

NEY MARÇAL BARRAZ JUNIOR

MONOPOLOS TIPO-DIRAC EM UMA
ELETRODINÂMICA COM VIOLAÇÃO DAS
SIMETRIAS DE LORENTZ E CPT

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para a obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2007

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

B269m
2007

Barraz Junior, Ney Marçal, 1979-

Monopolos tipo-Dirac em uma Eletrodinâmica com
violação das simetrias de Lorentz e CPT / Ney Marçal
Barraz Junior. – Viçosa, MG, 2007.

xii, 80f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Winder Alexander de Moura Melo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 78-80.

1. Monopolo magnético. 2. Eletrodinâmica. 3. Maxwell,
Equações de. 4. Teoria de campos (Física). 5. Simetria
(Física). I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22.ed. 538

NEY MARÇAL BARRAZ JUNIOR

**MONOPOLOS TIPO-DIRAC EM UMA ELETRODINÂMICA COM VIOLAÇÃO DAS
SIMETRIAS DE LORENTZ E CPT**

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física Aplicada
para obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

APROVADA: 11 de julho de 2007



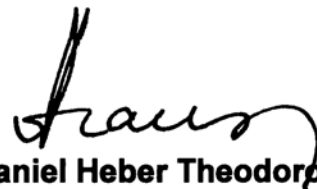
**Prof. Afrânio Rodrigues Pereira
(Co-orientador)**



Prof. Olivier Piguet



Prof. José Abdalla Helayel-Neto



Prof. Daniel Heber Theodoro Franco



**Prof. Winder Alexander de Moura Melo
(Orientador)**

À minha família,

Loiva Neugebauer Barraz e

Andréia Neugebauer Barraz.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por ter me dado força e saúde, e ter permitido que eu fosse capaz de desenvolver esse trabalho;
- A minha mãe, Loiva Neugebauer Barraz que me motivou nos momentos mais difíceis, pelo amor, amizade e por sempre ter trabalhado para que eu pudesse chegar até aqui, espero que tenho correspondido a tanta dedicação;
- A minha irmã, Andréia Neugebauer Barraz que me motivou e me forneceu apoio financeiro quando não havia bolsa;
- Ao professor Winder Moura Melo pela orientação e por acreditar em minha capacidade de estudar;
- Ao professor Helder por ter se mostrado um grande amigo em um momento de instabilidade na minha vida pessoal;
- Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFV;
- A todos os amigos do curso de Física;

- Aos amigos do mestrado: Jaqueline, Sandro, Pablo, Danielle, Daniel, Kenedy, Leandro, Alisson, Jefferson, Júlio, Fábio, Luciano, Elisabeth, Joaquim, Tatiana e entre outros que não lembro momentaneamente;
- Ao grande Daniel, que foi guerreiro e lutador durante o seu mestrado, por me ajudar no LaTeX;
- Aos amigos de longe, que mesmo longe foram peças fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui;
- Aos meus protetores. Das dimensões não visíveis a nós, vem uma grande energia que me fortalece, conforta e me faz levantar de todas as quedas que tive ao decorrer da vida. Agradeço as entidades que me protegeram e principalmente as que andam comigo;
- A CAPES pelo suporte financeiro.

BIOGRAFIA

Nasci em terras gaúchas, na cidade de Pelotas em 28 de junho de 1979, filho de Ney Marçal Barraç e Loiva Neugebauer Barraç. Tenho 3 irmãos, os dois mais velhos seguiram a profissão do meu pai, chapiadores. Andréia, minha irmã, por motivação da minha mãe concluiu a graduação em Odontologia e hoje é especialista em Ortodontia. Deste de pequeno sempre tive curiosidade de como funcionavam os objetos que nos rodeia e como era o comportamento dos planetas. Aos 17 anos, perdi meu pai. Quando tive vontade de viajar no tempo, então parti atrás de conhecimentos para poder fazer a grande viagem de volta ao passado. Assim, realizei vestibular para Física na Fundação Universidade Federal do Rio Grande-RS (FURG), onde passei quatro anos e seis meses de minha vida correndo atrás de conhecimentos, de uma vida melhor e neste período tendo vários problemas, os quais marcaram foram: a falta de dinheiro (a ponto de trancar a faculdade), a distância entre a faculdade e minha moradia (eram 4 horas por dia dentro do ônibus viajando e mais 1 hora caminhando), as várias namoradas que deixei por causa da faculdade, as noites acordadas para vencer todas as provas. Ao acabar a graduação, me orgulhei em colar grau sozinho, pois era o único formando da minha turma de vestibular e dos colegas de curso, onde o

grau de dificuldade do curso de Física era e é enorme. Com porte do diploma, me escrevi para o Mestrado em Física na Universidade Federal de Viçosa (UFV). Ao chegar nesta cidade estranha para mim, sofri e sofro com a falta da minha família, com as temperaturas mais elevadas, com a falta de dinheiro que tive aqui. Pois cheguei sem bolsa e nenhum tipo de ajuda financeira do governo e só fui contemplado com uma bolsa depois de 11 meses de mestrado, e para me sustentar trabalhei de professor em cursos de pré-vestibular e como monitor nível II na UFV. Ao contrário de todos os meus colegas de mestrado, fiquei o período todo de mestrado trabalhando e estudando ao mesmo tempo. Agora, neste mês de Julho, me orgulho novamente em ter conseguido vencer todas as dificuldades e por ter conseguido escrever esta dissertação. Atualmente trabalho como professor substituto no Departamento de Física da UFV e pretendo seguir os meus estudos.

SUMÁRIO

RESUMO	x
ABSTRACT	xii
Introdução	1
1 Monopolo Magnético	6
1.1 Equações de Maxwell	6
1.2 Monopolo Magnético	10
1.2.1 Introdução aos Monopolos Magnéticos na Eletrodinâmica Clássica	10
1.2.2 Corda do Monopolo Magnético	15
1.2.3 Transformação de Calibre generalizada e a derivação, da Condição de Dirac	18
2 O Modelo em Estudo	21
2.1 A Lagrangeana e alguns de seus aspectos básicos	21
2.2 Dinâmica do modelo	23
2.3 O Tensor de Energia-Momento	25

2.4	Força Eletromagnética e a Assimetria entre Fontes Elétricas e Magnéticas	28
2.5	Aparente Inconsistência de Monopolos Magnéticos no Modelo	30
3	Solução do Problema: Como Introduzir Fontes Magnéticas no Modelo em Questão	32
3.1	Solução do Problema do Modelo	32
3.2	Redução Dimensional para $(2+1)$ dimensões	36
	Conclusão e Perspectivas	41
A	Notação de Tensores	44
B	Transformações de Calibre	54
C	Simetrias de Lorentz e CPT, e Suas Violações	58
C.1	Simetria de Lorentz	58
C.2	Simetria CPT	61
C.2.1	Teorema da Simetria CPT	64
C.3	Quebra das Simetrias de Lorentz e CPT no Modelo em Estudo	65
C.3.1	Verificando a Simetria de Lorentz	65
C.3.2	Verificando a Simetria CPT	67
D	Detalhes de Cálculos Realizados	72
D.1	Cálculo do Tensor Canônico de Energia-Momento	72
D.2	Verificação da Conservação do Tensor de Energia-Momento	75
D.3	Redução Dimensional de $(3 + 1)D$ para $(2 + 1)D$	75

RESUMO

BARRAZ, Ney Marçal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Julho de 2007.
Monopolos tipo-Dirac em uma Eletrodinâmica com violação das simetrias de Lorentz e CPT. Orientador: Winder Alexander de Moura Melo. Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Marcelo Lobato Martins.

Nesta dissertação estudamos monopolos magnéticos numa estrutura de uma Eletrodinâmica que violam as simetrias de Lorentz e CPT, em $(3+1)D$. Este é o modelo de Maxwell estendido por um termo do tipo Chern-Simons, $b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu$, que respeita a transformação de calibre mas viola as simetrias de Lorentz e CPT (como consequência, a dualidade é perdida). O interesse principal concentra na análise do modelo na presença de monopolos magnéticos tipo-Dirac, de modo que a identidade de Bianchi seja quebrada, que nos resulta na aparente não-conservação da carga elétrica. A inconsistência pode ser contornada considerando que na presença de monopolos “carregam” com eles uma corrente extra. Uma redução dimensional do modelo para $(2+1)D$ é considerado na presença de ambas as fontes, magnéticas e elétricas, e com o termo de violação da simetria de Lorentz e CPT, onde uma condição da quantização que envolve o remanescente escalar de b_μ é obtido. Também, é indicado que a quebra da dualidade pode ser associado com uma assimetria entre fontes elétricas e magnéticas neste

cenário, de modo que a força eletromagnética experimentada por um pólo magnético seja suplementada pelo termo extra, proporcional a b_μ , quando comparada com uma carga elétrica.

ABSTRACT

BARRAZ, Ney Marçal, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2007. **On Dirac-like Monopoles in a Lorentz and CPT-violating Electrodynamics.** Adviser: Winder Alexander de Moura Melo. Co-advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Marcelo Lobato Martins.

We study magnetic monopoles in a Lorentz- and CPT-odd electrodynamic framework in (3+1) dimensions. This is the standard Maxwell model extended by means of a Chern-Simons-like term, $b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu$, which respects gauge but violates both Lorentz and CPT symmetries (as a consequence, duality is also lost). Our main interest concerns the analysis of the model in the presence of Dirac monopoles, so that the Bianchi identity no longer holds, which naively yields the non-conservation of electric charge. Since gauge symmetry is respected, the issue of charge conservation is more involved. Actually, the inconsistency may be circumvented, if we assume that the appearance of a monopole induces an extra electric current. The reduction of the model to (2+1) dimensions in the presence of both the magnetic sources and Lorentz-violating terms is presented. There, a quantization condition involving the scalar remnant of b_μ , say, the mass parameter, is obtained. We also point out that the breaking of duality may be associated with an asymmetry between electric and

magnetic sources in this background, so that the electromagnetic force experienced by a magnetic pole is supplemented by an extra term proportional to b_μ , whenever compared to the one acting on an electric charge.

Introdução

Nós, seres vivos, habitamos uma Natureza cheia de fenômenos enigmáticos. Um destes fenômenos é a assimetria incomum entre o magnetismo e a eletricidade: não existem (ou seja, ainda não foram detectados experimentalmente) fontes magnéticas para compararem com as fontes elétricas, as quais possuem cargas negativas ou positivas, sendo que a carga total de um sistema isolado é conservada. Para termos uma idéia das fontes magnéticas podemos imaginar uma barra imantada que, como sabemos, possui em cada extremo um “pólo magnético” por onde se atraem ou se repelem quando aproximados. Estes pólos são chamados de pólo norte e pólo sul, e possuem um comportamento como as cargas elétricas, positiva e negativa. Esta configuração é um exemplo de dipolos magnéticos, as linhas dos campos magnéticos são contínuas do pólo norte ao sul. Ao partirmos esta barra, obtemos duas novas barras imantadas, sem obtermos um pólo norte e sul isolados. Entretanto, se fosse possível partir esta barra de tal maneira que obtivéssemos um pólo norte e sul isoladamente, obteríamos monopolos magnéticos.

Ainda na Natureza, possuímos várias simetrias. Estas simetrias podem serem definidas por: uma característica que pode ser observada em algumas formas geométricas,

equações matemáticas e entre outros. Existirá simetria se uma mudança num dado sistema que mantém as características essenciais do sistema inalteradas; por exemplo, num determinado arranjo de cargas elétricas, se trocarmos o sinal de cada uma das cargas elétricas aí presentes, o comportamento elétrico do sistema permanecerá inalterado. Algumas simetrias mais utilizadas na física são a simetria de Lorentz e CPT. A qualidade imutável, ou invariável, das leis da física para diferentes observadores revela uma simetria do espaço e tempo (espaço-tempo), chamada simetria de Lorentz. Esta simetria, não se baseia na aparência similar dos objetos (simetrias geométricas), mas expressa a imutabilidade das leis da física sob rotações e “boosts”. Ou seja, um observador vê as mesmas leis da física atuarem quem quaisquer que sejam sua orientação (rotação) ou velocidade (boost). Quando vigora a simetria de Lorentz, o espaço-tempo é isotrópico, no sentido de que todas as direções e movimentos uniformes são equivalentes e portanto nenhuma direção e movimento é especial. Outra simetria fundamental do espaço-tempo é conhecida como simetria CPT. Esta simetria é composta de três simetrias: C seria de conjugação de carga, faz um intercâmbio de partículas e anti-partículas; P seria da inversão de paridade, faz a inversão das coordenadas do sistema considerado; e T seria a reversão temporal. Um teorema matemático demonstra que, em uma teoria de campo quântico, a simetria CPT precisa se sustentar sempre que a simetria de Lorentz for obedecida.

Em 1931, Dirac apresentou um trabalho [1], onde considera monopolos magnéticos não-massivos em uma Eletrodinâmica Clássica, estes monopolos possuem estruturas de singularidades fisicamente não-detectáveis que são descritas pelo potencial vetor associado ao campo magnético. Na atualidade, existem esforços dos pesquisadores para

encontrar os efeitos dos monopolos magnéticos, estas pesquisas acabam sendo classificadas pelas teorias utilizadas (Abeliana e não-Abeliana, por exemplo) e em várias dimensões do espaço-tempo. Além do monopolo magnético tipo-Dirac, possuímos os monopolos do tipo-'t Hooft-Polyakov que é estudada na Referência [2], onde o modelo não-Abeliana em $SO(3)$ com violação das simetrias de Lorentz e CPT.

