

MARCOS ROBERTO MARCIAL

**PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS
SINGULARES E OU NÃO SINGULARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010**

MARCOS ROBERTO MARCIAL

**PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS
SINGULARES E OU NÃO SINGULARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de Fevereiro de 2010.

Prof. Fábio Rodrigues Pereira

Prof^a. Maria José Alves

Prof. Paulo César Carrião
(Co-orientador)

Prof. Sandro Vieira Romero
(Co-orientador)

Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)

*A minha família,
e aos meus amigos.*

Agradecimentos

- Agradeço primeiro a Deus que é o criador de todas as coisas.
- A minha família, meus pais, meus irmãos Mateus e Bruna, pelo incentivo, pela compreensão e pelas orações.
- Ao professor Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (orientador), pela paciência, pela competência e confiança.
- Aos professores, Paulo César Carrião e Sandro Vieira Romero pela co-orientação.
- Aos professores, Fábio Rodrigues Pereira e Maria José Alves pela participação na minha banca e pelas sugestões finais.
- À Coordenação do mestrado em matemática na UFV juntamente com todos os professores do programa.
- Aos meus colegas de curso, Vinícius, Tatiana, Lillian, João, Poliana, Luciano, Diogo, Marcos e todos que participaram diretamente ou indiretamente desta minha caminhada na UFV.
- À CAPES pelo suporte financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Sumário

1	Agradecimentos	iii
	Resumo	vi
	Abstract	vii
	Introdução	1
2	Problema elíptico semilinear sem potenciais singulares	3
2.1	Considerações iniciais	3
2.2	Resultado principal	4
2.3	Identidade de Pohožaev	7
2.3.1	Algumas consequências da identidade de Pohožaev . . .	11
2.4	Método de minimização com vínculo	14
2.5	Conclusão	24
3	Problema elíptico semilinear com um potencial singular	25
3.1	Espaço de Sobolev com peso	26
3.2	Identidade de Pohožaev e resultados de não existência	30
3.3	Resultados de existência	35

3.3.1	Teoremas principais	36
3.4	Prova dos Teoremas principais (Teoremas 3.16 e 3.17)	37
A	Apêndice	44
A.1	Espaços de funções	44
A.2	Lema de compacidade de Straus	45
A.3	Alguns lemas radiais	45
A.4	Simetrização de Schwartz	46
A.5	Alguns resultados importantes de integração	48
A.6	Alguns resultados importantes	49
	Referências Bibliográficas	52

Resumo

MARCIAL, Marcos Roberto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2010. **Problemas elípticos semilineares com potenciais singulares e ou não singulares.** Orientador: Olimpio Hiroshi Miyagaki. Co-orientadores: Paulo César Carrião e Sandro Vieira Romero.

Neste trabalho, estudamos duas classes de problemas elípticos modelado em domínios ilimitados. Primeiro trabalhamos com o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u = f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0,$$

onde assumiremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar. Provamos a existência de uma solução radial positiva, este resultado é devido a Berestycki-Lions [2]. Em segundo lugar, tratamos o problema

$$-\Delta u + V(|x|)u = f(u), \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}),$$

onde o potencial $V > 0$ é uma função mensurável e singular na origem. Provamos a existência de solução radial positiva. No caso onde f é ímpar, mostramos que o problema tem um número infinito de soluções radiais. Resultados de não existência para potenciais particulares também serão tratados. Estes resultados são devido a Badiale-Rolando [1].

Abstract

MARCIAL, Marcos Roberto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february 2010. **Elliptics semilineares problems with singular potentials or not singular.** Adviser: Olimpio Hiroshi Miyagaki. Co-Advisers: Paulo César Carrião and Sandro Vieira Romero.

In this work we studied two classes of elliptic problems modeled in a bounded domains. First of all we deal with the semilinear elliptic problem

$$-\Delta u = f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0,$$

where we always assume that $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is an odd and continuous functions. We proved the existence of positive radial solution wich is result due to Berestycki-Lions [2]. Secondly, treated the problem

$$-\Delta u + V(|x|)u = f(u), \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$$

where the potencial $V > 0$ is mensurable and singular at the origin. We proved the existence of positive radial solutions. If f odd, we showed that the problem has infinitely many radial solutions. Nonexistence results for one particular potenciales and nonlinearities are also given. These results are due to Badiale-Rolando [1].

Introdução

Trataremos neste trabalho de duas classes de problemas elípticos modelados em domínios ilimitados, onde provaremos resultados de existência quando o potencial é singular e não singular. Vale ressaltar que o primeiro resultado é devido a Berestycki-Lions [2], enquanto que o segundo resultado é devido a Badiale-Rolando em [1]

No primeiro capítulo, estudaremos o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P_0) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \quad N \geq 3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \neq 0, \end{cases}$$

onde $H^1(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev usual, Δ é o operador laplaciano, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar, (daí $g(0) = 0$), satisfazendo

$$(a_1) \quad -\infty < \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0^-} \frac{g(s)}{s} = -m \equiv g'(0) < 0,$$

$$(a_2) \quad -\infty \leq \limsup_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0, \quad l = \frac{N+2}{N-2}, \quad N \geq 3,$$

$$(a_3) \quad \text{existe } \tau > 0 \text{ tal que } G(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds > 0.$$

Este tipo de equação aparece, por exemplo, quando se procura “ondas solitárias” ou “ondas estacionárias” numa equação não linear de Klein-Gordon ou Schrödinger, respectivamente.

O problema (P_0) modelado em domínios limitados foi estudado respectivamente em [12, 13, 16]. Por outro lado Berestycki-Lions em [2] provaram que o problema (P_0) modelado em domínio ilimitado possui uma solução.

No segundo capítulo estudaremos o seguinte problema elíptico não linear com potenciais singulares:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = f(u) \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad N \geq 3, \end{cases}$$

onde o potencial $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ é uma função mensurável, a função não linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e V e f satisfazem :

- (V_α) existem $A, \alpha > 0$ tal que $V(s) \geq As^{-\alpha}$ para quase todo $s > 0$;
- (f_p) existem $M > 0$ e $p > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Novas hipóteses sobre V e f bem como as restrições sobre os expoentes α e p serão impostas mais a adiante veja (Por exemplo). Com respeito às propriedades de integrabilidade do potencial, assumiremos que V satisfaz:

$(V)_1$ $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo aberto limitado (a, b) , com $b > a > 0$.

Deixe-nos salientar que pressuposto (V_α) temos que V é singular na origem. Outras singularidades são permitidas por $(V)_1$.

Nosso objetivo é apresentar resultados de existência para o problema (P_1) , devido a Badiale-Rolando em [2]. O caso mais simples em que os pressupostos de nossos resultados estão satisfeitos é dada pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2} u \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad N \geq 3, \end{cases} \quad (1)$$

onde $A > 0$, $\alpha > 0$. Neste caso, exibiremos um resultado de não existência de soluções para este problema em particular. Terracine em [15] provou que o problema (P_1) possui uma solução quando $\alpha = 2$ e $p = 2^* = \frac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$. Além disso, neste trabalho o autor mostrou que o problema (1.1) não possui solução quando $\alpha = 2$ e $p \neq 2^*$, ou, $\alpha \neq 2$ e $p = 2^*$. Outro imponente trabalho que trata o problema (P_1) é devido a Badiale-Rolando [1], neste paper o autor mostra que o problema (P_1) possui solução quando $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2^\alpha, 2^*)$, onde $2^\alpha = \frac{2N}{N-2\alpha}$, $N \geq 3$.

Capítulo 1

Problema elíptico semilinear sem potenciais singulares

1.1 Considerações iniciais

Estudaremos neste capítulo um resultado de existência para o seguinte problema elíptico semilinear:

$$(P_0) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(u), & \text{em } \mathbb{R}^N, \ N \geq 3, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), & u \not\equiv 0, \end{cases}$$

onde assumiremos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar .

Problemas do tipo (P_0) surgem em diversos outros contextos da física (por exemplo, a aproximação clássica em mecânica estatística, falso vácuo na cosmologia, óptica não-linear, propagação de laser, etc).

O funcional $S(u)$ associado a (P_0) é definido por

$$S(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx, \quad (1.1)$$

onde $G(s) = \int_0^s g(t) dt$. O funcional $S(u)$ é também chamado de “ação” associado com (P_0) (quando (P_0) é olhada como uma equação no espaço euclidiano).

Existem estudos importantes e bem conhecidos na literatura sobre problemas elípticos semilineares com valor de fronteira modelados em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$. Evidentemente, um forte contraste entre os problemas elípticos com fronteira definida em domínio limitado e problemas elípticos cuja condição de fronteira é um domínio não limitado é a falta de compacidade da imersão de Sobolev. Isso acarreta grandes dificuldades no caso do segundo problema para pesquisadores que trabalham em domínios ilimitados.

Uma primeira abordagem natural ao tratar o problema (P_0) seria a aproximação da solução de (P_0) pela solução de um problema análogo na bola $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$, isto é, primeiramente resolve-se o problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R = g(u_R) & \text{em } B_R \\ u_R|_{\partial B_R} = 0 \end{cases}.$$

Uma das dificuldades enfrentadas a priori é a ausência de limites, (isto é, a solução independente de R). Este método, desenvolvida em [16], exige algumas restrições de natureza técnica sobre o termo não-linear g . Neste trabalho usaremos uma construção apropriada cuja finalidade é obtermos imersões compactas. Esta restrição pode ser transparente por causa de entes "autônomos" de (P_0) e a possibilidade de utilizar uma mudança de variável em $\mathbb{R}^N$. O fato de que g é "autônomo" (isto é, depende apenas de u), e do operador ser o Laplaciano (ou operador elíptico com coeficientes constantes) constituem as principais restrições sobre o método que será apresentado.

Uma característica especial de (P_0) é a sua invariância sobre o grupo de translação e rotação, ou seja, se $\mathfrak{R}$ é uma rotação em $\mathbb{R}^N$ e $C \in \mathbb{R}^N$ é um vetor fixo, então para qualquer solução u de (P_0) a função v definida por $v(x) = u(\mathfrak{R}x + C)$ é também a solução de (P_0) . Tal indeterminação não estará presente no que se segue, uma vez que nosso objetivo é procurar soluções radiais de (P_0) , isto é, solução u com simetria esférica, u depende apenas de $|x|$. Tais soluções também são chamadas de "particle-like".

1.2 Resultado principal

Presumiremos no nosso trabalho que a dimensão do espaço é $N \geq 3$. Sabemos que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, ímpar, logo $g(0) = 0$. Suponha ainda que a função g satisfaz as seguintes condições:

$$(a_1) \quad -\infty < \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s \rightarrow 0^-} \frac{g(s)}{s} = -m \equiv g'(0) < 0,$$

$$(a_2) \quad -\infty \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s^l} \leq 0, l = \frac{N+2}{N-2}, N \geq 3,$$

$$(a_3) \quad \text{existe } \tau > 0 \text{ tal que } G(\tau) = \int_0^\tau g(s)ds > 0.$$

O resultado principal deste capítulo é:

Teorema 1.1 (Berestycki-Lions) *Suponha $N \geq 3$ e que g satisfaz $(a_1) - (a_3)$. Então (P_0) possui uma solução u tal que:*

i) $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

ii) u é esfericamente simétrica: $u(x) = u(r)$, onde $r = |x|$ e u decresce com respeito a r .

iii) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

iv) u junto com suas derivadas a menos de ordem 2 tem decaimento exponencial no infinito

$$|D^\alpha(u(x))| \leq C e^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

para algum C , $\delta > 0$ e para $|\alpha| \leq 2$.

