

LUCIANA MARIA VIEIRA OTONI

**A CARACTERÍSTICA DE EULER DE OBJETOS NO ESPAÇO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

O88c  
2015 Otoni, Luciana Maria Vieira, 1980-  
A característica de Euler de objetos no espaço / Luciana  
Maria Vieira Otoni. – Viçosa, MG, 2015.  
xi, 44f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f.43-44.

1. Matemática. 2. Teorema de Euler. 3. Poliedros. 4. Teoria dos grafos. 5. Superfícies (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 510

LUCIANA MARIA VIEIRA OTONI

**A CARACTERÍSTICA DE EULER DE OBJETOS NO ESPAÇO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Magister Scientiae.

APROVADA: 28 de agosto de 2015.

---

Gil Fidelix de Souza

---

Ady Cambraia Junior

---

Catarina Mendes de Jesus  
(Orientadora)

*Dedico este trabalho à minha família.*

Fácil é sonhar todas as noites. Difícil  
é lutar por um sonho.

---

Carlos Drummond de Andrade

# Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que proporcionaram minha formação.

A orientadora Catarina, pelo suporte, correções e confiança.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável.

Agradeço ao Glelson Marques pela ajuda, paciência e tempo dedicado.

Agradeço aos colegas de curso em especial Renata e Leonídea pela amizade e companheirismo.

Agradeço em especial ao meu marido Afrânio que foi o principal incentivador deste sonho.

Agradeço aos meus pais, irmãos e meus filhos Alice e Bernardo pela paciência, amor e incentivo.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste sonho, o meu muito obrigada!

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>x</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Teorema de Euler para poliedros convexos.</b>	<b>3</b>
1.1 Polígonos . . . . .	3
1.2 Poliedros . . . . .	6
1.3 Teorema de Euler . . . . .	10
<b>2 Teorema de Euler para grafos</b>	<b>13</b>
2.1 Grafos . . . . .	13
2.2 Característica de Euler em grafos . . . . .	15
2.2.1 Grafos conexos tipo árvore . . . . .	15
2.2.2 Grafos conexos e com ciclos . . . . .	16
2.2.3 União de grafos . . . . .	18
2.3 Teorema de Euler e grafos planares . . . . .	21
<b>3 Cálculo da característica de Euler usando a união de superfícies.</b>	<b>24</b>
3.1 Deformação de poliedros regulares na esfera . . . . .	24
3.2 Construção de superfícies . . . . .	27
3.3 União de superfícies . . . . .	32

3.4	Esfera com alças . . . . .	35
3.5	Soma conexa de superfícies . . . . .	37
3.5.1	Soma conexa de uma esfera e um toro . . . . .	38
3.5.2	Soma conexa de dois toros . . . . .	40
3.5.3	Soma conexa de $k$ -toros . . . . .	40
<b>Considerações finais</b>		<b>42</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplos de polígonos. . . . .	3
1.2	Polígono ABCD. . . . .	4
1.3	Superfície poligonal. . . . .	4
1.4	Polígono convexo. . . . .	5
1.5	Polígono não convexo. . . . .	5
1.6	Polígonos regulares . . . . .	6
1.7	Exemplos de poliedros. . . . .	7
1.8	Poliedro e seus elementos. . . . .	7
1.9	Poliedros convexos e não convexos. . . . .	7
1.10	Ângulo poliédrico. . . . .	8
1.11	Poliedros regulares. . . . .	9
1.12	Poliedros convexos. . . . .	10
1.13	Poliedros não convexos . . . . .	11
1.14	Octaedro sendo deformado em uma esfera. . . . .	12
2.1	Exemplo de grafo. . . . .	14
2.2	Grafo conexo e não conexo. . . . .	14
2.3	Grafos. . . . .	15
2.4	Grafo árvore. . . . .	15
2.5	Grafos do tipo árvore . . . . .	16
2.6	Grafos com ciclos. . . . .	17
2.7	União de grafos através de vértices. . . . .	18
2.8	União de grafos através de vértices. . . . .	19

2.9	União de grafos através de arestas. . . . .	20
2.10	Aplicações de grafos planares. . . . .	21
2.11	Grafos planares que representam os poliedros regulares. . . . .	22
2.12	Grafo planar . . . . .	22
3.1	Poliedros regulares. . . . .	25
3.2	Deformação do octaedro em esfera. . . . .	25
3.3	Cubo se transformando em esfera. . . . .	26
3.4	Construção de grafo na esfera. . . . .	26
3.5	Diferentes tipos de superfícies. . . . .	27
3.6	Superfície com bordo. . . . .	27
3.7	Cilindro e círculo com seus respectivos bordos (beiradas). . . . .	28
3.8	Curva fechada, disco e anel. . . . .	28
3.9	Curva fechada. . . . .	29
3.10	Discos com diferentes triangulações. . . . .	29
3.11	Disco se transformando em cone. . . . .	30
3.12	Disco se transformando em calota. . . . .	30
3.13	Anéis com diferentes triangulações. . . . .	30
3.14	Superfícies homeomorfas ao anel. . . . .	31
3.15	Anel se transformando em cilindro. . . . .	31
3.16	União de dois discos. . . . .	32
3.17	Poliedros não convexos homeomorfos à esfera. . . . .	33
3.18	União de dois discos e um anel. . . . .	33
3.19	Deformação e união de dois anéis. . . . .	34
3.20	Poliedro e sua deformação em um toro. . . . .	35
3.21	Adição de uma alça à esfera. . . . .	36
3.22	Esfera com $k$ alças. . . . .	37
3.23	Soma conexa de uma esfera com um toro. . . . .	38
3.24	Soma conexa de dois toros. . . . .	40
3.25	Soma conexa de $k$ -toros. . . . .	41

# Resumo

OTONI, Luciana Maria Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2015.  
**A CARACTERÍSTICA DE EULER DE OBJETOS NO ESPAÇO.** Orientadora:  
Catarina Mendes de Jesus.

Um tema de estudo do ensino médio é a relação entre os números de vértices, arestas e faces, para poliedros convexos regulares, conhecida como Teorema de Euler. No caso geral esta relação é conhecida como característica de Euler. Neste trabalho apresentaremos exemplos de poliedros não convexos que satisfazem o Teorema de Euler e algumas formas de calcular a característica de Euler para poliedros no caso em geral, com o objetivo de fornecer um material mais acessível para professores que trabalham com este tema.

# Abstract

OTONI, Luciana Maria Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2015.  
**THE EULER CHARACTERISTIC OF OBJECTS IN SPACE** . Adviser: Catarina Mendes de Jesus.

One topic of study in the high school is the relation between the number of vertices, the number of edges and the number of faces, for regular convex polyedra, known as Euler's theorem. In the general case this relationship is known as Euler characteristic. In this paper we present examples of non-convex polyhedrons which satisfies the Euler's Theorem. We present some ways to computer the Euler characteristic to polyhedrons in the general case.

# Introdução

Os seres humanos desde a antiguidade já tinham despertado sua curiosidade sobre objetos de formas regulares nas superfícies, pela sua simplicidade e praticidade como também pela existência da beleza na natureza e na arte composta com estes objetos. Dentre os objetos de maior interesse estão os poliedros regulares, que há muito tempo são estudados por pesquisadores e curiosos devido a sua aplicabilidade em diversas áreas como cálculo de área de superfície ou volume, principalmente em métodos computacionais.

A seguinte relação  $V - A + F = 2$  é conhecida como a Fórmula de Euler em reconhecimento a Leonard Euler (1707-1783) que publicou em 1750, com a formulação que para cada sólido limitado por superfícies planas, o número de faces aumentado pelo número de vértices excede por 2 o número de arestas. Euler nunca apresentou uma demonstração aceitável do teorema por não estabelecer uma definição compatível com o que ele imaginava ser um poliedro. Mas ele ficou convencido de sua validade pela consideração de numerosos exemplos.

Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contam resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como consequência imediata. Mas, Descartes não parece ter notado isso.[1]

A demonstração mais divulgada desse teorema no caso de poliedros homeomorfos à esfera é basicamente devida a Cauchy [1813]. Ela pode ser encontrada, por exemplo, em Courant-Robbins[1915] e Hilbert-Cohn Vossen [1956].[1]

O Teorema de Euler gerou várias implicações, pois, Euler não considerava e nem tanto se preocupava se esta fórmula abrangia todos os poliedros, ficando claro que o teorema não era verdadeiro em toda sua generalidade. Isso fez com que vários geométricos se preocupassem em resolver essa questão. A controvérsia em torno do Teorema de Euler perdurou durante mais de um século. [1]

A solução definitiva do problema deve-se a Poincaré [1893], primeiro matemático a compreender que o teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que o número  $V - A + F$  é um invariante topológico do poliedro P. [1]

É costume hoje em dia escrever  $\chi(P) = V - A + F$  e chamar este número a característica de Euler-Poincaré do poliedro P. A afirmação de que poliedros homeomorfos têm a mesma característica de Euler-Poincaré se exprime dizendo que  $\chi(P)$  é um invariante topológico do poliedro P. [1]

Outra descoberta de Euler foi em relação aos grafos. Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) escreveu o primeiro artigo relacionado a grafos, de consi-

---

derável importância não só para esta teoria como também para a Matemática como um todo. Euler iniciou seus estudos em grafos discutindo um enigma, hoje conhecido como O Problema das Pontes de Königsberg, o qual ele resolveu e determinou um método geral para problemas do mesmo tipo. [12]

Um problema também muito famoso na Teoria de Grafos é "O Problema das Quatro Cores". Tal problema surgiu por volta de 1852 e durante mais de cem anos muitos métodos para abordá-lo foram desenvolvidos, mas foi apenas em 1976 que se chegou à sua solução. Porém isto só foi possível por meio de cálculos realizados com o auxílio de computadores e com isso, apesar de hoje em dia a demonstração ter sido aceita, este ainda é um problema polêmico entre os matemáticos, já que uma verificação à mão se torna praticamente impossível. [12]

No presente trabalho estudaremos grafos e deformações de superfícies, apresentaremos algumas formas de calcular a característica de Euler, sendo dividido da seguinte forma:

No primeiro capítulo serão apresentados algumas definições básicas sobre polígonos e poliedros. Será exposto também o Teorema de Euler com alguns exemplos e sua validade.

No segundo capítulo será abordado a contagem de arestas e vértices para calcular  $\chi(G) = V - A$  e perceber que em todo grafo do tipo árvore sempre teremos  $\chi(G) = 1$  e em grafos com ciclos teremos sempre  $\chi(G) = 1 - c$ , onde  $c$  representa a quantidade de ciclos que o grafo possui.

No terceiro capítulo, será abordado o cálculo da característica de Euler de superfícies fechadas. O objetivo deste capítulo é, além de comprovar que em todos os poliedros convexos a característica de Euler é igual a 2, também justificar porque alguns poliedros não convexos satisfazem o Teorema de Euler. Observaremos através de alguns exemplos que poliedros não convexos com uma alça, também conhecido como poliedros que possuem um "buraco" tem a característica de Euler igual a zero, pois são todos homeomorfos ao toro. E finalmente trabalharemos com deformação de superfícies e a construção de superfícies através da união de outras, que facilita o cálculo da característica de Euler.

# Capítulo 1

## Teorema de Euler para poliedros convexos.

Neste capítulo serão apresentados algumas definições básicas sobre polígonos e poliedros. Será exposto também o Teorema de Euler com alguns exemplos e sua validade. As principais referências usadas foram [3] e [5].

### 1.1 Polígonos

**Definição 1.1.** *Dada uma seqüência de pontos de um plano  $A_1, A_2, \dots, A_n$  com  $n \geq 3$ , todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos  $A_{n-1}, A_n$  e  $A_1$ , assim como  $A_n, A_1$  e  $A_2$ , chama-se polígono à reunião dos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ .*

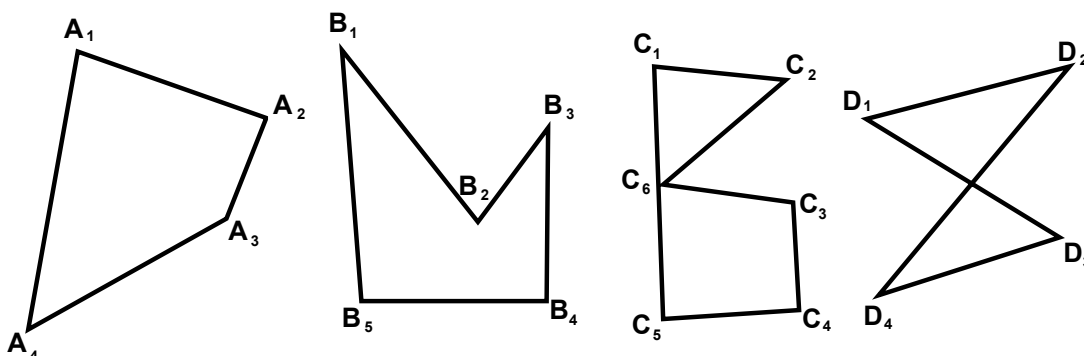


Figura 1.1: Exemplos de polígonos.

**Definição 1.2.** *Um polígono é simples se, e somente se, a interseção de quaisquer dois lados não consecutivos é vazia, [5].*

Na Figura 1.1, os polígonos  $A_1A_2A_3A_4$  e  $B_1B_2B_3B_4B_5$  são exemplos de polígonos simples, já os outros dois são polígonos não simples. Neste trabalho iremos dar ênfase aos polígonos simples.

Alguns elementos do polígono são: vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e diagonais. Observe o polígono ABCD na Figura 1.2 alguns de seus elementos:

Vértices: A, B, C, D.

Lados:  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AD}$ .

Diagonais:  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ .

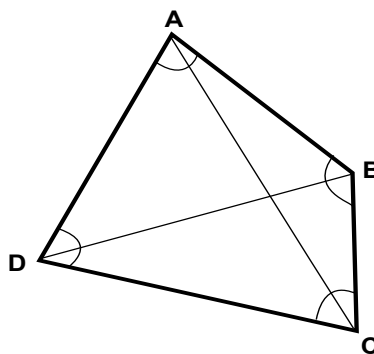


Figura 1.2: Polígono ABCD.

**Definição 1.3.** *A reunião de um polígono com o seu interior é uma região poligonal ou superfície poligonal.*

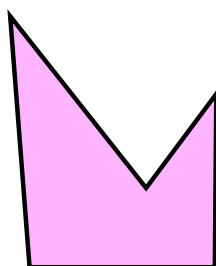


Figura 1.3: Superfície poligonal.

