh l(b) \cos \gamma + \sinh l(a) \sinh l(b).$
2. $\frac{\cosh l(\alpha)}{\cosh l(a)} = \frac{\cosh l(\beta)}{\cosh l(b)} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}.$
As identidades correspondentes para o segundo caso são.
3. $\cosh l(c) = -\cosh l(a) \cosh l(b) \cos \gamma + \sinh l(a) \sinh l(b).$
4. $\frac{\cosh l(\alpha)}{\cosh l(a)} = \frac{\cosh l(\beta)}{\cosh l(b)} = \frac{\sin \gamma}{\sinh l(c)}.$
5. $\cos \gamma = \sinh l(\alpha) \sinh l(\beta) \cosh l(c) - \cosh l(\alpha) \cosh l(b).$

2.6.3 Tri retângulos e pentágonos

Consideremos dois arcos geodésicos perpendiculares a e b em $\mathbb{D}^2$ (modelo do disco de Poincaré) com vértice comum na origem como na Figura 2.18. Agora

sejam α e β geodésicas perpendiculares nos pontos finais de b e a . Se a e b tiverem comprimento pequeno, então α e β intersectam-se uns aos outros com um ângulo φ , nesta forma obtemos um quadrilátero geodésico com três ângulos retos. Chamamos este tipo de quadrilátero como um tri retângulo.

Os tri retângulos têm desempenhado um papel importante no descobrimento da geometria não-euclidiana, mais geralmente em construções geométricas, e são úteis para os cálculos. As seguintes fórmulas são semelhantes as dos triângulos retos do Teorema 2.10.

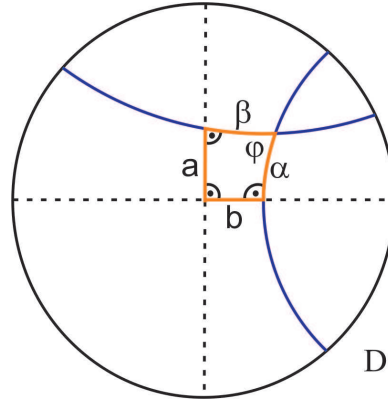
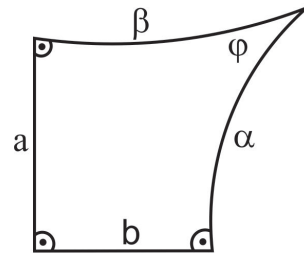


Figura 2.18: Triângulo generalizado.

Teorema 2.12. (Tri retângulos) Para qualquer tri retângulos com lados como na Figura 2.18, as seguintes relações são verdadeiras.

1. $\cos \varphi = \sinh l(a) \sinh l(b);$
2. $\cos \varphi = \tanh l(\alpha) \tanh l(\beta);$
3. $\cosh l(a) = \cosh l(\alpha) \sin \varphi;$
4. $\cosh l(a) = \tanh l(\beta) \coth l(b);$
5. $\sinh l(\alpha) = \sinh l(a) \cosh l(\beta);$
6. $\sinh l(\alpha) = \cosh l(b) \coth l(\varphi).$



Demonstração. As três primeiras identidades são obtidas das fórmulas do Exemplo 2.4 - 1 e 2 para $\gamma = \pi/2$. Os restantes são obtidos por cálculos elementares. $\square$

Voltando aos tri retângulos da Figura 2.18. Se o lado a cresce continuamente o vértice no ângulo φ move-se em direção do ponto final da geodésica α . Nesta forma obtemos a posição final para o lado a , a qual denotamos por a_b . Pelo que, quando $a \rightarrow a_b$, então $\varphi \rightarrow 0$. Portanto pelo Teorema 2.12-1 obtemos, por continuidade

$$\sinh l(a_b) \sinh l(b) = 1 \quad (2.23)$$

Se a cresce mais de a_b , então o ângulo φ desaparece e é substituído por uma curva c perpendicular a α e β , obtendo um pentágono reto como a Figura 2.19.

Teorema 2.13. (Pentágonos retos) Para qualquer pentágono reto com lados consecutivos a, b, α, c, β temos:

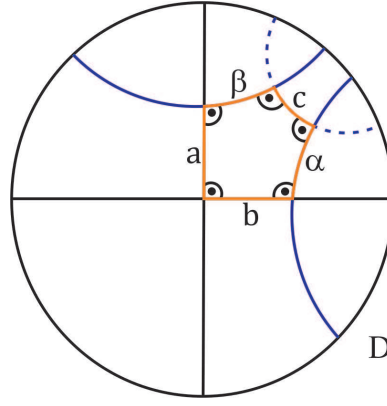


Figura 2.19: Pentágono reto.

1. $\cosh l(c) = \sinh l(a) \sinh l(b);$
2. $\cosh l(c) = \coth l(\alpha) \coth l(\beta).$

Demonstração. Isto é obtido do Exemplo 2.4, substituindo em item 3 e 5 o caso particular quando $\gamma = \pi/2$. $\square$

E para concluir esta secção mencionaremos um lema, que garante a existência de um único pentágono reto.

Lema 2.2. ([7], pág.: 39) *Seja $l(a)$ e $l(b)$ números reais arbitrários satisfazendo $\sinh l(a) \sinh l(b) > 1$. Então existe um único pentágono geodésico reto com dois lados consecutivos de comprimento $l(a)$ e $l(b)$.*

2.7 Parâmetros de torção e teorema do colar

Definição 2.14. *Uma superfície compacta de assinatura $(0, 4)$ é chamada uma X -parte.*

Uma superfície X -parte é obtida por colagem de duas Y -partes ao longo das geodésicas de fronteiras do mesmo comprimento. O objetivo desta seção é, calcular os parâmetros de torção em termos de comprimentos das geodésicas fechadas e vice-versa.

Sejam Y e Y' duas superfícies Y -partes com geodésicas de fronteiras parametrizadas $\gamma_i, \gamma'_i : S^1 \rightarrow Y, Y'$ para $i = 1, 2, 3$, e suponhamos que $l(\gamma_1) = l(\gamma'_1)$. Então para qualquer número real a obtemos uma X -parte pela identificação

$$\gamma_1(t) = \gamma'_1(a - t) = \gamma^a(t), \quad t \in S^1. \quad (2.24)$$

O número a é chamado **parâmetro de torção**. Logo, colando obtemos o espaço quociente

$$X^a = Y + Y' \mod (2.24).$$

Como $a \in \mathbb{R}$, se obtêm uma família de superfícies X -partes $\{X^a\}_{a \in \mathbb{R}}$, ou seja uma superfície X^a é obtida fixando um parâmetro a .

Teorema 2.14. *Qualquer superfície X -parte pode ser obtida pela construção anterior.*

Proposição 2.1. (Meio Colar) *Seja Y um par de calças com geodésicas de fronteiras γ_1, γ_2 e γ_3 . O conjunto*

$$C^*(\gamma_i) = \left\{ p \in Y / \sinh(\text{dist}(p, \gamma_i)) \sinh \frac{1}{2} l(\gamma_i) \leq 1 \right\}, \quad i = 1, 2, 3$$

são mutuamente disjuntos, e cada um deles é homeomorfo ao anel $[0, 1] \times S^1$. Para qualquer $p \in C^(\gamma_i)$ existe em $C^*(\gamma_i)$ uma única curva perpendicular ao γ_i , $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. A superfície Y pode ser decomposta em hexágonos geodésicos retos H e H' , com os lados assinados e parametrizados como em (2.15). Então temos $c_i = \frac{1}{2} l(\gamma_i) = c'_i$.

Em H (e similarmente em H') definimos

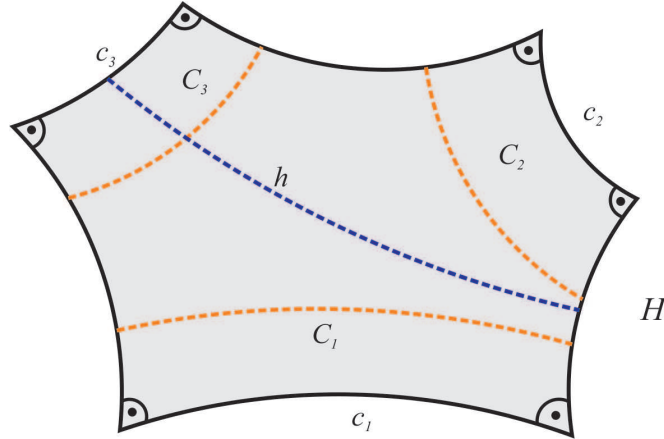


Figura 2.20: Decomposição de uma calça em hexágonos H .

$$C_i^*(\gamma_i) = \{p \in H / \sinh(\text{dist}(p, c_i)) \sinh c_i \leq 1\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Para ver que os C_i^* são disjuntos, ligamos os lados opostos por uma curva perpendicular, por exemplo h divide H em duas regiões, desde c_3 ao lado entre c_1 e c_2 (veja Figura 2.20). Do item 1 do Teorema 2.13, obtemos

$$\sinh c_k \sinh(\text{dist}(c_k, h)) > 1, \quad k = 1, 2.$$

Portanto, h separa C_1^* e C_2^* , da mesma forma C_1^* , C_3^* e C_2^* , C_3^* são separados. Além disso, observamos dessa separação que cada C_i^* é varrido de fora por arcos geodésicos mutuamente disjuntos, tendo comprimentos d_i e emanando perpendicularmente de c_i , onde $\sinh c_i \sinh d_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. O mesmo cumpre para os correspondentes domínios em H' , o qual a proposição é mostrada. $\square$

Definição 2.15. *Seja X^a com geodésica γ^a como em (2.24). Então o conjunto*

$$C(\gamma^a) = \{p \in X^a / \text{dist}(p, \gamma^a) \leq w\},$$

onde

$$w = \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \frac{l(\gamma^a)}{2}} \right)$$

é chamado colar em torno de γ^a , e w é sua largura.

Seja $p \in C(\gamma^a)$, então existe um único arco geodésico perpendicular em $C(\gamma^a)$ de p para γ^a que encontra-se no ponto $\gamma^a(t_p)$ onde $t_p \in S^1$. Agora consideremos $\rho_p = \varepsilon \text{dist}(p, \gamma^a)$ a distância dirigida com $\varepsilon = -1$ se $p \in Y$ e $\varepsilon = +1$ se $p \in Y'$.

Definição 2.16. *Para $p \in C(\gamma^a)$, como da Definição 2.15*

$$(\rho, t) = (\rho_p, t_p) \in [-w, w] \times S^1$$

é o par de coordenadas de Fermi de p com respeito a γ^a .

Na Definição 2.16 de γ^a , e da orientação de γ^a , podemos considerar que Y está no lado esquerdo de γ^a . Consequentemente para os pontos de $C(\gamma^a)$ pertencentes a Y , temos $\rho \leq 0$ e para aqueles pertencentes a Y' temos $\rho \geq 0$.

Pela Proposição 2.1, estas coordenadas definem um homeomorfismo de $C(\gamma^a)$ ao anel $[-w, w] \times S^1$.

Na família $\{X^a\}$, $a \in \mathbb{R}$ consideraremos X^0 como a superfície base e escrevemos $X^0 = X$ e $\gamma^0 = \gamma$. Agora podemos definir um homeomorfismo $\tau^a : X \rightarrow X^a$ como mostra a Figura 2.21.

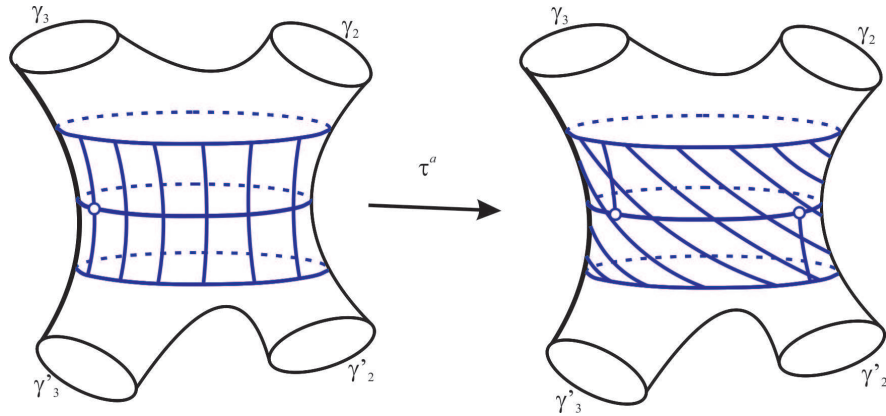


Figura 2.21: Homeomorfismo do colar para um parâmetro de torção a .

Continuando temos $\pi^a : Y \cup Y' \rightarrow X^a = Y + Y' \pmod{(2.24)}$ a projeção natural, e para $a = 0$ tem-se $\pi^0 = \pi$.

Observamos que a condição de colagem (2.24), significa para as coordenadas de Fermi que: se $p \in C(\gamma)$, temos coordenados (ρ, t) e $\rho \leq 0$, então pela convenção do sinal acima, temos $\pi^{-1}(p) \in Y$. Logo $\pi^a \circ \pi^{-1}(p) \in C(\gamma^a)$ e tem exatamente

as mesma coordenadas (ρ, t) em relação a γ^a ; se $\rho \geq 0$ temos $\pi^{-1}(p) \in Y'$, então $\pi^a \circ \pi^{-1}(p)$ tem coordenadas $(\rho, a+t)$. Segue-se que a aplicação $T^a : C(\gamma) \rightarrow C(\gamma^a)$ definida por

$$T^a(\rho, t) = \left(\rho, t + a \frac{w + \rho}{2w} \right)$$

onde w é a largura comum dos colares $C(\gamma)$ e $C(\gamma^a)$ e T^a coincide com $\pi^a \circ \pi^{-1}$ na fronteira de $C(\gamma)$ com

$$\tau^a = \begin{cases} T^a & \text{em } C(\gamma) \\ \pi^a \circ \pi^{-1} & \text{em } X - C(\gamma) \end{cases}$$

obtemos portanto um homeomorfismo

$$\tau^a : X \rightarrow X^a$$

as aplicações T^a e τ^a são às vezes chamadas homeomorfismos de torção.

Teorema 2.15. (Teorema do Colar I) *Seja S uma superfície compacta de gênero $g \geq 2$, e sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ geodésicas fechadas simples e mutuamente disjuntas em S . Então cumpre os seguintes*

1. $m \leq 3g - 3$;
2. *Existem geodésicas fechadas simples $\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{3g-3}$ que juntas com as $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ podem decompor S em par de calças;*
3. *O colar*

$$C(\gamma_i) = \{p \in S / \text{dist}(p, \gamma_i) \leq w(\gamma_i)\}$$

de largura $w = \text{arc senh} \left(\frac{1}{\text{senh} \frac{l(\gamma_i)}{2}} \right)$ são disjuntos para $i = 1, \dots, 3g - 3$;

4. *Cada $C(\gamma_i)$ é isométrico ao cilindro $[-w(\gamma_i), w(\gamma_i)] \times S^1$ com a métrica Riemanniana $ds^2 = d\rho^2 + l^2(\gamma_i) \cosh^2 \rho dt^2$.*

Demonstração. Cortando S ao longo das geodésicas $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, cada componente conexa S' , obtida pelo corte, é uma superfície hiperbólica de alguma assinatura (g', n') . Como os γ_i não são mutuamente homotópicos, e cada geodésica γ_i não é homotopicamente trivial, por Teorema 2.8, temos que $g' \geq 1$ ou $n' \geq 3$ (se $g' = 0$).

Suponhamos que S' não tem assinatura $(0, 3)$, então S' contém uma curva fechada simples homotopicamente não trivial, e consideramos $\bar{\gamma}_{m+1}$ uma curva fechada que não é homotópica para uma componente de fronteira de S' . Pelo Teorema 2.8, existe uma geodésica fechada simples homotópica a $\bar{\gamma}_{m+1}$. Assumiremos que γ_{m+1} é a geodésica fechada simples. Desta forma podemos cortar S' ao longo de γ_{m+1} , continuando este processo podemos decompor S em par de calças. Pela característica de Euler, temos que o número de calças é $2g - 2$, logo

$$m \leq 2g - 2 \leq 3g - 3$$

desta forma mostramos os itens 1 e 2.

Como S pode se decompor em par de calças, temos que o item 3, e a primeira parte do item 4 são consequências da Proposição 2.1 (meio colar), finalmente podemos copiar a expressão da métrica do Exemplo 2.1. $\square$

Corolário 2.16. *Sejam γ e δ geodésicas fechadas em S interceptando-se transversalmente, e assumimos que γ é simples. Então*

$$\sinh \frac{1}{2}l(\gamma) \sinh \frac{1}{2}l(\delta) > 1$$

Demonstração. Sejam $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$ as curvas de levantamento de γ e δ na cobertura universal $\mathbb{H}^2$ de S . Então o conjunto dos pontos

$$\tilde{C}(\tilde{\gamma}) = \{z \in \mathbb{H}^2 / \text{dist}(z, \tilde{\gamma}) \leq w(\gamma)\}$$

são levantamentos dos pontos de $C(\gamma)$, e além disso $\tilde{\delta}$ liga as componentes de fronteiras de $\tilde{C}(\tilde{\gamma})$. Portanto δ contém um arco geodésico em $C(\gamma)$ que liga as componentes de fronteiras de $C(\gamma)$. Pelo que o arco tem comprimento $\geq 2w(\gamma)$, e também

$$\frac{1}{2}l(\delta) > \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \frac{1}{2}l(\gamma)} \right),$$

logo

$$\sinh \frac{1}{2}l(\gamma) \sinh \frac{1}{2}l(\delta) > 1.$$

$\square$

Para apresentar os seguintes resultados primeiro daremos algumas definições. Seja S uma superfície compacta de gênero $g \geq 2$. Para $p \in S$, denotamos por U_p^r o conjunto distância

$$U_p^r = \{q \in S / \text{dist}(p, q) < r\}.$$

Para $r > 0$ pequeno, U_p^r é isométrico para um disco aberto de raio r em $\mathbb{H}^2$.