Para provarmos este teorema utilizaremos o método de minimização com vínculo que será detalhado mais à frente seção 1.4. Na verdade construiremos um outro problema cuja solução satisfaz (P_0) e mostraremos que a solução do referido problema verifica as condições (i) – (iv) do teorema 2.1

Passemos agora a alguns exemplos mais simples onde se aplica o teorema (2.1).

Exemplo 1.2 *Considere a equação*

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda|u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde λ e m são constantes positivas e $p > 1$.

Esta equação foi estudada por S. Pohožaev em [11]. Neste trabalho o autor mostrou que (2.2) possui uma solução se e somente se $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e não possui solução se $p \geq \frac{N+2}{N-2}$. Note que se $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, as condições $(a_1) - (a_3)$ são trivialmente satisfeitas e se $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ o resultado de não-existência segue da identidade de Pohožaev a qual será apresentada na próxima seção.

O método de Pohožaev para resolver o problema (2.2) consiste em maximizar

$$\frac{\lambda}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx$$

sobre o conjunto

$$\left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 1 \right\}$$

Este vínculo faz com que apareça um multiplicador de Lagrange θ e através do qual obtemos uma solução positiva de

$$-\Delta u + mu = \lambda \theta u^p.$$

Mostraremos que o multiplicador de lagrange θ é positivo, e pode ser removido olhando para a solução $v = \sigma u$, $\sigma > 0$. O problema foi também estudado por Berger [3, 4] e por Coffman [6], mostrando que ela possui infinitas soluções distintas usando a mesma homogeneidade especial de (2.2).

Exemplo 1.3

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-1}u - \mu |u|^{q-1}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0 \end{cases}, \quad (1.3)$$

onde λ, μ e m são constantes positivas e $1 < p, q$.

Aqui as hipóteses do Teorema 2.1 são reduzidas para $1 < p < \max(\frac{N+2}{N-2}, q)$ e existência de $\tau > 0$ tal que

$$G(\tau) = \frac{\lambda}{p+1} \tau^{p+1} - \frac{\mu}{q+1} \tau^{q+1} - \frac{m}{2} \tau^2 > 0.$$

A segunda condição (a_2) é automaticamente verificada se $1 < q < p < l$. De fato, note que neste caso

$$g(u) = \lambda |u|^{p-1}u - \mu |u|^{q-1}u - mu,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s^l} = \frac{\lambda s^p - \mu s^q - ms}{s^l} = 0.$$

Portanto o Teorema 2.1 se aplica para $1 < q < p < \frac{N+2}{N-2} = l$. Strauss em [13] mostrou a existência de um número infinito de soluções do problema (2.3). O caso em que $q \leq \frac{N+2}{N-2} \leq p$ será tratado na próxima seção, onde provaremos a não existência de soluções não triviais para (2.3), utilizando a identidade de Pohožaev.

Finalmente quando $p < q$, o teorema 2.1 se aplica se existir $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$. Utilizando a identidade de Pohožaev pode-se mostrar que (2.3) não tem solução se $G(\tau) < 0 \forall \tau > 0$. Assim a condição (a_3) é necessária e suficiente.

1.3 Identidade de Pohožaev

Se u é solução do problema (P_0) , então u juntamente com suas derivadas suficientemente pequenas no infinito necessariamente satisfazem

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx \quad (1.4)$$

onde G sempre denotará a função $G(\tau) = \int_0^\tau g(s) ds$. A equação (2.4) é chamada identidade de Pohožaev. Antes de ser mais preciso, vamos dar um argumento formal explicitando (2.4). Defina dois funcionais

$$T(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx.$$

(Por analogia $\frac{1}{2}T(u)$ corresponde a energia cinética, enquanto que $V(u)$ corresponde a energia potencial. Assim $S(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u)$).

Considere agora a seguinte mudança de variável em $\mathbb{R}^N$: para $\sigma > 0$ defina $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$. Através de um simples cálculo nós obtemos que:

$$T(u_\sigma) = \sigma^{N-2}T(u), \quad V(u_\sigma) = \sigma^N V(u).$$

Assim $S(u_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2}T(u) - \sigma^N V(u)$. Daí se u é solução de (2.1), pelo menos informalmente podemos interpretá-la como um ponto crítico do funcional S . Deste modo temos $\frac{d}{d\sigma}S(u_\sigma)_{\sigma=1} = 0$ o qual é precisamente (2.4).

O procedimento argumentado acima não é rigoroso, por duas razões pelo menos, em primeiro lugar necessitamos saber se $S \in C^1$ sobre o espaço onde está definido e precisamos mostrar que $\frac{d}{d\sigma}u_\sigma(x)|_{\sigma=1} = -\nabla u(x).x$ está bem definida.

Lema 1.4 (*Identidade de Pohožaev*)

Seja Ω um aberto de classe C^1 , $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua onde

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds \text{ e } u \in H_0^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\overline{\Omega})$$

é uma função satisfazendo

$$-\Delta u = g(u) \quad (1.5)$$

no sentido “fraco”. Se além disso $G(u) \in L^1(\Omega)$ e $\eta(\sigma)$ designa o vetor normal exterior à $\partial\Omega$, então para todo $z^* \in \mathbb{R}^N$ fixo, u satisfaz a identidade

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \cdot \eta(\sigma) d\sigma = N \int_{\Omega} G(u(x)) dx. \quad (1.6)$$

Em particular se $\Omega = \mathbb{R}^N$, para $1 \leq j \leq N$ temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial_j u(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\partial_1 u(x)|^2 dx, \\ (N-2) \int_{\Omega} |\partial_j u(x)|^2 dx &= 2 \int_{\Omega} G(u(x)) dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx. \quad (1.7)$$

Demonstração: Seja ϕ_0 uma função de classe C^∞ sobre $[0, \infty)$ tal que

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Para $j \geq 1$ tome $\phi_j(x) := \phi_0(\frac{|x|}{j})$. Daí

$$\nabla \phi_j(x) \stackrel{\text{R. cadeia}}{=} \phi_0' \left(\frac{|x|}{j} \right) \cdot \left(\frac{x_1}{j|x|}, \dots, \frac{x_N}{j|x|} \right) = \frac{1}{j|x|} \phi_0' \left(\frac{|x|}{j} \right) \cdot x$$

Logo $\|\nabla \phi_j(x)\| \leq c$ independe de j e

$$|x| |\nabla \phi_j(x)| \leq \frac{|x|}{j} \phi_0' \left(\frac{|x|}{j} \right) \leq C \|\phi_0'\|_\infty$$

Para cada i fixo, multipliquemos os dois membros de (2.5) por $(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)$. Agora, usando o fato de $\partial_i G(u(x)) = g(u(x))\partial_i u(x)$ e em seguida integrando por partes o lado direito da equação obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)dx &= \int_{\Omega} (x_i - z_i^*)\phi_j(x)\partial_i G(u(x))dx \\
&= - \int_{\Omega} (\phi_j(x) + (x_i - z_i^*)\partial\phi_j(x))G(u(x))dx + \\
&\quad \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*)\phi_j(\sigma)G(u(\sigma))\eta(\sigma)d\sigma \\
&= - \int_{\Omega} (\phi_j(x) + (x_i - z_i^*)\partial\phi_j(x))G(u(x))dx,
\end{aligned}$$

e por passagem ao limite onde utilizamos o Teorema da Convergência Dominada e o fato de $\partial_i\phi_j(x)$ tender a zero quando $j \rightarrow \infty$, nós obtemos:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u(x))(x_i - z_i^*)\partial_i u(x)\phi_j(x)dx = - \int_{\Omega} G(u(x))dx. \quad (1.8)$$

Para resolver a outra parte usaremos a identidade

$$v\Delta u = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v \quad \text{válida em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \quad (1.9)$$

e em seguida aplica-se o Teorema da Divergência.

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot (x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \phi_j(x) dx = \\
& - \int_{\Omega} \operatorname{div}[(x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \phi_j(x) \nabla u(x)] dx + \int_{\Omega} \nabla((x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \phi_j(x)) \cdot \nabla u(x) dx = \\
& - \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*) \partial_i u(\sigma) \phi_j(\sigma) \nabla u(\sigma) \eta(\sigma) d\sigma + \int_{\Omega} e_i \partial_i u(x) \phi_j(x) \cdot \nabla u(x) dx + \\
& \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \nabla(\partial_j u(x) \phi_j(x)) \cdot \nabla u(x) dx = \\
& H(\sigma) + \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \phi_j(x) dx + \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \nabla(\partial_i u(x)) \phi_j \cdot \nabla u(x) dx + \\
& \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \nabla \phi_j(x) \cdot \nabla u(x) dx = \\
& H(\sigma) + \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \phi_j(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \phi_j(x) \partial_j[|\nabla u(x)|^2] dx + \\
& \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx = \\
& H(\sigma) + E_{1j} + E_{2j} + E_{3j}.
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
H(\sigma) &= - \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*) \partial_i u(\sigma) \phi_j(\sigma) \nabla u(\sigma) \eta(\sigma) d\sigma, \\
E_{1j} &= \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 \phi_j(x) dx, \\
E_{2j} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \phi_j(x) \partial_j[|\nabla u(x)|^2] dx
\end{aligned}$$

e

$$E_{3j} = \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \partial_i u(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx$$

Quando $j \rightarrow \infty$, $E_{3j} \rightarrow 0$ e $E_{1j} \rightarrow \int_{\Omega} |\partial_i u(x)|^2 dx$, pois $\phi_j = 1$ e $\nabla \phi_j \rightarrow 0$. Agora quanto a E_{2j} , utilizamos integração por partes.

$$\begin{aligned}
E_{2j} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \partial_i [|\nabla u(x)|^2] dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \phi_j - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (x_i - z_i^*) \partial_i \phi_j(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \phi_j(\sigma) \eta_i(\sigma) d\sigma.
\end{aligned}$$

Quando $j \rightarrow \infty$

$$E_{2j} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \eta_i(\sigma) d\sigma.$$

Finalmente usando as relações acima, temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 (\sigma_i - z_i^*) \eta_i(\sigma) d\sigma - \int_{\partial\Omega} (\sigma_i - z_i^*) \partial_i u(\sigma) \nabla u(\sigma) \cdot \eta(\sigma) d\sigma = \\
& \quad - \int_{\Omega} G(u(x)) dx.
\end{aligned}$$

Como isso vale para cada $i = 1, \dots, N$ e o gradiente $\nabla u(\sigma)$ é paralelo a $\eta(\sigma)$, temos

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(\sigma)|^2 (\sigma - z^*) \cdot \eta(\sigma) d\sigma = N \int_{\Omega} G(u(x)) dx.$$

Agora, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, então $\partial\Omega = \emptyset$, logo

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x)) dx$$

e

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \|\partial_1 u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, N.$$

□

1.3.1 Algumas consequências da identidade de Pohožaev

Mostraremos a seguir que as condições $(a_1) - (a_3)$ são “quase” necessárias para a existência de uma solução do problema (P_0) .