Na Física de Altas Energias um “bom modelo” espera ser invariante sobre as simetrias de calibre, Lorentz e CPT. Mas nem todas as teorias precisam obedecer tais simetrias, por exemplo, em uma formulação não perturbativa, é feita uma correção radiativa do férmion com a violação de Lorentz e CPT em um setor induzido a adição do termo tipo-Chern-Simons, $b_\mu \neq 0$, para a ação eletromagnética, [3]. Na Astrofísica, uma pesquisa sobre Teoria de Energia Escura foi detectadas experimentalmente pelas lentes do telescópio espacial Hubble o comportamento da energia escura, sendo um dos maiores enigmas cósmicos. Esta Teoria nos afirma que o universo é composto de 70% de energia escura, 25% de matéria escura e apenas 5% de matéria visível (que é a matéria estudada na física) [5]. Assim, temos uma liberdade enorme de estudar modelos que ainda não estejam detectados experimentalmente até o presente momento, como o modelo estudado por nós que trata de uma partícula hipotética (monopolo magnético) ainda não observada.

Nesta dissertação, vamos realizar uma discussão sobre a introdução de monopolos magnéticos em uma Eletrodinâmica Abeliana. Nos últimos tempos, tem sido alegado na literatura que os monopolos tipo-Dirac não pode ser adequadamente introduzido nesta estrutura, uma vez que sua presença implica a não-conservação de carga elétrica. Então um dos nossos objetivos será observar que essa não-conservação,

onde demonstraremos que esta incoerência pode ser contornada, desde o aparecimento do monopolo seja seguida por uma corrente elétrica extra, análoga que acontece em $(2 + 1)D$, na Eletrodinâmica de Maxwell-Chern-Simons. A fim de explorar as semelhanças e diferenças entre as teorias presentes e a não-conservação da carga elétrica na presença de fontes magnéticas, realizamos uma redução dimensional de $(3+1)$ dimensões para $(2+1)$ dimensões. Temos também, como objetivo, verificar a energia-momento e a força eletromagnética em $(3+1)$ dimensões, pois quando é perdida a dualidade, com $b_\mu \neq 0$, constatamos uma assimetria entre as fontes elétricas e magnéticas, o que implica em uma ambigüidade ao obter a expressão da força eletromagnética: vimos que há um termo extra associado à violação de Lorentz e CPT, agindo somente em fontes magnéticas. Este termo é proporcional a $\int A_\mu k^\mu dV$, onde A_μ é o potencial e k^μ é a densidade corrente magnética. Então, esse termo depende fortemente dos efeitos do vetor de fundo (b_μ) nestas identidades, o problema reside na circunstância de uma decisão sobre o desaparecimento de tal termo que não é simples nesta estrutura, visto que não sabemos exatamente a influência de b_μ . Motivados e com esses objetivos, propomos a seguinte organização para esta dissertação.

No capítulo 1, é descrito as equações de Maxwell juntamente com a força de Lorentz e a equação da continuidade. O conjunto destas expressões estão escritas em duas notações, vetorial e tensorial, e com elas podemos descrever todo o Eletromagnetismo Clássico em um ambiente que possui apenas fontes elétricas. Na segunda parte deste capítulo, discutiremos a simetria de dualidade entre as equações de Maxwell, em forma tensorial. Mas, as cargas magnéticas (monopolos) não são como as cargas elétricas; este tipo de monopolo possui singularidade que é não-física, e ela é chamada

de *string*.

No capítulo 2, apresentaremos o modelo a ser estudado. Este modelo, apresenta basicamente três termos: o primeiro termo descreve os campos eletromagnéticos; o segundo termo descreve as fontes elétricas acopladas ao campo e, o terceiro termo contém um parâmetro tipo-Chern-Simons em $(3 + 1)D$, b_μ . Este parâmetro, tomado como um vetor constante no espaço-tempo, quebrando a isotropia, mas respeitando a invariância de calibre. Serão encontradas as equações de movimento e o tensor energia-momento para o modelo, e verificando algumas propriedades de b_μ .

No capítulo 3, ao considerar um ambiente que contém fontes magnéticas, percebemos que a carga elétrica deixa de ser conservada. De fato, como a simetria de calibre é mantida a questão da conservação da carga elétrica é mais sutil. Esta incoerência é resolvida assumindo-se o aparecimento de uma corrente elétrica extra induzida pela introdução do monopolo magnético. Após isso, é realizado uma redução dimensional para comparar os resultados obtidos do modelo em estudo, em $(3 + 1)D$, com os resultados do modelo de $(2 + 1)D$, estudado no artigo [6]. Finalmente, concluímos nosso trabalho e propomos novos estudos a algumas possibilidades decorrentes do presente.

Capítulo 1

Monopolo Magnético

Neste capítulo vamos descrever o monopolo magnético, partindo das equações de Maxwell, na notação vetorial. Em seguida tomamos estas equações em notação tensorial, manifestamente covariante. Após isso, descreveremos o monopolo magnético e alguns de seus aspectos básicos.

1.1 Equações de Maxwell

O Eletromagnetismo Clássico é descrito pelas Equações de Maxwell, as quais no Sistema Internacional de Unidades (SI), (Ref. [7]), tomam a forma abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.1d)$$

onde, \vec{E} e \vec{B} são os campos elétrico e magnético, respectivamente; ρ a densidade de carga elétrica; \vec{J} a densidade de corrente elétrica; e c a velocidade da luz no vácuo ($c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$).

Cada uma delas representa uma generalização de certas observações experimentais, isto é: (1.1a) expressa a lei de Gauss, que por sua vez proveio da lei de Coulomb; (1.1b) representa uma extensão da lei de Ampère; (1.1c) é a forma diferencial da lei de Faraday da indução eletromagnética; e (1.1d) geralmente representa o fato de que pólos magnéticos individuais nunca foram observados.

Ao tomarmos a divergência da equação (1.1b), e utilizarmos a equação (1.1a) encontramos facilmente a seguinte expressão:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

Ela é chamada de equação da continuidade. Esta equação relaciona a densidade de corrente elétrica e a densidade de carga elétrica, e esta relação tem sua origem devido ao fato das cargas elétricas serem conservadas.

A equação da força de Lorentz, pode ser obtida através da soma das forças elétrica e magnética (consequência da conservação de momento),

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.3)$$

onde q é a carga elétrica, \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} é o campo magnético, e \vec{v} é a velocidade da carga elétrica. Tal expressão descreve a ação dos campos sobre partículas car-

regadas eletricamente em movimento. Este conjunto de equações (1.1), (1.2) e (1.3), fornecem a descrição clássica das partículas que interagem eletromagneticamente.

Note, a presença de fontes elétricas nas equações (1.1a) e (1.1b) há a presença de fontes elétricas (equações não-homogêneas). Já nas equações (1.1d) e (1.1c) não há qualquer informação de fontes materiais (equações homogêneas).

O conjunto das equações de Maxwell, (1.1), pode ser reescrito de outras maneiras, por exemplo, utilizando-se formas diferenciais ou tensores. Para nossos objetivos, a notação tensorial¹ é mais conveniente e adotá-la-emos daqui por diante. Assim, as equações de Maxwell, em Unidades Naturais², são expressas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.4)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (1.5)$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético, definido em termos do quadri-potencial, A^μ :

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (1.6)$$

sendo o quadri-potencial definido por: $A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A})$, sendo Φ o “potencial escalar” e \vec{A} o “potencial vetor”. O campo elétrico \vec{E} e o campo magnético \vec{B} são obtidos por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.7)$$

¹No apêndice A encontra-se uma introdução à notação de tensores aqui utilizadas.

²Quando adotamos $\hbar = c = 1$, entre outros, dizemos que temos unidades naturais. Usaremos as unidades naturais daqui por diante.

Assim, podemos construir a seguinte matriz para $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.8)$$

além do mais, $j^\nu = (\rho, \vec{J})$ é a quadri-corrente elétrica; e $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual de $F^{\mu\nu}$, ou seja³:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (1.9)$$

A equação (1.4) provêm da densidade lagrangeana ($\mathcal{L} = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu$), quando utilizamos as equações de Euler-Lagrange. Já a equação (1.5) provêm da identidade geométrica que é: $\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0$, onde $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$.

Ao utilizarmos a equação (1.4), podemos encontrar duas equações de Maxwell, (1.1a) e (1.1b), e ao utilizarmos a equação (1.5), obtemos (1.1c) e (1.1d). No Apêndice A, apresentamos tais obtenções. Tomando a divergência da equação (1.4), temos:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu.$$

Trivialmente, o lado esquerdo da igualdade anterior é nula, logo:

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \quad (1.10)$$

³O símbolo de Levi-Civita $\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}$ é definido por: $\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} = +1$ se $(\nu\mu\alpha\beta)$ é uma permutação par de (0123); $\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} = -1$ se $(\nu\mu\alpha\beta)$ é uma permutação ímpar de (0123); e $\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} = 0$ nos outros casos (alguns ou todos os índices iguais).

e obtemos a equação da continuidade, (1.2), em notação tensorial.

Com essas informações podemos realizar uma introdução aos monopolos magnéticos, o qual será o assunto da próxima seção.

1.2 Monopolo Magnético

Nesta seção discutiremos como se introduz monopolos magnéticos na Eletrodinâmica Clássica, e algumas de suas propriedades.

1.2.1 Introdução aos Monopolos Magnéticos na Eletrodinâmica

Clássica

Considerando um ambiente ausente de fontes elétricas ($j^\mu = 0$) e magnéticas, as Equações de Maxwell, (1.4) e (1.5), são simétricas sob transformação de dualidade, por exemplo:

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} \quad \tilde{F}^{\nu\mu} \rightarrow -F^{\nu\mu}, \quad (1.11)$$

que é equivalente à: $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$.

Agora, considerando um ambiente com fontes elétricas e magnéticas, introduziremos uma quadri-corrente magnética definida por: $k^\mu \equiv (\sigma, \vec{K})$; sendo σ a densidade de carga magnética e \vec{K} a densidade superficial de corrente magnética; aqui a $I_m \equiv \frac{dq}{dt}$, semelhante ao caso elétrico. Logo, obtemos:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu. \quad (1.12)$$

Estas equações são invariantes sob a transformação de dualidade, (1.11), juntamente com:

$$j^\nu \rightarrow k^\nu \quad k^\nu \rightarrow -j^\nu. \quad (1.13)$$

Assim, a equação (1.12) nos fornece a introdução de fontes magnéticas no Eletromagnetismo.

Note que, em um ambiente com fontes magnéticas a identidade de Bianchi (1.12) é quebrada com a presença de monopolos magnéticos. Ao tomarmos a divergência da “identidade de Bianchi violada”, notamos que existe uma conservação da carga magnética:

$$\partial_\nu k^\nu = 0.$$

Como na conservação da carga elétrica, neste cenário também é conservado as cargas magnéticas.

Também podemos descrever uma equação de movimento para partículas com cargas elétricas e com massa m , em interação com um campo eletromagnético. Na notação de tensores, temos:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau},$$

onde: $x^\mu = (t, \vec{x})$ e τ é o tempo próprio. No apêndice A é obtido a força de Lorentz, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Considerando um ambiente com fontes magnéticas e elétricas, a equação de movimento seria dada por:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = (q F^{\mu\nu} + g \tilde{F}^{\mu\nu}) \frac{dx_\nu}{d\tau}. \quad (1.14)$$

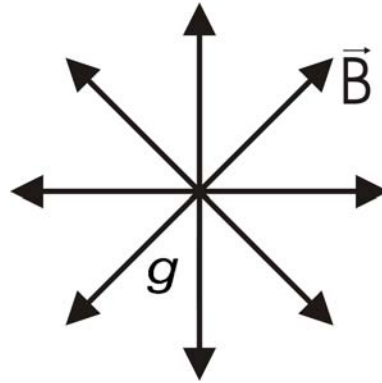


Figura 1.1: Uma carga magnética puntiforme e estática, $+g\delta^3(\vec{x})$, e o campo magnético por ela produzido.

Neste ambiente, a equação de Lorentz tomaria a seguinte forma: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + g(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E})$.

No entanto, é interessante fazermos uma análise clássica sobre a equação (1.12).

Para isso, tomamos $\nu = 0$, e obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \sigma. \quad (1.15)$$

Ao integrarmos a equação (1.15) em um volume V que contém a carga g , obtemos:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = g, \quad (1.16)$$

onde g é a carga magnética. Considerando uma simetria esférica, esta equação nos informa a existência de um fluxo do campo magnético que atravessa a superfície S do volume V , onde a carga magnética se encontra imersa, ver a figura (1.1).

Ao tomarmos $\mu = 1, 2$ e 3 , obtemos a equação (1.1c) com a presença da corrente

magnética (\vec{K}), ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{K} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ao integrarmos em um volume V que contém a carga g , obtemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} + \frac{\partial \phi_m}{\partial t} = I_m,$$

onde I_m é a corrente magnética e ϕ_m é o fluxo magnético. Assim, notamos que na presença de uma corrente magnética há um campo elétrico rotacional na sua vizinhança, mesmo que a presença de um ϕ_m variável no tempo.

Até aqui, realizamos uma análise clássica das equações (1.4) e (1.12), utilizando os campos eletromagnéticos descrito pelo tensor eletromagnético, $F^{\mu\nu}$. Quanticamente não é possível fazer uma análise sobre as equações (1.4) e (1.12). O motivo seria devido a entidade a ser analisada quanticamente, que é o quadri-potencial: não podemos defini-lo aqui, isto é, um quadri-potencial regular em todo o espaço. Existe uma singularidade neste tipo de monopolo magnético que não é física. Note que a equação (1.12) entra em contradição com $F_{\mu\nu}$. Veja ela:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu$$

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = k^\nu$$

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha \partial_\mu A_\beta - \partial_\beta \partial_\mu A_\alpha) = k^\nu$$

$$0 \neq k^\nu$$

Isso acontece, por A^μ ser regular. Para A^μ singular a igualdade acima fica: $\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\mu A_\beta - \partial_\beta\partial_\mu A_\alpha) = k^\nu$.

Qualitativamente, uma descrição quântica de um sistema com procedimento canônico, pressupõe o conhecimento das quantidades canônicas, tais como o Hamiltoniano, o momento conjugado entre outros classicamente, os quais dependem de A^μ .

