

JACKSON LUIZ ORIONE RAFAEL CUNHA

FLUXOS ANÔMALOS DE ANOSOV

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

C972f  
2020

Cunha, Jackson Luiz Orione Rafael, 1992-  
Fluxos anômalos de Anosov / Jackson Luiz Orione Rafael  
Cunha. – Viçosa, MG, 2020.  
77 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f.76-77.

1. Difeomorfismos. 2. Fluxos de Anosov. I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514.3

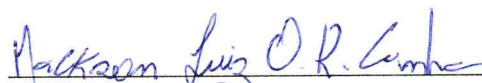
JACKSON LUIZ ORIONE RAFAEL CUNHA

FLUXOS ANÔMALOS DE ANOSOV

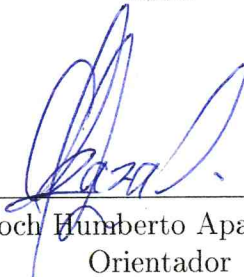
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de outubro de 2020.

Assentimento:



Jackson Luiz Orione Rafael Cunha  
Autor



Enoch Humberto Apaza Calla  
Orientador

# Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas de curso pela amizade e companheirismo, bem como pelos momentos de descontração e de estudos.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelo apoio e excelentes serviços prestados. Em especial, ao meu orientador Enoch, que sempre me deu suporte de forma presencial ou virtualmente neste momento de isolamento social.

Finalmente, agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

"O aumento do conhecimento é como  
uma esfera dilatando-se no espaço:  
quanto maior a nossa compreensão,  
maior o nosso contato com o  
desconhecido."

---

Blaise Pascal

# Resumo

CUNHA, Jackson Luiz Orione Rafael, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2020. **Fluxos Anômalos de Anosov**. Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.

D. V. Anosov [1] estudou as propriedades de sistemas especiais que representam a ideia mais perfeita de um comportamento hiperbólico global. Desde então, esses sistemas, que atualmente são conhecidos como sistemas de Anosov (fluxos e difeomorfismos de Anosov), são objeto de estudo de vários pesquisadores. Um exemplo muito famoso de difeomorfismo de Anosov no toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ , conhecido como mapa do gato de Arnold, é o induzido pela aplicação linear  $f(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Uma suspensão desse difeomorfismo produz um fluxo de Anosov numa 3–variedade, onde o conjunto não errante é a variedade toda, foi conjecturado que fosse verdade para qualquer variedade que suporte um fluxo de Anosov. Em 1974, Verjovsky publicou o artigo [17] dizendo que toda variedade que suporta um fluxo de Anosov de codimensão um, possui conjunto não errante como sendo toda a variedade. Neste trabalho, apresentaremos os exemplos mostrados por John Franks e Bob Williams em [7] que contradizem o artigo de Verjovski no caso especial, quando a variedade tem dimensão 3. Esse comportamento inesperado (ou anômalo) de tais exemplos é o que justifica, assim como no artigo de Franks e Williams [7], esta pesquisa.

Palavras-chave: Difeomorfismo de Anosov. Fluxo de Anosov. DA-difeomorfismo. Fluxos de Anosov Intransitivos.

# Abstract

CUNHA, Jackson Luiz Orione Rafael, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2020. **Anomalous Anosov Flows**. Adviser: Enoch Humberto Apaza Calla.

D. V. Anosov [1], studied the properties of special systems that represent the most perfect idea of a global hyperbolic behavior. Since then, these systems that are currently known as Anosov's systems (flows and diffeomorphisms of Anosov), are the object of study by several researchers. A very famous example of Anosov's diffeomorphism in the torus  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ , known as Arnold's cat map, is induced by the linear application  $f(x, y) = (2x + y, x + y)$ . A suspension of this diffeomorphism produces an Anosov flow in a 3-manifold, where the non-wandering set is the entire variety. Many examples known even before 1980 had this property. So it was conjectured that it was true for any variety that supports an Anosov flow. In fact, Verjovsky published the article [17] saying that in every variety that supports a one-dimensional Anosov stream, it has a non-wandering set as being the whole variety. In this work, we will present the examples shown by John Franks and Bob Williams in [7] that contradict Verjovski's article in the special case when the manifold is 3. This unexpected (or anomalous) behavior of such examples is what motivates, as in the article by Franks and Williams [7], the title presented.

Keywords: Anosov diffeomorphism. Anosov flow. DA-diffeomorphism. Intransitive Anosov flows.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Noções de Variedades . . . . .	12
1.1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	12
1.1.2 Espaço Tangente . . . . .	23
1.1.3 Folheações . . . . .	26
1.2 Noções de Dinâmica . . . . .	30
1.2.1 Dinâmica Discreta . . . . .	31
1.2.2 Dinâmica Contínua . . . . .	34
<b>2 Difeomorfismos de Anosov</b>	<b>38</b>
2.1 Conjuntos Hiperbólicos . . . . .	38
2.2 Fluxo de Anosov . . . . .	46
2.3 O DA-Atrator . . . . .	50
2.3.1 A Função Bump . . . . .	50
2.3.2 DA-Difeomorfismo . . . . .	53
2.3.3 Conjuntos Atratores . . . . .	56
<b>3 A Construção dos Exemplos</b>	<b>60</b>
3.1 O Primeiro Exemplo . . . . .	60

3.2 O Segundo Exemplo . . . . . 70

# Introdução

Os Sistemas Dinâmicos são uma área da Matemática que, de forma breve, estuda o comportamento evolutivo de um determinado objeto ao longo do tempo de acordo com uma lei de formação. Essa lei, pode se descrita como uma aplicação, uma equação diferencial ou até mesmo um algoritmo.

Com essa singela caracterização de um Sistema Dinâmico, podemos reunir uma imensa quantidade de situações que se enquadram no alvo de estudo dessa área. Os exemplos são tão diversificados que podem se tratar de uma simples observação do movimento de um pêndulo, ou algo mais delicado como o efeito de uma pandemia sobre a economia mundial.

Apesar da sua rica presença e aplicabilidade em situações cotidianas, os Sistemas Dinâmicos são uma área relativamente nova. Seu surgimento ocorreu quando, no final do século XIX, Poincaré buscou compreender a evolução do nosso sistema solar. Até então, a abordagem utilizada se concentrava em resolver as equações diferenciais do movimento.

Devido às dificuldades encontradas, Poincaré sugeriu a utilização de ferramentas vindas de outras áreas, como Topologia, Geometria, Análise e Álgebra, com o intuito de obter uma descrição qualitativa do problema. Esse feito, marcou o nascimento da teoria dos sistemas dinâmicos. A partir desse momento, diversos matemáticos passaram a dar atenção a essa nova área.

No início da década de 60, D. V. Anosov [1] estudou as propriedades de sistemas especiais que representam a ideia mais perfeita de um comportamento hiperbólico global. Desde então, esses sistemas, que inicialmente foram chamados de U-sistemas, passaram a ser objeto de estudo de vários pesquisadores. O termo "Sistemas Anosov", que se refere aos fluxos e difeomorfismos com características especiais que apresentaremos a seguir,

---

foi atribuído por Smale em [16], reconheceu a riqueza de suas propriedades e, com essa notação, designou os devidos créditos ao autor.

Um fluxo sobre uma variedade  $M$  é de Anosov se o fibrado tangente  $TM$  em  $M$  se decompõe em três subfibrados  $E^s$ ,  $E^u$  e  $TX$ . Sendo  $E^s$  e  $E^u$  invariantes pela derivada do fluxo, contraindo em  $E^s$ , expandindo em  $E^u$  e sendo  $TX$  tangente ao fluxo  $\phi^t$ . Analogamente, é definido um Difeomorfismo de Anosov como é feito em [15].

Um exemplo muito conhecido de Difeomorfismo de Anosov no toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  é induzido pela aplicação linear  $f(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Esse difeomorfismo é chamado de Mapa do Gato de Arnold (Arnold's cat map), e seu nome é dado em homenagem ao matemático Russo Vladimir Arnold, que em [2] demonstrou seus efeitos na década de 1960, usando a imagem de um gato.

Uma suspensão desse difeomorfismo produz um Fluxo de Anosov numa 3-variedade, onde o conjunto não errante é a variedade toda, ou seja, um fluxo transitivo. Muitos exemplos conhecidos até antes de 1980 tinham essa propriedade. Por isso, foi conjecturado que fosse verdade para qualquer variedade que suporte um Fluxo de Anosov. Aliás, Verjovsky publicou, em 1974, um artigo [17] dizendo que toda variedade que suporta um Fluxo de Anosov de codimensão um, possui conjunto não errante como sendo toda a variedade.

Neste trabalho, apresentaremos os exemplos mostrados por John Franks e Bob Williams em [7] que contradizem o artigo de Verjovski no caso especial, quando a variedade tem dimensão 3. Ou seja, vamos construir Fluxos de Anosov que possuem conjuntos não errantes diferentes das variedades que habitam. Esse comportamento inesperado (que chamaremos de comportamento anômalo) de tais exemplos é o que justifica, assim como no artigo de Franks e Williams [7], o interesse por esta pesquisa de mestrado.

Mas antes de partimos para a construção efetiva desses exemplos, precisamos entender alguns conceitos essenciais de Dinâmica e Variedades. Por esse motivo, optamos por estruturar este trabalho em capítulos, organizados da seguinte forma: no primeiro capítulo nos dedicamos, inicialmente, a apresentar ao leitor alguns conceitos sobre variedades diferenciais, tomando o cuidado de expor exemplos e resultados relevantes para o entendimento do trabalho. Em seguida, trazemos algumas definições de dinâmica discreta e contínua. Apesar do nosso principal objeto de estudo envolver,

predominantemente, a dinâmica contínua, optamos por apresentar alguns elementos da dinâmica discreta, por ser mais intuitiva e, conseqüentemente, possibilita uma melhor absorção do conteúdo.

No segundo capítulo, apresentamos os Sistemas de Anosov, ou seja, definimos o que são os Difeomorfismos e os Fluxos de Anosov. Aproveitamos o capítulo para estabelecer o que são Conjuntos Atratores e introduzir uma técnica utilizando Funções Bump, que permitem fazer, de forma contínua, modificações em difeomorfismos. Esses difeomorfismos modificados, conhecidos como DA-Difeomorfismos, são a base da estratégia para a construção dos nossos exemplos.

Finalmente, no terceiro e último capítulo, reproduzimos a construção dos exemplos feita por Franks e Williams em [7], utilizando algumas modificações do Mapa do Gato de Arnold, juntamente com colagens apropriadas entre variedades.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os espaços e as ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. O nosso objetivo é definir e elucidar os principais resultados preliminares com o intuito de ajudar o leitor a se familiarizar com os conceitos e notações que serão abordados. Para a elaboração desse capítulo, foram utilizados, como principais referências, os textos [4, 5, 10, 12, 14, 15].

### 1.1 Noções de Variedades

Mencionamos, no capítulo introdutório, que o objetivo deste trabalho é construir variedades que suportam Fluxos de Anosov não transitivos. Mas, antes disso, precisamos esclarecer alguns conceitos sobre variedades diferenciais.

#### 1.1.1 Variedades Diferenciáveis

O cálculo diferencial é uma excelente ferramenta para obter informações e propriedades de um espaço geométrico. Apesar dessa imprescindível ferramenta ter sido inicialmente desenvolvida para espaços euclidianos, podemos expandir os seus conceitos para espaços mais gerais que sejam localmente parecidos com os euclidianos. Esse tipo de estrutura recebe o nome de Variedade.

Como foi dito, as Variedades Diferenciáveis são espaços topológicos que, a grosso modo, se parecem localmente com espaços euclidianos. De modo geral, cada ponto de

uma variedade com dimensão  $n$  possui uma vizinhança que é homeomorfa ao espaço euclidiano também de dimensão  $n$ . Para deixar esses conceitos mais precisos, vejamos algumas definições que podem ser encontradas em [5, 12].

**Definição 1.** *Uma topologia sobre um conjunto  $M$  é uma coleção  $\tau$  de subconjuntos de  $M$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $\emptyset$  estão em  $\tau$ ;
2. A união arbitrária de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ ;
3. A interseção finita de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ .

Um conjunto  $M$  munido de uma topologia  $\tau$  é chamado espaço topológico. Um subconjunto  $A \subset M$  é chamado de conjunto aberto do espaço topológico  $M$ , quando  $A \in \tau$ .

**Exemplo 1.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer.*

1. A coleção formada por todos os subconjuntos de  $X$  é uma topologia sobre  $X$  denominada Topologia Discreta, que comumente é denotada por  $\mathcal{P}(X)$ .
2. A coleção  $\tau = \{\emptyset, X\}$  é uma topologia sobre  $X$ , conhecida como Topologia Caótica. Observe que os únicos abertos de  $X$  referentes à Topologia Caótica são os conjuntos  $\emptyset$  e  $X$ .

Denominamos por vizinhança de um elemento  $x$  pertencente ao espaço topológico  $X$ , qualquer subconjunto  $A$  de  $X$  que contenha um aberto  $V$  da topologia contendo o elemento  $x$ , ou seja, para algum  $V \in \tau$  tem-se  $x \in V \subseteq A$ . Um espaço topológico diz-se Hausdorff quando elementos distintos possuem vizinhanças disjuntas.

**Definição 2.** *Diremos que uma família  $\beta \subset \tau$  é uma base para  $\tau$  se dado  $U \in \tau$  existe  $C \in \beta$  tal que*

$$U = \bigcup \{V : V \in C\}.$$

**Exemplo 2.** *Apenas de forma ilustrativa, os intervalos da forma  $(a, b)$ , com  $a < b$  em  $\mathbb{R}$ , formam uma base para a topologia usual em  $\mathbb{R}$ .*

Depois de definir o que é um espaço topológico  $M$ , é interessante estabelecermos critérios para mensurar o quanto dois elementos desse espaço estão próximos. Para isso, precisamos definir o que uma métrica.

**Definição 3.** *Uma métrica sobre um conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada par ordenado de elementos  $x, y \in X$  ao número real  $d(x, y)$  satisfazendo, para todos  $x, y, z \in X$ , as seguintes propriedades:*

1.  $d(x, x) = 0$ ;
2. Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ ;
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Um conjunto  $X$  munido com uma métrica é denominado espaço métrico.

**Exemplo 3.** *Vejamos alguns exemplos de métricas:*

1. *Seja  $X$  um conjunto qualquer. A função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\begin{cases} d(x, x) = 0 \\ d(x, y) = 1, \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

*é uma métrica em  $X$ , conhecida como Métrica Discreta.*

2. *Seja  $\mathbb{R}^n$  das  $n$ -uplas de números reais. Vamos representar um elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  por  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Defina as aplicações  $d, d_S$  e  $d_M$  definidas como*

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ d_S(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ d_M(x, y) &= \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

*são métricas e denominadas de Métrica Riemanniana, Métrica da Soma e Métrica do Máximos.*

Agora temos conceitos suficientes que nos permitem apresentar a primeira definição sobre Variedades.

**Definição 4.** *Uma variedade topológica de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$  com as seguintes propriedades:*

1.  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff;
2.  $M$  tem uma base enumerável de abertos;
3.  $M$  é localmente euclidiano: Para qualquer ponto  $p \in M$ , existem abertos  $U \subseteq M$  contendo  $p$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $\phi : U \rightarrow A$ . Em outras palavras, cada ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 5.** *Sejam  $M$  uma variedade topológica e  $U \subset M$  aberto, tal que  $p \in U$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ , aberto e  $\phi : U \rightarrow A$  um homeomorfismo. O par  $(U, \phi)$  é denominado sistema de coordenadas local de  $M$  em  $p$  e  $U$  é denominado vizinhança coordenada.*

Quando for conveniente, indicaremos apenas por  $\phi : U \rightarrow A$  o sistema de coordenadas local de  $M$  em  $p$  ao invés de  $(U, \phi)$ .

**Definição 6.** *Um atlas de dimensão  $n$  de  $M$  é uma coleção  $\mathfrak{U} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de homeomorfismos sendo  $U_\alpha$  uma aberto de  $M$ ,  $V_\alpha$  um abeto de  $\mathbb{R}^n$  e  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ . Os homeomorfismos*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\alpha \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset V_\beta$$

*são chamados de mudanças de coordenadas.*

Um atlas  $\mathfrak{U}$  é dito de classe  $C^r$ , se todas suas as mudanças de coordenadas são de classe  $C^r$ . Um sistema de coordenadas  $\psi$  é dito admissível relativamente ao atlas  $\mathfrak{U}$  de dimensão  $n$  e classe  $C^r$  se,  $\mathfrak{U} \cup \{\psi\}$  também é um atlas de classe  $C^r$ . Quando um atlas  $\mathfrak{U}$  contém todos os sistemas de coordenadas admissíveis, dizemos que esse atlas é maximal.

Vale destacar que a condição de atlas  $\mathfrak{U}$  não ser maximal não impede a construção da teoria. Isso ocorre devido ao fato de que sempre podemos acrescentar os sistemas de coordenadas admissíveis que, por ventura, não estão em  $\mathfrak{U}$ , formando assim, um atlas maximal. Diante disso, por conveniência, trataremos apenas de atlas maximais.

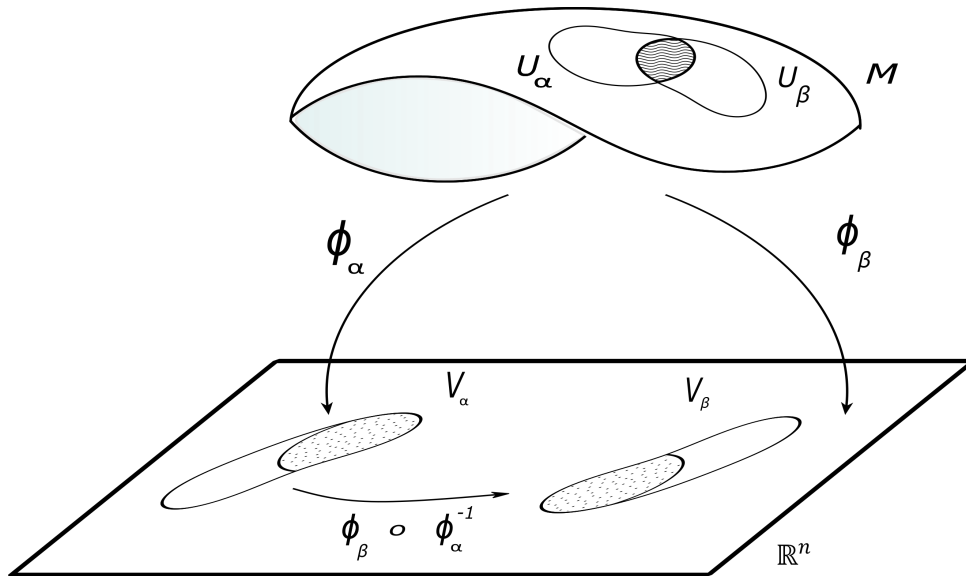


Figura 1: Homeomorfismo mudança de coordenadas.

Depois dessas definições, temos condições de apresentar a segunda concepção sobre variedades, que é a de variedade diferenciável.

**Definição 7.** Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ , é um par  $(M, \mathfrak{U})$ , onde  $M$  é uma variedade topológica de dimensão  $n$  e  $\mathfrak{U}$  é um atlas maximal de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ . Ou seja,

1.  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff;
2.  $M$  tem uma base enumerável de abertos;
3.  $M$  e  $\mathbb{R}^n$  são localmente homeomorfos;
4.  $\mathfrak{U}$  é um atlas maximal de dimensão  $n$  e classe  $C^r$ .

**Exemplo 4.** Considere a esfera  $S^n$  dada por

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Vamos mostrar que  $S^n$  é uma variedade de dimensão  $n$ .

Com efeito, para cada  $i = 1, \dots, n+1$ , considere os semiespaços determinados pelo hiperplano  $x_i = 0$

$$H_i^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i > 0\} \text{ e } H_i^- = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_i < 0\}$$

e os conjuntos obtidos pela interseção destes hiperplanos com a esfera unitária

$$U_i^+ = H_i^+ \cap S^n \text{ e } U_i^- = H_i^- \cap S^n$$

que são abertos de  $S^n$ . Observe que

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-) = S^n$$

ou seja, estes  $2(n+1)$  abertos são suficientes para cobrir  $S^n$ .

Agora, para verificar que  $S^n$  é realmente uma variedade, precisamos mostrar que cada um dos abertos  $U_i^\pm$  são difeomorfos a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Para isso, tomemos a bola aberta  $B^n(0,1) \cap \mathbb{R}^n$  centrada na origem e raio igual a 1, sendo que as aplicações  $\phi_i^\pm$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_i^\pm : \quad U_i^\pm &\rightarrow B^n(0,1) \\ (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, x_2, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

no qual o  $i$ -ésimo termo é omitido para cada  $i = 1, \dots, n+1$  fixado.

Tome  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$  em  $S^n$ . Observe que se  $\phi_i^+(x) = \phi_i^+(y)$ , temos que

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1})$$

Além disso, como  $x, y \in S^n$  e  $x_i, y_i > 0$ , segue que

$$\begin{aligned} x_i &= \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2)} \\ &= \sqrt{1 - (y_1^2 + \dots + y_{i-1}^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_{n+1}^2)} = y_i \end{aligned}$$

Isso mostra que  $x = y$  e, conseqüentemente,  $\phi_i^+$  é uma aplicação injetora.