Definição 2.17. *O supremo de todos os r para o qual U_p^r é isométrico para um disco, é chamado raio de injetividade de S em p , e denotaremos por $r_p(S)$. O raio de injetividade de S é definido por*

$$r_{inj}(S) = \inf\{r_p(S) / p \in S\}.$$

Lema 2.3. *$r_p(S) = \frac{1}{2}l(\mu_p)$, onde μ_p é um laço geodésico de menor comprimento em p , e $r_{inj}(S) = \frac{1}{2}l(\mu)$, onde μ é a geodésica fechada de menor comprimento em S , as curvas μ_p e μ são simples.*

Demonstração. Para $r < r_p(S)$, temos que U_p^r é isométrico para um disco em $\mathbb{H}^2$, e como em $\mathbb{H}^2$ não existe um laço geodésico temos que $l(\mu_p) \geq 2r_p(S)$. Agora consideremos $r = r_p(S)$, então o levantamento do ponto p na cobertura universal $\mathbb{H}^2$ de S tem distância pelo menos $2r$ entre dois pontos quaisquer do levantamento de p , e existem pontos levantados p_1 e p_2 de p tal que $\text{dist}(p_1, p_2) = 2r$. Sob a cobertura $\mathbb{H}^2 \rightarrow S$, o arco geodésico que liga p_1 e p_2 é levado para um laço

geodésico μ_p de comprimento $2r$ em p . No qual U_p^r é ainda um disco, e μ_p é um laço geodésico.

Para mostrar sobre μ , podemos observar que a função $p \rightarrow l(\mu_p)$ é contínua (temos $r_q \geq r_p - \text{dist}(p, q)$ para $p, q \in S$). Como S é compacto, existe $p = m \in S$ tal que $l(\mu_p)$ tem valor mínimo. Como μ_m é homotópicamente não trivial, então em sua homotopia livre contém uma única curva fechada μ de menor comprimento. Pelo Teorema 2.8 se tem que μ é uma geodésica fechada, logo

$$r_{inj}(S) = \frac{1}{2}l(\mu_m) \geq \frac{1}{2}l(\mu) \geq r_{inj}(S).$$

Portanto $\mu = \mu_m$, pelo que o Lema fica provado. $\square$

Teorema 2.17. (Teorema do Colar II) *Sejam $\beta_1, \dots, \beta_k$ o conjunto de todas as geodésicas fechadas de comprimento $\leq 2 \operatorname{arcsinh} 1$ em S . Então $k \leq 3g - 3$, e cumprem o seguinte:*

1. *As geodésicas $\beta_1, \dots, \beta_k$ são mutuamente disjuntas;*
2. *$r_p(S) > \operatorname{arcsinh} 1$ para todo $p \in S - \bigcup_{i=1}^k C(\beta_i)$;*
3. *Se $p \in C(\beta_i)$, e $d = \text{dist}(p, \partial C(\beta_i))$, então*

$$\sinh r_p(S) = \cosh \frac{1}{2}l(\beta_i) \cosh d - \sinh d.$$

Demonstração. Como $l(\beta_i) \leq 2 \operatorname{arcsinh}(1)$ para $i = 1, \dots, k$ temos

$$\sinh \frac{1}{2}l(\beta_i) \sinh \frac{1}{2}l(\beta_j) \leq 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Agora, pelo Corolário 2.16, implica que $\beta_i, \dots, \beta_k$ são mutuamente disjuntas. Além disso, pelo item 1 do Teorema 2.15 se obtêm $k \leq 3g - 3$, provando o item 1 de nosso teorema.

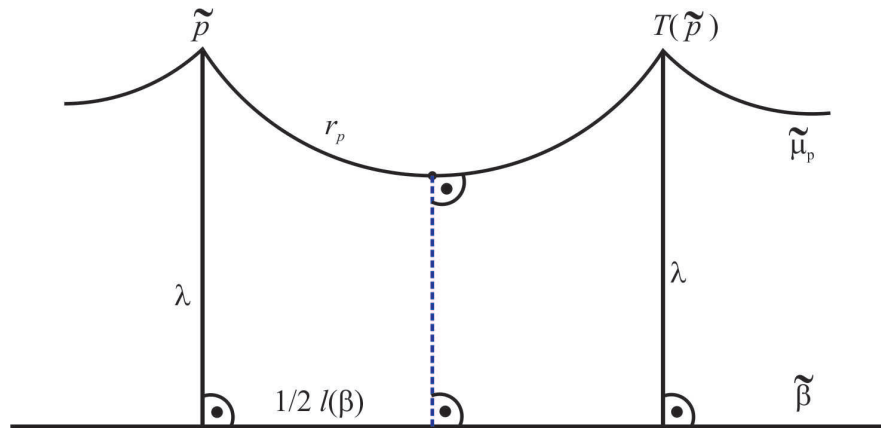


Figura 2.22: Levantamento das curvas μ_p e β em $\mathbb{H}^2$.

Para o item 2; seja $p \in S$ e assumimos que $\sinh r_p(S) \leq 1$. Pelo Lema 2.3 existe um laço geodésico simples μ_p em p de comprimento $2r_p(S)$. Pelo Teorema 2.8, na classe de homotopia livre de μ_p existe uma geodésica fechada simples β . Sejam $\tilde{\mu}_p$ e $\tilde{\beta}$ levantamentos homotópicos das curvas μ_p e β , na cobertura universal de S , e seja $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ uma transformação com eixo base $\tilde{\beta}$ que corresponde a μ_p . Como $\tilde{\mu}_p$ e $\tilde{\beta}$ são homotópicos, T leva $\tilde{\mu}_p$ sobre ela mesma. Se $\tilde{p} \in \tilde{\mu}_p$ o ponto levantado de p , e consideramos sua imagem $T(\tilde{p})$ (veja Figura 2.22). Como T preserva orientação, então $\tilde{p}$ e $T(\tilde{p})$ estão mesmo lado de $\tilde{\beta}$.

O arco geodésico de comprimento $2r_p(S)$ em $\tilde{\mu}_p$ de $\tilde{p}$ para $T(\tilde{p})$, não intercepta $\tilde{\beta}$, desta forma obtemos um quadrilátero geodésico com lados de comprimentos $\lambda, l(\beta), \lambda$ e $2r_p(S)$, onde

$$\lambda = \text{dist}(\tilde{p}, \tilde{\beta}) = \text{dist}(T(\tilde{p}), \tilde{\beta}).$$

Agora se, traçamos uma perpendicular comum aos arcos geodésicos de $\tilde{\mu}_p$ ate $\tilde{\beta}$ (linha pontilhada na Figura 2.22), então obtemos dois tri retângulos isométricos. Pelo item 5 do Teorema 2.12, se tem

$$\sinh r_p(S) = \sinh \frac{1}{2}l(\beta) \cosh \lambda > \sinh \frac{1}{2}l(\beta) \sinh \lambda, \quad (2.25)$$

pois $\cosh \lambda > \sinh \lambda$. Como por hipótese $\sinh r_p(S) \leq 1$, segue-se que $\sinh \frac{1}{2}l(\beta) < 1$. Portanto concluímos que β é uma das geodésicas $\beta_1, \dots, \beta_k$. Além disso, também temos que

$$\text{dist}(p, \beta) \leq \lambda < \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \frac{1}{2}l(\beta)} \right) = w(\beta)$$

de modo que $p \in C(\beta)$.

Seja $\lambda = w - d$, onde $w = w(\beta)$. Por (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} \sinh r_p(S) &= \sinh \frac{1}{2}l(\beta) (\cosh w \cosh d - \sinh w \sinh d) \\ &= \sinh \frac{1}{2}l(\beta) \cosh w \cosh d - \sinh d, \end{aligned}$$

a ultima igualdade é por, $w = \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \frac{1}{2}l(\beta)} \right)$.

Logo, como

$$\sinh^2 \frac{1}{2}l(\beta) \cosh^2 w = \sinh^2 \frac{1}{2}l(\beta) \sinh^2 w + \sinh^2 \frac{1}{2}l(\beta) = \cosh^2 \frac{1}{2}l(\beta)$$

finalmente obtemos

$$\sinh r_p(S) = \cosh \frac{1}{2}l(\beta) \cosh d - \sinh d.$$

□

Capítulo 3

Construção de superfícies hiperbólicas com sístole máxima

Neste capítulo apresentaremos um dos objetivos de nosso trabalho, que é estudar algumas desigualdades inter sistólicas em superfícies hiperbólicas compactas e não compactas. Estas desigualdades vai estar resumidas nos Teoremas 3.6 e 3.8. Para isto considere S uma superfície hiperbólica compacta de gênero $g \geq 2$. Chamamos uma sístole a geodésica fechada simples de menor comprimento, e denotaremos o comprimento por $\text{sys}(S)$. Seja $\text{msys}(g)$ o valor máximo atingido por $\text{sys}(\cdot)$ entre todas as superfícies hiperbólicas compactas de gênero g . Chamaremos superfície maximal $S_{\max}$ a uma superfície hiperbólica compacta de gênero g cuja sístole tem comprimento $\text{msys}(g)$. Na Seção 1, apresentaremos o problema de sístole grande, além disso algumas definições e resultados de sístoles. Na Seção 2, usaremos a técnica de corte e colagem para construir superfícies hiperbólicas compactas com sístole grande de uma superfície maximal. Isto nos permite mostrar várias desigualdades relacionadas com $\text{msys}(\cdot)$ para diferentes gêneros. Na Seção 3, mostraremos desigualdades semelhantes para superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides.

As principais referencias são: [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], e outras referencias que podem ser de complementação da teoria foram [2], [3] e [7].

3.1 Problema de sístole grande

Seja S uma superfície tridimensional do espaço euclidiano, uma curva fechada em S é uma curva que é topologicamente como um círculo, se S tem a topologia de um k -toro. Em S vão existir curvas fechadas que não são contráteis em um ponto de S . Iremos ver que a sístole de S , é o menor comprimento dessas curvas, que será uma geodésica fechada. O termo matemático sístole foi adotado em 1980.

A sístole de uma superfície de Riemann foi objeto de profundos estudos entre 1993 e 2003. O artigo [25] de Paul Schumtz Schaller marcou um avanço importante nas pesquisas de superfícies maximais para a sístole. No que segue damos

a definição formal da sístole.

Definição 3.1. *Seja S uma superfície hiperbólica compacta. A sístole de S é uma curva fechada não contrátil de menor comprimento, e denotamos o comprimento por $\text{sys}(S)$.*

Seja $\mathcal{M}_g$ é o espaço módulo de todas as superfícies compactas de gênero g . Schumtz Schaller em [25] generalizou assim a sístole.

- Definição 3.2.**
- a). *Um k -sistema F , $1 \leq k \leq 3g - 3$, é um conjunto de k geodésicas mutuamente disjuntas. O comprimento $l(F)$ de um k -sistema F é definido como o comprimento da geodésica de maior comprimento em F .*
 - b). *Um k -comprimento $l_k(S)$ de uma superfície S é definido como o mínimo dos comprimentos de todos os k -sistemas de S .*
 - c). *$S \in \mathcal{M}_g$ é chamado superfície k -maximal, se existe uma vizinhança U de S em $\mathcal{M}_g$ tal que o k -comprimento de S é maximal em S .*
 - d). *$S \in \mathcal{M}_g$ é chamado superfície global k -maximal se o k -comprimento de S é maximal em $\mathcal{M}_g$.*
 - f). *Uma k -sístole é a geodésica α em uma superfície S tal que existe um k -sistema F em S com α e com $l(\alpha) = l(F) = l_k(S)$.*

Um dos problemas da geometria em superfícies é a procura de métricas hiperbólicas sobre uma superfície para certo gênero, que maximizem a sístole. Métricas que maximizem localmente sobre essas superfícies são ditas extremas. Porém, até o momento, pouco se sabe sobre essas superfícies. A seguinte definição é importante para nosso trabalho.

Definição 3.3. *Uma família de superfícies hiperbólicas compactas S_i com $g_i \rightarrow \infty$ é de sístole grande se existe uma constante $\varrho > 0$ e c , independente de i , tal que satisfaz*

$$\text{sys}(S_i) \geq \varrho \log(g_i) - c.$$

Agora apresentaremos um problema no qual nosso trabalho se baseou.

Problema 3.1. (Problema de sístole grande) *Determine o supremo de ϱ tal que exista uma família de superfícies hiperbólicas compactas S_k de sístole grande com este ϱ .*

A primeira construção de superfícies de sístoles grande, foi feita por Buser e Sarnak em [8], no seguinte resultado.

Teorema 3.1. ([8], Seção. 4) *Seja Γ um grupo fuchsiano co-compacto em $PSL(2, \mathbb{R})$ obtido de uma álgebra de divisão dos quatérnios $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}}$ para inteiros a, b positivos. Seja $\Gamma(p)$ para primos ímpares p , o principal subgrupo de congruência. Então a família de superfícies hiperbólicas compactas $S_p = \mathbb{H}^2/\Gamma(p)$ satisfaz $g(S_p) \rightarrow \infty$ quando $p \rightarrow \infty$, e existe algum c , independente de p , tal que*

$$\text{sys}(S_p) \geq \frac{4}{3} \log(g(S_p)) - c.$$

A constante $\varrho = \frac{4}{3}$ é o melhor valor alcançado até hoje. No Capítulo 4, faremos um esboço do teorema anterior. Uma generalização da construção de Buser e Sarnak foi feito em 2007 por Kastz, Chaps e Vishne em [18].

Teorema 3.2. ([18], pág.: 401) *Seja Γ um subgrupo aritmético co-compacto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Então para uma constante adequada $c = c(\Gamma)$, o principal subgrupo de congruência de Γ satisfaz*

$$\text{sys}(S_I) \geq \frac{4}{3} \log(g(S_I)) - c$$

para qualquer ideal $I \triangleleft O_K$, onde $S_I = \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma superfície hiperbólica associada, onde $O_K \subset K$ é um anel de inteiros algébricos em um corpo $K \subset \mathbb{R}$.

Seja uma superfície hiperbólica compacta de gênero $g \geq 2$, então o valor $\text{msys}(g)$ é definido por

$$\text{msys}(g) = \sup\{\text{sys}(S)/S \text{ superfície hiperbólica compacta de gênero } g \geq 2\}.$$

Existe uma constante universal $B > 0$, desconhecida tal que para todo gênero $g \geq 2$ cumpre

$$B \log(g) \leq \text{msys}(g) \leq 2 \log(4g - 2) \quad (3.1)$$

para mais detalhes veja [8].

3.2 Superfícies compactas e sístole máxima

Designaremos o comprimento de um arco geodésico α por $l(\alpha)$. Nesta seção trataremos o caso de superfícies hiperbólicas compactas e uma superfície compacta de assinatura (g, n) , de gênero g com n componentes de fronteiras disjuntas, onde cada uma das quais é uma geodésica fechada simples e suave. Primeiro provaremos o Lema do Colar para sístoles. Em seguida apresentaremos a construção de uma cobertura universal das superfícies hiperbólicas, nesta cobertura o raio de injectividade não diminui. Finalmente esta construção será utilizada para mostrar as desigualdades inter sistólicas do Teorema 3.6.

Recordemos que dada η uma geodésica fechada simples em S , seja w_η o supremo de todos os comprimentos dentre os comprimentos w dos arcos geodésicos que emanam perpendicularmente de η que são mutuamente disjuntos, no qual $C_w(\eta) \simeq [-w, w] \times S^1$. Nós definimos um colar $C_w(\eta)$ ao redor de η com largura $w < w_\eta$ por

$$C_w(\eta) = \{p \in S / \text{dist}(p, \eta) < w\}.$$

Chamamos colar maximal $C_w(\eta)$ de η , se $w = w_\eta$. Um meio colar $H_w(\eta)$ de largura w é uma das duas partes do colar $C_w(\eta)$ que obtemos cortando $C_w(\eta)$ ao longo de η (veja Figura 3.1).

Primeiro mostraremos o Lema do Colar para sístoles de superfícies compactas.

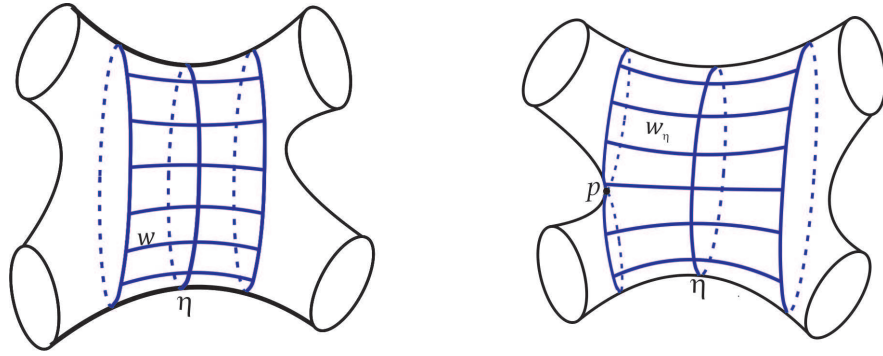


Figura 3.1: Colar da curva η e colar maximal de η .