**Observação 1.4.** *Vamos considerar a partir de agora polígono como superfície poligonal (linha poligonal mais a parte interior).*

Os polígonos possuem uma nomenclatura de acordo com a quantidade de lados. Observe na seguinte tabela os nomes dos polígonos com até 10 lados.

Quantidade de lados	Nomenclatura
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono

Os polígonos simples podem ser classificados em polígonos convexos e não convexos, vamos a definição que se encontra em [6].

**Definição 1.5.** *Um polígono simples é convexo se a reta que contém qualquer de seus lados deixa todos os demais lados no mesmo semiplano (em um dos dois semiplanos que ela determina).*

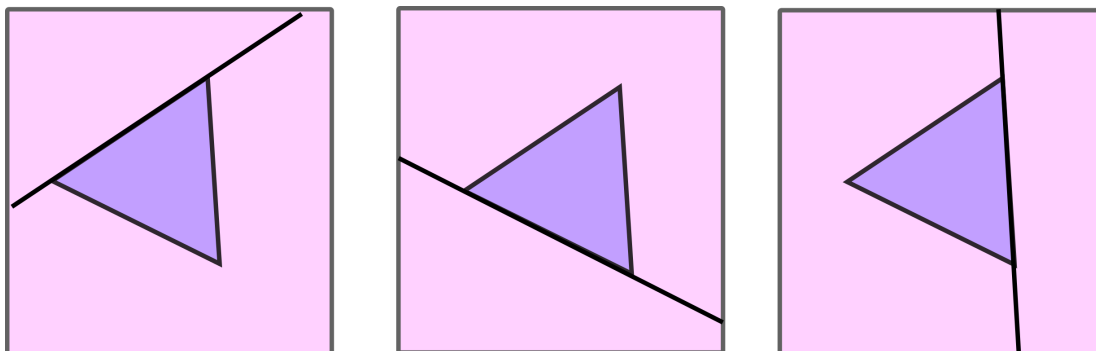


Figura 1.4: Polígono convexo.

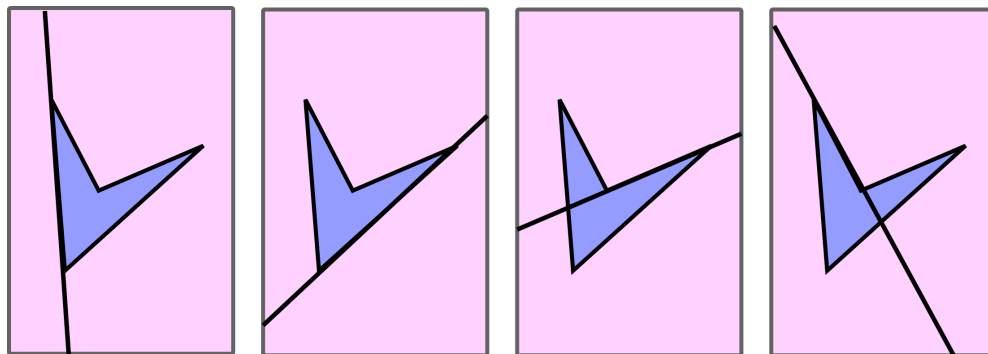


Figura 1.5: Polígono não convexo.

Podemos observar que o polígono da Figura 1.4, que se encontra em [2], é um polígono convexo, pois ele se encontra inteiramente contido no semiplano independente do lado

considerado, enquanto que isso não ocorre no polígono da Figura 1.5, pois existem retas que colocam o polígono em dois semiplanos diferentes.

Podemos ainda classificar um polígono convexo como sendo um polígono regular ou não.

**Definição 1.6.** *Um polígono convexo é regular se, e somente se, possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes,[5].*

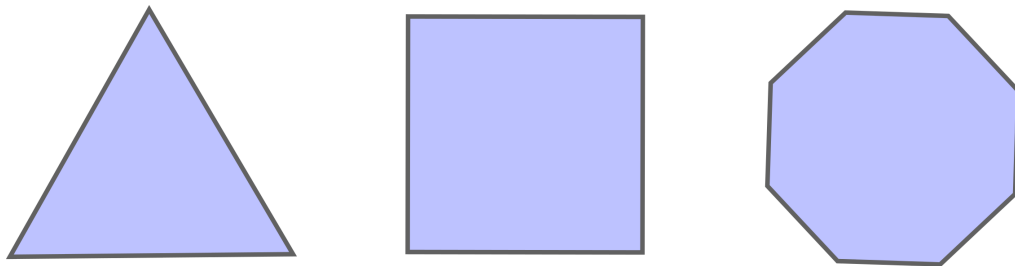


Figura 1.6: Polígonos regulares

**Observação 1.7.** *Um polígono possui a mesma quantidade de vértices, lados e ângulos.*

## 1.2 Poliedros

No dicionário poliedros significa sólido limitado por polígonos planos. Essa definição serve apenas para nos dar ideia do que é um poliedro. Foi exatamente a falta de definição precisa que trouxe dificuldades nas demonstrações de alguns teoremas sobre poliedros no passado. Vamos então a uma definição mais precisa de poliedros que se encontra na referência [3].

**Definição 1.8.** *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados face onde:*

- a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

- c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Na Figura 1.7, temos exemplos de vários poliedros que foram retirados da referência [2].

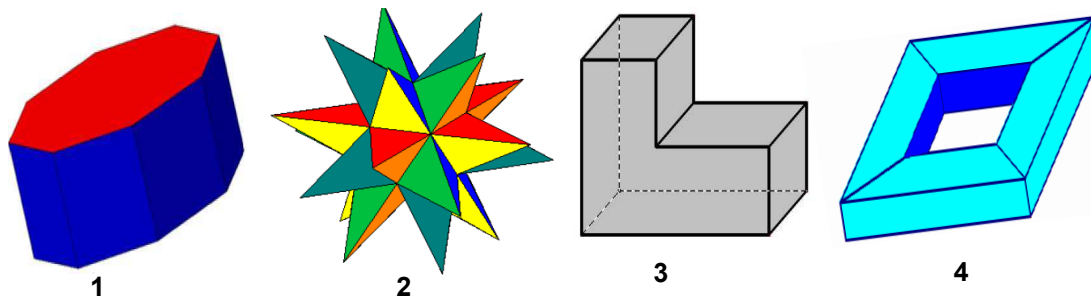


Figura 1.7: Exemplos de poliedros.

Os poliedros possuem faces, arestas e vértices.

**Faces:** superfícies planas poligonais que limitam os poliedros.

**Arestas:** interseção dos lados dos polígonos.

**Vértices:** interseções de três ou mais arestas.

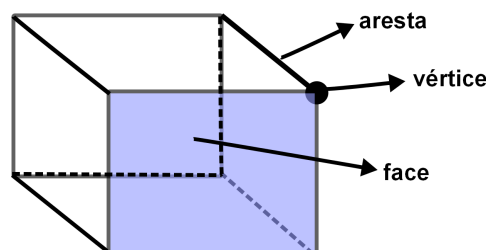


Figura 1.8: Poliedro e seus elementos.

Os poliedros podem ser convexos e não convexos (côncavos). Abaixo veremos a definição de poliedros convexos que se encontra em [3].

**Definição 1.9.** *Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.*

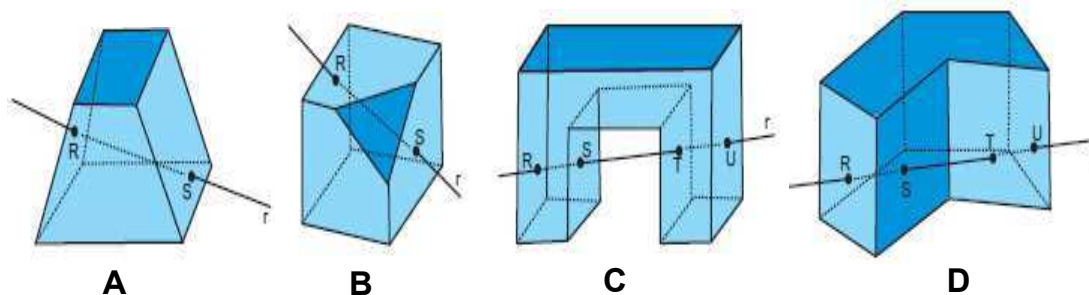


Figura 1.9: Poliedros convexos e não convexos.

Na Figura 1.9, os poliedros A e B são convexos, já os poliedros C e D são poliedros não convexos.

Os poliedros possuem uma nomenclatura de acordo com o seu número de faces, observe na tabela abaixo os principais poliedros convexos.

Quantidade de faces	Nomenclatura
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
8	Octaedro
10	Decaedro
12	Dodecaedro
20	Icosaedro

Os poliedros convexos podem ser classificados como regulares ou não.

**Definição 1.10.** *Um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas,[3].*

Temos apenas cinco poliedros regulares e uma demonstração dessa afirmação de fácil entendimento para os alunos é através de ângulos poliédricos.

**Definição 1.11.** *Dado um número finito  $n$  ( $n \geq 3$ ) de semirretas  $Va_1, Va_2, Va_3, \dots, Va_n$  de mesma origem  $V$ , tais que o plano de duas consecutivas ( $Va_1$  e  $Va_2, Va_2$  e  $Va_3, \dots, Va_n$  e  $Va_1$ ) deixa as demais num mesmo semi-espaço, consideremos n espaços  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , cada um deles com origem no plano de duas semirretas consecutivas e contendo as restantes.*

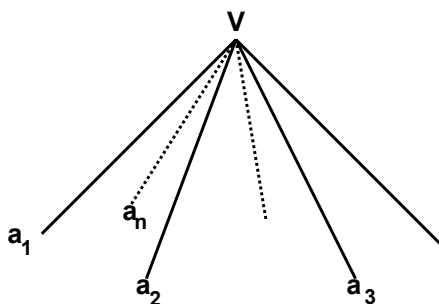


Figura 1.10: Ângulo poliédrico.

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$$

Ângulo poliédrico convexo determinado por  $Va_1, Va_2, Va_3 \dots Va_n$ , é a interseção dos semi-espaços  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , [18].

Cada ângulo poliédrico (formado por todas as faces que convergem num vértice) é sempre menor do que  $360^\circ$ . Por outro lado, cada um de seus ângulos terá de ter pelo menos 3 faces. Portanto as faces só podem ser triângulos equiláteros (ângulo interno  $60^\circ$ ), quadrados (ângulo interno  $90^\circ$ ), e pentágonos regulares (ângulo interno  $108^\circ$ ).

**Observação 1.12.** : *Hexágonos regulares não podem ser usados, pois a medida do ângulo interno é de  $120^\circ$ , e como são pelo menos 3 hexágonos teríamos ( $3 \cdot 120^\circ$ )  $360^\circ$  e isso não formaria um ângulo poliédrico.*

Observe na Figura 1.11, cada uma das possibilidades: triângulos, quadrados e pentágonos.

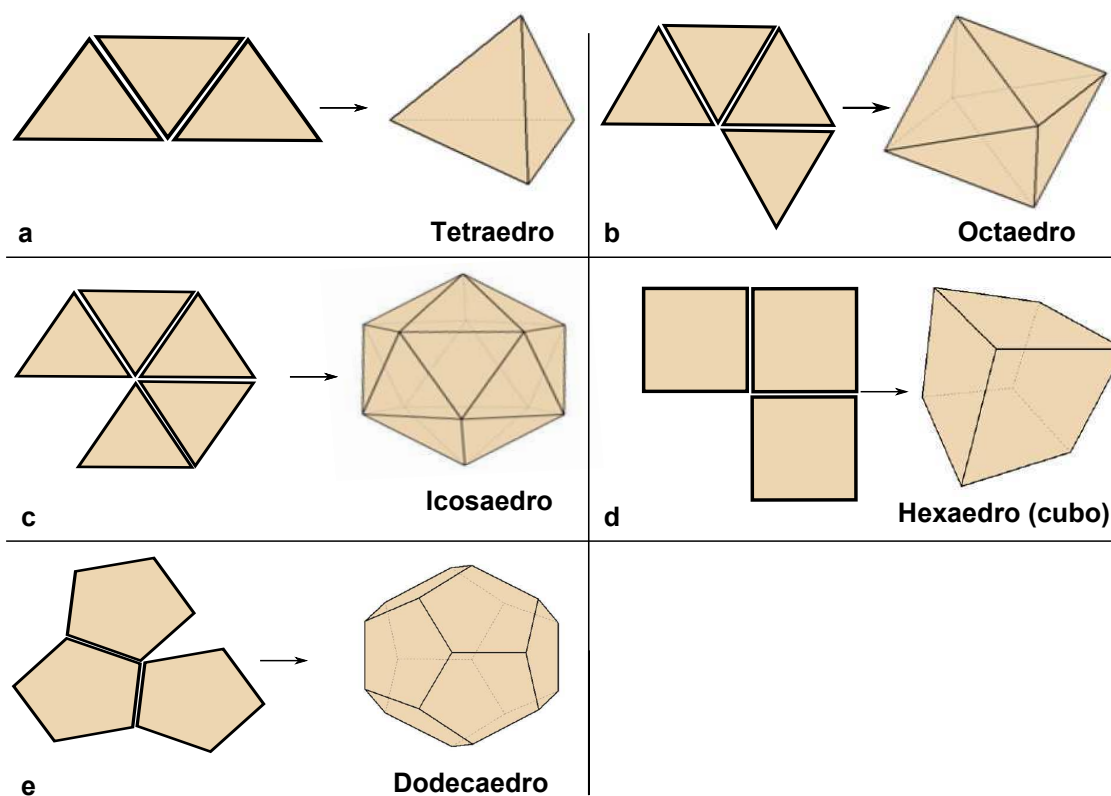


Figura 1.11: Poliedros regulares.

**Triângulos equiláteros:** Como podemos observar na Figura 1.11 a), b), e c) as respectivas possibilidades com triângulos equiláteros:

três triângulos em cada vértice obtém-se um tetraedro (formado por 4 faces triangulares);

quatro triângulos em cada vértice obtém-se um octaedro (formado por 8 faces triangulares);

cinco triângulos em cada vértice obtém-se um icosaedro (formado por 20 faces triangulares).

**Quadrados:** Na Figura 1.11 d) está a única possibilidade com quadrados. Logo temos o hexaedro, mais conhecido como cubo (formado por 6 faces quadradas).

**Pentágonos:** Na Figura 1.11 e) está a única possibilidade com pentágonos. Logo temos um dodecaedro ( formado por 12 faces pentagonais).

Existe demonstração da ocorrência de apenas cinco poliedros regulares utilizando a relação de Euler ( $V - A + F = 2$ ) que se encontra em [3] na página 293.