Agora considere  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in B^n(0,1)$  um ponto arbitrário da bola aberta.

Tome

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|}, y_i, \dots, y_n) \in S^n$$

Observe que  $\sqrt{1 - |y|} > 0$  e, conseqüentemente,  $x \in U_i^+$ . Por construção, temos que

$\phi_i^+(x) = y$ , o que prova que  $\phi_i^+$  é sobrejetora e, portanto, uma bijeção sendo  $(\phi_i^+)^{-1} = \psi_i^+$  dada por:

$$\psi_i^+(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - |y|}, y_i, \dots, y_n).$$

Analogamente, podemos demonstrar o feito acima para a aplicação  $\phi_i^-$ . Note que  $\phi_i^\pm$  e  $\psi_i^\pm$  são aplicações contínuas e diferenciáveis. Sendo assim,  $\mathcal{U} = \{\phi_i^\pm\}$  é um atlas de dimensão  $n$  de  $S^n$ .

Como  $S^n$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e  $\mathcal{U}$  é um atlas de dimensão  $n$ , então  $S^n$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . A Figura 2 ilustra a composição do atlas que acabamos de construir para o caso especial  $n = 2$ .

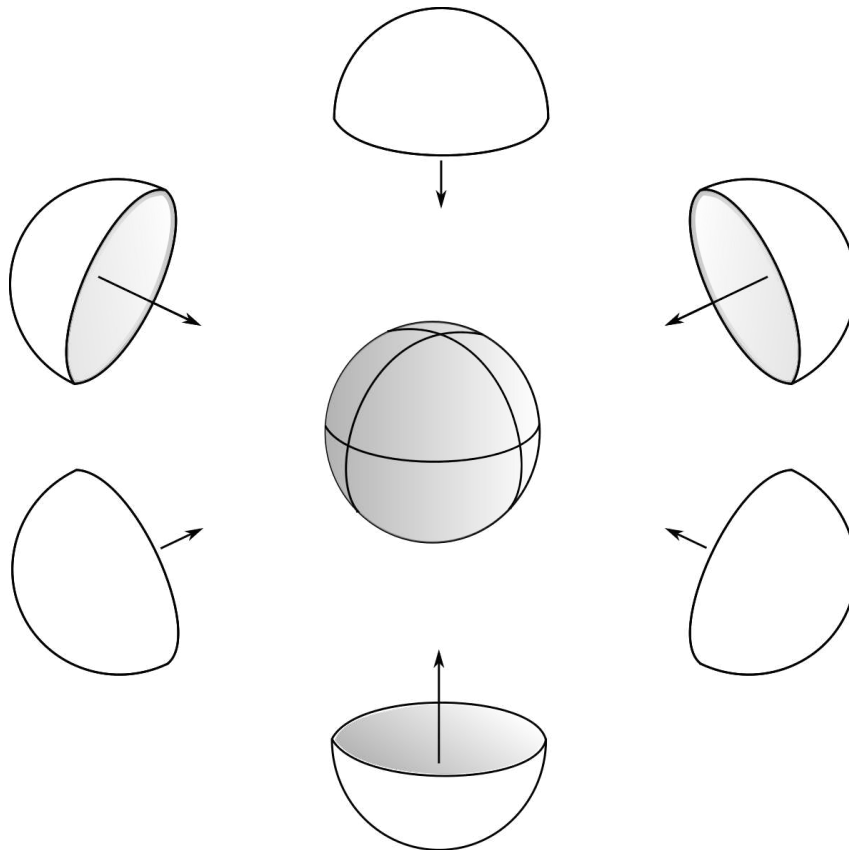


Figura 2: Atlas de  $S^2$ .

**Teorema 1.** *Sejam  $M$  uma variedade de dimensão  $m$  e  $N$  uma variedade de dimensão  $n$ . Então,  $M \times N$  é uma variedade de dimensão  $m + n$ .*

*Demonstração.* De fato, se  $\phi : V \rightarrow V_0$  e  $\psi : U \rightarrow U_0$  são cartas locais para  $M$  e  $N$  respectivamente, então  $V_0 \subset \mathbb{R}^m$  e  $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ . Assim a aplicação  $\phi \times \psi : V \times U \rightarrow V_0 \times U_0$

dada por  $\phi \times \psi(x, y) = (\phi(x); \psi(y))$  é uma carta local para  $M \times N$  e como  $V_0 \times U_0$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Isso implica que  $M \times N$  é uma variedade  $(m + n)$ -dimensional.

□

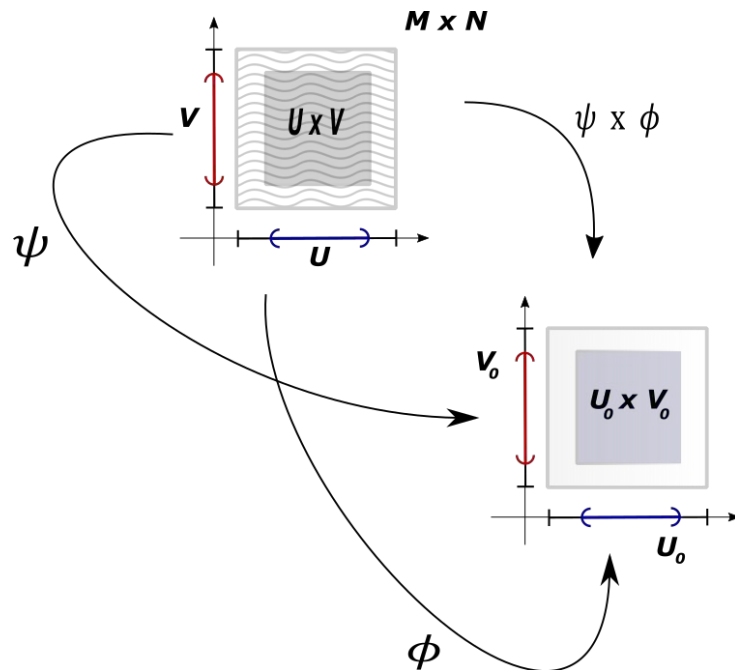


Figura 3: Variedade  $M \times N$

**Exemplo 5.** O toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ , segundo o teorema anterior, é uma variedade de dimensão 2, uma vez que vimos no Exemplo 4, que  $S^1$  é uma variedade de dimensão 1.

Talvez, a forma mais comum de se obter um toro bidimensional seja como foi feito no Exemplo 5, ou seja, através de cartesianos de dois círculos. Mas nem sempre essa construção é a mais viável. Na Seção 2.1, daremos uma construção para o toro mais conveniente para o nosso estudo.

Agora, com a terceira e última definição, fecharemos a parte inicial que estrutura o conceito de variedades. Apresentaremos a definição de variedade com bordo.

**Definição 8.** Sejam  $\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ . Uma variedade com bordo, de classe  $C^k$ , é um espaço topológico  $M$ , Hausdorff, com base enumerável de abertos, munido de um atlas  $\{\phi_i : U_i \rightarrow V_i \cap \mathbb{H}^n\}$ , cujas mudanças de coordenadas são de classe  $C^k$ .

O bordo de  $M$ , que denotaremos por  $\partial M$ , é o conjunto dos pontos  $x \in M$  tais que

existe uma carta  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  no atlas tal que

$$\phi_i(x) \in \partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$$

**Exemplo 6.** O disco unitário  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  é uma variedade de dimensão dois cujo bordo é dado por  $\partial D^2 = S^1$ .

**Teorema 2.** O produto de uma variedade sem bordo  $X$  com uma variedade  $Y$  com bordo, é uma outra variedade  $X \times Y$  com fronteira. Mais ainda,

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

*Demonstração.* Seja  $(x, y) \in X \times Y$ , como  $x \in X$  e a variedade  $X$  não possui bordo, existe uma parametrização local  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset X$ , sendo  $U \subset \mathbb{R}^k$  aberto e  $\phi(U)$  uma vizinhança de  $x$ . Analogamente, como  $y \in Y$ , existe uma parametrização local  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset Y$ , com  $V \subset \mathbb{H}^l$  aberto, tal que  $\psi(V)$  é uma vizinhança de  $y$ . Deste modo basta tomar a parametrização local  $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \phi(U) \times \psi(V)$  sendo  $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{H}^l \subset \mathbb{H}^{k+l}$ , e assim segue o resultado. □

**Exemplo 7.** O toro sólido  $D^2 \times S^1$ , segundo os teoremas acima, é um variedade de dimensão três cujo bordo é o toro  $\mathbb{T}^2$ .

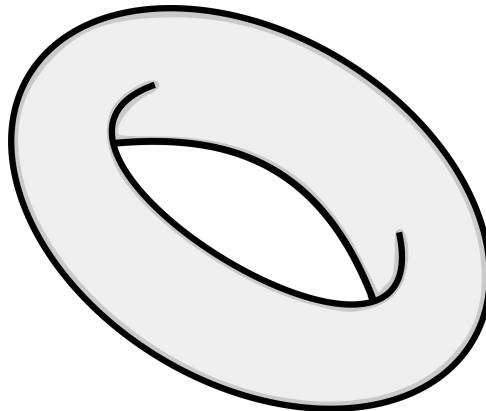


Figura 4: Toro Sólido  $D^2 \times S^1$

Para simplificar a notação, indicaremos por  $M^n$  a variedade  $M$  de dimensão  $n$ .

**Definição 9.** Sejam  $M^m, N^n$  variedades de classe  $C^r$ , com  $r \geq 1$ . Dizemos que uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é diferenciável no ponto  $p \in M$  se existem sistemas de coordenadas  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow \psi_\beta(U_\beta) = V_\beta \subset \mathbb{R}^n$  em  $N$ , sendo  $p \in U_\alpha \subset M$  e  $f(U_\alpha) \subset U_\beta \subset N$  tais que

$$f_{(\phi_\alpha, \psi_\beta)} = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$$

é diferenciável no ponto  $\phi_\alpha(p)$ .

Observe que  $f_{(\phi_\alpha, \psi_\beta)}$  é uma função de um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$  em  $\mathbb{R}^n$ . Sendo assim, ao lidarmos com a diferenciabilidade entre variedades, podemos recorrer à Teoria do Cálculo Diferencial.

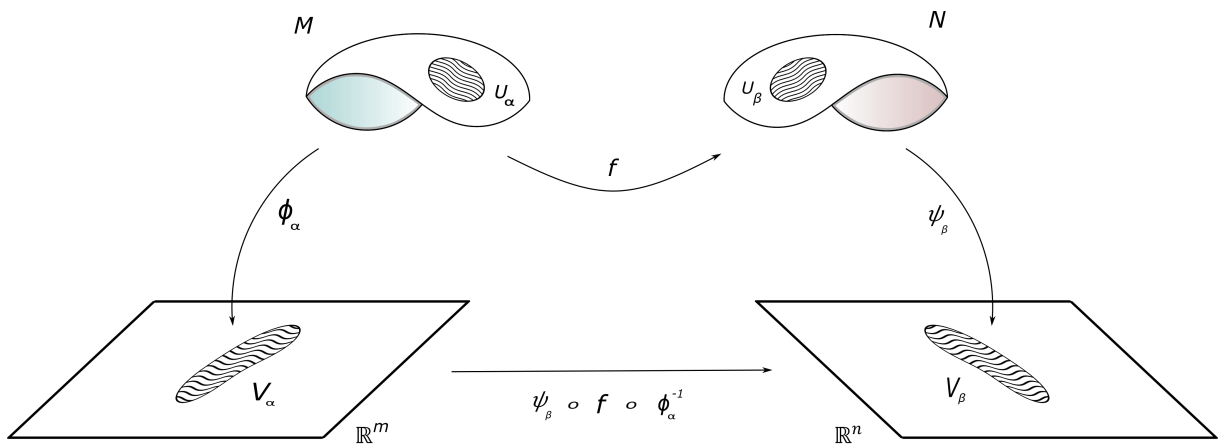


Figura 5: Diferenciabilidade entre variedades.

Geralmente, chamamos  $f_{(\phi_\alpha, \psi_\beta)}$  como a expressão da aplicação  $f$  em relação as cartas  $\phi_\alpha$  e  $\psi_\beta$ . Na prática, essa terminologia não é muito empregada, pois a ideia de diferenciabilidade entre variedades não depende da escolha das cartas.

Para ver este fato, vamos considerar as cartas  $\phi'_\alpha : U'_\alpha \rightarrow \phi'_\alpha(U'_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  em  $M$  e  $\psi'_\beta : U'_\beta \rightarrow \psi'_\beta(U'_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  em  $N$ , e observar que

$$\begin{aligned} \psi'_\beta \circ f \circ \phi'_\alpha &= \psi'_\beta \circ (\psi_\beta \circ \psi_\beta^{-1}) \circ f \circ (\phi_\beta \circ \phi_\beta^{-1}) \circ \phi'_\alpha \\ &= \psi'_\beta \circ \psi_\beta \circ (\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \phi_\beta) \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi'_\alpha \\ &= \psi'_\beta \circ \psi_\beta \circ f_{(\phi_\alpha, \psi_\beta)} \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi'_\alpha \end{aligned}$$

Como  $\psi'_\beta \circ \psi_\beta$  e  $\phi'_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$  são difeomorfismos e  $f_{(\phi_\alpha, \psi_\beta)}$  é diferenciável em  $\phi_\alpha(p)$ , segue que  $f_{(\phi'_\alpha, \psi'_\beta)} = \psi'_\beta \circ f \circ \phi'_\alpha$  é diferenciável em  $\phi'_\alpha(p)$ . Isso mostra que a noção de diferenciabilidade entre variedades está bem definida.

**Definição 10.** Dizemos que a aplicação  $f : M \rightarrow N$  descrita como na definição anterior é diferenciável se  $f$  é diferenciável em cada ponto de  $M$ . Quando  $f$ , além de diferenciável, é uma bijeção diferenciável cuja inversa é também diferenciável, dizemos que  $f$  é um difeomorfismo. Se  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), dizemos que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ , ou simplesmente,  $C^k$  difeomorfismo.

Se existe um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis  $M$  e  $N$  dizemos que elas são difeomorfas.

De um modo geral, livros e artigos nos fornecem um bom número de exemplos de variedades com propriedades relativamente adversas. Entretanto, em certos momentos, podemos estar procurando variedades com características específicas que permitem extrair as informações desejadas com estrutura o mais simples possível.

Por esse motivo, ao longo do tempo foram desenvolvidas técnicas para construir variedades. Uma dessas técnicas é a colagem de variedades através de difeomorfismos entre seus bordos. Simplificamos o resultado da aplicação dessa técnica com a próxima definição.

**Definição 11.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades de classe  $C^\infty$  com bordos compactos  $\partial M = A$  e  $\partial N = B$ . Seja  $f : A \rightarrow B$  um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Então, existe uma variedade sem bordo denominada variedade colada, que denotaremos por  $M \cup_f N$  de modo que

$$M \cup_f N = \overline{M} / \tau$$

sendo  $\overline{M} = M \cup N$  (união disjunta) e  $\tau : A \cup B \rightarrow A \cup B$  de modo que  $\tau|_A = f$  e  $\tau|_B = f^{-1}$ .

**Exemplo 8.** Seja  $M = N = \mathbb{D}^2 \times S^1$  o toro sólido. Como vimos no Exemplo 7, o bordo  $\partial M = \partial N = S^1 \times S^1$ , que é o toro de dimensão dois podem ser colados pelos difeomorfismos  $f, g : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  dadas por:

$$f(x, y) = (x, y) \quad g(x, y) = (y, x).$$

É possível mostrar que  $M \cup_f N$  é difeomorfa a  $S^1 \times S^2$  enquanto  $M \cup_g N$  é difeomorfa a  $S^3$ .

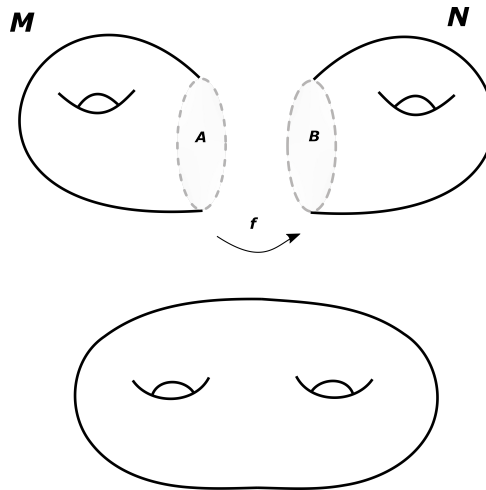


Figura 6: Colagem de variedades com bordo.

O Exemplo 8 ilustra o fato de que a escolha do difeomorfismo utilizado para fazer a colagem influencia diretamente na natureza da variedade obtida. Além disso, é importante destacar que, apesar de  $M \cup_f N$  ter sido apresentada em uma definição, tal objeto tem realmente estrutura de variedade. Uma abordagem mais completa sobre esse tema pode ser encontrada em [11].

### 1.1.2 Espaço Tangente

Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável de classe  $C^k$ , sendo  $k$  maior ou igual a 1. Para um ponto  $p$  qualquer de  $M$ , denotamos por  $C_p$  o conjunto de todos os caminhos  $\alpha : I \rightarrow M$ , definidos no intervalo  $I$  contendo  $0 \in \mathbb{R}$ , tais que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha$  diferenciável em 0. Diremos que dois caminhos  $\alpha, \beta \in C_p$  são equivalentes, e denotaremos por  $\alpha \sim \beta$ , quando existir uma carta local  $\phi$  de  $M$ , tal que

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0).$$

É possível provar que a igualdade acima não depende da carta local  $\phi$  escolhida. Isso resulta que a relação  $\alpha \sim \beta$  é, de fato, uma relação de equivalência.

O vetor velocidade  $\dot{\alpha}$  de um caminho  $\alpha \in C_p$  é, por definição, a classe de

equivalência de  $\alpha$ . Ou seja,

$$\dot{\alpha} = \{\beta \in C_p; \alpha \sim \beta\}.$$

Portanto, dados  $\alpha, \beta \in C_p$ , temos  $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$  se, e somente se,

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0).$$

O conjunto quociente  $T_pM = C_p / \sim$  possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e será chamado de espaço tangente da variedade  $M$  no ponto  $p$ . Para o caso da variedade  $M \subset \mathbb{R}^n$ , podemos ver  $T_pM$  como o conjunto de todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^n$  que são vetores velocidade, em  $p$ , de caminhos diferenciáveis contidos em  $M$ .

O cuidado que tomamos para determinar  $T_pM$  é necessário, uma vez que  $M$  não está, necessariamente, contida em espaços euclidianos. Para facilitar referências ao longo do texto, vamos destacar a definição de espaço tangente aproveitando para apresentar o fibrado tangente.

**Definição 12.** *O espaço quociente  $C_p / \sim$  é chamado de espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$  e denotado por  $T_pM$ . O conjunto*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

*é chamado de fibrado tangente à variedade  $M$ .*

É possível provar que esse conjunto é uma variedade diferenciável de classe  $C^{k-1}$  e de dimensão  $2n$ . A abordagem para espaços tangentes, juntamente com a verificação de  $TM$  ser uma variedade, podem ser encontrados em [10].

**Exemplo 9.** *Vamos provar que  $T_x\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ . Para isso, considere o sistema de coordenadas  $\phi = id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então o isomorfismo  $id : T_x\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por*

$$id(\dot{\alpha}) = (id \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0).$$

*Estamos identificando, em cada  $p \in \mathbb{R}^m$ , a coleção  $\dot{\alpha} = \{\beta \in C_p; \beta \sim \alpha\}$ , com o vetor  $v \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\beta'(0) = v$  para todo  $\beta \in C_p$ .*

Agora, veremos duas categorias especiais de aplicações que são as Imersões e as

Submersões. Seus resultados são de extrema relevância para o desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 13.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma submersão se,*

$$\begin{aligned} Df(p) : T_pM &\rightarrow T_{f(p)}N \\ r &\mapsto Df(p)r \end{aligned}$$

*é sobrejetora para todo  $p \in M$ .*

O trabalho de analisar se  $Df(p)$  é sobrejetora se resume em verificar se o posto da matriz jacobiana  $Jf_p$  é  $n$ . Para isso ocorrer, obrigatoriamente,  $n \leq m$ .