Dirac em seu trabalho original [1], mostrou que seria possível ter uma quantização das correntes elétricas e magnéticas, desde que q e g satisfaçam:

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{n\hbar c}{2} \quad n \text{ inteiro}, \quad (1.17)$$

com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. A expressão (1.17) é chamada condição da quantização de Dirac, [1] e [8], a qual afirma que a existência de um monopolo magnético na natureza implicaria na quantização da carga elétrica, ou seja, essa última expressão sempre aparecerá como múltiplo inteiro de $e_0 = \frac{2\pi\hbar c}{g}$, sendo: $q = Ne_0$, onde e_0 é a carga elementar, $e_0 = 1,602177 \times 10^{-19}C$ no SI; e N é o número de cargas. Isto seria um argumento plausível sobre a quantização das cargas elétricas, observado experimentalmente, mas carente de uma explicação teórica mais consistente. Na subseção 1.2.3 será feita uma demonstração mais cuidadosa da condição de quantização de Dirac.

Este tipo de monopolo magnético possui uma singularidade, a qual ainda não citamos e será o tema da próxima seção.

1.2.2 Corda do Monopolo Magnético

Consideramos um campo magnético radial dado por:

$$\vec{B} = g \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (1.18)$$

bem como, uma superfície fechada, S . Sendo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, a integral de superfície S [veja a equação (1.16)] se anula, embora $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ na origem, o potencial vetor deve ser definido em todo o espaço contido em S , exceto em uma linha contínua que liga a origem ao infinito (pois as linhas dos campos magnéticos permanecem contínuas). Mantendo essa idéia, vamos considerar um campo magnético ao longo de um solenóide fino e semi-infinito ao longo do eixo z negativo, com um pólo positivo, de magnitude g , na origem. Então, o campo magnético será, [9]:

$$\vec{B}_{-z} = \frac{g}{r^2} \hat{r} + g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{z}, \quad (1.19)$$

onde \hat{z} é o vetor unitário na direção z , $\delta(\xi)$ é a função delta de Dirac, e $\theta(\xi) = 0$ se $\xi < 0$, $\theta(\xi) = 1$ se $\xi > 0$. Este campo magnético, (1.19), se diferencia do campo citado na expressão (1.18) somente pelo fluxo magnético singular ao longo do solenóide.

Reescrevendo uma nova expressão para o campo magnético, (1.18), em termos do potencial vetor, temos:

$$\frac{g}{r^2} \hat{r} = \vec{\nabla} \times \vec{A} - g\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{z}. \quad (1.20)$$

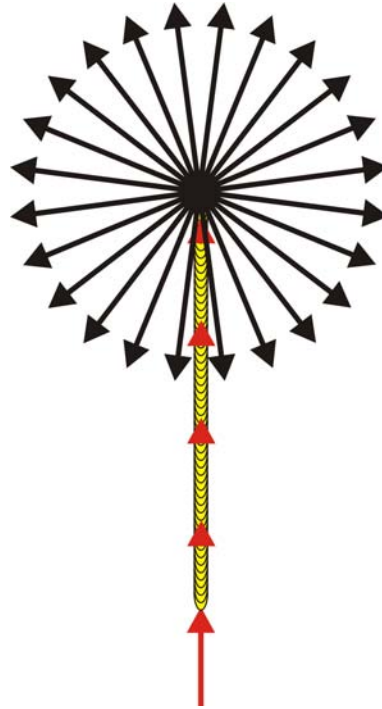


Figura 1.2: Campo magnético produzido por uma carga magnética $+g$ na origem. Em preto é o campo magnético; em amarelo a string, a qual se estende da origem ao infinito; e em vermelho o fluxo magnético que percorre o interior da solenóide (string).

Esta equação nos fornece uma linha, onde se encontra o solenóide, esta linha é chamada string de Dirac. A Figura (1.2) representa a idéia da string, ela não necessariamente precisa ser uma linha reta como representada na Figura (1.2) e na Equação (1.20). Escolhemos esse formato para facilitar a discussão. Lembrando que o potencial vetor, \vec{A} , não é uma grandeza mensurável classicamente, logo a string não pode ser observada.

Agora podemos encontrar o potencial vetor na origem, onde o campo magnético é fornecido pela equação (1.20), com $z = 0$. Utilizando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , esperamos que a simetria nos forneça $\vec{A}(\vec{r}) = A(r, \theta)\hat{\phi}$, sendo $\hat{\phi}$ o vetor unitário na direção ϕ . O fluxo magnético atravessa uma circunferência C , para valores fixos de r e θ , e ϕ variando de 0 à 2π [veja a figura (1.3)], que é conhecido pelo ângulo sólido

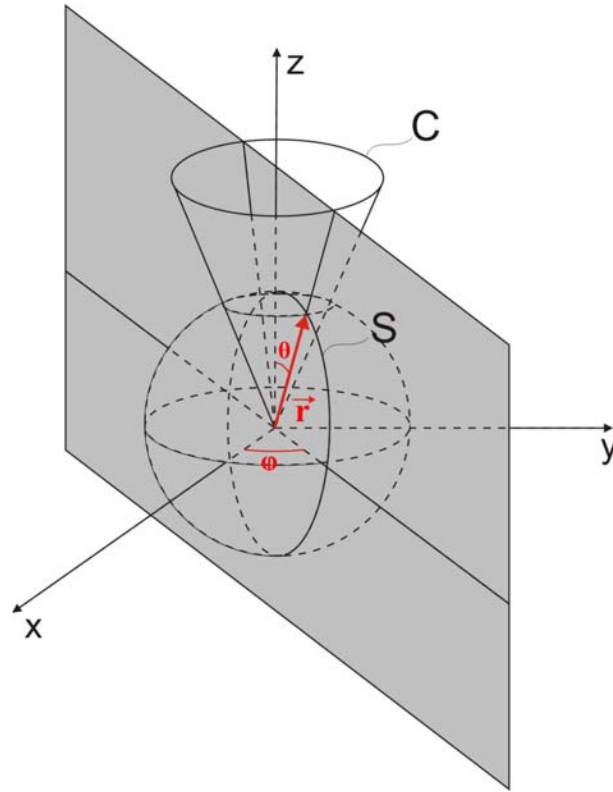


Figura 1.3: Ângulo sólido descrito por valores fixos de r e θ , e variando ϕ de 0 à 2π .

subtendido pela superfície S , na origem, multiplicado pela carga magnética g , isto é:

$$g \int_S d\Omega = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}.$$

Assim, teremos, [9]:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi}, \quad (1.21)$$

e portanto, acabamos a demonstração da singularidade no eixo z negativo.

Dirac sugeriu que o potencial vetor obtido acima, pode ser usado para “ajustar” a equação de Schrödinger do movimento de uma partícula carregada no campo magnético do monopolo. Para isso, é necessário mostrar que os resultados das equações são equivalentes para diferentes escolhas da posição da string de Dirac (ζ). Assim,

demonstraremos que A^μ é consistente qualquer que seja a posição da string, se a condição de quantização de Dirac for satisfeita.

1.2.3 Transformação de Calibre generalizada e a derivação, da Condição de Dirac

Ao aplicarmos uma transformação de calibre ($\vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$), o termo $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ da equação (1.20), permanecerá invariante e a string de Dirac mudará de posição, mas com as mesmas propriedades. Mas isso não nos diz que a string seja uma linha reta e muito menos que a posição seja sempre em uma única direção. De fato, a posição da string é arbitrária e assim podemos encontrar uma relação entre os potenciais que correspondem às posições diferentes da string.

Permitimos reescrever a equação (1.19), como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{h}(\zeta, \vec{r}),$$

onde $\vec{h}(\zeta, \vec{r})$ representa a contribuição da string ζ . Assim, podemos definir $\vec{h}(\zeta, \vec{r})$ como sendo um campo magnético de intensidade g que passa ao longo da string ζ partindo da origem para o infinito, isto é,

$$\vec{h}(\zeta, \vec{r}) = g \int_{\zeta} d\vec{x} \delta^3(\vec{r} - \vec{x}).$$

Note, que ao realizar esta integral, obtemos o mesmo resultado da Equação (1.19). Agora consideramos outra string ζ' , que parte da origem até o infinito, mas a

sua posição fazendo o sentido inverso da string ζ . Vamos considerar uma curva fechada Γ que corta a casca esférica cobrindo toda a região em torno do monopolo magnético, menos no ponto que passa a string (ζ' ou ζ). Permitindo também que $\Omega(\vec{r})$ descreva o ângulo sólido submetido por \vec{r} em alguma superfície particular que atravessa Γ , existem várias escolhas para este tipo de superfície, e todas elas nos levarão a valores de Ω que diferenciará por múltiplos de 4π , [9]. Ao tomarmos o gradiente destes ângulos sólidos, obteremos o mesmo valor. Exceto na própria curva Γ , onde Ω e $\vec{\nabla}\Omega$ são bem definidos. Assim, podemos escolher um valor para Λ na transformação de calibre definida em (B.9), ou seja, fazendo $\Lambda(\vec{x}, t) = -\frac{g}{4\pi}\Omega(\vec{r})$ obtemos:

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A}' = \vec{A} - \frac{g}{4\pi}\vec{\nabla}\Omega(\vec{r}) \quad (1.22)$$

onde \vec{r} não está em Γ . Então, ao tomarmos o rotacional do potencial vetor obtemos o campo magnético: $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$, exceto onde as strings se localizam. Aplicando o teorema de Stokes, para uma pequena circunferência cercada por Γ , obtemos o fluxo de $\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A})$ ao longo de Γ que é igual a g , e assim:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{h}(\zeta, \vec{r}) - \vec{h}(\zeta', \vec{r}).$$

Logo,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{h}(\zeta, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}' + \vec{h}(\zeta', \vec{r}).$$

Assim obtemos uma troca da string ζ por ζ' com o calibre citado na expressão (1.22). Generalizando a transformação de calibre para um ambiente com i monopolos

magnéticos com cargas g_i , precisamos de uma string para cada uma dessas cargas. Então, a transformação de calibre para este caso, será:

$$\Lambda(\vec{r}) = \Lambda_0(\vec{r}) + \sum_i \frac{g_i}{4\pi} \Omega_i(\vec{r}), \quad (1.23)$$

onde $\Lambda_0(\vec{r})$ é um valor inicial a ser determinado e $\Omega_i(\vec{r})$ é o ângulo subtendido de \vec{r} pela string final até string inicial presa ao i -ésimo monopolo.

A condição da consistência é que a transformação de calibre geral (1.23), tem uma equivalência com a Mecânica Quântica que é representada por uma transformação de calibre na função de onda, $\psi \mapsto \psi e^{-ie\Lambda}$, não produz um resultado de valores inteiros. Há então, uma ambigüidade de 4π em Ω_i , equação (1.23), então precisamos da quantização de Dirac,

$$\frac{qg_i}{4\pi} = \frac{1}{2}n_i$$

onde n_i é um inteiro (1, 2, 3...) e $q = Ne$, sendo e a carga elementar do elétron e N o número de cargas. Esta equação requer a quantização da carga elétrica: qualquer partícula carregada movendo-se no campo do pólo, de magnitude g , deve ter carga igual a um múltiplo inteiro (positivo ou negativo) de q , para que a função de onda consiga descrever o movimento.

Capítulo 2

O Modelo em Estudo

Neste capítulo, apresentaremos o modelo no qual pretendemos estudar monopolos magnéticos. Em seguida, comentaremos a aparente não-conservação da densidade de corrente elétrica na presença de fontes magnéticas, como ocorre em (2+1) dimensões com o Modelo de Maxwell-Chern-Simons.

2.1 A Lagrangeana e alguns de seus aspectos básicos

O modelo em consideração é descrito pela seguinte densidade Lagrangeana¹ em (3+1) dimensões²:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{Fontes}} + \mathcal{L}_{\text{CS}}, \quad (2.1)$$

onde \mathcal{L}_{EM} é a Lagrangeana eletromagnética de Maxwell, que representa so-

¹Usaremos, daqui por diante a expressão Lagrangeana para nos referirmos à densidade Lagrangeana, exceto se for feita menção em contrário.

²Lembramos que estamos num espaço-tempo onde a terminologia (3 + 1) D nos informa: 3 é o número de dimensões espaciais [por exemplo, (x, y, z) , representa uma coordenada no espaço de uma partícula num sistema de coordenada cartesiano] e 1 representa a dimensão temporal.

mente os campos, definida por:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$\mathcal{L}_{\text{Fontes}}$ representa o acoplamento das fontes elétricas ao campo eletromagnético, definida por:

$$\mathcal{L}_{\text{Fontes}} \equiv -j_{\mu}A^{\mu}, \quad (2.3)$$

e \mathcal{L}_{CS} é a Lagrangeana eletromagnética do tipo Chern-Simons, de $(2 + 1)$ dimensões, [10], definida em $(3 + 1)D$ por:

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = -\frac{1}{2}b_{\mu}A_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Onde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ é o tensor dual do tensor campo eletromagnético, A_{ν} é o quadri-potencial e $b_{\mu} = (b_0, \vec{b})$, sendo b_0 a componente temporal e \vec{b} a componente espacial, isto é, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. O parâmetro tipo-massa (b_{μ}) quebra a isotropia do espaço-tempo, digo, existe uma direção preferencial no espaço-tempo. Assim preservando a simetria de calibre e violando espontaneamente a simetria de Lorentz e CPT. No Apêndice C, discutiremos, brevemente as simetrias de Lorentz e CPT, como elas são explicitamente violadas neste ambiente.

Abordaremos a Lagrangeana de duas maneiras:

- i) dinâmica do modelo; e
- ii) tensor energia-momento.

Com esses itens, poderemos adicionar as fontes magnéticas e discutir o prob-

lema do modelo.

2.2 Dinâmica do modelo

Podemos encontrar as equações de movimento através da expressão de Euler-Lagrange, dada por:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0,$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangeana, e A_ν é o quadri-potencial. Com esta equação obtemos a equação (1.4) com mais um termo adicional, $b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$, que é a contribuição da densidade de Lagrangeana do tipo Chern-Simons. Vejamos a nova expressão juntamente com a identidade de Bianchi:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.5a)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.5b)$$

As equações acima indicam que, mesmo na ausência de fontes ($j^\nu = 0, k^\nu = 0$), os campos eletromagnéticos atuam como fonte para si próprios, desde que $b_\mu \neq 0$. A fonte destes campos passará a ser somente o termo $b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$.