### 1.3 Teorema de Euler

**Teorema 1.13.** *Para todo poliedro convexo vale a relação:*

$$V - A + F = 2,$$

em que  $V$  é o número de vértices,  $A$  é o número de arestas e  $F$  é o número de faces, [3].

É costume hoje em dia, chamar o número  $V - A + F$  de característica de Euler-Poincaré do poliedro  $P$  e denotar por  $\chi(P)$ .

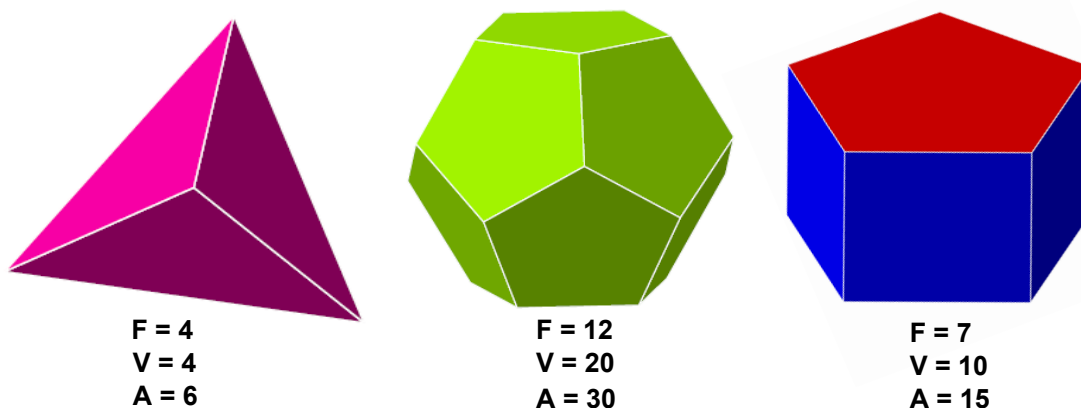


Figura 1.12: Poliedros convexos.

Nos três poliedros da Figura 1.12, encontrada em [2], temos  $V - A + F = 2$ . O valor 2 é a característica de Euler de todos os poliedros convexos, mas temos alguns poliedros não convexos que também satisfazem a relação de Euler.

Observe na Figura 1.13, outros exemplos de poliedros e a validade ou não do Teorema de Euler:

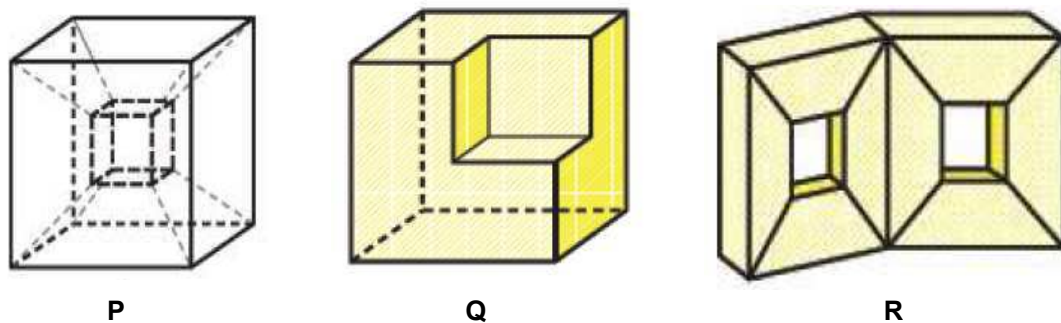


Figura 1.13: Poliedros não convexos

O poliedro P tem: 16 faces, 32 arestas e 16 vértices, logo:  $\chi(P) = 16 - 32 + 16 = 0$ .

O poliedro Q tem: 9 faces, 22 arestas e 14 vértices, logo:  $\chi(Q) = 14 - 21 + 9 = 2$ .

E o poliedro R tem: 30 faces, 60 arestas e 28 vértices logo:  $\chi(R) = 28 - 60 + 30 = -2$ .

Observe que o poliedro Q não é convexo, mas satisfaz a relação de Euler. Qual será então a semelhança desse poliedro com os poliedros convexos? Isto está relacionado com a seguinte definição.

**Definição 1.14.** *Dois objetos serão ditos homeomorfos se podemos fazer uma deformação contínua de um no outro (sem remover e nem acrescentar nenhum ponto).*

No processo de deformação podemos esticar, encolher, entortar e torcer. Todas essas operações conserva o número de vértices, arestas e faces constantes, assim mesmo com essas operações o número de vértices, arestas e faces se mantém.

Essa é uma importante relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro que foi descoberta em torno de 1750 por Leonhard Euler (1707-1783), mas ele não conseguiu fazer uma demonstração formal de seu teorema. Vários matemáticos trabalharam neste teorema, conseguindo algumas demonstrações. Depois de um século, Henri Poincaré foi quem percebeu que o Teorema de Euler era assunto de topologia e não de geometria. Em 1893 Henri Poincaré afirmou que  $V - A + F$  é um invariante topológico, com isso ele explica a existência de poliedros não convexos que satisfazem o Teorema de Euler, isto é, todos os poliedros que são homeomorfos ("homeo" = mesmo, "morfo" = forma) à esfera sempre terá  $V - A + F = 2$ , [1].

Observe a deformação ocorrida no octaedro na Figura 1.13 em [2]:

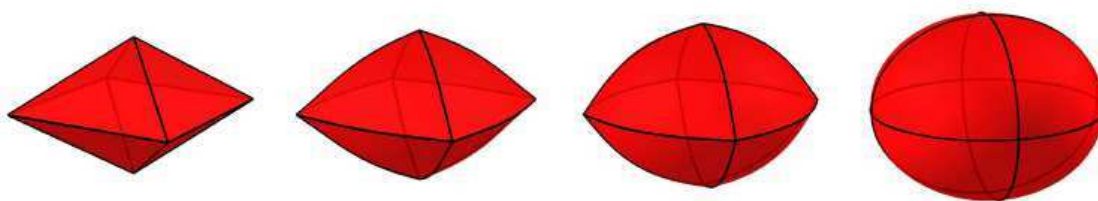


Figura 1.14: Octaedro sendo deformado em uma esfera.

Agora imagine os poliedros da Figura 1.13 sendo feitos de um material elástico e sendo inflados com ar continuamente, somente o poliedro Q se transforma em uma esfera. É exatamente essa a justificativa do poliedro Q ter satisfeito o Teorema de Euler e os outros não.

## Capítulo 2

# Teorema de Euler para grafos

Neste capítulo são apresentadas algumas definições básicas sobre grafos. As quais foram retiradas das referências [7], [8], [9] e [16].

O capítulo abordará a contagem de arestas e vértices de um grafo  $G$ , para calcular  $\chi(G) = V - A$  e perceber que em todo grafo do tipo árvore sempre teremos  $\chi(G) = 1$  e em grafos com ciclos teremos sempre  $\chi(G) = 1 - c$ , onde  $c$  representa a quantidade de ciclos que o grafo possui.

### 2.1 Grafos

**Definição 2.1.** *Um grafo  $G$  é uma relação entre dois conjuntos  $V$  e  $A$ , onde  $V$  é o conjunto dos vértices e  $A$  o conjunto das arestas, e denotado por  $G(V, A)$*

Em outras palavras, grafo é um conjunto de objetos e ligações (relações) entre eles, onde os objetos são chamados de vértices e as ligações, de arestas (arcos).

**Exemplo 2.2.** *A Figura 2.1, que se encontra na revista Veja 27/11/2013 ilustra deslocamentos das equipes do grupo A durante a primeira fase da copa do mundo de 2014 que aconteceu no Brasil. A maneira bastante interessante e de fácil visualização que representa esses deslocamentos é através de grafos; onde as cidades que as seleções desembarcaram são representados por pontos que são os vértices e os deslocamentos das seleções por linhas que são as arestas. Logo temos o grafo com seis vértices e oito arestas.*

$V = \{\text{Manaus, Brasília, Recife, Fortaleza, Natal, São Paulo}\}$

$A = \{\text{São Paulo - Natal, Natal - Brasília, Brasília - Manaus, Manaus - Natal, Natal - Fortaleza, Fortaleza - Recife, Recife - Manaus, Manaus - São Paulo}\}.$

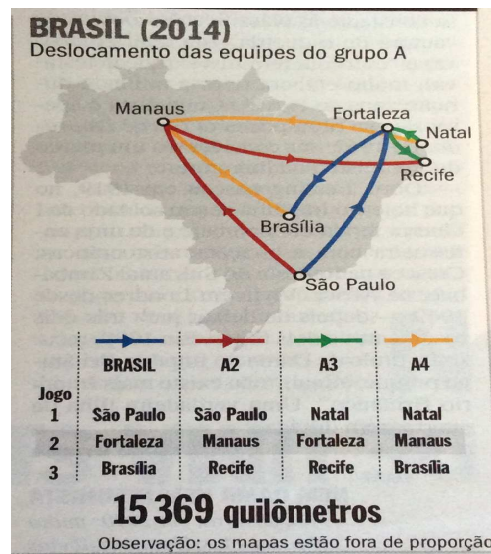


Figura 2.1: Exemplo de grafo.

**Definição 2.3.** *Caminho é uma sequência de arestas em que todos os vértices visitados são distintos, (exceto o 1º e o último que podem coincidir no caso do caminho ser fechado).*

**Definição 2.4.** *Um grafo  $G$  é dito conexo se dado um par qualquer de vértices em  $G$ , existe pelo menos um caminho entre eles.*

De maneira informal, um grafo é conexo se for possível caminhar de qualquer vértice para qualquer outro vértice através de um sequência de arestas adjacentes. A Figura 2.2, ilustra grafo conexo (a) e grafo não conexo (b).

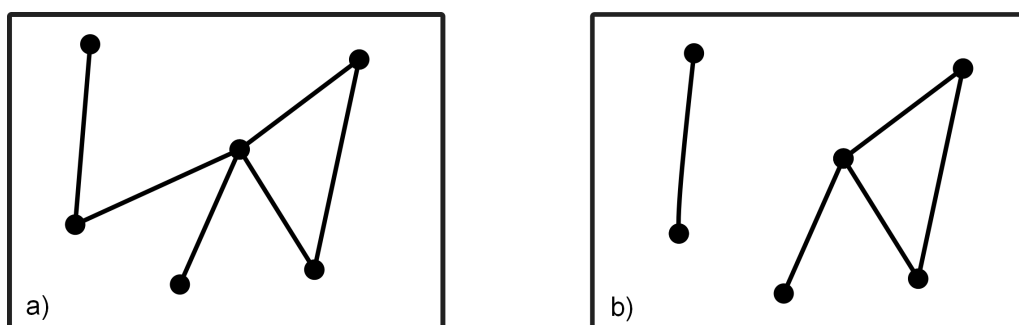


Figura 2.2: Grafo conexo e não conexo.

**Definição 2.5.** *Um ciclo sobre um grafo é um caminho fechado, ou seja, que inicia e termina em um mesmo vértice. Em um ciclo cada aresta é visitada um única vez.*

**Exemplo 2.6.** *Todos os grafos da Figura 2.3 são conexos. O grafo a) não tem ciclo enquanto que b) e c) têm um ciclo.*

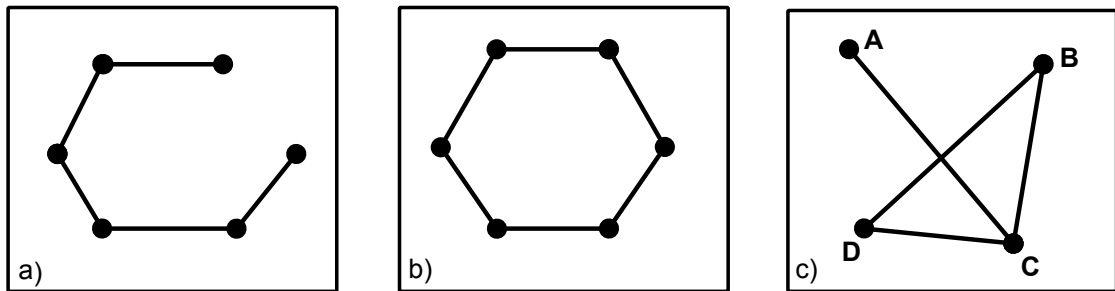


Figura 2.3: Grafos.

**Definição 2.7.** *Grafo árvore é um grafo conexo sem ciclos.*

**Exemplo 2.8.** *A Figura 2.4 é um exemplo de grafo árvore, recebe esse nome por ser parecido com uma árvore.*



Figura 2.4: Grafo árvore.

## 2.2 Característica de Euler em grafos

**Definição 2.9.** *A característica de Euler de um grafo é dado por  $\chi(G) = V - A$ , onde  $V$  são vértices e  $A$  são arestas, [16].*

### 2.2.1 Grafos conexos tipo árvore

Observe a Figura 2.5 e a contagem de vértices e arestas de cada grafo para calcularmos  $V - A$ .

Grafo A: temos  $V = 2$  e  $A = 1$ , então  $\chi(A) = 2 - 1 = 1$

Grafo B: temos  $V = 3$  e  $A = 2$ , então  $\chi(B) = 3 - 2 = 1$

Grafo C: temos  $V = 4$  e  $A = 3$ , então  $\chi(C) = 4 - 3 = 1$

Grafo D: temos  $V = 5$  e  $A = 4$ , então  $\chi(D) = 5 - 4 = 1$

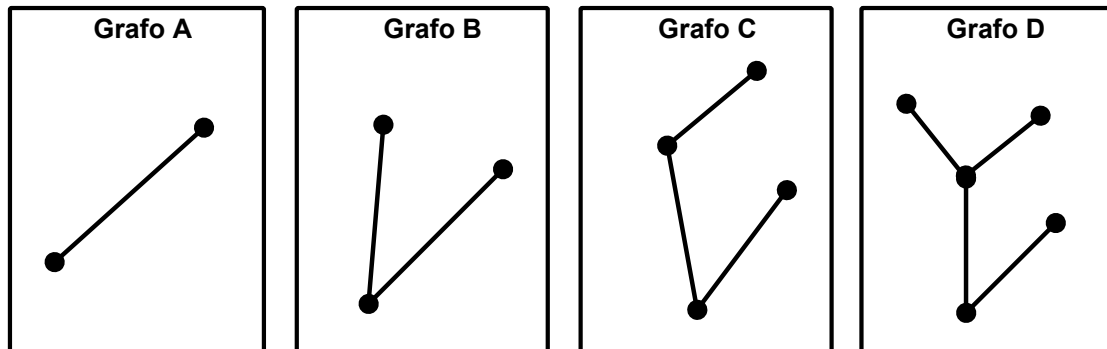


Figura 2.5: Grafos do tipo árvore

**Proposição 2.10.** *Todo grafo do tipo árvore tem característica de Euler igual a 1.*

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo conexo do tipo árvore com  $n$  vértices.