- (a) A hipótese (a_3) é uma condição necessária, visto que se u é solução de (P_0) , então segue da identidade de Pohožaev que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx > 0$$

- (b) Para justificar a hipótese (a_2) , consideremos um caso de potência pura, a equação (2.2) vista no exemplo 2.2 da seção 1.1, por exemplo. Note que neste exemplo temos

$$g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - mu, \quad \lambda, m > 0.$$

Se u satisfaz a equação (2.2), então multiplicando por u e integrando em $\mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)u dx.$$

Por outro lado segue da identidade de Pohožaev (ver equação (2.7)) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u)u dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx$$

daí

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - mu)u dx = \frac{2N}{N-2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda|u|^{p+1}}{p+1} - \frac{mu^2}{2} \right) dx \right]$$

ou seja,

$$\lambda \left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx = \frac{m}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx > 0.$$

Como λ e m são constantes positivas temos que

$$\frac{1}{p+1} > \frac{N-2}{2N}, \quad \text{isto é} \quad p < \frac{N+2}{N-2} = l.$$

Portanto (2.2) não possui solução quando $p \geq l$, como comentamos na seção 1.2. Por outro lado, sabemos da literatura [13, 4, 11] que quando $p < l$ (2.2) admite infinitas soluções radiais. Deste exemplo, vemos que a hipótese (a_2) é necessária onde $l = \frac{N+2}{N-2}$ é denominado “expoente crítico”.

- (c) Consideraremos agora a hipótese (a_1) . Afirmamos que (a_1) é “quase” necessária no sentido de que se $g'(0) > 0$, então (P_0) não tem solução radial. Sabemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é esfericamente simétrica, então por um resultado de Strauss [13] (Ver apêndice, lema A.4) existe uma constante C dependendo apenas da dimensão do espaço, no caso N , tal que

$$u(x) \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|x\|^{-\frac{N-1}{2}},$$

na verdade temos $|u(x)| = o(|x|^{-\frac{N-1}{2}})$ quando $|x| \rightarrow +\infty$. Aqui $f(x) = o(|h|)$ quando $|x| \rightarrow \infty$ se $\lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{f(h)}{|h|} = 0$.

Sejam $m = g'(0) > 0$ e $q(r) = m - \frac{g(u(r))}{u(r)}$. Considerando o caso $N = 3$ e assumindo $g \in C^2$ numa vizinhança de 0, temos que $q(r) = o(r^{-1})$. De fato

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + g'(0)s + g''(0)\frac{s^2}{2} \\ &= ms + g''(0)\frac{s^2}{2}. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{g(u(r))}{u(r)} &= m \frac{u(r)}{u(r)} + g''(0) \frac{u(r)^2}{2u(r)} \\ &= m + g''(0) \frac{u(r)}{2}, \end{aligned}$$

logo $\frac{q(r)}{r} = -g''(0)\frac{u(r)}{2r}$, enquanto que u satisfaz a equação linear

$$-\Delta u + q(r)u = mu \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

mas isto é impossível, pois viola um resultado de Kato [10] o qual diz que o operador linear de Schrödinger $-\Delta + q(r)$ não possui autovalores positivos associados à auto-funções em $L^2(\mathbb{R}^3)$ sob a condição de que $q(r) = o(r^{-1})$.

(d) Uma outra consequência da identidade de Pohožaev é o seguinte corolário:

Corolário 1.5 *Se u é uma solução qualquer de (P_0) , então*

$$S(u) = \frac{1}{N}T(u) > 0.$$

Demonstração:

$$S(u) = \frac{1}{2}T(u) - V(u),$$

Segue do lema 2.4 que

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx$$

daí,

$$V(u) = \frac{N-2}{2N}T(u),$$

logo

$$S(u) = \frac{1}{2}T(u) - \frac{N-2}{2N}T(u) = \frac{1}{N}T(u) > 0.$$

Com intuito de mostrar uma situação onde a equação (2.3) não admite solução não trivial, vamos retornar ao exemplo 2.3,

$$\begin{cases} -\Delta u + mu = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad u \not\equiv 0 \end{cases}.$$

Da identidade de Pohožaev é facil ver que se $q \leq \frac{N+2}{N-2} \leq p$ a equação acima não possui nenhuma solução não trivial. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu)u dx.$$

Por outro lado, segue da identidade de Pohožaev que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx, \quad G(u) = \int_0^u g(s) ds$$

onde $g(u) = \lambda|u|^{p-1}u - \mu|u|^{q-1}u - mu$. Daí segue que

$$\frac{2N}{N-2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\lambda}{p+1} |u|^{p+1} - \frac{\mu}{q+1} |u|^{q+1} - \frac{m}{2} u^2 \right) dx \right] = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda|u|^{p+1} - \mu|u|^{q+1} - mu^2) dx,$$

ou seja,

$$\lambda \left(\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx + \mu \left(-\frac{1}{q+1} + \frac{N-2}{2N} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} dx = \frac{m}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 > 0.$$

Como $\frac{1}{p+1} - \frac{N-2}{2N} > 0$ e $-\frac{1}{q+1} + \frac{N-2}{2N} > 0$, então $p < \frac{N+2}{N-2} = l$ e $q > \frac{N+2}{N-2}$. Portanto, se $q \leq \frac{N+2}{N-2} \leq p$ conclui-se que a equação (2.3) não admite solução não trivial como já havíamos afirmado anteriormente.

1.4 Método de minimização com vínculo

Um método natural para resolver (P_0) seria olhar diretamente para o ponto crítico do funcional S no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nosso objetivo é modificar g

de modo que o funcional S seja de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, para isso usaremos Teorema A.7 .

A primeira dificuldade que enfrentamos ao atacar o problema, é o fato de S não ser limitado superiormente, nem inferiormente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, a ilimitação superior se dá devido a presença do termo gradiente, pois se designarmos por (e_n) uma base ortogonal para $H^1(\mathbb{R}^N)$, como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla e_n|^2 dx = \|e_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = 1,$$

segue que, dado $t > 0$ e n fixo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(te_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla te_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(te_n) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} G(te_n) dx \rightarrow +\infty,$$

pois $\int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx \stackrel{(a_2)}{\leq} C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{l+1} dx < \infty$. Portanto segue que o funcional S não é limitado superiormente. Para mostrar que S não é limitado inferiormente vamos utilizar a hipótese (a_3) e a mudança de variável da seção 3.1. De (a_3) temos que existe $w \in H_1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx > 0.$$

Esta afirmação será devidamente justificada na demonstração do próximo teorema (2.6). Utilizando a mudança de variável da seção 1.3, isto é, $w_\sigma(x) = w(\frac{x}{\sigma})$, temos

$$S(w_\sigma) = \frac{\sigma^{N-2}}{2} T(w) - \sigma^N V(w).$$

Como $V(w) > 0$, segue que $S(w_\sigma) \rightarrow -\infty$ quando $\sigma \rightarrow +\infty$ como queríamos.

Outra dificuldade está no fato de S não satisfazer condições do tipo (PS^-) ou (PS^+) , isso é pelo fato de estarmos em $\mathbb{R}^N$, então possivelmente a afirmação acima pode ocorrer, mas sob algumas condições à frente tal compacidade será resgatada.

Antes de olharmos para o ponto crítico do funcional S , consideremos o problema de minimização com vínculo. Inicialmente precisamos modificar a função g de modo que V seja de classe um funcional de C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Vamos definir a nova função $\tilde{g}$ como segue:

Seja τ um número real fixo, defina

(i) $\tilde{g} =: g(s)$ Se $g(s) \geq 0$ para todo $s \geq \tau$;
e

(ii) se existir $s_0 \geq \tau$ tal que $g(s_0) = 0$, defina

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} g(s), & \text{em } [0, s_0] \\ 0 & \text{para } s \geq s_0. \end{cases}$$

Para $s \leq 0$, $\tilde{g}$ é definida (como g) por $\tilde{g}(s) = -g(-s)$. Primeiramente podemos observar que $\tilde{g}$ satisfaz as condições $(a_1) - (a_3)$. Além disso, segue do princípio do máximo que soluções do problema (P_0) com $\tilde{g}$ são também soluções de (P_0) com g . Sabemos do caso (ii) acima que uma solução u com $\tilde{g}$ satisfaz $|u| < s_0$, então $\tilde{g}(u) = g(u)$. Logo não há perda de generalidade em substituir $\tilde{g}$ por g . Doravante vamos sempre adotar por convenção que foi substituído g por $\tilde{g}$, e no entanto manteremos a mesma notação g .

Com estas modificações, g satisfaz uma condição mais fraca

$$(a_2)_{bis} \quad \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{|g(s)|}{s^l} = 0 \text{ com } l = \frac{N+2}{N-2}.$$

Agora utilizando o teorema A.7 (ver apêndice) segue que $V(w) = \int_{\mathbb{R}^N} G(w) dx$ está bem definido e é de classe C^1 no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos então o seguinte problema com vínculo:

$$\text{minimize} \{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}. \quad (1.10)$$

Note que o problema (2.10) conduz a solução de (P_0) . Sabemos que se u resolve (2.10), então como T e V são de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema de Multiplicadores de Lagrange existe um multiplicador de lagrange θ tal que $T'(u) = \theta V'(u)$, isto é, (pelo menos no sentido de distribuição)

$$-\Delta u = \theta g(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \quad (1.11)$$

Vamos mostrar mais à frente que $\theta > 0$. Daí, tomando $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$, $\sigma > 0$; temos

$$-\Delta u_\sigma = \frac{\theta}{\sigma^2} g(u_\sigma) \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Logo escolhendo $\sigma = \sqrt{\theta}$ temos a solução de (P_0) .

Teorema 1.6 *Sob as mesmas hipóteses do teorema 2.1 o problema de minimização (2.10) possui uma solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a qual é positiva, esfericamente simétrica e decrescente com $r = |x|$. Além disso, existe um multiplicador de Lagrange $\theta > 0$ tal que u satisfaz (2.11). Assim u_σ , para $\sigma = \sqrt{\theta}$ é uma solução de (P_0) .*

Demonstração: Dividiremos a demonstração do teorema em 5 etapas enumeradas a seguir:

1. O conjunto $\{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}$ é não vazio.
2. Selecionar uma sequência minimizante adequada.
3. Estimar *a priori* a sequência minimizante.
4. Passagem ao limite.
5. Conclusão.

Primeira etapa :

Mostraremos que o conjunto $\{w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\}$ é não vazio. Note que este é o único lugar onde a hipótese (a_3) é usada.