Ao tomarmos a divergência da equação (2.5a), podemos perceber a conservação da quadri-corrente, $\partial_\nu j^\nu = 0$, desde que b_μ satisfaça, [11]:

$$\partial_\nu b_\mu = 0 \quad (2.6)$$

Para a expressão acima ser válida, b_μ deve ser um vetor espaço-temporalmente constante. Assim, podemos afirmar que ele define uma direção preferencial no espaço-tempo, sendo uma espécie de vetor de fundo (“*background vector*”). Por ser constante, ele acaba violando as simetrias de paridade ou a reversão temporal, assim quebrando a simetria CPT. Logo, b_μ quebra a isotropia do espaço-tempo e por consequência acaba violando a invariância de Lorentz no ponto de vista da partícula, mas é conservado a simetria de calibre. Na próxima seção retornaremos tal questão, mas sob outro ponto de vista.

Outro aspecto interessante a ser notado aqui é que a dualidade eletromagnética não é válida neste ambiente. Podemos fazer um análogo à dualidade como foi feita na expressão (1.11). Note que as equações (2.5a) e (2.5b) trocam de papel (são invariantes) sob:

$$F_{\mu\nu} \mapsto \tilde{F}_{\mu\nu} + b^\alpha(\eta_{\mu\alpha}A_\nu - \eta_{\nu\alpha}A_\mu), \quad (2.7a)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}b^\alpha A^\beta, \quad (2.7b)$$

com $b^\alpha \neq 0$. Entretanto, elas não são mais recuperadas se atuarmos com o dual das transformações (2.7), digo, a dualidade funciona apenas uma vez, ao tentarmos aplicarmos tal transformação novamente, as equações originais não são mais obtidas. De fato, até onde investigamos, as transformações que mantêm a Equação (2.5) invariante só são obtidas quando $b_\mu \equiv 0$.

2.3 O Tensor de Energia-Momento

O tensor canônico de energia-momento ($T^{\mu\nu}$) para o campo eletromagnético, é dado por, [10, 12]:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \partial^\nu A^\lambda - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.8)$$

onde \mathcal{L} é a densidade de lagrangeana, A^λ é o quadri-potencial, e $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo (3+1)-dimensional de Minkowski, para a qual adotamos a seguinte forma:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

e \mathcal{L} é dado pela Lagrangeana do modelo na ausência de fontes, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}.$$

Conforme está no Apêndice D.1, a parte que satisfaz a conservação do energia-momento é dado por:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} b^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha, \quad (2.9)$$

o termo $\frac{1}{2} b^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha$, vem da Lagrangeana do tipo-Chern-Simons. Note que o último

termo do tensor energia-momento não é simétrico em $\mu\nu$, ou seja,

$$\Theta^{\mu\nu} \neq \Theta^{\nu\mu},$$

que é uma indicação da quebra da simetria de Lorentz, mas isso ocorre no “ponto de vista” da partícula e não do observador. Observe, também, ao efetuarmos uma transformação de calibre ($A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$) no tensor energia-momento, o parâmetro $\tilde{F}^{\mu\alpha}$ e b^ν são invariante sobre esta transformação, e A_α é variante sobre a transformação de calibre.

Na ausência das fontes, o tensor de energia-momento é conservado, ou seja, quando tomamos a divergência da expressão (2.9), temos:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

Este fato acontece por causa das equações de movimentos sem fontes elétricas, que são citadas no conjunto de Equações (2.5) com $j^\nu = 0$ e $\partial_\nu b_\mu = 0$. Assim, preservamos a simetria de calibre, ou equivalentemente, a conservação da carga elétrica. Quando consideramos as fontes elétricas o tensor energia-momento deixa de ser conservado, ou seja,

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = j_\alpha F^{\alpha\nu}. \quad (2.10)$$

Com a expressão (2.10), podemos escrever a força de Lorentz manifestamente covariante [atuando numa carga puntiforme, $q\delta^3(\vec{x})$]:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qu_\alpha F^{\alpha\mu}, \quad (2.11)$$

onde q é a carga elétrica, $u = \gamma(1, \vec{v})$. Para $\mu = 0$, obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = -q\vec{v} \cdot \vec{E},$$

donde percebemos que somente a força elétrica trabalha sobre a carga elétrica. Para $\mu = 1, 2$ e 3 , obtemos:

$$\frac{dP}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

que é a expressão da Força de Lorentz.

Da equação (2.9), podemos encontrar as densidades de energia (\mathcal{E}) e de momento (\mathcal{P}^i):

$$\mathcal{E} \equiv \Theta^{00} = \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \frac{1}{2}b^0\vec{B} \cdot \vec{A}, \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{P}^i \equiv \Theta^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})^i + \frac{1}{2}b^i(\vec{B} \cdot \vec{A}), \quad (2.12b)$$

onde $i = 1, 2$ e 3 . Estas densidades não são observáveis, mas quando integramos em todo o espaço, obtemos grandezas observáveis, isto é:

$$E = \int \mathcal{E} d^3\vec{x},$$

$$\vec{P} = \int \vec{\mathcal{P}} d^3\vec{x}.$$

Ao fazermos uma transformação de calibre nas densidades de energia e de momento, e em seguida integramos em todo espaço, $\int \Theta^{0\nu} d^3x$, teremos os mesmos resultados se tivéssemos integrado o conjunto das equações (2.12) sem aplicar a transformação de calibre, pois o termo $\partial_\mu \Lambda$ se torna um termo de superfície e com isso, podemos fazer esta superfície ir ao infinito (onde consideramos que os campos e os potenciais anulam-se), de forma que o termo de superfície tende a zero. Portanto, a energia e o momento são invariantes de calibre e daí, fisicamente bem definidos.

2.4 Força Eletromagnética e a Assimetria entre Fontes Elétricas e Magnéticas

Para começar esta subseção é interessante salientar que estamos em um ambiente com fontes magnéticas, temos: $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \neq 0$. Na seção anterior vimos que a força de Lorentz manifestamente covariante, sobre uma carga elétrica, q , é dada, mesmo com $b_\mu \neq 0$, por:

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qu_\alpha F^{\alpha\mu}. \quad (2.13)$$

Esta equação atua apenas nas fontes elétricas, de forma que não relaciona a energia ou o momento com a violação de Lorentz que é transferida dos campos para as fontes, e das fontes para os campos. Ao considerar o parâmetro b_μ nulo, a dualidade citada em (2.7) é restabelecida, onde a força eletromagnética sentida pela corrente magnética pode ser obtida por uma transformação simples da dualidade. Considerando b_μ neste cenário, a dualidade é perdida como já vista, então nos per-

guntamos: poderia haver uma força extra, medida por b_μ , sobre fontes magnéticas?

A densidade de força eletromagnética na presença das fontes elétricas e das fontes magnéticas é dada por:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \frac{dp^\nu}{d\tau} = F^{\nu\alpha} j_\alpha + \left[\tilde{F}^{\nu\alpha} + \frac{1}{2} b^\nu A^\alpha \right] k_\alpha, \quad (2.14)$$

onde p^ν é a densidade de energia-momento das fontes j_α e k_α . Pelo que analisamos, uma resposta definida à tal questão demanda investigação ulterior. Para fomentarmos a discussão nesse sentido, levantamos 2 hipóteses:

i) para o parâmetro b_μ não afetar as “medidas” de A^α e de k_α é preciso escolhermos um bom observador inercial, assim o produto escalar destas grandezas físicas será nula, $A^\alpha k_\alpha = 0$. Logo, o termo $b_\mu A^\alpha k_\alpha$ não contribuirá para a expressão (2.14). Com este cenário, a força de Lorentz agirá em ambas as fontes, elétricas e magnéticas.

ii) com o parâmetro b_μ afetando as “medidas” de A^α e k_α , o produto escalar entre estas entidades não será mais nulo, como vimos anteriormente, ou seja, $A^\alpha k_\alpha \neq 0$. Já neste cenário, teremos uma contribuição extra na força eletromagnética dada por $b_\mu A^\alpha k_\alpha$. Ao considerar uma carga puntiforme, a força eletromagnética é dada por:

$$\frac{dP^\nu}{d\tau} = qF^{\nu\alpha} u_\alpha + g\tilde{F}^{\nu\alpha} u_\alpha + \frac{1}{2} b^\nu \int \gamma A^\alpha k_\alpha d^3\vec{x} \quad (2.15)$$

onde $u_\alpha = \gamma(1, \vec{v})$, e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$.

Se estivermos corretos, então procuramos pelo monopolo magnético tipo-Dirac que fornece outro modo para descobrir estas possíveis violações. O caso de um pólo magnético estático, o produto $A^\alpha k_\alpha$ quando integrado em todo o espaço acaba

desaparecendo. Se a Natureza não tivesse assimetrias, ou seja, se o parâmetro b_μ não violasse as simetrias de Lorentz e CPT, então poderíamos afirmar que este parâmetro não produziria uma força eletromagnética que agiria sobre as fontes magnéticas e elétricas. Essa não violação de simetria se manifesta se adotarmos um referencial no monopolo magnético, assim não precisaria realizar uma transformação de Lorentz, logo não iria violar as simetrias de Lorentz e CPT.

2.5 Aparente Inconsistência de Monopolos Magnéticos no Modelo

Considerando um ambiente que contenha fontes magnéticas (tipo-Dirac), então temos a identidade de Bianchi da seguinte maneira, (2.5a):

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu, \quad (2.16)$$

conforme a equação (1.12). Sendo assim, acabamos de violar a identidade geométrica (identidade de Bianchi).

No entanto, ao tomarmos a divergência da equação (2.5a) temos:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu + (\partial_\nu b_\mu) \tilde{F}^{\mu\nu} + b_\mu (\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}),$$

usando a condição (2.6) e a Equação (2.16), temos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu - b_\mu k^\mu, \quad (2.17)$$

chegando a

$$0 = \partial_\nu j^\nu - b_\mu k^\mu$$

ou ainda,

$$\partial_\nu j^\nu = b_\mu k^\mu \quad (2.18)$$

Acabamos de nos deparar com um sério problema: neste cenário onde $b_\mu \neq 0$, a presença de fontes magnéticas, conduz à não conservação da carga elétrica. Isto, pelo menos numa análise preliminar. No entanto, como a simetria de calibre é mantida, já que $\partial_\alpha b_\beta = 0$, então a conservação da carga elétrica é um ponto mais sutil do que o mesmo resultado da equação (2.18).

Detectado o problema do modelo estudado, devemos propor uma solução para o mesmo, o qual será o assunto do próximo capítulo. Aí, veremos que a introdução de fontes magnéticas pode ser feita sem trazer conseqüências desastrosas à conservação de carga, desde que o aparecimento daquelas fontes seja acompanhado pela indução de uma corrente elétrica extra, os detalhes virão a seguir.

Capítulo 3

Solução do Problema: Como Introduzir Fontes Magnéticas no Modelo em Questão

Neste capítulo vamos solucionar o problema encontrado no capítulo anterior, quando consideramos um ambiente que contenha fontes magnéticas e em seguida faremos uma redução dimensional de $(3 + 1)D$ para $(2 + 1)D$, onde relacionaremos o nosso resultado com outro encontrado em $(2 + 1)D$.

3.1 Solução do Problema do Modelo

Para solucionarmos o problema da não-conservação da carga elétrica na presença de fontes magnéticas, temos como influência o trabalho de Henneaux e Teitelboim, Referência [15], na qual problema semelhante foi obtido, ao admitir que a presença de

um pólo magnético induz naturalmente o aparecimento de uma corrente elétrica extra. Ainda neste trabalho, foi apresentado um modelo com densidade de Lagrangeana em $(2 + 1)D$ que contém monopolos magnéticos como pontos em um plano do espaço-tempo (*instantons*). Em nosso modelo em $(3 + 1)D$, temos monopolos magnéticos que são pontos no espaço-tempo, e não bitolados em um plano.

Ao analisar a não-conservação da carga elétrica e tendo no pensamento a contribuição de uma corrente extra, então reescrevemos uma nova quadri-corrente, da seguinte maneira:

$$j_{total}^{\mu} = j^{\mu} + j_{ind}^{\mu}, \quad (3.1)$$

onde j^{μ} é a quadri-corrente já conhecida, identificada anteriormente como $j^{\mu} = (\rho, \vec{J})$, e j_{ind}^{μ} é a quadri-corrente induzida. Realizando os mesmos cálculos feito no final do Capítulo 2, agora considerando a quadri-corrente total descrita na equação (3.1). Obtemos que a divergência da quadri-corrente induzida:

$$\partial_{\nu} j_{ind}^{\nu}(z) = b_{\mu} k^{\mu}. \quad (3.2)$$

Ao integrarmos em todo o espaço a equação acima, obtemos:

$$\frac{dQ_{ind}}{dt} = \int b_{\mu} k^{\mu} d^3 \vec{x}. \quad (3.3)$$

Portanto, concluímos que a conservação da carga elétrica é respeitada neste ambiente, pois as fontes magnéticas induz naturalmente a uma corrente elétrica extra, onde a sua densidade é dada por $b_{\mu} k^{\mu}$. Tal fato é condizente com a invariância de

calibre obedecida pelo modelo em questão (independentemente de k_μ ou não). Além do mais, todo tipo do termo proporcional a b_μ , é invariante sobre as transformações de Lorentz no ponto de vista do observador, mas é variante sobre as mesmas transformações de Lorentz no ponto de vista da partícula.