Logo,  $G$  não contém ciclos e possui  $n - 1$  arestas. Portanto teremos:

$$\begin{aligned}\chi(G) &= V - A \\ &= n - (n - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Como podemos observar na Figura 2.5, todos os grafos são do tipo árvore. A cada aresta que aumentamos, o número de vértices também aumenta em uma unidade. Assim a característica de Euler,  $\chi(G) = V - A$ , não se altera, continua sempre sendo igual a 1. Logo esse valor  $\chi(G) = V - A = 1$  é invariante.  $\square$

## 2.2.2 Grafos conexos e com ciclos

Observe o que acontece com os grafos conexos que possuem ciclos da Figura 2.6, quando calculamos  $V - A$ .

Grafo E: temos  $V = 3$  e  $A = 3$ , então  $\chi(E) = 3 - 3 = 0$

Grafo F: temos  $V = 5$  e  $A = 6$ , então  $\chi(F) = 5 - 6 = -1$

Grafo H: temos  $V = 5$  e  $A = 7$ , então  $\chi(H) = 5 - 7 = -2$

Grafo J: temos  $V = 7$  e  $A = 10$ , então  $\chi(J) = 7 - 10 = -3$

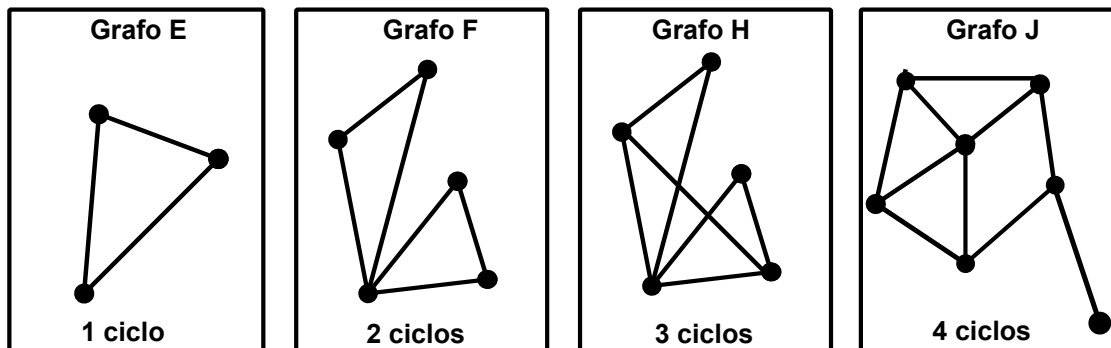


Figura 2.6: Grafos com ciclos.

Organizando os dados obtidos em uma tabela:

Grafo	Quantidade de ciclos	Vértices	Arestas	$\chi(G) = V - A$
árvore	0	$n$	$n - 1$	1
E	1	3	3	$0 = (3 - 3)$
F	2	5	6	$-1 = (5 - 6)$
H	3	5	7	$-2 = (5 - 7)$
J	4	7	10	$-3 = (7 - 10)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N$	$c$	$V$	$A$	$1 - c$

Observem na tabela acima os resultados de  $\chi(G) = V - A$ , é sempre 1 menos a quantidade de ciclos que o grafo possui.

**Proposição 2.11.** *A característica de Euler de um grafo com a quantidade  $c$  de ciclos é  $1 - c$ .*

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo conexo com  $c$  ciclos,  $A$  arestas e  $V$  vértices.

Se retirarmos uma aresta de cada ciclo do grafo estaremos diminuindo  $c$  quantidade de arestas e mantendo o número de vértices, logo teremos um grafo  $G'$  do tipo árvore. Como visto anteriormente, a característica de Euler desse tipo de grafo é sempre igual a 1. Como do grafo  $G$  foram retiradas  $c$  arestas então a característica de Euler do grafo  $G$  será  $\chi(G) = 1 - c$ , onde  $c$  é a quantidade de arestas retiradas para que o grafo com  $c$  ciclos se torne um grafo do tipo árvore.  $\square$

**Observação 2.12.** Se  $\chi(G) = 1 - c$  e  $\chi(G) = V - A$ , então  $c = 1 - \chi(G)$ .

Logo a quantidade de ciclos de um grafo conexo pode ser calculado se soubermos a sua característica de Euler.

### 2.2.3 União de grafos

Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos conexos. A **união**  $G_1 \cup G_2$  de dois grafos  $G_1(V_1, A_1)$  e  $G_2(V_2, A_2)$  é dada pelo grafo  $(V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$ .

É possível a união dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  com a identificação de seus vértices ou de arestas. Vamos apresentar dois tipos de conexões de grafos:

- 1º) União de grafos através da identificação de vértices;
- 2º) União de grafos através da identificação de arestas.

#### 1ª possibilidade - União de grafos através da identificação de vértices

A união dos vértices pode determinar ou não novos ciclos.

- a) A união de grafos através da identificação de dois vértices, um de cada grafo, que não determina um ciclo, como na Figura 2.7:

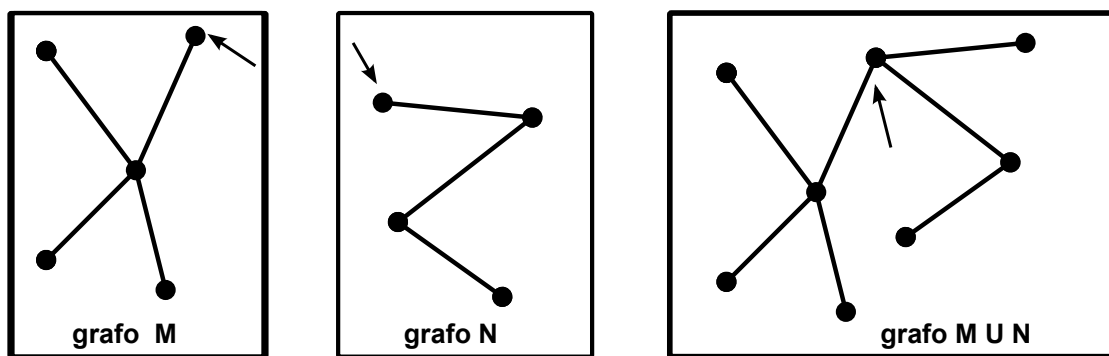


Figura 2.7: União de grafos através de vértices.

Veja a característica de Euler de cada grafo da Figura 2.7:

$$\chi(M) = 5 - 4 = 1.$$

$$\chi(N) = 4 - 3 = 1.$$

$$\chi(M \cup N) = 8 - 7 = 1.$$

O vértice em destaque é a interseção dos grafos, pertence tanto ao grafo M quanto ao grafo N logo,  $\chi(M \cap N) = 1$  então para calcular a característica de Euler do grafo obtido podemos fazer  $\chi(M \cup N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N)$ , pois a característica da interseção

foi somada duas vezes, logo necessita ser subtraída uma vez. Então:

$$\begin{aligned}
 \chi(M \cup N) &= \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) \\
 &= 1 + 1 - 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Se denotarmos por  $c(M)$  e  $c(N)$  os ciclos respectivos dos grafos  $M$  e  $N$ , então temos  $\chi(M) = 1 - c(M)$  e  $\chi(N) = 1 - c(N)$ . Como a união de vértices não resultou em novos ciclos, teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi(M \cup N) &= \chi(M) + \chi(N) - \chi(M \cap N) \\
 &= [1 - c(M)] + [1 - c(N)] - 1 \\
 &= 1 - [c(M) + c(N)].
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

b) A união dos grafos através da identificação de dois pares de vértices, dois de cada grafo, que determinam ciclos, como no exemplo da Figura 2.8:

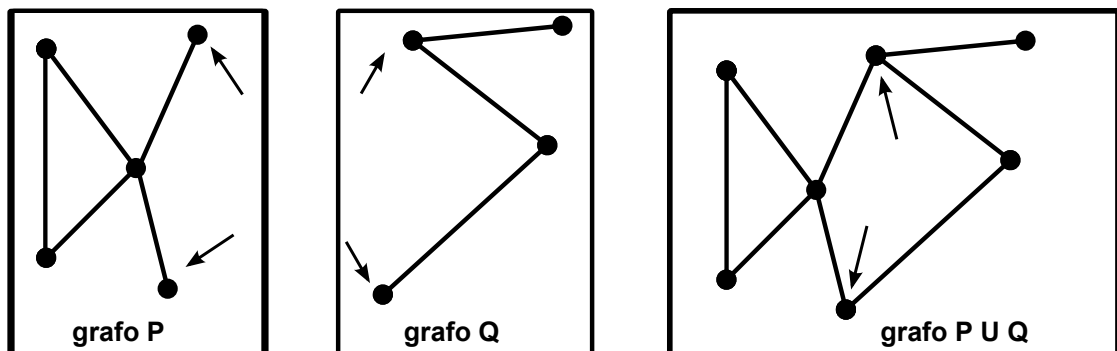


Figura 2.8: União de grafos através de vértices.

Observe a característica dos grafos  $P$ ,  $Q$  e  $P \cup Q$ :

$$\chi(P) = 5 - 5 = 0. \qquad \chi(Q) = 4 - 3 = 1. \qquad \chi(P \cup Q) = 7 - 8 = -1.$$

Os vértices em destaque, os vértices identificados são as interseções dos grafos, pertencem tanto ao grafo  $P$ , quanto ao grafo  $Q$ , logo  $\chi(P \cap Q) = 2$ , então para calcular a característica de Euler do grafo  $P \cup Q$  podemos fazer:

$$\begin{aligned}
 \chi(P \cup Q) &= \chi(P) + \chi(Q) - \chi(P \cap Q) \\
 &= 0 + 1 - 2 \\
 &= -1.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Se denotarmos por  $c(P)$  e  $c(Q)$  os ciclos respectivos dos grafos  $P$  e  $Q$ , então temos

$\chi(P) = 1 - c(P)$ ,  $\chi(Q) = 1 - c(Q)$  e  $\chi(P \cap Q) = 2$ , pois temos dois vértices de interseção, logo:

$$\begin{aligned}\chi(P \cup Q) &= \chi(P) + \chi(Q) - \chi(P \cap Q) \\ &= [1 - c(P)] + [1 - c(Q)] - 2 \\ &= -[c(P) + c(Q)].\end{aligned}\tag{2.4}$$

Observe também que é possível calcular a  $\chi(P \cup Q)$  fazendo  $1 - c$  onde  $c$  é a quantidade de ciclos. A união dos grafos  $P$  e  $Q$  resultou em um grafo com 2 ciclos, logo a  $\chi(P \cup Q) = 1 - 2 = -1$ .

### 2ª possibilidade: União dos grafos através da identificação de arestas.

Calculando a característica de Euler dos grafos da Figura 2.9, obtemos:

$$\chi(R) = 6 - 6 = 0. \quad \chi(S) = 6 - 6 = 0. \quad \chi(R \cup S) = 10 - 11 = -1.$$

A aresta em destaque na Figura 2.9 é a interseção dos grafos, pertence tanto ao grafo  $R$  quanto ao grafo  $S$ , logo  $\chi(R \cap S) = 2 - 1 = 1$ , então, para calcular a característica de Euler do grafo  $\chi(R \cup S)$  podemos fazer  $\chi(R) + \chi(S) - \chi(R \cap S)$ . Quando somamos as características dos grafos  $R$  e  $S$  estamos somando a característica da aresta de interseção duas vezes, logo necessita ser subtraída uma vez. Então:

$$\begin{aligned}\chi(R \cup S) &= \chi(R) + \chi(S) - \chi(R \cap S) \\ &= 0 + 0 - 1 \\ &= -1.\end{aligned}\tag{2.5}$$

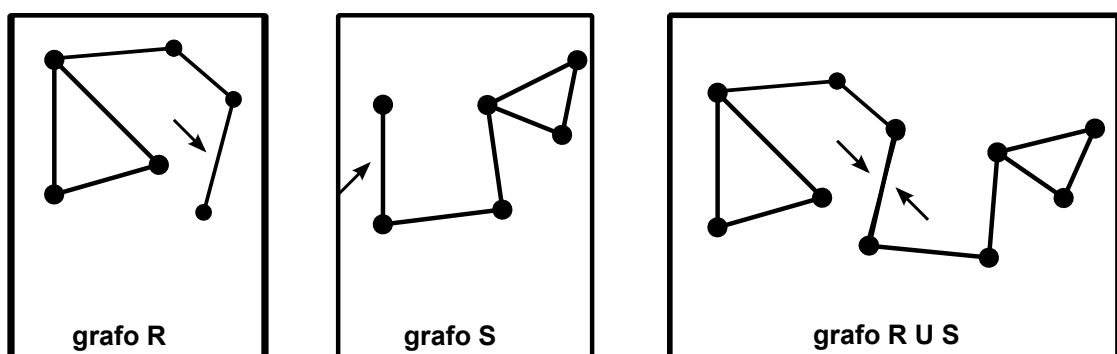


Figura 2.9: União de grafos através de arestas.

Também podemos calcular  $\chi(R \cup S)$  com  $1 - c$  onde  $c$  é a quantidade de ciclos. Sendo assim, a união dos grafos  $R$  e  $S$  resultou em um grafo com 2 ciclos, logo a  $\chi(R \cup S) = 1 - 2 = -1$ .

Se denotarmos por  $c(R)$  e  $c(S)$  os ciclos respectivos dos grafos  $R$  e  $S$  temos  $\chi(R) = 1 - c(R)$  e  $\chi(S) = 1 - c(S)$ . Como a união de arestas não resultou em novos ciclos, teremos:

$$\begin{aligned}\chi(R \cup S) &= \chi(R) + \chi(S) - \chi(R \cap S) \\ &= [1 - c(R)] + [1 - c(S)] - 1 \\ &= 1 - [c(R) + c(S)].\end{aligned}\tag{2.6}$$

## 2.3 Teorema de Euler e grafos planares

**Definição 2.13.** Um grafo  $G$  é planar se admite uma representação gráfica no plano na qual linhas que representam arestas diferentes não se intersectam, a não ser nos extremos, no caso das arestas serem incidentes num ou mais vértices em comum, [15].

**Exemplo 2.14.** As conexões de uma placa de circuito impresso, podem ser representadas por um grafo planar (ver Figura 2.10, encontrada em [9]). Outros exemplos clássicos de grafos planares são os dos poliedros regulares ilustrados na Figura 2.11, encontrada em [7].



Figura 2.10: Aplicações de grafos planares.

