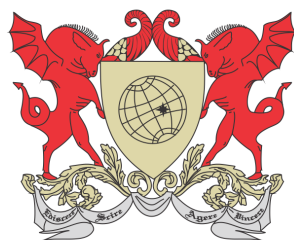


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



THIAGO SILVEIRA DA FONSECA

GRAFOS E EMPARELHAMENTOS EM GRAFOS

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

THIAGO SILVEIRA DA FONSECA

GRAFOS E EMPARELHAMENTOS EM GRAFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

F676g
2018

Fonseca, Thiago Silveira da, 1985-
Grafos e emparelhamentos em grafos / Thiago Silveira da
Fonseca. – Florestal, MG, 2018.
vii, 46f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: 46.

1. Grafos. 2. Emparelhamentos em grafos. 3. Matemática no cotidiano. 4. Circuitos eletrônicos. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

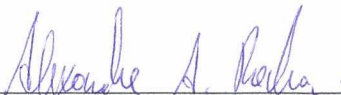
510.5

THIAGO SILVEIRA DA FONSECA

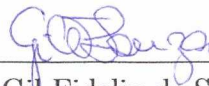
GRAFOS E EMPARELHAMENTOS EM GRAFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

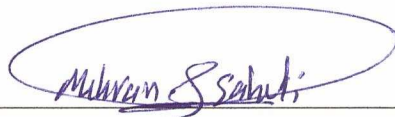
APROVADA: 28 de fevereiro de 2018.



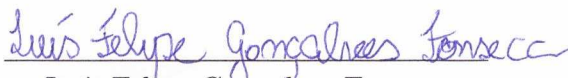
Alexandre Alvarenga Rocha



Gil Fidelix de Souza



Mehran Sabeti
(Coorientador)



Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus que me propiciou as condições necessárias para o desenvolvimento e conclusão desta etapa em minha vida.

Agradeço a todas as pessoas que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para esta conquista tão importante, em especial, a minha esposa Camila, por todos os momentos de compreensão e incentivo.

Resumo

FONSECA, Thiago Silveira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Grafos e emparelhamentos em grafos**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Coorientador: Mehran Sabeti.

Pesquisa desenvolvida a partir das noções sobre grafos, grafos eulerianos, árvores, emparelhamentos em grafos, grafos planares e coloração. Foram abordados alguns dos principais teoremas e lemas, bem como imagens e exemplos para facilitar a leitura. Conclusão da pesquisa com o relato das aulas práticas sobre grafos.

Abstract

FONSECA, Thiago Silveira da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **Graphs and matchings in graphs**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Co-adviser: Mehran Sabeti.

The research was developed based on the notion about graphs, eulerian graphs, trees, matchings in graphs, planar graphs and coloring. Some of the main theorems and lemmas were discussed, as well as images and examples to facilitate reading. The conclusion of the research with the report of the practical classes about graphs.

Lista de Figuras

2.1	Cidades e estradas	2
2.2	Vértices adjacentes, vizinhos e grau de um vértice	3
2.3	Multigrafo e laço	3
2.4	Grafos completos k_5 e k_6	4
2.5	Grafo e seu complemento	5
2.6	Grafo e um subgrafo	5
2.7	Componente conexo	6
2.8	Caminho e passeio	6
3.1	Leonhard Euler 1707-1783	7
3.2	Imagem da cidade de Königsberg e suas pontes	8
3.3	Grafo associado às pontes de Königsberg	8
3.4	Passeio euleriano	9
4.1	Exemplos de árvores e grafos que não são árvores	11
4.2	Árvore enraizada	13
4.3	Árvore rotulada	13
4.4	Grafo G e a sua matriz de adjacência	14
4.5	Grafo H e a sua matriz de adjacência	14
4.6	Árvore rotulada G e a sua matriz de adjacência	15
4.7	Árvore rotulada e o seu código estendido de Prüfer	16
5.1	Grafo bipartido G	18
5.2	Grafo bipartido H	19
5.3	Emparelhamento perfeito grafo G	19
5.4	Grafo bipartido, alternando A e B	20
5.5	Primeira partição, subconjunto C e T	21
5.6	Grafo bipartido e emparelhamento M	22
5.7	Caminho incrementador P e emparelhamento M'	23
5.8	Conjuntos S e T	24
5.9	Grafo bipartido e seu emparelhamento perfeito	25
6.1	Poliedros de Platão e seus grafos planares	26
6.2	Grafo planar e suas faces	27

6.3 Grafo planar e a sequência de arestas retiradas	28
6.4 k_5 não é planar	29
6.5 Grafo associado aos estados do Brasil	30
6.6 Vértice v e seus vizinhos	32
6.7 Vértice uw	32
7.1 Foto da sala de aula na qual ocorreram as aulas práticas	33
7.2 Tentativa de solução para o problema do emparelhamento perfeito	34
7.3 Solução apresentada por um aluno	35
7.4 Solução apresentada por uma aluna	36
7.5 Esboço da solução apresentada por um aluno	36

Sumário

1	Introdução	1
2	Noções sobre grafos	2
3	Grafos eulerianos	7
4	Árvores	11
5	Emparelhamento em grafos	18
6	Grafos planares e coloração	26
7	Relato das aulas práticas	33
8	Considerações finais	37
A	Apêndice	39
	Bibliografia	46

Introdução

Uma área da matemática com grande aplicação em situações do nosso cotidiano será tratada aqui. Serão abordados, no decorrer desta dissertação, alguns conceitos, exemplos e algumas demonstrações de grafos. Eles são responsáveis por determinar qual o melhor trajeto a percorrer, encontrar a disposição dos componentes em uma placa de circuitos eletrônicos, dentre outras aplicações.

As definições de grafos, grafos completos, complemento, grafo conexo, componente conexo, passeio, caminho, ciclo e o lema do aperto de mãos são apresentados no capítulo 2. No capítulo 3, são tratados os grafos eulerianos e o teorema que verifica se um grafo possui um passeio euleriano. As árvores, um importante tipo de grafos, são abordadas no capítulo 4. O emparelhamento em grafos bipartidos e o teorema do emparelhamento perfeito são abordados no capítulo 5. Grafos planares e coloração são desenvolvidos no capítulo 6.

O relato das aulas práticas sobre grafos, desenvolvido na Escola Estadual Tito Fulgêncio, com os alunos do 9º ano é apresentado no capítulo 7.

O texto procura trazer de forma objetiva as demonstrações e os conceitos. Para auxiliar a leitura, são apresentados exemplos e figuras no decorrer do mesmo.

Os conceitos abordados aqui, apesar de não serem vistos no ensino fundamental e médio, e de pouco serem tratados em cursos de graduação em matemática, possuem grandes aplicações no nosso cotidiano.

Foram utilizadas como suporte teórico principal para o desenvolvimento desta dissertação as referências [8], [7] e [3].

Boa leitura!

Noções sobre grafos

Quando observamos a representação gráfica de algumas cidades e as rodovias que as interligam, estamos diante de um grafo.

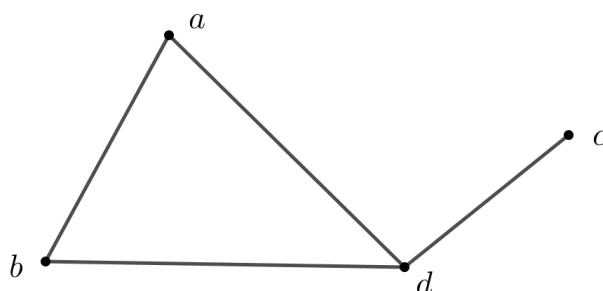


Figura 2.1: Cidades e estradas

As cidades são representadas por pontos, pontos estes que chamamos de vértices. As rodovias que interligam essas cidades são chamadas de arestas.

Definição 2.1: Um grafo $G = (V, E)$ é constituído por um conjunto não vazio V de vértices e um conjunto E de arestas.

No exemplo acima, a figura 2.1 o conjunto $V = \{a, b, c, d\}$ representa as cidades. O conjunto $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ representa as rodovias.

Alguns conceitos importantes para o desenvolvimento deste texto são apresentados a seguir:

- Vértices adjacentes: são vértices conectados por uma aresta.
- Vértices adjacentes a um dado vértice v são chamados de vizinhos de v .
- O número de arestas que partem de um vértice é chamado de grau do vértice. O grau do vértice v é representado por $d(v)$.

Na figura 2.2, a seguir, o grau do vértice v é 3, ou seja, $d(v) = 3$ pois ele possui os vértices t , u e w como sendo seus vizinhos. O vértice x possui grau 1, $d(x) = 1$ pois

está conectado a apenas o vértice u . Os vértices u e w são adjacentes, pois estão conectados por uma aresta.

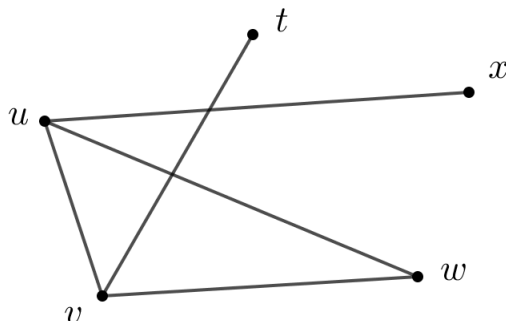


Figura 2.2: Vértices adjacentes, vizinhos e grau de um vértice

- Laço: aresta que conecta um vértice a si próprio.
- Grafos simples: são grafos nos quais qualquer par de vértices está conectado por no máximo uma aresta, além disso não são permitidos laços.
- Multigrafos: são grafos nos quais é permitido que um par qualquer de vértices esteja conectado por duas ou mais arestas, além disso são permitidos laços.

Na figura 2.3, é possível observar que a e b estão conectados por duas arestas e o vértice c possui uma aresta conectando-o a si próprio, portanto temos um multigrafo.

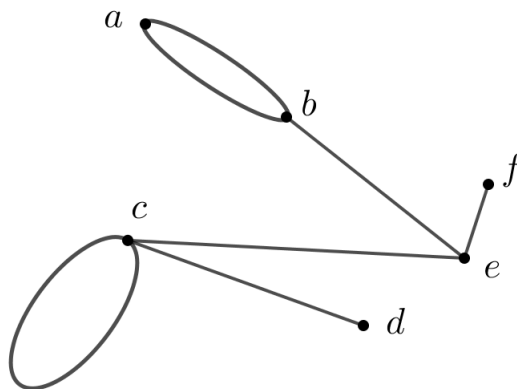


Figura 2.3: Multigrafo e laço

Dois simples, porém importantes resultados, são apresentados no lema e no teorema a seguir.

Lema 2.1 (do Aperto de Mãos): A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas.

Demonstração. Cada aresta está conectada a dois vértices, logo contribui com duas unidades na soma dos graus dos vértices. Desta forma, sendo a o número de arestas, pode-se afirmar que a soma dos graus será $2a$. \square

Teorema 2.1: Em todo grafo G , o número de vértices com grau ímpar é par.

Demonstração. A soma de parcelas pares é um número par. A soma de parcelas ímpares será par se, e somente se, a quantidade de parcelas for um número par. Pelo Lema 2.1, a soma dos graus dos vértices é um número par, logo a número de vértices com grau ímpar é par. \square

- Grafo vazio: é um grafo sem aresta.
- Grafo completo: dados dois vértices quaisquer, eles estarão conectados por uma aresta, tal grafo terá $\binom{n}{2}$ arestas e é representado por k_n .

Abaixo são apresentados os grafos completos k_5 e k_6

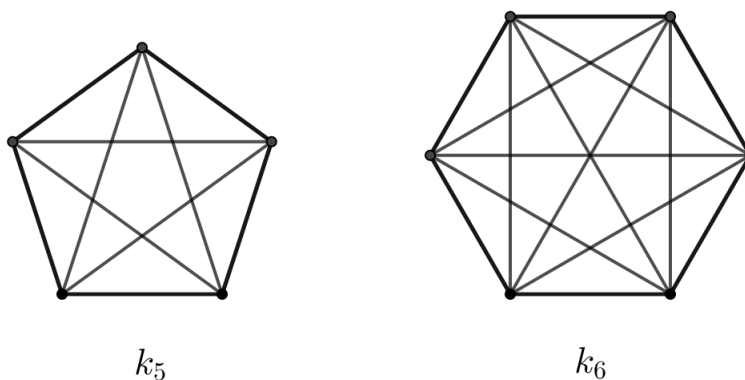


Figura 2.4: Grafos completos k_5 e k_6

- Complemento de um grafo G : dado um grafo G qualquer, o complemento de G , representado por \overline{G} , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G , porém com apenas as arestas faltantes para G se tornar um grafo completo.

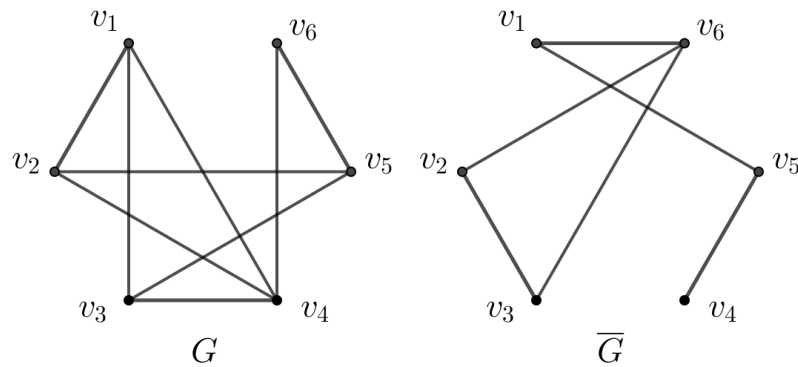


Figura 2.5: Grafo e seu complemento

- Subgrafo: dado um grafo G , retirando algumas de suas arestas e alguns vértices, obtemos um subgrafo H . Na figura 2.6, para que obtenhamos H é necessária a retirada dos vértices a e d e das arestas ab e de do grafo G .