Lema 3.1. *Seja α uma sístole de uma superfície hiperbólica compacta S de gênero $g \geq 2$. Então o colar maximal $C_{w_\alpha}(\alpha)$ de α tem largura*

$$w_\alpha > \frac{l(\alpha)}{4}.$$

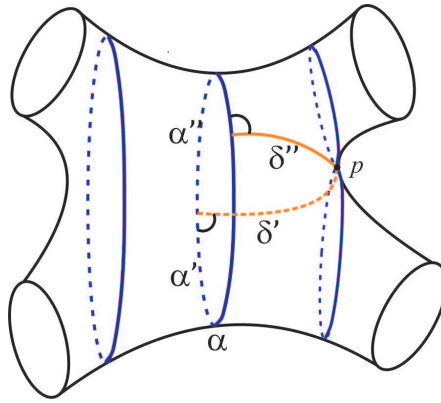


Figura 3.2: Existência do arco geodésico δ no colar maximal de α .

Demonstração. Seja α uma sístole de uma superfície hiperbólica compacta maximal $S_{\max}$ de gênero $g \geq 2$. O fecho $\overline{C_{w_\alpha}(\alpha)}$ do colar maximal de α auto intercepta-se no ponto p . Então existem dois arcos geodésicos δ' e δ'' de comprimento w_α que emanam de α , e são perpendiculares a α , tendo o ponto final p em comum. Estes dois arcos formam um arco geodésico suave δ . Os pontos finais de δ em α a divide em duas partes, denotaremos estes dois arcos por α' e α'' (veja Figura 3.2).

Suponhamos sem perda de generalidade que α' é o arco com menor comprimento destes dois. Pelo que obtemos

$$l(\alpha') \leq \frac{l(\alpha)}{2}.$$

Agora seja β uma geodésica fechada simples na classe de homotopia livre $\alpha' \cdot \delta$,

temos que

$$l(\beta) < l(\alpha') + l(\delta) \leq \frac{l(\alpha)}{2} + 2w_\alpha.$$

Afirmamos que $w_\alpha > \frac{l(\alpha)}{4}$. De fato, se $w_\alpha \leq \frac{l(\alpha)}{4}$ se tem o seguinte

$$l(\beta) < \frac{l(\alpha)}{2} + 2\frac{l(\alpha)}{4} = l(\alpha),$$

a qual é uma contradição à minimalidade de α , pois α é uma sístole. $\square$

Diante do lema anterior podemos concluir que cada sístole α numa superfície hiperbólica compacta S tem um colar $C_{\frac{\alpha}{4}}(\alpha)$ de largura $\frac{l(\alpha)}{4}$, que está contido em S .

A seguinte construção de uma cobertura universal pode ser usada para dar uma versão do item 1 do Teorema 3.6, onde a desigualdade não será estrita.

Proposição 3.1. *Seja S uma superfície hiperbólica compacta de gênero $g \geq 2$. Existe uma cobertura universal $\tilde{S}$ de ordem k e de gênero $k(g-1)+1$, tal que*

$$\text{sys}(\tilde{S}) \geq \text{sys}(S).$$

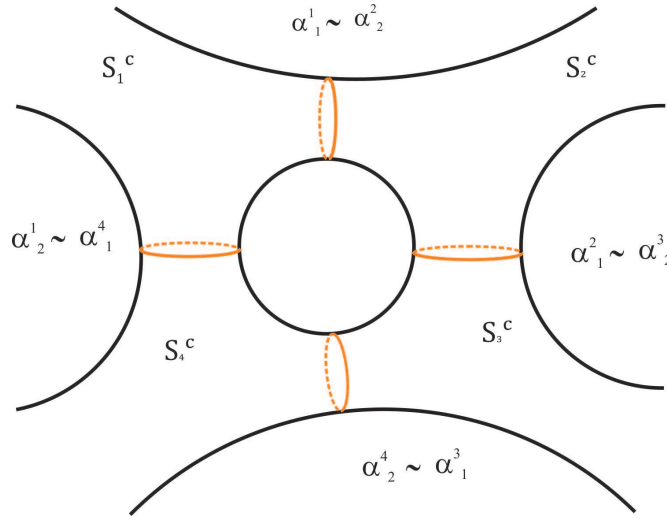


Figura 3.3: Identificação das geodésicas fronteiras de S_i^c .

Demonstração. Antes da demonstração, faremos algumas considerações. Seja S uma superfície hiperbólica compacta de gênero $g \geq 2$ e seja α uma geodésica fechada simples de S não separáveis. Seja $\wp$ uma partição de S em superfícies de assinatura $(0, 3)$, ou Y -partes, tal que α é uma curva de fronteira de um Y -parte. Seja FN_S o conjunto de coordenadas Fenchel-Nielsen correspondente para $\wp$ e tw_α o parâmetro de torção em α (veja Capítulo 3, Seção 2.5).

Para provar a proposição construímos uma nova superfície de gênero $k(g-1)+1$ de S tal que

$$\text{sys}(\tilde{S}) \geq \text{sys}(S)$$

para este fim, fazemos um corte aberto em S ao longo de α e chamamos a superfície obtida S^c que tem assinatura $(g-1, 2)$. Sejam α_1^c e α_2^c as duas geodésicas de fronteiras de S^c .

Tomando k cópias $(S_i^c)_{i=1, \dots, k}$ da superfície S^c e sejam α_1^i e α_2^i as geodésicas de fronteira em S_i^c , tal que α_1^i é a cópia de α_1^c e α_2^i é a cópia de α_2^c . Identificamos as fronteiras dos diferentes $(S_i^c)_{i=1, \dots, k}$ da seguinte maneira

$$\alpha_1^k \sim \alpha_2^1 \quad \text{e} \quad \alpha_1^i \sim \alpha_2^{i+1} \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, k-1 \quad (3.2)$$

escolhemos os k parâmetros de torção $(t_j)_{j=1, \dots, k}$ tal que

$$t_j = t\omega_\alpha \quad \text{para todo} \quad j \in \{1, \dots, k\} \quad (3.3)$$

denotamos a superfície obtida de gênero $k(g-1) + 1$ de acordo com o esquema de colagem (3.2), por

$$\tilde{S} = S_1^c + S_2^c + \dots + S_k^c \quad \text{mod (3.2)} \quad (\text{veja a Figura 3.3})$$

e denotamos por α_i a imagem de $\alpha_1^i \subset S_i^c$ em $\tilde{S}$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. Logo podemos definir

$$\phi_i : S_i^c \setminus \partial S_i^c \rightarrow S_{i+1}^c \setminus \partial S_{i+1}^c \quad \text{mod } (k)$$

uma isometria natural no interior das S_i^c . Como todos os parâmetros de torção nas colagens foram escolhidos tw_α , então os $(\phi_i)_{i=1, \dots, k}$ podem ser estendidos para uma isometria $\tilde{\phi} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$, onde

$$\tilde{S} \quad \text{mod } \tilde{\phi} \simeq S$$

logo, $\langle \tilde{\phi} \rangle$ é um grupo cíclico de ordem k gerado por $\tilde{\phi}$ e $\tilde{S}$ é uma cobertura universal de S .

Agora como o raio de injectividade $r_{inj}(M)$ de uma superfície Riemanniana fechada M , não diminui em uma cobertura universal, particularmente para superfícies hiperbólicas compactas S' , pelo Lema 2.3 temos que $r_{inj}(S') = \frac{1}{2} \text{sys}(S')$, e

$$\text{sys}(\tilde{S}) = 2r_{inj}(\tilde{S}) \geq 2r_{inj}(S) = \text{sys}(S).$$

Isso completa a prova da proposição. $\square$

Antes de mostrar o Teorema 3.6, apresentaremos alguns resultados que são necessários na demonstração.

Teorema 3.3. ([3] e [25]) *Existem somente um número finito de superfícies maximais de gênero g .*

Lema 3.2. ([21], pág.: 336) *Todas as sístoles nas superfícies $S_{\max}$ são não separáveis.*

Teorema 3.4. ([24], pág.: 588) *Seja S uma superfície maximal em $\mathcal{M}_{(1,2)}$ onde as duas geodésicas de fronteiras tem igual comprimento $2y$. Seja $2x$ o comprimento*

da sístole de S . Então

$$2 \cosh^3 x - 3 \cosh^2 x - (\cosh y + 1) \cosh x - \cosh y = 0$$

Um espectro de comprimentos simples é um conjunto $\Delta_0(S)$ ordenado de comprimentos $\{l_1 \leq l_2 \leq \dots\}$ de suas geodésicas interiores, onde l_1 é o comprimento da sístole de S .

Teorema 3.5. ([22], pág.: 227) *Seja S uma superfície hiperbólica compacta com fronteira não vazia e seja $\epsilon > 0$. Existe uma superfície $\tilde{S}$ com a mesma assinatura, e com comprimento de fronteira ϵ maior do que S e com $\Delta_0(S) < \Delta_0(\tilde{S})$.*

Agora que temos feito o Lema 3.1 e a Proposição 3.1, estamos em condição de provar o seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Se $\text{msys}(g)$ é o máximo valor que $\text{sys}(\cdot)$ pode atingir entre as superfícies hiperbólicas compactas de gênero $g \geq 2$. Então as seguintes desigualdades satisfazem:*

1. $\text{msys}(k(g-1)+1) > \text{msys}(g)$ para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$;
2. $\text{msys}(g+1) > \frac{\text{msys}(g)}{2}$;
3. Se $\text{msys}(g_1) \leq \text{msys}(g_2)$, então $\text{msys}(g_1+g_2-1) > \min \left\{ \frac{\text{msys}(g_2)}{2}, \text{msys}(g_1) \right\}$.

Demonstração. 1. $\text{msys}(k(g-1)+1) > \text{msys}(g)$.

Seja $S_{\max}$ uma superfície hiperbólica compacta maximal de gênero $g \geq 2$. Para provar a primeira parte do teorema construiremos uma nova superfície S' de gênero $k(g-1)+1$ a partir de $S_{\max}$, tal que

$$\text{msys}(g) = \text{sys}(S_{\max}) = \text{sys}(S').$$

Seja α uma sístole de $S_{\max}$, como toda sístole de uma superfície maximal é não-separável (Lema 3.2), então α é uma geodésica fechada simples não-separável. Procedemos da mesma maneira que na prova da Proposição 3.1, considerando $S_{\max} = S$ e $S' = \tilde{S}$, mas desta vez escolhemos os k parâmetros de torção tal que

$$(t_j)_{1,\dots,k}, \quad t_j \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

apresentado em (3.2) e (3.3), para obter a superfície fechada S' do gênero $k(g-1)+1$. Lembrando que α_i é a imagem de $\alpha_1^i \subset S_i^c$ em S' , devido à nossa construção e do Lema 3.1, cada α_i tem um colar C_i de largura $\frac{l(\alpha)}{4}$ (veja a Figura 3.4).

Agora mostraremos que qualquer geodésica fechada simples η em S' tem comprimento maior ou igual a $l(\alpha)$. Podemos distinguir dois casos: η intercepta transversalmente pelo menos um dos $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$ ou não.

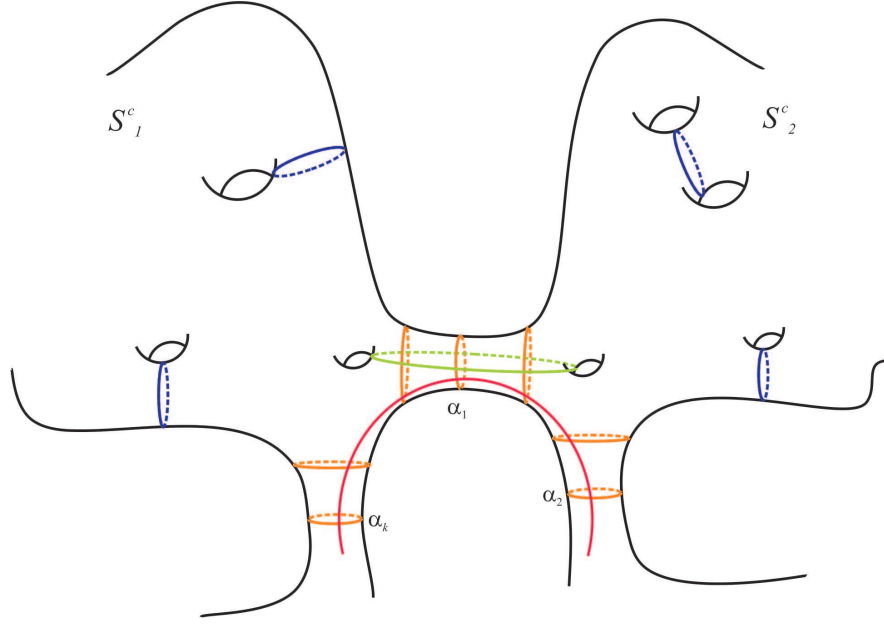


Figura 3.4: Geodésicas fechadas na superfície S' de gênero $k(g-1)+1$.

Consideremos o primeiro caso: se η intercepta um dos $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$, suponhamos que α_j é interceptado por η , então devido à geometria dos cilindros hiperbólicos η atravessa C_j . Agora como η é uma curva fechada, ela tem que atravessar pelo menos duas vezes o mesmo cilindro C_j , ou tem que atravessar C_j e um diferente colar C_i . Portanto seu comprimento de η é maior que

$$2 \cdot 2w_\alpha = 2 \cdot 2 \frac{l(\alpha)}{4} = l(\alpha).$$

Neste caso temos $l(\eta) \geq l(\alpha)$, o que implica $\text{sys}(S') = l(\alpha)$.

No segundo caso: uma geodésica fechada simples que não intercepta os $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$ transversalmente, então ou está contido no interior de uma das $(S_i^c)_{i=1,\dots,k}$ ou é um dos $(\alpha_i)_{i=1,\dots,k}$. Em qualquer caso temos que

$$l(\eta) \geq l(\alpha)$$

assim $\text{sys}(S') = l(\alpha)$. Portanto em todos os casos temos

$$\text{msys}(g) = \text{sys}(S_{\max}) = l(\alpha) = \text{sys}(S').$$

Definindo arbitrariamente os parâmetros de torção por $t = (t_1, \dots, t_k)$ observamos que S' pertence a uma família contínua de superfícies hiperbólicas compactas $(S_t)_{t \in (-1/2, 1/2]^k}$ de gênero $k(g-1)+1$ tal que

$$\text{sys}(S_t) = \text{msys}(g).$$

Isso mostra que, embora as sístoles das superfícies desta família são grandes, estas não podem ser maximais, pois isso seria uma contradição à finitude do número dessas superfícies (Teorema 3.3), portanto

$$\text{msys}(k(g-1)+1) > \text{sys}(S_t) = \text{msys}(g).$$

$$2. \text{msys}(g+1) > \frac{\text{msys}(g)}{2}.$$

Chamamos uma F -parte a uma superfície de assinatura $(1, 2)$. Seja b_1 e b_2 as geodésicas de fronteiras em F -parte. Consideramos $F_{\max}$ uma superfície cuja sístole interior tem comprimento máximo entre todas as F -partes com fronteiras γ_1 e γ_2 de igual comprimento

$$l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = b.$$

Denotemos por $\delta = \text{sys}(F_{\max})$ o comprimento da sístole interior de $F_{\max}$. Pelo Teorema 3.4 temos que

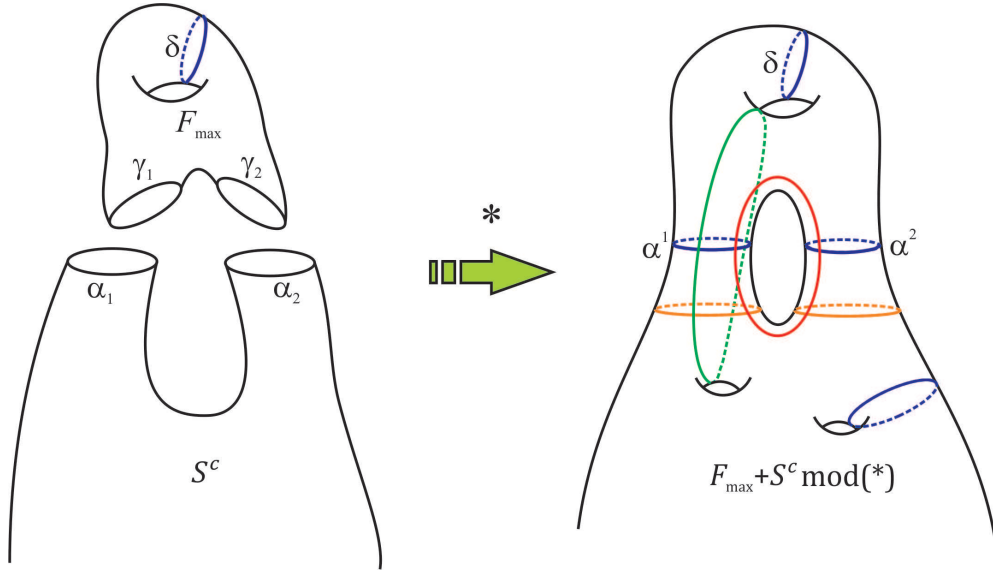


Figura 3.5: Esquema de colagem de S^c e $F_{\max}$.

$$2 \cosh^3\left(\frac{\delta}{2}\right) - 3 \cosh^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \left(\cosh\left(\frac{b}{2}\right) + 1\right) \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) - \cosh\left(\frac{b}{2}\right) = 0. \quad (3.4)$$

Nos afirmamos que $\text{sys}(F_{\max}) = s > \frac{b}{2}$. De fato, temos da equação (3.4) o seguinte

$$\frac{\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1} \left(2 \cosh^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 3 \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1\right) = \cosh\left(\frac{b}{2}\right).$$

Mas como $\cosh(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $0 < \frac{\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) + 1} < 1$, logo

$$2 \cosh^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - 3 \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1 > \cosh\left(\frac{b}{2}\right) > 0. \quad (3.5)$$

Sabemos que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, então temos em (3.5)

$$\cosh\left(\frac{b}{2}\right) < 2 \left(\frac{e^\delta + e^{-\delta} + 2}{4} \right) - 3 \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right) - 1 = \cosh(\delta) - 3 \cosh\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Dai obtemos $\cosh(\delta) > \cosh\left(\frac{b}{2}\right)$, isso implica que

$$\text{sys}(F_{\max}) = \delta > \frac{b}{2}.$$

Para mostrar a segunda parte do teorema, construiremos uma nova superfície S'' de gênero $g+1$, a partir de uma superfície maximal $S_{\max}$ de gênero $g \geq 2$ e $F_{\max}$ tal que

$$\text{sys}(S'') \geq \frac{\text{sys}(S_{\max})}{2}.$$

Agora construiremos uma superfície S'' colando uma superfície S^c da assinatura $(g-1, 2)$ que é obtida pelo corte aberto ao longo de uma sístole α em $S_{\max}$ e a superfície $F_{\max}$ que tem os comprimentos das geodésicas de fronteiras igual a $l(\alpha)$, ao longo das duas geodésicas de fronteiras de S^c . Denotamos por α_1 e α_2 a imagem das duas geodésicas de fronteiras da F -parte em S'' , que são isométricos para $F_{\max}$. Devido a nossa construção cada α_i tem meio colar $H_i \subset S^c$ de largura $\frac{l(\alpha)}{4}$.