De acordo com a definição 2.13, um cubo pode ser representado em forma de um grafo planar, como ilustra a Figura 2.12.

Esse tipo de representação no plano determina dois tipos de regiões, as limitadas pelos ciclos e uma ilimitada. Essas regiões são chamadas de faces do grafo. Na Figura 2.12, temos 5 regiões limitadas e 1 região ilimitada gerando assim um total de 6 faces.

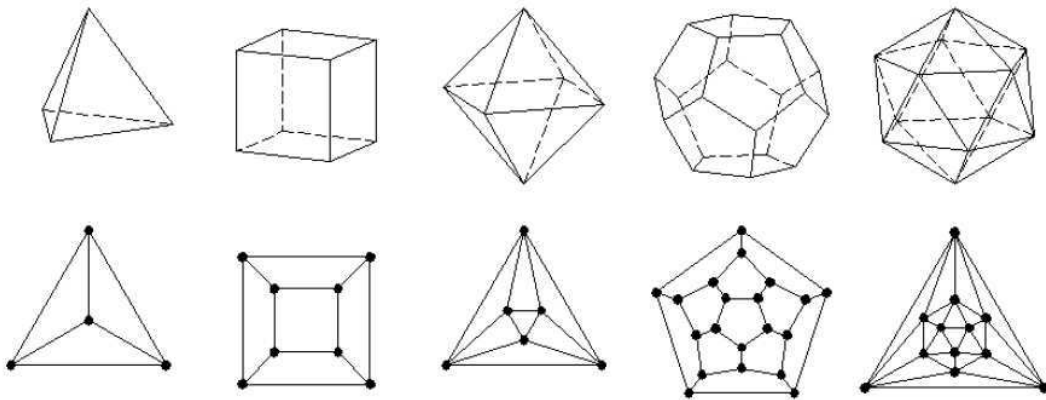


Figura 2.11: Grafos planares que representam os poliedros regulares.

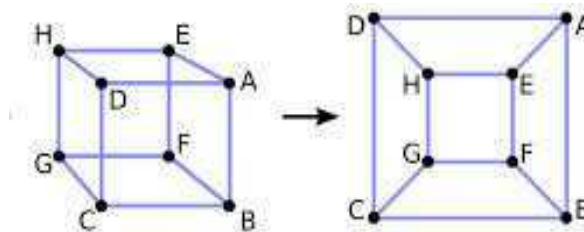


Figura 2.12: Grafo planar

**Teorema 2.15.** *Se  $G$  é um grafo planar conexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces em uma **representação plana**, tem-se  $V - A + F = 2$ , [15].*

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo conexo planar, logo teremos duas opções:  $G$  não possui ciclo ou  $G$  possui ciclo. Vamos analisar cada opção.

Se  $G$  não possui ciclo então ele é do tipo árvore, logo  $G$  possui  $V$  vértices,  $V - 1$  arestas e 1 face (ilimitada), portanto teremos:  $V - A + F = V - (V - 1) + 1 = 2$ .

Se  $G$  possui um ciclo, então o número de arestas será  $\geq 2$ . A demonstração será realizada por indução sobre o número de arestas.

Se  $A = 2$ , então pelo fato de  $G$  ser um grafo planar conexo e com um ciclo ele terá 2 vértices e 2 faces. Portanto  $V - A + F = 2$ . Suponha, por indução, que para qualquer grafo planar conexo com um ciclo e com  $A$  arestas, vale a igualdade  $V - A + F = 2$ . Seja  $G$  um grafo planar conexo com um ciclo,  $V$  vértices,  $F$  faces e  $A + 1$  arestas. Como  $G$  possui um ciclo podemos retirar uma arestas sem que o grafo  $G$  deixe de ser conexo. Ao ser retirada essa aresta, o grafo  $G$  continua com o mesmo número de vértices ( $V$ ) e altera o número de faces para  $(F - 1)$ , pois diminui uma face (o ciclo). Pela hipótese de indução

$V - A + F - 1 = 2$ . Assim temos:

$$\begin{aligned}V - (A + 1) + F &= V - A + F - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

(2.7)

□

## Capítulo 3

# Cálculo da característica de Euler usando a união de superfícies.

Será abordado o cálculo da característica de Euler de superfícies fechadas. O objetivo deste capítulo é além de comprovar que em todos os poliedros convexos a característica de Euler é igual a 2, também trazer a justificativa de que em alguns poliedros não convexos tem a validade do Teorema de Euler. Observaremos através de alguns exemplos que poliedros não convexos com uma alça também conhecidos como poliedro que possuem um "buraco" tem a característica de Euler igual a zero, pois são todos homeomorfos ("homeo" = mesmo, "morfo" = forma) ao toro. E finalmente trabalharemos com deformação de superfícies e a construção de superfícies através da união de outras, que facilita o cálculo da característica de Euler.

### 3.1 Deformação de poliedros regulares na esfera

Como vimos no Capítulo 1, os poliedros regulares são poliedros cujo faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem a mesma quantidade de arestas, ilustrados na Figura 1.10.

Observe a Figura 3.1 encontrada em [2] podemos preencher a seguinte tabela:

Poliedros	Nº de vértices	Nº de arestas	Nº de faces	$V - A + F$
Tetraedro	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
Cubo	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
Octaedro	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
Dodecaedro	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
Icosaedro	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

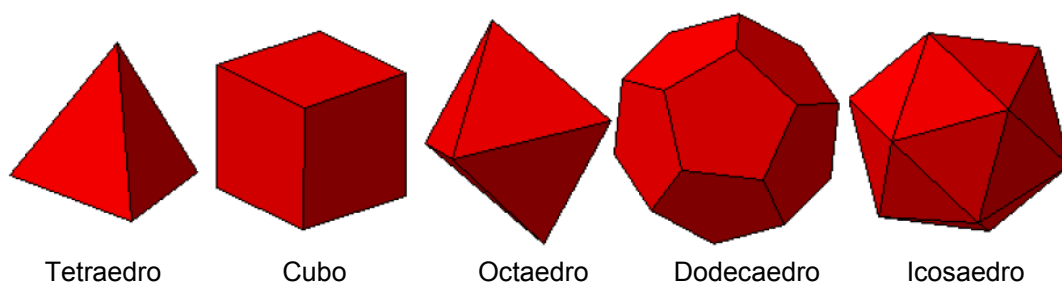


Figura 3.1: Poliedros regulares.

Observe na tabela da página anterior, que o número de vértices, arestas e faces variam, mas o valor da soma alternada  $V - A + F$  sempre é igual a 2. Na realidade, essa é a característica de Euler de todos os poliedros convexos.

Na verdade, temos uma classe muito maior de poliedros que satisfazem a relação de Euler. Como podemos ver no final do Capítulo 1, são todos os poliedros que são homeomorfos à esfera. Grosseiramente falando, imagine o poliedro feito de um material de borracha, ao ser inflado assume um formato esférico, como mostrado na Figura 3.2 encontrada em [10]:

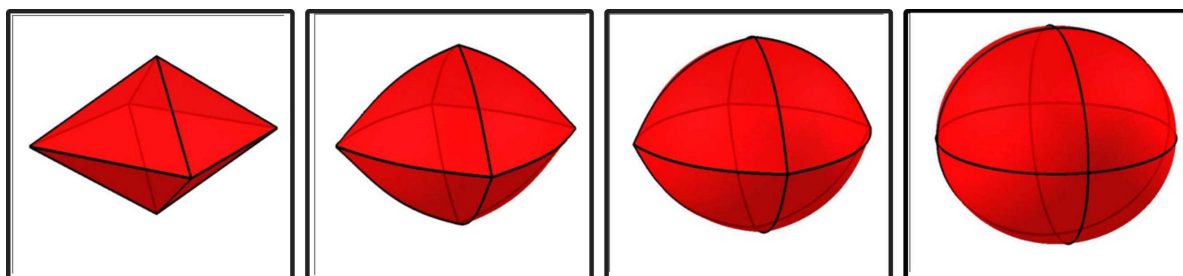


Figura 3.2: Deformação do octaedro em esfera.

Na figura 3.2, o número de arestas, vértices e faces do poliedro mantém-se constante após a deformação ocorrida. Homeomorfismo preservam  $v$ ,  $A$  e  $F$  logo podemos dizer que o Teorema de Euler que é válido para os poliedros convexos também é válido para a superfície esférica.

As arestas e vértices formam sobre a esfera o que chamamos de grafo com as seguintes observações, como podem ser visto em [10]:

1. Que o grafo seja conexo;
2. As regiões separadas pelo grafo são chamadas de faces, como as de um poliedro. As arestas adjacentes à face deverão formar uma curva fechada e sem auto-interseções;
3. Que cada aresta seja adjacente a duas faces distintas;

4. Será proibido que duas arestas se cruzem fora de um vértice.

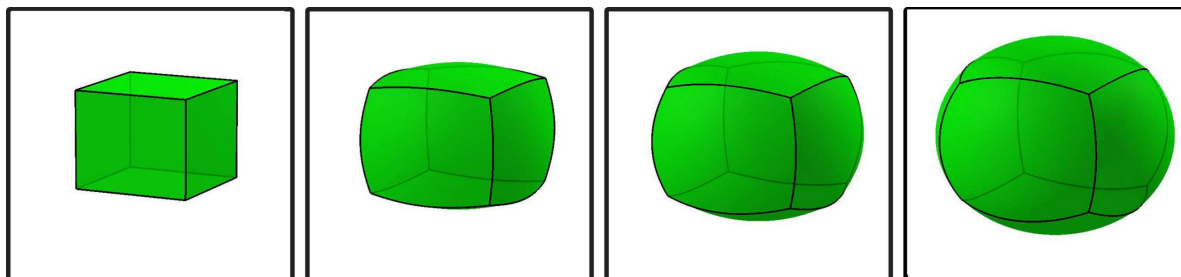


Figura 3.3: Cubo se transformando em esfera.

Nas Figuras 3.2 e 3.3, obtemos grafos sobre a esfera que satisfazem todas as observações citadas. Como podemos ver na Figura 3.1, todas as faces são triangulares já na Figura 3.2 isso não ocorre.

**Proposição 3.1.** *Todo grafo sobre a esfera satisfazendo os itens 1, 2, 3 e 4 satisfaz a relação de Euler.*

Este tipo de grafo na esfera pode ser construído a partir de um "triângulo inicial na esfera", realizando sucessivamente algumas das seguintes operações:

1. Adicionar um novo vértice e uma nova aresta;
2. Unir dois vértices que já existem, por uma aresta, criando uma nova face.

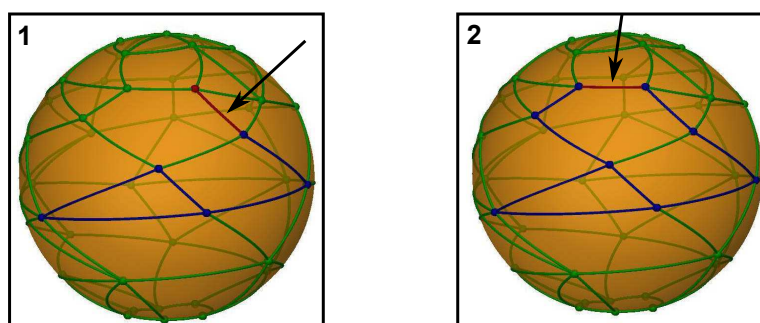


Figura 3.4: Construção de grafo na esfera.

O triângulo inicial determina na esfera um grafo com duas regiões triangulares (uma interior ao triângulo e outra exterior), 3 arestas e 3 vértices. Isto é, o grafo inicial sobre a esfera tem característica de Euler  $V - A + F = 3 - 3 + 2 = 2$ . A operação (1) acima aumenta por 1 o número de vértices e arestas e na operação (2) aumenta por 1 o número de arestas e faces, logo não alteram a característica de Euler do grafo e o grafo final vai ter também característica de Euler igual a 2.

**Definição 3.2.** *Triangulação é o nome que se dá a um grafo sobre uma superfície que satisfaz todas as observações citadas e possui todas as suas faces triangulares, como por exemplo o grafo desenhado na Figura 3.2.*

## 3.2 Construção de superfícies

Superfícies são objetos de dimensão 2 (bidimensionais) como, por exemplo, planos deformados, assim como, as curvas são retas deformadas. Veja na Figura 3.5, exemplos de superfícies encontradas em [10].

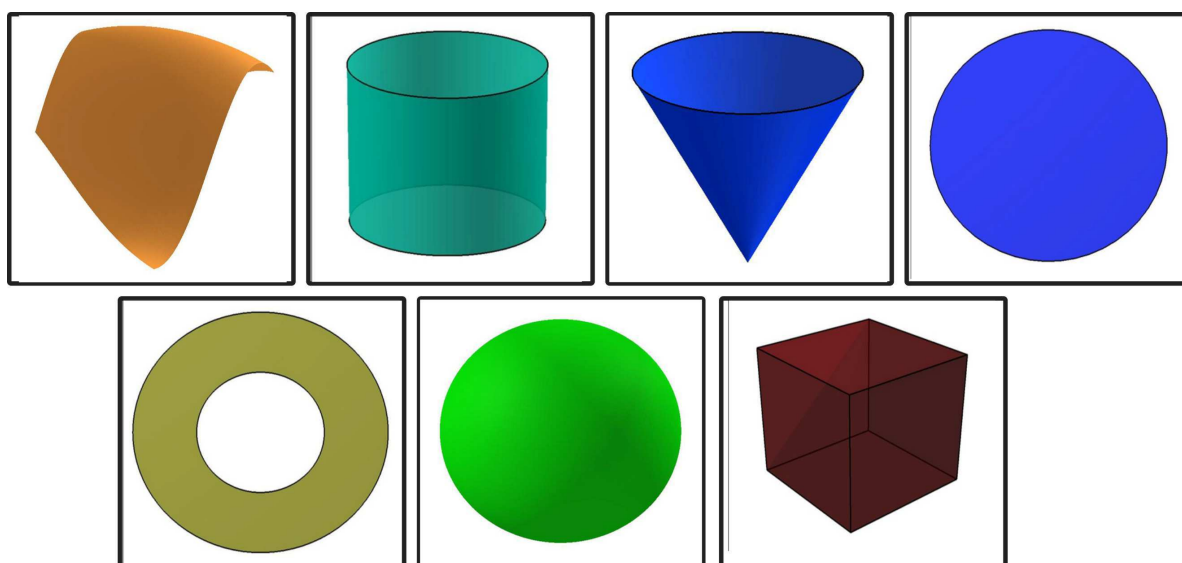


Figura 3.5: Diferentes tipos de superfícies.