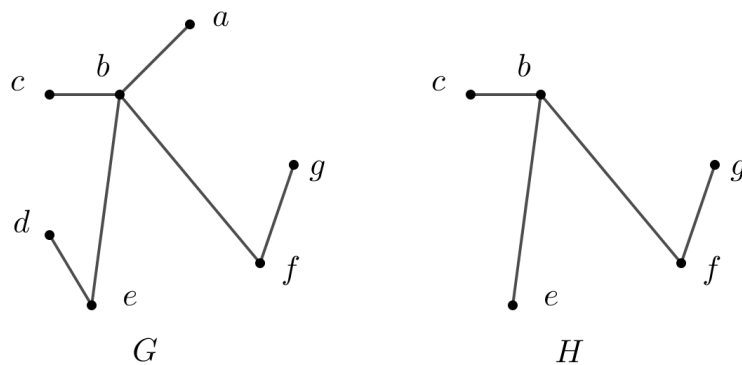


Figura 2.6: Grafo e um subgrafo

- Caminho: um caminho em um grafo G é uma sequência de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < k, v_i$ é adjacente a v_{i+1} e os vértices são distintos dois a dois.
- Grafo conexo: um grafo G é conexo se para cada dois vértices u e v existe um caminho P com extremidades u e v de tal forma que P é um subgrafo de G .
- Componente conexo: seja H um subgrafo de G , G não necessariamente conexo, H será um componente conexo se H é conexo, mas qualquer outro subgrafo de G que contenha H é desconexo.

Na figura 2.7, em negrito, está um componente conexo do grafo. Ele é composto pelos vértices a, b, c, d, e, f e g além de suas arestas ab, bg, gd, dc, de, ef e fd .

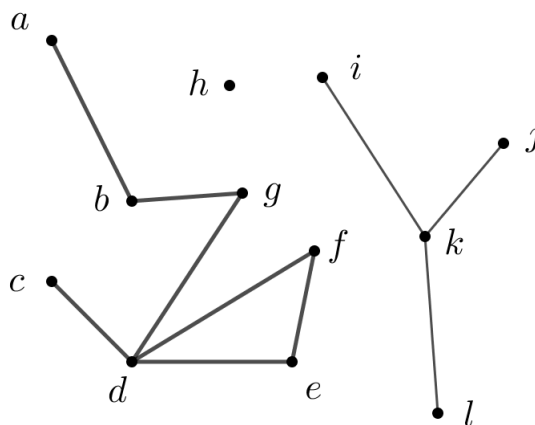


Figura 2.7: Componente conexo

- Ciclo: dado um caminho, se as extremidades são coincidentes, temos um ciclo.
- Comprimento: o número de arestas em um ciclo ou caminho é chamado de comprimento. Um ciclo de comprimento k é chamado de k -ciclo.
- Passeio: um passeio em um grafo G é uma seqüência de vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i < k, v_i$ é adjacente a v_{i+1} .
- Passeio fechado: é um passeio em que $v_0 = v_k$.

Dados os conceitos de passeio e caminho, é possível observar que, em um caminho, é necessário que os vértices sejam todos distintos; já no passeio, é permitido utilizar o mesmo vértice mais de uma vez.

Exemplo 2.0.1: Na figura 2.8 a seqüência de vértices v_1, v_4, v_6, v_5, v_3 representa um caminho e a seqüência $v_1, v_2, v_5, v_3, v_1, v_4, v_6, v_5$ representa um passeio.

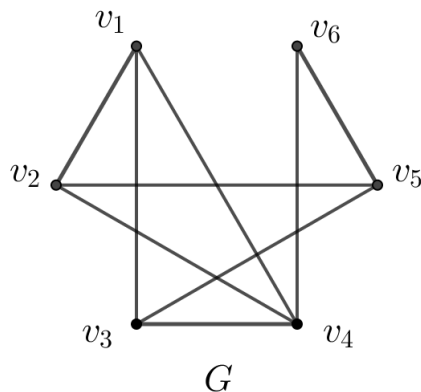


Figura 2.8: Caminho e passeio

Grafos eulerianos

Um grande matemático que contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da teoria dos grafos foi Leonhard Euler. Em 1736, ele publicou um artigo no qual demonstra o problema das pontes de Königsberg, [5]. Königsberg, hoje Kaliningrado, é uma cidade da Rússia que era dividida em quatro distritos separados por braços do rio Pregel. Esses quatro distritos eram conectados por sete pontes.



Figura 3.1: Leonhard Euler 1707-1783

Na figura 3.2, os quatro distritos são representados por A , B , C e D e as sete pontes por a , b , c , d , e , f e g . O problema perguntava se era possível obter um passeio euleriano com as sete pontes.

Definição 3.1: Um passeio euleriano é um passeio que percorre toda aresta exatamente uma vez e pode ser ou não fechado.

Na figura 3.3, é apresentado o grafo associado à cidade de Königsberg e às sete pontes.

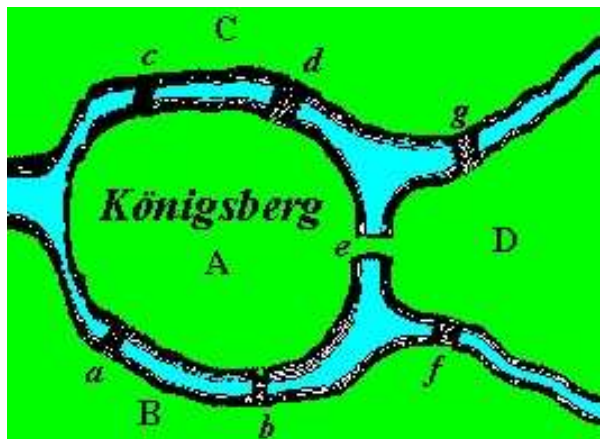


Figura 3.2: Imagem da cidade de Königsberg e suas pontes [2]

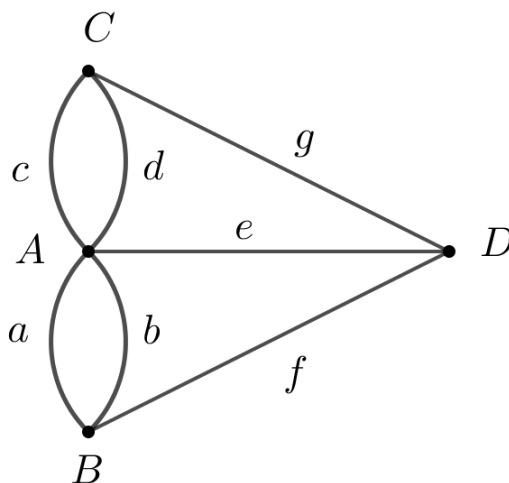


Figura 3.3: Grafo associado às pontes de Königsberg

A seguir, é apresentado o principal resultado desse capítulo.

- Teorema 3.1:**
1. Se um grafo G conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.
 2. Se um grafo G conexo não tem vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano é fechado.
 3. Se um grafo G conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.

Demonstração. 1. Ao fazer o percurso do passeio euleriano, cada aresta representa ou que saímos do vértice ou que entramos no vértice. Dessa forma, dado um vértice v , se v possui grau par, teremos que iniciar e terminar o passeio em v ou iniciar e terminar em outro lugar. Se v possui grau ímpar,

então o passeio precisa ou começar ou terminar em v . Logo, se o grafo possui mais de dois vértices com grau ímpar, não temos um passeio euleriano.

2. Considere um vértice v qualquer. Como G é conexo, existe um passeio fechado W começando e terminando em v que utiliza as arestas uma única vez. Se tal passeio utilizar todas as arestas de G , haverá um passeio euleriano. Se W não utilizar todas as arestas e sendo e uma destas arestas, existirá um caminho J entre as extremidades de e e o vértice v , pois G é conexo. Seja p o primeiro vértice de J que pertence ao passeio W . Seja W' o passeio começando em p , passando por e , não utilizando as arestas de W e utilizando cada aresta uma única vez. Tal passeio termina em um vértice u . Supondo $u \neq p$, teríamos um absurdo, pois, cada vez que W ou W' passou por u , foram utilizadas duas arestas; dessa forma, ao chegar pela última vez em u , teríamos utilizado um número ímpar de arestas, mas u tem grau par, logo $u = p$. Então W' também é um passeio fechado. Caso existam outras arestas ainda não utilizadas, basta proceder como acima. Temos então um passeio euleriano começando em v , chegando em p , percorrendo W' , retornando a p e finalizando W até chegar em v .

Na figura 3.4, é apresentado o passeio euleriano descrito na demonstração acima. O passeio fechado W é representado na cor preta e indicado pela sequência de vértices $v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, p$ e v . A aresta e conecta os vértices v_9 e v_{10} . O caminho J é representado com arestas em destaque e indicado pela sequência de vértices v_9, v_9, p e v . O passeio W' é representado na cor azul e indicado pela sequência de vértices $p, v_9, v_{10}, v_7, v_9, v_5, v_{10}, v_4, v_1$ e p .

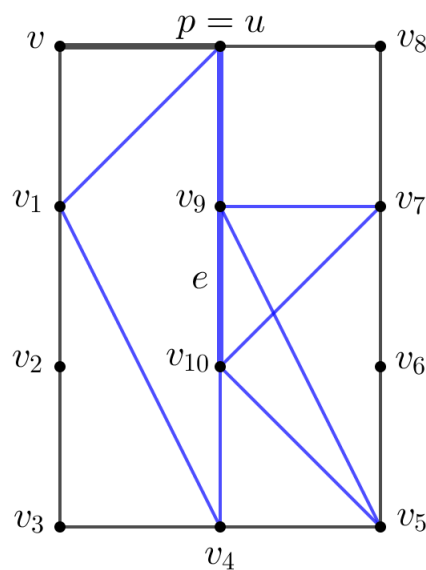


Figura 3.4: Passeio euleriano

3. Seja u e v os dois vértices com grau ímpar. Considere G' o grafo obtido a partir de G com a inclusão de uma aresta conectando u e v . Logo em G' u e

v possuem grau par. Pelo item 2, G' possui passeio euleriano. Considere o passeio euleriano de G' que começa e termina em u passando anteriormente por v . Ao retirar a aresta que conecta u e v , teremos um passeio euleriano que começa em um desses vértices e termina no outro.

□

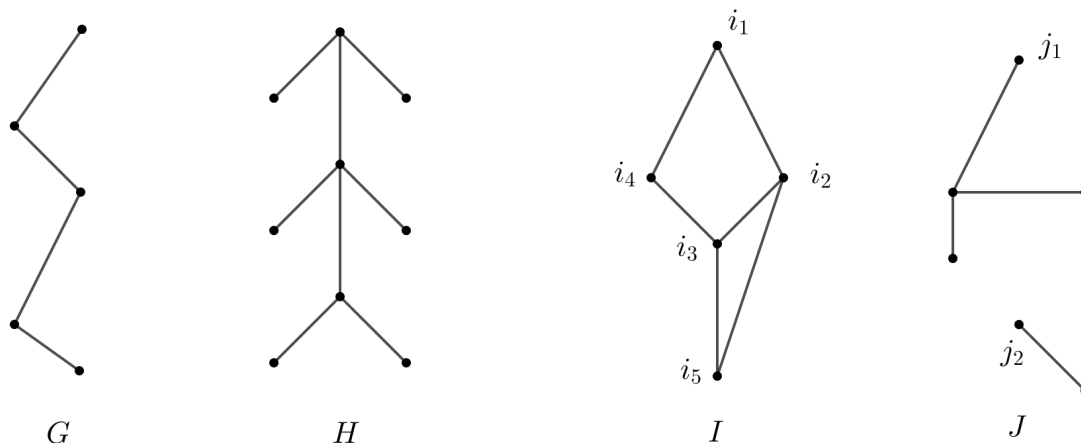
O teorema apresentado é utilizado em situações nas quais se faz necessário encontrar uma rota que percorra todas as arestas com o menor custo. Como exemplo, temos a rota utilizada por empresas que fazem a coleta de lixo ou a entrega de correspondências. Esses exemplos são aplicações do clássico problema do carteiro chinês.

Árvores

Um conjunto importante de grafos são as árvores.

Definição 4.1: Um grafo $G = (V, E)$ é uma árvore se ele é conexo e não contém qualquer ciclo como subgrafo.

Na figura 4.1a, são apresentadas duas árvores, G e H . Na figura 4.1b, o grafo I não é uma árvore devido ao fato de possuir ciclos como subgrafos, um exemplo é o ciclo formado pelos vértices i_1, i_2, i_3 e i_4 . Ainda na figura 4.1b, o grafo J também não é uma árvore por não ser conexo, ou seja, não existe um caminho entre os vértices j_1 e j_2 por exemplo.



(a) Árvores G e H

(b) Grafos I e J não são árvores

Figura 4.1: Exemplos de árvores e grafos que não são árvores

Pela definição 4.1, podemos mostrar que uma árvore é o menor grafo que é conexo. Menor grafo aqui entendemos como sendo menor quantidade de arestas. Esse resultado é demonstrado no teorema 4.1.