**Exemplo 10.** *Dada uma decomposição em soma direta da forma  $R^{m+n} = R^m \oplus R^n$ , seja  $\pi$  a projeção sobre o primeiro fator, isto é,  $\pi(x, y) = x$ . Como  $\pi$  é linear, segue que  $D\pi(x, y) = \pi(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R^{m+n}$ . Logo,  $\pi$  é uma submersão. A matriz jacobiana de  $\pi$  tem como linhas os  $m$  primeiros vetores da base canônica de  $R^{m+n}$ . Da mesma forma, podemos concluir que a projeção sobre o segundo fator também é uma submersão.*

O teorema a seguir é conhecido como Forma Local das Submersões para variedades. Esse teorema estabelece que, localmente, submersões são equivalentes a projeções. Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em [10]

**Teorema 3.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma submersão de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , num ponto  $p \in M$ , sendo  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Então, existem cartas locais  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $p \in U$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de modo que  $q = f(p) \in V$  e uma decomposição tal que  $f(U) \subset V$  e  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) = x$ .*

**Definição 14.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensão  $m$  e  $n$ , respectivamente. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetora para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $f$  for um homeomorfismo sobre sua imagem  $f(M) \subset N$  com a topologia induzida por  $N$ , dizemos que  $f$  é um mergulho. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho, então,  $M$  é chamada subvariedade de  $N$ .*

Note que, para  $f : M \rightarrow N$  ser uma imersão, é necessário que  $m \leq n$ . A diferença  $(n - m)$  é chamada de Codimensão da Imersão  $f$ .

### 1.1.3 Folheações

Nesta seção, apresentaremos de forma sucinta a noção de folheações juntamente com os principais resultados que iremos utilizar no decorrer deste trabalho, destacando o exemplo importante das folheações de Reeb.

Uma folheação de uma variedade  $M$ , a grosso modo, é a decomposição de  $M$  numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

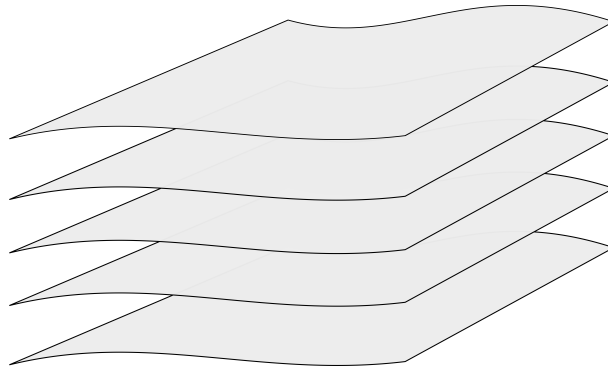


Figura 7: Folheações.

O exemplo mais natural de folheação de dimensão  $n$  é a folheação de

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

onde as folhas são os planos da forma  $\mathbb{R}^n \times \{c\}$  com  $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ .

Os difeomorfismos locais  $h : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  que preservam as folhas desta folheação são aqueles que, para cada  $c \in \mathbb{R}^{m-n}$  com  $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\}) \neq \emptyset$ , satisfazem  $h(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{c'\})$ ,  $c' \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Esses difeomorfismos possuem expressão da forma

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

sendo  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Agora, veremos uma definição mais formal do que é uma folheação.

**Definição 15.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ . Uma folheação de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  em  $M$  é um atlas maximal  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  em  $M$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Se  $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ , então*

$$\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

*sendo  $U_1$  e  $U_2$  discos abertos de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{m-n}$ , respectivamente.*

2. *Se  $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$  são tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Então, a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é da forma*

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$$

*sendo  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ .*

*Neste caso, dizemos que  $M$  é folheada por  $\mathcal{F}$ , ou ainda, que  $\mathcal{F}$  é uma estrutura folheada de dimensão  $n$  de classe  $C^r$  sobre  $M$ .*

**Teorema 4.** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma submersão de classe  $C^r$ . Então, as curvas de nível  $f^{-1}(c)$ , sendo  $c \in N$ , são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  de  $M$ .*

*Demonstração.* Dados  $x \in M$  e  $q = f(x) \in N$ , segue do Teorema da Forma Local das Submersões, que existem cartas locais  $(U, \phi)$  em  $M$ ,  $(V, \psi)$  em  $N$  tais que  $x \in U$ ,  $q \in V$  de modo que:

1.  $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ ;
2.  $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ ;
3.  $\pi_2 = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ , sendo  $\pi_2$  a projeção dada por  $\pi_2(x, y) = y$ .

Vamos provar que as cartas obtidas pelo Teorema da Forma Local das Submersões de  $M$  definem uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ . Como o primeiro item da definição de folheações é naturalmente satisfeito, para mostrar o desejado, basta verificar que a composição do segundo item da definição de folheações independe de  $x$ . Com efeito, sejam  $(U, \phi)$  e  $(\bar{U}, \bar{\phi})$  cartas de  $M$  fornecidos pelo Teorema da Forma Local das Submersões. Observe que

$$\begin{aligned}
\pi_2 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} &= \bar{\psi} \circ f \circ \bar{\phi}^{-1} \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} \\
&= \bar{\psi} \circ f \circ \phi^{-1} \\
&= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi \\
&= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi_2 \circ \bar{\phi} \circ \phi^{-1} = \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2$$

Isso garante que a composição do item (2) da Definição 15 não depende da escolha de  $x$ , o que prova que  $\mathcal{F}$  é uma folheação de classe  $C^r$  de  $M$ . Por definição, as folhas de  $\mathcal{F}$  estão contidas nas curvas de nível de  $f$ . Por sua vez, isto prova que as folhas de  $\mathcal{F}$  são os conjuntos de nível de  $f$ , o que atesta o resultado. □

O próximo exemplo descreve um importante tipo de folheação, que é denominada Folheação de Reeb.

**Exemplo 11.** *Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação definida por*

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z$$

sendo  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^\infty$  tal que  $\alpha(0) = 1$ ,  $\alpha(1) = 0$  e  $\alpha'(t) < 0$ , para todo  $t > 0$ .

Vamos primeiramente mostrar que  $f$  é uma submersão. Com efeito, suponha por absurdo que  $f$  não seja uma submersão. Neste caso, existiria um ponto  $p = (x, y, z)$  tal que  $\nabla f(p) = 0$ , ou seja,

$$(2\alpha'(r^2)xe^z, 2\alpha'(r^2)ye^z, \alpha(r^2)e^z) = (0, 0, 0)$$

Como  $\alpha'(t) < 0$  e  $e^z \neq 0$ , segue que

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ \alpha(r^2) &= 0 \end{cases}$$

De  $\alpha(r^2) = 0$ , teríamos  $1 = r^2 = x^2 + y^2$ . O que é uma absurdo, uma vez que  $x = y = 0$ . Portanto,  $f$  é uma submersão. Logo, segue do Teorema 4 que as curvas de nível são folhas de uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$ .

Vamos explorar um pouco mais esse exemplo. Como vimos, as folhas dessa folheação são descritas por

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z = c.$$

Se  $c = 0$ , então  $\alpha(r^2) = 0$  o que implica que  $x^2 + y^2 = 1$ . Portanto, neste caso, a curva de nível é o cilindro de raio 1 centrado na origem.

Se  $c > 0$ , então  $\alpha(r^2)e^z = c > 0$ . Assim,  $\alpha(r^2) > 0$  e então faz sentido reescrever a expressão da seguinte forma

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(r^2)).$$

Observe que no plano  $y = 0$ , temos

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(x^2)).$$

Observe ainda que  $z \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow 1^+$  ou  $x \rightarrow 1^-$ . Além disso,

$$\begin{aligned} z &= \ln(c) - \ln(\alpha(x^2)) \\ \Rightarrow z' &= -\frac{2x\alpha'(x^2)}{\alpha(x^2)} \end{aligned}$$

Então,  $z' = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ . Portanto, o gráfico dessa expressão restrita ao plano  $y = 0$  se assemelha ao de uma parábola. Consequentemente, devido à simetria de  $\alpha$ , concluímos que as folhas para  $c > 0$  se parecem com paraboloides.

Uma análise análoga pode ser feita para o caso em que  $c < 0$ , mas não a faremos, uma vez que estamos interessados apenas quando  $c \geq 0$ . Mais detalhes sobre a exploração desse exemplo podem ser encontrados em [3].

Ainda explorando o Exemplo 11, vamos considerar a submersão restrita a  $D^2 \times [0, 1]$ . Identificaremos os pontos  $(x, y, 0) \sim (x, y, 1)$  e, assim, obtemos uma variedade quociente que é difeomorfa a  $D^2 \times S^1$ . A folheação  $\mathcal{F}$  induz sobre  $D^2 \times S^1$  uma folheação

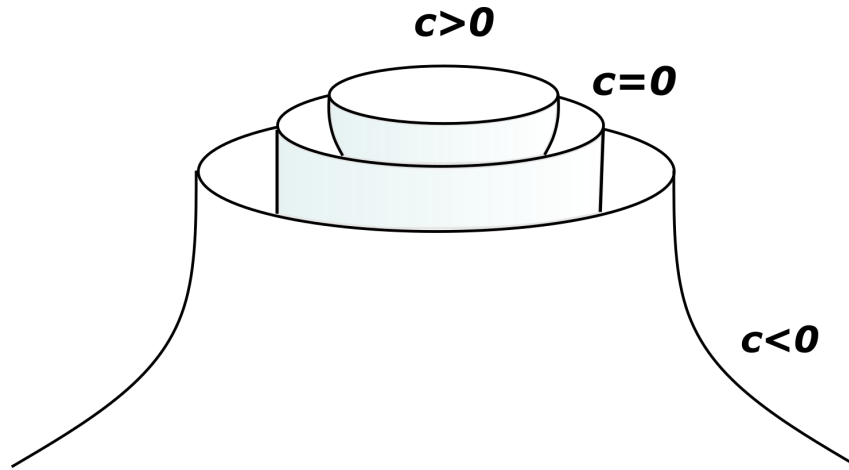


Figura 8: Folheação do Exemplo 11

$\mathfrak{R}$  conhecida como folheação de Reeb.

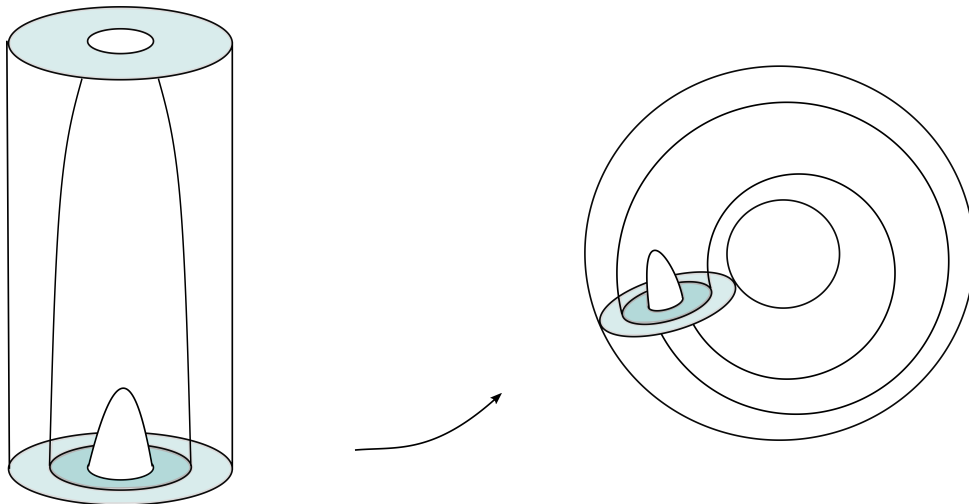


Figura 9: Folheação de Reeb

## 1.2 Noções de Dinâmica

De modo informal e intuitivo, como mencionamos na introdução, um sistema dinâmico é algo que evolui ao longo do tempo, de acordo com uma lei de formação. Essa lei pode se descrita como uma aplicação, uma equação diferencial ou até mesmo um algoritmo. Neste trabalho, apresentaremos apenas conceitos elementares sobre dinâmica com o intuito de alcançar o nosso objetivo.

### 1.2.1 Dinâmica Discreta

Vamos apresentar e formalizar algumas definições e resultados que são essenciais. Para isso, considerem uma aplicação  $f : M \rightarrow M$  de um espaço métrico  $M$  nele mesmo.

Dado um ponto  $x \in M$ , como  $f(x) \in M$ , é possível obter, mediante a composições, as imagens sucessivas de  $x$ . Por simplicidade, denotaremos por

$$f^n(x) = \overbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}^{n \text{ vezes}}(x)$$

essa composição. No caso em que  $f$  possui inversa, faz sentido utilizar a notação  $f^{-n}$  para a composição de  $f^{-1}$  em um número  $n$  de vezes. Por convenção,  $f^0$  é a função identidade  $Id$ , isto é,  $Id(x) = x$  para todo  $x \in M$ .

Podemos lidar com essa lista de composições, que comumente são chamadas de interações, como uma sequência. Estudar a dinâmica é, a grosso modo, tentar entender o comportamento limite destas sequências. Para entender melhor esses conceitos, vejamos algumas definições.

**Definição 16.** *Denominamos como órbita futura(ou órbita positiva) de  $x$ , o conjunto*

$$O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

*No caso de  $f$  for invertível, chamaremos de órbita passada(ou órbita negativa) o conjunto*

$$O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

*e simplesmente de órbita de  $x$  o conjunto*

$$O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

**Definição 17.** *Dizemos que um ponto  $x \in M$  é um ponto fixo de  $f : M \rightarrow M$  se  $f(x) = x$ .*

Se  $x \in M$  é um ponto fixo de  $f^n$  (ou seja,  $f^n(x) = x$ ), para algum  $n$ , então, dizemos que  $x$  é um ponto periódico de  $f$ . Chamamos o menor valor natural de  $n$  satisfazendo

esta propriedade de período do ponto  $x$ . Denotamos por  $Fix(f)$  o conjunto de pontos fixos da função  $f$  e por  $Per(f)$  o conjunto de pontos periódicos de  $f$ .

**Definição 18.** Dizemos que um subconjunto  $\Lambda \subset M$  é positivamente invariante em relação a  $f : M \rightarrow M$  se  $f(M) \subset M$ . No caso de  $f$  ser invertível, dizemos que um subconjunto  $\Lambda \subset M$  é negativamente invariante em relação a  $f$  se  $f^{-1}(M) \subset M$ . Finalmente, um subconjunto  $\Lambda \subset M$  é considerado invariante em relação a  $f$  se  $f(M) = M$ .

Dizemos que  $f : M \rightarrow M$  é uma aplicação transitiva se, para quaisquer dois abertos  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  de  $M$ , existe  $n \geq 0$ , tal que  $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ . No caso de  $M$  ser compacta, dizer que  $M$  é transitiva se equivale à existência de um  $p \in M$ , cuja órbita é densa em  $M$ .

**Definição 19.** Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação contínua definida em um espaço métrico  $(M, d)$ . Fixado  $\epsilon > 0$ , uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  em  $M$  é dita uma  $\epsilon$ -pseudo órbita se vale

$$d(f(x_n), x_{n+1}) \leq \epsilon$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Se existe  $N > 0$  tal que  $x_{N+r} = x_r$ , para todo  $r \in \mathbb{N}$  então a sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é dita uma  $\epsilon$ -pseudo órbita periódica.

Fixado  $\epsilon > 0$ , dizemos que um conjunto finito  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  é uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $y$  se  $x_0 = x, x_n = y$  e  $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Um ponto  $x$  é chamado recorrente por cadeia se, para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma  $\epsilon$ -cadeia de  $x$  a  $x$ . Denotaremos o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia por  $CR(f)$ .

Observe que  $CR(f)$  é fechado, pois dado  $y \in CR(f)$ , existe  $x_{k_n} \in CR(f)$  tal que  $x_{k_n} \rightarrow y$ . Dado  $\epsilon > 0$ , pela continuidade de  $f$ , podemos tomar uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de raio  $\delta > 0$ , com  $\delta < \epsilon/2$ , e  $x_{k_0} \in \mathcal{U}$  tal que  $d(f(y), f(x_{k_0})) < \delta$ . Como  $x_{k_0} \in CR(f)$ , existe uma  $\delta$ -cadeia recorrente de  $x_{k_0}$  para  $x_{k_0}$ , seja  $\{x_{k_0}, x_1, \dots, x_{k_0}\}$  tal cadeia. Note que

$$d(f(y), x_1) \leq d(f(y), f(x_{k_0})) + d(f(x_{k_0}), x_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

e

$$d(f(x_{n-1}), y) \leq d(f(x_{n-1}), f(x_{k_0})) + d(x_{k_0}, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Logo,  $\{y, x_1, \dots, x_{n-1}, y\}$  é uma  $\epsilon$ -cadeia recorrente para  $y$ . Como  $\epsilon$  foi tomado de forma arbitrária, segue que  $y \in CR(f)$  o que comprova que  $CR(f)$  é fechado.

**Definição 20.** Os conjuntos ômega-limite  $\omega_f(x)$  e alfa-limite  $\alpha_f(x)$  de um ponto  $x$ , com respeito à  $f$ , são definidos como

$$\omega_f(x) = \{y \in M; y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\}$$

$$\alpha_f(x) = \{y \in M; y = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x)\}$$

Assim,  $\omega_f(x)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de  $x$ . E  $\alpha_f(x)$  é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de  $x$ .

**Definição 21.** Um ponto  $p \in M$  é dito um ponto não errante para a aplicação  $f$ , se para qualquer vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$ , existir um número natural  $n$  tal que  $f^n(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ . Caso contrário, dizemos que ponto  $p \in M$  é errante. Denotamos por  $\Omega(f)$  o conjunto dos pontos não errantes da aplicação  $f$ .

**Exemplo 12.** O exemplo mais simples de um ponto não errante é o de um ponto fixo. Se  $x \in M$  é um ponto fixo de  $f$ , então  $x$  é um ponto não errante de  $f$ , uma vez que para qualquer vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $x$  e qualquer natural  $n$ ,  $x \in f(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}$ , o que garante que  $f(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}$  é diferente de vazio.

**Proposição 1.** O conjunto dos pontos não errantes  $\Omega(f)$  é fechado e positivamente invariante. Se  $f$  é uma homeomorfismo então  $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$  e  $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ .

*Demonstração.* Considere  $x$  um ponto errante. Por definição, existe uma vizinhança  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  tal que  $f^k(\mathcal{U}_x) \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$ . Em particular  $\mathcal{U}_x \subset M \setminus \Omega(f)$ , o que mostra que  $M \setminus \Omega(f)$  é aberto. Portanto,  $\Omega(f)$  é fechado.

Agora, considere  $x \in \Omega(f)$  e  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $f(x)$ . Pela continuidade de  $f$ ,  $f^{-1}(\mathcal{U})$  é uma vizinhança de  $x$ . Logo, existe  $k$  tal que  $f^k(f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{U})) \neq \emptyset$ . Assim,

$$f(f^k(f^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\mathcal{U}))) = f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$$

o que mostra que  $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ . No caso de  $f$  ser uma homeomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}
& f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \quad \neq \emptyset \\
\Rightarrow & f^{-k}(f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}) \quad \neq \emptyset \\
\Rightarrow & \mathcal{U} \cap f^{-k}(\mathcal{U}) \quad \neq \emptyset,
\end{aligned}$$

o que mostra que  $\Omega(f) \subset \Omega(f^{-1})$ . Analogamente, podemos mostrar que  $\Omega(f^{-1}) \subset \Omega(f)$  o que resulta na igualdade  $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$ .

Finalmente, observe que

$$\Omega(f) = f \circ f^{-1}(\Omega(f)) = f \circ f^{-1}(\Omega(f^{-1})) \subset f(\Omega(f^{-1})) = f(\Omega(f))$$

e portanto  $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ .

□

## 1.2.2 Dinâmica Contínua

As definições apresentadas até o momento são excelências para descrever e entender o que é uma dinâmica. Entretanto, essa abordagem permite efetuar uma análise apenas discreta do nosso objeto. Muitas das vezes é interessante estudar a evolução de um sistema de forma contínua e para isso, precisamos introduzir o conceito de fluxo.

**Definição 22.** *Um fluxo (ou um sistema dinâmico contínuo) é uma aplicação  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  que, para todo  $t, s \in \mathbb{R}$  e  $p \in M$ , satisfaz:*

1.  $\phi(0, p) = p$
2.  $\phi(t, \phi(s, p)) = \phi(t + s, p)$ .

*Comumente denotamos  $\phi(t, p)$ , simplesmente por  $\phi^t(p)$ , sendo  $\phi^t : M \rightarrow M$ .*

A adaptação das definições do caso discreto para o caso contínuo é feita de maneira natural. Como exemplo, vamos definir o conceito de órbita para o fluxo e já aproveitaremos para estabelecer as variedades como espaço de trabalho.

**Definição 23.** *Seja  $\phi^t : M \rightarrow M$  um fluxo sobre uma variedade compacta  $M$  e seja  $p \in M$ , dizemos que*

1. A órbita positiva de  $p$  é o conjunto  $O^+(p) = \{\phi^t(p); t \geq 0\}$

2. A órbita negativa de  $p$  é o conjunto  $O^-(p) = \{\phi^t(p); t \leq 0\}$

3. A órbita de  $p$  é o conjunto  $O(p) = \{\phi^t(p); t \in \mathbb{R}\}$

**Definição 24.** Um campo de vetores de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em uma variedade  $M$ , é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  de classe  $C^r$ , tal que a cada ponto  $p \in M$  associa o vetor  $X(p) \in T_pM$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^r(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^r$  em  $M$ .

**Exemplo 13.** A aplicação  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $X(x, y) = (y, -x)$  é um campo vetorial de classe  $C^\infty$ , uma vez que para cada  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  temos que  $X(p) = (y, -x) \in T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ .

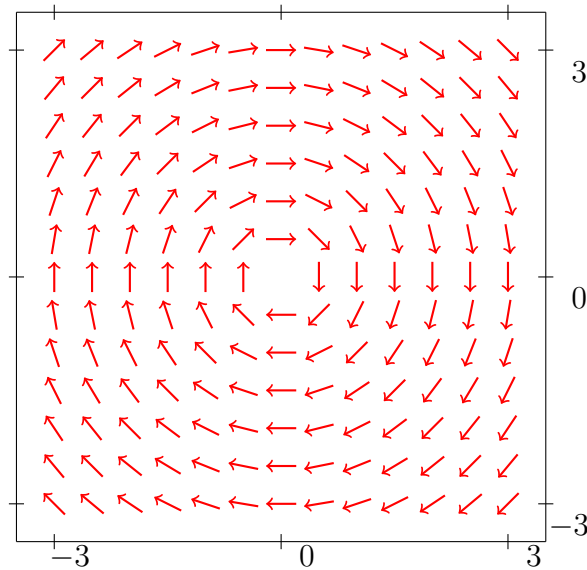


Figura 10: Representação do campo de Vetores  $X$ .

Dado um fluxo  $\phi^t$  de classe  $C^k$ , podemos associar um campo vetorial  $X : M \rightarrow TM$ , de classe  $C^{k-1}$  da seguinte forma:

$$X(x) = \frac{d}{dt}\phi(t, x)|_{t=0}.$$

O campo  $X$  assim definido é tal que  $t \mapsto \phi(t, x)$  é a órbita de  $X$  que passa por  $x$ . De fato, segue da definição de fluxo que

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x) = \frac{d}{dt}\phi(s + t, x)|_{s=0} = \frac{d}{dt}\phi\left(s, \phi(t, x)\right)|_{s=0} = X\left(\phi(t, x)\right).$$

Reciprocamente, se  $X$  é um campo de vetores de classe  $C^k$  em  $M$ , cujas órbitas estão definidas em  $\mathbb{R}$ , então existe um único fluxo de classe  $C^k$ ,  $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ , tal que  $t \mapsto \phi(t, x)$  é a órbita de  $X$  com condição inicial de  $\phi(0, x) = x$ .

De agora em diante, ao escrevemos  $\phi^t$  estaremos nos referindo ao fluxo associado ao campo  $X$ .

Dado uma sistema dinâmico discreto descrito por  $f$  sobre a variedade  $M$ , é possível construir um fluxo definido em um espaços de dimensão igual a  $\dim(M) + 1$ . Tal fluxo é denominado Fluxo Suspensão da aplicação  $f$ . Descreveremos, a seguir, o processo que permite a construção desse fluxo.

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma aplicação de classe  $C^k$  e considere o produto cartesiano  $M \times \mathbb{R}$ . Defina a relação de equivalência  $\sim$  dada por  $(x, s + 1) \sim (f(x), s)$ . Assim, obtemos o espaço quociente

$$M_f = M \times \mathbb{R} / \sim .$$

Com essa relação de equivalência, podemos obter todos os pontos de  $M_f$  apenas considerando  $0 \leq s \leq 1$ . Por esse motivo, muitas das vezes é comum utilizarmos a notação  $M \times [0, 1] / \sim$  para  $M_f$ .

Considere a seguinte equação em  $M \times \mathbb{R}$ , dada por:

$$\begin{cases} x' = 0, \\ s' = 1. \end{cases}$$

Esta equação induz um fluxo  $\phi^t$  em  $M \times \mathbb{R}$  que, por sua vez, induz um fluxo  $\phi_f^t$  em  $M_f$  que satisfaz

$$\phi_f^1(x, 0) = (x, 1) \sim (f(x), 0).$$

O campo  $X_f$  associado a esse fluxo é gerado pelo sistema acima. O fluxo  $\phi_f^t$  que acabamos de descrever é denominado fluxo suspenso de  $f$ .

Uma abordagem mais detalhada sobre a construção do Fluxo Suspensão, juntamente com a prova de que  $M_f$  é realmente uma variedade, pode ser encontrada

em [13].

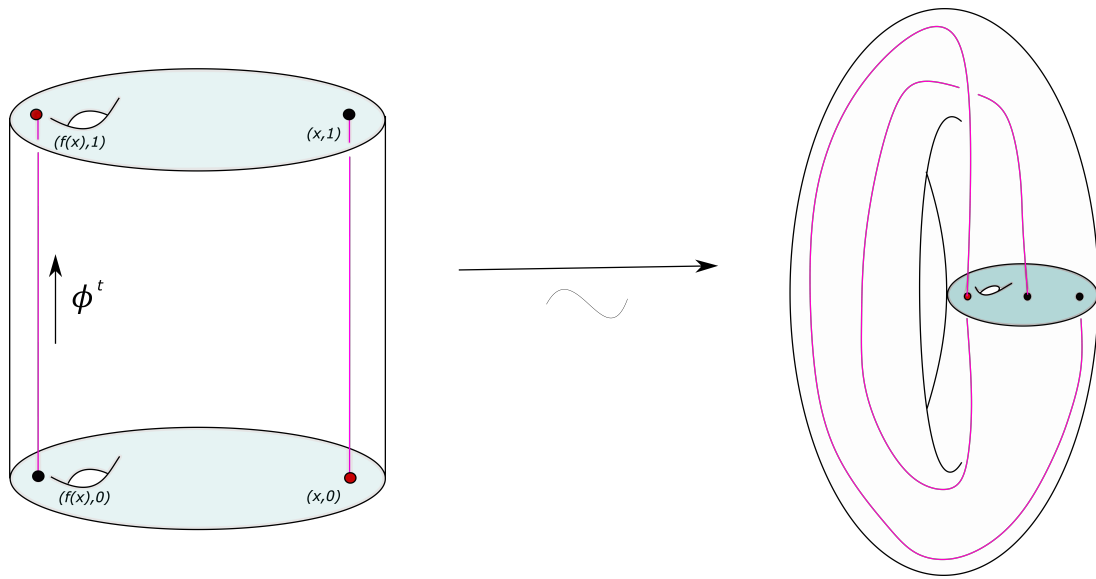


Figura 11: Fluxo Suspensão

# Capítulo 2

## Difeomorfismos de Anosov

### 2.1 Conjuntos Hiperbólicos

**Definição 25.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo. Um subconjunto compacto e invariante  $\Lambda \subset M$  tem uma estrutura hiperbólica por  $f$  se, para cada ponto  $x$  em  $\Lambda$ , tem-se:*

1.  $T_x M = E_x^u \oplus E_x^s$ ;

2. *Esta decomposição é invariante sobre a ação da derivada, ou seja,*

$$Df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u \quad e \quad Df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$$

3. *Existem  $0 < \lambda < 1$  e  $c \geq 1$  independente de  $x$  tal que para todo  $n \geq 0$*

- $\| Df_x^n(v) \| \leq c\lambda^n \| v \|, \quad v \in E_x^s$
- $\| Df_x^{-n}(v) \| \leq c\lambda^n \| v \|, \quad v \in E_x^u$

**Proposição 2.** *Seja  $\Lambda \subset M$  um conjunto hiperbólico de  $f$  com a decomposição  $T_x M = E^s(x) \oplus E^u(x)$ . Para qualquer  $x \in \Lambda$ ,  $E^s(x)$  e  $E^u(x)$  são caracterizados por:*

$$E^s(x) = \{v \in T_x M; |Df^n(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$$

$$E^u(x) = \{v \in T_x M; |Df^{-n}(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

*Demonstração.* Seja  $A(x) = \{v \in T_x M : |Df^n(v)| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$ . Para qualquer  $x \in \Lambda$ , queremos mostrar que  $E^s(x) \subset A(x)$ . Seja  $v \in E^s(x)$ , segue da definição que existem  $0 < \lambda < 1$  e  $C \geq 0$ , tais que

$$|Df^n(v)| \leq C\lambda^n|v|.$$

Como  $0 < \lambda < 1$ , fazendo  $n \rightarrow +\infty$  segue que  $\lambda^n \rightarrow 0$ . Daí,  $|Df^n(v)| \rightarrow 0$ . Logo,  $v \in A(x)$ , mostrando que  $E^s(x) \subset A(x)$ .

Agora, vejamos que  $A(x) \subset E^s(x)$ . Suponhamos que existe  $v \in A(x)$ , tal que  $v \notin E^s(x)$ , então  $v \neq 0$ . Logo

$$|Df^n(v)| \rightarrow \infty$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , contradizendo a definição de  $A(x)$ . Logo  $A(x) \subset E^s(x)$ . Portanto,  $E^s(x) = A(x)$ . Analogamente, podemos mostrar a caracterização de  $E^u(x)$ .

□

**Definição 26.** *Seja  $M$  uma variedade. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é chamado de Difeomorfismo de Anosov se toda a variedade  $M$  possui uma estrutura hiperbólica por  $f$ .*

O próximo exemplo é extremamente importante para o desenvolvimento deste trabalho. Diante disso, dedicaremos boa parte desta seção para explorar e provar suas propriedades.

**Exemplo 14.** *A aplicação  $L_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , dada por  $L_A(x) = \mathbf{A}x$ , sendo*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*um Difeomorfismo de Anosov chamada de Mapa do Gato de Arnold (Arnold's cat map).*

Como já pontuamos, esse difeomorfismo foi nomeado em homenagem ao matemático Russo Vladimir Arnold, que em [2] demonstrou seus efeitos na década de 1960 usando a imagem de um gato, sendo assim a origem do seu nome <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Para o leitor interessado e curioso em ver, na prática, os efeitos desse exemplo, acesse <https://www.jasondavies.com/catmap/>.

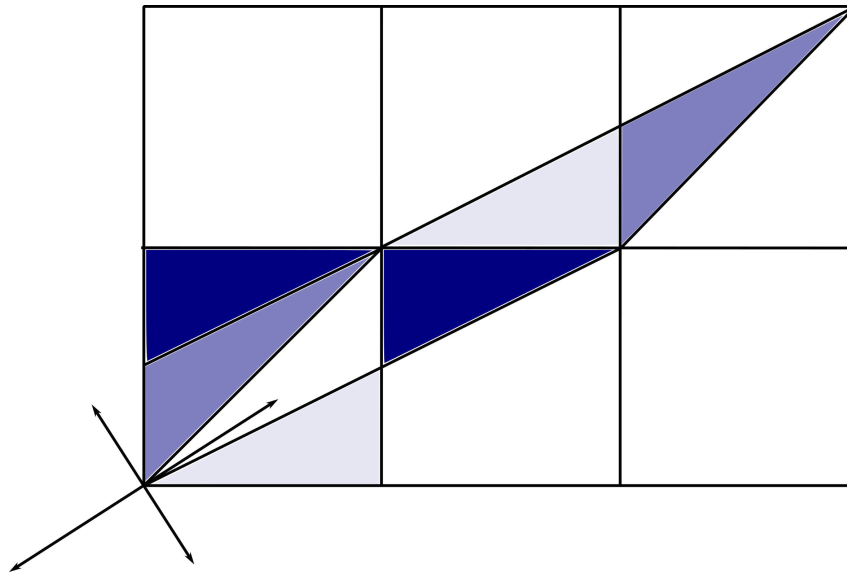


Figura 12: Mapa do Gato de Arnold.

Antes de explorar e provar que o Mapa do Gato do Arnold realmente descreve uma difeomorfismo de Anosov, vejamos uma construção do toro que seja mais conveniente para o nosso propósito.

Nessa construção mais conveniente, vamos ver que um toro pode ser representado por um quadrado de lado unitário, tendo seus lados opostos identificados. Na Figura 2.1 representamos a ação do mapa linear do Exemplo 14 no quadrado unitário. O resultado dessa ação foi representado em triângulos com tonalidades diferentes, que podem, de forma intuitiva, ser recordados e reagrupados no quadrado unitário. Agora, vamos formalizar essa representação.

Vimos, no Exemplo 5, a obtenção do toro  $\mathbb{T}^2$  como o cartesiano de dois círculos. Agora, veremos uma construção um pouco mais sofisticada desse objeto. Para descrever o toro, comecemos com o plano  $\mathbb{R}^2$ .

Considere como idênticos todos os pontos que suas coordenadas se diferem por números inteiros. De forma mais precisa, definiremos a relação  $\sim$  em  $\mathbb{R}^2$  dada por:

$$(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow x - a, y - b \in \mathbb{Z}.$$

Observe que

$$x - x = 0 = y - y \Leftrightarrow (x, y) \sim (x, y) \quad (\text{Reflexiva})$$

$$\begin{aligned} (x, y) \sim (a, b) &\Leftrightarrow x - a, y - b \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow a - x, b - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (a, b) \sim (x, y) \quad (\text{Simétrica}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \sim (a, b) &\Leftrightarrow x - a, y - b \in \mathbb{Z} \\ (a, b) \sim (c, d) &\Leftrightarrow a - c, b - d \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x - c, y - d \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x, y) \sim (c, d) \quad (\text{Transitiva}) \end{aligned}$$

Isso mostra que essa identificação é uma relação de equivalência. Denotaremos por  $[a, b]$  a classe de equivalência do ponto  $(a, b)$ .

Olhando para a representação das classes de equivalência dessa relação, podemos observar que elas podem ser representadas no quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Os pontos da forma  $[0, x]$  e  $[1, x]$  estão identificados. Sendo assim, obtemos com essa identificação um cilindro cujo os círculos bases são os pontos representados por  $[x, 0]$  e  $[x, 1]$ . Tais pontos também estão identificados e, finalmente, ao identificar os dois círculos, obtemos o desejado toro. A figura 13 ilustra essa construção.

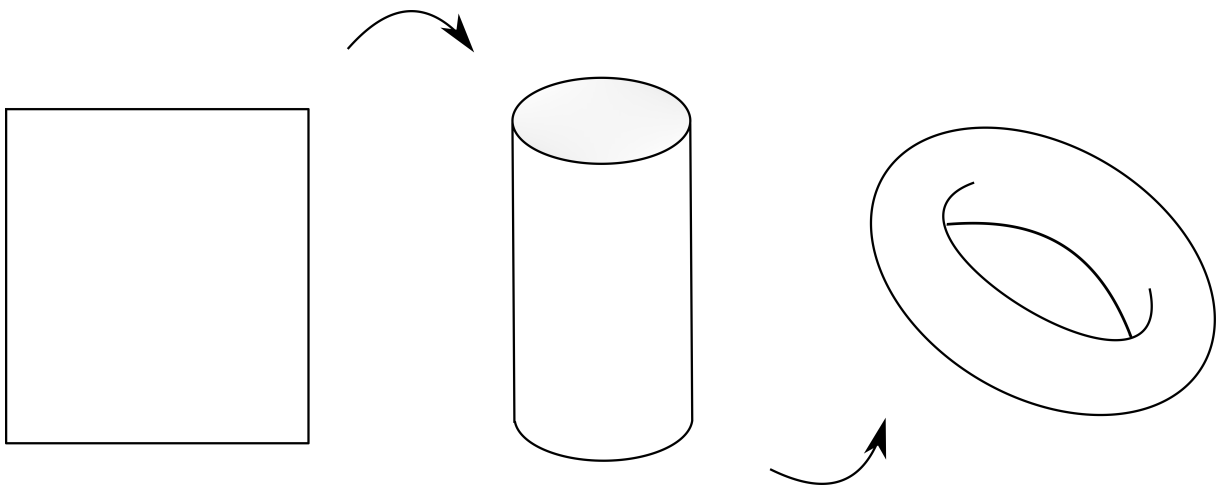


Figura 13: Construção do toro  $\mathbb{T}^2$

Denotamos o toro que apresentamos por  $\mathbb{T}^2$ . Essa notação não é aleatória, pois podemos adaptar a definição da relação de equivalência descrita para  $\mathbb{R}^n$  e assim definir o toro  $\mathbb{T}^n$ . Essa construção em dimensões maiores foi mencionada apenas por curiosidade, uma vez que foge dos nossos objetivos para esse trabalho.

Vamos nos concentrar no toro  $\mathbb{T}^2$ . Seja  $\pi$  a projeção natural de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{T}^2$ , isto é  $\pi(x, y) = [x, y]$ . Certos sistemas dinâmicos em um toro podem ser descritos de maneira mais eficiente no plano e, depois, projetados no toro.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{T}^2 \end{array}$$

Agora, retomemos o Exemplo 14 trocando inicialmente  $\mathbb{T}^2$  por  $\mathbb{R}^2$ . Para isso, seja

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

O intuito é demonstrar que  $f$  é um Difeomorfismo de Anosov. Em seguida, vamos utilizar a projeção  $\pi$  para provar essa propriedade é transferida para  $L_A$ .

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores de  $A$  e seus respectivos autovetores. Para isso, observe que:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma,  $\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  são os autovalores de  $A$ . Consequentemente, podemos obter os autovetores  $v_u = (1 + \sqrt{5}, 2)$  e  $v_s = (1 - \sqrt{5}, 2)$  referentes a  $\lambda_u$  e  $\lambda_s$ , respectivamente.

Observe que  $v_u$  e  $v_s$  são linearmente independentes. Diante disso, podemos escrever  $\mathbb{R}^2$  como soma direta dos autoespaços  $E_{v_u}$  e  $E_{v_s}$  gerados por  $v_u$  e  $v_s$ , respectivamente. Como, para todo ponto  $x \in \mathbb{R}^2$ , o plano tangente  $T_x\mathbb{R}^2$  é o próprio  $\mathbb{R}^2$ , segue  $T_x\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = E_{v_u} \oplus E_{v_s}$ . Assim, verificamos o primeiro item da definição.

Como  $f$  é uma transformação linear, segue que  $Df = f$ . Diante disso, para verificar que esta decomposição é invariante sobre a ação da derivada, basta observar que:

$$\begin{aligned}
E_{v_s} &= \{\alpha v_s; \alpha \in \mathbb{R}\} \\
\Rightarrow Df(E_{v_s}) &= \{\alpha \mathbf{A} v_s; \alpha \in \mathbb{R}\} \\
\Rightarrow Df(E_{v_s}) &= \{\alpha \lambda_s v_s; \alpha \in \mathbb{R}\} = E_{v_s}.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que  $Df(E_{v_u}) = E_{v_u}$ , provando assim o segundo item da definição. Para mostramos o terceiro e último item da definição, vamos considerar  $v_1 \in E_{v_s}$  e  $v_2 \in E_{v_u}$ . Ou seja,  $v_1 = \alpha v_s$  e  $v_2 = \beta v_u$  sendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\| Df(v_1) \| &= \| \mathbf{A} v_1 \| = \| \alpha (\lambda_s v_s) \| = \| \lambda_s (\alpha v_s) \| = \lambda_s \| v_1 \| \\
\Rightarrow \| Df^n(v_1) \| &= \| \mathbf{A}^n v_1 \| = \| \alpha (\lambda_s^n v_s) \| = \| \lambda_s^n (\alpha v_s) \| = \lambda_s^n \| v_1 \|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| Df^{-1}(v_2) \| &= \| \mathbf{A}^{-1} v_2 \| = \| \beta (\lambda_u^{-1} v_u) \| = \| \lambda_u^{-1} (\beta v_u) \| = \lambda_u^{-1} \| v_2 \| \\
\Rightarrow \| Df^{-n}(v_2) \| &= \| \mathbf{A}^{-n} v_2 \| = \| \beta (\lambda_u^{-n} v_u) \| = \| \lambda_u^{-n} (\beta v_u) \| = \lambda_u^{-n} \| v_2 \|
\end{aligned}$$

Tomando  $\lambda = \max\{\lambda_s, \lambda_u^{-1}\}$ , obtemos

$$\| Df^n(v_1) \| \leq \lambda^n \| v_1 \|$$

e

$$\| Df^{-n}(v_2) \| \leq \lambda^{-n} \| v_2 \|.$$

Com isso, concluímos que  $f$  é um difeomorfismo de Anosov. Para transferir essa propriedade para a aplicação  $L_A$  do Exemplo 14, basta verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
\mathbb{T}^2 & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{T}^2
\end{array}$$

comuta. Para isso, tome  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  de modo que  $a = x + M$  e  $b = y + N$ , sendo  $M$  e  $N$  as partes inteiras de  $a$  e  $b$ , respectivamente. Observe que:

$$\begin{aligned}
\pi \circ f(a, b) &= \pi \circ f(x + M, y + N) \\
&= \pi(2x + y + 2M + N, x + y + M + N) \\
&= (2x + y, x + y) \\
&= L_A(x, y) \\
&= L_A \circ \pi(x + M, y + N) = L_A \circ \pi(a, b),
\end{aligned}$$

o que mostra que  $L_A \circ \pi = \pi \circ f$ . Diante disso, finalmente concluímos que  $L_A$  é um Difeomorfismo de Anosov.