Observe que a superfície da Figura 3.6 é formada por pontos que têm vizinhanças semelhantes a discos, através de uma deformação, porém em alguns casos o ponto está no centro da vizinhança (pontos de bordo) e em outras não (pontos interiores).

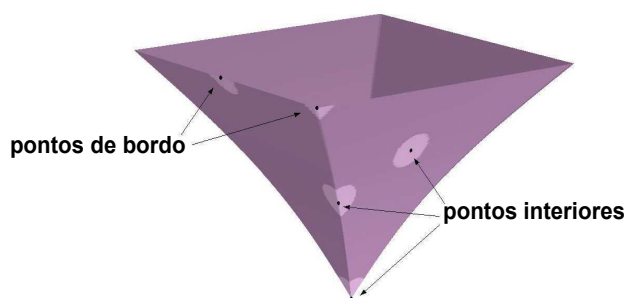


Figura 3.6: Superfície com bordo.

**Definição 3.3.** *Ponto de bordo é aquele que tem uma vizinhança semelhante a um disco, e que com a deformação não pode ser levado ao centro de sua vizinhança, [10].*

Por exemplo, o bordo (grosseiramente falando, beirada) de um cilindro é constituído por duas curvas fechadas. O disco tem o bordo formado por apenas uma curva fechada. Outras superfícies nem tem bordo, como por exemplo a esfera, o toro e o cubo (conhecidas como superfícies fechadas). Considere nestes casos somente a "casca" sem levar em conta a espessura.

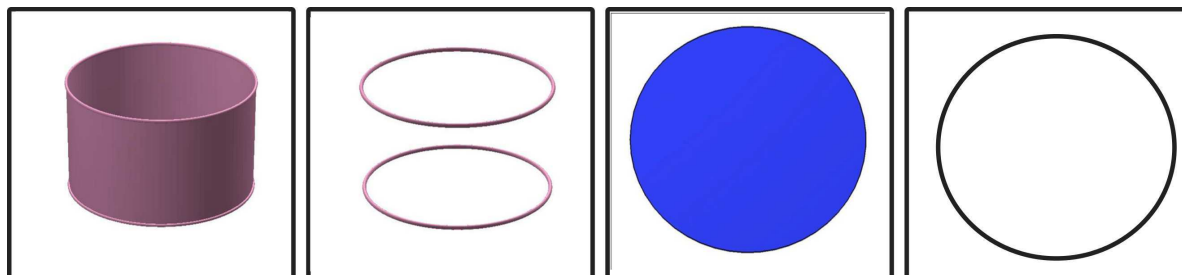


Figura 3.7: Cilindro e círculo com seus respectivos bordos (beiradas).

**Definição 3.4.** *Curva fechada é um segmento de curva em que suas duas extremidades são unidas em um só ponto. Uma curva fechada é dita simples se não tem auto interseção, pode ser deformada até se tornar uma circunferência.*

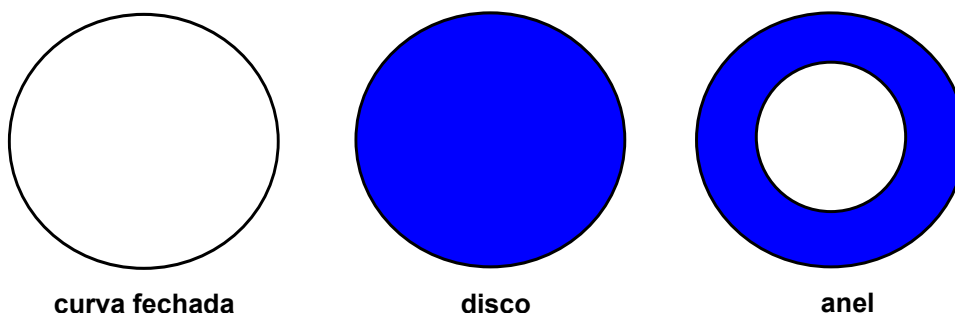


Figura 3.8: Curva fechada, disco e anel.

**Definição 3.5.** *Disco (círculo) é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo  $O$  (centro) é menor ou igual que uma distância  $r$  (raio) dada.*

**Definição 3.6.** *Anel (coroa) é a região compreendida entre dois círculos concêntricos (círculos concêntricos são círculos que possuem o mesmo centro).*

Vamos calcular a característica de Euler do disco ( $D^2$ ), do anel ( $Q$ ) e da curva fechada ( $C$ ).

**Exemplo 3.7.** *Característica de Euler da curva fechada (bordo do disco)*

A Figura 3.9, ilustra uma divisão da curva em 4 arcos obtendo 4 vértices, 4 arestas. Logo  $\chi(C) = 4 - 4 = 0$ . Independente da divisão feita sempre vamos obter característica de Euler igual a zero, pois qualquer divisão realizada na curva fechada sempre terá a mesma quantidade de vértices e arestas (arcos).

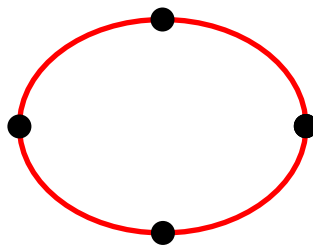


Figura 3.9: Curva fechada.

**Exemplo 3.8. Característica de Euler do disco ( $D^2$ ):** A Figura 3.10 ilustra três discos com triangulações diferentes. No  $D_1^2$  temos 8 arestas, 5 vértices e 4 faces, logo,  $\chi(D_1^2) = 5 - 8 + 4 = 1$ ; no  $D_2^2$  temos 10 arestas, 6 vértices e 5 faces, logo,  $\chi(D_2^2) = 6 - 10 + 5 = 1$ ; no  $D_3^2$  temos 12 arestas, 7 vértices e 6 faces, logo,  $\chi(D_3^2) = 7 - 12 + 6 = 1$ , em qualquer triangulação do disco esse valor será sempre igual a 1.

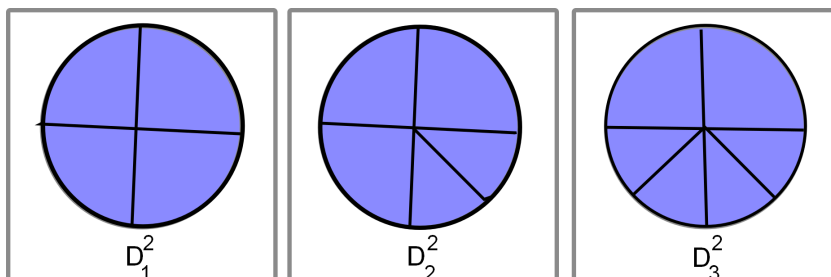


Figura 3.10: Discos com diferentes triangulações.

**Afirmção 1:** A característica de Euler do disco  $D^2$  é sempre igual a 1 para qualquer triangulação.

**Demonstração:** Como visto no Exemplo 3.8, a cada face que aumentamos, o número de vértices aumenta em 1 unidade e o número de arestas aumenta em 2 unidades, logo,  $V - A + F$  não se altera.  $\square$

As Figuras 3.11 (encontrada em [10]) e 3.12, possuem a mesma característica de Euler do disco, pois são homeomorfas ao disco (podem ser deformadas em disco). Todas as superfícies que são homeomorfas ao disco possuem a característica de Euler igual a 1, por exemplo, todos os polígonos.

**Exemplo 3.9. Característica de Euler do anel ( $Q$ ):** Como podemos ver na Figura 3.13, no anel  $Q_1$  temos 4 vértices, 4 faces e 8 arestas, logo  $\chi(Q_1) = 4 - 8 + 4 = 0$ ; no anel  $Q_2$  temos 5 vértices, 5 faces e 10 arestas, logo  $\chi(Q_2) = 5 - 10 + 5 = 0$ ; no anel  $Q_3$  temos 6 vértices, 6 faces e 12 arestas, logo  $\chi(Q_3) = 6 - 12 + 6 = 0$ . A característica de Euler do anel é sempre  $\chi(Q) = 0$ .

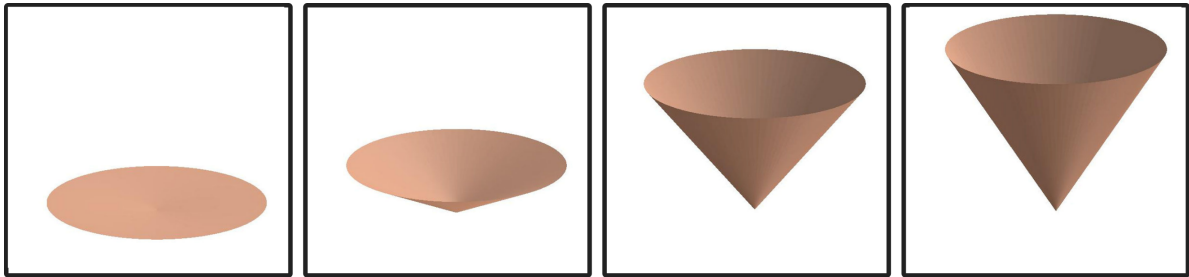


Figura 3.11: Disco se transformando em cone.

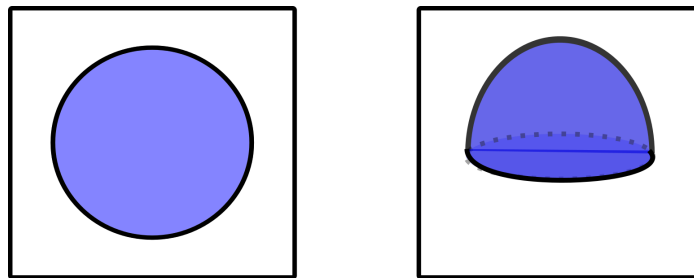


Figura 3.12: Disco se transformando em calota.

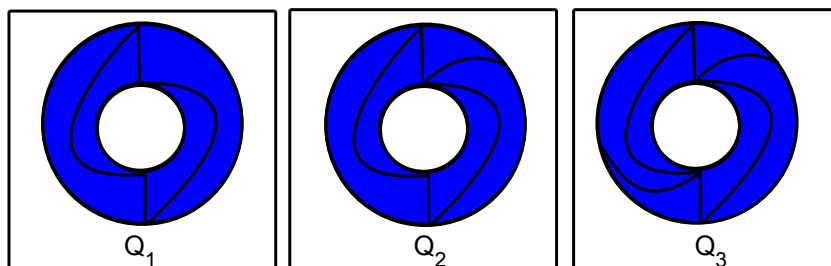


Figura 3.13: Anéis com diferentes triangulações.

**Afirmção 2:** A característica de Euler do anel é sempre igual a zero.

**Demonstração:** Como visto no Exemplo 3.9, a cada face que aumentamos, o número de vértices aumenta em 1 unidade e o número de arestas aumenta em 2 unidades, logo  $V - A + F$  não se altera.  $\square$

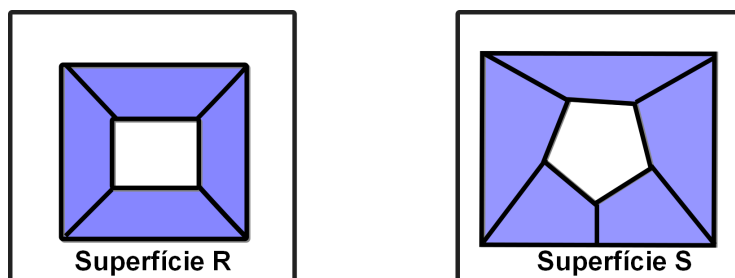


Figura 3.14: Superfícies homeomorfas ao anel.

As características de Euler das superfícies R e S na Figura 3.14, dadas por:

$$\begin{aligned}
 \chi(R) &= V - A + F & \chi(S) &= V - A + F \\
 &= 8 - 12 + 4 & &= 10 - 15 + 5 \\
 &= 0. & &= 0.
 \end{aligned}$$

Observe que as superfícies R e S possuem a mesma característica de Euler do anel, pois essas superfícies são homeomorfas. Imagine as superfícies R e S feitas de um material elástico e "esticando-as" podemos transformá-las em anéis sem alterar o número de vértices, arestas e faces.

Observe a deformação ocorrida, ilustrada na Figura 3.15 encontrada em [10].

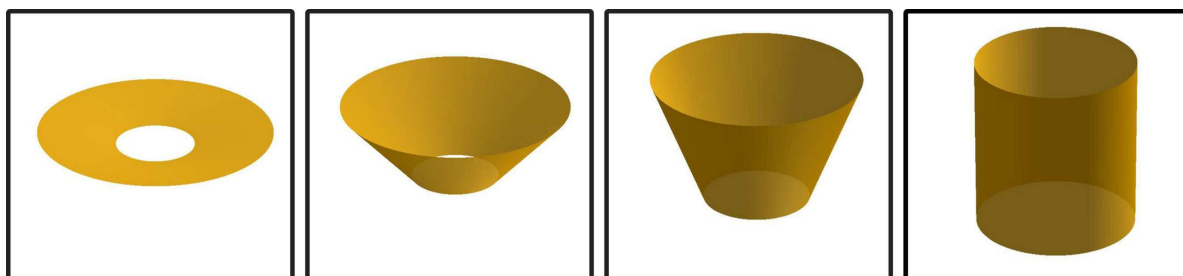


Figura 3.15: Anel se transformando em cilindro.

**Afirmção 3:** Todas as superfícies que são homeomorfas ao anel terão característica de Euler 0.

**Demonstração:** Observe que a deformação (esticar, encolher) não altera a característica de Euler da superfície, pois o número de vértices, arestas e faces mantém-se constantes.  $\square$

### 3.3 União de superfícies

Veremos como calcular a característica de Euler de algumas superfícies através da operação da união.

#### 1. União de dois discos através de seus bordos.

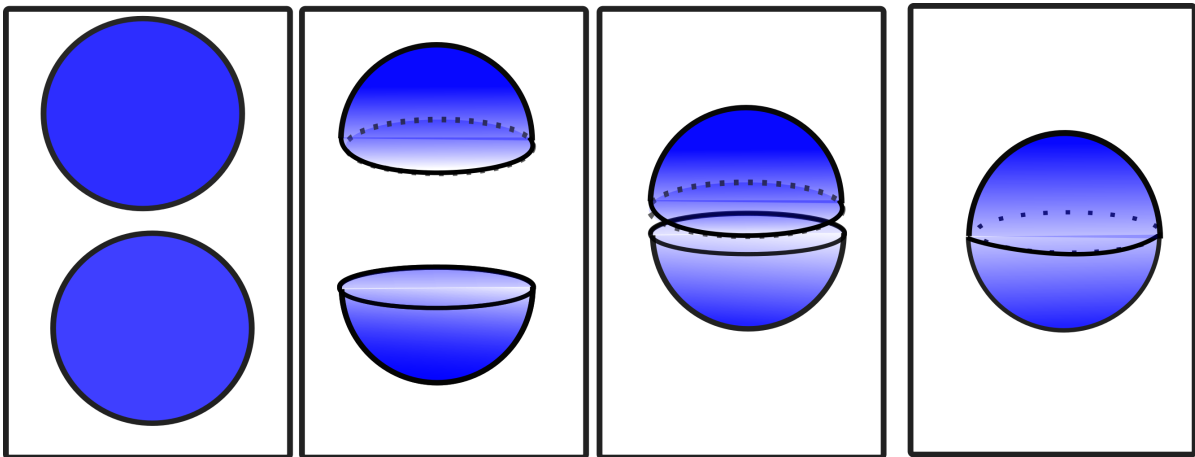


Figura 3.16: União de dois discos.