Teorema 4.1: 1. Um grafo G é uma árvore se, e somente se, ele é conexo, mas a remoção de qualquer de suas arestas resulta em um grafo desconexo.

2. Um grafo G é uma árvore se, e somente se, ele não contém nenhum ciclo, mas a adição de qualquer nova aresta cria um ciclo.

Demonstração. 1. \implies Sendo G uma árvore, por definição, G é conexo. Suponha por absurdo que após remover a aresta uv , o novo grafo G' é conexo. Logo existe um caminho em G' que une u e v . Retornando a aresta uv , teremos agora um ciclo passando por u e v , o que é um absurdo pela definição de árvore.

\Leftarrow Sendo G conexo, basta que G não possua nenhum ciclo para ser uma árvore. Supondo por absurdo que G possui um ciclo C , removendo qualquer aresta de C , ainda teremos um grafo conexo, o que contradiz a condição do teorema.

2. \implies Sendo G uma árvore, por definição, G não possui ciclos. Dados dois vértices u e v , sendo G conexo, existe um caminho entre eles. Ao acrescentar a aresta uv , teremos agora um ciclo que passa por u e v .

\Leftarrow Sendo G sem ciclo, para G ser uma árvore basta G ser conexo. Suponha por absurdo que G é desconexo. Logo não existe um caminho entre u e v . Mas ao acrescentar a aresta uv , teremos um ciclo, isso implica na existência de um outro caminho entre u e v , o que é um absurdo, logo G é conexo e G é uma árvore.

□

Dois resultados importantes são tratados nos teoremas 4.2 e 4.3.

Teorema 4.2: Toda árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices com grau um.

Demonstração. Seja G uma árvore e considere um passeio iniciado em um vértice v qualquer. Em tal passeio não será permitido passar por uma aresta já percorrida. Em determinado momento, chegaremos em um vértice v_1 e o passeio terminará por ficar sem arestas para continuar. Temos que v_1 tem grau 1, pois caso contrário haveria um ciclo em v_1 o que contraria a definição 4.1. Considerando agora tal passeio iniciado em v_1 , da mesma forma como feito antes, obteremos v_2 que também tem grau 1. Portanto, temos, no mínimo, v_1 e v_2 com grau 1. □

Teorema 4.3: Toda árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas.

Demonstração. Considerando a árvore mais simples, ou seja, apenas um vértice sem nenhuma aresta, a diferença entre a quantidade de vértices e arestas é de uma unidade. A cada novo vértice acrescentado, iremos conectá-lo por uma nova aresta com outro vértice qualquer. A diferença entre a quantidade de vértices e arestas permanecerá sendo de uma unidade. Logo se a árvore tem n vértices, ela terá $n - 1$ arestas. □

Em algumas situações, precisamos trabalhar com árvores que possuem um vértice especial que chamamos de raiz. Essa árvore é chamada de árvore enraizada. Aqui, utilizamos os termos pais e filhos. Na figura 4.2, temos:

- r sendo a raiz da árvore,
- v_0 é o pai de v_1 , v_2 e v_3 ,
- v_1 , v_2 e v_3 são filhos de v_0 ,
- v_4 e v_5 são folhas da árvore.

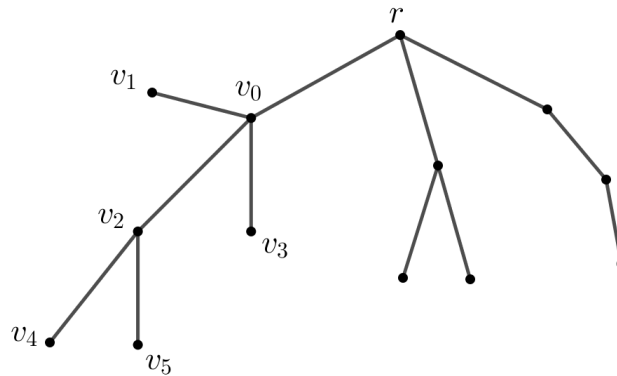


Figura 4.2: Árvore enraizada

Chamamos de árvore rotulada aquela na qual nomeamos seus vértices. Geralmente, uma árvore com n vértices é rotulada com os números $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Exemplo 4.0.1: Na figura 4.3, é apresentada uma árvore rotulada com 7 vértices.

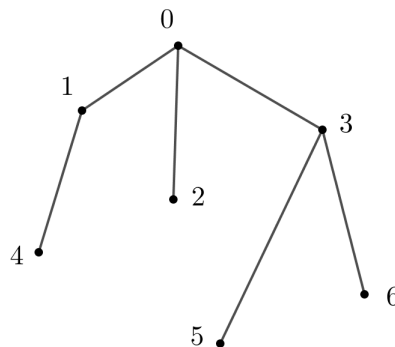


Figura 4.3: Árvore rotulada

Existem algumas maneiras de armazenar uma árvore rotulada guardando apenas as informações necessárias. A primeira que será apresentada é a matriz de adjacência. Inicialmente trataremos de matriz de adjacência para qualquer tipo de grafo.

Dado um grafo com n vértices, iremos utilizar uma matriz quadrada de ordem n . Para cada elemento a_{ij} da matriz quadrada, utilizaremos os valores 1 ou 0 apenas. Será utilizado 1 se os vértices v_i e v_j forem adjacentes e 0 se os vértices v_i e v_j não forem adjacentes.

Exemplo 4.0.2: Na figura 4.4, são apresentados o grafo G e a sua matriz de adjacência.

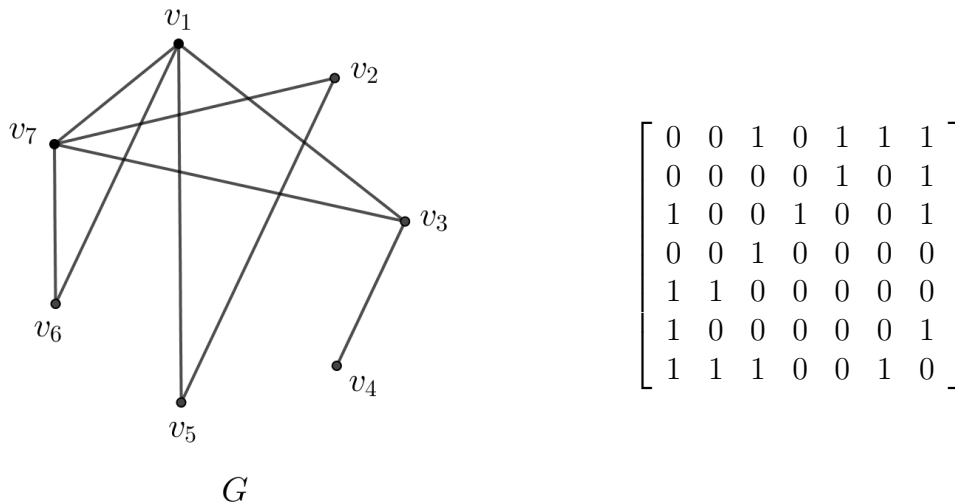


Figura 4.4: Grafo G e a sua matriz de adjacência

Note que o elemento a_{23} é igual a 0, pois os vértices v_2 e v_3 não são adjacentes, já o elemento a_{43} é igual a 1 pois os vértices v_4 e v_3 são adjacentes.

Exemplo 4.0.3: Na figura 4.5, são apresentados o grafo H e sua a matriz de adjacência.

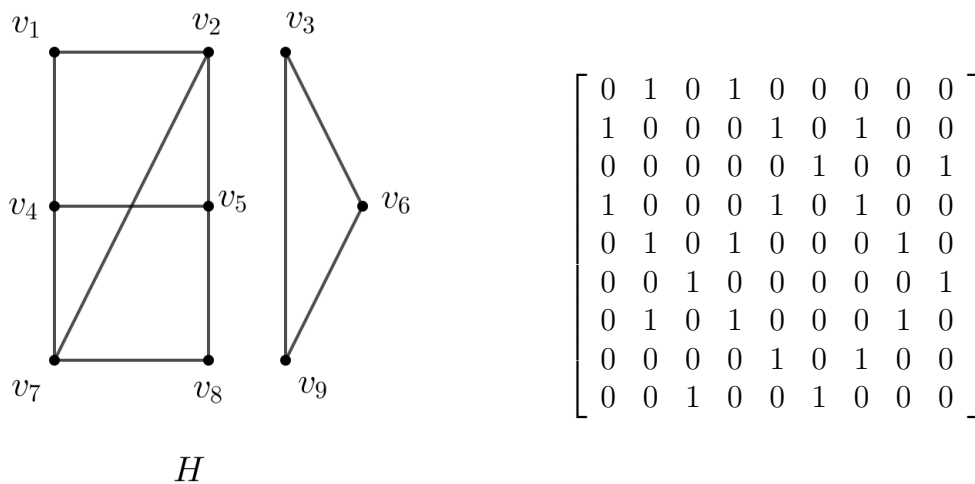


Figura 4.5: Grafo H e a sua matriz de adjacência

Para simplificar, podemos armazenar apenas as informações que ficam acima da diagonal da matriz, pois a matriz é simétrica e a diagonal é sempre zero. No exemplo a seguir, é apresentado a parte de cima da matriz de adjacência do grafo H .

Exemplo 4.0.4: Parte superior da matriz de adjacência do grafo H .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Para a obtenção da matriz de adjacência de uma árvore rotulada G com n vértices, basta criarmos uma matriz quadrada de ordem n e preenchermos com o número 1 na j -ésima posição da i -ésima linha se os vértices i e j estão conectados por uma aresta, caso contrário preenchemos com o número 0. Usualmente o vértice rotulado por 0 ficará na n -ésima linha e n -ésima coluna.

Exemplo 4.0.5: Na figura 4.6, são apresentados a árvore rotulada G e a sua matriz de adjacência.

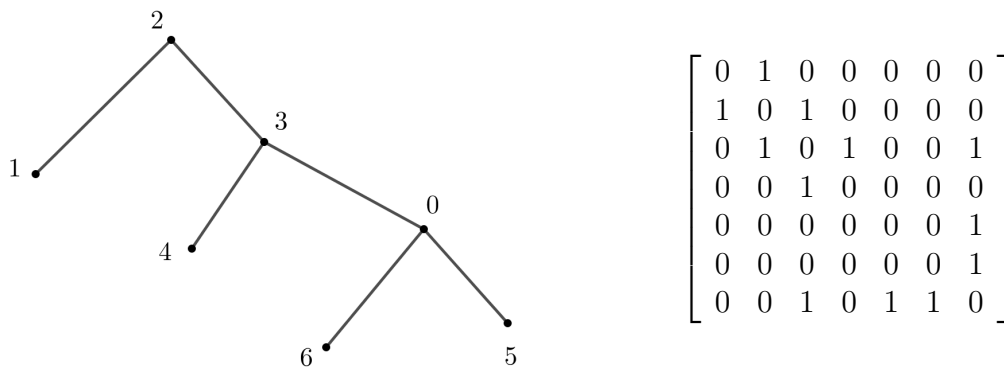


Figura 4.6: Árvore rotulada G e a sua matriz de adjacência

Uma outra forma de armazenar uma árvore rotulada é utilizando o código de pai. O vértice rotulado por 0 será considerado a raiz da árvore. Precisaremos de apenas duas linhas com $n - 1$ colunas. Na primeira linha, serão escritos os filhos em ordem crescente e, na segunda linha, os pais. Observe que na primeira linha não aparece o vértice zero, uma vez que sendo ele a raiz, não é filho. Abaixo é apresentado o código de pai para a árvore rotulada G da figura 4.6.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Uma outra maneira de armazenar uma árvore rotulada é utilizando o código estendido de Prüfer. Listamos, primeiramente, o vértice de grau 1, ou seja, as folhas com o menor rótulo, diferente de zero. Na primeira linha, ficará esse vértice e, na

segunda linha, o seu único vértice adjacente. Retiramos então o vértice com o menor rótulo utilizado e sua única aresta na árvore. Em seguida, repetimos o processo até finalizar todas as arestas. Observe que por não utilizarmos o vértice zero, raiz, ele será a última entrada da segunda linha. Abaixo é apresentado o código estendido de Prüfer para a árvore rotulada G da figura 4.6.

1	2	4	3	5	6
2	3	3	0	0	0

Uma vez conhecido o procedimento, é possível enunciar o lema 4.1.

Lema 4.1: A segunda linha de um código estendido de Prüfer determina a primeira.

Demonstração. Basta observar que cada entrada da primeira linha do código estendido de Prüfer é dado pelo menor número natural diferente de zero que não ocorre na primeira linha antes dele nem na segunda linha abaixo ou depois dele. □

Exemplo 4.0.6: Para ilustrar a demonstração, será apresentada a primeira linha do código estendido de Prüfer uma vez conhecida a segunda linha. Considere uma árvore rotulada com 7 vértices, cuja segunda linha do código estendido de Prüfer é dada por 341450. Observe que o último vértice é o zero devido à forma como foi definido o código estendido de Prüfer.

Para obter a primeira entrada da primeira linha, é necessário encontrar o primeiro número natural diferente de zero que não foi utilizado na segunda linha; nesse caso, o número 2. Para a segunda entrada, é necessário obter o menor número natural diferente de zero, diferente da primeira entrada da primeira linha e que não ocorre a partir da segunda entrada na segunda linha; nesse caso, o número 3. Seguindo o procedimento, obtemos, uma a uma, as entradas da primeira linha, ou seja, 236145. Na figura 4.7, são apresentados a árvore rotulada e o seu código estendido de Prüfer.