Seja $\tau > 0$ tal que $G(\tau) > 0$. Para $R > 1$ defina a seguinte função:

$$w_R(x) = \begin{cases} \tau & \text{para } |x| < R \\ \tau(R+1-r) & \text{para, } r = |x| \in [R, R+1] \\ 0 & \text{para } |x| > R+1. \end{cases}$$

Como $w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla w_R \in L^2(\mathbb{R}^N)$, então $w_R \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Agora usando $|\cdot|$ para denotar a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^N$, verifica-se que

$$V(w_R) \geq G(s)|B_R| - |B_{R+1} - B_R| \left(\max_{s \in [0,1]} |G(s)| \right).$$

Então, existem constantes $C, C' > 0$ tais que $V(w_R) \geq CR^N - C'R^{N-1}$ para $R > 0$ suficientemente grande. Isto mostra que $V(w_R) > 0$ para algum $R > 0$ fixo. Então fazendo um mudança de variável em w_R , $w_{R,\sigma}(x) = w_R(\frac{x}{\sigma})$, temos que:

$$V(w_{R,\sigma}) = \sigma^N V(w_R).$$

Então para um $\sigma > 0$ apropriado obtemos $V(w_{R,\sigma}) = 1$.

Segunda etapa :

Selecione uma sequência minimizante adequada. Da etapa acima, mais a definição de ínfimo segue que existe uma sequência $u_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $V(u_n) = 1$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = I \equiv \inf \{T(w); w \in H^1(\mathbb{R}^N), V(w) = 1\} \geq 0.$$

Seja u_n^* denotando um rearranjo esférico de Schwartz de $|u_n|$ (a definição e algumas propriedades da simetrização de Schwartz serão descritas no apêndice, seção A.4). Temos que $u_n^* \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $V(u_n^*) = 1$, e $I \leq T(u_n^*) \leq T(u_n)$. Isto significa que (u_n^*) é também uma sequência minimizante. Substituindo (u_n) por (u_n^*) , assumiremos de agora em diante que, para todo n u_n é não negativa, esfericamente simétrica e não crescente com $r = |x|$.

Terceira etapa :

Faremos uma estimativa para (u_n) , isto é, mostraremos que $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Para $s \geq 0$ defina $g_1(s) = (g(s) + ms)^+$ e $g_2(s) = g_1(s) - g(s)$ (aqui $a^+ = \max(a, 0)$, parte positiva de a). Estendendo g_1 e g_2 como funções ímpares para $s \leq 0$ temos que $g = g_1 - g_2$ com $g_1, g_2 \geq 0$, e mais

$$g_1(s) = o(s), \text{ quando } s \rightarrow 0; \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = 0, \text{ onde } l = \frac{N+2}{N-2} \quad (1.12)$$

e

$$g_2(s) \geq ms, \quad \forall s \geq 0 \quad (1.13)$$

De fato,

se $g(s) + ms \leq 0$, (2.12) é imediata, pois $g_1 \equiv 0$. Agora se $g(s) + ms > 0$, com $s > 0$ então $g_1(s) = g(s) + ms$, daí

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_1(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s) + ms}{s} = -m + m = 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g_1(s)}{s^l} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s) + ms}{s^l} = 0.$$

Portanto 2.12 se verifica. O caso $s \leq 0$ é análogo.

Quanto a (2.13), temos que se

$$g(s) \leq 0, \quad s \geq 0 \Rightarrow$$

$$g_1(s) = ms \Rightarrow g_2(s) = ms - g(s) \leq ms,$$

agora se $g(s) > 0 \Rightarrow g_2(s) = ms$, portanto $g_2(s) \geq ms$, para todo $s \geq 0$.

Seja $G_i(z) = \int_0^z g_i(s) ds$, $i = 1, 2, \dots$. Segue de (2.12), (2.13) que para qualquer $\epsilon > 0$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$G_1(s) \leq C_\epsilon |s|^{l+1} + \epsilon G_2(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Agora como $T(u_n) \rightarrow I$, então a sequência $\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Segue-se do teorema de imersões de Sobolev (Ver apêndice A.2) $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N))$, que $\|u_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C$, onde $2^* = l + 1 = \frac{2N}{N-2}$ (aqui a constante C é positiva e independente n).

Escrevendo $V(u_n) = 1$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n) dx + 1. \quad (1.15)$$

Agora tomando $\epsilon = \frac{1}{2}$ em (2.14) e usando (2.15), temos $\int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n) dx \leq C$. Logo por (2.13) segue-se que

$$\frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u_n) \leq C.$$

Assim, pelo que obtemos acima, $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ é limitada. Daí segue-se da imersão contínua $H^1 \hookrightarrow L^p$ que

$$\|u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \quad \text{para qualquer } 2 \leq p \leq 2^*.$$

4° etapa:

Passagem ao limite. Inicialmente observemos que $u_n(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$ uniformemente com respeito a n . De fato, sabemos das duas últimas etapas que u_n é radial, não crescente e limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Daí segue-se do lema radial A.6 (ver apêndice) que $|u_n(x)| \leq C|x|^{-\frac{N}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^N$, com C independente de n . Agora como u_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ podemos extrair uma subsequência de u_n , novamente denotada por u_n , tal que u_n converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e quase sempre em $\mathbb{R}^N$ para a função $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Observe que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é esfericamente simétrica e não crescente com r .

Agora, seja $Q(s) = s^2 + |s|^{l+1}$, usando (2.12), obtemos

$$\frac{G_1(s)}{Q(s)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow \infty \quad \text{e quando } s \rightarrow 0. \quad (1.16)$$

Sabemos também que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n) dx < +\infty, \quad (1.17)$$

$$G_1(u_n) \rightarrow G_1(u) \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N \quad (1.18)$$

$$u_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow +\infty, \quad \text{uniformemente com respeito a } n. \quad (1.19)$$

Por (2.16)-(2.19) o lema de compacidade de Strauss (ver apêndice, Teorema A.3) nos garante:

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G_1(u) dx \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Do Lema de Fatou's (ver apêndice lema A.11) na equação (2.15) deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_1(u) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} G_2(u) dx + 1,$$

isto é, $V(u) \geq 1$. Por outro lado, também sabemos que

$$T(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} T(u_n) = I$$

(ver apêndice, Corolário A.14).

Suponha agora por contradição que $V(u) > 1$. Então, usando a mudança de variável $u_\sigma(x) = u(\frac{x}{\sigma})$, obtemos que $V(u_\sigma) = \sigma^N V(u) = 1$ para algum σ , $0 < \sigma < 1$. Também temos $T(u_\sigma) = \sigma^{N-2} T(u) \leq \sigma^{N-2} I$. Pela definição de I , $T(u_\sigma) \geq I$. Mas isto implicaria em $I = 0$, ou seja, $T(u) = 0$, logo $u = 0$ (u não pode ser uma constante não nula por causa de seu decaimento), contradizendo $V(u) > 1$. Portanto $V(u) = 1$ e $T(u) = I > 0$; disto, u é solução do problema de minimização (2.10).

5° etapa:(conclusão)

Como T e V são de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (Ver apêndice teorema A.8), existe um multiplicador de Lagrange θ tal que $\frac{1}{2}T'(u) = \theta V'(u)$. Primeiramente observemos que $\theta \neq 0$. De fato, se fosse $\theta = 0$ teríamos $u = 0$ que é impossível.

Vamos supor então que $\theta < 0$. Observe que $V'(u) \neq 0$ ($V'(u) = 0$ daria $g(u) \equiv 0$, o que implica em $u \equiv 0$ pois $g(s) \neq 0$ para $s > 0$ pequeno, contradizendo assim o fato de $V(u) = 1$, resultado obtido na etapa anterior. Considere então a função $w \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle V'(u), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(u) w dx > 0.$$

Como $V(u + \epsilon W) \simeq V(u) + \epsilon \langle V'(u), w \rangle$ e

$$T(u + \epsilon w) \simeq T(u) + 2\epsilon \langle V'(u), w \rangle \quad \text{para} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \theta < 0.$$

podemos encontrar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $v = u + \epsilon w$ satisfaça $V(v) > V(u) = 1$ e $T(v) < T(u) = I$. Novamente por uma mudança de variável, existe $\sigma \in (0, 1)$ tal que $V(v_\sigma) = 1$ e $T(v_\sigma) < I$, pois I é ínfimo que é um absurdo. Portanto segue que $\theta > 0$.

Então u satisfaz, ao menos em H^1 , a equação

$$-\Delta u = \theta g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

e então $u(\cdot/\sqrt{\theta}) = u_{\sqrt{\theta}}$ é uma solução do problema (P_0) . $\square$

Lema 1.7 *Sob as condições $(a_1), (a_2)_{bis}$, se u é uma solução esfericamente simétrica de (P_0) , então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Note que u satisfaz a equação

$$-\Delta u = q(x)u \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1.20)$$

onde $q(x) = \frac{g(u(x))}{u(x)}$. Usando $(a_2)_{bis}$, temos

$$\left| q(u) \right| = \left| \frac{g(u)}{u} \right| \leq c|u|^{l-1} = c|u|^{\frac{4}{N-2}}.$$

Como $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos também que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ (Teorema de imersões de Sobolev). Notando que $2^* = \frac{4}{N-2} \cdot \frac{N}{2}$ e usando a estimativa acima vemos que $q \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$. Agora aplicando um resultado de Brezis & Kato ver [13], concluímos que $u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq p < \infty$. Usando um argumento clássico (na bola B_R) mostramos que $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então por uma estimativa em L^p temos que $u \in W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $p < +\infty$ e assim $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, com $\alpha \in (0, 1)$.

Como u satisfaz a equação (ver apêndice A.12)

$$-u_{rr} - \frac{N-1}{r}u_r = g(u), \quad r \in (0, +\infty), \quad (1.21)$$

nós já sabemos que u_{rr} é contínua, exceto possivelmente na origem 0. Vamos colocar $v(r) = g(u(r))$; v é contínua em $[0, +\infty)$. Reescrevendo (2.21) como

$$-\frac{d}{dr}(r^{N-1}u_r) = r^{N-1}v(r)$$

e integrando de 0 a r temos

$$r^{N-1}u_r = - \int_0^r s^{N-1}v(s)ds.$$

Com uma mudança de variável temos

$$u_r = -r \int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt$$

ou

$$\frac{u_r}{r} = - \int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt.$$

Como

$$\int_0^1 t^{N-1}v(rt)dt \rightarrow \frac{v(0)}{N} \quad \text{quando } r \rightarrow 0,$$

usando (2.21) deduzimos que $u_{rr}(0)$ existe e $u_{rr}(0) = \frac{v(0)}{N}$ quando $r \rightarrow 0$. Então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Observamos também que $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$ pelo princípio do máximo e que u é uma função decrescente de r , pois pelo princípio do máximo forte $u'(r) < 0$ para todo $r > 0$. $\square$

Lema 1.8 *Sob as condições $(a_1), (a_2 \text{ bis})$, se u é uma solução esfericamente simétrica de (P_0) , então*

$$|D^\alpha u(x)| \leq C e^{-\delta|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

para algum $C, \delta > 0$ e para $|\alpha| \leq 2$.