No que segue, mostraremos que qualquer geodésica fechada simples η em S'' tem comprimento maior que $\frac{l(\alpha)}{2}$. Novamente temos dois casos: η intercepta pelo menos um dos α_i , $i = 1, 2$ transversalmente, ou não.

Para o primeiro caso, se η intercepta transversalmente um dos $(\alpha_i)_{i=1,2}$, suponhamos que η é interceptado transversalmente por α_1 , então devido à geometria do meio colar, η passa por H_1 . Além disso η tem que passar pelo menos duas vezes o mesmo meio colar H_1 , ou tem que passar H_1 e H_2 para ser uma curva fechada. Portanto neste caso o comprimento de η tem que ser maior ou igual a $2w_\alpha$, ou seja

$$l(\eta) \geq 2w_\alpha = 2\frac{l(\alpha)}{4} = \frac{l(\alpha)}{2}$$

obtendo $l(\eta) \geq \frac{l(\alpha)}{2}$, pelo que $\text{sys}(S'') \geq \frac{l(\alpha)}{2}$. De fato esta desigualdade é estrita, porque a parte de η na F -parte deve ter comprimento estritamente positivo (veja Figura 3.5).

Consideremos agora o segundo caso: seja η qualquer geodésica fechada simples que não intercepta transversalmente α_1 ou α_2 , então ou η está contido no interior de S^c , ou no interior de $F'_{\max}$, ou é um dos $(\alpha_i)_{i=1,2}$. Assim, obtemos um limite inferior para $l(\eta)$ por $\text{sys}(F'_{\max})$. Da equação 3.4 segue-se que

$$l(\eta) \geq \text{sys}(F'_{\max}) > \frac{l(\alpha)}{2}$$

implicando $\text{sys}(S'') > \frac{l(\alpha)}{2}$. Portanto em qualquer caso obtemos

$$\frac{\text{msys}(g)}{2} = \frac{\text{sys}(S_{\max})}{2} \leq \text{sys}(S'') < \text{msys}(g+1)$$

e a última desigualdade é estrita devido a nossa construção que não depende dos parâmetros de torção.

3. Se $\text{msys}(g_1) \leq \text{msys}(g_2)$, então $\text{msys}(g_1 + g_2 - 1) > \min \left\{ \frac{\text{msys}(g_2)}{2}, \text{msys}(g_1) \right\}$.

Para demonstrar a afirmação final tomamos duas superfícies maximais $S_{\max}^1$ e $S_{\max}^2$ de gêneros g_1 e g_2 respectivamente para $i \in \{1, 2\}$. Cortamos $S_{\max}^i$ ao longo da sua sístole α^i e chamamos a superfície obtida desta maneira por S^{ci} .

Como $\text{msys}(g_1) \leq \text{msys}(g_2)$ obtemos que $l(\alpha^2) \geq l(\alpha^1)$. Agora, não podemos colar diretamente estas superfícies, pois os comprimentos das geodésicas de fronteiras são diferentes. Pelo Teorema 3.5, podemos construir uma superfície de comparação S^{p1} para S^{c1} de assinatura $(g_1 - 1, 2)$ tal que:

- (a) Todas as geodésicas interiores de S^{p1} tem comprimento maior que $l(\alpha^1)$.
- (b) As geodésicas fronteiras γ_1 e γ_2 de S^{p1} tem comprimento $l(\alpha^2)$.

Identificando as fronteiras de S^{p1} e S^{c2} obtemos uma superfície S^* de gênero $g_1 + g_2 - 1$. Além disso as duas geodésicas fronteiras α_1^2 e α_2^2 de S^{c2} têm um meio colar incluído em S^{c2} de largura $\frac{l(\alpha^2)}{4}$. Devido a nossa construção, podemos aplicar um argumento semelhante do caso anterior da superfície S'' , para mostrar que

$$\text{msys}(g_1 + g_2 - 1) > \text{sys}(S^*) \geq \min \left\{ \frac{l(\alpha^2)}{2}, l(\alpha^1) \right\} = \min \left\{ \frac{\text{msys}(g_2)}{2}, \text{msys}(g_1) \right\}$$

□

Uma consequência do item 1 do Teorema 3.6 é: Se S é uma superfície compacta de gênero g , tal que $\text{sys}(S) \geq \frac{4}{3} \log(g) - c_0$, então para $l = k(g - 1) + 1$

$$\begin{aligned} \text{msys}(l) &\geq \frac{4}{3} \log(l) - \left(\frac{4}{3} \log(k) - c_0 \right) \\ &= \frac{4}{3} \log(l) - c(k), \quad \text{para todo } k \ll g. \end{aligned}$$

3.3 Superfícies com cúspides e sístoles maximais

Nesta seção denotaremos por S uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) , onde a superfície hiperbólica não compacta S é de gênero g com n cúspides, e assumiremos que $3g - 3 + n > 0$. Também denotaremos por S uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n, k) onde a superfície tem gênero g com n componentes de fronteira disjuntas, das quais k são cúspides, então $n - k$ são geodésicas fechadas simples. Seja S uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) . Seja $\text{msys}(g, n)$ o valor

$$\text{msys}(g, n) = \sup \{ \text{sys}(S) / S \text{ superfície hiperbólica não compacta de assinatura } (g, n) \}.$$

Para provar os teoremas desta seção primeiro demonstraremos o lema do colar de sístoles separáveis, em uma superfície hiperbólica com cúspides. Especifica-

mente demonstraremos que, existe uma sístole do colar grande, se a sístole separável é intersectada por outra sístole. Este lema do colar aplica-se só nesta situação especial.

Lema 3.3. *Seja S uma superfície hiperbólica não compacta de assinatura $(g, n) \neq (0, 4)$, onde $3g - 3 + n > 0$ e $n \geq 2$. Se S tem uma sístole interceptada por outra sístole, então existe uma sístole separável α que limita a superfície Y' de assinatura $(0, 3, 2)$. O meio colar maximal $H_{w_\alpha}(\alpha) \subset S$ de α no lado oposto de Y' tem largura*

$$w_\alpha > \min \left\{ \frac{l(\alpha)}{4}, \max \left\{ 1.319, \frac{l(\alpha)}{4} - \operatorname{arc\,sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\alpha)}{4} \right)} \right) \right\} \right\}. \quad (3.6)$$

Demonstração. Seja S uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) , onde (g, n) satisfaz as condições do Lema. Primeiro mostraremos que a superfície tem uma sístole separável que limita uma Y —parte Y' de assinatura $(0, 3, 2)$. Para melhor compreensão da demonstração mencionamos três resultados que usaremos:

1. Se S é uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) , então duas sístoles interceptando-se no máximo duas vezes (veja [12], Proposição 3.2).
2. Se S é uma superfície de assinatura (g, n) e duas sístoles interceptam duas vezes, então uma delas limita duas cúspides (veja [12], Proposição 3.3).
3. Se duas sístoles em uma superfície hiperbólica S' de assinatura (g, n) se interceptam duas vezes, então (veja [15])

$$\operatorname{sys}(S') > 4 \operatorname{arc\,sinh}(1) > 3,525.$$

Seja α uma sístole separável em S que é interceptada por outra sístole β . Suponhamos que α e β interceptam-se somente uma vez, então pela topologia da superfície as duas sístoles são não separáveis, o que é uma contradição, pois α é separável. Portanto α e β interceptam-se duas vezes. Logo pelo item 2 dos resultados mencionados acima, concluímos que α ou β limita uma superfície Y' de assinatura $(0, 3, 2)$. Suponhamos sem perda de generalidade que α é a geodésica que limita Y' .

Agora demonstraremos a existência do meio colar. Para isto cortamos S ao longo da sístole α . Mas como α é separável, S se descompõe em duas partes. Consideramos R a parte que é uma superfície de assinatura $(g, n - 1, n - 2)$, e o fecho $\overline{H_{w_\alpha}(\alpha)}$ do meio colar maximal $H_{w_\alpha}(\alpha)$ em R . Este meio colar maximal de α se auto intercepta no ponto p . Então existem dois arcos geodésicos δ'_1 e δ''_1 de comprimento w_α que começam perpendicularmente em α e terminam no ponto p . Estes dois arcos formam um arco geodésico suave δ_1 (veja Figura 3.6).

Os pontos extremos de δ_1 em α dividem α em duas partes, e denotaremos estes dois arcos por α' e α'' . Suponhamos, sem perda de generalidade, que α' é o arco de menor comprimento destes dois arcos, então temos

$$l(\alpha') \leq \frac{l(\alpha)}{2}.$$

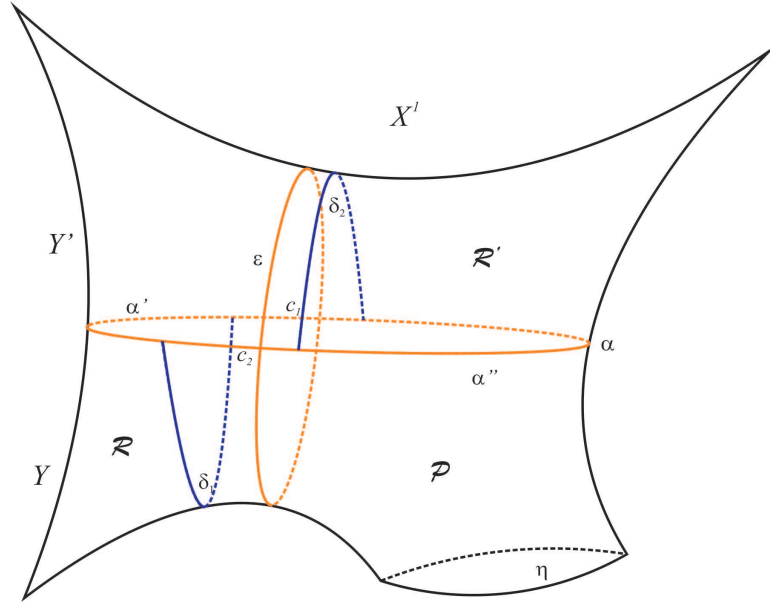


Figura 3.6: A superfície de assinatura de $(0, 4, 3)$.

Seja γ uma geodésica fechada simples na classe de homotopia livre de $\alpha' \cdot \delta_1$. Portanto temos

$$l(\gamma) < l(\alpha') + l(\delta_1) \leq \frac{l(\alpha)}{2} + 2w_\alpha. \quad (3.7)$$

Assim, pode acontecer dois casos: γ é uma geodésica fechada simples que tem comprimento diferente de zero ou γ tem comprimento zero, ou seja, ela define uma cúspide.

1. γ tem comprimento diferente de zero. Neste caso, podemos concluir que

$$w_\alpha > \frac{l(\alpha)}{4} \quad (3.8)$$

caso contrario, se $\frac{l(\alpha)}{4} \geq w_\alpha$ e pela desigualdade (3.7) temos

$$l(\gamma) < \frac{l(\alpha)}{2} + 2w_\alpha \leq \frac{l(\alpha)}{2} + \frac{l(\alpha)}{2} = l(\alpha)$$

logo $l(\gamma) < l(\alpha)$, ou seja γ é uma geodésica fechada simples de menor comprimento que a sístole. Uma contração. Isto resolve nosso primeiro caso.

2. γ tem comprimento zero. Se γ define uma cúspide, então estamos ainda neste caso. Seja η uma geodésica fechada simples na classe de homotopia livre de $\alpha'' \cdot \delta_1$. Podemos concluir que η não tem comprimento zero, caso contrario teríamos que a superfície S tem assinatura $(0, 4, 4)$, que foi excluída por hipótese. Portanto a superfície Y tem assinatura $(0, 3, 1)$, onde as curvas fronteiras são γ , η e α . Dai $Y \cup Y' = X^1 \subset S^1$ é uma superfície de assinatura $(0, 4, 3)$ (veja a Figura 3.6).

Seja δ_2 o arco geodésico de menor comprimento em Y' que liga α' a α'' . Por simetria os dois pontos finais de δ_2 em α , divide α em dois arcos, ambos

de comprimento $\frac{l(\alpha)}{2}$. Seja $\mathcal{R}'$ um quadrilátero geodésico hiperbólico em Y' com três ângulos retos, que tem um lado em δ_2 de comprimento $\frac{l(\delta_2)}{2}$, um lado em α de comprimento $\frac{l(\alpha)}{4}$ e dois lados de comprimento infinito unidos no ponto definida por uma das cúspides. $\mathcal{R}'$ pode ser interpretado como um pentágono reto, da equação (2.23), temos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}l(\delta_2)\right)\sinh\left(\frac{1}{4}l(\alpha)\right) = \cos(0) = 1. \quad (3.9)$$

Além disso podemos afirmar que

$$l(\delta_1) \geq l(\alpha')$$

pois caso contrario, se $l(\alpha') > l(\delta_1)$ temos

$$l(\alpha) \leq l(\eta) < l(\delta_1) + l(\alpha'') < l(\alpha') + l(\alpha'') = l(\alpha) \quad (3.10)$$

pois $\alpha = \alpha' \vee \alpha''$, logo em (3.10) temos $l(\alpha) < l(\alpha)$. Uma contradição.