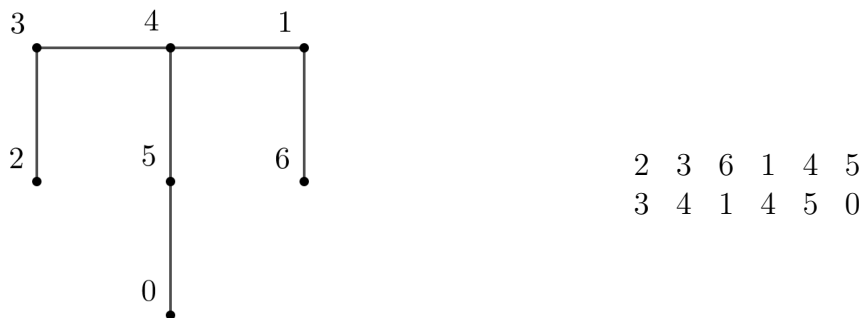


Figura 4.7: Árvore rotulada e o seu código estendido de Prüfer

O código de Prüfer é composto apenas pela segunda linha sem a última entrada do código estendido de Prüfer. Precisaremos apenas de uma linha com $n - 2$ colunas. A seguir é apresentado o código de Prüfer para a árvore rotulada G da figura 4.6.

2 3 3 0 0

Teorema 4.4: O número de árvores rotuladas sobre n vértices é n^{n-2} .

Demonstração. Cada código Prüfer gera um código estendido de Prüfer. Esse por sua vez está associado a apenas uma árvore. Para cada uma das $n - 2$ entradas do código Prüfer, podemos utilizar n rótulos. Teremos então n^{n-2} códigos de Prüfer considerando árvores com n vértices, portanto n^{n-2} árvores rotuladas. \square

Emparelhamento em grafos

Neste capítulo, trataremos de emparelhamentos em grafos bipartidos. Abaixo, duas definições importantes para o desenvolvimento deste capítulo.

Definição 5.1: Um grafo é bipartido se seus vértices podem ser particionados em dois subconjuntos, A e B , sendo que cada vértice de um subconjunto só poderá estar conectado a vértices do outro subconjunto.

Observe que o grafo G da figura 5.1 é bipartido, pois podemos particionar seus vértices em dois subconjuntos, A e B . Em A , teremos os vértices a, b, c, d, e . Em B , teremos os vértices f, g, h, i, j . Além disso, os vértices de um subconjunto estão conectados apenas a vértices do outro subconjunto.

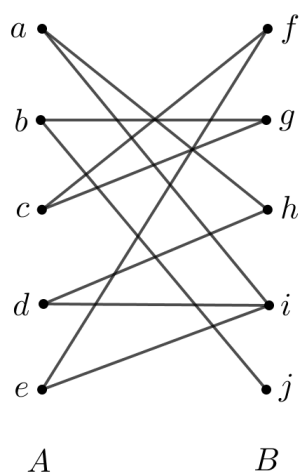


Figura 5.1: Grafo bipartido G

Na figura 5.2 é apresentado outro exemplo de grafo bipartido.

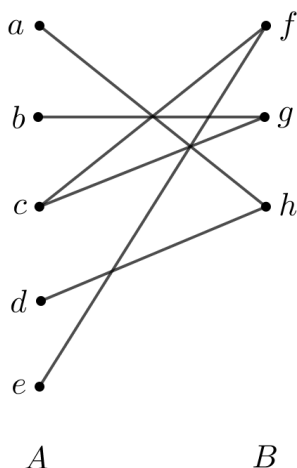


Figura 5.2: Grafo bipartido H

Definição 5.2: Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$, ele terá um emparelhamento perfeito se existir um subconjunto de arestas E' tais que todo vértice de G seja incidente a apenas uma aresta de E' .

Uma condição necessária para que exista um emparelhamento perfeito é que o número de vértices em A deverá ser igual ao número de vértices em B , ou seja, $|A| = |B|$.

Sendo E o conjunto de arestas do grafo bipartido da figura 5.1, observamos que existe um subconjunto $E' = \{\{a, h\}, \{b, j\}, \{c, g\}, \{d, i\}, \{e, f\}\}$, tal que todo vértice de G é incidente a apenas uma aresta de E' , logo G possui um emparelhamento perfeito.

Na figura 5.3, apresentamos as arestas de E' que formam o emparelhamento perfeito.

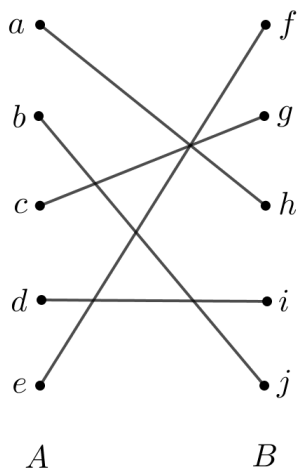


Figura 5.3: Emparelhamento perfeito grafo G

Teorema 5.1 (do Emparelhamento): Um grafo bipartido tem emparelhamento perfeito se, e somente se, $|A| = |B|$ e para qualquer subconjunto de k vértices de A existem pelo menos k vértices em B que estão conectados a pelo menos um deles.

Antes de iniciar a demonstração, será importante observar que alternando A e B , um grafo bipartido que possui um emparelhamento perfeito permanece com um emparelhamento perfeito e a condição do teorema acima continua satisfeita, ou seja, para qualquer subconjunto de k vértices de B existem pelo menos k vértices em A que estão conectados a pelo menos um deles. Para tal, basta argumentarmos o seguinte: seja $|A| = |B| = n$. Seja S um subconjunto de k vértices em B , e S_A o subconjunto de A que está conectado a S . O complemento de S_A em A está conectado a, no máximo, $n - k$ elementos em B . Como a condição do teorema se verifica de A para B , então, o complemento de S_A possui no máximo $n - k$ elementos, portanto S_A possui no mínimo k elementos. Logo S , que possui k elementos, está conectado a S_A que possui no mínimo k elementos, portanto a condição do teorema se verifica de B para A .

Como exemplo, considere o grafo bipartido que possui emparelhamento perfeito da figura 5.4. Nele temos os vértices coloridos de vermelho representando $S = \{i, j\}$, os vértices coloridos de verde representando $S_A = \{a, b, d, e\}$, coloridos de azul os vértices representando o complemento de S_A , ou seja, $\{c\}$ e de preto, os vértices que representam os elementos aos quais o complemento de S_A pode estar conectado, ou seja, $\{f, g, h\}$.

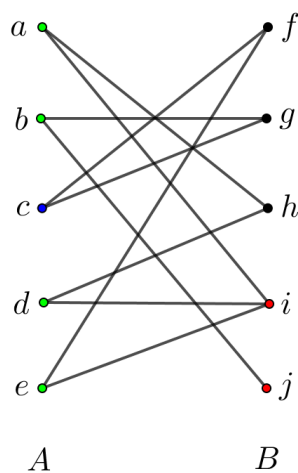


Figura 5.4: Grafo bipartido, alternando A e B

Para facilitar a escrita, apenas durante a demonstração a seguir, chamaremos um grafo bipartido de *bom*, se ele tiver o mesmo número de vértices esquerdos $|A|$ e direitos $|B|$, e quaisquer k vértices de A estiverem conectados a pelo menos k vértices de B . Dessa forma, um grafo que é *bom* de A para B , será *bom* de B para A . Essas informações serão importantes no desenvolvimento da demonstração a seguir.

Demonstração. Com as informações acima é preciso demonstrar que um grafo bipartido tem emparelhamento perfeito se, e somente se, ele for *bom*.

\implies Imediato, pois para qualquer subconjunto de A com k elementos, ele estará conectado a pelo menos os seus k vértices em B que formam o emparelhamento perfeito.

\impliedby Um grafo com apenas dois vértices é *bom*, se esses dois vértices estiverem conectados. Diante disso, um grafo tem um emparelhamento perfeito se ele pode ser particionado em grafos *bons* com 2 vértices. Aqui entenderemos particionar um grafo como dividir um grafo em subconjuntos e manter apenas as arestas entre os vértices de um mesmo subconjunto. Para concluir a prova, será necessário particionar o grafo em partes *boas* até obtermos grafos *bons* com apenas 2 vértices. As arestas que permanecerem formarão o emparelhamento perfeito. Portanto, basta mostrar que um grafo *bom* com mais de 2 vértices pode ser particionado em dois grafos *bons*. Tomemos inicialmente $a \in A$ e $b \in B$ com a e b conectados por uma aresta como sendo a primeira partição. Esta partição gera um grafo *bom*, porém a segunda pode não gerar um grafo *bom*. Isso só ocorrerá, se houver algum subconjunto C de A com k vértices conectados a menos de k vértices em B , para tal b será o k -ésimo vértice em B . Para resolvermos isso, tomemos então a primeira partição sendo C e o conjunto T . T representa o conjunto formado pelos vértices vizinhos de C em B . Note que $|C| = |T|$ e um dos elementos de T é o vértice b . Na figura 5.5, são apresentados os vértices a e b , um conjunto $C = \{c_1, c_2\}$ e o conjunto $T = \{b, d_1\}$.

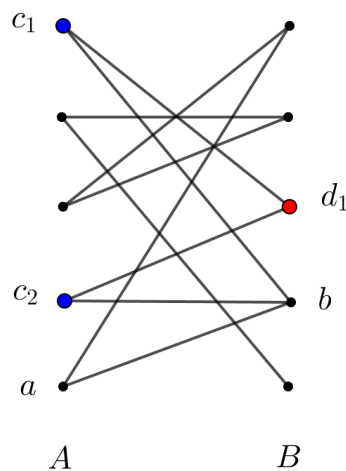


Figura 5.5: Primeira partição, subconjunto C e T

A segunda partição será formada pelos vértices restantes e suas arestas. Agora sim, a primeira partição é *boa*, pois todo subconjunto de C com j vértices está conectado a pelo menos j vértices em T , isso devido ao grafo original ser *bom* e à forma como T ter sido definido. Segue igualmente que a segunda partição é *boa*, basta analisarmos de B para A . Como dito antes da demonstração, sendo o grafo original *bom*, ele também será *bom* de B para A e como o complemento de T em B está conectado a apenas os vértices do complemento de C em A , e sendo o grafo original *bom*, a segunda partição será *boa*. \square

Diante do resultado do teorema 5.1, é possível apresentar um outro resultado.

Teorema 5.2: Se todo vértice de um grafo bipartido tem o mesmo grau $d \geq 1$, então ele contém um emparelhamento perfeito.

Demonstração. Seja X um subconjunto de A , e Y o conjunto de vértices adjacentes de X em B . O número de arestas que partem de X é dado por $d \cdot |X|$. Como cada vértice de Y possui d arestas, havendo a possibilidade de existir arestas que não estão conectadas a X , é preciso que $|Y| \geq |X|$. Logo, pelo teorema 5.1, o grafo bipartido tem um emparelhamento perfeito. \square

Os dois resultados apresentados sobre emparelhamento perfeito não são imediatos para verificar se um grafo bipartido possui ou não um emparelhamento perfeito. Para o teorema 5.1, seria necessário avaliar cada um dos subconjuntos de A . Sendo n o número de vértices em A , teríamos que verificar todos os 2^n subconjuntos de A e sendo n um número grande, haveria um trabalho enorme para tal verificação. O teorema 5.2 é uma condição suficiente para que exista um emparelhamento perfeito, mas não necessária. Diante disso, é apresentado, a seguir, um procedimento para verificar, de forma direta, se um grafo bipartido possui ou não um emparelhamento perfeito.