Reescrevendo a equação de movimento com uma quadri-corrente total, juntamente com a identidade de Bianchi violada,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_{total}^\nu + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (3.4a)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu. \quad (3.4b)$$

Tomando a divergência da equação (3.4a), retomamos a expressão (2.17), i.e.,

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j_{total}^\nu - b_\mu k^\mu.$$

Usando a equação (3.1), temos:

$$\partial_\nu (j^\nu + j_{ind}^\nu) = b_\mu k^\mu,$$

Integrando em todo o espaço-tempo, obtemos:

$$\int \partial_\nu j^\nu d^4\vec{x} + \int \partial_\nu j_{ind}^\nu d^4\vec{x} = + \int b_\mu k^\mu d^4\vec{x}.$$

Substituindo a quadri-corrente induzida, obtemos:

$$\int \partial_\nu j^\nu d^4\vec{x} = 0,$$

logo, $\partial_\nu j^\nu = 0$. Assim voltamos conservar a carga elétrica na presença das fontes magnéticas.

Vejamos dois exemplos de monopolos magnéticos.

Monopolo Magnético Estático

Para obtermos um monopolo magnético estático é preciso que a quadri-corrente seja definida por: $k^\mu \equiv (g\delta^3(\vec{x}), \vec{0})$. E o vetor de fundo definido por: $b_\mu \equiv (b_0, \vec{b})$.

Substituindo estas definições na Equação (3.3), obtemos:

$$I_{Ind} = b_0 g.$$

Onde b_0 é estimado na Referência [14], $b_0 \sim 10^{-42} GeV$; e g pela condição de quantização de Dirac é da ordem $g \sim 137e$. Logo, o valor estimado para a corrente induzida produzida por um monopolo magnético estático em unidades naturais é da ordem:

$$I_{Ind} \sim 10^{-40} GeVe.$$

Monopolo Magnético em MRU

Para obtermos um monopolo magnético em movimento retilíneo uniforme (MRU) é preciso que a quadri-corrente seja definida por: $k^\mu \equiv g\delta^3[\vec{x} - \vec{y}(\tau)](1, -v_x, -v_y, -v_z)$.

E o vetor de fundo definido por: $b_\mu \equiv (b_0, \vec{b})$. Substituindo estas definições na Equação (3.3), obtemos:

$$I_{Ind} = g(b_0 - \vec{b} \cdot \vec{v}).$$

Na Referência [15], os autores encontraram um resultado para o modelo que estamos utilizando aqui, mas em $(2+1)D$. Então, é plausível reduzirmos a dimensão do modelo em estudo por nós de $(3+1)D$ para $(2+1)D$ para obter a liberdade de compararmos os resultados. Este processo é realizado na próxima seção.

3.2 Redução Dimensional para (2+1) dimensões

Como obtemos um resultado em $(3+1)D$ seria interessante fazer uma redução dimensional para $(2+1)D$ para o conjunto de equações descritas em (3.4). Temos duas motivações para implementar tal programa: i) a quantização do parâmetro $|\vec{b}|$ e ii) relacionar o nosso resultado da quantização de mesma topologia em $(2+1)D$, [15]. Na referência [16] os autores consideram uma densidade lagrangeana idêntica à nossa, (2.1), assim realizaram uma redução dimensional e encontraram uma lagrangeana em $(2+1)D$ na ausência de fontes magnéticas. Já aqui, a proposta é a redução dimensional das equações de movimento com a presença de fontes magnéticas.

Reescrevemos as equações de movimento com fontes elétricas e magnéticas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + j_{ind}^\nu + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = k^\nu \end{array} \right. \quad (3.5)$$

sendo a incorporação de k_μ acompanhada de j_{ind}^ν . Para implementarmos a redução

dimensional, impomos os seguintes *ansatz* sobre um quadri-vetor arbitrário, [16]: i) as componentes 0, 1 e 2 são mantidas intocáveis; ii) a componente 3 é identificada como um escalar de Lorentz em $(2+1)D$; iii) todos os campos e potenciais são independentes da terceira derivada espacial, ou seja, $\partial^3(f) \equiv 0$. Assim, explicitamos a nossa redução:

$$A^\mu \mapsto (A^{\hat{\mu}}, \phi); \quad (3.6a)$$

$$b^\mu \mapsto (b^{\hat{\mu}}, m); \quad (3.6b)$$

$$j^\mu \mapsto (j^{\hat{\mu}}, \lambda); \quad (3.6c)$$

$$j_{ind}^\mu \mapsto (j_{ind}^{\hat{\mu}}, \lambda_{ind}); \quad (3.6d)$$

$$k^\mu \mapsto (k^{\hat{\mu}}, \chi), \quad (3.6e)$$

onde $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1$ e 2 , e a métrica é dada por:

$$\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para realizar a redução dimensional, utilizaremos o conjunto de Equações (3.6), e as equações de movimento dada por (3.5). Detalhes dessa redução podem ser encontradas no Apêndice D.3. Assim, obtemos:

$$\begin{cases} \partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = j^{\hat{\nu}} + j_{ind}^{\hat{\nu}} - m\tilde{F}^{\hat{\nu}} + b_{\hat{\alpha}}\tilde{G}^{\hat{\alpha}\hat{\nu}} \\ \partial_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}} = \chi, \end{cases} \quad (3.7)$$

e

$$\begin{cases} \partial_{\hat{\mu}} G^{\hat{\mu}} = \lambda + \lambda_{ind} + b_{\hat{\alpha}} \tilde{F}^{\hat{\alpha}} \\ \partial_{\hat{\mu}} \tilde{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = k^{\hat{\nu}}. \end{cases} \quad (3.8)$$

As novas intensidades de campos são definidas por: $F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial^{\hat{\mu}} A^{\hat{\nu}} - \partial^{\hat{\nu}} A^{\hat{\mu}}$ e $G^{\hat{\mu}} = \partial^{\hat{\mu}} \phi$; os duais destas grandezas físicas são: $\tilde{F}^{\hat{\mu}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}} F_{\hat{\nu}\hat{\kappa}}$ e $\tilde{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \epsilon^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\kappa}} G_{\hat{\kappa}}$. Os campos elétrico e magnético (pseudo-escalar) do modelo vetorial, $A^{\hat{\nu}}$, podem também ser armazenados em $\tilde{F}^{\hat{\mu}} = (-B, -\epsilon^{\hat{i}\hat{j}} E^{\hat{j}})$.

O conjunto de Equações (3.7) define uma Eletrodinâmica Vetorial do tipo Maxwell-Chern-Simons em $(2+1)D$ com a violação da simetria de Lorentz e fontes magnéticas. Sob a ação de CPT pode ser invariante ou variante, dependendo de $b^{\hat{\mu}}$ ser ou não ser do tipo-espaço, veja as Referências [16, 18]. A simetria de calibre é conservada na redução dimensional, assim o conjunto de equações (3.7) também é invariante sob a transformação $A^{\hat{\mu}} \mapsto A^{\hat{\mu}} + \partial^{\hat{\mu}} \Lambda$. No conjunto de equações (3.8) também é definida uma Eletrodinâmica Escalar, ϕ , acoplada às equações (3.7), através do parâmetro que viola a simetria de Lorentz, $b_{\hat{\alpha}}$.

Realizada a redução dimensional, vamos rastrear nas equações em (3.7), se ainda possuímos problemas como foi observado na seção 2.5. Então, aplicamos $\partial_{\hat{\nu}}$ na equação de movimento, ou seja,

$$\partial_{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \partial_{\hat{\nu}} j^{\hat{\nu}} + \partial_{\hat{\nu}} j_{ind}^{\hat{\nu}} - \partial_{\hat{\nu}} (m \tilde{F}^{\hat{\nu}}) + \partial_{\hat{\nu}} (b_{\hat{\alpha}} \tilde{G}^{\hat{\alpha}\hat{\nu}})$$

usando as equações geométricas de (3.7) e (3.8) e a condição colocada à $b_{\hat{\mu}}$, (2.6),

obtemos:

$$\partial_{\hat{\nu}} J_{ind}^{\hat{\nu}} = b_{\hat{\nu}} k^{\hat{\nu}} - m\chi.$$

Isto indica que o mesmo resultado já encontrado na Seção 3.3 também é encontrado aqui, ou seja,

$$b_{\mu} k^{\mu} = b_{\hat{\nu}} k^{\hat{\nu}} + b_3 k^3 = b_{\hat{\nu}} k^{\hat{\nu}} + (-m)\chi$$

$$b_{\mu} k^{\mu} = b_{\hat{\nu}} k^{\hat{\nu}} - m\chi.$$

Um exemplo interessante e simples, é o caso de um polo estático e puntiforme (*instanton*), descrito por: $\chi = g\delta^2(\vec{x})$ para o modelo vetorial é o problema estudado pelo Henneaux e Teitelboim, [15], do qual obtém-se a quantização do parâmetro de massa de acordo com $m = \frac{2\pi\hbar m}{g^2}$, representado pela terceira componente do parâmetro original b_{μ} , das $(3 + 1)$ dimensões.

Aqui, nos deparamos com uma nova perspectiva que poderia alongar a nossa discussão. Se uma condição de quantização poderia envolver também as componentes de $b_{\hat{\mu}}$. Isto parece ser o caso de considerarmos a violação da identidade de Bianchi em ambas as Eletrodinâmicas, Vetorial e Escalar, Equações (3.7) e (3.8). Neste caso, devemos notar que os modelos aparecem acoplados. Neste sentido, outra possibilidade de investigação futura é o de se considerar uma única Eletrodinâmica Vetorial com termos do tipo Chern-Simons e de violação da simetria de Lorentz. Um modelo que

cumpra tais requerimentos seria dado, por exemplo, por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + mA_{\hat{\mu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}} + b_{\hat{\mu}}\tilde{F}^{\hat{\mu}}, \quad (3.9)$$

onde a sua equação de movimento é:

$$\partial_{\hat{\mu}}F_{\lambda}^{\hat{\mu}} + 2(mA_{\hat{\mu}} + b_{\hat{\mu}}) = m\tilde{F}^{\hat{\mu}}.$$

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação trabalhamos com um monopolo tipo-Dirac em uma Eletrodinâmica de Maxwell em $(3 + 1)D$ à qual é adicionado um termo, $b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}$, que viola as simetrias de Lorentz e CPT, onde b_μ tem aparência de um quadri-vetor. Mas as características dele é de vetor constante no espaço-tempo, considerado-o como um vetor de fundo (“*background*”), o qual destrói a isotropia do espaço-tempo.

Realizando uma análise simples das equações de movimento, percebemos que a presença das fontes magnéticas nos leva à violação da conservação de carga elétrica. Assim, adicionamos uma corrente extra que acompanhará as fontes magnéticas e voltamos ter a conservação da carga elétrica. A corrente extra adicionada neste cenário é denotada por quadri-corrente induzida ($-\int b_\mu k^\mu d^3\vec{x}$). Dentro desta discussão temos uma condição de quantização envolvendo o parâmetro b_μ . Após disso, fazemos uma redução dimensional para as equações de movimento e geométrica de $(3 + 1)D$ para $(2 + 1)D$, onde um modelo vetorial e escalar quebra a simetria de Lorentz em um ambiente com fontes magnéticas.

Ao realizarmos uma análise sobre o tensor energia-momento e a força eletromagnética em $(3+1)$ dimensões, verificamos que é perdida a dualidade, com $b_\mu \neq 0$.

Constatamos uma assimetria entre as fontes elétricas e magnéticas, implicando em uma ambigüidade sempre para obter a expressão a rigor da força eletromagnética. Neste ambiente, sugerimos duas condições sobre b_μ : i) se este parâmetro não influencia as identidades não-físicas A_μ e k^μ , então o produto destas duas identidades se anula; ii) se este parâmetro influenciar as identidades não-físicas, então o produto $A_\mu k^\mu \neq 0$; logo teremos uma contribuição extra na força eletromagnética.

No ambiente $(2+1)D$, temos um caso mais simples de um pólo semelhante ao *instanton* para a identidade de Bianchi violada no setor vetorial, conduzindo para a condição de quantização de Henneaux-Teitelboim do parâmetro tipo-massa [a terceira componente sobrevivente de b_μ de $(3+1)D$]. Nós também discutimos uma condição mais geral que envolve b_μ , esperando obter um modelo que viola a simetria de Lorentz e CPT, b_μ .

Como estamos considerando uma Teoria Abelianiana. Isto nos causa a curiosidade de saber como seria uma situação similar a nossa em uma Teoria não-Abelianiana. O trabalho ficaria mais interessante e envolvente se considerarmos a estrutura de uma super-simetria do modelo Abelianiano ou Yang-Mills, na presença do termo que viola a simetria de Lorentz.

Outro ponto interessante a ser investigado é a redução dimensional de $(4+1)D$ para $(3+1)D$ para entender melhor o comportamento começado pelo termo semelhante a b_μ e como a nossa relação de quantização emerge de um ponto de vista em uma elevada dimensão. Além disso, as propriedades da Eletrodinâmica escalar $(2+1)D$ na presença do termo que viola Lorentz e das fontes magnéticas.

Uma análise da Lei de Planck (intensidade versus frequência, numa dada tem-

peratura) neste ambiente. Resultados preliminares indicam que há uma correção proporcional a $\omega_b = \frac{m}{\hbar}$, sendo $m \equiv |\vec{b}|$, minimizando uma massa para a radiação. Ainda neste contexto, seria interessante analisar qual o efeito de b_μ sobre certos espalhamentos como o de Compton.

Esta dissertação teve como base o artigo de nossa autoria [27], onde os autores são: Winder Moura Melo, José A. Helayël-Neto, Jakson M. Fonseca e Ney M. Barraz Jr. O qual foi aceito para publicação na Phys. Rev. D em 2007.

Apêndice A

Notação de Tensores

Coordenadas: Especificando um tempo t e um ponto $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ no espaço ordinário, assim definimos um ponto do espaço-tempo. Denotaremos as coordenadas deste ponto por x^0, x^1, x^2, x^3 ; onde: $x^0 \equiv ct$ é a coordenada temporal; x^1, x^2, x^3 são as três coordenadas espaciais: $x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$. É mais comum, usarmos os índices 0, 1, 2, 3 para denotar as componentes do quadri-vetor ou tensores ao longo dos eixos t, x, y, z respectivamente. Os índices gregos denotam as componentes do espaço-tempo dos quadri-vetores ou tensores, e eles podem assumir quatro valores 0, 1, 2, 3; os índices latinos são reservados para as componentes do espaço ordinário e podem assumir três valores 1, 2, 3. Assim:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3.$$

Tensor Métrico, Índices Covariante e Contravariante: A métrica do espaço-tempo é uma métrica pseudo-euclidiana definida por um *tensor métrico*:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

ou novamente, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{kk} = -1$, $\eta_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$.