Como visto na Figura 3.16, os discos se transformam em calotas. Unindo duas calotas através de seus bordos obtemos uma esfera, onde temos uma curva fechada como interseção.

Usaremos  $\chi(D_1^2 \cup D_2^2) = \chi(D_1^2) + \chi(D_2^2) - \chi(D_1^2 \cap D_2^2)$  para calcular a característica de Euler da esfera. Sabe-se que a característica de Euler do disco é sempre igual a 1 e da curva fechada é sempre igual a 0, logo teremos:

$$\begin{aligned} \chi(D_1^2 \cup D_2^2) &= \chi(D_1^2) + \chi(D_2^2) - \chi(D_1^2 \cap D_2^2) \\ &= 1 + 1 - 0 \\ &= 2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto a característica de Euler da esfera é sempre igual a 2.

A explicação de todos os poliedros convexos satisfazerem  $V - A + F = 2$  é que todos eles são homeomorfos à esfera.

Temos outros poliedros que não são convexos mas, satisfazem o Teorema de Euler. A justificativa está em eles serem homeomorfos à esfera, logo possuem a mesma característica de Euler da esfera. Observe na Figura 3.17, alguns exemplos desses poliedros que ao serem inflados se deformam em esferas:

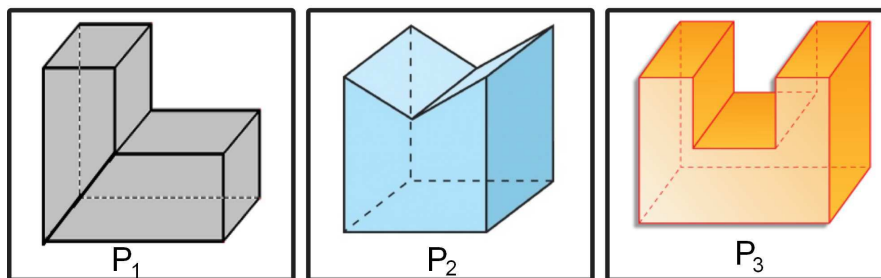


Figura 3.17: Poliedros não convexos homeomorfos à esfera.

Agora observe que todos eles possuem característica de Euler igual a 2.

$$\chi(P_1) = V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2.$$

$$\chi(P_2) = V - A + F = 10 - 15 + 7 = 2.$$

$$\chi(P_3) = V - A + F = 16 - 24 + 10 = 2.$$

## 2) União de um anel e dois discos através de seus bordos.

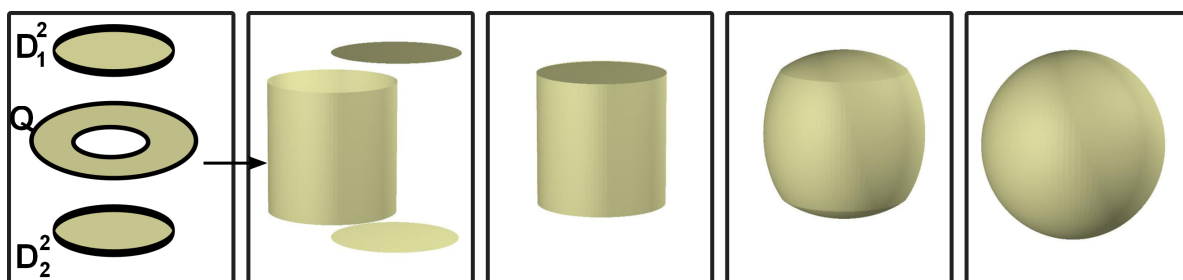


Figura 3.18: União de dois discos e um anel.

Como visto na Figura 3.15, o anel é homeomorfo ao cilindro. Ao unir os discos ao anel através dos seus bordos obtemos um cilindro fechado. Quando inflado ele tomará forma de uma esfera, como mostra a Figura 3.18.

Vamos calcular a característica de Euler através da seguinte operação  $\chi(Q \cup D_1^2 \cup D_2^2) = \chi(Q) + \chi(D_1^2) + \chi(D_2^2) - \chi[(Q \cap D_1^2) \cup (Q \cap D_2^2) \cup (D_1^2 \cap D_2^2)]$ . Observe que a interseção

entre  $D_1^2$  e  $D_2^2$  é vazia e as interseções entre  $D_1^2$  e  $Q$ ,  $D_2^2$  e  $Q$  são curvas fechadas disjuntas, isto é, as duas curvas não possuem interseção. Como visto nos Exemplos 3.3, 3.4 e 3.5 a característica de Euler da curva fechada, do anel e do disco são respectivamente 0, 0 e 1. Logo, teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi(Q \cup D_1^2 \cup D_2^2) &= \chi(Q) + \chi(D_1^2) + \chi(D_2^2) - \chi[(Q \cap D_1^2) \cup (Q \cap D_2^2) \cup (D_1^2 \cap D_2^2)] \\
 &= \chi(Q) + \chi(D_1^2) + \chi(D_2^2) - \chi(Q \cap D_1^2) - \chi(Q \cap D_2^2) + \chi[(Q \cap D_1^2) \cap (Q \cap D_2^2)] \\
 &= 0 + 1 + 1 - 0 - 0 \\
 &= 2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3) União de dois anéis através de seus bordos.

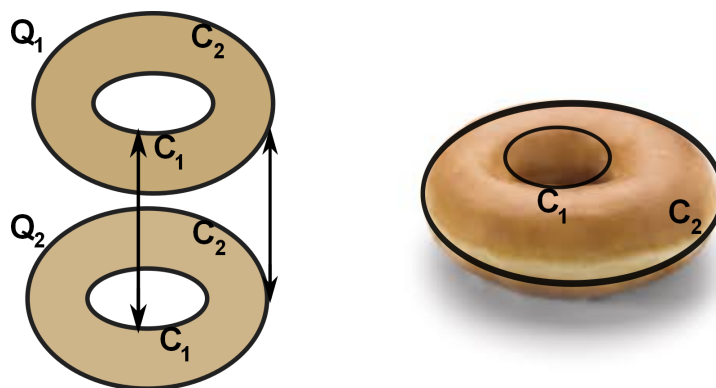


Figura 3.19: Deformação e união de dois anéis.

Na Figura 3.19, a união resultou em um toro (pneu). Qual será a característica de Euler desse tipo de superfície?

Vamos calcular a característica do toro através da operação de união e utilizando os resultados obtidos no Exemplo 3.7 e 3.9 (característica de Euler da curva fechada e do anel são iguais a 0). Na figura 3.19, podemos ver que a interseção entre os dois anéis são exatamente duas curvas fechadas, ou seja,  $Q_1 \cap Q_2 = C_1 \cup C_2$ . Observe que a característica de Euler dessa interseção é igual a 0.

$$\chi(Q_1 \cap Q_2) = \chi(C_1 \cup C_2) = \chi(C_1) + \chi(C_2) - \chi(C_1 \cap C_2) = 0$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \chi(Q_1 \cup Q_2) &= \chi(Q_1) + \chi(Q_2) - \chi(Q_1 \cap Q_2) \\
 &= 0 + 0 - 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

A Figura 3.20 encontrada em [10], ilustra uma deformação do poliedro não convexo com 9 vértices, 18 arestas e 9 faces. Calculando  $V - A + F = 9 - 18 + 9 = 0$ , obtemos o mesmo resultado obtido no toro anterior. O poliedro ao ser inflado se deforma em um toro, portanto possui a mesma característica de Euler do toro.

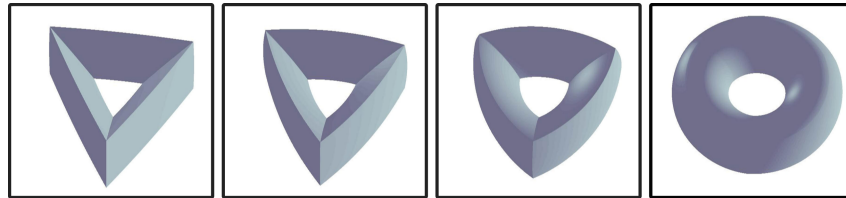


Figura 3.20: Poliedro e sua deformação em um toro.

**Afirmção 4:** Todo poliedro que tiver um "buraco" é homeomorfo a um toro e sempre terá a característica de Euler igual a zero.

### 3.4 Esfera com alças

Nesta seção vamos calcular a característica de Euler de superfícies fechadas que não são homeomorfas à esfera. Vamos denotar disco como  $D^2$ , esfera como  $S^2$ , toro como  $T^2$  e alça como  $A$ .

**Definição 3.10.** A superfície cilíndrica obtida do cilindro entortado será chamado de alça.

A esfera com uma alça pode ser obtida da seguinte forma:

**1º passo:** remover dois discos na esfera  $S^2$ , com essa remoção obtém-se uma nova superfície  $S_1$  com dois bordos ("buracos"). A característica de Euler de  $S_1$  é zero, pois  $S^2 = S_1 \cup D_1 \cup D_2$  e usando a operação da união e o já conhecido valor 2 da característica de Euler da esfera, temos:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= S_1 \cup D_1 \cup D_2 \\
 \chi(S^2) &= \chi(S_1 \cup D_1 \cup D_2) \\
 \chi(S^2) &= \chi(S_1) + \chi(D_1) + \chi(D_2) - \chi[(S_1 \cap D_1) \cup (S_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap D_2)] \\
 2 &= \chi(S_1) + 1 + 1 - 0 \\
 \chi(S_1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

**2º passo:** Cole os bordos da superfície  $S_1$  aos bordos da alça (A), como mostra a Figura 3.21 encontrada em [14].

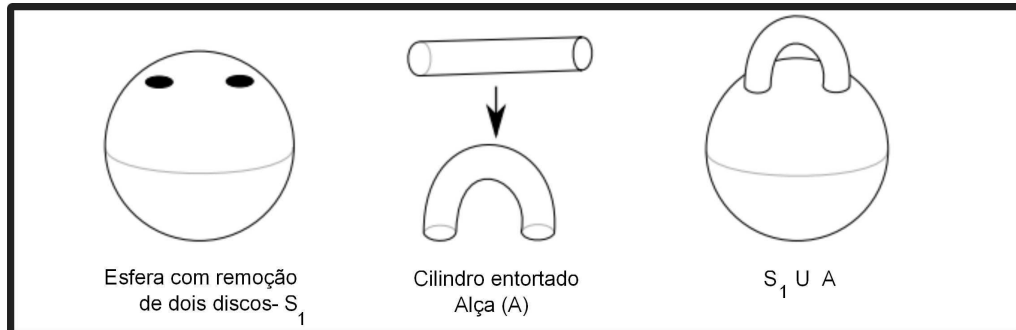


Figura 3.21: Adição de uma alça à esfera.

Observe que a interseção entre as duas superfícies é exatamente duas curvas fechadas, ou seja,  $S_1 \cap A = C_1 \cup C_2$ , então a característica de Euler da interseção será:

$$\begin{aligned}
 S_1 \cap A &= C_1 \cup C_2 \\
 \chi(S_1 \cap A) &= \chi(C_1 \cup C_2) \\
 &= \chi(C_1) + \chi(C_2) - \chi(C_1 \cap C_2) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

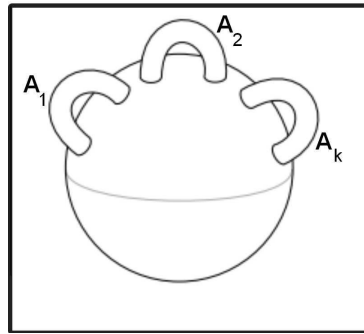
Portanto a característica de Euler da interseção é 0, logo teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi(S_1 \cup A) &= \chi(S_1) + \chi(A) - \chi(S_1 \cap A) \\
 &= 0 + 0 - 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Na realidade a esfera com uma alça é um toro, análogo a deformação ocorrida na Figura 3.20.

Qual será então a característica de Euler da esfera com  $k$  alças?

Para adicionar cada uma das  $k$  alças  $A_1, A_2, \dots, A_k$  temos que remover dois discos da esfera, assim obtemos uma nova superfície  $S_k$  com  $2k$  "buracos". A característica de

Figura 3.22: Esfera com  $k$  alças.

Euler de  $S_k$  será  $2 - 2k$ , pois  $\chi(S^2) = 2$  e  $\chi(D^2) = 1$ , logo teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi(S_k) &= \chi(S^2) - 2k \cdot \chi(D^2) \\
 &= 2 - 2k \cdot 1 \\
 &= 2 - 2k.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

A interseção das alças com a superfície  $S_k$  são  $2k$  curvas fechadas todas disjuntas e como visto no Exemplo 3.7 a característica de cada curva simples fechada é igual zero. A característica de Euler de cada alça também é zero. Aplicando a união de  $S_k$  com  $k$  alças teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi(S_k \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k) &= (2 - 2k) + (0 + 0 + \dots + 0) - 0 \\
 &= 2 - 2k.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Essa união é equivalente a soma conexa de  $k$ -toros.

### 3.5 Soma conexa de superfícies

Veremos uma outra maneira de calcular a característica de Euler de superfícies.

**Definição 3.11.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas superfícies quaisquer, ambas fechadas. Retira-se um disco de cada uma delas e cola-se o restante através de seus bordos. Essa operação é chamada de **soma conexa** de  $M_1$  e  $M_2$ , denotada por  $M_1 \# M_2$ , [10].*

Por exemplo, o bi-toro é a soma conexa de dois toros.