O procedimento consiste nos seguintes passos:

- dado o grafo bipartido, construir o emparelhamento M aresta a aresta, ou seja, de forma aleatória, conectar cada um dos vértices em A aos vértices disponíveis em B . Em um determinado momento, obteremos um emparelhamento perfeito ou ficaremos sem opção para os vértices em A que ainda não foram conectados com vértices em B . Na figura 5.6, é apresentado um grafo bipartido e, em vermelho, as arestas do emparelhamento M feito de forma aleatória;

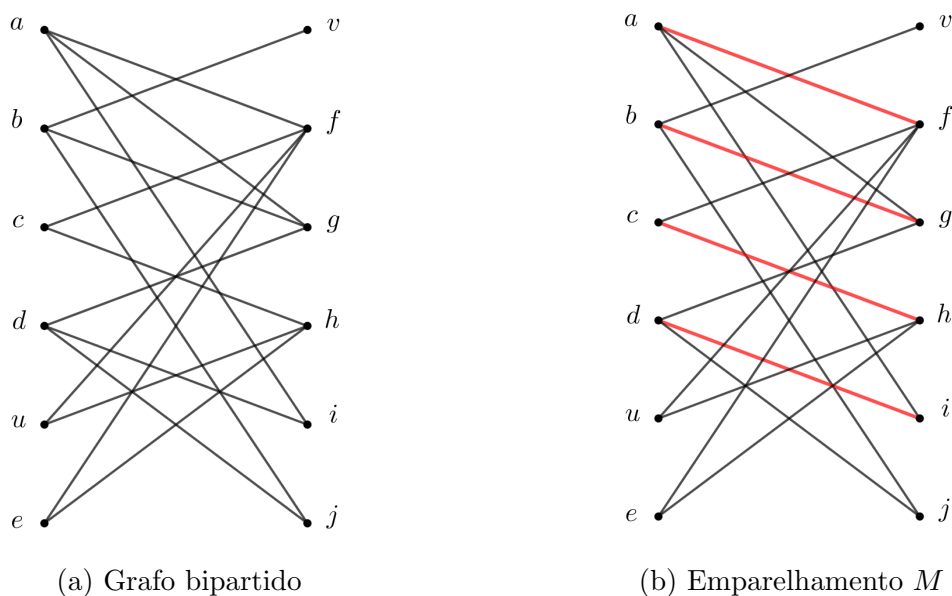


Figura 5.6: Grafo bipartido e emparelhamento M

- diante da segunda opção, tentaremos retirar algumas arestas e acrescentar outras em um número maior. Utilizaremos um caminho incrementador P , o qual é explicado a seguir. Sejam $u \in A$ e $v \in B$ tais que u e v não possuem aresta em M . O caminho P começa em u e termina em v , sendo que toda segunda aresta do caminho é aresta de M . Teremos, dessa forma, que P possui um número ímpar $2n + 1$ de arestas, sendo que n arestas já estão em M e $n + 1$ não estão em M . Utilizando o caminho incrementador P , retiramos as n arestas de M e acrescentamos as $n + 1$ arestas que vieram de P . Teremos um novo emparelhamento M' , tal que $|M'| = |M| + 1$. Repetiremos o processo até obtermos um emparelhamento perfeito ou até não haver mais nenhum caminho incrementador. Na figura 5.7a, é apresentado um caminho incrementador P referente ao emparelhamento M da figura 5.6b. Ele é composto pela sequência de arestas uh, hc, cf, fa, ag, gb e bv . Trocando as arestas hc, fa e gb que fazem parte de M pelas arestas uh, cf, ag e bv , obteremos o emparelhamento M' que é apresentado na figura 5.7b com as arestas em verde. Observe que M' possui uma aresta a mais que M , ou seja, $|M'| = |M| + 1$;

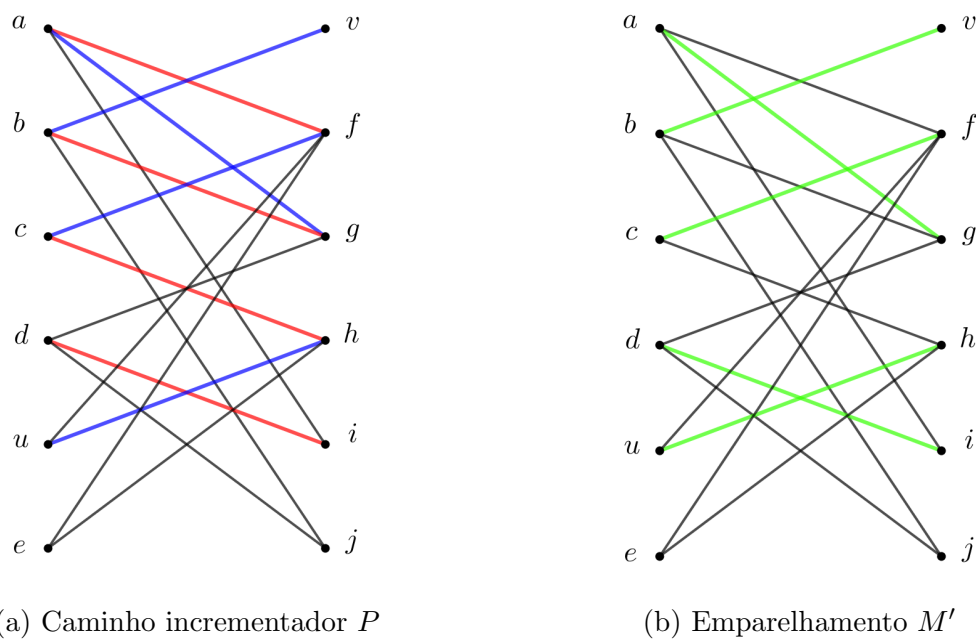


Figura 5.7: Caminho incrementador P e emparelhamento M'

Para finalizar, é preciso saber como obter um caminho incrementador ou ter certeza de que não existe tal caminho. Isso é apresentado a seguir,

- seja U o conjunto de vértices não utilizados no emparelhamento M em A e W o conjunto de vértices não utilizados no emparelhamento M em B . Seja um caminho quase incrementador, um caminho que inicia em um vértice de U , termina em um vértice de A e toda segunda aresta pertence a M . A sequência de arestas eh, hc, cf e fa é um exemplo de caminho quase incrementador referente ao emparelhamento M' da figura 5.6b, nele temos $U = \{u, e\}$ e $W = \{v, j\}$. Iremos construir um conjunto S gradualmente. Inicialmente,

considere $S = U$. S terá vértices que são atingíveis por algum caminho quase incrementador. Seja T o conjunto de vértices em B que estão conectados com vértices em S através do emparelhamento M . Observe que $|S| = |T| + |U|$, pois os vértices em U não estão conectados a vértices em T e $U \in S$. Diante disso, precisamos encontrar uma aresta que conecte um vértice $s \in S$ a um vértice $r \in B$ que não esteja em T . Temos duas opções:

- r não foi utilizado no emparelhamento M , logo $r \in W$ e então obtemos um caminho incrementador;
- r foi utilizado no emparelhamento M com um vértice $q \in A$, podemos então acrescentar q a S .

Diante das duas opções, em determinado momento, obteremos um emparelhamento M'' perfeito ou M'' não é perfeito, pois nenhuma aresta de S conecta um vértice fora de T . Teremos então $|T| = |S| - |U| < |S| \implies |T| < |S|$, ou seja, existe um subconjunto de A que está conectado a um número menor de vértices em B . Logo, pelo teorema 5.1, não há emparelhamento perfeito.

Utilizando tal procedimento no emparelhamento M' da figura 5.7b, precisamos então encontrar um caminho incrementador que conecte e a j . Temos então o conjunto $U = \{e\}$ e o conjunto $W = \{j\}$. Inicialmente $S = U$, construindo gradualmente S , obtemos $S = \{c, u, e\}$, $T = \{f, h\}$ e não obteremos um caminho incrementador. Na figura 5.8, o conjunto S está representado pelos vértices em vermelho e o conjunto T pelos vértices em amarelo. Observe que $|S| > |T|$.

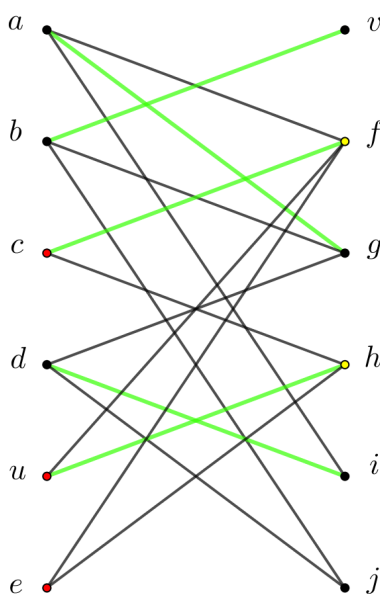


Figura 5.8: Conjuntos S e T

Como A possui um subconjunto S que está conectado a um subconjunto T de B que possui um número menor de elementos; então, pelo teorema 5.1, não existe

emparelhamento perfeito e o emparelhamento M' é máximo, ou seja, possui o maior número de arestas possíveis.

Exemplo 5.0.1: Em uma garagem existem 5 vagas e será necessário estacionar 5 carros. Por motivos de preferência e restrições de tamanho das vagas e dos carros, eles só poderão ser estacionados em determinadas vagas. São elas:

- carro 1 poderá ser estacionado nas vagas 1 e 3;
- carro 2 poderá ser estacionado nas vagas 3, 4 e 5;
- carro 3 poderá ser estacionado nas vagas 1 e 2;
- carro 4 poderá ser estacionado na vaga 2;
- carro 5 poderá ser estacionado nas vagas 4 e 5.

O objetivo é encontrar, caso exista, uma maneira de estacionar todos os carros respeitando as restrições. Na figura 5.9a, é apresentado um grafo representando o problema e, na figura 5.9b, é apresentada uma solução.

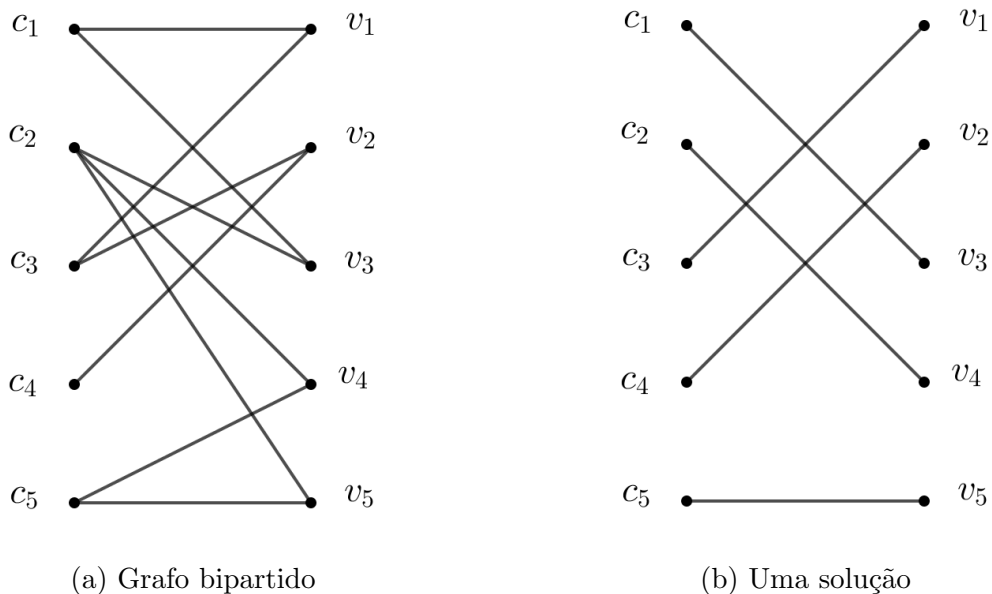


Figura 5.9: Grafo bipartido e seu emparelhamento perfeito

Grafos planares e coloração

Neste capítulo, serão apresentados alguns resultados sobre grafos planares e coloração. Grafos planares possuem aplicações em circuitos eletrônicos, linhas de transmissão de energia, linha de produção em indústrias, entre outras.

Definição 6.1: Um grafo é dito planar se ele pode ser desenhado em um plano de modo que suas arestas não se cruzem.

Exemplos de grafos planares são obtidos a partir dos poliedros platônicos. Na figura 6.1, são apresentados os 5 poliedros de Platão e os seus respectivos grafos planares.

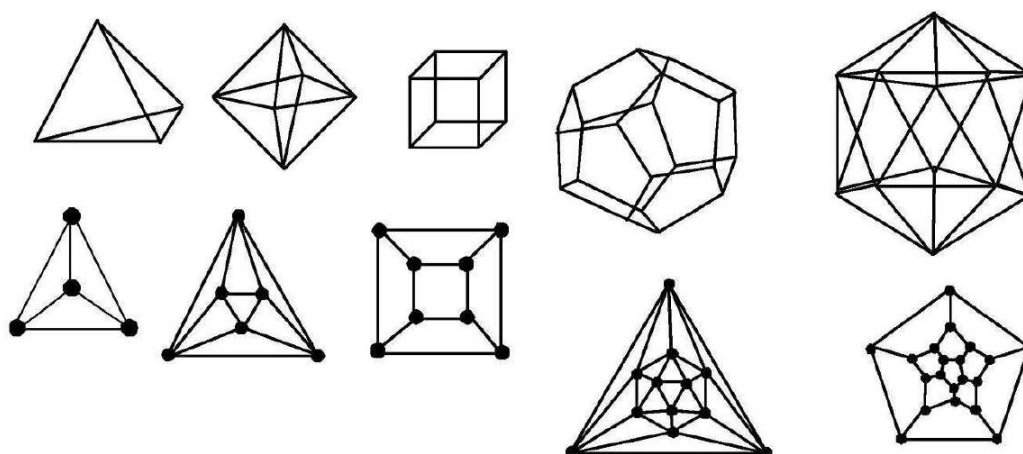


Figura 6.1: Poliedros de Platão e seus grafos planares [7]

Se um grafo G conexo e planar, G divide o plano em regiões que aqui chamaremos de faces. Apenas uma destas regiões é ilimitada; todas as demais são limitadas pelas arestas do grafo. Na figura 6.1, o grafo associado ao cubo possui 6 faces, sendo uma delas ilimitada; na figura 6.2, é apresentado esse grafo planar e suas faces, sendo f_6 a face ilimitada.

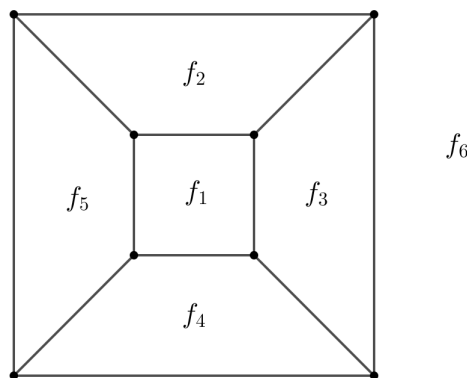


Figura 6.2: Grafo planar e suas faces

O teorema apresentado a seguir é de grande importância para o desenvolvimento deste capítulo.