Seja $\mathcal{R}$ um quadrilátero geodésico hiperbólico em Y com três ângulos retos, que tem um lado em δ_1 de comprimento $\frac{l(\delta_1)}{2}$, um lado em α de comprimento $\frac{l(\alpha')}{2}$ e dois dos lados de comprimento infinito unidos no ponto definida por uma cúspide. Então pela equação (2.23), no quadrilátero $\mathcal{R}'$ temos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}l(\delta_1)\right)\sinh\left(\frac{1}{4}l(\alpha')\right) = \cos(0) = 1. \quad (3.11)$$

Mas como $\frac{1}{2}l(\delta_1) \geq \frac{1}{2}l(\alpha')$, e a função $\sinh(\cdot)$ é crescente, em (3.11) obtemos

$$\sinh^2\left(\frac{l(\delta_1)}{2}\right) \geq \sinh\left(\frac{l(\delta_1)}{2}\right)\sinh\left(\frac{l(\alpha')}{4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{l(\delta_1)}{2} \geq \operatorname{arc\,sinh}(1) \quad (3.12)$$

Agora consideremos c_1 e c_2 dois arcos em α que ligam os pontos finais de δ_1 e δ_2 em α , tal que

$$l(c_1) + l(c_2) \leq \frac{l(\alpha)}{2}. \quad (3.13)$$

A existência destes arcos resulta do principio da demonstração. Agora consideremos ϵ a geodésica fechada simples em X^1 na classe de homotopia livre de $\delta_1 \cdot c_1 \cdot \delta_2^{-1} \cdot c_2$. Mas como $l(\epsilon) \geq l(\alpha)$ temos

$$l(\alpha) \leq l(\epsilon) < l(\delta_1) + l(c_1) + l(\delta_2) + l(c_2) \quad (3.14)$$

portanto por (3.13) em (3.14) temos

$$l(\delta_1) + l(\delta_2) > \frac{l(\alpha)}{2}, \quad \text{logo} \quad \frac{l(\delta_1)}{2} > \frac{l(\alpha)}{4} - \frac{l(\delta_2)}{2}. \quad (3.15)$$

Por outro lado em (3.9)

$$\frac{1}{2}l(\delta_2) = \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\alpha)}{4} \right)} \right). \quad (3.16)$$

Assim obtemos em (3.15)

$$\frac{1}{2}l(\delta_1) > \frac{1}{4}l(\alpha) - \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\alpha)}{4} \right)} \right) \quad (3.17)$$

finalmente de (3.12) e (3.17) obtemos

$$\frac{1}{2}l(\delta_1) \geq \max \left\{ \text{arc sinh}(1), \frac{1}{4}l(\alpha) - \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\alpha)}{4} \right)} \right) \right\}. \quad (3.18)$$

Observamos que a desigualdade (3.18) está perto de nosso resultado desejado. Utilizando estimativas mais refinadas para δ_1 podemos mostrar que

$$\frac{1}{2}l(\delta_1) \geq \max \left\{ 1.319, \frac{1}{4}l(\alpha) - \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{l(\alpha)}{4} \right)} \right) \right\}. \quad (3.19)$$

Para isto, seja $\mathcal{P}$ um pentágono geodésico reto em Y , que tem um lado em δ_1 de comprimento $\frac{l(\delta_1)}{2}$, um lado em α de comprimento $\frac{l(\alpha'')}{2}$ e um lado em η de comprimento $\frac{l(\eta)}{2}$, logo pela geometria de $\mathcal{P}$ e do item 1 do Teorema 2.13, obtemos

$$\sinh \left(\frac{1}{2}l(\delta_1) \right) \sinh \left(\frac{1}{2}l(\alpha'') \right) = \cosh \frac{1}{2}l(\eta). \quad (3.20)$$

Com a ajuda das equações (3.12) e (3.20), e do fato que $l(\alpha') + l(\alpha'') = l(\alpha)$, encontramos a seguinte expressão para δ_1

$$\sinh \left(\frac{1}{2}l(\delta_1) \right) = \left(\frac{\left[\cosh \left(\frac{l(\alpha)}{2} \right) + \cosh \left(\frac{l(\eta)}{2} \right) \right]^2}{\sinh^2 \left(\frac{l(\alpha)}{2} \right)} - 1 \right)^{1/2}. \quad (3.21)$$

Isto pode ser deduzido usando as fórmulas de adição de funções hiperbólicas. Como $\sinh(\cdot)$ é uma função monotonamente crescente, e $l(\eta) \geq l(\alpha)$, obtemos

$$4 \cosh^2 \left(\frac{l(\alpha)}{2} \right) \leq \left(\cosh \left(\frac{l(\alpha)}{2} \right) + \cosh \left(\frac{l(\eta)}{2} \right) \right)^2$$

pelo que obtemos a seguinte desigualdade

$$\sinh\left(\frac{1}{2}l(\delta_1)\right) \geq \left(\frac{4\cosh^2\left(\frac{l(\alpha)}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{l(\alpha)}{2}\right)} - 1\right)^{1/2}. \quad (3.22)$$

Portanto das equações (3.18), (3.22) e usando o fato que $l(\alpha) \geq 3.225$ (do item 3 dos resultados) obtemos a equação (3.19).

Finalmente combinado as desigualdades (3.19) e (3.8), conseguimos mostrar nosso lema

$$w_\alpha > \min\left\{\frac{l(\alpha)}{4}, \max\left\{1.319, \frac{l(\alpha)}{4} - \operatorname{arc\,senh}\left(\frac{1}{\sinh\left(\frac{l(\alpha)}{4}\right)}\right)\right\}\right\}.$$

□

Agora demonstraremos, para uma superfície maximal $S_{\max}$ que tem uma sístole separável, que tem outra sístole separável que a intercepta. O seguinte lema mostra isso.

Lema 3.4. *Seja $S_{\max}$ uma superfície hiperbólica maximal não compacta de assinatura $(g, n) \neq (0, 4)$, onde $3g - 3 + n > 0$ e $n \geq 2$. Se $S_{\max}$ tem uma sístole separável, então existe uma sístole separável α que limita uma superfície Y' de assinatura $(0, 3, 2)$. O meio-colar maximal $H_{w_\alpha}(\alpha)$ de α no lado oposto de Y' tem largura*

$$w_\alpha > \min\left\{\frac{l(\alpha)}{4}, \max\left\{1.319, \frac{l(\alpha)}{4} - \operatorname{arc\,senh}\left(\frac{1}{\sinh\left(\frac{l(\alpha)}{4}\right)}\right)\right\}\right\}. \quad (3.23)$$

Demonstração. Seja uma superfície maximal de assinatura (g, n) que tem uma sístole separável α e cuja assinatura satisfaz as condições do lema. Então α é intersectado por outra sístole β . Isso decorre do fato de que existe apenas um número discreto de superfícies maximais no espaço de módulos $\mathcal{M}_{(g, n)}$ de superfícies hiperbólicas de assinatura (g, n) . Caso contrario, poderia gerar uma família continua de superfícies maximais suaves, aplicando uma pequena torção ao redor de α . Uma contradição.

Agora para mostrar que, o meio-colar maximal H_{w_α} de α no lado oposto de Y' tem largura

$$w_\alpha > \min\left\{\frac{l(\alpha)}{4}, \max\left\{1.319, \frac{l(\alpha)}{4} - \operatorname{arc\,sinh}\left(\frac{1}{\sinh\left(\frac{l(\alpha)}{4}\right)}\right)\right\}\right\}$$

segue-se do Lema 3.3.

□

Um resultado que será usado na prova do Teorema 3.8 é.

Teorema 3.7. ([23], pág: 59) *Seja Q uma superfície maximal de assinatura $(1, 1)$ com geodésica de fronteira b . Então a sístole α de Q satisfaz.*

$$\cosh \frac{1}{2}l(\alpha) = \cosh \frac{1}{6}l(b) + \frac{1}{2}.$$

Agora que temos feito os dois Lemas 3.3 e 3.4, estamos em condição de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Seja $S_{\max}$ uma superfície hiperbólica não-compacta de assinatura $(g, n) \neq (0, 4)$, onde $3g - 3 + n > 0$ e $n \geq 2$ que tem uma sístole separável. Se $\text{sys}(S_{\max}) = \text{msys}(g, n)$ é o comprimento da sua sístole, então $\text{msys}(g, n) \geq 4 \arcsinh(1)$. Além disso*

1. $\text{msys}(2g, 2n - 4) > \min \left\{ \text{msys}(g, n), \max \left\{ 5.276, \text{msys}(g, n) - 4 \arcsinh \left(\frac{1}{\sinh(\frac{\text{msys}(g, n)}{4})} \right) \right\} \right\};$
2. $\text{msys}(2g + 1, n - 4) > \frac{\text{msys}(g, n)}{2};$
3. $\text{msys}(g + 1, n - 2) > \frac{\text{msys}(g, n)}{3}.$

Demonstração. Seja $S_{\max}$ uma superfície maximal de assinatura (g, n) que tem uma sístole separável e tal que (g, n) satisfaz as condições do teorema. Cortamos $S_{\max}$ ao longo da sístole α que limita uma Y -parte Y' de assinatura $(0, 3, 2)$ (veja Lema 3.4). Seja R a parte de $S_{\max}$ de assinatura $(g, n - 1, n - 2)$. Tomando duas cópias, R^1 e R^2 de R , e seja α_1 a fronteira de R^1 e α_2 a fronteira de R^2 .

1. $\text{msys}(2g, 2n - 4) > \min \left\{ \text{msys}(g, n), \max \left\{ 5.276, \text{msys}(g, n) - 4 \arcsinh \left(\frac{1}{\sinh(\frac{\text{msys}(g, n)}{4})} \right) \right\} \right\}.$

Para obter esta desigualdade, colamos R^1 e R^2 com o parâmetro de torção arbitrário, ao longo das curvas de fronteiras, para obter uma superfície R' de assinatura $(2g, 2n - 4, 2n - 4)$.

Agora mostraremos que qualquer geodésica fechada simples η tem comprimento maior ou igual a α . Assim podem acontecer dois casos: η intercepta transversalmente $\tilde{\alpha}$, ou não, onde $\tilde{\alpha}$ é a imagem de α_1 e α_2 em R' .

Caso 1: Se η intersecta transversalmente a $\tilde{\alpha}$, então pela geometria do colar η passa o colar $C_{w_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\alpha})$, ou seja passa os dois meios colares. Agora como η é uma curva fechada, ela tem que passar pelo menos duas vezes o mesmo colar $C_{w_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\alpha})$. Portanto o comprimento de η é maior que

$$2.2l(w_{\tilde{\alpha}}) = 2.2I = 4I,$$

onde $I = \min \left\{ \frac{l(\alpha)}{4}, \max \left\{ 1.319, \frac{l(\alpha)}{4} - \arcsinh \left(\frac{1}{\sinh(\frac{l(\alpha)}{4})} \right) \right\} \right\}$, isto é pelo Lema 3.4 que cada $(\alpha_i)_{i=1,2}$ tem um meio colar $H_{\alpha_i}(\alpha_i)$ de largura I . Neste caso temos $l(\eta) \geq 4I$, o que implica que $\text{sys}(R') \geq 4I$.

Caso 2: Uma geodésica fechada simples η que não intercepta transversalmente $\bar{\alpha}$, então α está contido no interior de uma das $(R^i)_{i=1,2}$, ou é $\bar{\alpha}$. Em qualquer caso, temos

$$l(\eta) \geq l(\alpha)$$

assim $\text{sys}(R') = l(\alpha)$. Portanto nos dois casos podemos concluir que

$$4I \leq \text{sys}(R').$$

Mas como o parâmetro de torção foi arbitrário, temos que R' pertence a uma família continua $(R_t)_{t \in (a,b]}$ de superfícies hiperbólicas de assinatura $(2g, 2n - 4)$ tal que

$$4I \leq \text{sys}(R_t)$$

Isso mostra que, embora as sístoles nestas superfícies sejam grandes, não podem ser maximais, isso seria uma contradição à finitude do número dessas superfícies. Portanto

$$\begin{aligned} & \text{msys}(2g, 2n - 4) > \text{sys}(R') \geq \\ & \min \left\{ \text{msys}(g, n), \max \left\{ 5.276, \text{msys}(g, n) - 4 \text{arc sinh} \left(\frac{1}{\sinh \left(\frac{\text{msys}(g, n)}{4} \right)} \right) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

$$2. \text{msys}(2g + 1, 2n - 4) > \frac{\text{msys}(g, n)}{2}.$$

Como na prova do item 2 do Teorema 3.6, seja $F_{\max}$ uma superfície de assinatura $(1, 2, 0)$, cuja sístole interior $\text{sys}(F_{\max})$ tem comprimento maximal entre todas as F -partes, com duas geodésicas de fronteira b com comprimento $l(b)$. Então

$$\text{sys}(F_{\max}) > \frac{l(b)}{2}.$$

Seja $S_{\max}$ uma superfície onde $\text{sys}(S_{\max}) = \text{msys}(g, n) = l(\alpha)$. Para $l(\alpha) = l(b)$, colamos as superfícies R^1 , $F_{\max}$ e R^2 ao longo das fronteiras, assim obtemos uma superfície R'' de assinatura $(2g + 1, 2n - 4, 2n - 4)$, onde R^1 e R^2 são cópias de R .

Denotemos por α_1 e α_2 as imagens das duas geodésicas de fronteiras da F -parte em R'' . Devido a nossa construção cada α_i tem um meio-colar maximal $H_{w_\alpha}(\alpha) \subset R^i$, $i = 1, 2$ de largura

$$w_\alpha > I.$$

Agora demonstraremos que qualquer geodésica fechada simples η em R'' tem comprimento maior que $2I$. Temos dois casos η intercepta transversalmente um dos $(\alpha_i)_{i=1,2}$, ou não.

Por argumentos semelhantes como na prova do item 2 do Teorema 3.6 temos que

$$\frac{\text{msys}(g, n)}{2} < \text{sys}(R'') < \text{msys}(2g + 1, 2n - 4).$$

$$3. \text{msys}(g + 1, n - 2) > \frac{\text{msys}(g, n)}{3}.$$

Chamamos uma superfície de assinatura $(1, 1, 0)$ uma Q -parte. Seja b a geodésica de fronteira de uma Q -parte. Seja $Q_{\max}$ uma superfície cuja sístole

interior tem comprimento maximal entre todas as Q -partes, com comprimento de fronteira igual $l(b)$. Denotemos por $\text{sys}(Q_{\max})$ o comprimento da sístole interior de $Q_{\max}$. Agora por Teorema 3.7 temos

$$\cosh\left(\frac{\text{sys}(Q_{\max})}{2}\right) = \cosh\frac{1}{6}l(b) + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sys}(Q_{\max}) > \frac{1}{3}l(b).$$

Consideramos a superfície $Q_{\max}$ com comprimento de fronteira $l(\alpha)$. Para provar a parte final do teorema, colamos R e $Q_{\max}$ ao longo das fronteiras, e obtemos uma superfície R^* de assinatura $(g+1, n-2, n-2)$. Segue das propriedades desta superfície e por argumentos semelhantes como na demonstração do Teorema 3.6 que

$$\frac{\text{msys}(g, n)}{3} < \text{sys}(R^*) < \text{msys}(g+1, n-2).$$

□

No que segui demonstraremos um lema, que vai ser importante na prova do ultimo teorema nesta seção.

Lema 3.5. *Seja S uma superfície hiperbólica não compacta de assinatura (g, n) , onde $3g - 3 + n > 0$ e $g \geq 1$. Existe uma cobertura universal $\tilde{S}$ de ordem k com assinatura $(k(g-1) + 1, kn)$ tal que*

$$\text{sys}(\tilde{S}) \geq \text{sys}(S).$$

Demonstração. Seja uma superfície hiperbólica de assinatura (g, n) , onde $3g - 3 + n > 0$ e $g \geq 1$. Para provar o lema, construímos uma nova superfície $\tilde{S}$ de assinatura $(k(g-1) + 1, kn)$ a partir de S , tal que

$$\text{sys}(\tilde{S}) \geq \text{sys}(S).$$

Seja α uma geodésica fechada simples não separável de S . Usamos a mesma construção da Proposição 3.1. Construiremos uma superfície de cobertura $\tilde{S}$ por corte e colagem ao longo de α e colando k copias da superfície cortada. Lembre-se que $\tilde{\phi}$ é uma isometria, tal que

$$S = \tilde{S} \mod \tilde{\phi} \text{ e seja } p : \tilde{S} \rightarrow S$$

a aplicação da correspondente cobertura, no qual p é uma isometria local. Agora, para provar a desigualdade inter sistólica entre $\text{sys}(\tilde{S})$ e $\text{sys}(S)$ não podemos usar o argumento do raio injectividade, pois no caso das superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides, temos que $r_{inj}(S) = 0$, enquanto que $\text{sys}(S) > 0$.

Portanto provaremos a desigualdade do lema de outra maneira. Para este objetivo observamos o seguinte:

1. A sístole em S ou $\tilde{S}$ é uma geodésica fechada simples.

2. Para qualquer geodésica fechada simples $\tilde{\gamma} \subset \tilde{S}$, temos que $p(\tilde{\gamma}) = \gamma$ é uma geodésica fechada suave. O comprimento de γ é menor ou igual comprimento de $\tilde{\gamma}$, mas γ tem sempre comprimento diferente de zero.

Agora seja $\tilde{\alpha}$ uma sístole de $\tilde{S}$ de comprimento $\text{sys}(\tilde{S})$. Então $p(\tilde{\alpha}) = \alpha'$ é uma geodésica fechada suave em S de comprimento diferente de zero. Como α' é suave, ela é uma curva de menor comprimento em sua classe de homotopia livre. Agora se α' define uma cúspide, ela teria que ter comprimento zero. Uma contradição. Portanto α' tem comprimento diferente de zero, e segue que

$$\text{sys}(\tilde{S}) = l(\tilde{\alpha}) \geq l(\alpha) \geq \text{sys}(S),$$

isso conclui nossa prova. □

O lema 3.5 nos permite provar o seguinte teorema, para o qual na demonstração só precisamos considerar $S = S_{\max}$.

Teorema 3.9. *Seja $\text{msys}(g, n)$ o valor maximal que $\text{sys}(\cdot)$ pode alcançar entre as superfícies hiperbólicas não compactas de assinatura (g, n) , onde $3g - 3 + n > 0$ e $g \geq 1$. Então*

$$\text{msys}(k(g - 1) + 1, kn) \geq \text{msys}(g, n) \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Capítulo 4

Sístoles em superfícies geradas por grupos fuchsianos

Neste capítulo apresentaremos o outro objetivo de nosso trabalho, que é calcular as sístoles¹ de superfícies geradas pelas tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$ com gênero $g \geq 2$. Nas duas primeiras seções calcularemos o comprimento das geodésicas através dos emparelhamentos das arestas dos polígonos $\mathcal{P}_{4g}$ e $\mathcal{P}_{12g-6}$ fornecidos nos trabalhos de Vieira [28] e Faria [11], das geodésicas que tem um representante na classe dos eixos da transformação hiperbólica. Uma ferramenta importante para este cálculo é o Teorema 4.1. Na Seção 4.4 faremos uma introdução de álgebra dos quatérnios, da ordem dos quatérnios e da existência de um isomorfismo entre a álgebra dos quatérnios e o grupos das matrizes. Finalmente apresentaremos a construção de Buser e Sarnak em [8]. As principais referencias são: [5], [8], [10], [11], [13], [17] e [28].