Demonstração: O decaimento exponencial no infinito segue de um argumento de um exercício de equação diferencial. Segue do lema 2.7 que u é de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$; por conseguinte satisfaz a equação (2.21). Fazendo $v = r^{\frac{(N-1)}{2}}u$; então v satisfaz

$$v_{rr} = \left[q(r) + \frac{b}{r^2} \right] v$$

onde $q(r) = -\frac{g(u(r))}{u(r)}$ e $b = \frac{(N-1)(N-3)}{4}$. Para r suficientemente grande, digamos $r \geq r_0$, temos

$$q(r) + \frac{b}{r^2} \geq \frac{m}{2}$$

(lembramos que $u(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$ pelo lema radial, ver apêndice).

Seja $w = v^2$; então w verifica

$$\frac{1}{2}w_{rr} = v_r^2 + \left[q(r) + \frac{b}{r^2} \right] w. \geq \left[q(r) + \frac{b}{r^2} \right] w.$$

Então para $r \geq r_0$ obtemos $w_{rr} \geq mw$ e $w \geq 0$.

Agora seja $z = e^{-\sqrt{mr}}(w_r + \sqrt{mw})$. Nós temos $z_r = e^{-\sqrt{mr}}(w_{rr} - mw) \geq 0$; então z é não decrescente em $(r_0, +\infty)$. Se existir $r_1 \geq r_0$ tal que $z(r_1) > 0$, então $z(r) \geq z(r_1) > 0$ para todo $r \geq r_1$. Isto implica que

$$w_r + \sqrt{mw} \geq (z(r_1))e^{\sqrt{mr}}, \quad \forall r \geq r_1,$$

onde $w_r + \sqrt{mw}$ não é integrável em $(r_1, +\infty)$. Mas v^2 e vv_t são integráveis próximo do ∞ para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, então w_r e w também são integráveis, uma contradição. Daí $z(r) \leq 0$ para $r \geq r_1$. Isto implica que

$$(e^{\sqrt{mr}}w)_r = e^{\sqrt{mr}}(\sqrt{mw} + w_r) = e^{2\sqrt{mr}}z \leq 0 \quad \text{para } r \geq r_1.$$

Então $w(r) \leq Ce^{-\sqrt{mr}}$, de fato, seja $f(r) = e^{\sqrt{mr}}w(r)$, $r \geq r_1$, como $(e^{\sqrt{mr}}w)_r \leq 0$, f é decrescente, ou seja, $f(r) \leq f(r_1) = C$. Portanto $e^{\sqrt{mr}}w(r) \leq C$, o que implica que $w(r) \leq Ce^{-\sqrt{mr}}$.

Como $w = v^2$ e $v = r^{\frac{(N-1)}{2}}u$, temos

$$|u(r)| \leq Cr^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{\sqrt{m}}{2}r} \quad \text{para } r \geq r_1, \quad (1.22)$$

para certas constantes positivas C e r_1 .

Para obtermos o decaimento exponencial de u_r , observe que u_r satisfaz

$$(r^{N-1}u_r)_r = -r^{N-1}g(u). \quad (1.23)$$

Então usando (a_1) e o decaimento exponencial de u é fácil ver que para r suficientemente grande, digamos $r \geq r_0$ nós temos

$$m_1|u| \leq |g(u)| \leq m_2|u|, \quad \text{onde } m_2 \geq m_1 > 0.$$

Daí integrando (2.23) em (r, R) , usando (2.22) e deixando $r, R \rightarrow +\infty$ mostramos que $r^{N-1}u_r$ tem um limite quando $r \rightarrow \infty$ e novamente por (2.22) esse limite só pode ser zero. Integrando (2.22) em $(r, +\infty)$ temos que u_r tem decaimento exponencial. Por fim o decaimento exponencial de u_{rr} (logo de $|D^\alpha u(x)|$ para $|\alpha| \leq 2$) segue imediatamente da equação (2.21). $\square$

1.5 Conclusão

Juntando os resultados, do Teorema 2.6, Lema 2.7 e Lema 2.8 provamos o resultado principal enunciado neste capítulo, o Teorema 2.1 devido a Berestycki-Lions em [2].

Capítulo 2

Problema elíptico semilinear com um potencial singular

Neste capítulo estudaremos o seguinte problema elíptico semilinear

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = f(u) \\ u \in D_1^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad N \geq 3 \end{cases}$$

onde o potencial $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ é uma função mensurável. A função não linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e V e f satisfazem as seguintes condições:

(V_α) existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq As^{-\alpha}$ para quase todo $s > 0$;

(f_p) existem $M > 0$ e $p > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$;

$(V)_1$ $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo aberto limitado (a, b) , com $b > a > 0$.

Provaremos um resultado de existência de uma solução radial e um resultado de existência de infinitas soluções radiais para o problema (P_1) e um resultado de não existência no caso em que V é um potencial particular dado por $V(s) = \frac{A}{|s|^\alpha}$ e f é tal que $f(u) = |u|^{p-2}u$ com $A, \alpha > 0$ e $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Estes resultados são devido a Badiale-Rolando em [1].

2.1 Espaço de Sobolev com peso

Seja $N \geq 3$ e assuma que $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ é uma função mensurável satisfazendo (V_α) e $(V)_1$.

Nosso objetivo é estudar o espaço de Sobolev X com peso V dado por:

$$X := X(\mathbb{R}^N; V) := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < +\infty \right\}. \quad (2.1)$$

Sabemos que o espaço de Sobolev

$$D^{1,2} := D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N) \}$$

equipado com a norma $\|u\|_{D^{1,2}} := \|\nabla u\|_{L^2}$ é um espaço de Hilbert, o qual pode ser visto como um completamento do espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação a norma $\|\cdot\|_{D^{1,2}}$. Lembremos que convergência fraca em $D^{1,2}$ implica em convergência pontual em $\mathbb{R}^N$ (a menos de subsequência quase sempre).

Como a convergência no espaço de Lebesgue com peso $L^2(\mathbb{R}^N; V(|x|)dx)$ implica em convergência pontual (a menos de subsequência e em quase todo ponto), o espaço $X = D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; V(|x|)dx)$ é um espaço de Hilbert com respeito a norma $\|u\|^2 := \langle u, u \rangle$ induzida pelo produto escalar

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(|x|)uv) dx \quad \text{para todo } u, v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

Note que a hipótese $(V)_1$ garante a inclusão $C_c^\infty(B_b \setminus \overline{B}_a) \subset X$. De fato, dado $u \in X$ $\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < \infty$. Com efeito, seja $u \in C_c^\infty(B_b \setminus \overline{B}_a)$, logo

$$\int_{B_b \setminus \overline{B}_a} V(|x|)u^2 dx \stackrel{u \in C_c^\infty(B_b \setminus \overline{B}_a)}{\leq} c \int_{B_b \setminus \overline{B}_a} V(|x|)dx \stackrel{(V)_1}{<} \infty.$$

Utilizando-se da imersão contínua $X \hookrightarrow D^{1,2}$, temos que convergência fraca em X implica em convergência pontual em $\mathbb{R}^N$ (a menos de subsequência e em quase todo ponto). Como uma consequência disso, o subespaço

$$X_r := X_r(\mathbb{R}; V) := \{ u \in X(\mathbb{R}^N; V) : u(x) = u(gx) \quad \text{para todo } g \in O(N) \},$$

onde $O(N)$ é o grupo ortogonal de $\mathbb{R}^N$ é não vazio por $(V)_1$ e fechado em X , portanto um espaço de Hilbert. De fato, que X_r é não vazio, é trivial, pois

a função identicamente nula está contida nele. Agora vamos mostrar que ele realmente é fechado.

De fato, seja $u_n \in C_c^\infty$, $u_n \in X_r$ tal que $u_n \xrightarrow{X_r} u$, onde $c = B_b \setminus \overline{B}_a$ para $0 < a < b$. Temos

$$\begin{array}{ccc} u_n(x) & = & u_n(gx) \\ \downarrow q.s. & & \downarrow q.s. \\ u(x) & = & u(gx) \end{array}$$

Da unicidade de limite segue que u é invariante por grupos ortogonais, ou seja, $u \in X_r$, e assim podemos concluir que X_r é fechado como queríamos.

Proposição 2.1 *A imersão $X_r(\mathbb{R}^N; V) \hookrightarrow L^{2^*_\alpha}(\mathbb{R}^N)$ é contínua, onde $2 + \frac{2\alpha}{N-2}$ para $\alpha \in (0, \infty)$.*

Demonstração: A prova desta afirmação segue do lema radial [2] combinado com (V_α) . O lema radial faz a seguinte estimativa

$$\forall u \in D_{rad}^{1,2}(\mathbb{R}^N; V) \quad |u(x)| \leq C_N \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} |x|^{-\frac{N-2}{2}} \quad \text{para quase todo } x \in \mathbb{R}^N \quad (2.2)$$

Dado $u \in X_r$, temos

$$\begin{aligned} |u(x)|^{2^*_\alpha} &= |u(x)|^2 |u(x)|^{\frac{2\alpha}{N-2}} \stackrel{(3.2)}{\leq} |u(x)|^2 C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2\alpha}{N-2}} |x|^{-\alpha} \\ &\stackrel{(V_\alpha)}{\leq} A^{-1} C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{2\alpha}{N-2}} V(|x|) |u(x)|^2 \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$, logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*_\alpha} dx \leq C (\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2)^{\frac{\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) u^2 dx \leq C \|u\|^{\frac{\alpha}{N-2}} \|u\|^2.$$

Portanto $\|u\|_{L^{2^*_\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|$. □

Corolário 2.2 *As imersões*

$$X_r(\mathbb{R}^N; V) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{para } 0 < \alpha < 2 \text{ e } p \in [2^*_\alpha, 2^*]. \quad (2.3)$$

e

$$X_r(\mathbb{R}^N; V) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{para } \alpha > 2 \text{ e } p \in [2^*, 2^*_\alpha]. \quad (2.4)$$

são contínuas.

Demonstração: Para mostrar (3.3) e (3.4) basta usarmos interpolação, proposição 3.1 e as desigualdades de Sobolev. $\square$

Proposição 2.3 *As imersões (3.3) e (3.4) são compactas para $p \neq 2^*, 2_\alpha^*$.*

Demonstração: Dada $u_n \in X_r$ uma sequência limitada temos para algum $u \in X_r$ $u_n \rightharpoonup u$ em X_r (a menos de subsequência precisamos mostrar que $u_n \rightarrow u$ em L^p). Para isso seja $P(s) = |s|^p$ e $Q(s) = |s|^{2^*} + |s|^{2_\alpha^*}$. É fácil ver que $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$. Então usando o lema de compacidade de Strauss Teorema A.3, concluímos que $u_n \xrightarrow{L^p} u$. Para isso devemos mostrar que as seguintes condições valem:

(i) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0$ uniformemente com respeito a n ;

(ii) $|u_n - u|^p \rightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$;

(iii) $\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n - u) dx < +\infty$.