Teorema 6.1 (Euler): Em um grafo planar e conexo, com f faces, v vértices e a arestas, temos a seguinte igualdade, $f + v = a + 2$.

Demonstração. Considere um ponto P pertencente ao interior da face ilimitada. O objetivo inicial será conectar P através de uma linha a um ponto Q , interior a qualquer outra face. Aqui não será permitido intersectar nenhuma aresta. Para tal, será retirado o mínimo de arestas para que o objetivo inicial seja alcançado. Será necessário, então, retirar uma aresta de todas as faces limitadas de forma a deixar livre o acesso a essa face. De forma adequada, a cada retirada de uma aresta, uma face estará acessível. Sendo $f - 1$ faces limitadas, será necessária a retirada de $f - 1$ arestas. Observe que, após a retirada dessas arestas, o grafo resultante não possui ciclos, pois caso houvesse, haveria face não acessível. Além disso, o grafo resultante é conexo, pois foram retiradas apenas arestas que geravam ciclos em cada face para deixá-las acessíveis, ou seja, sem ciclos, portanto, conforme a definição 4.1, o grafo resultante é uma árvore. Na figura 6.3, é exemplificado o procedimento acima; primeiramente, o ponto P teve acesso à face f_3 e, na sequência, às faces f_2 , f_1 , f_4 e f_5 . Utilizando o resultado do teorema 4.3, sabemos que uma árvore com v vértices possui $v - 1$ arestas. Temos então que o número de arestas é igual a soma das arestas retiradas, $f - 1$, com as arestas restantes, $v - 1$. Assim: $f - 1 + v - 1 = a$. Isso implica que $f + v = a + 2$. \square

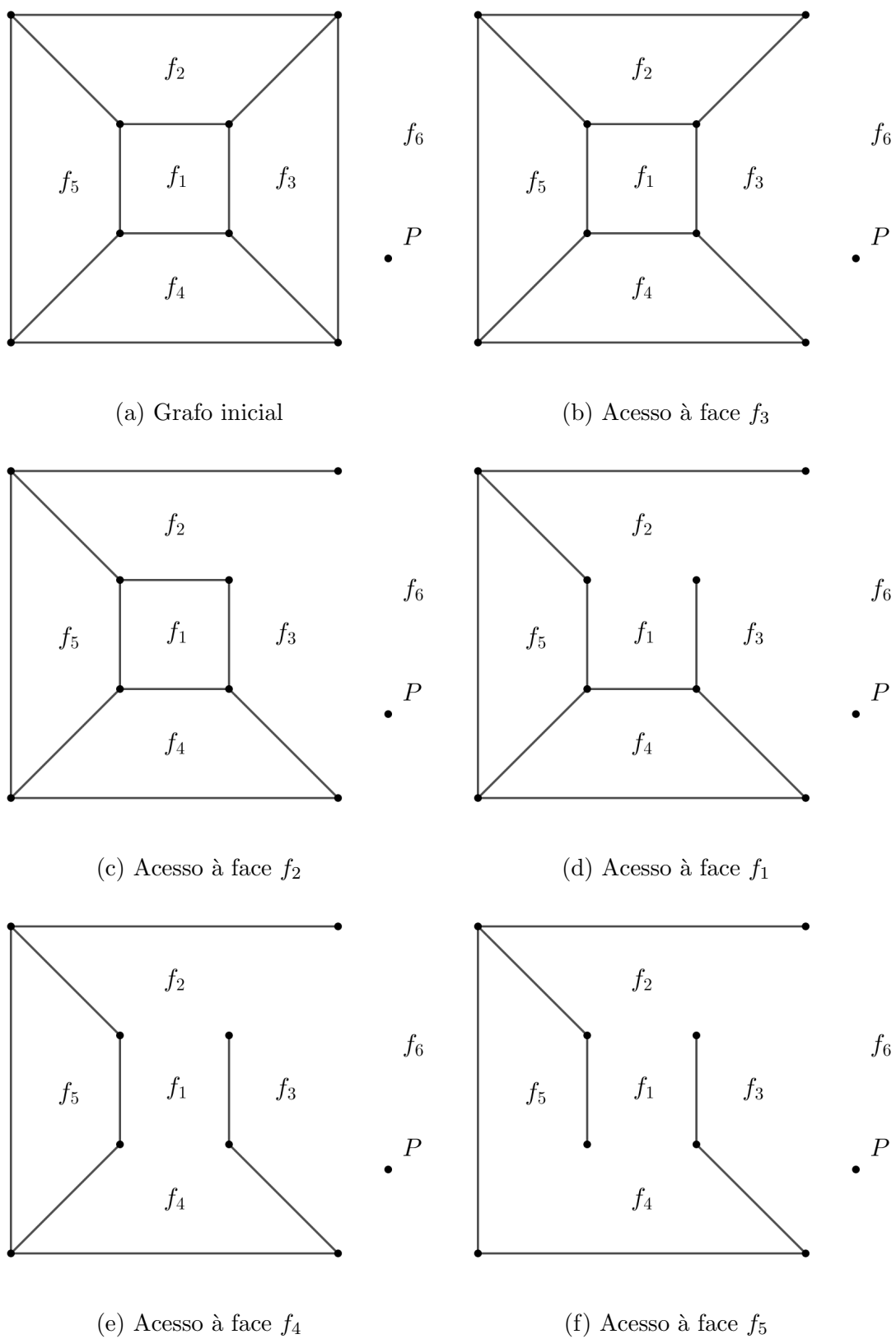
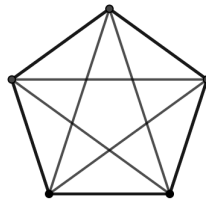


Figura 6.3: Grafo planar e a sequência de arestas retiradas

Com o resultado do teorema 6.1, podemos obter dois resultados que são apresentados a seguir.

Teorema 6.2: O grafo completo k_5 não é um grafo planar.



k_5

Figura 6.4: k_5 não é planar

Demonstração. A prova será feita por absurdo. Inicialmente, observe que k_5 tem $\binom{5}{2} = 10$ arestas. Com o resultado do teorema 6.1, o número de faces é dado por $f + 5 = 10 + 2$ ou seja, $f = 7$. Como toda face é delimitada por pelo menos três arestas, teremos no mínimo $\frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5$ arestas, o que é um absurdo, pois k_5 possui 10 arestas, logo k_5 não é planar. \square

Teorema 6.3: Um grafo planar com v vértices possui no máximo $3v - 6$ arestas.

Demonstração. Sendo v o número de vértices, a o número de arestas e f o número de faces do grafo planar, pelo teorema 6.1 temos:

$$f + v = a + 2. \quad (6.1)$$

Cada face é delimitada por, no mínimo, três arestas, logo o número mínimo de arestas é dado por

$$a = \frac{3}{2}f. \quad (6.2)$$

Dessa forma, o número de faces é limitado por

$$f \leq \frac{2}{3}a. \quad (6.3)$$

Substituindo a inequação 6.3 na equação 6.1, obtemos:

$$a + 2 \leq v + \frac{2}{3}a \implies a \leq 3v - 6. \quad (6.4)$$

\square

A seguir, será abordada a coloração de grafos. O objetivo é colorir vértices adjacentes com cores diferentes. A primeira pergunta que surge é: quantas cores são necessárias para colorir um grafo?

Inicialmente precisaremos das definições a seguir.

Definição 6.2: Um grafo é k -colorível, se ele pode ser colorido com k cores.

Exemplo 6.0.1: O grafo associado aos estados brasileiros é 4-colorível.

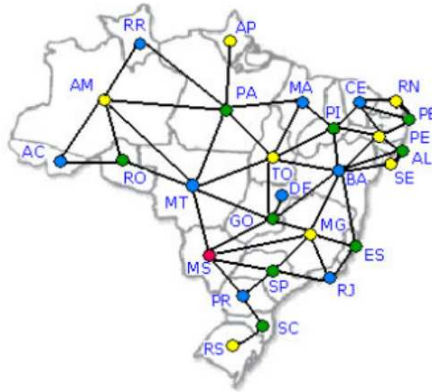


Figura 6.5: Grafo associado aos estados do Brasil [1]

Definição 6.3: Número cromático é o menor valor de k para o qual o grafo é k -colorível.

Definição 6.4: Um ciclo será chamado de ciclo ímpar se possuir um número ímpar de vértices.

Na sequência, apresenta-se um resultado sobre grafos com número cromático 2, ou seja, grafos 2-colorível.

Teorema 6.4: Um grafo é 2-colorível se, e somente se, ele não contém ciclo ímpar.

Demonstração. \Leftarrow Imediato, pois a cada ciclo par basta colorir vértices adjacentes com cores alternadas. \Rightarrow Sendo o grafo 2-colorível, temos duas opções:

- o grafo possui ciclo ímpar; nesse caso, o tal grafo não seria 2-colorível, pois considerando apenas um ciclo ímpar, ao colorir os vértices um a um, alternando as cores, o primeiro e o último vértices coloridos teriam a mesma cor;
- o grafo não possui ciclo ímpar, basta, então, começar a colorir o grafo por um vértice qualquer utilizando a primeira cor; em seguida, colorir os seus vizinhos com a segunda cor. Nesse ponto, não haverá vértices adjacentes com a mesma cor, pois, caso contrário, teríamos um ciclo de comprimento 3. Continuando dessa forma, se o grafo for conexo, terminaremos a coloração; caso contrário, utilizaremos o processo para colorir cada componente conexo.

□

Um resultado sobre coloração de grafos com muitas cores é apresentado a seguir.

Teorema 6.5 (Brooks): Se todo vértice de um grafo tem grau no máximo d , então o grafo pode ser colorido com $d + 1$ cores.

Demonstração. A prova é feita usando o Princípio da Indução sobre o número de vértices. Começando com um grafo com menos de $d + 2$ vértices, ele poderá ser colorido com $d + 1$ cores, ou menos. Para tanto, basta colorir cada vértice com uma cor diferente. Supondo que o grafo com menos de n vértices seja $d + 1$ -colorível, é preciso verificar para o grafo com n vértices. Ao acrescentar o n -ésimo vértice, ele estará conectado a no máximo d vértices, pois o grafo tem grau no máximo d . Logo existirá uma cor das $d + 1$ cores disponíveis para colorir o n -ésimo vértice. \square

O resultado acima possui uma condição suficiente para coloração de grafos, mas não necessária. Alguns grafos com grau alto podem ser coloridos com poucas cores. A seguir é apresentado um exemplo.

Exemplo 6.0.2: O grafo bipartido com $|A| = |B| = 100$ e todos os vértices de A estão conectados a todos os vértices de B é 2-colorível e possui grau 100 para todos os vértices.

Abordaremos, nesta parte, a coloração de grafos planares. Antes de iniciarmos os resultados sobre coloração, precisaremos do lema apresentado a seguir.

Lema 6.1: Todo grafo planar tem um vértice de grau no máximo 5.

Demonstração. Iremos supor por absurdo que o grafo não tem vértice de grau no máximo 5, ou seja, todos os vértices tem grau no mínimo 6. Contando suas arestas, teremos no mínimo $\frac{6 \cdot v}{2} = 3v$ arestas. O que é um absurdo, pois do teorema 6.3, sabemos que todo grafo planar com v vértices tem no máximo $3v - 6$ arestas. \square

O resultado principal é enunciado, a seguir, porém sua demonstração foge do escopo deste trabalho e não será apresentada. Em 1852, Francis Guthrie ao colorir um mapa dos condados da Inglaterra com o cuidado de não colorir duas regiões vizinhas com a mesma cor, percebeu que, utilizando apenas quatro cores, isso seria possível. Foi feita, então, essa conjectura que somente foi demonstrada mais de um século depois; virando, dessa forma, um teorema. Tal demonstração foi feita por Kenneth Appel e Wolfgang Haken em 1976. Foram necessárias mais de mil horas para realizar os cálculos em um IBM 360 [4].

Teorema 6.6: Todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores.

Porém será apresentado um resultado mais simples.

Teorema 6.7: Todo grafo planar pode ser colorido com cinco cores.