4.1 Sístole na superfície $S = \mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$

Um polígono hiperbólico regular com p arestas $\mathcal{P}_p$ é um conjunto convexo limitado por p segmentos geodésicos, com arestas de mesmo comprimento e ângulos iguais. Uma tesselação regular no plano hiperbólico é uma cobertura de todo plano, por polígonos regulares com o mesmo número de arestas. Denotaremos uma tesselação por $\{p, q\}$, onde q polígonos com p arestas encontra-se em cada vértice. Existem infinitas tesselações regulares no plano hiperbólico, e elas devem satisfazer a desigualdade $(p - 2)(q - 2) > 4$, veja [13].

Seja $PSL(2, \mathbb{C})$ o conjunto das isometrias $T : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dado por

$$T_A(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{C}, \quad \text{e } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

¹geodésicas fechadas, simples e não contráteis de menor comprimento.

Se considerarmos a isometria $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$$

então o grupo $\Gamma = f^{-1}\Gamma_p f$, é um subgrupo de $\Gamma \leq PSL(2, \mathbb{R})$, onde $\Gamma_p \leq PSL(2, \mathbb{C})$. As matrizes associadas das isometrias f e f^{-1} são

$$F = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

com $F, F^{-1} \in M(2, \mathbb{C})$. Logo usaremos a isometria f para obter os geradores de Γ em $\mathbb{H}^2$, a partir dos geradores de Γ_p em $\mathbb{D}^2$, pelo que temos $\Gamma \simeq \Gamma_p$. A isometria é dada por

$$\phi(T) = f^{-1}Tf, \quad \text{e} \quad T \in \Gamma_p,$$

$\phi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$. Além disso, podemos escrever

$$G_i = F^{-1}M_{T_i}F, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, \frac{p}{2}$$

em que os G_i são as matrizes associadas aos geradores do grupo Γ , e M_{T_i} é a matriz associada à isometria T_i . Uma explanação mais detalhada pode ser encontrada em [5] e [13]. Note que o traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é

$$Tr(G_i) = Tr(F^{-1}M_{T_i}F) = Tr(M_{T_i}). \quad (4.1)$$

Ainda, os geradores de Γ agem em $\mathbb{H}^2$ e são dados pelo seguinte resultado.

Lema 4.1. ([5], pag.:1908) *Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo fuchsiano finitamente gerado por $G_1, \dots, G_l$. Então*

$$G_i = \frac{1}{2^s} \begin{pmatrix} x_i + y_i\sqrt{\theta} & z_i + w_i\sqrt{\theta} \\ -z_i + w_i\sqrt{\theta} & x_i - y_i\sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde $G_i \in M(2, \mathbb{K})$, $s \in \mathbb{N}$ e $\theta, x_i, y_i, z_i, w_i \in K$, com $i = 1, \dots, l$ e K é um corpo de números algébricos real. Além disso, qualquer elemento $T \in \Gamma$ tem a mesma forma que os geradores de Γ .

O seguinte teorema relaciona um grupo discreto de isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ com o comprimento das geodésicas fechadas de $\mathbb{H}^2/\Gamma$.

Teorema 4.1. ([10], pág.: 78) *Seja Γ um grupo discreto de isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, tal que o quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ seja uma superfície hiperbólica compacta R . Temos que todo elemento $T \in \Gamma$ é hiperbólico e γ representa em $\mathbb{H}^2/\Gamma$ uma geodésica fechada de comprimento $l(\gamma)$, tal que*

$$Tr^2(T) = 4 \cosh^2 \left(\frac{l(\gamma)}{2} \right).$$

Pelo teorema anterior, podemos encontrar o comprimento dessas geodésicas pela seguinte igualdade

$$l(\gamma) = 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{\operatorname{Tr}(T)}{2} \right). \quad (4.3)$$

Agora consideramos $\{4g, 4g\}$ uma tesselação auto-dual com $g \geq 2$, e seja $\mathcal{P}$ o polígono hiperbólico regular de $4g$ arestas associada à essa tesselação. O polígono $\mathcal{P}_{4g}$ tessela o plano hiperbólico $\mathbb{D}^2$. Logo, para g , Γ_{4g} será um grupo que tem $\mathcal{P}_{4g}$ como domínio fundamental.

Apresentaremos para dois tipos de emparelhamentos, o primeiro é usando emparelhamento usual e o segundo é usando emparelhamento diametralmente oposto.

4.1.1 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ por emparelhamento usual

Para melhor detalhamento da construção do grupo fuchsiano Γ_{4g} usando emparelhamento usual, veja [28]. Seja g o gênero da superfície $\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$. Suponhamos que $\mathcal{P}_{4g}$ esteja centrado na origem de $\mathbb{D}^2$. Consideremos que as arestas e vértices de $\mathcal{P}_{4g}$ são dispostas na seguinte ordem cíclica fixa no sentido anti-horário $u_1, w_1, u'_1, w_1, \dots, u_g, w_{2g}, u'_g, w'_g$ e $v_1, v_2, v'_1, v'_2, \dots, v_{2g-1}, v_{2g}, v'_{2g-1}, v'_{2g}$ respectivamente, e as isometrias hiperbólicas $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ (os geradores do grupo fuchsiano Γ_{4g}) tais que

$$\alpha_i(u_i) = u'_i \quad \text{e} \quad \beta_j(w_j) = w'_j, \quad j, i = 1, \dots, g.$$

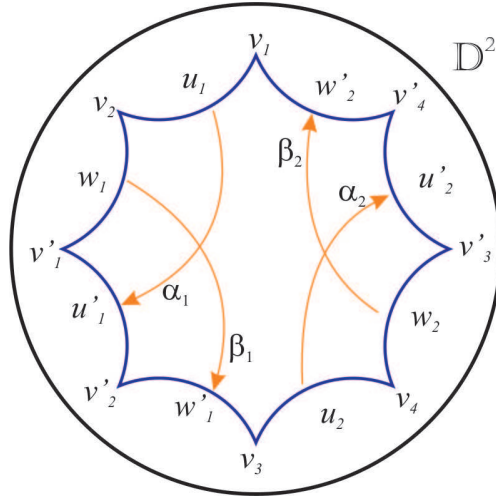


Figura 4.1: $\mathcal{P}_8$ por emparelhamento usual de arestas.

Por meio desses emparelhamentos, obtemos uma superfície compacta e orientável de gênero g . Consideremos agora ρ como sendo uma transformação elíptica

de ordem $4g$ com matriz associada

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4g}} \end{pmatrix}$$

de modo que $\rho(u_1) = w_1$ e r_k é a potência de ρ tal que

$$\rho_{r_k}(u_1) \in \{u_k, w_k, u'_k, w'_k\}, \quad k = 1, \dots, g.$$

Isto nos permite escrever os geradores de Γ_{4g} como conjugação ρ por meio de potências de ρ (veja [5]).

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \rho_{4(k-1)} \alpha_1 \rho_{4(k-1)}^{-1}, & k = 1, \dots, g \\ \beta_k &= \rho_{4k-3} \alpha_1 \rho_{4k-3}^{-1}, & k = 1, \dots, g \end{aligned}$$

em termos das matrizes temos

$$\begin{aligned} M_{\alpha_k} &= C^{4(k-1)} M_{\alpha_1} C^{-4(k-1)} & k = 1, \dots, g \\ M_{\beta_k} &= C^{4k-3} M_{\alpha_1} C^{-4k+3} & k = 1, \dots, g \end{aligned}$$

onde M_{α_k} e M_{β_k} são as matrizes correspondentes às transformações α_k e β_k respectivamente. O próximo teorema nos mostra a forma do gerador α_1 .

Teorema 4.2. ([28], pág.: 46) *Seja $\mathcal{P}_{4g}$ o polígono hiperbólico regular de $4g$ arestas, cujo grupo fuchsiano associado é Γ_{4g} . Consideremos u_1 como sendo a aresta entre os argumentos $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{(g-1)\pi}{2g}$ e α_1 a transformação hiperbólica que emparelha as arestas u_1 e u'_1 do polígono $\mathcal{P}_{4g}$. Então*

$$\alpha_1(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

onde a e b são dados por

$$\arg(a) = \frac{(g-1)\pi}{2g}; \quad |a| = \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g}$$

e

$$\arg(b) = -\frac{(2g+1)\pi}{4g}; \quad |b| = \left(\tan \left(\frac{(2g-1)\pi}{4g} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}.$$

Podemos observar que a matriz associada de α_1 é da forma

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g-1)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g-1)}{2g}} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Com isso, encontraremos as matrizes de α_{k+1} e β_{k+1}

$$\begin{aligned}
M_{\alpha_k} &= C^{4(k-1)} M_{\alpha_1} C^{-4(k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(k-1)}{g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(k-1)}{g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g-1)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g-1)}{2g}} \end{pmatrix} C^{-4(k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g+2k-3)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g-4k+5)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g-4k+5)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g+2k-3)}{2g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi(k-1)}{g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi(k-1)}{g}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g-1)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g-8k+9)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g-8k+9)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g-1)}{2g}} \end{pmatrix}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\beta_k} &= C^{4k-3} M_{\alpha_1} C^{-4k+3} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(4k-3)}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(4k-3)}{4g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g-1)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g+1)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g-1)}{2g}} \end{pmatrix} C^{-4k+3} \\
&= \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(4k+2g-5)}{4g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g-4k+4)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{-i\pi(2g-4k+4)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(4k+2g-5)}{4g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi(4k-3)}{4g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi(4k-3)}{4g}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |a|e^{\frac{i\pi(g-1)}{2g}} & |b|e^{-\frac{i\pi(2g-8k+7)}{4g}} \\ |b|e^{\frac{i\pi(2g-8k+7)}{4g}} & |a|e^{-\frac{i\pi(g-1)}{2g}} \end{pmatrix}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Logo calcularemos o traço das matrizes M_{α_k} e M_{β_k} . Além disso, observa-se que

$$\text{Tr}(M_{\alpha_k}) = \text{Tr}(M_{\beta_k}).$$

Então

$$\text{Tr}(M_{\alpha_k, \beta_k}) = 2|a| \cos \frac{(g-1)\pi}{2g} = 2 \tan \frac{(2g-1)\pi}{4g} \cos \frac{(g-1)\pi}{2g}. \tag{4.7}$$

Das equações (4.7) e (4.3), podemos calcular os comprimentos das geodésicas γ geradas pelas isometrias α_k, β_k . $\text{Tr}(\cdot)$ será os traços das matrizes associados de α_k e β_k . Com isso, calcularemos os comprimentos através do gênero.

Para $g = 2$, temos em (4.7)

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(M_{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}}) &= 2 \left(\tan \frac{3\pi}{8} \right) \left(\cos \frac{\pi}{4} \right) \\
&= 3.4143.
\end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas em (4.3)

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= 2\operatorname{arc cosh}\left(\frac{\operatorname{Tr}(M_{\alpha_{1,2,\beta_{1,2}}})}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{arc cosh}(1.70715) = 2.25683. \end{aligned}$$

Para $g = 3$, temos em (4.7)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M_{\alpha_{1,2,3,\beta_{1,2,3}}}) &= 2\left(\tan\frac{5\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3.7321. \end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas em (4.3)

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= 2\operatorname{arc cosh}\left(\frac{\operatorname{Tr}(M_{\alpha_{1,2,3,\beta_{1,2,3}}})}{2}\right) \\ &= 2\operatorname{arc cosh}(1.86605) = 2.47183. \end{aligned}$$

Pelo Capítulo 3, sabe-se que a sístole é uma geodésica fechada não contrátil de menor comprimento. Então podemos concluir que, $\operatorname{sys}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_8}\right) = 2.25683$ e $\operatorname{sys}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12}}\right) = 2.47183$.

4.1.2 $\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ por emparelhamento diametralmente oposto

Agora, consideraremos o grupo fuchsiano $\bar{\Gamma}_{4g}$, associado com a tesselação $\{4g, 4g\}$ usando emparelhamento de arestas diametralmente opostas. Para melhor detalhamento da construção do grupo fuchsiano Γ_{4g} veja [28]. As arestas e vértices de $\mathcal{P}_{4g}$ são ordenados como seguem $u_1, \dots, u_{4g}$ e $v_1, \dots, v_{4g}$, respetivamente, tal que

$$\alpha_i(u_i) = u_{i+2g} \quad \text{com } i = 1, \dots, 2g.$$

Seja $\alpha_1 \in \bar{\Gamma}_{4g}$, sua correspondente matriz associada M_{α_1} , logo o resto dos geradores são obtidos por conjugação da forma (veja [5])

$$\alpha_k = \rho_{k-1}\alpha_1\rho_{k-1}^{-1}.$$

Em termos das matrizes é

$$M_{\alpha_k} = C^{k-1}M_{\alpha_1}C^{-(k-1)}.$$

onde as isometrias ρ são da forma $\rho_{k-1} = e^{\frac{i\pi(k-1)}{2g}}$, e suas matrizes associadas são

$$C = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(k-1)}{2g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(k-1)}{2g}} \end{pmatrix}.$$

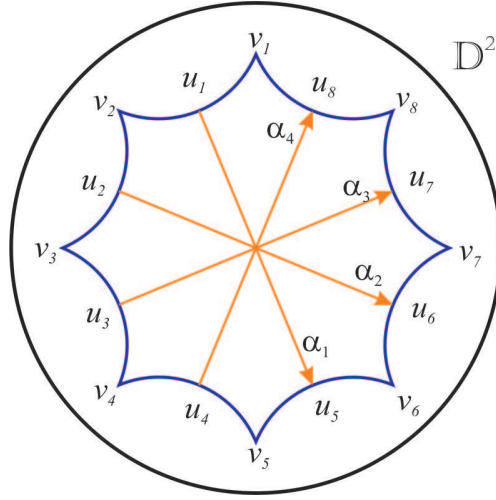


Figura 4.2: $\mathcal{P}_8$ por emparelhamento diametralmente oposto de arestas.

Agora apresentaremos o teorema, de onde obtemos a matriz M_{α_1} :

Teorema 4.3. ([28], pág.: 88) *Seja $\mathcal{P}_p$ um polígono hiperbólico regular com p arestas associadas com a tesselação $\{p, q\}$, e Γ_p o correspondente grupo fuchsiano. Se $\alpha_1 \in \Gamma_p$ tal que $\alpha_1(u_1) = u_{1+p/2}$, então a matriz M_{α_1} associada com a transformação α_1 é dada por*

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \frac{\pi}{p}}{2 \sin \frac{\pi}{p}} & \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{p} + 2 \cos \frac{\pi}{q}}}{2 \sin \frac{\pi}{p}} e^{\frac{i\pi(p+1)}{p}} \\ \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{p} + 2 \cos \frac{\pi}{q}}}{2 \sin \frac{\pi}{p}} e^{-\frac{i\pi(p+1)}{p}} & \frac{2 \cos \frac{\pi}{q}}{2 \sin \frac{\pi}{p}} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

O resto das transformações de emparelhamento são obtidos por conjugação da forma $\alpha_i = \rho_{r_i} \circ \alpha_1 \circ \rho_{r_i}^{-1}$, onde ρ_{r_i} são potências da isometria ρ .

Para nosso caso, onde $p = 4g$ e $q = 4g$, pelo teorema anterior temos

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \frac{\pi}{4g}}{2 \sin \frac{\pi}{4g}} & \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{4g} + 2 \cos \frac{\pi}{4g}}}{2 \sin \frac{\pi}{4g}} e^{\frac{i\pi(4g+1)}{4g}} \\ \frac{\sqrt{2 \cos \frac{\pi}{4g} + 2 \cos \frac{\pi}{4g}}}{2 \sin \frac{\pi}{4g}} e^{-\frac{i\pi(4g+1)}{4g}} & \frac{2 \cos \frac{\pi}{4g}}{2 \sin \frac{\pi}{4g}} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Agora calcularemos $M_{\alpha_k} = C^{k-1} M_{\alpha_1} C^{-(k-1)}$, $i = 2, \dots, 2g$. Consideremos $X = \cot \frac{\pi}{4g}$ e $Y = \frac{\sqrt{\cos \frac{\pi}{4g}}}{\sin \frac{\pi}{4g}}$. Com isso, encontremos as matrizes $M_{\alpha_{k+1}}$.

$$\begin{aligned}
M_{\alpha_k} &= C^{k-1} M_{\alpha_1} C^{-(k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(k-1)}{2g}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(k-1)}{2g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y e^{\frac{i\pi(4g+1)}{4g}} \\ Y e^{-\frac{i\pi(4g+1)}{4g}} & X \end{pmatrix} C^{-(k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} X e^{\frac{i\pi(k-1)}{2g}} & Y e^{\frac{i\pi(4g+2k-1)}{4g}} \\ Y e^{-\frac{i\pi(4g+2k-1)}{4g}} & X e^{-\frac{i\pi(k-1)}{2g}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi(k-1)}{2g}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi(k-1)}{2g}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & Y e^{\frac{i\pi(4g+4k-3)}{4g}} \\ Y e^{-\frac{i\pi(4g+4k-3)}{4g}} & X \end{pmatrix}. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Logo podemos calcular o traço das matrizes anteriores. Além disso, se observa que

$$Tr(M_{\alpha_k}) = Tr(M_{\alpha_1}).$$

Então

$$Tr(M_{\alpha_k, \alpha_1}) = 2X = 2 \cot \frac{\pi}{4g}. \tag{4.11}$$

Agora calcularemos o comprimento das geodésicas fechadas na superfície compacta $\mathbb{H}^2/\bar{\Gamma}_{4g}$, usando a equação (4.3).