Distinguimos entre tensores *covariante* e tensores *contravariante* através dos índices escritos neles; os índices subscrito são tensores covariantes e os índices sobrescritos são os tensores contravariantes. Assim, a^μ denota um tensor contravariante. O correspondente tensor covariante a_μ é obtido pela aplicação da métrica:

$$a_\mu = \sum \eta_{\mu\nu} a^\nu, \quad (\text{A.1})$$

que nos resulta: $a_0 = a^0$, $a_k = -a^k$.

Vamos sempre usar a convenção do somatório sobre índices repetidos. Com esta convenção a equação (A.1) se torna simplesmente em:

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu.$$

Tensor	Número de índice	Classificação
S	0	Escalar
S^μ	1	quadri-vetor
$S^{\mu\nu}$	2	tensor de ordem 2
$S^{\mu\nu\lambda}$	3	tensor de ordem 3

Tabela A.1: Classificação dos tensores em escalares, quadri-vetores e tensores de ordem elevados.

Similarmente, os índices podem ser elevados com a aplicação da métrica $\eta^{\mu\nu}$:

$$a^\mu = \eta^{\mu\nu} a_\nu.$$

No presente caso, temos: $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Além de distinguirmos os tensores em tensores covariante ou contravariante, podemos classifica-los em escalares, quadri-vetor e tensores (esta classificação pode ser vista na tabela A.1).

Em adição, temos: $\eta_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu} = \eta^\mu{}_\nu = \delta_\mu^\nu$, onde δ_μ^ν é o delta de Kronecker:

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases}$$

As três componentes espaciais do quadri-vetor contravariante a^μ formam um vetor. Assim:

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a^0, \vec{a})$$

onde $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$, com $a^1 = a_x$, $a^2 = a_y$, $a^3 = a_z$.

O produto escalar entre dois quadri-vetores a^μ e b^μ é obtido por contração das componentes contravariante de um com as componentes covariante do outro, denotado

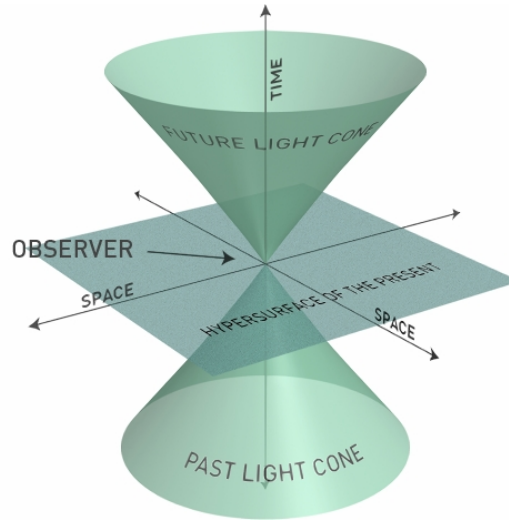


Figura A.1: Cone de Luz, a parte superior deste cone nos indica o futuro, a parte inferior nos indica o passado.

por $a_\mu b^\mu$, ou por $a^\mu b_\mu$:

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

A norma de a^μ é dada por: $a^\mu a_\mu = (a^0)^2 - a^2$. Os quadri-vetores podem ser classificados em três tipos, de acordo com o significado da norma, ou seja,

$$a_\mu a^\mu < 0 \quad a^\mu = \text{vetor tipo-espaço};$$

$$a_\mu a^\mu = 0 \quad a^\mu = \text{vetor tipo-luz};$$

$$a_\mu a^\mu > 0 \quad a^\mu = \text{vetor tipo-tempo}.$$

Estas classificações corresponde para a posição do vetor com respectivo cone de luz $x_\mu x^\mu = 0$, veja a figura A.1. Também, podemos classificar as componentes temporais dos quadri-vetores, da seguinte maneira:

$$a^0 > 0 \quad \text{o vetor aponta para o futuro};$$

$$a^0 < 0 \quad \text{o vetor aponta para o passado}.$$

Utilizamos as seguintes notações para o gradiente $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, e para operadores diferenciais $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$. Os quatro operadores da diferencial parcial $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ forma um vetor covariante, chamaremos de operador gradiente e denotaremos pelo símbolo ∂_μ :

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right).$$

Também fazemos o uso do gradiente contravariante:

$$\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla \right),$$

e do Dalemberiano \square , definido por:

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \partial_\mu \partial^\mu.$$

O tensor $\epsilon^{\lambda\mu\nu\sigma}$ denota o tensor anti-simétrico com quatro índices, e definido por: +1 se $(\lambda\mu\nu\sigma)$ é uma permutação par de (0123); -1 se $(\lambda\mu\nu\sigma)$ é uma permutação ímpar de (0123); e 0 nos outros casos (alguns ou todos os índices iguais).

O potencial eletromagnético é composto do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ e do potencial escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ que forma um quadri-potencial A^μ :

$$A^\mu \equiv (\Phi, \vec{A}) \tag{A.2}$$

Uma quadri-corrente elétrica é composta de uma densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$ e de uma

densidade de corrente \vec{J} , e denotamos esta corrente por j^μ :

$$j^\mu \equiv (\rho, \vec{J}). \quad (\text{A.3})$$

No Apêndice B encontraremos as expressões para os campos elétrico e magnético que são dados por:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

As componentes de \vec{E} e \vec{B} forma um tensor anti-simétrico do espaço-tempo, $F_{\mu\nu}$, conforme na definição:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu},$$

assim, podemos construir a matriz:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

O tensor dual de $F^{\mu\nu}$ é $\tilde{F}^{\mu\nu}$, que é definido por: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, e podemos

encontrar facilmente as suas componentes, como é mostrado na seguinte matriz:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & -E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Com essas informações podemos escrever as equações de Maxwell na forma de tensores, conforme visto no capítulo 1:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (\text{A.6a})$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.6b})$$

Como foi prometido no capítulo 1, vamos encontrar as equações de Maxwell (1.1), partindo do conjunto de equações citada em (A.6). Lembraremos que estamos utilizando unidades naturais, ou seja, $\hbar = c = 1$. Deixaremos claramente expressas estas grandezas quando necessário. Ao considerando $\nu = 0$ e abrindo o somatório da equação (A.6a), temos:

$$\partial_0 F^{00} + \partial_k F^{k0} = j^0,$$

usando as informações de (A.2), (A.3) e (A.4), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho.$$

No entanto, ao considerar $\nu = k$ e abrindo o somatório da equação (A.6a), obtemos:

$$\partial_0 F^{0k} + \partial_i F^{ik} = j^k,$$

usando as informações de (A.2) e (A.4), obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}.$$

Agora, considerando a equação (A.6b), fazendo $\nu = 0$ e abrindo o somatório, temos:

$$\partial_0 \tilde{F}^{00} + \partial_k \tilde{F}^{k0} = 0,$$

usando as informações de (A.5), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

No entanto, ao considerar $\nu = k$ e abrindo o somatório, temos:

$$\partial_0 \tilde{F}^{0k} + \partial_i \tilde{F}^{ik} = 0,$$

usando as informações de (A.5), obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Assim, verificamos que o conjunto de equações (A.6) descreve as equações de Maxwell

apresentadas em (1.1).

No capítulo 1, é fornecida a equação de movimento para um partícula: $m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}$. Fazendo $\mu = k$, obtemos:

$$m \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = q \left(F^{k0} \frac{dx_0}{d\tau} + F^{ki} \frac{dx_i}{d\tau} \right),$$

usando as equações (A.4) e considerando o tempo próprio $d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = \frac{dt}{\gamma}$:

$$\gamma m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = q \left[\vec{E} \frac{dt}{dt} + \vec{B} \times \left(-\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \right].$$

E assim, obtemos a força de Lorentz,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

No entanto, ao considerar uma partícula tipo *dyon* (objetos hipotéticos que apresentariam carga elétrica, q , e magnética, g), a equação de movimento é dado por:

$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = (q F^{\mu\nu} + g \tilde{F}^{\mu\nu}) \frac{dx_\nu}{d\tau}$. Fazendo $\mu = k$, obtemos:

$$m \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = q \left(F^{k0} \frac{dx_0}{d\tau} + F^{ki} \frac{dx_i}{d\tau} \right) + g \left(\tilde{F}^{k0} \frac{dx_0}{d\tau} + \tilde{F}^{ki} \frac{dx_i}{d\tau} \right),$$

usando as equações (A.4), (A.5) e considerando o tempo próprio $d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt = \frac{dt}{\gamma}$:

$$\gamma m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = q \left[\vec{E} \frac{dt}{dt} + \vec{B} \times \left(-\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \right] + g \left[\vec{B} \frac{dt}{dt} + (-\vec{E}) \times \left(-\frac{d\vec{x}}{dt} \right) \right].$$

E assim, obtemos a força de Lorentz para uma partícula que contém cargas magnéticas

e elétricas,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + g(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E}).$$

Apêndice B

Transformações de Calibre

Para esclarecer a transformação de calibre é interessante encontrar os campos elétrico e magnético, em termos dos potenciais escalar e vetor. Considerando um ambiente sem monopolo magnético, então a equação (1.1d) é válida, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Então, podemos definir o campo magnético em termo do potencial vetor:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{B.1})$$

Ao tomarmos a divergência da (B.1) e usarmos uma identidade vetorial diferencial adequada, verificamos o resultado da equação (1.1d). Utilizando a outra equação de Maxwell homogênea (1.1c), $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, podemos substituir a equação (B.1) e obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Onde podemos tomar o rotacional do gradiente do potencial escalar, que será verificado a igualdade acima. Ou seja,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (\text{B.3})$$

o sinal negativo está sendo considerado por conveniência. Reescrevendo a equação acima, obtemos:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi. \quad (\text{B.4})$$

Assim, obtemos o campo elétrico em termos dos potenciais.

Uma vez definidas os campos em termos dos potenciais partindo das equações de Maxwell homogêneas, podemos agora, reescrever as equações de Maxwell não-homogêneas em termos dos potenciais. Partindo da equação (1.1a), $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, substituímos o campo elétrico expressa em (B.4) e obtemos:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (\text{B.5})$$

Ao substituírmos as expressões (B.1) e (B.4) na equação (1.1b), obtemos:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = -\mu_0\vec{J}. \quad (\text{B.6})$$

Note que as oito equações de Maxwell se reduziram a duas equações, e ainda estão acopladas uma a outra através dos potenciais. Podemos desacoplar, estas

equações usando a seguinte transformação:

$$A_\mu(\vec{x}, t) \mapsto A'_\mu(\vec{x}, t) \equiv A_\mu(\vec{x}, t) - \partial_\mu \Lambda(\vec{x}, t). \quad (\text{B.7})$$

Este tipo de transformação é chamado de transformação de calibre. Elas são locais, pois ocorrem no mesmo ponto do espaço físico \vec{x} e no mesmo tempo t .

Vejamos como os campos elétricos e magnéticos permanecem invariantes sob esta transformação de calibre. Para isto, primeiramente, fazemos $\mu = 0$ na equação (B.7) e lembrando que: $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$ e $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$. Então, obtemos:

$$\Phi(\vec{x}, t) \mapsto \Phi'(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (\text{B.8})$$

Fazemos $\mu = i$ na equação (B.7), onde $i = 1, 2$ e 3 , obtemos:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \mapsto \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t). \quad (\text{B.9})$$

Agora, consideramos o campo elétrico definido por:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t},$$

substituímos os potenciais escalar e vetor no campo elétrico, obtemos:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \Phi'(\vec{x}, t) - \frac{\partial \vec{A}'(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\frac{\partial \Lambda(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}, t)],$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\Phi'(\vec{x}, t) - \frac{\partial\vec{A}'(\vec{x}, t)}{\partial t},$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}'(\vec{x}, t).$$

Considerando o campo magnético definido por:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t),$$

substituindo o potencial vetor, (B.9), temos:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x}, t),$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}'(\vec{x}, t),$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}'(\vec{x}, t).$$

Como podemos perceber, os campos elétricos e magnéticos continuam invariáveis sob a transformação de calibre. Então, dizemos que os campos são simétricos sob esta transformação. Possuímos a liberdade de calibrar os potenciais escalares e vetores sem alterar o conteúdo físico do Eletromagnetismo. A tal liberdade está relacionada com a escolha da função $\Lambda(\vec{x}, t)$. Após desta escolha, perdemos a liberdade de escolha. Existem diversas escolhas para $\Lambda(\vec{x}, t)$, as mais utilizadas são, [12]: Calibre de Coulomb e Calibre de Lorentz.

Apêndice C

Simetrias de Lorentz e CPT, e Suas Violações

Na Física de Altas Energias, por exemplo, em Teoria de Campos as simetrias desempenham um papel muito importante, pois elas podem dar informações sobre os processos que estamos interessados em estudar.