Demonstração. A demonstração será feita utilizando o Princípio da Indução sobre o número de vértices. Como hipótese de indução, consideramos que todo grafo com menos de n vértices pode ser colorido com cinco cores. É necessário, então, verificar para o grafo com n vértices. Dado o grafo com n vértices, pelo lema 6.1,

sabemos que existe um vértice v com grau no máximo 5. Omitindo tal vértice e suas arestas, o grafo remanescente é 5-colorível pela hipótese de indução. Se v tem grau menor que 5, ao retornar com o vértice v , ele poderá ser colorido com uma das cinco cores não utilizadas em seus vizinhos. Se v tem grau cinco, ao retirar v , uniremos os vértices u e w , vizinhos de v , em um único vértice que chamaremos de uw . Observe as figuras 6.6 e 6.7. Esse novo grafo continua sendo planar e tem menos vértices, sendo então 5-colorível. Como o vértice uw possui apenas uma cor, então u e w ao retornar aos seus lugares de origem terão a mesma cor; logo v , agora, possui 5 vértices vizinhos, mas dois deles têm a mesma cor; poderemos, então, colorir v com a cor restante disponível. Tal procedimento poderia causar um problema, pois poderia existir uma aresta conectando u e w e, então, teríamos u e w vizinhos com a mesma cor. Para evitar esse problema, bastaria escolher um outro par de vértices, vizinhos a v que não fossem vizinhos entre si. Podemos aqui afirmar que tal par de vértices existe, pois, caso contrário, os cinco vértices vizinhos a v seriam todos vizinhos entre si; teríamos, então, um componente conexo que é representado por k_5 , o qual sabemos não ser planar pelo teorema 6.2. \square

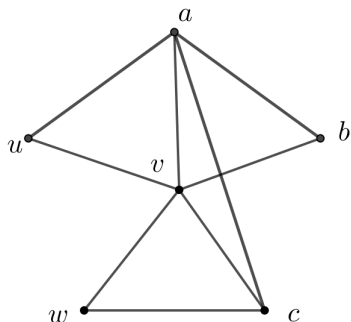


Figura 6.6: Vértice v e seus vizinhos

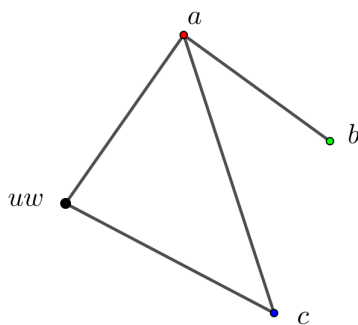


Figura 6.7: Vértice uw

Relato das aulas práticas

Com o objetivo geral de verificar a possibilidade de trabalhar com grafos nas séries finais do ensino fundamental, foram ministradas, em uma turma de 9º ano, aulas da disciplina Matemática nas quais esse conteúdo foi trabalhado. Essas aulas tiveram como objetivos específicos (i) introduzir o tema na educação básica; (ii) verificar a aceitação do tema e (iii) desenvolver o raciocínio lógico dos estudantes.

Essa experiência ocorreu na Escola Estadual Tito Fulgêncio, situada na rua Jacuí, 2357, no bairro Renascença, em Belo Horizonte – MG, no turno da tarde. As atividades foram feitas em duas aulas de cinquenta minutos, intercaladas com o recreio de vinte minutos, no dia 20 de setembro de 2017.

Nessa turma de 9º ano, composta por 31 alunos, no dia 20/09, havia 27 alunos e estava presente também o professor de matemática responsável pela referida turma durante o ano letivo.

Todo o material utilizado nas atividades das duas aulas ministradas encontra-se no apêndice. Utilizou-se o projetor da escola para apresentação, em slides, dos conceitos, dos problemas e das imagens.

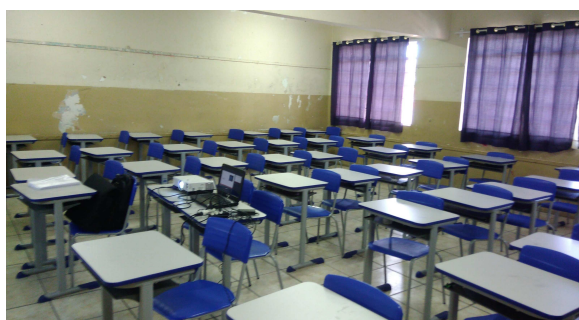


Figura 7.1: Foto da sala de aula na qual ocorreram as aulas práticas

Visando a uma melhor compreensão dessa experiência, apresenta-se, a seguir, o modo como as atividades foram desenvolvidas. Ocorreram em três etapas.

1ª etapa

- Para iniciar, foram apresentados dois problemas. O primeiro trata-se das Pontes de Königsberg e o segundo, de emparelhamento perfeito em grafos bipartidos.

Após a apresentação dos problemas, foi dado um tempo de, aproximadamente, 20 minutos para que os estudantes tentassem resolvê-los. Esses problemas não apresentavam soluções. Durante esses 20 minutos, houve compartilhamento de ideias entre eles e também com os professores presentes. Foi percebido grande envolvimento e interesse da maior parte da turma. Decorrido o tempo dedicado à atividade, não foi apresentada nenhuma solução correta para os dois problemas. Na figura 7.2, é apresentada uma tentativa de solução para o segundo problema feita por um aluno.

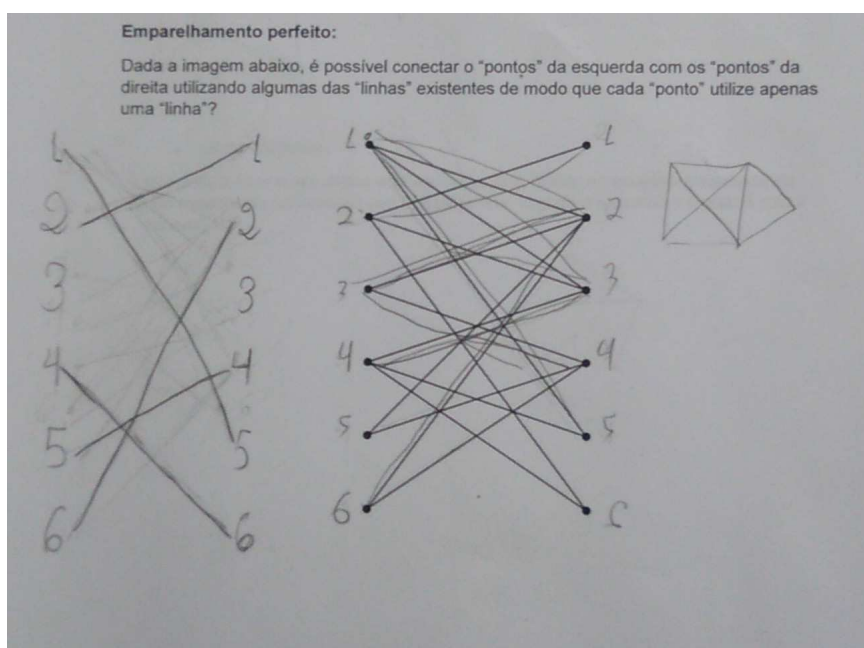


Figura 7.2: Tentativa de solução para o problema do emparelhamento perfeito

2ª etapa

- Houve a exposição dos conceitos sobre grafos necessários para a apresentação do teorema 3.1 e do procedimento para a resolução dos problemas. Nesse momento, os alunos acompanharam as explicações, fizeram perguntas sobre os conceitos as quais foram respondidas de imediato. Após mostrados tais conceitos, apresentaram-se o teorema 3.1 e o procedimento que se encontra no final do capítulo 5. O procedimento foi exibido de forma prática, a fim de evitar algumas justificativas do procedimento, uma vez que o público alvo era composto por alunos do ensino fundamental. Após essa apresentação, foi iniciada a terceira e última etapa.

3ª etapa

- Nessa etapa, foram propostas as atividades para serem resolvidas. Essas atividades, que se encontram no apêndice, empregaram os conceitos apresentados na segunda etapa. Assim, a maior parte dos alunos resolveu as atividades propostas sem grandes dificuldades, foi possível a eles retornar aos problemas

iniciais e verificar que esses não possuem solução. Vale ressaltar que essa turma é composta por alunos que sinalizam uma grande dificuldade de aprendizagem relacionada a conteúdos da Matemática.

Na sequência, apresenta-se um quadro com os percentuais de aproveitamento da turma em matemática. A última atividade proposta teve grande aceitação por parte dos alunos. Alguns apresentaram duas soluções corretas para ela. Nas figuras 7.3 e 7.4, são expostas as soluções de dois estudantes, ambas corretas.

Aproveitamento em matemática	Número de alunos
Acima de 70%	4
Entre 60% e 70%	9
Abaixo de 60%	18

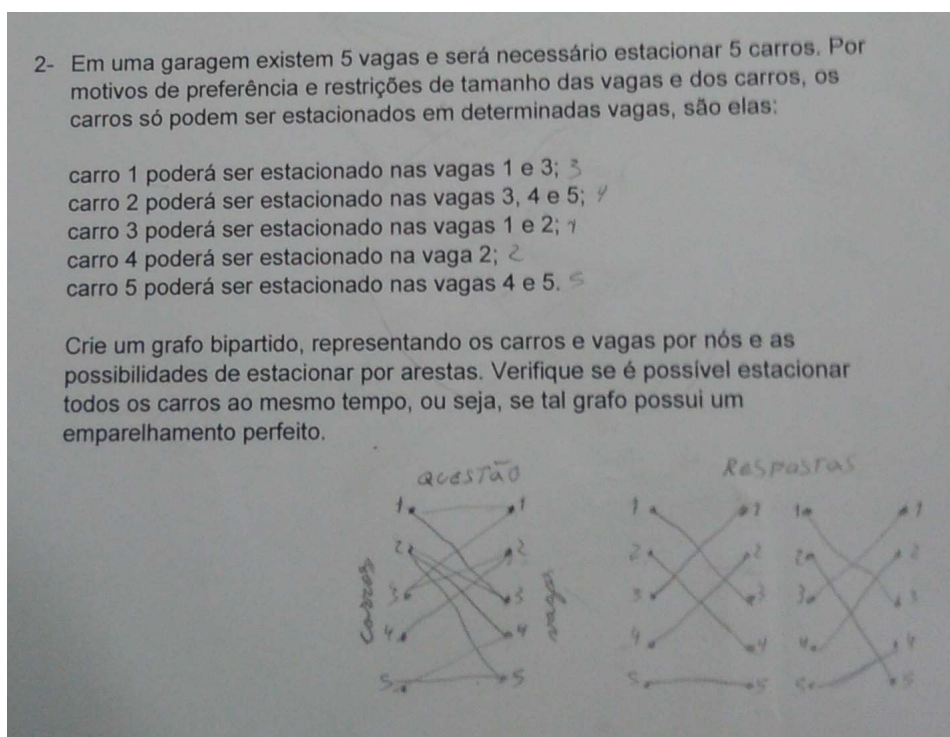


Figura 7.3: Solução apresentada por um aluno

Ao final das aulas, um aluno apresentou uma solução para o problema de emparelhamento perfeito em grafos bipartidos. A solução dele foi a seguinte: ele observou que o primeiro vértice à direita só poderia estar conectado com o segundo vértice à esquerda. Dessa forma, o último vértice à direita só poderia estar conectado ao quarto vértice à esquerda e, diante disso, o quinto vértice à direita só poderia estar conectado ao primeiro vértice à esquerda. Com essas informações, foi percebido que o terceiro vértice à direita não poderia estar conectado a nenhum vértice, uma vez que todos os vértices disponíveis já tinham sido utilizados. Portanto, o grafo apresentado não possui emparelhamento perfeito. Na figura 7.5 é apresentado o esboço da solução desse aluno.

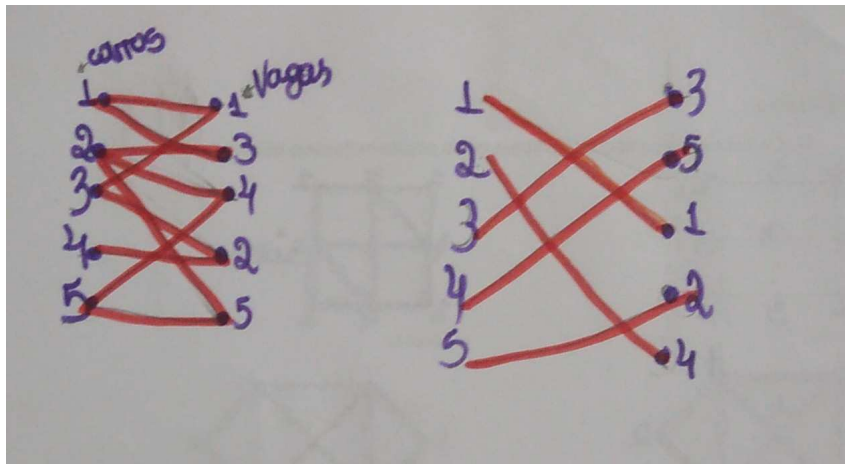


Figura 7.4: Solução apresentada por uma aluna

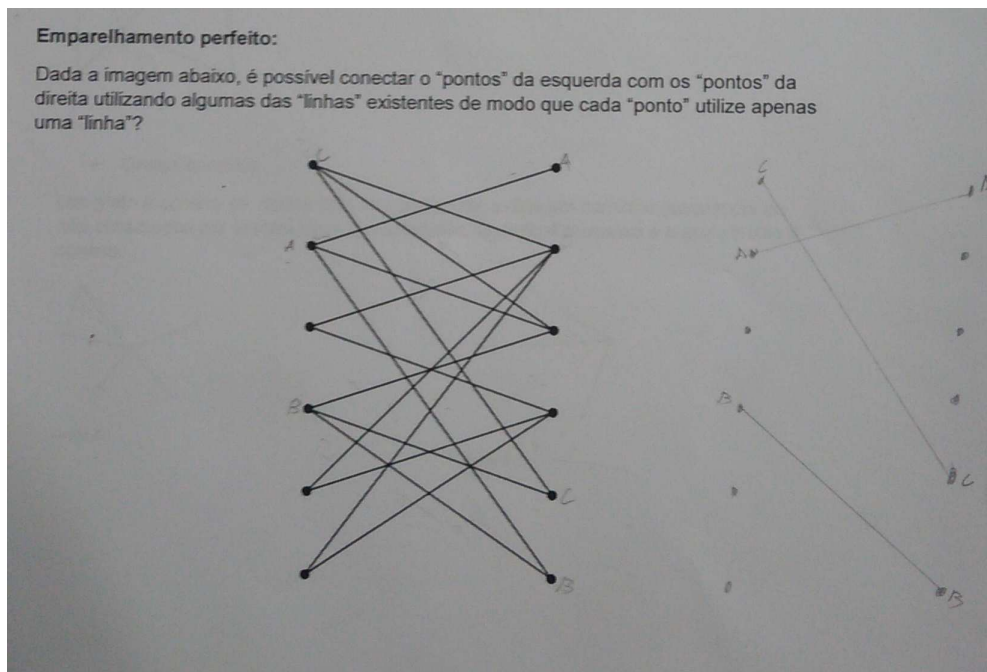


Figura 7.5: Esboço da solução apresentada por um aluno

Ao final, alguns alunos elogiaram as atividades e disseram que seria interessante trabalhar com outros exercícios desse tipo por se tratarem de atividades que prendem a atenção deles até encontrarem uma solução. Outros pediram uma nova folha para levar para casa e desafiar os pais.