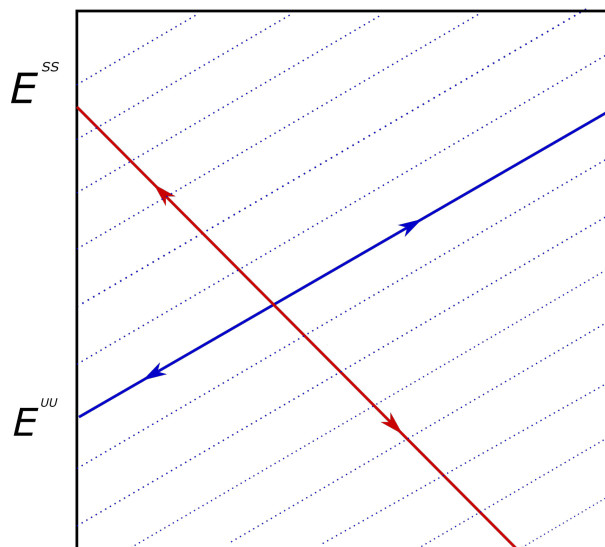


Figura 14: Folheação instável

O mapa linear do Exemplo 14 faz parte de uma classe de homeomorfismo conhecidos como Automorfismos Torais Hiperbólicos. Esses automorfismo são caracterizados, em dimensão dois, pela seguinte definição.

**Definição 27.** Um Automorfismo Toral Hiperbólico é um aplicação  $L_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , dada por  $L_A(x) = \mathbf{A}x$  sendo  $\mathbf{A}$  uma matriz  $2 \times 2$  com as seguintes propriedades

1. Todas entradas inteiras;
2.  $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ ;
3.  $\mathbf{A}$  é hiperbólica, ou seja, seu autovalores possuem modulo diferente de 1.

Como as entradas de  $A$  são inteiras, temos que  $L_A$  está bem definida em  $\mathbb{T}$ . Observe que  $L_A$  é claramente diferenciável, pois sua matriz jacobiana é simplesmente a matriz

$A$ . Além disso, como  $\det(A) = \pm 1$ , a inversa de  $A$  também é uma matriz inteira que é hiperbólica. Portanto,  $A^{-1}$  também induz um automorfismo toral hiperbólico que é, obviamente, a inversa de  $L_A$ . Disto resulta que  $L_A$  é um difeomorfismo.

Assim como fizemos no Exemplo 14, podemos provar que  $L_A$  é um difeomorfismo de Anosov. Uma demonstração detalhada de que um automorfismo toral hiperbólico é, de fato, um difeomorfismo de Anosov pode ser encontrada em [4].

**Axioma A.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  e  $M$  uma variedade compacta. Dizemos que  $f$  é Axioma A se o conjunto não errante  $\Omega(f)$  é hiperbólico e o conjunto de pontos periódicos é denso em  $\Omega(f)$ , ou seja,  $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ .*

Observe que se  $x \in Per(f)$ , existe  $k$  natural tal que  $f^k(x) = x$ . Diante disso,  $f^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  para qualquer vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $x$ . Logo,  $Per(f) \subset \Omega(f)$ . Como  $\Omega(f)$  é fechado, vide Proposição 1, segue que  $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$ . Diante disso, para verificar se um determinado difeomorfismo  $f$  é Axioma A, basta analisar se  $\Omega(f) \subset \overline{Per(f)}$

O teorema a seguir, conhecido como Teorema da Decomposição Espectral, mostra que se o conjunto não-errante para um difeomorfismo  $f$  é um conjunto hiperbólico e os pontos periódicos são densos no conjunto não-errante (ou seja,  $f$  é Axioma A). Então, existe uma decomposição de  $\Omega(f)$  em componentes disjuntas, fechadas, invariantes e transitivas por  $f$ . Essas componentes são chamadas de peças básicas. Uma prova para esse teorema pode ser encontrada em [15].

**Teorema 5.** *Suponha que  $f : M \rightarrow M$  satisfaz o Axioma A. Então o conjunto não-errante  $\Omega(f)$  se decompõe de maneira única como uma união finita e disjunta*

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$$

*sendo cada  $\Lambda_i$  fechado, invariante indecomponível e cada  $f : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$  é topologicamente transitivo. Além disso, cada  $\Lambda_i$  tem uma estrutura de produto local.*

A decomposição proveniente de teorema anterior pode apresentar indicativos relevantes para o estudo do sistema em questão. Uma desses indicativos é o aparecimento do que chamamos de ciclos na decomposição. Para formalizar esse conceito, considere  $X$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo.

Sejam  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k$  conjuntos disjuntos, compactos e invariantes de  $f$  e escreva

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k.$$

Defina  $\Lambda_i \ll \Lambda_j$  se,

$$W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda \neq \emptyset.$$

Essencialmente,  $\Lambda_i \ll \Lambda_j$  significa que existe  $x \in X$  fora de  $\Lambda$  que vai de  $\Lambda_i$  a  $\Lambda_j$ . Note que, quando  $i \neq j$ ,  $W^u(\Lambda_i) \cap W^s(\Lambda_j) \neq \emptyset$ , isso implica automaticamente que  $\Lambda_i \ll \Lambda_j$ , mas isso não ocorre quando  $i = j$ . Diante disso, podemos ver que  $\ll$  não é uma relação de equivalência.

**Definição 28.** Dizemos que  $\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}, \dots, \Lambda_{im}$  forma um ciclo de  $\{\Lambda_i\}$  se,

$$\Lambda_{i1} \ll \Lambda_{i2} \ll \dots \ll \Lambda_{im} \ll \Lambda_{i1}.$$

Assim, quando nenhum subconjunto de  $\{\Lambda_i\}$  forma um ciclo, dizemos que  $\{\Lambda_i\}$  é não-ciclo.

## 2.2 Fluxo de Anosov

Nesta seção, vamos considerar  $M^n$  sendo uma variedade fechada (compacta sem bordo) de classe  $C^k$ . Denotamos por  $X$  um campo de vetores, sem singularidades, de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) em  $M$  e fluxo associado  $\phi^t$ . Denotamos por  $TX$  o sub-fibrado gerado por  $X$  do fibrado tangente  $TM$ .

**Definição 29.** Um fluxo de Anosov de classe  $C^r$  numa variedade  $M$  é um fluxo  $\phi^t : M \rightarrow M$  não singular, de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1. O fibrado tangente  $TM$  se escreve como soma direta de três subfibrados

$$TM = E^{ss} \oplus TX \oplus E^{uu}$$

tais que tanto  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$  são invariantes pela diferencial  $D\phi^t$  e  $TX$  é tangente ao fluxo  $\phi^t$ .

2. *Existem constantes  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tais que*

- $\| (D\phi^t)_x(v) \| \leq C \lambda^t \| v \|$ ,  $v \in E_x^{ss}$
- $\| (D\phi^{-t})_x(w) \| \leq C \lambda^t \| w \|$ ,  $w \in E_x^{uu}$

para todo  $x \in M$  e todo  $t > 0$ .

Chamaremos os fibrados  $E^{ss}$  e  $E^{uu}$  de fibrados fortemente estáveis e fortemente instáveis, respectivamente. Para cada  $p \in M$ , definimos a variedade fortemente estável, fortemente instável, fracamente estável e fracamente instável como sendo, respectivamente, os conjuntos:

$$W^{ss}(p) = \left\{ y \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi^t(p), \phi^t(y)) = 0 \right\}$$

$$W^{uu}(p) = \left\{ y \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi^t(p), \phi^t(y)) = 0 \right\}$$

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(\phi^t(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(\phi^t(p))$$

Apesar de estarem definidos com variedades, os conjuntos  $W^{ss}$ ,  $W^{uu}$ ,  $W^s$  e  $W^u$  possuem realmente estrutura de variedades. Os resultados que comprovam este fato podem ser encontrado em [8] e [9]. As famílias  $\mathcal{F}_M^s = \{W^{ss}(x)\}_{x \in M}$  e  $\mathcal{F}_M^u = \{W^{uu}(x)\}_{x \in M}$  formam folheações para  $M$ , as quais chamaremos de folheação estável e folheação instável, respectivamente. E além disso, tais folheações são transversais.

**Proposição 3.** *Dado um difeomorfismo Anosov  $f : M \rightarrow M$ , a suspensão  $\phi_f^t$  de  $f$  é um fluxo Anosov em  $M_f$ .*

*Demonstração.* Como  $f : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de Anosov, segue que  $M$  tem uma estrutura hiperbólica por  $f$ . Isso significa que existe uma decomposição  $E_x^u \oplus E_x^s$  de  $T_x M$  invariante sobre a ação da derivada, tal que

- $\| Df_x^n(v) \| \leq C\lambda^n \| v \|$ ,  $v \in E_x^s$
- $\| Df_x^{-n}(v) \| \leq C\lambda^n \| v \|$ ,  $v \in E_x^u$

para  $0 < \lambda < 1$  e  $c \geq 1$  independente de  $x$ .

Para provar o resultado, precisamos construir uma decomposição

$$TM_f = E^{ss} \oplus TX \oplus E^{uu}$$

que verifica os itens da Definição 29, sendo  $M_f$  a variedade induzida pela suspensão  $\phi_f^t$  de  $f$  que apresentamos na Seção 1.2.

Para isso, definimos para  $(x, 0) \in M \times \{0\}$

$$E_{(x,0)}^{ss} = E_x^s \text{ e } E_{(x,0)}^{uu} = E_x^u$$

e estendemos esse comportamento ao longo de  $[0, 1]$ , ou seja, para  $(x, t) \in M \times [0, 1]$ , definimos:

$$E_{(x,t)}^{ss} = D\phi_f^t(x, 0)(E_x^s) \text{ e } E_{(x,t)}^{uu} = D\phi_f^t(x, 0)(E_x^u)$$

.

Dessa maneira, temos uma decomposição  $TM_f = E^{ss} \oplus TX \oplus E^{uu}$ . Agora, mostraremos que essa decomposição satisfaz as condições da Definição 29. Para isso, vamos analisar inicialmente  $E_{(x,t_0)}^{ss}$  para  $t_0$  fixado. Por construção, temos que  $E_{(x,t_0)}^{ss} = D\phi_f^{t_0}(x, 0)(E_x^s)$ , logo  $D\phi_f^{-t_0}(x, t_0)(E_{(x,t_0)}^{ss}) = E_x^s$ . Observe que,

$$D\phi_f^t(x, t_0) = D\phi_f^{t+t_0-t_0}(x, t_0) = D\phi_f^{t+t_0}(x, t_0) \cdot D\phi_f^{-t_0}(x, t_0)$$

Com isso, concluímos que:

$$D\phi_f^t(x, t_0) \Big|_{E_{(x,t_0)}^{ss}} = D\phi_f^{t+t_0}(x, 0) \Big|_{E_x^s}$$

Como esta última expressão vale para qualquer  $t > 0$ , podemos fazer a análise da condição de ser Anosov em  $M \times \{0\}$  ou seja, num ponto da forma  $(x, 0)$ . Para organizar, coloquemos  $t = [t] + r$ , sendo  $[t]$  a parte inteira de  $t$ . Assim, temos por construção que

em  $M \times \{0\}$  a igualdade  $\phi_f^{[t]}$ . Observe que

$$\phi_f^t(x, 0) = \phi_f^{[t]+r}(x, 0) = \phi_f^r(\phi_f^{[t]}(x, 0)) = \phi_f^r(f^{[t]}(x)).$$

Portanto,

$$\|D\phi_f^t(x, 0)(v)\| = \|\phi_f^r(\phi_f^{[t]}(x, 0))\| = \|\phi_f^r(f^{[t]}(x))\| \leq C\lambda^{[t]}(x)$$

para todo  $v \in E_x^s$  e todo  $x \in M$ . Podemos concluir, de forma semelhante, que também vale para  $E^{uu}$ . Assim, concluímos que  $\phi_f^t$  é de fato um fluxo Anosov em  $M_f$ . A Figura 15 ilustra de maneira razoável a suspensão de um difeomorfismo Anosov.

□

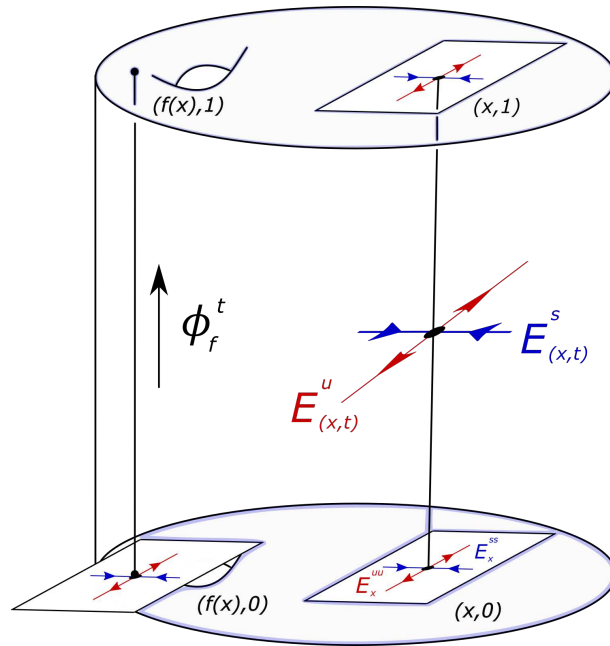


Figura 15: Suspensão de um difeomorfismo Anosov.

Seja um fluxo  $\phi^t : M \rightarrow M$  um fluxo. Diremos que  $\phi^t$  é transitivo em um conjunto compacto invariante  $\Lambda \subset M$  quando existir  $x \in \Lambda$  de modo que sua órbita  $\{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}$  é densa em  $\Lambda$ .

**Teorema 6.** *Seja  $\phi^t : M \rightarrow M$  um fluxo transitivo. Então  $\Omega(\phi^t) = M$ .*

*Demonstração.* Como  $\phi^t$  é transitivo, existe uma órbita  $\{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}$  que é densa em

$M$ , ou seja,

$$M = \overline{\{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}}.$$

Além disso, os pontos da órbita de  $x$  são não errantes o que implica que  $\{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega(\phi^t)$ . Juntando essas informações com o fato de  $\Omega(\phi^t)$  ser fechado, obtemos

$$\begin{aligned} \{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\} &\subset \Omega(\phi^t) \\ \Rightarrow M &= \overline{\{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\Omega(\phi^t)} = \Omega(\phi^t) \\ \Rightarrow M &\subset \Omega(\phi^t) \end{aligned}$$

Por fim, como naturalmente  $\Omega(\phi^t) \subset M$ , conseguimos a igualdade desejada.

□

## 2.3 O DA-Atrator

Nesta seção, apresentamos o exemplo de um atrator, que denominaremos de DA-Atrator. A construção desse exemplo será feita através de uma perturbação do difeomorfismo presente no Exemplo 14, em uma vizinhança do seu ponto fixo.

Pretendemos perturbar o ponto fixo para torná-lo um ponto fixo repulsor. Este novo difeomorfismo se chama Difeomorfismo Derivado de Anosov ou, simplesmente, DA-Difeomorfismo.

### 2.3.1 A Função Bump

O suporte  $\text{supp}(f)$  de uma função real  $f$  em um variedade  $M$  é definido como o fecho de subconjunto de  $M$  no qual  $f \neq 0$ , ou seja,

$$\text{supp}(f) = \overline{\{q \in M; f(q) \neq 0\}}$$

Seja  $q$  um ponto em  $M$  e  $\mathcal{U}_q$  uma vizinhança de  $q$ . Definimos uma função bump em  $q$  como qualquer função contínua e não-negativa  $\rho$  que é 1 em um vizinhança de  $q$  com  $\text{supp}(\rho) \subset \mathcal{U}_q$ . Agora, vejamos a construção de dessas funções.

Considere a função  $f$  dada por:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Utilizando algumas ferramentas básicas de cálculo, é possível provar que essa aplicação é suave,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$  e possui o seguinte esboço de gráfico.

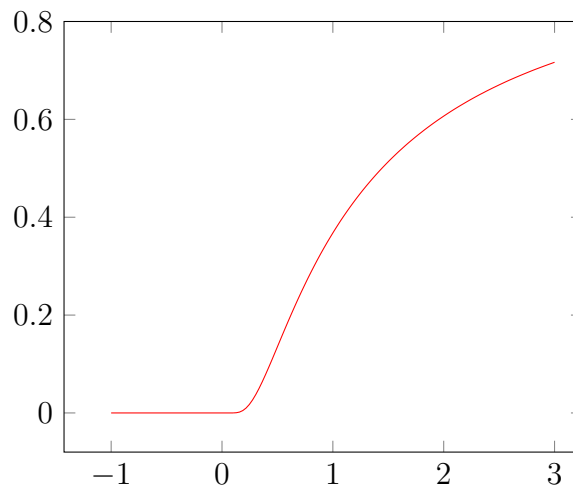


Figura 16: Gráfico de  $f$ .

Agora, considere a aplicação  $g$  dada por

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.$$

Note que, para  $t > 1$  segue da definição de  $f$  que  $f(1-t) = 0$  e  $f(t) \neq 0$  uma vez que  $1-t < 0$  e  $f(t) \neq 0$ . Portanto, se  $t > 1$  temos

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} \\ &= \frac{f(t)}{f(t)} = 1 \end{aligned}$$

Já para  $t < 0$ , segue que  $f(t) = 0$  e  $f(t) \neq 0$ . Consequentemente, para  $t < 0$  temos:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)} \\ &= \frac{0}{0 + f(1-t)} = 0 \end{aligned}$$

Por construção,  $f(t)$  e  $g(t)$  são contínuas em  $(0, 1)$ . Além disso, como  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = 1$ , concluímos que  $g(t)$  é contínua e possui o seguinte Gráfico.

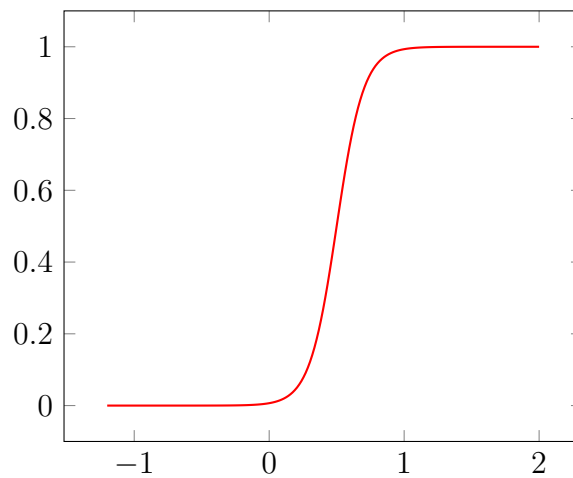


Figura 17: Gráfico de  $g$ .

Continuando nossa manipulação, tome  $h(t) = g(t - 1)$ , cujo gráfico é um simples deslocamento do esboço anterior. Em seguida, tome  $k(t) = h(|t|)$  cujo Gráfico é dado por:

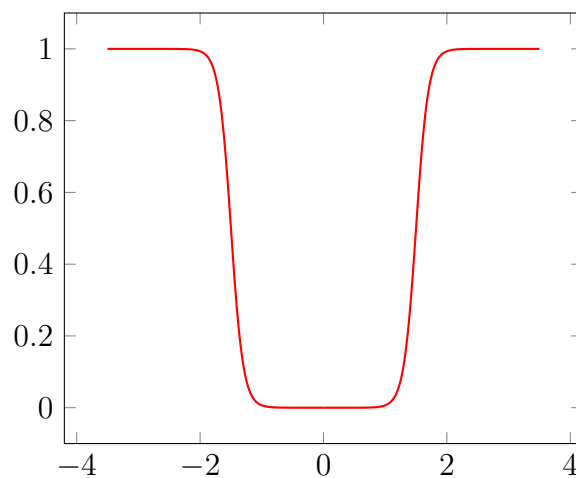


Figura 18: Gráfico de  $k$ .

Por fim, a aplicação  $\rho(t) = 1 - k(t)$  é a almejada Função Bump, que podemos descrever por:

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2), \end{cases}$$

cujo Gráfico é dado por:

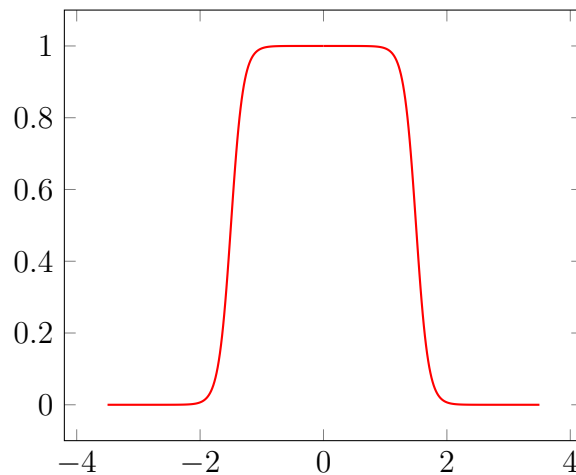


Figura 19: Gráfico de  $\rho$ .

Neste caso,  $\text{supp}(\rho) = [-2, 2]$ . Se considerarmos  $0 < a < b$ , podemos generalizar a construção feita acima tomando a aplicação  $\rho_{ab}$  dada por

$$\rho_{ab}(t) = \rho\left(\frac{t-a}{b-a} + 1\right).$$

Sendo assim,  $\rho_{ab}$  é uma função suave que verifica as seguintes condições:

$$\rho_{ab}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |t| \leq a \\ 0 & , \text{ se } |t| \geq b \end{cases}$$

mostrando que  $0 < \rho_{ab} < 1$  e  $\text{supp}(\rho_{ab}) = [-b, b]$ .