C.1 Simetria de Lorentz

A simetria de Lorentz declara que a física de qualquer sistema inercial são simétricas por rotações ou boosts¹ do laboratório. O grupo de Lorentz é formado pelo conjunto de matrizes que conservam a seguinte quantidade do espaço-tempo:

$$s^2 = x_\mu \eta^{\mu\nu} x_\nu, \tag{C.1}$$

¹Quando nos referimos ao *boosts* de um sistema, queremos dizer que existe um deslocamento deste sistema na coordenadas espaciais.

onde x_μ é dado por (ct, x, y, z) e $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica do espaço tempo, com diagonal dada por: $(+, -, -, -)$. Para tal sistema físico invariante de Lorentz, as transformações do observador e do próprio sistema não mudam a física do sistema. Uma transformação de Lorentz pode ser expressa usando a matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ para rotação e boosts, isto é:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (\text{C.2})$$

sendo a coordenada x^ν se transforma em x'^μ . A matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ pode ser escrita da seguinte maneira: $\Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda_{boosts} + \Lambda_{rot}$, onde a matriz de boosts possui três configurações: i) boosts no eixo x,

$$\Lambda_{boosts_x} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

sendo $\gamma = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$;

ii) boosts no eixo y,

$$\Lambda_{boosts_y} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\frac{v}{c} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\text{C.4})$$

iii) boosts no eixo z,

$$\Lambda_{boosts_z} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (C.5)$$

Estas matrizes Λ_{boosts} são ortogonais, isto é: $\Lambda_\nu^\mu \Lambda_\lambda^\nu = \delta_\lambda^\mu$. A matriz de rotação, por sua vez, pode ter uma destas três configurações: i) rotação dos eixos y e z por um ângulo α no sentido anti-horário, tendo o eixo x fixo,

$$\Lambda_{rot_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sen\alpha \\ 0 & 0 & -\sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix};$$

ii) rotação dos eixos x e z por um ângulo β no sentido anti-horário, tendo o eixo y fixo,

$$\Lambda_{rot_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & -\sen\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sen\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix},$$

iii) rotação dos eixos x e y por um ângulo θ sentido anti-horário, tendo o eixo z fixo,

$$\Lambda_{rotz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sen\theta & 0 \\ 0 & -\sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C.2 Simetria CPT

Quando nos referimos à simetria CPT, queremos dizer que temos transformações discretas ($\det = -1$) de inversão espacial (\mathcal{P}), inversão temporal (\mathcal{T}), e conjugação de carga (\mathcal{C}).

Paridade (\mathcal{P}): Em um ambiente com 3 dimensões, podemos resumindo a paridade da seguinte forma: paridade é a inversão das coordenadas espaciais. Imaginamos um espelho, quando projetamos a mão direita nele, obtemos a sua imagem como fosse a mão esquerda, figura C.1. Veja que houve uma transformação no eixo y . Ou seja, $y \rightarrow -y$, esta transformação tem a propriedade de transformar uma mão direita em uma mão esquerda. Quando realizamos uma inversão em todas as coordenadas espaciais, $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$, obtemos na realidade, uma reflexão seguida por uma rotação de 180° sobre o eixo y , conforme a figura C.2.

Denotamos a inversão por \mathcal{P} , nós o chamamos de “operador de paridade”. Se o sistema em questão é uma mão direita, e \mathcal{P} atuar em todas as coordenadas desta mão, então teremos uma transformação conforme mostrado na figura C.2, isto é, $\mathcal{P}(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Ao atuar sobre um vetor, \vec{a} , \mathcal{P} produz um vetor que

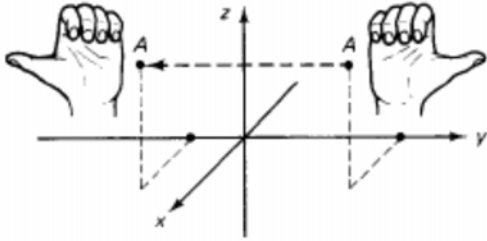


Figura C.1: Transformação da coordenada y , $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$.

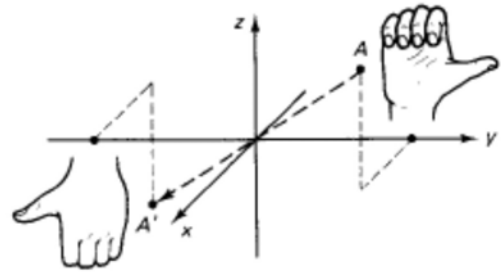


Figura C.2: Transformação das coordenadas, $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$.

aponta no sentido oposto: $\mathcal{P}(\vec{a}) = -\vec{a}$. Considerando agora um produto vetorial, $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, e aplicarmos a operação de paridade nele, temos:

$$\mathcal{P}(\vec{C}) = \mathcal{P}(\vec{A} \times \vec{B}),$$

$$\mathcal{P}(\vec{C}) = \mathcal{P}(\vec{A}) \times \mathcal{P}(\vec{B}),$$

$$\mathcal{P}(\vec{C}) = (-\vec{A}) \times (-\vec{B}),$$

$$\mathcal{P}(\vec{C}) = \vec{C}.$$

Perceba que obtemos o mesmo vetor inicial, quando isto acontece classificamos este tipo de vetor como *pseudo-vetor* ou *vetor axial*. Quanto aos vetores que mudam de sinais classificamos como *vetor* ou *vetor polar*. Na tabela C.1 fazemos um resumo dos comportamentos dos escalares e vetores sob a paridade. Ao atuarmos o operador de paridade duas vezes, voltamos ao ponto inicial: $\mathcal{P}^2 = 1$, e conseqüentemente os autovalores de \mathcal{P} serão ± 1 .

Conjugação de carga (C): Esta simetria consiste em trocar uma partícula

Escalar, s :	$\mathcal{P}(s) = s$
Pseudo-escalar, p :	$\mathcal{P}(p) = -p$
Vetor (ou Vetor Polar), \vec{v} :	$\mathcal{P}(\vec{v}) = -\vec{v}$
Pseudo-vetor (ou Vetor Axial), \vec{c} :	$\mathcal{P}(\vec{c}) = \vec{c}$

Tabela C.1: Comportamento de escalares e vetores sob a transformação de paridade.

por sua anti-partícula. Imaginemos um espelho, e que conseguíssemos refletir uma partícula de carga negativa, e , sua imagem nos aparece uma partícula de carga positiva. Este espelho seria o que faz uma partícula se transformar em uma anti-partícula. Este tipo de transformação chamamos de conjugação de carga. Permitimos \mathcal{C} denotar a conjugação de carga e , ao atuar com \mathcal{C} em um elétron obtemos um pósitron.

$$\mathcal{C}(e^-) = e^+$$

O eletromagnetismo clássico é invariante sob a mudança do sinal das cargas dos elétrons, pois os potenciais e campos invertem os sinais. Como na paridade, ao atuarmos duas vezes com \mathcal{C} devolvemos à partícula no seu estado original: $\mathcal{C}^2 = 1$, e conseqüentemente os autovalores de \mathcal{C} serão ± 1 .

Reversão temporal (T): A reversão temporal consiste em inverter o sentido da passagem do tempo. Para entender como esta operação pode ser uma simetria conservada ou violada vamos recorrer a dois exemplos. Uma bola é lançada em direção a uma das tabelas de uma mesa de sinuca, colide com ela e volta ao ponto de saída. Este processo é filmado, mas o filme se inicia com a bola já em movimento. Uma pessoa assiste ao filme duas vezes, na primeira ele é projetado como foi filmado e na segunda é passado de trás para frente. Esse espectador não poderá dizer quais das

duas projeções correspondem ao sentido real. Neste caso, dizemos que a simetria \mathcal{T} é conservada. Agora imagine o filme de um jarro que cai de uma mesa e se quebra ao atingir o solo. Não haverá dificuldade em diferenciar a seqüência do filme no sentido em que foi filmada da passada no sentido oposto. Este é um processo para o qual a reversão temporal não é válida, dizemos que neste caso a simetria \mathcal{T} é violada.

C.2.1 Teorema da Simetria CPT

A simetria CPT depende criticamente da simetria de Lorentz. Dizemos que um sistema físico é invariante sob CPT quando as cargas são invertidas (\mathcal{C}), os eixos espaciais são refletidos (\mathcal{P}) e o tempo é invertido (\mathcal{T}), isto é:

$$\mathcal{C} : \quad q \rightarrow -q$$

$$\mathcal{P} : \quad \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$$

$$\mathcal{T} : \quad t \rightarrow -t.$$

A transformação total definimos como $\Theta \equiv \mathcal{CPT}$. Neste trabalho não vamos provar este teorema, pois saíria do nosso objetivo. Entretanto, mais detalhes pode ser obtidos nos artigos [19] e [20].

O teorema CPT afirma que uma Teoria Quântica de Campos, local, deve ser invariante sob uma operação combinada de transformação de paridade, inversão temporal e conjugação de carga, dito de outra maneira, o hamiltoniano H é invariante

sob CPT:

$$\Theta H(x) \Theta^{-1} = H(-x) \quad (\text{C.6})$$

O teorema é válido se as duas condições são satisfeitas:

a) a teoria deve ser local, possuir um lagrangeano Hermitiano, e ser invariante sob transformações de Lorentz;

b) a teoria deve ser quantizada canonicamente com comutadores para campos com spin inteiro, e anti-comutadores para spin semi-inteiro.

As simetrias podem ser violadas separadamente, mas qualquer teoria de campos que obedeça às condições a) e b) deve ser invariante perante as três operações (CPT).

Na próxima seção fazemos uma análise no modelo que estamos estudando.

C.3 Quebra das Simetrias de Lorentz e CPT no Modelo em Estudo

Para observarmos as violações das simetrias no modelo em consideração, vamos ver primeiramente a quebra da simetria de Lorentz e depois a quebra da simetria de CPT.

C.3.1 Verificando a Simetria de Lorentz

Podemos utilizar a equação (C.2) para verificar a simetria de Lorentz. Vejamos como isso pode ser feito no primeiro termo da Lagrangeana do modelo, consideramos \mathcal{L}_{EM} em um referencial k' com velocidade v em relação ao referencial inercial k , ou

seja:

$$\mathcal{L}'_{EM} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}.$$

Podemos ter \mathcal{L}'_{EM} em relação ao referencial inercial k ,

$$\mathcal{L}'_{EM} = -\frac{1}{4}(\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta)F_{\alpha\beta}(\delta_\alpha^\kappa \delta_\beta^\lambda \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\lambda)F^{\kappa\lambda}.$$

Lembrando que: δ_α^κ é igual a 1 se $\kappa = \alpha$, e 0 se $\kappa \neq \alpha$; e $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\alpha = 1$. Assim, obtemos:

$$\mathcal{L}'_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{L}'_{EM} = \mathcal{L}_{EM}.$$

Assim, verificamos que a lagrangeana \mathcal{L}_{EM} é invariante sob a transformação de Lorentz, ou seja, a simetria de Lorentz é mantida.

Realizando o mesmo processo para o segundo termo da Lagrangeana do modelo, temos:

$$\mathcal{L}'_{Fontes} = j'_\mu A'^\mu$$

$$\mathcal{L}'_{Fontes} = \Lambda_\mu^\alpha j_\alpha \Lambda^\mu_\beta A^\beta \delta_\alpha^\beta$$

$$\mathcal{L}'_{Fontes} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda^\mu_\alpha j_\alpha A^\alpha$$

$$\mathcal{L}'_{Fontes} = j_\alpha A^\alpha$$

$$\mathcal{L}'_{Fontes} = \mathcal{L}_{Fontes}$$

A Lagrangeana $\mathcal{L}_{\text{Fontes}}$ é invariante sob a transformação de Lorentz.

Agora, utilizando o terceiro termo da Lagrangeana do modelo, temos:

$$\mathcal{L}'_{\text{CS}} = -\frac{1}{2}b'_\mu A'_\nu \tilde{F}'^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}'_{\text{CS}} = -\frac{1}{4}b'_\mu A'_\nu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{L}'_{\text{CS}} = -\frac{1}{4}\Lambda_\mu{}^\kappa b_\kappa \Lambda_\nu{}^\lambda A_\lambda \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \Lambda_\alpha{}^\omega \Lambda_\beta{}^\theta F_{\omega\theta}$$

$$\mathcal{L}'_{\text{CS}} = -\frac{1}{2}\Lambda_\mu{}^\kappa \Lambda_\nu{}^\lambda \Lambda_\alpha{}^\omega \Lambda_\beta{}^\theta \delta_\omega^\alpha \delta_\theta^\beta b_\kappa A_\lambda \tilde{F}_{\omega\theta}$$

$$\mathcal{L}'_{\text{CS}} \neq \mathcal{L}_{\text{CS}}$$

A lagrangeana eletromagnética do tipo Chern-Simons muda sob a transformação de Lorentz, ou seja, este termo viola a simetria de Lorentz. Em particular, b_μ é fixo no espaço-tempo, assim as matrizes de transformações de Lorentz quando atuado nele não influenciará, em outras palavras, ele quebra a isotropia do espaço-tempo.

C.3.2 Verificando a Simetria CPT

Antes de verificar a simetria CPT de cada termo do modelo estudado, vamos ver como a simetria CPT atua separadamente sobre $j_\mu = (\rho, \vec{J})$, $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ e $\partial_\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})$, e como ela atua, em conjunto nestas grandezas físicas.