Na verdade (i) segue do lema radial, estimativa apresentada em (3.3) mais o fato de $\{||\nabla(u_n - u)||_{L^2}\}$ ser limitado. Quanto à (ii), como $u_n \rightharpoonup u$ em X_r , segue que a menos de subsequência $u_n(x) \rightarrow u(x)$ pontualmente, isto é quase sempre em $\mathbb{R}^N$, daí $|u_n - u|^p \rightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Finalmente passemos agora para (iii). Como

$$\begin{aligned} \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q((u_n - u)(x)) dx &= \sup_n \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n - u|^{2^*} + |u_n - u|^{2_\alpha^*}) dx \\ &= ||u_n - u||_{L^{2_\alpha^*}}^{2_\alpha^*} + ||u_n - u||_{L^{2^*}}^{2^*} \end{aligned}$$

(iii) segue da das imersões contínuas (3.3) e (3.4) mais a limitação de $\{||u_n - u||\}$. $\square$

Proposição 2.4 *Se $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ então existe $C = C(N, \alpha, A) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \leq C ||u||^{2_\alpha^*-1} ||v|| \quad \text{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha}{2}} |u|^{2_\alpha^*-1} \frac{|v|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2_\alpha^*-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{v^2}{|x|^\alpha} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2_\alpha^*-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(A^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2_\alpha^*-1)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Agora escrevendo $2(2_\alpha^* - 1) = 2 + \frac{4\alpha}{N-2}$ e usando a estimativa (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |u|^{2(2_\alpha^*-1)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha} |x|^{2\alpha} |u|^{\frac{4\alpha}{N-2}} dx \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha} |x|^{2\alpha} |x|^{-\frac{N-2}{2} \frac{4\alpha}{N-2}} dx \\ &= C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx \leq A^{-1} C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\frac{4\alpha}{N-2}} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) u^2 dx \\ &= C \|u\|_{L^{\frac{4\alpha}{N-2}}(\mathbb{R}^N)}^2 \|u\|^2 = C \|u\|^{2(2_\alpha^*-1)}, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \leq C \|u\|^{2_\alpha^*-1} \|v\| \quad \text{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

□

Proposição 2.5 *Se $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ então existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \leq C \|u\|^{2_\alpha^*-1} \|v\| \quad \text{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Tome $s = 2^*$ e $s' = \frac{2^*}{2^*-1}$, daí usando a desigualdade de Hölder temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{2_\alpha^*-1})^{s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \right]^{2^*-1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq C \|u\|^{2_\alpha^*-1} \|v\|. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.6 *Se $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ então existe $C = C(N, \alpha, A)$ tal que para todo $p \in [2_\alpha^*, 2^*]$ ou $p \in [2^*, 2_\alpha^*]$, de acordo com a alternativa $\alpha \in (0, 2)$ ou $(2, +\infty)$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |v| dx \leq C \|u\|^{p-1} \|v\| \quad \text{para todo } v \in X(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração:

De fato, para $\lambda, \mu \in (0, 1)$ fixo tal que $p = \lambda 2_\alpha^* + \mu 2^*$ e $\lambda + \mu = 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |v| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\lambda(2_\alpha^*-1)+\mu(2^*-1)} |v|^\lambda |v|^\mu dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{2_\alpha^*-1} |v|)^\lambda (|u|^{2^*-1} |v|)^\mu dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2_\alpha^*-1} |v| dx \right)^\mu \\ &\leq C (||u||^{2_\alpha^*-1} ||v||)^\lambda (||u||^{2^*-1} ||v||)^\mu = C ||u||^{p-1} ||v|| \end{aligned}$$

□

2.2 Identidade de Pohožaev e resultados de não existência

Vamos provar um resultado de não existência para o problema (1.1), antes enunciaremos e provaremos dois lemas.

Lema 2.7 *Seja $A, \alpha > 0$ e $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Assuma também que $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é uma solução clássica para a equação*

$$-\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad N \geq 3. \quad (2.5)$$

Defina $F(s) := \int_0^s f(t) dt$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) dx < +\infty \quad (2.6)$$

então

$$\frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N-\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Au^2}{|x|^\alpha} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx. \quad (2.7)$$

Demonstração:

Primeiramente consideremos as seguintes identidades em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$:

$$i) \quad (x \cdot \nabla u) \Delta u = \operatorname{div} \left[(x \cdot \nabla u) \nabla u - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 x \right] + \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2;$$

$$ii) \quad (x \cdot \nabla u) \frac{Au}{|x|^\alpha} = \operatorname{div} \left[\frac{A}{2} \frac{u^2}{|x|^\alpha} x \right] - \frac{N - \alpha}{2} \frac{Au^2}{|x|^\alpha};$$

$$iii) \quad (x \cdot \nabla u) f(u) = \operatorname{div} \left[F(u) x \right] - NF(u).$$

Para $R_2 > R_1 > 0$, multiplicando (3.5) por $(x \cdot \nabla u)$ e aplicando o Teorema da Divergência no aberto $\Omega := \Omega_{R_1, R_2} := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$, nós temos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) (\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) x \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial\Omega} F(u) x \cdot \nu d\sigma \\ & = \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{N-\alpha}{2} \int_{\Omega} \frac{Au^2}{|x|^\alpha} dx - N \int_{\Omega} F(u) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ em x e $d\sigma$ é a $(N-1)$ -dimensional medida de $\partial\Omega$. Note que $\partial\Omega = \partial B_{R_1} \cup \partial B_{R_2}$ e

$$\left| \int_{\partial B_{R_i}} (x \cdot \nabla u) (\nabla u \cdot \nu) d\sigma \right| \leq R_i \int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^2 d\sigma \quad (2.9)$$

$$\left| \int_{\partial B_{R_i}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) x \cdot \nu d\sigma \right| = R_i \int_{\partial B_{R_i}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) d\sigma \quad (2.10)$$

$$\left| \int_{\partial B_{R_i}} F(u) x \cdot \nu d\sigma \right| \leq R_i \int_{\partial B_{R_i}} |F(u)| d\sigma \quad (2.11)$$

para $i = 1, 2$. Agora tomemos uma sequência $R_{1,n} \rightarrow 0$ com $R_{1,n} > 0$, tal que

$$R_{1,n} \int_{\partial B_{R_i}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) d\sigma \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

A existência de tal sequência se dá pelo fato da equação (3.7) ser limitada. De fato, mostremos a existência de tal sequência usando um argumento de contradição. Se fosse

$$\lambda := \liminf_{R_1 \rightarrow 0^+} R_1 \int_{\partial B_{R_1}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) d\sigma > 0$$

teríamos

$$\forall R_1 \in (0, \rho) \quad \int_{\partial B_{R_1}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) d\sigma > \frac{\lambda}{2R_1}$$

para algum $\rho > 0$, e disto tiramos que

$$\int_{B_\rho} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) dx = \int_0^\rho dR_1 \int_{\partial B_{R_1}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) d\sigma = +\infty$$

o que é uma contradição com a hipótese (3.6). Então recordando (3.9)-(3.11), de (3.12) deduzimos

$$- \int_{\partial B_{R_{1,n}}} (x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \int_{\partial B_{R_{1,n}}} \left[\frac{1}{2} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) - |F(u)| \right] x \cdot \nu d\sigma \rightarrow 0$$

de modo que avaliando (3.8) para $R_1 = R_{1,n}$ e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} - \int_{\partial B_{R_2}} (x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R_2}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) x \cdot \nu d\sigma - \int_{\partial B_{R_2}} F(u) x \cdot \nu d\sigma = \\ \frac{N-2}{2} \int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^2 dx + \frac{N-\alpha}{2} \int_{\partial B_{R_2}} \frac{Au^2}{|x|^\alpha} dx = N \int_{\partial B_{R_2}} F(u) dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Novamente prosseguindo com o mesmo argumento usado acima inferimos a existência de uma sequência $R_{2,n} \rightarrow +\infty$ tal que

$$R_{2,n} \int_{\partial B_{R_{2,n}}} \left(|\nabla u|^2 + \frac{u^2}{|x|^\alpha} + |F(u)| \right) d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Então usando novamente (3.9)-(3.11), (3.13) obtemos o resultado desejado. $\square$

Lema 2.8 *Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ uma solução clássica para a equação*

$$-\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2} u \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad N \geq 3. \quad (2.14)$$

Se $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; |x|^{-\alpha} dx) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx. \quad (2.15)$$

Demonstração:

Multiplicando (3.14) por u e usando a identidade $u\Delta u = \operatorname{div}[u\nabla u] - |\nabla u|^2$ em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ temos:

$$-\operatorname{div}[u\nabla u] + |\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} = |u|^p.$$

Agora aplicando o Teorema da Divergência no aberto $\Omega := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$, teremos

$$-\int_{\partial B_{R_1}} u(u \nabla u \cdot \nu) d\sigma - \int_{\partial B_{R_2}} u(\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) dx = \int_{\Omega} |u|^p dx$$

usando também o fato que $\nu(x) = -\frac{x}{R_1}$ em ∂B_{R_1} e $\nu(x) = \frac{x}{R_2}$ em ∂B_{R_2} temos

$$\frac{1}{R_1} \int_{\partial B_{R_1}} u(u \nabla u \cdot x) d\sigma - \frac{1}{R_2} \int_{\partial B_{R_2}} u(\nabla u \cdot x) d\sigma + \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + \frac{Au^2}{|x|^\alpha} \right) dx = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Agora, como $\frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{N+2} < 2$ e $\frac{N-1}{N} = \frac{1}{2^*} + \frac{1}{2}$, usando as desigualdades de Schwartz e Hölder e o fato de $x \in B_{R_i}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R_i} \int_{\partial B_{R_i}} u(\nabla u \cdot x) d\sigma \right| &\leq \frac{1}{R_i} \int_{\partial B_{R_i}} |u| |\nabla u| |x| d\sigma \leq \int_{\partial B_{R_i}} |u| |\nabla u| d\sigma \\ &\leq \left(\int_{\partial B_{R_i}} |u|^{2^*} d\sigma \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^{\frac{2^*}{2^*-1}} d\sigma \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \\ &= \left(\int_{\partial B_{R_i}} |u|^{2^*} d\sigma \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}} |1| d\sigma \right)^{\frac{N+2}{2N}} \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}} |1| d\sigma \right)^{\frac{N+2}{2N}} &\leq \left[\left(\int_{\partial B_{R_i}} (|\nabla u|^{\frac{2N}{N+2}})^{\frac{N+2}{N}} d\sigma \right)^{\frac{N}{N+2}} \right]^{\frac{N+2}{2N}} c \left[\left(R_i \right)^{\frac{2}{N+2}} \right]^{\frac{N+2}{2N}} \\ &= c \left(\int_{B_{R_i}} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \left(R_i^{N-1} \right)^{\frac{1}{N}}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R_i} \int_{\partial B_{R_i}} u(\nabla u \cdot x) d\sigma \right| &\leq C \left(\int_{\partial B_{R_i}} |u|^{2^*} d\sigma \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{B_{R_i}} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} R_i^{\frac{N-1}{N}} \\ &= C \left(R_i \int_{\partial B_{R_i}} |u|^{2^*} d\sigma \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(R_i \int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Agora como na demonstração do lema 3.7, podemos tomar $R_{1,n} \rightarrow 0^+$ e $R_{2,n} \rightarrow +\infty$ tal que

$$R_{i,n} \int_{\partial B_{R_i}} \left(|u|^{2^*} + |\nabla u|^2 \right) d\sigma \rightarrow 0$$

e a conclusão se segue.