Para $g = 2$, temos em (4.11)

$$\begin{aligned}
Tr(M_{\alpha_{1,2}}) &= 2 \left(\cot \frac{\pi}{8} \right) \\
&= 4.8283.
\end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas em (4.3)

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{Tr(M_{\alpha_{1,2}})}{2} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc} \cosh(2.41415) = 3.05708.
\end{aligned}$$

Para $g = 3$, temos em (4.11)

$$\begin{aligned}
Tr(M_{\alpha_{1,2,3}}) &= 2 \left(\cot \frac{\pi}{12} \right) \\
&= 7.4642.
\end{aligned}$$

Calculando o comprimento das geodésicas em (4.3)

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{Tr(M_{\alpha_{1,2,3}})}{2} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc} \cosh(3.7321) = 3.9834.
\end{aligned}$$

Pelo Capítulo 3, sabe-se que a sístole é uma geodésica fechada não contrá-

til de menor comprimento. Então podemos concluir que, $\text{sys}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_8}\right) = 3.05708$ e $\text{sys}\left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12}}\right) = 3.9834$.

4.2 Sístole na superfície $S = \mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$

Seja $\mathcal{P}_{12g-6}$ um polígono regular com $12g-6$ arestas no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ e baricentro na origem $0 \in \mathbb{D}^2$. Para melhor detalhamento da construção do grupo fuchsiano Γ_{12g-6} veja [11]. Designamos seus vértices no sentido anti-horário por $v_1, \dots, v_{12g-6}$ e suas arestas também no sentido anti-horário por

$$\tau_1, \dots, \tau_{12g-6}.$$

Consideremos as isometrias hiperbólicas que identificam os pares conforme segue [11]:

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau_1) &= \tau_{6g-2}, & \beta_1(\tau_2) &= \tau_{6g-1} \\ \alpha_{j+1}(\tau_{5j}) &= \tau_{6g+5j-3}, & \beta_{j+1}(\tau_{5j+1}) &= \tau_{6g+5j-2}, & j \in \{1, 2, \dots, g-1\} \\ \gamma_j^a(\tau_{3+5(j-1)}) &= \tau_{12g-6-(j-1)}, & \gamma_j^b(\tau_{4+5(j-1)}) &= \tau_{7+5(j-1)}, & j \in \{1, 2, \dots, g-1\} \\ \delta(\tau_{5g-2}) &= \tau_{11g-5} \\ \zeta_j^a(\tau_{6g+5(j-1)}) &= \tau_{6g-3-(j-1)}, & \zeta_j^b(\tau_{6g+1+5(j-1)}) &= \tau_{6g+4+5(j-1)}, & j \in \{1, 2, \dots, g-1\} \end{aligned}$$

Dizemos que o conjunto

$$\Phi_{12g-6} = \{\alpha_k, \beta_k, \gamma_j^a, \gamma_j^b, \zeta_j^a, \zeta_j^b / k = 1, \dots, g, j = 1, 2, \dots, g-1\}$$

é um emparelhamento para o $\mathcal{P}_{12g-6}$ (veja a Figura 4.3 quando $g = 2$). Para expressarmos geradores de Γ_{12g-6} , é suficiente conhecer um dos geradores, digamos α_1 , pois utilizando transformações elípticas conseguimos todas as outras a partir de α_1 . Por [11] (Exemplo 3.2.8) temos que

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \rho_1 \alpha_1 \rho_1^{-1} \\ \alpha_{k+1} &= \rho_{5k-1} \alpha_1 \rho_{5k-1}^{-1}, & \beta_{k+1} &= \rho_{5k} \alpha_1 \rho_{5k}^{-1} \\ \gamma_k^a &= \rho_{6g-4-(k-1)} \alpha_1 \rho_{2+5(k-1)}^{-1}, & \gamma_k^b &= \rho_{6+5(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{6g-6-5(k-1)} \\ \delta &= \rho_{5g-3} \alpha_1 \rho_{5g-3}^{-1} \\ \zeta_k^a &= \rho_{6g-4-(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{2+5(k-1)}^{-1}, & \zeta_k^b &= \rho_{6g+3+5(k-1)} \alpha_1^{-1} \rho_{3+5(k-1)}^{-1}, \end{aligned}$$

onde $k \in \{1, 2, \dots, g-1\}$ e $\rho_k = e^{\frac{i2k\pi}{12g-6}} = e^{\frac{i\pi k}{6g-3}}$.

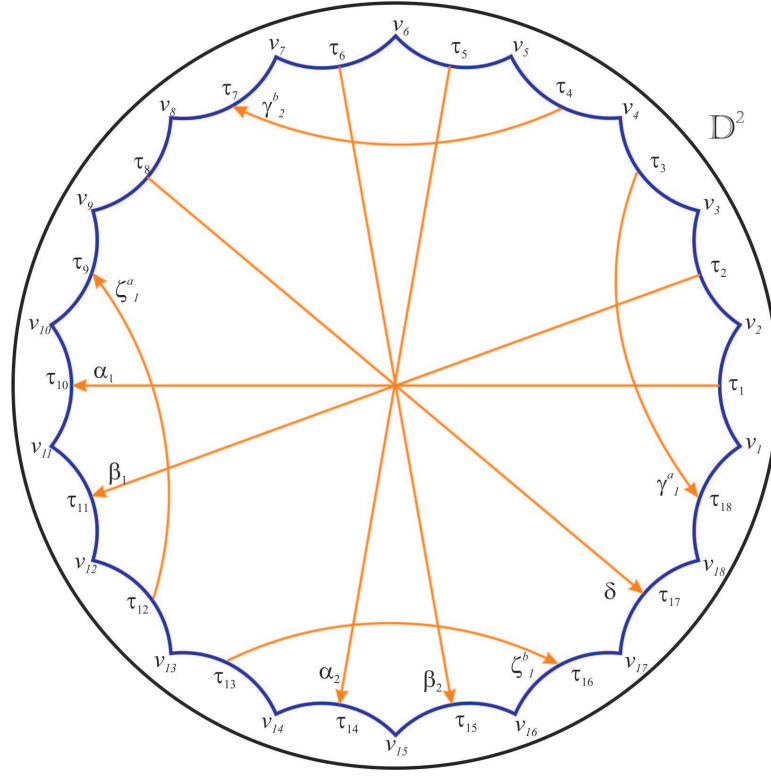


Figura 4.3: $\mathcal{P}_{18}$ emparelhado pelo conjunto Φ_{18} .

Em termos das matrizes associadas temos:

$$\begin{aligned}
 M_{\beta_1} &= CM_{\alpha_1}C^{-1} \\
 M_{\alpha_{k+1}} &= C^{5k-1}M_{\alpha_1}C^{-(5k-1)}, \quad M_{\beta_{k+1}} = C^{5k}M_{\alpha_1}C^{-(5k)} \\
 M_{\gamma_k^a} &= C^{6g-4-(k-1)}M_{\alpha_1}C^{-(2+5(k-1))}, \quad M_{\gamma_k^b} = C^{6+5(k-1)}M_{\alpha_1}^{-1}C^{6g-6-5(k-1)} \\
 M_{\delta} &= C^{5g-3}M_{\alpha_1}C^{-(5g-3)} \\
 M_{\zeta_k^a} &= C^{6g-4-(k-1)}M_{\alpha_1}^{-1}C^{-(2+5(k-1))}, \quad M_{\zeta_k^b} = C^{6g+3+5(k-1)}M_{\alpha_1}^{-1}C^{-(3+5(k-1))}.
 \end{aligned}$$

A isometria α_1 que emparelha os pares $\{\tau_1, \tau_{6g-2}\}$ é representada pela matriz

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde $Y = \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{6g-3} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)}$, por [11]. Além disso, as isometrias elípticas ρ_k e ρ_k^{-1} são representadas pelas matrizes

$$C^k = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi k}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi k}{6g-3}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C^{-k} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi k}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi k}{6g-3}} \end{pmatrix}$$

respetivamente. Com isso, encontraremos as matrizes associados $\beta_1, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \gamma_k^a,$

$\gamma_k^b, \delta, \zeta_k^a$ e ζ_k^b . Então

$$\begin{aligned}
M_{\beta_1} &= CM_{\alpha_1}C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g+1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g+1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Calculando $M_{\alpha_{k+1}} = C^{5k-1}M_{\alpha_1}C^{-(5k-1)}$

$$\begin{aligned}
M_{\alpha_{k+1}} &= C^{5k-1}M_{\alpha_1}C^{-(5k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(5k-1)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(5k-1)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-(5k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(5k-1)}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(5k+3g-2)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(5k+3g-2)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(5k-1)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-(5k-1)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(10k+3g-3)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(10k+3g-3)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Calculando $M_{\beta_{k+1}} = C^{5k}M_{\alpha_1}C^{-(5k)}$

$$\begin{aligned}
M_{\beta_{k+1}} &= C^{5k}M_{\alpha_1}C^{-5k} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(5k)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(5k)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-5k} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(5k)}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(5k+3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(5k+3g-1)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(5k)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-5k} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(10k+3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(10k+3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Calculando $M_{\gamma_k^a} = C^{6g-4-(k-1)} M_{\alpha_1} C^{-(2+5(k-1))}$

$$\begin{aligned}
M_{\gamma_k^a} &= C^{6g-4-(k-1)} M_{\alpha_1} C^{-(2+5(k-1))} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-(5k-3)} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(9g-k-4)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(9g-k-1)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-(5k-3)} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g-6k)}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(9g+4k-7)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(9g+4k-7)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g-6k)}{6g-3}} \end{pmatrix}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Agora para calcular $M_{\gamma_k^b} = C^{6+5(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{6g-6-5(k-1)}$, primeiro precisamos encontrar a matriz associada da isometria α_1^{-1} , ou seja encontraremos $M_{\alpha_1^{-1}} = M_{\alpha_1}^{-1}$. Como sabe-se que, se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

pelo que, para

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}$$

temos que

$$M_{\alpha_1}^{-1} = \frac{1}{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right)^2 - Y^2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & -Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}$$

mas como $Y = \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{6g-3} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right)}$, se pode obter que

$$\frac{1}{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right)^2 - Y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta \quad \text{onde} \quad \theta = \frac{\pi}{6g-3}.$$

$$\begin{aligned}
M_{\gamma_k^b} &= C^{6+5(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{6g-6-5(k-1)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(5k+1)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(5k+1)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & -Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{(6g-5k-1)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(5k+1)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(5k+3g)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(5k+3g)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(5k+1)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{(6g-5k-1)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(10k-3g+1)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(10k-3g+1)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g)}{6g-3}} \end{pmatrix}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Calculando $M_\delta = C^{5g-3} M_{\alpha_1} C^{-(5g-3)}$

$$\begin{aligned}
M_\delta &= C^{5g-3} M_{\alpha_1} C^{-(5g-3)} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(5g-3)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(5g-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-(5g-3)} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(5g-3)}{6g-3}} & Yie^{\frac{i\pi(8g-4)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(5g-4)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(5g-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-(5g-3)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & Yie^{\frac{i\pi(13g-7)}{6g-3}} \\ -Yie^{-\frac{i\pi(13g-7)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Calculando $M_{\zeta_k^a} = C^{6g-4-(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{-(2+5(k-1))}$

$$\begin{aligned}
M_{\zeta_k^a} &= C^{6g-4-(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{-(2+5(k-1))} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & -Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-(5k-3)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(9g-k-4)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(9g-k-4)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g-k-3)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-(5k-3)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g-6k)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(9g+4k-7)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(9g+4k-7)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g-6k)}{6g-3}} \end{pmatrix}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos $M_{\zeta_k^b} = C^{6g+3+5(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{-(3+5(k-1))}$

$$\begin{aligned}
M_{\zeta_k^b} &= C^{6g+3+5(k-1)} M_{\alpha_1}^{-1} C^{-(3+5(k-1))} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi(6g+5k-2)}{6g-3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi(6g+5k-2)}{6g-3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 & -Yie^{\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(3g-1)}{6g-3}} & \cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \end{pmatrix} C^{-(5k-2)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g+5k-2)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(9g+5k-3)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(9g+5k-3)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g+5k-2)}{6g-3}} \end{pmatrix} C^{-(5k-2)} \\
&= \csc \theta \begin{pmatrix} \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{\frac{i\pi(6g)}{6g-3}} & -Yie^{\frac{i\pi(10k+9g-5)}{6g-3}} \\ Yie^{-\frac{i\pi(10k+9g-7)}{6g-3}} & \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1\right) e^{-\frac{i\pi(6g)}{6g-3}} \end{pmatrix}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Agora calculamos o traço das matrizes obtidas anteriormente. Além disso podemos observar

$$Tr(M_{\alpha_1}) = Tr(M_{\beta_1}) = Tr(M_{\alpha_{k+1}}) = Tr(M_{\beta_{k+1}}) = Tr(\delta) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)$$

$$Tr(M_{\gamma_k^a}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right) \cos \frac{2\pi}{2g-1} (g-k)$$

$$Tr(M_{\gamma_k^b}) = Tr(M_{\zeta_k^b}) = 2 \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)}{\sin^2 \frac{\pi}{6g-3}} \cos \frac{2\pi g}{2g-1}$$

$$Tr(M_{\zeta_k^a}) = 2 \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)}{\sin^2 \frac{\pi}{6g-3}} \cos \frac{2\pi(g-k)}{2g-1},$$

onde $k = 1, \dots, g-1$. Então temos

$$Tr(M_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \delta}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right) \tag{4.21}$$

$$Tr(M_{\gamma_k^a}) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right) \cos \frac{2\pi}{2g-1} (g-k) \tag{4.22}$$

$$Tr(M_{\gamma_k^b, \zeta_k^b}) = 2 \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)}{\sin^2 \frac{\pi}{6g-3}} \cos \frac{2\pi g}{2g-1} \tag{4.23}$$

$$Tr(M_{\zeta_k^a}) = 2 \frac{\left(\cos \frac{\pi}{6g-3} + 1 \right)}{\sin^2 \frac{\pi}{6g-3}} \cos \frac{2\pi(g-k)}{2g-1}. \tag{4.24}$$

Agora calcularemos o comprimento das geodésicas fechadas na superfície compacta $S = \mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$, usando a equação (4.3).

Para $g = 2$, temos em (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24)

$$\begin{aligned} |Tr(M_{\alpha_1, \beta_1, \delta})| &= \left| 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + 1 \right) \right| = 3.8794 \\ |Tr(M_{\gamma_1^b, \zeta_1^b})| &= \left| 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + 1 \right) \cos \frac{2\pi}{3} \right| = 16.581718 \\ |Tr(M_{\zeta_1^a})| &= \left| 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} + 1 \right) \cos \frac{4\pi}{3} \right| = 16.581718. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1 calcularemos os comprimentos das geodésicas em $Tr(M_{\alpha_1, \beta_1, \delta})$, $Tr(M_{\gamma_1^b, \zeta_1^b})$ e $Tr(M_{\zeta_1^a})$. Calculando os comprimentos das geodésicas por (4.3)

$$\begin{aligned} l(\gamma_{\alpha_1, \beta_1, \delta}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\alpha_1, \beta_1, \delta})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(1.9397) = 2.56285 \\ l(\gamma_{\gamma_1^b, \zeta_1^b}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\gamma_1^b, \zeta_1^b})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(8.290859) = 5.60988 \\ l(\gamma_{\zeta_1^a}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\zeta_1^a})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(8.290859) = 5.60988. \end{aligned}$$

Para $g = 3$, temos em (4.21), (4.22), (4.23) e (4.24)

$$\begin{aligned} |Tr(M_{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \delta})| &= \left| 2 \left(\cot \frac{\pi}{15} + 1 \right) \right| = 3.95629 \\ |Tr(M_{\gamma_1^a})| &= \left| 2 \left(\cot \frac{\pi}{15} + 1 \right) \cos \frac{4\pi}{5} \right| = 3.20071 \\ |Tr(M_{\gamma_{1,2}^b, \zeta_{1,2}^b})| &= \left| 2 \frac{(\cot \frac{\pi}{15} + 1)}{\sin^2 \frac{\pi}{15}} \cos \frac{6\pi}{5} \right| = \left| 2 \frac{1.9782}{0.0433} (-0.8091) \right| = 73.9289 \\ |Tr(M_{\zeta_1^a})| &= \left| 2 \frac{(\cot \frac{\pi}{15} + 1)}{\sin^2 \frac{\pi}{15}} \cos \frac{4\pi}{5} \right| = \left| 2 \frac{1.9782}{0.0433} (-0.8091) \right| = 73.9289 \\ |Tr(M_{\zeta_2^a})| &= \left| 2 \frac{(\cot \frac{\pi}{15} + 1)}{\sin^2 \frac{\pi}{15}} \cos \frac{2\pi}{5} \right| = \left| 2 \frac{1.9787}{0.0433} (0.3091) \right| = 28.2431. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.1 calcularemos os comprimentos das geodésicas em $Tr(M_{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \delta})$, $Tr(M_{\gamma_1^a})$, $Tr(M_{\gamma_{1,2}^b, \zeta_{1,2}^b})$, $Tr(M_{\zeta_1^a})$ e $Tr(M_{\zeta_2^a})$ na equação (4.3).

$$\begin{aligned} l(\gamma_{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \delta}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \delta})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(1.9782) = 2.6087 \\ l(\gamma_{\gamma_1^a}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\gamma_1^a})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(1.6004) = 2.0946 \\ l(\gamma_{\gamma_{1,2}^b, \zeta_{1,2}^b}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\gamma_{1,2}^b, \zeta_{1,2}^b})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(37.02188416) = 8.608947 \\ l(\gamma_{\zeta_1^a}) &= 2 \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{|Tr(M_{\zeta_1^a})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc} \cosh(37.02188416) = 8.608947 \end{aligned}$$

$$l(\gamma_{\zeta_2^a}) = 2 \operatorname{arc cosh} \left(\frac{|Tr(M_{\zeta_2^a})|}{2} \right) = 2 \operatorname{arc cosh}(14.14110142) = 6.68196039.$$

Novamente pelo Capítulo 3, sabe-se que a sístole é uma geodésica fechada não contrátil de menor comprimento. Então podemos concluir que, $\text{sys} \left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{18}} \right) = 5.60988$ e $\text{sys} \left(\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{30}} \right) = 8.609847$.