### 2.3.2 DA-Difeomorfismo

Um difeomorfismo obtido por uma modificação de difeomorfismo de Anosov é denominado Difeomorfismo Derivado de Anosov ou simplesmente DA-Difeomorfismo.

Agora, vejamos a construção de uma dessas modificações inspiradas, principalmente, no livro do Robinson [15].

Seja  $L_A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  descrito no Exemplo 14. Denotaremos por  $p_0$  o ponto fixo de  $L_A$  correspondente à origem de  $\mathbb{R}^2$ ,  $v^u$  e  $v^s$  os autovetores instáveis e estáveis da matriz  $A$ , sendo  $\lambda^u$  e  $\lambda^s$  seus respectivos autovalores.

Considere uma vinhaça  $U$  de  $p_0$  relativamente pequena. Como vimos na Seção 2.1,  $v^u$  e  $v^s$  são linearmente independentes. Diante disso, podemos representar os elementos dessa vizinhança em relação à base formada por esses autovetores, ou seja, os elementos de  $U$  serão escritos da forma

$$xv^u + yv^s.$$

Tome  $r_0$ , suficientemente pequeno, de modo que  $B(p_0, r_0) \subset U$ . Defina uma função Bump da por:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq r_0 \\ 1, & \text{se } x \leq \frac{r_0}{2} \end{cases}$$

Agora, considere a equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = y\delta(|p_0 - (x, y)|) \end{cases} \quad (2.1)$$

Como para pontos próximos de  $p_0$  temos  $\delta(|p_0 - (x, y)|) = 1$ , segue que a Equação 2.1 se resume em  $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, y)$ . Nessas condições, as soluções desse sistema são da forma  $(x(t), y(t)) = (a, be^t)$  sendo  $a, b \in \mathbb{R}$ . Como gostaríamos que  $(x(0), y(0)) = (x, y)$ , segue que o fluxo associado à Equação Diferencial 2.1 é dado por:

$$\phi^t(x, y) = (x, ye^t).$$

Definimos o derivado de Anosov como sendo o difeomorfismo

$$f = \phi^\tau \circ g$$

sendo  $\tau$ , suficientemente grande, de modo que  $\lambda_s e^\tau > 1$ . Observe que:

$$D\phi_{p_0}^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^\tau \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente,

$$Df_{p_0} = D\phi_{p_0}^\tau Dg_{p_0} = \begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s e^\tau \end{bmatrix}.$$

Além disso, observe que  $\text{supp}(\phi^t - id) \subset U$ , uma vez que, se  $(u_1, u_2) \notin B(p_0, r_0)$ , então  $\delta(|(u_1, u_2)|) = 0$  e portanto a Equação 2.1 se resume em

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

logo  $\phi^t(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$ . Isto diz que  $f = f_A$  fora de  $U$ . Como  $W^s(p) = W^s(p, f_A)$  são linhas verticais (nas coordenadas  $(u_1, u_2)$ ) e o fluxo  $\phi^t$  deixa fixo à primeira coordenada, tem-se que  $\phi^t$  preserva  $W^s(p, f_A)$  para todo  $p \in \mathbb{T}^2$ . Portanto,  $f$  preserva cada  $W^s(p)$ .

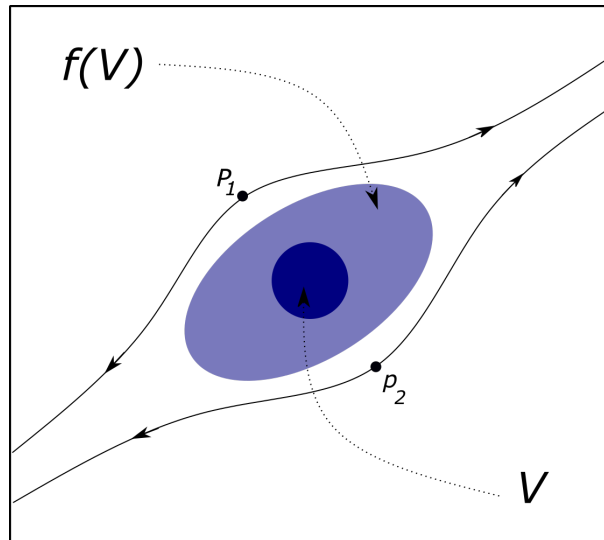


Figura 20: Comportamento do DA-Difeomorfismo.

Como  $p_0$  corresponde à origem de  $\mathbb{R}^2$ , concluímos facilmente que  $p_0$  é também ponto fixo de  $f$ . Além disso, com a modificação que fizemos, ocorre o surgimento de dois novos pontos fixos  $p_1$  e  $p_2$ . O aparecimento desses pontos vem do fato de que restrito a  $W^{ss}$ , a aplicação  $f$  possui inclinação maior que 1 numa vizinhança de  $p_0$  contida em  $U$  e fora de  $U$ , essa inclinação é menor que 1. Logo, como  $f$  é  $c^\infty$ , existem pontos  $p_1$  e  $p_2$

em  $U$  tais que, a inclinação de  $f$  com essa restrição é exatamente 1. Portanto, segue do Teorema do Valor Médio que:

$$\begin{aligned} \frac{f(p_2) - f(p_0)}{p_2 - p_0} &= 1 \\ \Rightarrow f(p_2) - f(p_0) &= p_2 - p_0 \\ \Rightarrow f(p_2) - p_0 &= p_2 - p_0 \\ \Rightarrow f(p_2) &= p_2. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos repetir essa estratégia para o ponto  $p_1$ . A Figura 2.3.2 ilustra o que acabamos de discutir.

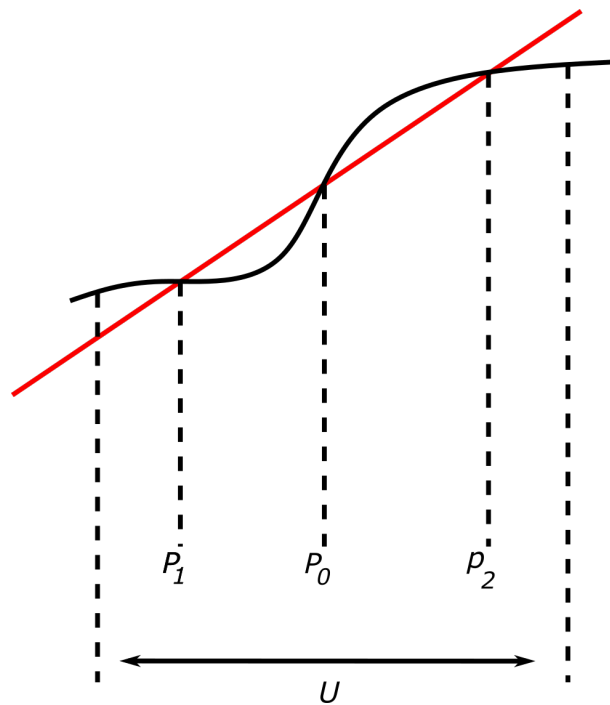


Figura 21: Aplicação  $f$  restrita  $W^{ss}$ .

### 2.3.3 Conjuntos Atratores

Nesta seção trazemos algumas definições para um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$ , mas apenas pequenas alterações são necessários para estabelecer a definição para um fluxo.

**Definição 30.** Uma região compacta  $N \subset M$  é chamada de região de aprisionamento (trapping region) de  $f$  quando  $f(N) \subset \text{int}(N)$ . Um conjunto  $\Lambda$  é chamado de conjunto de atração ou, simplesmente, conjunto atrator desde que exista uma região de aprisionamento

$N$  tal que  $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} f^k(N)$ . Dizemos que o atrator  $\Lambda$  é transitivo para  $f$ , se  $f$  é topologicamente transitivo em  $\Lambda$ .

Continuaremos o processo de exploração do Exemplo 14. Para isso, retornaremos ao DA-difeomorfismo  $f$  construído seção anterior. Vamos considerar como sendo  $V$  a vizinhança aberta, suficientemente pequena, citada anteriormente.

Como  $f$  restrita a  $V$  possui propriedades expansivas, segue que  $V \subset f(V)$  e consequentemente  $f(V)^c \subset V^c$ . Seja  $N = \mathbb{T}^2 \setminus V$ . O conjunto  $N$ , assim definido, é uma região de aprisionamento, uma vez que:

$$f(N) = f(\mathbb{T}^2 \setminus V) = f(\mathbb{T}^2 \cap V^c) \subset f(\mathbb{T}^2) \cap f(V^c) \subset \mathbb{T}^2 \cap V^c = N.$$

Além disso, como  $f$  é contínua e  $N$  compacto, segue que  $f^k(N)$  formam uma sequência de conjuntos encaixados. Assim, o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(N)$$

é um atrator que denominaremos como DA-atrator.

Como  $V \subset W^u(p_0, f)$ , a variedade instável  $W^u(p_0, f)$  pode ser caracterizada por

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V).$$

Logo, podemos reescrever  $\Lambda$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(N) \\ &= \bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(\mathbb{T}^2 \setminus V) \\ &= \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V) = \mathbb{T}^2 \setminus W^u(p_0, f). \end{aligned}$$

Tomando  $q \in \Lambda$  e  $B_q$  uma vizinhança de  $q$  em  $\mathbb{T}^2$ . Para enxugar a notação, coloquemos  $I = W^s(q, f) \cup B_q$ . Como  $f^{-1}$  expande em  $W^s(q, f)$ , existe  $j$  suficientemente grande, de modo que  $f^{-j}(I) \cup f(V) \neq \emptyset$ , e consequentemente,

$$\begin{aligned}
& f^{-j}(I) \cap f(V) \neq \emptyset \\
\Rightarrow & f^{-j}(B_q) \cap f(V) \neq \emptyset \\
\Rightarrow & B_q \cap f^{j+1}(V) \neq \emptyset \\
\Rightarrow & B_q \cap W^u(p_0, f) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Nesse sentido, como por construção,  $\mathbb{T}^2 = \Lambda \cup W^u(p_0, f)$ , segue que  $W^u(p_0, f)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ .

Muitas vezes, é útil falar sobre a dimensão de um atrator. Como esses conjuntos geralmente não são múltiplos, precisamos de um conceito mais apropriado para esse fim, que é o de dimensão topológica. Como veremos na próxima definição, a dimensão topológica é sempre um número inteiro. Mas esse dimensionamento não é único, em outros contextos pode ser conveniente utilizarmos a dimensão fractal ou Hausdorff, que é dada por um número real não negativo. Neste trabalho, lidaremos apenas com a dimensão topológica.

**Definição 31.** *Um conjunto  $A$  tem dimensão topológica zero quando para cada ponto  $p \in A$ , existe uma vizinhança  $U$ , arbitrariamente pequena, de  $p$  tal que  $\partial(U) \cap A = \emptyset$ . Um conjunto  $A$  tem dimensão topológica  $n > 0$  quando nas mesmas condições do caso anterior,  $\partial(U) \cap A$  tenha dimensão  $n - 1$ .*

Com essa definição, o atrator  $\Lambda$  não pode ter dimensão topológica dois, uma vez que, caso fosse,  $\partial(U) \cap \Lambda$  teria dimensão um. Isso resultaria que as interseções  $\partial(U) \cap \Lambda$  seriam caminhos, o que não ocorre, pois vimos que  $W^u(p_0, f)$  é denso em  $\mathbb{T}^2$ . Diante disso,  $\Lambda$  tem dimensão topológica no máximo um.

Por outro lado, como  $p_1$  e  $p_2$  são pontos fixos e não pertencem a  $V$ , segue que

$$p_1, p_2 \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} f^k(V) = \mathbb{T}^2 \setminus \Lambda$$

isso implica que  $W^u(p_1, f), W^u(p_2, f) \subset \Lambda$  e, conseqüentemente,  $\Lambda$  não pode ter dimensão topológica zero. Diante disso, concluímos que a dimensão topológica de  $\Lambda$  é um.

O teorema a seguir expressa, de maneira sucinta, a riqueza de propriedades presente no DA-difeomorfismo  $f$  que construímos.

**Teorema 7.** *O DA-difeomorfismo  $f$ , descrito na Subseção 2.3.2, possui  $\Omega(f) = \{p_0\} \cup \Lambda$ , sendo  $p_0$  ponto fixo repulsor e  $\Lambda$  um atrator de dimensão um. O mapa  $f$  é transitivo em  $\Lambda$  e seu pontos periódicos são densos em  $\Lambda$ .*

A demonstração completa do Teorema 7, assim como todo conteúdo desta subseção, pode ser encontrada de forma detalhada no sétimo capítulo do Livro do Robinson [15]. Mais detalhes sobre dimensão topológica podem ser encontrados em [6].

# Capítulo 3

## A Construção dos Exemplos

Como mencionado no capítulo introdutório, existe um artigo publicado por Verjovsky [17] no qual se afirma que em toda variedade que suporta um fluxo de Anosov de codimensão um, o conjunto não errante é a variedade toda. Mas isso não é verdade em dimensão 3, pois John Franks e Bob Williams exibiram, em [7], contraexemplos os quais estudaremos neste capítulo.

### 3.1 O Primeiro Exemplo

Seja  $L_A$  o difeomorfismo linear de Anosov no toro  $\mathbb{T}^2$  que introduzimos no Exemplo 14. Vamos considerar o DA-difeomorfismo  $f$  apresentado na Subseção 2.3.2. Resumidamente, vimos que DA-difeomorfismo  $f$  tem o formato  $\phi^\tau \circ L_A$ , sendo que  $\phi^\tau$  preserva a variedade instável de  $L_A$  em uma pequena vizinhança  $V$  de um ponto fixo  $p$  de  $f$ . Essa modificação foi feita para que o ponto fixo  $p$  de  $L_A$  se torne uma fonte de  $f$  e ocorra o surgimento de um atrator unidimensional  $\Lambda$  que já esboçamos na Subseção 2.3.3.



Figura 22: Difeomorfismo de Anosov e o DA-difeomorfismo

Vamos considerar a variedade  $M_l$  induzida pelo fluxo suspensão no toro  $T^2$ , isto é,  $M_l = T^2 \times \mathbb{R} / \sim$ . Essa suspensão induz um fluxo  $\phi^t$  em  $M_l$ , que tem uma órbita periódica repelente  $\Theta$ , que ilustramos na Figura 3.23(a), correspondente à fonte  $p$  em  $T^2$ .

Ao excluir uma vizinhança tubular  $J$  em torno de  $\Theta$  em  $M_l$  isso resulta em uma variedade  $\mathcal{M}$  cujo o bordo  $B = \partial\mathcal{M}$  é homeomorfo ao toro  $\mathbb{T}^2$  e um fluxo (que também chamaremos de  $\phi^t$ ) que é interiormente transversal, em seu bordo.

A Figura 3.23(b) é uma ideia de representação do bordo  $\partial\mathcal{M}$  que possui uma órbita repulsora  $\Theta$ , esboçada na Figura 3.23(a), em seu interior.

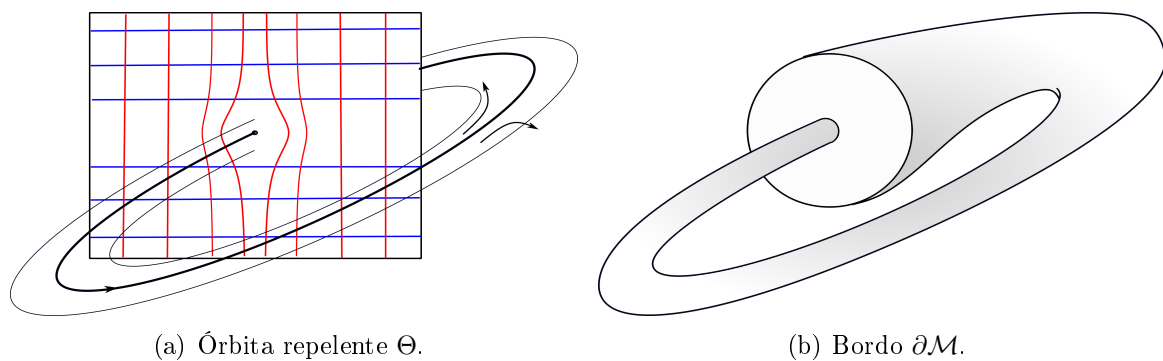


Figura 23: Elementos de  $\mathcal{M}$ .

Devido às propriedades da relação de equivalência que constrói  $M_l$ , podemos considerar a suspensão apenas no intervalo  $[0, 1]$ . Diante disso, um exemplo de vizinhança tubular para a órbita  $\Theta$  poderia ser dado por  $D^2 \times [0, 1]$ .

A escolha da vizinhança tubular  $J$  é muito natural, mas delicada, que descreveremos em detalhes. Por simplicidade, utilizaremos coordenadas polares em  $D^2$  e para preservar a construção de  $M_l$  como quociente, estabeleceremos a relação, próximo da vizinhança  $J$ , da seguinte forma

$$(r, \theta, 0) \sim (cr, \theta, 1),$$

sendo  $c > 1$ .

Para a obtenção de  $J$ , vamos considerar os pontos da forma  $(\epsilon e^{\lambda t}, \theta, t)$ , sendo  $\lambda = \ln c$ . Observe, inicialmente, que para  $t = 0$  os pontos são da forma  $(\epsilon, \theta, 0)$  e para  $t = 1$  os pontos são da forma  $(\epsilon c, \theta, 1)$ , o que mostra que os pontos estão identificados pela relação  $\sim$ . Com a escolha de um  $\epsilon > 0$  conveniente, determinamos o bordo toral

$B = \partial\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  como a região descrita acima.

Como mencionamos em Seção 2.1, as folhas da folheação instáveis  $\mathcal{F}^{uu}$  de  $\mathbb{T}^2$  são dadas por linhas paralelas. Quando essas folhas são submetidas à ação da suspensão, ocorre o surgimento de planos paralelos que, sem perda de generalidade, podem ser considerados como horizontais que dão origem a folheação instável fraca  $\mathcal{F}^u$  de  $M_t$ . Deste modo, ao retirarmos a vizinhança tubular  $J$  para a construção da variedade  $\mathcal{M}$ , podemos observar que esses planos, com a exceção de apenas um, cruzam o bordo  $B$  de  $\mathcal{M}$  em curvas semelhantes a parábolas, sendo que o cruzamento excepcional consiste em duas linha horizontais, como indicado na Figura 24.

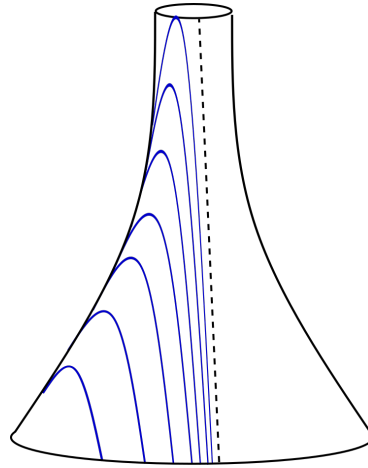


Figura 24:  $B \cap \mathcal{F}^u$ .

Como mencionamos, o bordo  $B$  é homeomorfo ao toro  $\mathbb{T}^2$ . Sendo assim, podemos transformar  $B$  juntamente com a interseção da folheação instável fraca no toro. Logo, após a identificação  $(r, \theta, 0) \sim (cr, \theta, 1)$ , a foliação é familiar a duas componentes de Reeb, como ilustrado na Figura 25.

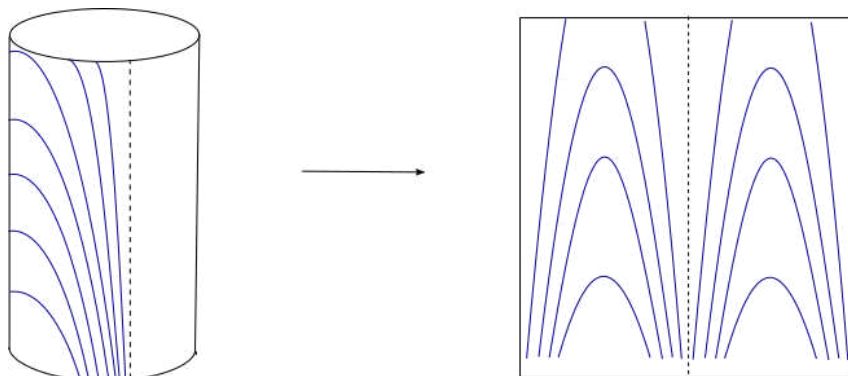


Figura 25:  $\mathcal{F}^u \cap B$ .

Analogamente, as folhas da folheação estável  $\mathcal{F}^{ss}$  de  $\mathbb{T}^2$  também são dadas por linhas paralelas. Além disso, essas linhas são ortogonais em relação às folhas instáveis. Por esse motivo, obtemos que a interseção  $\mathcal{F}^s \cap B$  da foliação instável fraca com o bordo  $B$ , assim como  $\mathcal{F}^u \cap B$ , é familiar à duas componentes de Reeb que estão desfasadas em um ângulo de  $\frac{\pi}{2} rad$  em relação a  $\mathcal{F}^s \cap B$ .