Apresentaremos agora um teorema que sob algumas condições impostas aos expoentes α e p , garante na região hachurada da figura abaixo que o problema (1.1) não possui solução.

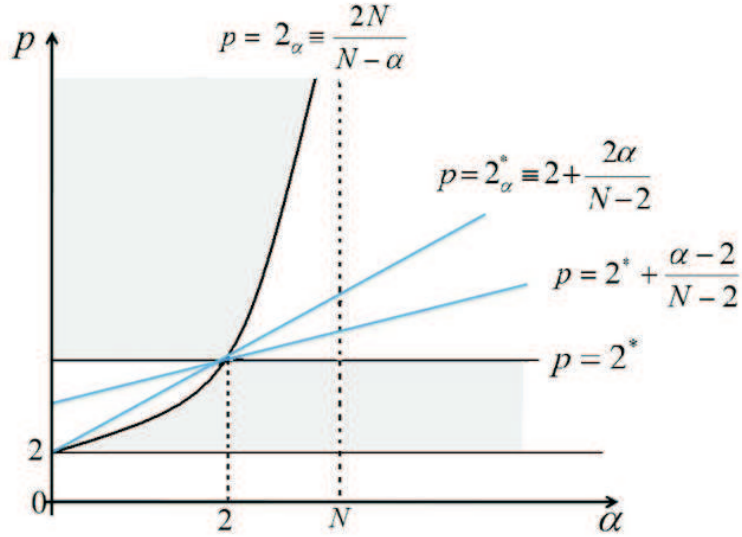


Figura 1.1

Teorema 2.9 (Badiale-Rolando) Dado $A > 0$ se $\alpha \in (0, 2)$ e $p \notin (2_\alpha, 2^*)$ ou $\alpha = 2$ e $p \neq 2^*$, ou $\alpha \in (2, N)$ e $p \notin (2^*, 2_\alpha)$, ou $\alpha \geq N$ e $p \leq 2^*$, então a equação

$$-\Delta u + \frac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{p-2} u \quad \text{em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

não tem solução clássica não trivial $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R}^N)$ tal que $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; |x|^{-\alpha} dx) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Vamos supor que a tese deste teorema é falsa, daí, podemos usar os lemas 3.7 e 3.8 com $f(u) = |u|^{p-2}u$ e $F(u) = \frac{|u|^p}{p}$. Levando (3.14) em (3.7), obtemos

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \left(\frac{N}{p} - \frac{N-\alpha}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{Au^2}{|x|^\alpha} dx$$

o qual é impossível para $u \neq 0$ se $\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{p} \right) \left(\frac{N}{p} - \frac{N-\alpha}{2} \right) < 0$. Como esta inequação é equivalente às hipóteses do teorema, chegamos a uma contradição.

□

Observação 2.10 *No caso em que $\alpha = 2$ e $p = 2^*$, a equação (3.14) admite soluções. Isto foi provado em [8].*

2.3 Resultados de existência

Para apresentarmos nossos resultados de existência precisamos de algumas notações.

Para $N \geq 3$ e para quaisquer funções mensuráveis $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$, nós vamos considerar o espaço de sobolev com peso

$$X := X(\mathbb{R}^N; V) := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx < +\infty \right\}.$$

definido em (3.1).

Observação 2.11 *Note que $(V)_1$ garante $X \neq \emptyset$. De fato, basta tomar u uma função tendo como suporte compacto na bola $B_b \setminus B_a$.*

Nossos resultados de existência dependem de (V_α) , (f_p) e $(V)_1$, combinados convenientemente com algumas condições que serão enumeradas a seguir:

$(V)_2$ existem $B, \beta, \mu_0 > 0$ tais que $V(\mu s) \leq \mu^{-\beta} B V(s)$ para quase todo $\mu > \mu_0$ e $s > 0$;

$(f)_1$ existe $\vartheta > 2$ tal que $\vartheta F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \in \mathbb{R}$;

$(f)_2$ $F(s_*) > 0$ para algum $s_* \in \mathbb{R}$;

$(f)_3$ $F(s) > 0$ para todo $s \in (0, +\infty)$;

$(f)_4$ $f(s) \geq 0$ para todo $s \leq 0$;

$(f)_5$ f é ímpar;

$(V)_p$ existe $m > 0$ tal que $F(s) \geq m|s|^p$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Observação 2.12 *Uma observação importante é o fato de que a hipótese $(V)_2$ garante que o potencial V está em $L^\infty(c, +\infty)$ para algum $c > 0$ (Em particular, $(V)_2 \Rightarrow (V)_1$).*

De fato, suponha que $V(S_n) \rightarrow +\infty$, onde $S_n = u_n$, com $u_n \rightarrow +\infty$. Então por um lado, temos $V(S_n) \rightarrow +\infty$, por outro lado, usando $(V)_2$, temos

$$V(S_n) = V(u_n \frac{S_n}{u_n}) \leq u_n^{-\beta} B V(\frac{S_n}{u_n}) = u_n^{-\beta} V(1) \rightarrow 0$$

o que é uma contradição, portanto a observação feita acima procede.

Antes de enunciarmos nossos resultados de existência vamos dar alguns exemplos de potenciais satisfazendo (V_α) e $(V)_2$:

Exemplo 2.13 Se $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ satisfaz

$$As^{-\alpha} \leq V(s) \leq Cs^{-\alpha}$$

para algum $C \geq A > 0$ e para quase todo $s > 0$, então as suposições (V_α) e $(V)_2$ se verificam com $\beta = \alpha$, $B \geq \frac{C}{A}$ e $\mu_0 > 0$ qualquer.

Exemplo 2.14 Para quaisquer $A > 0$ e $\alpha \geq \beta > 0$ a função

$$V(s) = \begin{cases} +\infty & \text{para } s = 0 \\ As^{-\alpha} & \text{para } s \in (0, 1] \\ As^{-\beta} & \text{para } s \in [1, +\infty) \end{cases}$$

satisfaz (V_α) e $(V)_2$ com $B = \mu_0 = 1$.

Exemplo 2.15 Para qualquer $s_0 > 0$, $A > 0$ e $\alpha \geq \beta > 0$, as suposições (V_α) e $(V)_2$ se verificam para a função

$$V(s) = \begin{cases} +\infty & \text{para } s \in [0, s_0] \\ B(s - s_0)^{-\beta} & \text{para } s \in (s_0, +\infty) \end{cases}$$

provado que $B = B(s_0, A, \alpha, \beta) > 0$ é suficientemente grande.

2.3.1 Teoremas principais

Teorema 2.16 (Badiale-Rolando) Seja $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo $(f)_1$ e V uma função mensurável definida de $[0, +\infty)$ em $(0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$. Assuma que (V_α) e (f_p) se verificam com $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2_\alpha^*, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2_\alpha^*)$. Assuma também que V satisfaz $(V)_2$ e f satisfaz

$(f)_2$, ou f satisfaz $(f)_3$. Então o problema (P_1) tem uma solução radial não trivial $u \in X(\mathbb{R}^N; V)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)uh)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx \quad \text{para todo } h \in X(\mathbb{R}^N; V). \quad (2.16)$$

Se $(f)_4$ se verificar também, temos que a solução u é não negativa.

Teorema 2.17 (Badiale-Rolando) *Seja $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo $(f)_1$ e $(f)_5$, e V uma função mensurável definida de $[0, +\infty)$ em $(0, +\infty]$ satisfazendo $(V)_1$. Assuma que $(V_\alpha), (f_p)$ e (F_p) se verificam com $\alpha \in (0, 2)$ e $p \in (2_\alpha^*, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2_\alpha^*)$. Então existem em $X(\mathbb{R}^N; V)$ infinitas soluções radiais para o problema (P_1) no sentido de (3.16).*

Veja figura abaixo, a região hachurada com linhas verticais indica onde o problema (P_1) admite solução.

2.4 Prova dos Teoremas principais (Teoremas 3.16 e 3.17)

Vamos assumir que $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfaz $(f)_1$ e $V : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty]$ é uma função mensurável satisfazendo $(V)_1$. Nós também vamos assumir que (V_α) e (f_p) se verificam com $\alpha \in (0, 1)$ e $p \in (2_\alpha^*, 2^*)$, ou $\alpha \in (2, +\infty)$ e $p \in (2^*, 2_\alpha^*)$. Seja $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e seja $N \geq 3$. Antes de apresentar a prova dos teoremas 3.16 e 3.17, apresentemos alguns fatos preliminares.

Inicialmente vamos olhar para os pontos críticos do funcional

$$I : X_r(\mathbb{R}^N; V) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definido por}$$

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \quad \forall u \in X_r(\mathbb{R}^N; V). \quad (2.17)$$

Usando (f_p) e as imersões 3.3 e 3.4 obtemos que I é um funcional de classe C^1 em X_r e cuja derivada de Fréchet $I'(u)$ em qualquer $u \in X_r$ é dada por

$$I'(u)h = \langle u, h \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx \quad \text{para todo } h \in X_r(\mathbb{R}^N; V).$$

O lema que enunciaremos a seguir mostra que qualquer ponto crítico de I é uma solução do problema (P_0) .