**Proposição 3.12.** *A soma conexa de duas superfícies  $M_1$  e  $M_2$  é dada por:*

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

**Demonstração:** Seja  $M_1$  uma superfície triangulada com  $F_1$  faces,  $A_1$  arestas e  $V_1$  vértices e  $M_2$  uma superfície triangulada com  $F_2$  faces,  $A_2$  arestas e  $V_2$  vértices. Então temos:

$$\chi(M_1) = F_1 - A_1 + V_1$$

$$\chi(M_2) = F_2 - A_2 + V_2$$

Quando efetuamos a soma conexa de  $M_1$  e  $M_2$  removemos de cada uma dessas superfícies um disco (o disco é homeomorfo ao triângulo) logo, colamos o restante fazendo coincidir arestas com arestas e vértices com vértices. Temos uma triangulação para  $M_1 \# M_2$  com os seguintes valores para faces ( $F$ ), arestas ( $A$ ) e vértices ( $V$ ):

$$F = F_1 + F_2 - 2, \text{ pois foi retirado um disco de } M_1 \text{ e outro de } M_2$$

$$A = A_1 + A_2 - 3, \text{ pois três arestas de } M_1 \text{ foram coladas com três arestas de } M_2;$$

$$V = V_1 + V_2 - 3, \text{ pois três vértices de } M_1 \text{ foram colados com três vértices de } M_2.$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \# M_2) &= V - A + F \\ &= (V_1 + V_2 - 3) - (A_1 + A_2 - 3) + (F_1 + F_2 - 2) \\ &= (F_1 - A_1 + V_1) + (F_2 - A_2 + V_2) - 3 + 3 - 2. \\ &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

□

### 3.5.1 Soma conexa de uma esfera e um toro

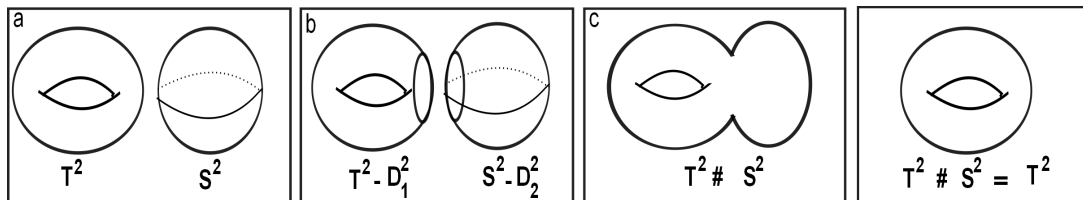


Figura 3.23: Soma conexa de uma esfera com um toro.

Sabemos que  $\chi(S^2) = 2$ ,  $\chi(T^2) = 0$  e  $\chi(D^2) = 1$ . Sabe-se também que a esfera e o toro podem ser construídos através das respectivas uniões  $(S^2 \setminus D^2) \cup D^2$  e  $(T^2 \setminus D^2) \cup D^2$ .

Assim, pode-se obter os seguintes resultados:

a) característica de Euler de  $S^2 \setminus D^2$ :

$$\begin{aligned}
 S^2 &= (S^2 \setminus D^2) \cup D^2 \\
 \chi(S^2) &= \chi[(S^2 \setminus D^2) \cup D^2] \\
 \chi(S^2) &= \chi(S^2 \setminus D^2) + \chi(D^2) - \chi[(S^2 \setminus D^2) \cap D^2] \\
 2 &= \chi(S^2 \setminus D^2) + 1 - 0 \\
 \chi(S^2 \setminus D^2) &= 1.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

b) característica de Euler de  $T^2 \setminus D^2$ :

$$\begin{aligned}
 T^2 &= (T^2 \setminus D^2) \cup D^2 \\
 \chi(T^2) &= \chi[(T^2 \setminus D^2) \cup D^2] \\
 \chi(T^2) &= \chi(T^2 \setminus D^2) + \chi(D^2) - \chi[(T^2 \setminus D^2) \cap D^2] \\
 0 &= \chi(T^2 \setminus D^2) + 1 - 0 \\
 \chi(T^2 \setminus D^2) &= -1.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A interseção entre  $(S^2 \setminus D_1^2)$  e  $(T^2 \setminus D_2^2)$  é uma curva fechada ( $C$ ) e como visto no Exemplo 3.7, a  $\chi(C) = 0$ . Aplicando a união teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi((S^2 \setminus D_1^2) \cup (T^2 \setminus D_2^2)) &= \chi(S^2 \setminus D_1^2) + \chi(T^2 \setminus D_2^2) - \chi[(S^2 \setminus D_1^2) \cap (T^2 \setminus D_2^2)] \\
 &= 1 + (-1) - 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ou aplicando a Proposição 3.12 obtemos:

$$\begin{aligned}
 \chi(S^2 \# T^2) &= \chi(S^2) + \chi(T^2) - 2 \\
 &= 2 + 0 - 2 \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

A soma conexa de uma esfera com um toro resulta em um toro, como podemos observar na Figura 3.23.

**Observação 3.13.** *A soma conexa de uma superfície  $M$  qualquer com a esfera será a superfície  $M$ . A justificativa é porque quando retiramos um disco da esfera, obtemos uma superfície homeomorfa ao disco. Quando retiramos um disco de  $M$  e unimos o que restou da esfera (= disco), na realidade  $M$  não foi alterada.*

### 3.5.2 Soma conexa de dois toros

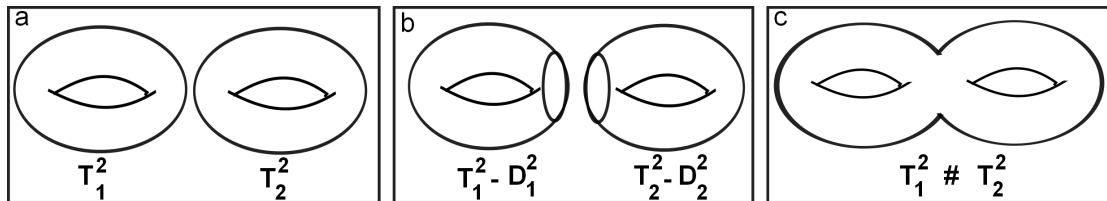


Figura 3.24: Soma conexa de dois toros.

Sabe-se que  $\chi(T^2) = 0$ ,  $\chi(D^2) = 1$ ,  $\chi(T_1^2 \setminus D_1^2) = -1$  e  $\chi(T_2^2 \setminus D_2^2) = -1$ . Observe na Figura 3.24 em b) que a interseção é uma curva fechada e a sua característica de Euler é zero. Aplicando a união teremos:

$$\begin{aligned}
 \chi[(T_1^2 \setminus D_1^2) \cup (T_2^2 \setminus D_2^2)] &= \chi(T_1^2 \setminus D_1^2) + \chi(T_2^2 \setminus D_2^2) - \chi[(T_1^2 \setminus D_1^2) \cap (T_2^2 \setminus D_2^2)] \\
 &= -1 + (-1) - 0 \\
 &= -2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ou aplicando a Proposição 3.12, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \chi(T_1^2 \# T_2^2) &= \chi(T_1^2) + \chi(T_2^2) - 2 \\
 &= 0 + 0 - 2 \\
 &= -2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Portanto a característica de Euler de um bi-toro é -2.

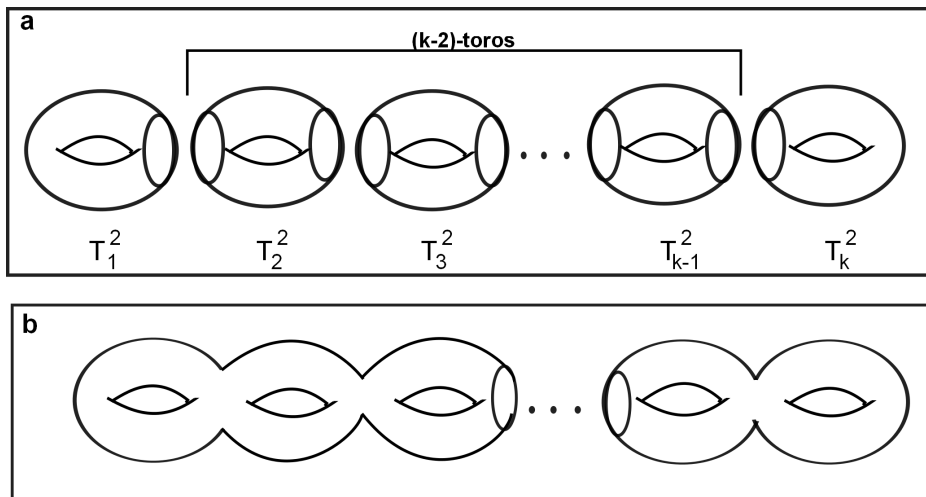
Como  $\chi(T^2) = 0$  e a Proposição 3.12, podemos concluir que a soma conexa de uma superfície  $S$  qualquer com o toro é uma superfície de característica de Euler igual a  $\chi(S) + 0 - 2$ , isto é, somar um toro a uma superfície qualquer diminui em 2 unidades a característica de Euler.

### 3.5.3 Soma conexa de $k$ -toros

Na Figura 3.25 em a), temos  $k$  toros, onde em  $T_1^2$  e em  $T_k^2$  são removidos apenas um disco de cada um deles. Como temos  $\chi(T^2) = 0$  e  $\chi(D^2) = 1$ , obtemos:

$$\chi(T_1^2) = \chi(T_k^2) = -1$$

Já nos toros  $T_2^2, T_3^2, \dots, T_{k-1}^2$  são removidos dois discos de cada um. Assim cada um

Figura 3.25: Soma conexa de  $k$ -toros.

deles passa a ter característica de Euler igual a :

$$\chi(T_2^2) = \chi(T_3^2) = \dots = \chi(T_{k-1}^2) = -2$$

A interseção produzida é um conjunto de curvas fechadas  $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$  todas disjuntas e como já vimos no Exemplo 3.7, a característica de cada curva é zero. Aplicando a operação da união teremos:

$$\begin{aligned} \chi(T_1^2 \cup T_2^2 \cup \dots \cup T_k^2) &= \chi(T_1^2) + \chi(T_2^2) + \dots + \chi(T_k^2) - \chi(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{k-1}) \\ &= -1 + (-2) + (-2) + \dots + (-2) + (-1) - 0 \\ &= -1 - 2(k-2) - 1 \\ &= 2 - 2k \end{aligned} \tag{3.16}$$

Deformando continuamente a Figura 3.22, obtemos uma superfície como a Figura 3.25 b). Portanto podemos concluir que adicionando  $k$  alças à esfera produzirá o mesmo efeito de adicionar  $k$  toros.

**Afirmção 5:** soma conexa de  $k$  toros será igual a  $2 - 2k$ .

# Considerações finais

Neste trabalho, foi realizado o estudo do Teorema de Euler em vários tipos de superfícies como polígonos, poliedros, grafos, entre outros. Foi trabalhado também a operação de união de grafos e união de superfícies seguidos de vários exemplos.

Geralmente os livros didáticos do 2º ano do ensino médio tratam o teorema de Euler de maneira bem superficial. Alguns autores apresentam poliedros que satisfazem o Teorema de Euler e outros poliedros que não satisfazem, afirmando que todo poliedro convexo satisfaz a relação  $V - A + F = 2$ , mas nem todo poliedro que satisfaz essa relação é convexo. Porém nenhuma indagação é deixada para os alunos.

A proposta deste trabalho é mostrar aos alunos, com material concreto, que o Teorema de Euler pode ser trabalhado de maneira atraente e de fácil entendimento, pois, todo poliedro convexo satisfaz  $V - A + F = 2$ . Entretanto, temos outros poliedros que não são convexos e que satisfazem a relação citada. É de grande valia trabalhar vários exemplos com os alunos e questioná-los para que tenham a percepção de que todos eles são homeomorfos à esfera.

Espera-se que o trabalho realizado possa despertar interesse e curiosidade aos leitores pela busca do conhecimento nessa área para que posteriormente seja inserido no ensino básico melhorando a formação dos nossos alunos sobre o assunto tratado.

# Referências Bibliográficas

- [1] E. L. LIMA - Meu Professor de Matemática e outras Histórias, *Rio de Janeiro. IMPA.1991.*
- [2] F. R. MIALICH, Poliedros e Teorema de Euler, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto (2013).
- [3] E. L. LIMA, et. al. - A Matemática do Ensino Médio, volume 2. *Rio de Janeiro. SBM. 2006.*
- [4] L. R. DANTE, Matemática: Contexto e Aplicações, Ensino Médio, volume 2. *São Paulo: Ática, 2013.*
- [5] O. DOLCE, J. N. POMPEO, Fundamentos de Matemática Elementar, volume 9. *São Paulo: Atual, 2005 . p.132 - 136.*
- [6] G.IEZZI,et. al. Matemática e Realidade, Ensino Fundamental, 9º ano. *São Paulo: Atual, 2009, p.207.*
- [7] S.JURKIEWIEZ, Grafos - Uma Introdução, Apostila 5 do Estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP.2009. *São Paulo: Atual, 2009, p.207.*
- [8] D. FOMIN,et. al. Círculos Matemáticos. A Experiência Russa. *Rio de Janeiro: IMPA,2010 , p.43-54 e p.147-164.*
- [9] A.A.F. LOUREIRO, O.N. GOUSSEVSKAIA, R.M. ASSUNÇÃO. Grafos. Disponível em: [http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md\\_Grafos.pdf](http://homepages.dcc.ufmg.br/loureiro/md/md_Grafos.pdf). Acessado em 20 jan.2015.
- [10] E. COLLI, Aderbal, o Topólogo. (S/D). Disponível em: [www.ime.usp.br/colli/Aderbal/Textos](http://www.ime.usp.br/colli/Aderbal/Textos). Acessado em 20 jan. 2015.
- [11] L. F. SUAREZ, O que é Característica de Euler? *Gazeta da Matemática*. Disponível em: [www.gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=25/](http://www.gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=25/). , Acessado em: 05 fev.2015.
- [12] P. P. COSTA, Teoria de Grafos e sua Aplicações, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" , Rio Claro (2011).

- 
- [13] E.L. LIMA, A Característica de Euler-Poincaré. Revista Matemática Universitária, nº1, p.47-62, 1985. Disponível em: [http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n01/n01\\_Artigo02.pdf](http://rmu.sbm.org.br/Conteudo/n01/n01_Artigo02.pdf) . Acessado em: 05 fev.2015.
- [14] A.CONDE, Topologia. Disponível em: [www.matematicajatai.com](http://www.matematicajatai.com). Acessado em: 05 fev.2015
- [15] P.M. RODRIGUES, Notas sobre Elementos de Matemática Finita, 2013.
- [16] D. S. MACHADO, Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa (2010).
- [17] N. J. MACHADO, Os poliedros de Platão e os dedos da mão. Vivendo a matemática, 6ª edição, 1996.
- [18] O. DOLCE E J. N. POMPEO, Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10. São Paulo: Atual, 2005 . p.119.