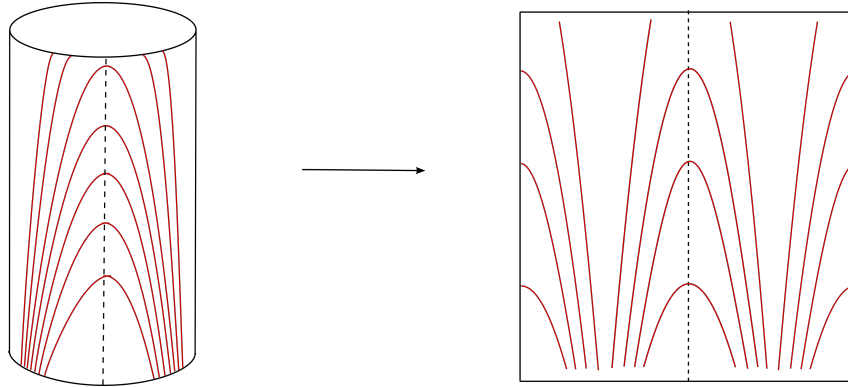


Figura 26:  $\mathcal{F}^s \cap B$ .

Apesar da ortogonalidade dessas folhas ser observada de forma natural, devido à nossa construção, vamos verificar algebricamente este fato.

Um plano horizontal a uma distância  $d$  da reta  $r = 0$  tem a equação  $r \sin \theta = d$ , ou seja  $r = \frac{d}{\sin \theta}$ . A equação desse plano pode ser deduzida de forma direta, conforme observado na Figura 27.

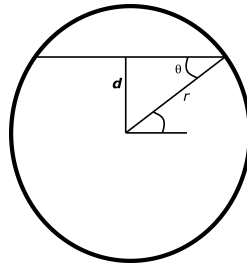


Figura 27: Círculo centrado em  $\Theta$ .

Como  $B$  é dado por  $(\epsilon e^{\lambda t}, \theta, t)$ , segue que a região dada pela interseção  $\mathcal{F}^u \cap B$  é dada por:

$$\epsilon e^{\lambda t} = \frac{d}{\sin \theta}. \quad (3.1)$$

De modo análogo, podemos expressar a interseção  $\mathcal{F}^s \cap B$  levando apenas em consideração que as folhas estáveis fracas agora são verticais. Para isso, basta tomar a

Equação 3.1, trocando  $\theta$  por  $\bar{\theta} = \theta + \frac{\pi}{2}$ . Diante disso, segue que a equação de tal plano é dada por:

$$\begin{aligned} \epsilon e^{\lambda t} &= \frac{d}{\sin \bar{\theta}} \\ &= \frac{d}{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{d}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\epsilon e^{\lambda t} = \frac{d}{\cos \theta} \quad (3.2)$$

Com o intuito de deixar tais expressões mais simplificadas, vamos aplicar a função logaritmo em ambas Equações 3.1 e 3.2. Feito isso, obtendo uma nova representação para as regiões  $\mathcal{F}^s \cap B$  e  $\mathcal{F}^u \cap B$ .

$$\ln \epsilon + \lambda t - \ln d + \ln(\sin \theta) = -\lambda t + \ln(\sin \theta) + C = 0 \quad (3.3)$$

$$\ln \epsilon + \lambda t - \ln d + \ln(\cos \theta) = -\lambda t + \ln(\cos \theta) + C = 0 \quad (3.4)$$

sendo  $C = \ln \epsilon - \ln d$ . Observe que o diferencial da Equação 3.3 resulta em:

$$\lambda dt - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \lambda dt - \operatorname{tg} \theta d\theta.$$

Já o diferencial da Equação 3.4 resulta em:

$$\lambda dt + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\Rightarrow \lambda dt + \operatorname{cotg} \theta d\theta$$

Como  $-\operatorname{tg}(\theta)$  e  $\operatorname{cotg}(\theta)$  são defasadas em um ângulo de  $\frac{\pi}{2} \text{rad}$ , segue que as interseções  $\mathcal{F}^u \cap B$  e  $\mathcal{F}^s \cap B$  nunca são paralelas, ou seja, transversais. Em particular,

como o ângulo de defasagem é  $\frac{\pi}{2}rad$ , concluímos que  $\mathcal{F}^u$  e  $\mathcal{F}^s$  são sempre ortogonais. A Figura 28 ilustra a interseção do bordo  $B$  com essas folheações.

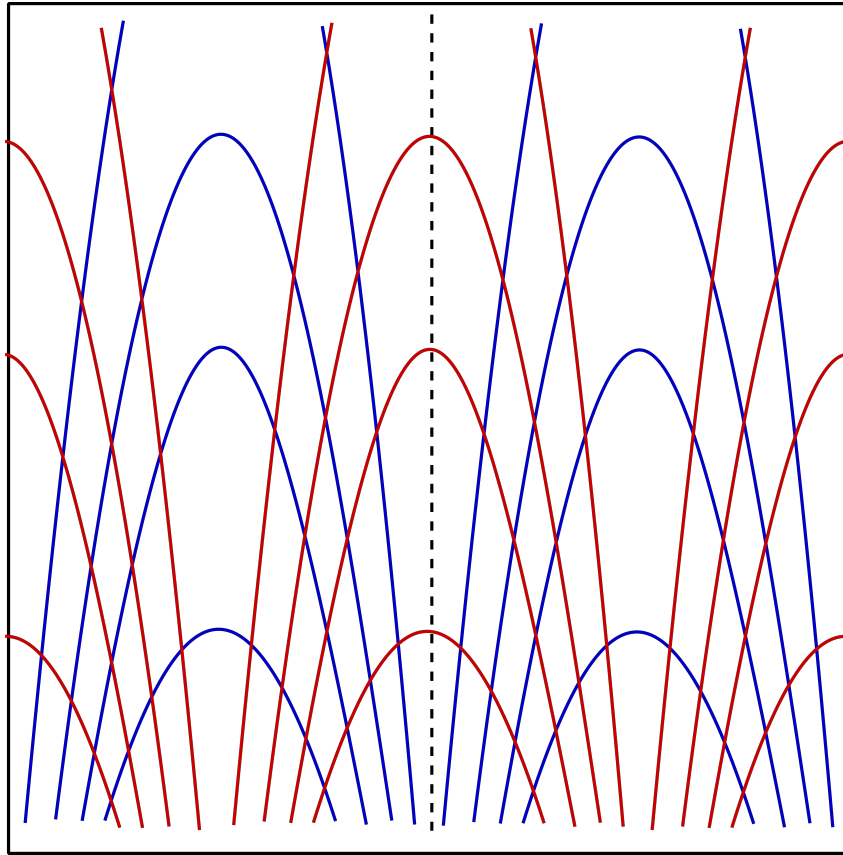


Figura 28:  $\mathcal{F}^u$  e  $\mathcal{F}^s$  em  $B$ .

Feito isso, além de concluirmos a construção da variedade  $\mathcal{M}$  também obtemos o comportamento das folheações instáveis fraca e estáveis fraca em seu bordo. Com o objetivo de deixar a notação mais precisa, de agora em diante indicaremos por  $(\mathcal{M}, \phi^t)$  a variedade  $\mathcal{M}$  equipada com o fluxo  $\phi^t$ .

Agora, vamos construir uma nova variedade. Para isso, vamos considerar uma cópia  $\overline{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$  equipada com o fluxo inverso  $\phi^{-t}$  de  $\phi^t$ . Essa nova variedade  $\overline{\mathcal{M}}$ , assim como  $\mathcal{M}$ , também possui um bordo  $\overline{B}$  que é homeomorfo ao toro  $\mathbb{T}^2$ .

Como consideramos o fluxo inverso, enquanto  $\mathcal{M}$  possui um atrator,  $\overline{\mathcal{M}}$  possui um repulsor. Além disso, as folheações instáveis fraca e estáveis fraca de  $(\mathcal{M}, \phi^t)$  dão origem as as folheações estáveis fraca e instáveis fraca de  $(\overline{\mathcal{M}}, \phi^{-t})$ , respectivamente.

A Figura 29 é uma ideia de representação das variedades  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$ . Tal esboço, que deixa a desejar em alguns aspectos, tem o objetivo de destacar o comportamento das folheações no bordo dessas variedades.

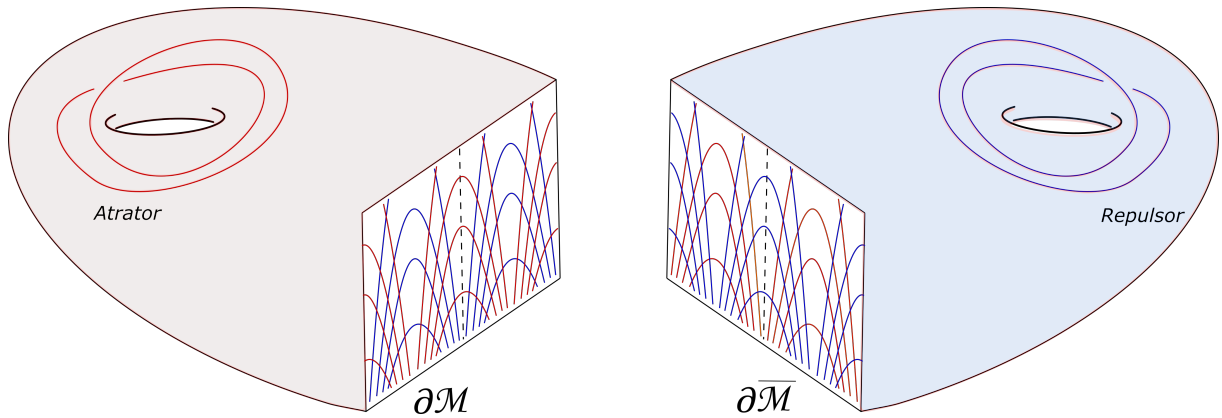


Figura 29: Representação de  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$ .

Podemos efetuar a colagem de  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$  pelos bordos  $B$  e  $\overline{B}$  através de um difeomorfismo  $h : B \rightarrow \overline{B}$ . Essa colagem, por exemplo, poderia ser efetuada com o difeomorfismo identidade, mas como estamos interessados em obter uma variedade que suporta um Fluxo de Anosov, precisamos tomar alguns cuidados.

As variedades  $(\mathcal{M}, \phi^t)$  e  $(\overline{\mathcal{M}}, \phi^{-t})$ , apesar de terem sido modificadas, possuem estrutura hiperbólica em seu interior, uma vez que são obtidas por uma suspensão de um difeomorfismo de Anosov. Diante disso, utilizando uma colagem apropriada, conseguimos conectar as folhas estáveis (assim como as instáveis) das variedades e obter uma nova variedade colada com estrutura hiperbólica.

Esse difeomorfismo apropriado é obtido de forma natural devido a estrutura que construímos. Para auxiliar a visualização, vamos destacar a intercessão das respectivas folhas instáveis com os bordos  $B = \partial\mathcal{M}$  e  $\overline{B} = \partial\overline{\mathcal{M}}$  na Figura 30.

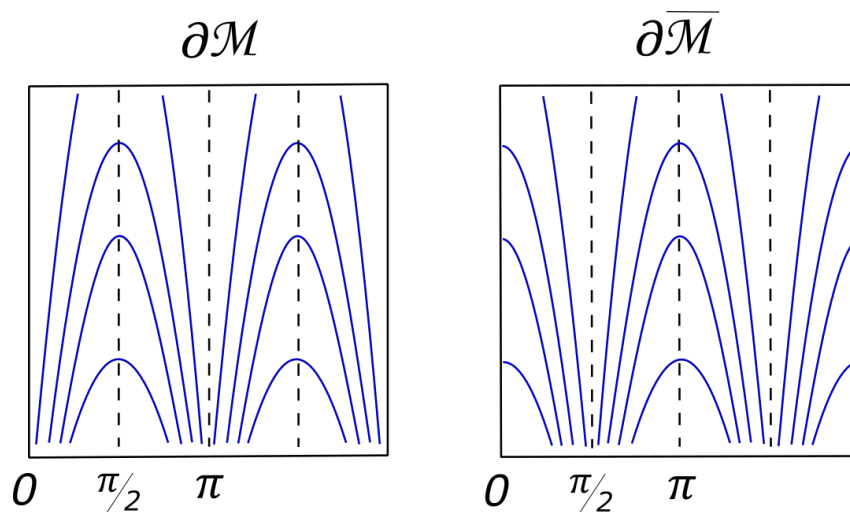


Figura 30:  $\mathcal{F}^u$  em  $\partial\mathcal{M}$  e  $\partial\overline{\mathcal{M}}$

Observe que essas folhas intersectam os bordos apenas com a diferença de um deslocamento de  $\frac{\pi}{2}rad$ . Diante disso, o difeomorfismo  $h : B \rightarrow \bar{B}$ , que leva  $r \mapsto \bar{r}$  e  $\theta \mapsto \bar{\theta} - \frac{\pi}{2}$ , cumpre, perfeitamente, essa desejada conexão entre as folhas. Intuitivamente, o difeomorfismo  $h$  rotaciona o bordo  $\bar{B}$  em um ângulo de  $\frac{\pi}{2}rad$ . Sendo assim, a colagem é a sobreposição dos bordos  $B$  e o  $\bar{B}$  (rotacionado).

Denotaremos a variedade colada por  $\mathbb{M} = \mathcal{M} \cup_h \bar{\mathcal{M}}$ . Essa variedade, por construção, é compacta e suporta um Fluxo de Anosov intransitivo.

Mas, antes de verificar que  $\mathbb{M}$  realmente suporta um fluxo de Anosov, precisamos visualizar o comportamento do fluxo em  $\mathbb{M}$ .

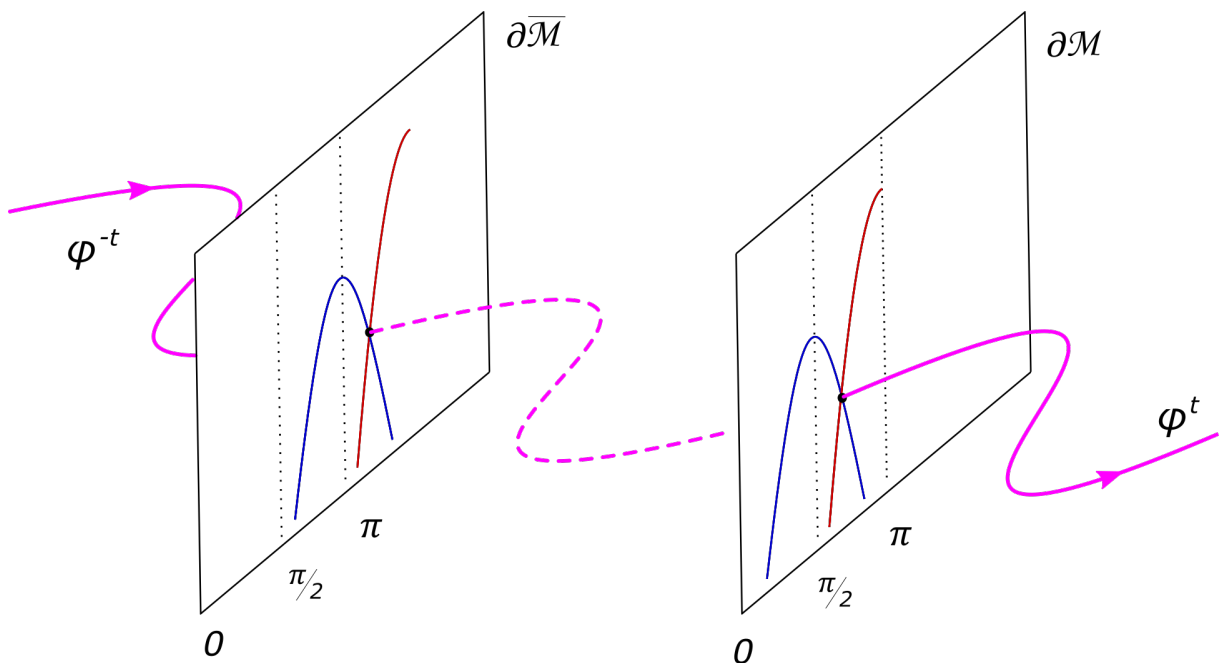


Figura 31: Fluxo  $\psi^t$  em  $\mathbb{M}$ .

Basicamente, os fluxos no interior das variedades  $\mathcal{M}$  e  $\bar{\mathcal{M}}$  são mantidos e a única alteração é a identificação, através do difeomorfismo  $h$ , dos pontos de seus bordos. Agora, vamos analisar essa situação formalmente.

Vamos estabelecer o fluxo  $\psi^t$  sobre a variedade  $\mathbb{M}$ . Para isso, considere um ponto  $x \in \mathbb{M}$ . Caso a órbita de  $x$  permaneça inteiramente contida no interior de  $\mathcal{M}$ , segundo  $\phi^t$ , definimos  $\psi^t(x) = \phi^t(x)$ . Analogamente, se a órbita de  $x$  permanece inteiramente contida no interior de  $\bar{\mathcal{M}}$ , segundo  $\phi^{-t}$ , definimos  $\psi^t(x) = \phi^{-t}(x)$ . Como  $\mathcal{M}$  e  $\bar{\mathcal{M}}$ , em seu interior, são obtidas através de uma suspensão de um difeomorfismo de Anosov, segue da Proposição 3 que  $\mathcal{M}$  e  $\bar{\mathcal{M}}$  possuem estrutura hiperbólica em seus interiores.

No caso da órbita de  $x$  estar presente em  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$ , precisamos tomar um certo cuidado. Por construção, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  de modo que  $y = \psi^{t_0}(x) \in \partial\mathcal{M}$ , que está identificado com  $h(y) \in \partial\overline{\mathcal{M}}$ . Diante disso, para estabelecer o fluxo para o caso em questão, basta construir  $\psi^t$  para os elementos da fronteira. Com efeito, considere  $y \in \partial\mathcal{M}$  e defina  $\psi^t(y)$  da seguinte forma:

$$\psi^t(y) = \begin{cases} \phi^{-t}(h(y)) & , \text{ se } t < 0 \\ y \sim h(y) & , \text{ se } t = 0 \\ \phi^t(y) & , \text{ se } t > 0 \end{cases}$$

Com o fluxo estabelecido, afim de que  $\psi$  seja uma fluxo de Anosov, precisamos que o fibrado tangente  $T\mathbb{M}$  se decomponha em três subfibrados  $\mathbb{E}^s$ ,  $\mathbb{E}^u$  e  $TX$ . Sendo  $\mathbb{E}^s$ ,  $\mathbb{E}^u$  invariantes pela derivada do fluxo, contraindo em  $\mathbb{E}^s$ , expandindo em  $\mathbb{E}^u$  e  $TX$  tangente ao fluxo  $\psi^t$ .

Assim como o fluxo  $\psi$  em  $\mathbb{M}$ , a obtenção da decomposição de  $T\mathbb{M}$  é feita de forma natural e proveniente das variedades  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$ . Vamos considerar  $E^s$ ,  $E^u$  e  $TX$  como sendo a decomposição de  $\mathcal{M}$  e, analogamente,  $\overline{E}^s$ ,  $\overline{E}^u$  e  $TX$  como sendo a decomposição de  $\overline{\mathcal{M}}$ . Diante disso, para cada ponto  $x \in \mathbb{M}$ , os espaços  $\mathbb{E}_x^s$  e  $\mathbb{E}_x^u$  são dados por:

$$\mathbb{E}_x^s = \begin{cases} E_x^s & , \text{ se } x \in \mathcal{M} \\ E_x^s \sim \overline{E}_{h(y)}^s & , \text{ se } x \in \partial\mathcal{M} \\ \overline{E}_x^s & , \text{ se } x \in \overline{\mathcal{M}} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}_x^u = \begin{cases} E_x^u & , \text{ se } x \in \mathcal{M} \\ E_x^u \sim \overline{E}_{h(y)}^u & , \text{ se } x \in \partial\mathcal{M} \\ \overline{E}_x^u & , \text{ se } x \in \overline{\mathcal{M}} \end{cases}$$

Observe que as características de expansividade de  $\mathbb{E}^u$  e contração de  $\mathbb{E}^s$  são herdadas de  $E^u$ ,  $E^s$ ,  $\overline{E}^u$  e  $\overline{E}^s$ , quando associadas à colagem extremamente apropriada, dada pelo difeomorfismo  $h$ . Com isso, de forma extremamente construtiva, mostramos que o fluxo  $\psi$  é um Fluxos de Anosov sobre a variedade  $\mathbb{M}$ .

É importante destacar que a maneira como é feita a colagem, nesse caso, é primordial para a obtenção da estrutura hiperbólica. Destacando os bordos das variedades

ilustradas na Figura 29, de forma intuitiva, podemos visualizar que ao rotacionarmos  $\partial\overline{\mathcal{M}}$  em um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos, tornamos as representações das Figuras 3.32(a) e 3.32(b) idênticas. Dessa forma, podemos lidar com a colagem como a sobreposição das Figuras 3.32(a) e 3.32(b)(rotacionado), garantindo a estrutura hiperbólica do sistema.