4.3 Cálculo do $\text{msys}(g)$ em $\mathbb{H}^2/\Gamma_{4g}$ e $\mathbb{H}^2/\Gamma_{12g-6}$

Agora, trabalharemos no cálculo do $\text{msys}(g)$, para os casos $g = 2$ e $g = 3$ nas tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$. Lembrando do Capítulo 4, que $\text{msys}(g)$ é o valor máximo que a $\text{sys}(S)$ pode atingir dentre todas as superfícies hiperbólicas compactas de gênero g . Então das Seções 4.1 e 4.2, encontramos que:

Para $g = 2$

$$\begin{aligned} \text{msys}(2) &= \sup \{ \text{sys}(\mathbb{H}^2/\Gamma_8), \text{sys}(\mathbb{H}^2/\overline{\Gamma}_8), \text{sys}(\mathbb{H}^2/\Gamma_{18}) \} \\ &= \{2.25683, 3.05708, 5.60988\} = 5.60988. \end{aligned}$$

Para $g = 3$

$$\begin{aligned} \text{msys}(3) &= \sup \{ \text{sys}(\mathbb{H}^2/\Gamma_{12}), \text{sys}(\mathbb{H}^2/\overline{\Gamma}_{12}), \text{sys}(\mathbb{H}^2/\Gamma_{30}) \} \\ &= \{2.47183, 3.9834, 8.609847\} = 8.609847. \end{aligned}$$

Na próxima seção, apresentaremos a relação da álgebra dos quatérnios e a sístole.

4.4 Construção de Buser e Sarnak

Antes de apresentar a construção feita por Buser e Sarnak, faremos uma pequena introdução da teoria de álgebra dos quatérnios, que serão necessárias para a melhor compreensão nessa construção. Para mais detalhes da teoria de álgebra dos quatérnios veja [5] e [17].

4.4.1 Álgebra dos quatérnios e ordem dos quatérnios

Seja K um corpo de extensão de $\mathbb{Q}$. Sejam $a, b \in K - \{0\}$, então uma álgebra dos quatérnios com base $\{1, i, j, k\}$ é um conjunto da forma

$$\mathcal{A} = (a, b)_K = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b \text{ e } k = ij = -ji\}, \quad (4.25)$$

onde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in K$. Agora seja $x \in \mathcal{A}$, então o conjugado de x é da forma $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$.

Definição 4.1. *Seja $x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$, então a norma reduzida denotada por*

$Nrd(x)$ e é definida por

$$Nrd(x) = x\bar{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2$$

e o traço reduzido denotado por $Tr(x)$ e é definida por

$$Tr(x) = x + \bar{x} = 2x_0.$$

Uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (a, b)_K$ é um álgebra de divisão se, a forma quadrática $Nrd(x) = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \neq 0$ para todo $0 \neq x \in \mathcal{A}$. Podemos definir uma aplicação linear $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M(2, K(\sqrt{a}))$ que leva os elementos da base de $\mathcal{A}$ nas seguintes matrizes

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Assim temos

$$x \rightarrow \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Pode-se verificar que as matrizes (4.26) e (4.27) são linearmente independentes, e $\varphi(i^2) = aI_2$, $\varphi(j^2) = bI_2$ e $\varphi(ij) = \varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i)$, onde I_2 é a matriz identidade 2×2 , com isto concluímos que φ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre uma subálgebra da álgebra $M(2, K(\sqrt{a}))$.

Sejam $\mathcal{A} = (a, b)_K$ e $\rho : K \rightarrow F$ um homomorfismo de K sobre outro corpo F , definimos

$$\mathcal{A}^\rho = (\rho(a), \rho(b))_{\rho(K)} \quad \text{e} \quad \mathcal{A}^\rho \otimes F = (\rho(a), \rho(b))_F.$$

Se K é um corpo de números algébricos de grau n , então K é uma extensão de corpo de $\mathbb{Q}$, de grau n . Nesta forma as n imersões de F em $\mathbb{C}$, são imersões φ_i ($1 \leq i \leq n$) em $\mathbb{R}$ onde φ_1 é a identidade. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra dos quatérnios sobre K tal que para $1 \leq i \leq n$ existe $\mathbb{R}$ -isomorfismo σ_i

$$\sigma_1 : \mathcal{A}^{\varphi_1} \otimes \mathbb{R} \rightarrow M(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \sigma_i : \mathcal{A}^{\varphi_i} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (4.29)$$

onde $\mathcal{H}$ é uma subálgebra de divisão de $M(2, K(\sqrt{a}))$. Neste caso dizemos que $\mathcal{A}$ é não ramificado no lugar φ_1 , e ramificado em todos os outros lugares φ_i ($2 \leq i \leq n$). Então para qualquer $x \in \mathcal{A}$ temos

$$Nrd(x) = \det(\sigma_1(x)) \quad \text{e} \quad Tr(\sigma_1(x)) = \text{traço}(\rho_1(x)) \quad (4.30)$$

$$\varphi_i(Nrd_{\mathcal{H}}) = Nrd_{\mathcal{H}}(\rho_i(x)) \quad \text{e} \quad \varphi_i(Tr_{\mathcal{H}}(x)) = Tr_{\mathcal{H}}(\sigma_i(x)). \quad (4.31)$$

Definição 4.2. *Seja O_K o anel de inteiros em K . Uma ordem da álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ é um anel com unidade, que é um módulo finitamente gerado.*

Portanto consideremos $O_K \subset K$ como um anel de K , e a álgebra $\mathcal{A} = (a, b)_K$, com $a, b \in R$, então

$$\mathcal{O} = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k/x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

é uma ordem em $\mathcal{A}$ e denotaremos por $\mathcal{O} = (a, b)_{O_K}$. Agora consideremos $\mathcal{O}$ uma ordem dentro da álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$, o conjunto

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} / \text{Nrd}(x) = 1\}$$

é o grupo de norma reduzida 1. Para qualquer ordem $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{O}^1)$ é um subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$, e

$$\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}) = \sigma_1(\mathcal{O}^1) / \{\pm I_2\} \quad (4.32)$$

é um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$

Teorema 4.4. ([17], pág.: 119) $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O})$ é um grupo fuchsiano.

Teorema 4.5. ([17], pág.: 129) Suponhamos que um grupo fuchsiano Γ é derivado de um álgebra de divisão dos quatérnios. Então o espaço $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é compacto.

Podemos observar como $\mathcal{O}$ é uma ordem sobre O_K , em particular contém O_K . Um ideal $I \triangleleft O_K$ define um ideal $I\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}$, daí obtemos um anel pelo quociente $\mathcal{O}/I\mathcal{O}$. O principal subgrupo de congruência em $\mathcal{O}$ com respeito a um ideal $I \triangleleft O_K$ é por definição, o Kernel do homomorfismo $\psi : \mathcal{O}^1 \rightarrow (\mathcal{O}/I\mathcal{O})^*$ induzido pela projeção natural $\pi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/I\mathcal{O}$. Um subgrupo de congruência é qualquer subgrupo de $\mathcal{O}^1$ contendo o principal subgrupo de congruência.

4.4.2 Teorema de Buser e Sarnak

Teorema 4.6. ([8], Seção. 4) Seja Γ um grupo fuchsiano co-compacto em $PSL(2, \mathbb{R})$ obtido por uma álgebra de divisão dos quatérnios $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}}$ para inteiros a, b positivos. Seja $\Gamma(p)$ para primos ímpares p , o principal subgrupo de congruência. Então a família de superfícies hiperbólicas compactas $S_p = \mathbb{H}^2/\Gamma(p)$ satisfaz $g(S_p) \rightarrow \infty$ quando $p \rightarrow \infty$, e existe algum c , independente de p , tal que

$$\text{sys}(S_p) \geq \frac{4}{3} \log(g(S_p)) - c.$$

Demonstração. Para construir superfícies com sístole grande Buser e Sarnak fizeram da seguinte maneira. Seja uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$ para a, b inteiros positivos, definidos da seguinte maneira.

$$\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}} = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k/i^2 = a, j^2 = b \text{ e } k = ij = -ji\}, \quad (4.33)$$

onde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}$. Agora escolhendo a e b tal que a norma reduzida

$$\begin{aligned} \text{Nrd}_{\mathcal{A}}(x) &= \text{Nrd}_{\mathcal{A}}(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) \\ &= x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Para $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^4$, $x \neq 0$. Neste caso $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão. Sejam $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ um anel de $\mathbb{Q}$ e uma ordem dos quatérnios $\mathcal{O} = (a, b)_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{Q}}$ que é um anel de $\mathcal{A}$. Agora consideremos um grupo $\tilde{\Gamma}$ de todos os $x \in (a, b)_{\mathbb{Z}}$ com $Nrd_{\mathcal{O}}(x) = 1$. Logo para um p primo ímpar definimos o subgrupo de congruência $\tilde{\Gamma}(p)$ de $\tilde{\Gamma}$ por

$$\tilde{\Gamma}(p) = \{x \in \tilde{\Gamma} / x \equiv 1 \pmod{(p)}\}$$

Como existe um isomorfismo de $\tilde{\Gamma}$ para $SL(2, \mathbb{R})$ dado por

$$x \rightarrow \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

o temos que os correspondentes grupos em $PSL(2, \mathbb{R})$ de $\tilde{\Gamma}$ e $\tilde{\Gamma}(p)$ serão denotados por Γ e $\Gamma(p)$ respectivamente. Desde que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão, temos que o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é compacto pelo Teorema 4.5, além disso como $\Gamma(p) \subset \Gamma$ também temos que $S_p = \mathbb{H}^2/\Gamma(p)$ é uma superfície hiperbólica compacta. O gênero g_p de S_p pode ser escrito da forma

$$g_p = p(p-1)(p+1)v + 1,$$

onde $v > 0$ depende de a e b fixados no início. Para calcular a sístole de S_p que é, uma geodésica fechada não contrátil de menor comprimento, com a métrica hiperbólica, segue-se da seguinte maneira. Se

$$x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \tilde{\Gamma}(p)$$

como $p|x_i$ para $i = 1, 2, 3$ e $Nrd_{\mathcal{A}} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = 1$, temos $x_0^2 \equiv 1 \pmod{(p^2)}$.

Se $x \neq \pm 1$, então $x_0 \not\equiv \pm 1$, logo

$$|x_0| \geq p^2 - 1. \quad (4.35)$$

Isto é, para uma isometria $T \in \Gamma(p)$, $T \neq Id$ segue-se

$$|Tr(T)| \geq 2p^2 - 2. \quad (4.36)$$

Pelo que podemos concluir, que toda isometria $T \in \Gamma(p)$ é hiperbólica, logo $\mathbb{H}^2/\Gamma(p)$ é uma superfície hiperbólica compacta. Daí a sístole de S_p satisfaz

$$\text{sys}(S_p) \geq 2 \log p^2$$

pelo Teorema 4.1. Como $g_p = p(p-1)(p+1)v + 1$ se pode concluir que

$$\text{sys}(S_p) \geq \frac{4}{3} \log(g(S_p)) - c,$$

onde c é independente de p . □

Considerações Finais

Ao longo do nosso trabalho, o objetivo foi estudar algumas desigualdades sistólicas em superfícies hiperbólicas compactas de gênero $g \geq 2$ com sístoles máximas, para o qual utilizamos a técnica de corte e colagem para construir superfícies hiperbólicas compactas com sístole grande a partir de superfícies máximas, fornecido pelo artigo [19], conforme está feito no Capítulo 3. Da mesma forma apresentamos desigualdades semelhantes para superfícies hiperbólicas não compactas com cúspides.

Também apresentamos no Capítulo 4, baseado nos trabalhos [11] e [28], uma maneira de calcular as sístoles em superfícies hiperbólicas geradas pelas tesselações $\{4g, 4g\}$ e $\{12g - 6, 3\}$ para $g \geq 2$.

Neste momento, temos condições de dizer que buscar desigualdades sistólicas não é uma tarefa fácil, mas pelo menos encontramos algumas delas. No entanto, para tesselação do tipo $\{p, q\}$, podemos obter os valores de algumas dessas sístoles, que podem ser calculadas de maneira análoga ao que foi no Capítulo 4.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, J. W.: *Hyperbolic Geometry*. Springer - Verlag (2006).
- [2] AKROUT, H.: *Singularités topologiques des systoles généralisées*. Topology Vol. 42 (2003), 291-308.
- [3] BAVARD, C.: *Systole et invariant d'Hermite*. J. Reine. Angew. Math. Vol. 482 (1997), 93-120.
- [4] BEARDON, A. F.: *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer (1983).
- [5] BENEDITO, C. W. & PALAZZO, P. & INTERLANDO, J. C.: *An algorithm to construct arithmetic Fuchsian groups derived from quaternion algebras and the corresponding hyperbolic lattices*. J.P.A Algebra. Vol. 220 (2016), 1902-1923.
- [6] BORTHWICK, D.: *Spectral Theory of Infinite-Area Hyperbolic Surfaces*. Department of Mathematics and Computer Science, Emory University Atlanta, USA (2009).
- [7] BUSER, P.: *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*. Progress in mathematics (106), Birkhäuser Verlag, Boston (1992).
- [8] BUSER, P. & SARNAK, P.: *On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J.H. Conway and N.J.A. Sloane)*. Invent. Math. Vol. 117 (1994), 27-56.
- [9] DONALDSON, S.: *Riemann Surfaces*. Royal Society Research Professor Imperial College London, Oxford University (2011).
- [10] DRUMOND, F. D. *Sístole em superfícies Geradas pela Tesselação $\{8g-4, 4\}$* . Dissertação de Mestrado (2015).
- [11] FARIA, M. B.: *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2005.
- [12] FANONI, F. & PARLIER, H.: *Systoles and kissing numbers of finite area hyperbolic surfaces*. Algebraic & Geometric Topology Vol. 15 3409-3433 (2015).
- [13] FIRER, M.: *Grupos Fuchsianos*. Notas de aula, Departamento de Matemática, IMECC-UNICAMP (1999).

- [14] GENDULPHE, M.: *Déoupages et inégalités systoliques pour les surfaces hyperboliques à bord*. Geometriae Dedicata 142(1), 23-35 (2009).
- [15] GAUGLHHOTER, T. & SEMMLER, K.-D.: *Trace coordinates of Teichmüller space of Riemann surfaces of signature (0, 4)*. Conform. Geom. Dyn. Vol. 9, 46-75 (2005).
- [16] JOST, J.: *Compact Riemann Surfaces. An Introduction to contemporary Mathematics*. Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Germany (2002).
- [17] KATOK, M.: *Fuchsian Groups*. University of Chicago press (1992).
- [18] KATZ, M. & SCHAPS, M. & VISHNE, U.: *Logarithmic growth of systole of arithmetic Riemann surfaces along congruence subgroups*. J. Differ. Geom. 76(3), 399-422 (2007).
- [19] HUGO, A. & BJOERN, M., *Construction of hyperbolic Riemann surfaces with large systoles*. J. Geom, Montpellier, France, (2015).
- [20] MAKISUMI, S.: *A note on Riemann surfaces of large systole*. J. Ramanujan Math. Soc. 28(3), 359-377 (2013).
- [21] PARLIER, H.: *The homology systole of hyperbolic Riemann surfaces*. Geom. Dedicata 157(1), 331-338 (2012).
- [22] PARLIER, H.: *Lengths of geodesics on Riemann surfaces with boundary*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Vol.30 (2005), 227-236.
- [23] PARLIER, H.: *On the geometry of simple closed geodesics*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (2004).
- [24] SCHMUTZ, S. P.: *Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces*. J. Geom. Anal. Vol. 4 (1994), 207-218.
- [25] SCHMUTZ, S. P.: *Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length*. Geom. Funct. Anal. Vol.3 (1993), 564-631.
- [26] SCHMUTZ S. P.: *Systoles on Riemann surfaces*. Manuscripta Math. Vol.85 (1994), 429-47.
- [27] SEPPLA, M. & SORVALLI, T.: *Geometry of Riemann Surfaces and Teichmüller Spaces*. Academy of Finland Helsinki, Finland (1991).
- [28] VIEIRA, V.L.: *Arithmetic Fuchsian groups identified in quaternion orders for signal constellations construction*, Tese de Doctorado, FEEC-UNICAMP, 2007.