Considerações finais

Para muitos professores, há uma grande satisfação quando o seu grupo de alunos consegue entender e colocar em prática a matéria ensinada com tanto empenho. Quando há um bom envolvimento da turma, o professor se preocupa em ampliar ainda mais o conhecimento.

Não é incomum acontecer o contrário, ou seja, haver grupos de alunos que não se interessam pelo que é ensinado ou demonstram pouco interesse. Em um cenário como esse, aumenta a responsabilidade do professor no esforço pela busca de novas estratégias de ensino para que possa despertar o interesse dos alunos, instigando-os a novas posturas frente à construção de conhecimentos.

Como visto em [3], página 37,

[...] O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. [...] O estabelecimento de relações é tão importante quanto a exploração dos conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, os conteúdos podem acabar representando muito pouco para a formação do aluno, particularmente para a formação da cidadania.

Nesse sentido, é necessário utilizar estratégias que possam propiciar aos estudantes alcançar a compreensão das atividades, da importância do conhecimento em foco para sua formação e seu convívio social.

De acordo com [3], página 8, os alunos do ensino fundamental devem ser capazes de:

- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Para contemplar a formação plena dos alunos, é necessário trabalhar diferentes áreas de conhecimento. Dentre as diversas áreas, encontra-se a Matemática. Os Parâmetros Curriculares de Matemática [3], segundo consta na página 15 deste documento,

Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura.

É interessante ressaltar que a matemática está inserida diretamente na vida social das pessoas, considerando que, em diversas situações do dia a dia, dentre outras, é preciso quantificar, ler e interpretar gráficos, efetuar cálculos etc. Diante disso, para colocar em prática o que se prescreve nos documentos oficiais, é necessário que o professor esteja em sala de aula para vivenciar experiências desafiadoras, avaliar os resultados e, sempre que necessário, propor novas metodologias e estratégias.

Para que fosse possível aliar, mesmo que de uma forma não tão abrangente, a teoria e a prática, bem como visando contribuir com todas essas questões, foram desenvolvidas uma sequência de aulas e atividades para os alunos do 9º ano do ensino fundamental, as quais se encontram no apêndice.

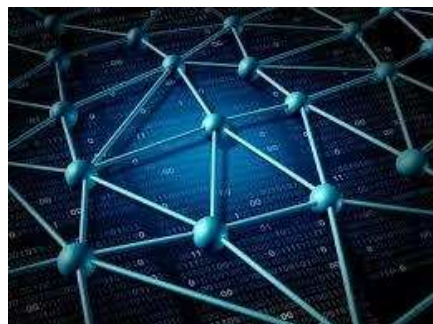
Ao final da experiência, percebeu-se o interesse da maioria dos alunos pelo tema proposto e explorado nas aulas. Essa constatação deve-se ao fato de um número significativo de alunos ter se envolvido com as atividades; além disso, houve a apresentação de soluções corretas e não esperadas para as atividades propostas. Apenas um pequeno grupo não se mostrou interessado. Houve momentos em que a turma esteve muito agitada e se fez necessária a intervenção do professor responsável pela turma.

Vale ainda ressaltar que, diante das diversas aplicações da teoria de grafos em várias ciências, tais como Ciência da Computação, Física e Química, essa teoria pode ser trabalhada nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio. Ademais, para o desenvolvimento do raciocínio lógico, considera-se pertinente a utilização dessa teoria de grafos.

Apêndice

Os problemas, conceitos e atividades das aulas ministradas estão disponibilizados neste apêndice.

Grafos



Pontes de Königsberg:

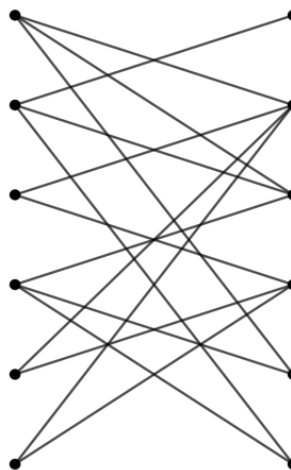
A imagem ao lado representa a cidade de Königsberg, composta por duas ilhas, duas margens e sete pontes. É possível fazer um passeio pela cidade de modo que se atravesse toda ponte exatamente uma vez?



Charge de Simon Kneebone, sobre as pontes de Königsberg

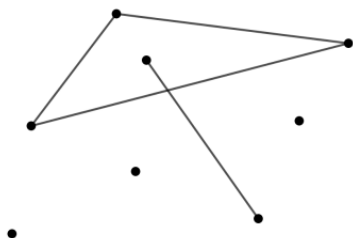
Emparelhamento perfeito:

Dada a imagem ao lado, é possível conectar os “pontos” da esquerda com os “pontos” da direita, utilizando algumas das “linhas” existentes, de modo que cada “ponto” utilize apenas uma “linha”?

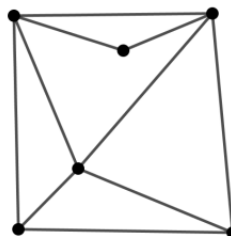


Grafo

É uma representação gráfica de um conjunto de vértices (pontos), e arestas (podem ser segmentos de reta ou curvas), de tal forma que as arestas conectam alguns pares desses vértices.



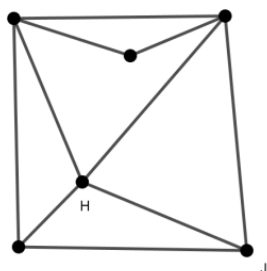
Grafo 1



Grafo 2

Grau de um vértice

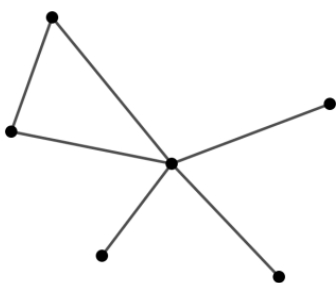
O número de arestas que partem de um determinado vértice é chamado de grau do vértice. No grafo abaixo, o grau do vértice H é 4 e o grau do vértice J é 3.



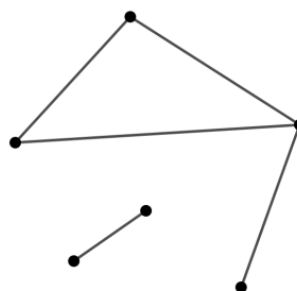
Grafo 3

Grafos conexos

Um grafo é conexo se, dados dois vértices quaisquer, existe um caminho (sequência de vértices conectados por arestas) que liga estes vértices. O grafo 4 é conexo e o grafo 5 não é conexo.



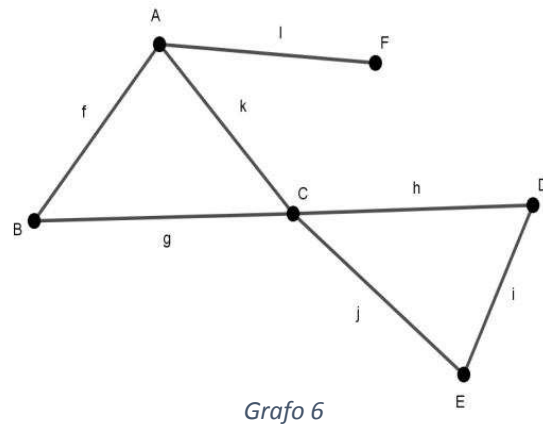
Grafo 4



Grafo 5

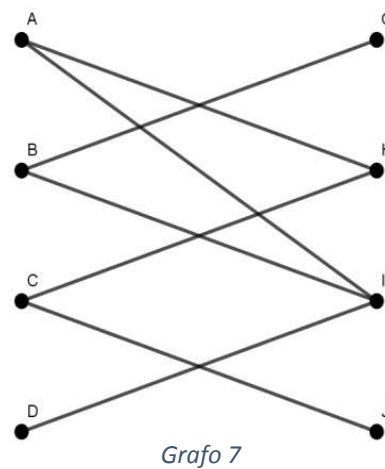
Passeio euleriano

Um passeio euleriano passa por todas as arestas exatamente uma vez. No grafo 6, temos um passeio euleriano na sequência de arestas f, g, h, i, j, k, l.



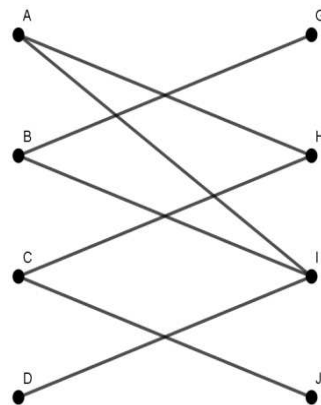
Grafo bipartido

Um grafo é bipartido se seus vértices podem ser particionados em dois grupos, por exemplo E e F de modo que toda aresta conecta um vértice em E a um vértice em F. No grafo 7, os vértices A, B, C e D fazem parte do grupo E e os vértices G, H, I e J fazem parte do grupo F.

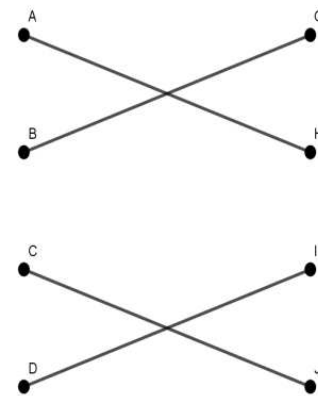


Emparelhamento perfeito em um grafo bipartido

Um grafo bipartido possui um emparelhamento perfeito se existir um conjunto de arestas de modo que todo vértice esteja conectado a exatamente uma dessas arestas. Tal conjunto de arestas é chamado de emparelhamento perfeito. No grafo 8, temos um emparelhamento perfeito do grafo 7.



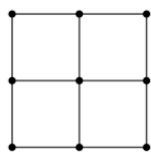
Grafo 7



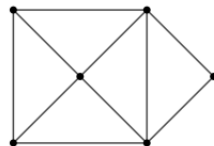
Grafo 8

Atividades

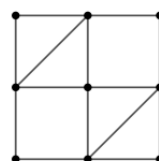
Dados os grafos abaixo, verifique quais possuem passeio euleriano.



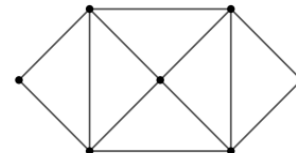
Grafo 9



Grafo 10



Grafo 11



Grafo 12

Teorema:

Se um grafo conexo tem mais de dois vértices com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.

Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.

Se um grafo conexo não tem vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano e tal passeio é fechado.

Em uma garagem existem 5 vagas e será necessário estacionar 5 carros. Por motivos de preferência e restrições de tamanho das vagas e dos carros, esses só poderão ser estacionados em determinadas vagas. São elas:

carro 1 poderá ser estacionado nas vagas 1 e 3;

carro 2 poderá ser estacionado nas vagas 3, 4 e 5;

carro 3 poderá ser estacionado nas vagas 1 e 2;

carro 4 poderá ser estacionado na vaga 2;

carro 5 poderá ser estacionado nas vagas 4 e 5.

Crie um grafo bipartido, represente os carros e as vagas por vértices e as possibilidades de estacionar por arestas. Verifique se é possível estacionar todos os carros ao mesmo tempo, ou seja, se tal grafo possui um emparelhamento perfeito.

Bibliografia

- [1] *Número cromático do Brasil*. http://www.sbmec.org.br/eventos/cnmac/xxxiii_cnmac/pdf/691.pdf, Acessado em 18/01/2018.
- [2] *Problema das Pontes de Königsberg*. <http://www.inf.ufsc.br/grafos/problema/pontes/grafos.html>, Acessado em 28/11/2017.
- [3] *Parâmetros Curriculares Nacionais - Terceiro e Quarto ciclos do ensino fundamental - Matemática*, 1998. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>, Acessado em 13/12/2017.
- [4] Appel, K. I. e W. Haken: *Every planar map is four colorable*. 1989.
- [5] Euler, Leonhard: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. 1741.
- [6] Júnior, Dárcio Costa Nogueira: *Grafos e problemas de caminhos*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Viçosa, 2017.
- [7] Jurkiewicz, Samuel: *Grafos - Uma Introdução*. Obmep.
- [8] L. Lovász, J. PeliKán e K. Vesztergombi: *Matemática Discreta*. 2013.
- [9] Lima, Gizelle Cristina Guisso de: *Emparelhamento em Grafos Bipartidos*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá - UEM, 2017.
- [10] Santana Ferreira, Verônica Craveiro de: *De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática*. Tese de Mestrado, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE, 2014.
- [11] Santos, J. Plínio O., Margarida P. Mello e Idani T. C. Murani: *Introdução à análise combinatória*. Unicamp, 2002.
- [12] Silva, Bruno Cesar Sá da: *EMPARELHAMENTO EM GRAFOS BIPARTIDOS NO ENSINO MÉDIO*. Tese de Mestrado, IMPA, 2016.