Começamos com a quadri-corrente, quando atuamos com a conjugação de carga

obtemos uma corrente no sentido contrário da original, ou seja,

$$\mathcal{C}(j_\mu) = \mathcal{C}(\rho, -\vec{J}) = (-\rho, \vec{J}) = -(\rho, -\vec{J}) = -j^\mu.$$

Quando atuamos com a paridade e a inversão temporal, a corrente não “sente” nada, isto é,

$$\mathcal{P}(j_\mu) = \mathcal{P}(\rho, -\vec{J}) = (\rho, +\vec{J}) = +j^\mu,$$

$$\mathcal{T}(j_\mu) = \mathcal{T}(\rho, -\vec{J}) = (\rho, +\vec{J}) = +j^\mu.$$

Ao atuarmos com as operações CPT no quadri-potencial, obtemos:

$$\mathcal{C}(A_\mu) = \mathcal{C}(\Phi, -\vec{A}) = (-\Phi, +\vec{A}) = -(\Phi, -\vec{A}) = -A_\mu,$$

o quadri-potencial modifica sob \mathcal{C} quando é “trocada” uma partícula por uma anti-partícula. Aplicando a paridade e a inversão temporal no quadri-potencial, notamos que modifica apenas o potencial-vetor, \vec{A} :

$$\mathcal{P}(A_\mu) = \mathcal{P}(\Phi, -\vec{A}) = (\Phi, +\vec{A}) = +A^\mu,$$

$$\mathcal{T}(A_\mu) = \mathcal{T}(\Phi, -\vec{A}) = (\Phi, +\vec{A}) = +A^\mu.$$

Na derivada do espaço-tempo, a mesma não modifica quando atuamos com a

	j_μ	A_μ	∂_μ
\mathcal{C}	$-j^\mu$	$-A_\mu$	∂_μ
\mathcal{P}	j^μ	A^μ	∂^μ
\mathcal{T}	j^μ	A^μ	$-\partial^\mu$
Θ	$-j^\mu$	$-A_\mu$	$-\partial_\mu$

Tabela C.2: Transformações de CPT na quadri-corrente, no quadri-potencial e na derivada espaço-tempo.

conjugação de carga,

$$\mathcal{C}(\partial_\mu) = \mathcal{C}\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \partial_\mu.$$

Mas modifica quando atuarmos com \mathcal{P} e \mathcal{T} ,

$$\mathcal{P}(\partial_\mu) = \mathcal{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla}\right) = \partial^\mu,$$

$$\mathcal{T}(\partial_\mu) = \mathcal{T}\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = -\partial^\mu.$$

Vamos montar uma tabela para podermos analisar o conjunto das operações CPT nestas grandezas. Com o auxílio da tabela C.2, podemos determinar com Θ atua em cada termo do modelo. Por exemplo, a atuar com Θ no primeiro termo da langrageana do nosso modelo, fica da seguinte maneira:

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{4} \Theta (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{4} \Theta (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \Theta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{4} [(-\partial^\mu)(-A^\nu) - (-\partial^\nu)(-A^\mu)] [(-\partial_\mu)(-A_\nu) - (-\partial_\nu)(-A_\mu)]$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{EM}} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{EM}} = \mathcal{L}_{\text{EM}}.$$

Então, o termo eletromagnético é invariante sob a operação CPT, ou seja, é simétrico sob CPT.

Fazendo o mesmo para a Lagrangeana das fontes, verificamos que ela é simétrica sob CPT. Ou seja,

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{Fontes}} = \Theta(j_\mu A^\mu)$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{Fontes}} = (-j^\mu)(-A_\mu)$$

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{Fontes}} = \mathcal{L}_{\text{Fontes}}.$$

Agora, usamos o teorema CPT e temos que o terceiro termo do modelo, \mathcal{L}_{CS} , viola a simetria CPT no ponto de vista da partícula. Pois, este termo quebra a simetria de Lorentz e assim não verificando uma das condições de validade deste teorema, novamente afirmando, isto acontece no ponto de vista da partícula. Então, podemos afirmar que:

$$\Theta \mathcal{L}_{\text{CS}} \neq \mathcal{L}_{\text{CS}}.$$

Sem utilizar o teorema CPT, vejamos como se comporta b_μ sob tais transformações:

i) atuando com \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}(b_\mu) = \mathcal{C}(b_0, \vec{b}) = (b_0, \vec{b}) = b_\mu;$$

ii) atuando com \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}(b_\mu) = \mathcal{C}(b_0, \vec{b}) = (b_0, \vec{b}) = b_\mu;$$

iii) atuando com \mathcal{T} :

$$\mathcal{T}(b_\mu) = \mathcal{C}(b_0, \vec{b}) = (b_0, \vec{b}) = b_\mu.$$

Assim, ao atuarmos com a transformação total em b_μ , obtemos:

$$\Theta(b_\mu) = b_\mu.$$

Logo, este parâmetro quebra a simetria CPT.

Apêndice D

Detalhes de Cálculos Realizados

Neste apêndice possui apenas cálculos, então serão apresentados sem qualquer fundamentação teórico, ou seja, apenas as contas.

D.1 Cálculo do Tensor Canônico de Energia-Momento

Para começar este apêndice, lembrando do modelo estudado sem fontes elétricas,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}b_{\mu}A_{\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$$

e do tensor canônico de energia-momento, que é definido por:

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\lambda})}\partial^{\mu}A^{\lambda} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Substituindo a lagrangeana citada acima, obtemos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \partial^\mu A^\lambda - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

$$T^{\mu\nu} = \left[-\frac{1}{4} \frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} - \frac{1}{2} b_\mu A_\nu \frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \right] \partial^\mu A^\lambda - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

Para facilitar a escrita, vamos calcular as derivadas separadamente.

Primeira derivada, $\frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}$:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{\eta_{\mu\omega} \eta_{\nu\kappa}}{\eta_{\mu\phi}} \frac{\partial F^{\omega\kappa}}{\partial(\partial^\phi A^\lambda)} F^{\mu\nu} + \frac{F_{\mu\nu}}{\eta_{\mu\phi}} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial^\phi A^\lambda)}$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{1}{\eta_{\mu\phi}} [\eta_{\mu\omega} \eta_{\nu\kappa} (\delta_\phi^\omega \delta_\lambda^\kappa - \delta_\phi^\kappa \delta_\lambda^\omega) F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} (\delta_\phi^\mu \delta_\lambda^\nu - \delta_\phi^\nu \delta_\lambda^\mu)]$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \eta^{\phi\mu} [4F_{\phi\lambda}]$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = 4F^\mu{}_\lambda$$

Segunda derivada, $\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}$:

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{\eta_{\mu\phi}} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\rho} \frac{\partial F^{\gamma\rho}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\rho}}{\eta_{\mu\phi}} (\delta_\phi^\gamma \delta_\lambda^\rho - \delta_\phi^\rho \delta_\lambda^\gamma)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\phi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\eta_{\alpha\phi} \eta_{\beta\lambda} - \eta_{\alpha\lambda} \eta_{\beta\phi})$$

Substituindo estas derivadas no tensor canônico, obtemos:

$$T^{\mu\nu} = \left[-\frac{1}{4}4F^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}b_\mu A_\nu \frac{1}{2}\eta^{\mu\phi}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\eta_{\alpha\phi}\eta_{\beta\lambda} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\phi}) \right] \partial^\mu A^\lambda - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right).$$

Lembrando de $F^{\lambda\mu} = \partial^\lambda A^\mu - \partial^\mu A^\lambda$, obtemos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \left[-\frac{1}{4}4F^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}b_\mu A_\nu \frac{1}{2}\eta^{\mu\phi}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\eta_{\alpha\phi}\eta_{\beta\lambda} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\phi}) \right] (\partial^\lambda A^\mu - F^{\lambda\mu}) - \\ & - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}b_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Remanejando esta expressão, obtemos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} b_\alpha A_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} - F^\mu{}_\lambda \partial^\lambda A^\nu - \\ & - \frac{1}{4}b_\mu A_\nu \eta^{\mu\phi}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\eta_{\alpha\phi}\eta_{\beta\lambda} - \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\phi}) \partial^\lambda A^\mu. \end{aligned}$$

Para obter o tensor energia-momento é preciso satisfazer a igualdade: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Assim, temos a parte do tensor canônico que conserva a energia-momento, isto é:

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}b^\nu \tilde{F}^{\mu\alpha} A_\alpha.$$

D.2 Verificação da Conservação do Tensor de Energia-Momento

Para verificar se a equação (2.9) é conservada, aplicamos ∂_μ em $\Theta^{\mu\nu}$, isto é,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = & -(\partial_\mu F^{\mu\alpha})F^\nu{}_\alpha - F^{\nu\alpha}(\partial_\mu F^\mu{}_\alpha) + \frac{1}{4}[(\partial^\nu F^{\alpha\beta})F_{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta}(\partial^\nu F_{\alpha\beta})] + \\ & + \frac{1}{2}b^\nu[(\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\alpha})A_\alpha + \tilde{F}^{\mu\alpha}(\partial_\mu A_\alpha)] \end{aligned}$$

Lembrando das equações dinâmicas apenas para os campos, isto é, com $j_\mu = 0$ e

$$k_\mu = 0:$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \tag{D.1a}$$

e usando $[\partial_\mu, \partial_\nu]A_\alpha \equiv 0$ para A_α regular, obtemos a simetrização do tensor energia-momento.

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0.$$

D.3 Redução Dimensional de $(3+1)D$ para $(2+1)D$

No Capítulo 3 é citada uma redução dimensional, vejamos os cálculos realizados para sair da equação (3.5) para chegar nas equações (3.7) e (3.8).

Partindo da equação:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu + j_{ind}^\nu + b_\mu \tilde{F}^{\mu\nu},$$

abrimos o somatório considerando $\mu = \hat{\mu} = 0, 1, 2$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\nu} + \partial_3 F^{3\nu} = j^\nu + j_{ind}^\nu + b_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}\nu} + b_3 \tilde{F}^{3\nu}.$$

Ao fazemos $\nu = \hat{\nu} = 0, 1, 2$, temos:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \partial_3 F^{3\hat{\nu}} = j^{\hat{\nu}} + j_{ind}^{\hat{\nu}} + b_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + b_3 \tilde{F}^{3\hat{\nu}}.$$

Especificando explicitamente a nossa redução para cada termo:

$$A^\mu \mapsto (A^{\hat{\mu}}, \phi); \tag{D.2a}$$

$$b^\mu \mapsto (b^{\hat{\mu}}, m); \tag{D.2b}$$

$$j^\mu \mapsto (j^{\hat{\mu}}, \lambda); \tag{D.2c}$$

$$j_{ind}^\mu \mapsto (j_{ind}^{\hat{\mu}}, \lambda_{ind}); \tag{D.2d}$$

$$k^\mu \mapsto (k^{\hat{\mu}}, \chi). \tag{D.2e}$$

Usando, $\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \equiv \tilde{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ e $\tilde{F}^{\hat{\nu}3} \equiv \tilde{F}^{\hat{\nu}}$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = j^{\hat{\nu}} + j_{ind}^{\hat{\nu}} - m \tilde{F}^{\hat{\nu}} + b_{\hat{\alpha}} \tilde{G}^{\hat{\alpha}\hat{\nu}}.$$

Agora, ao fazer $\nu = 3$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} F^{\hat{\mu}3} + \partial_3 F^{33} = j^3 + j_{ind}^3 + b_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}3} + b_3 \tilde{F}^{33}.$$

Usando o conjunto (D.2) e $F^{\hat{\mu}3} \equiv G^{\hat{\mu}}$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} G^{\hat{\mu}} = \lambda + \lambda_{ind} + b_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}}.$$

No entanto, ao considerar a equação (3.5): $\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = k^{\nu}$. Fazemos $\mu = \hat{\mu} = 0, 1, 2$ e $\nu = \hat{\nu} = 0, 1, 2$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = k^{\hat{\nu}},$$

ao utilizar a equivalência $\tilde{F}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \equiv \tilde{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, temos:

$$\partial_{\hat{\mu}} \tilde{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = k^{\hat{\nu}}.$$

Ao considerarmos $\nu = 3$, obtemos:

$$\partial_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}3} = k^3;$$

usando o conjunto (D.2), logo,

$$\partial_{\hat{\mu}} \tilde{F}^{\hat{\mu}} = \chi.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Dirac, P.A.M.; Proc. Royal Soc. (London) **A133** (1931) 60;
- [2] Baêta, A.B.S. and Helayël-Neto, J.A.; Phys. Rev. **D73** (2006) 105020;
- [3] Jackiw, R. and Kosteletsky, V.A.; arXiv:hep-ph/9901358v1 1999;
- [4] Feng, B., Mingzhe, L., Jun-Qing Xia, Xuelei, C. and Zhang, X.; Phys. Rev. **L96** (2006) 221302;
- [5] Revista Scientific American; Brasil - Edição Especial - N° 1, página 45;
- [6] Pisarski, R.D.; Phys. Rev. **D34** (1986) 12;
- [7] Griffiths, D. J.; *Introduction to Electrodynamics*. Second Edition, Wiley Publishing, New York (1995);
- [8] Dirac, P.A.M.; Phys. Rev. **74** (1948) 817;
- [9] Goddard, P. and Olive, D.I.; Rep. Prog. Phys. **41** (1978) 1357;
- [10] Carroll, M. S. and Field, G. B.; Phys. Rev. **D41** (1990) 1231;
- [11] Yakov Itin; Phys. Rev. **D70** (2004) 60;

- [12] Jakson, J.D.; *Classical Electrodynamics*. Third Edition, Wiley Publishing, New York (1999);
- [13] Kostelecky, V.A. and Mewes, M.; Phys. Rev. **D66** (2002) 056005;
- [14] Jakiw; **hep-ph/9811322** (1998)
- [15] Henneaux, M. and Teitelboim, C.; Phys. Rev. **L56** (1986) 7;
- [16] Belich, H. Jr., Ferreira, M.M.Jr., Helayël-Neto, J.A. and Orlando, M.T.; Phys. Rev. **D37** (2003) 125011;
- [17] Moura-Melo, W.A. and Helayël-Neto, J.A.; Phys. Rev. **D63** (2001) 065013;
- [18] Belich, H.Jr., Ferreira, M.M.Jr. and Helayël-Neto, J.A.; Eur. Phys. J. **C38** (2005) 511;
- [19] Kaku, M; Oxford University (1993);
- [20] Colladay, D. C.; PhD thesis, Indiana University. 511 (1998);
- [21] Griffiths, D. J.; *Introduction to Elementary Particles*. Second Edition, Wiley Publishing, Canada (1987);
- [22] Messiah, A.; *Quantum Mechanics*. Dover Edition, Wiley Publishing, New York (1999);
- [23] Reitz, J.R., Milford, F.J. e Christy, R.W.; *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Quinta Reimpressão, Editora Campus, Rio de Janeiro (1982);
- [24] Butkov, E.; *Física Matemática*. Editora LTC, Rio de Janeiro (1988);

- [25] O.W. Greenberg, Phys. Rev. **L89** (2002) 231602;
- [26] Baêta A.B., Belich, H., Boldo, J.L., and Helayël-Neto, J.A., Phys. Rev. **D67** (2003) 085021;
- [27] Barraz, N.M.Jr., Fonseca, J.M., Moura-Melo, W.A., and Helayël-Neto, J.A.; Phys. Rev. **D76** (2007) 027701.