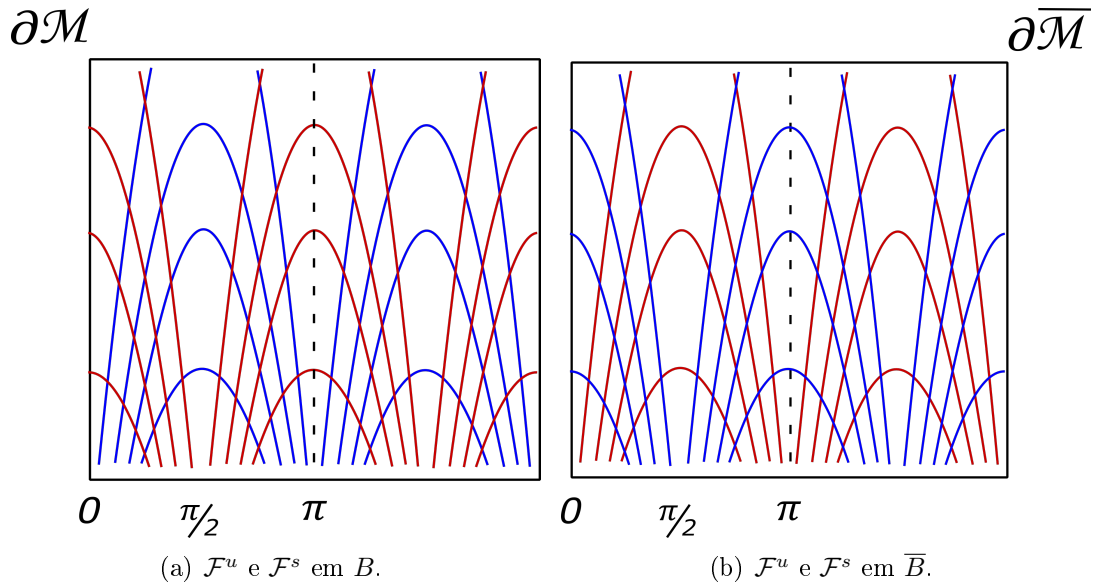


Figura 32: Elementos de  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$ .

Como destacamos no capítulo introdutório, até antes de 1980, os exemplos conhecidos de Fluxos de Anosov eram transitivos. Isso motivou Verjovsky a publicar, em 1974, o Artigo [17] dizendo que toda variedade que suporta um Fluxo de Anosov de codimensão um, possui conjunto não errante como sendo toda a variedade, ou seja, um Fluxo de Anosov transitivo.

Agora, veremos que o fluxo  $\psi$  em  $\mathbb{M}$  que acabamos de construir não é transitivo, ou seja,  $\Omega(\psi) \neq \mathbb{M}$ . Para isso, vamos retornar à construção de  $(\mathbb{M}, \psi)$ .

Vimos anteriormente que  $(\mathcal{M}, \phi)$  possui um atrator  $\Lambda$  e, conseqüentemente, por construção,  $(\overline{\mathcal{M}}, \phi^{-1})$  possui uma repulsor que vamos chamar de  $\overline{\Lambda}$ . Segue diretamente da definição de conjunto de pontos não errantes que  $\overline{\Lambda} \not\subset \Omega(\psi)$ . Diante disso, como  $\overline{\Lambda} \subset \mathbb{M}$ , concluímos que

$$\Omega(\psi) \neq \mathbb{M}.$$

Isso mostra que o fluxo  $\psi$  não é transitivo. Nesse sentido, destacaremos as propriedades de toda a construção feita nessa seção com a seguinte proposição.

**Proposição 4.** *O fluxo  $\psi$  que acabamos de construir sobre  $\mathbb{M}$  é um Fluxo de Anosov, cujo conjunto de pontos não errantes não é toda a variedade  $\mathbb{M}$ , ou seja,  $\psi$  é uma Fluxo de Anosov intransitivo.*

A Proposição 4 aponta um contra exemplo para o resultado publicado no Artigo [17] que Verjovsky, erroneamente, acreditava ser verdadeiro. Na próxima seção, apresentaremos mais um exemplo de fluxo de Anosov intransitivo.

## 3.2 O Segundo Exemplo

Tendo em conta o exemplo da seção anterior, é natural perguntar se é possível construir um Fluxo de Anosov sobre uma 3–variedade como mais de dois conjuntos básicos ou com conjuntos básicos de dimensão um. Ambas as indagações serão respondidas de forma afirmativa, como veremos adiante. Vamos propor um exemplo em que o conjunto não errante tenha 4 peças básicas: dois atratores, um repulsor e uma órbita fechada isolada.

A ideia é produzir um fluxo  $f^t$  na variedade  $S^1 \times \ddot{D}$ , sendo  $\ddot{D}$  um disco bidimensional que possui dois furos. Esse fluxo, de forma intuitiva, entraria em uma das componentes de bordo e sairia nas demais e possuiria uma única órbita fechada, ou seja, todas as outras possuem pontos fora da variedade.

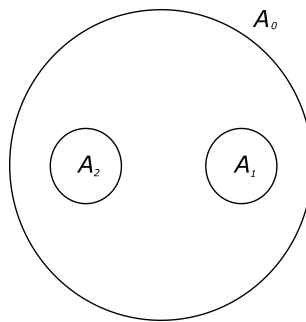


Figura 33: Ilustração de  $\ddot{D}$ .

Fazendo isso de forma adequada, somos capazes de colar duas cópias de  $(\mathcal{M}, \phi^t)$  e uma cópia de  $(\overline{\mathcal{M}}, \phi^{-t})$  nessa variedade para obter um fluxo de Anosov, assim como fizemos no primeiro exemplo. Para essa construção, consideremos o disco  $\ddot{D}$  como sendo o disco bidimensional  $D^2$ , com dois furos, sendo  $A_0, A_1$  e  $A_2$  suas componentes de bordo, como ilustrado na Figura 33.

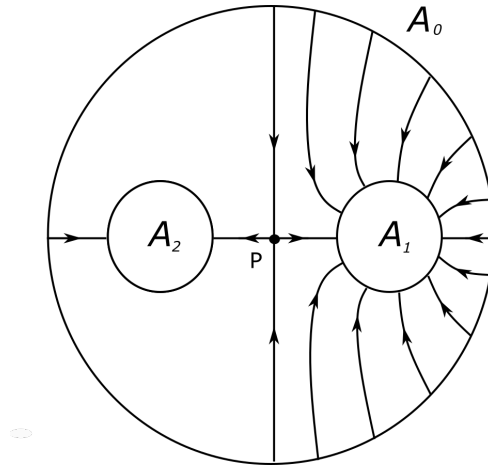


Figura 34: Representação do fluxo  $\phi^t$

Vamos definir um fluxo  $\phi^t$  em  $\ddot{D}$  com um único ponto  $p$  hiperbólico em seu centro, de modo que a variedade estável  $W^{ss}(p)$  é vertical e variedade instável  $W^{uu}(p)$  é horizontal. O restante do fluxo é como esboçado na Figura 34 e é construído para ser simétrico em relação às reflexões em torno de  $W^{ss}(p)$  e  $W^{uu}(p)$ .

Como mencionamos na ideia geral da construção, o fluxo  $\phi^t$  entra na componente de bordo  $A_0$  e sai em  $A_1$  ou  $A_2$ . Devido à simetria do nosso sistema, é suficiente estabelecer condições apenas no primeiro quadrante de  $\ddot{D}$ , que denotaremos por  $\ddot{D}^{++}$ , uma vez que o restante será herdado pela simetria.

Observe que  $A_0$  em  $\ddot{D}^{++}$ , que indicaremos por  $A_0^{++}$ , possui um arco de  $\frac{\pi}{2}$  rad. Já  $A_1^{++}$  (respeitando a notação estabelecida), possui um arco de  $\pi$  rad. Por esse motivo, para  $x \in A_0^{++}$ , é natural adotarmos que o mapa de saída  $r(x) \in A_1^{++}$  de  $x$ , satisfaça a relação

$$2\theta_0(x) = \theta_1(r(x)),$$

sendo  $\theta_i(x)$  o ângulo que, o segmento de reta com extremidades em  $x$  e o centro de  $A_i^{++}$ , faz com a horizontal, como ilustrado na Figura 35.

Observe que  $r(x)$  é indefinido se  $x \in W^{ss}$ . Ajustando a parametrização do fluxo, podemos providenciar que, para  $x \in A_0^{++}$  próximo de  $W^{ss}$ , o tempo de saída para  $A_1$  seja dado por:

$$\tau(x) = -\ln\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0(x)\right),$$

ou seja,  $\phi^{\tau(x)}(x) \in A_1^{++}$ . Isso é possível uma vez que podemos assumir que o fluxo vem

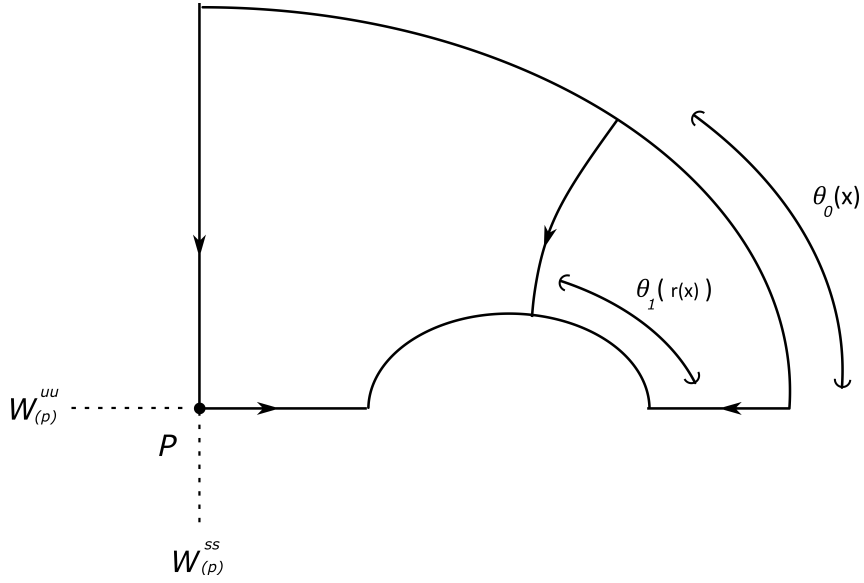


Figura 35: Representação da relação  $r$ .

de campos vetoriais lineares próximos de  $W^{ss}(p)$  e  $W^{uu}(p)$ .

Denotaremos por  $X$  o campo vetorial associado ao fluxo que acabamos de descrever. Queremos construir um campo vetorial em  $\ddot{D}^{++} \times S^1$ , o que faremos construindo em  $\ddot{D}^{++} \times \mathbb{R}$  de tal maneira que esse fluxo seja periódico com período 1 em  $t \in \mathbb{R}$ . Para isso, definimos  $\alpha$  em  $\ddot{D}^{++}$  dado por:

$$\begin{aligned} \alpha : \ddot{D}^{++} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha(x) = \frac{\pi}{2} - \theta_0(y), \end{aligned}$$

sendo  $y \in A_0^{++}$  o único ponto da mesma órbita de  $x$ . No caso de  $x \in W^{uu}(P)$ , vamos considerar  $\alpha(x) = 0$ .

Tomando  $\alpha_0 > 0$ , considere uma bump função  $\rho(s) \geq 0$  definida em  $[0, \alpha_0]$  de modo que  $\rho \equiv 1$  em uma vizinhança de 0 e  $\rho \equiv 0$  em uma vizinhança de  $\alpha_0$ . Além disso,  $-\rho(s) \ln(s)$  seja côncava para cima, ou seja, sua segunda derivada é não negativa.

Agora, definimos o campo  $Y$  desejado em  $\ddot{D}^{++} \times \mathbb{R}$  dado por:  $X + \rho(\alpha(x)) \frac{\partial}{\partial t}$  sendo  $x \in \ddot{D}^{++}$  e  $s \in \mathbb{R}$ . O fluxo gerado por  $Y$  é dado por

$$f^t(x, s) = (\phi^t(x), s + t\rho(\alpha(x))).$$

O tratamento dado para as componentes de bordo será precisamente idêntico ao

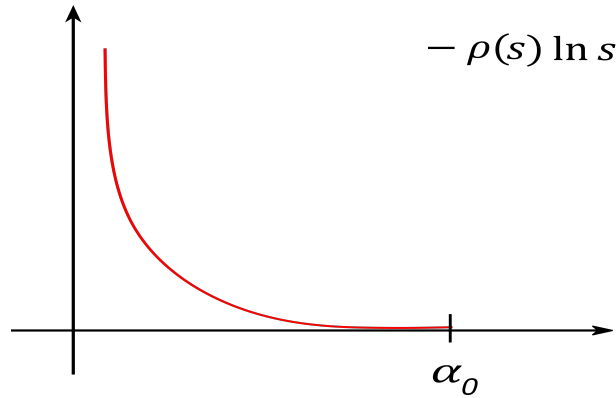


Figura 36: Esboço de  $-\rho(s) \ln(s)$ .

que empregamos no exemplo da Seção 3.1, ou seja, a interseção entre as folhas instáveis com a componente de bordo referente a  $A_0^{++}$  é dada por:

$$\epsilon e^{\lambda t} = \frac{d}{\sin \theta},$$

exatamente como foi apresentado na dedução da Equação 3.1. Devido à forma que definimos o tempo de saída em  $A_1^{++}$  de pontos de  $A_0^{++}$  sobre a ação do fluxo, é conveniente que coloquemos  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Sendo assim, a região de interseção pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \epsilon e^{\lambda t} &= \frac{d}{\sin \theta} \\ &= \frac{d}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \\ &= \frac{d}{\cos \alpha} = d \sec \alpha. \end{aligned}$$

Como fizemos no primeiro exemplo, aplicando a função logaritmo na expressão anterior, obtemos a seguinte maneira de descrever a região de interseção:

$$t = \lambda^{-1} \ln(\sec \alpha) + C \quad (3.5)$$

sendo  $C = \lambda^{-1}(\ln d - \ln \epsilon)$ . Estendendo  $Y$ , por simetria, para todo  $\ddot{D} \times S^1$ , obtemos o fluxo  $f^t$  desejado.

Aproveitando a construção das variedades  $\mathcal{M}$  e  $\overline{\mathcal{M}}$  produzidas na Seção 3.1, vamos construir uma nova variedade  $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$  colando duas cópias de  $\mathcal{M}$  e uma cópia de  $\overline{\mathcal{M}}$  em  $\ddot{D} \times S^1$ .

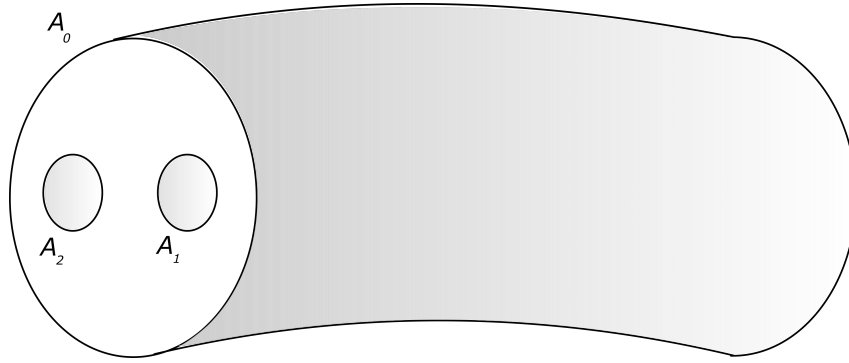


Figura 37: Representação de  $\ddot{D} \times \mathbb{R}$

Essas colagens são feitas através de difeomorfismos entre os bordos  $\partial\mathcal{M}$  e  $A_1 \times S^1$  ( $A_2 \times S^1$ ), já  $\overline{\mathcal{M}}$  é anexada a  $\ddot{D} \times S^1$  por um difeomorfismo entre os bordos  $\partial\overline{\mathcal{M}}$  e  $A_0$ , como ilustrado na Figura 38.

Estamos interessados na foliação de  $A_1 \times S^1$  (ou  $A_1 \times \mathbb{R}$ ), que pode ser obtida pela imagem sobre o mapa  $A_0^{++} \times \mathbb{R} \rightarrow A_1 \times \mathbb{R}$  obtido pelo fluxo ao longo de órbitas de  $Y$  (junto com a folha especial  $W^U(p \times \mathbb{R})$ ). Usando a fórmula para  $f^t$  e o fato de que o tempo de saída para  $x \in A_0$  é  $-\ln(\alpha(x))$  calcula-se que as folhas são dadas pela família de equações

$$t = \lambda^{-1} \ln(\sec(\alpha)) - \rho(\alpha) \ln(\alpha) + C$$

sendo  $C$  uma constante. Por simetria, a foliação na outra metade de  $A_1 \times \mathbb{R}$  é a mesma.

Com essa construção, as curvas  $t = \lambda^{-1} \ln(\sec(\alpha)) - \rho(\alpha) \ln(\alpha)$  são convexas e temos assíntotas verticais em  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}$  e temos uma foliação Reeb de  $A_1 \times S^1$  com duas folhas de Reeb como componentes. As folhas são precisamente a interseção de  $A^1 \times S^1$  com a variedade instável. Assim como no exemplo da seção anterior, podemos costurar uma cópia do  $\mathcal{M}$  com o fluxo  $\phi^t$  em  $A_1 \times S^1$  de forma a preservar a transversalidade das variedades estáveis e instáveis. A construção e análise para o caso  $A_2 \times S^1$  é exatamente a mesma. A prova que o fluxo resultante é um fluxo de Anosov é exatamente a mesma feita na seção anterior.

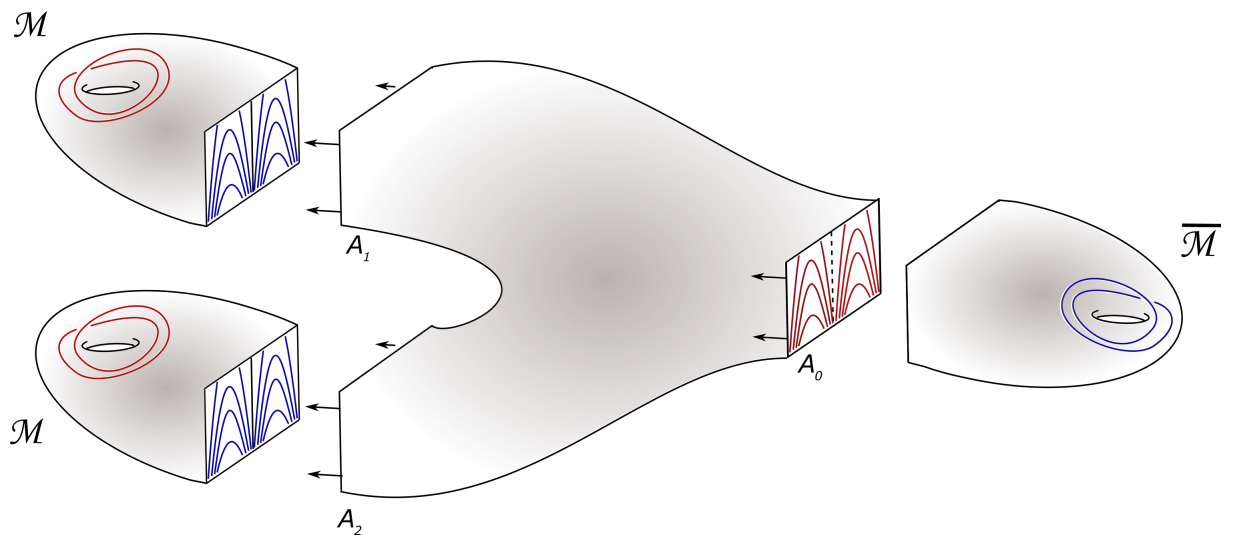


Figura 38: Representação de  $\overline{\mathcal{M}}$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] D. V. Anosov et al. Geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 90(5), 1967.
- [2] V. I. Arnol'd and A. Avez. Ergodic problems of classical mechanics. 1968.
- [3] C. Camacho and A. L. Neto. *Teoria geométrica das folheações*, volume 9. Instituto de matematica pura e aplicada, 1979.
- [4] R. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC Press, 2018.
- [5] M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [6] G. Edgar. *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [7] J. Franks and B. Williams. Anomalous anosov flows. In *Global theory of dynamical systems*, pages 158–174. Springer, 1980.
- [8] M. W. Hirsch and C. C. Pugh. Stable manifolds for hyperbolic sets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(1):149–152, 1969.
- [9] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub. *Invariant manifolds*, volume 583. Springer, 1977.
- [10] E. L. Lima. *Variedades diferenciáveis*. Number 15. Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.
- [11] W. Melo. Topologia das variedades. *Disponível em: w3.impa.br/ demelo/topologiadiferencial2011*. Último acesso em, 30, 2008.

- [12] C. Morales and B. Scardua. Geometry, dynamics and topology of foliated manifolds. *IMPA-24 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1st edição*, 47, 2003.
- [13] J. J. Palis and W. De Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] J. PALIS JUNIOR and W. Melo. Introdução aos sistemas dinâmicos. *Rio de Janeiro*: IMPA, 1978.
- [15] C. Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998.
- [16] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.
- [17] A. Verjovsky. Codimension one anosov flows. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 19(2):49–77, 1974.