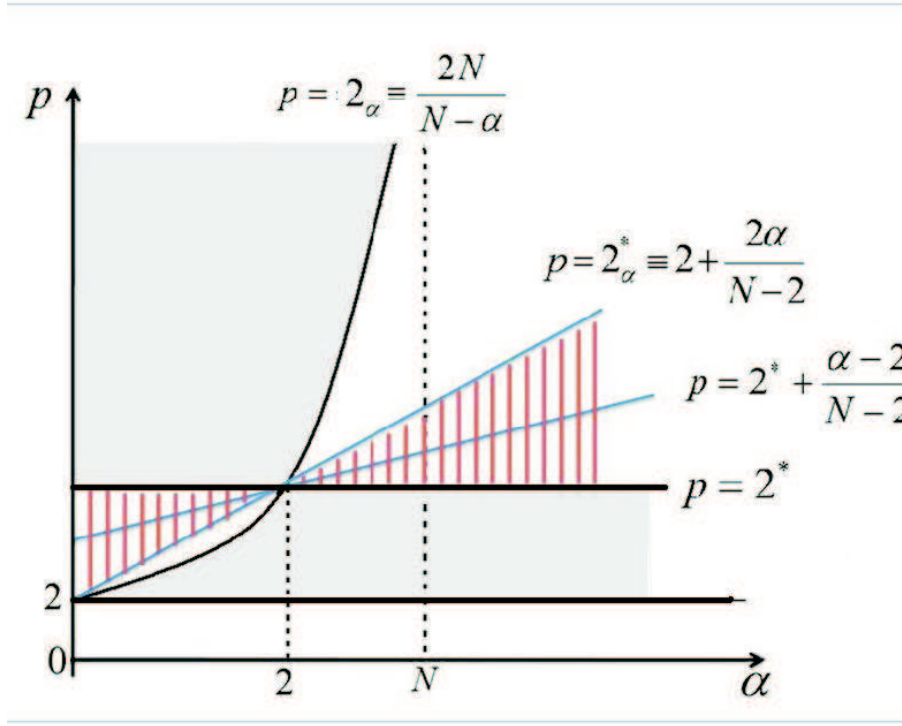


Figura 2.1:

Lema 2.18 *Todo ponto crítico de $I : X_r(\mathbb{R}^N; V) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a equação*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)uh)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx \quad \text{para todo } h \in X(\mathbb{R}^N; V). \quad (2.18)$$

Demonstração: Seja $u \in X_r$. Para $h \in X$ definimos

$$T(u)h := \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)uh)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.$$

O funcional $T(u)$ está bem definido e é contínuo em X , isto é, $T(u) \in X'$, pois

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u)||h|dx \leq M \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1}|h|dx \leq C||u||^{p-1}||h|| \quad \forall h \in X.$$

Usamos a hipótese (f_p) mais a proposição 3.6. Pelo teorema da representação de Riesz existe um único $\tilde{u} \in X$ tal que $T(u)h = \langle \tilde{u}, h \rangle$ para todo $h \in X$. Usando a mudança de variável $x \xrightarrow{\varphi} g^{-1}y$, como $|J_\varphi| = 1$, pois g é ortogonal, segue então que $\langle \tilde{u}, h(g \cdot) \rangle = \langle \tilde{u}(g^{-1} \cdot), h \rangle$ e $T(u)h(g \cdot) = T(u)h$ para todo $h \in X$ e $g \in O(N)$. Logo $\langle \tilde{u}(g^{-1} \cdot), h \rangle = \langle \tilde{u}, h \rangle$. Isto significa que $\tilde{u}(g^{-1} \cdot) = \tilde{u}$ para todo $g \in O(N)$, isto é, $\tilde{u} \in X_r$. Agora assuma que $I'(u) = 0$ em X'_r . Então $\langle \tilde{u}, h \rangle = T(u)h = I'(u)h = 0$ para todo $h \in X_r$ implica que $\tilde{u} = 0$. Como existe um único $\tilde{u} \in X$ tal que $T(u)h = \langle \tilde{u}, h \rangle$ para todo $h \in X$, temos $T(u)h = 0$ para todo $h \in X$, ou seja, a equação (3.18) se verifica.

Lema 2.19 *O funcional $I : X_r(\mathbb{R}^N; V) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais Smale.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset X_r$ tal que $I(u_n)$ é limitado e $I'(u_n) \rightarrow 0$ em X'_r . Mostraremos que (u_n) tem uma subsequência convergente em X_r . Como

$$I(u_n) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \quad (a)$$

e

$$I'(u_n)u_n := \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(|x|)u_n^2)dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \quad (b),$$

Calculando o módulo da diferença entre o produto da equação (a) por ϑ e (b) obtemos $(|\vartheta(a) - (b)|)$:

$$\begin{aligned} \left| \vartheta I(u_n) - I'(u_n)u_n \right| &\geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx - \vartheta \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx + \left(\frac{\vartheta}{2} - 1\right)||u_n||^2 \\ &\stackrel{(f)_1}{\geq} \vartheta \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx - \vartheta \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx + \frac{\vartheta - 2}{2}||u_n||^2 \\ &= \frac{\vartheta - 2}{2}||u_n||^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\vartheta - 2}{2}||u_n||^2 \leq |\vartheta I(u_n) - I'(u_n)u_n| \leq |\vartheta I(u_n)| + |I'(u_n)u_n| \leq C + C'||u_n||,$$

onde C, C' são constantes. Disto segue que $\|u_n\|$ é limitada em X_r , assim a menos de subsequência temos $u_n \rightarrow u$ em X_r . Usando a proposição 3.3 temos que $u_n \rightarrow u$ em L^p para algum $u \in X_r$.

De (f_p) temos que $|f(u_n)u_n| \leq M|u_n|^p$. Como $u_n \rightarrow u$ em L^p , $u \in X_r$, então $u_n \rightarrow u$ quase sempre, daí existe $h \in L^p$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ e assim

$$|f(u_n)u_n| \leq M|u_n|^p \leq M|h(x)|^p = H(x) \in L^1.$$

Como f é contínua e $u_n \rightarrow u$ quase sempre, então $f(u_n)u_n \rightarrow f(u)u$ quase sempre. Usando então o Teorema da convergência dominada (ver apêndice teorema A.10) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx.$$

Como $I'(u_n)u_n \rightarrow 0$, então

$$\|u_n\|^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx, \text{ logo } \|u_n\|^2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx.$$

Agora $I'(u_n)u$ também converge para zero, assim, usando a convergência fraca e novamente o Teo. da Convergência Dominada, obtemos

$$\langle u_n, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u dx \rightarrow \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx,$$

Assim $\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx = \|u\|^2$.

Consequentemente, $\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2$, logo como X_r é um espaço de Hilbert segue que $u_n \rightarrow u$ em X_r .

Provemos agora um lema técnico .

Lema 2.20 *Assuma que V satisfaz $(V)_2$ e seja $F \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfazendo a condição $(f)_2$. Então existe $u \in X_r(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx > 0$.*

Demonstração: Como V satisfaz $(V)_2$ deduzimos que $V \in L^\infty(c', +\infty)$ para algum $c' > 0$ (Ver observação 3.12). Daí $C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B'_c}) \subset X$. A fim de provar o lema, para qualquer $R \geq 3$ vamos tomar $\Phi_R \in C_c^\infty(c, +\infty)$ tal que $0 \leq \Phi_R \leq 1$, com

$$\Phi_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq c' + 1 \text{ ou } t \geq c' + 1 + R \\ 1 & \text{para } c' + 2 \leq t \leq c' + R. \end{cases}$$

Agora para todo $x \in \mathbb{R}^N$ defina $u_R(x) := \Phi_R(|x|)$, note que $u_R \in X_r$, pois

$$u_R(gx) = \Phi_R(|gx|) = \Phi_R(|g||x|) = \Phi_R(|x|), \quad \forall g \in O(N) \text{ e } u_R \in X.$$

Temos também que u_R satisfaz $\text{supp } u_R \subset B_{c'+1+R} \setminus \overline{B}_{c'+1}$, $0 \leq u_R \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$ e $u_R = 1$ em $\overline{B}_{c'+R} \setminus B_{c'+2}$. Usando a condição $(f)_2$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(s_* u_R) dx = \int_{\overline{B}_{c+R} \setminus B_{c+2}} F(s_*) dx + \int_{B_{c+1+R} \setminus \overline{B}_{c+1}} F(s_* u_R) dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty.$$

□

Passemos agora á prova dos teoremas 3.16 e 3.17.

Prova do teorema 3.16

Aplicaremos o Teorema do passo da montanha, (ver apêndice Teorema A.16).

Usando as imersões (3.3) e (3.4) e a suposição (f_p) , obtemos:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \right| \stackrel{(f_p)}{\leq} C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \stackrel{(3.3)-(3.4)}{\leq} C \|u\|^p.$$

Dáí

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\|^p \quad \text{para todo } u \in X_r. \quad (2.19)$$

Como $p > 2$, isto prova a geometria do passo da montanha próximo da origem, ou seja, existem $\delta, \rho > 0$ tais que para todo $u \in X_r$ com $\|u\| = \rho$, obtemos $I(u) \geq \delta$ (basta tomar $\|u\|$ suficientemente pequeno).

Vamos mostrar agora que existe $\tilde{u} \in X_r$ tal que $\|\tilde{u}\| > \rho$ e $I(\tilde{u}) \leq 0$.

Primeiro assumamos $(V)_2$ e $(f)_2$. Tome $u \in X_r$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx > 0$ (isso é possível graças ao lema 3.20), e defina $u_n(x) := u(\mu_n^{-1}x)$ onde $(\mu_n) \subset (\mu_0, +\infty)$ é uma sequência qualquer divergindo tal que $(V)_2$ se verifica para qualquer $\mu = \mu_n$ e para quase todo $s > 0$. Então $u_n \in X_r$ é tal que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \mu_n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \mu_n^N \int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n |x|) u^2 dx \\ &\stackrel{(V)_\alpha}{\geq} \mu_n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + A \mu_n^{N-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|x|^\alpha} dx \\ &= \mu_n^{N-2} K + \mu_n^{N-\alpha} K' \rightarrow +\infty \quad K, K' \text{ constantes.} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2}\mu_n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\mu_n^N \int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n|x|)u^2 dx - \mu_n^N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \\ &\stackrel{(V)_2}{\leq} \frac{1}{2}\mu_n^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{B}{2}\mu_n^{N-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)u^2 dx - \mu_n^N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Agora vamos assumir a hipótese $(f)_3$. De $(f)_1$ temos que existe $\vartheta > 2$ tal que $\vartheta F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \in \mathbb{R}$, logo como

$F(s) = \int_0^s f(t)dt$, temos $\vartheta F(s) \leq F'(s)s$. Resolvendo a equação diferencial

$\frac{dF}{F(s)} \geq \vartheta \frac{ds}{s}$, temos $F(s) \geq F(1)s^\vartheta$. De fato

$$\int_1^s \frac{dF(s)}{F(s)} \geq \vartheta \int_1^s \frac{ds}{s},$$

logo

$$\ln \frac{F(s)}{F(1)} \geq \ln s^\vartheta,$$

ou seja, $F(s) \geq F(1)s^\vartheta$.

Daí para algum $\lambda > 1$ e $u \in X_r$ não negativo temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda u) &= \int_{\lambda u \geq 1} F(\lambda u) dx + \int_{0 \leq \lambda u < 1} F(\lambda u) dx \\ &\geq F(1)\lambda^\vartheta \int_{\lambda u \geq 1} u^\vartheta dx \geq F(1)\lambda^\vartheta \int_{u \geq 1} u^\vartheta dx. \end{aligned}$$

Como $\vartheta > 2$, temos

$$\begin{aligned} I(\lambda u) &= \frac{1}{2}\lambda^2 \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda u) dx \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2} \|u\|^2 - F(1)\lambda^\vartheta \int_{u \geq 1} u^\vartheta dx \rightarrow -\infty \quad \text{quando } \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Portanto I satisfaz a geometria do passo da montanha. Logo o Teorema do passo da montanha (ver apendice A.16) mais o lema 3.19 garantem a existência de um ponto crítico de I não trivial. Pelo lema 3.18 isto resolve (P_0) no sentido de (3.16).

Finalmente observamos de $(f)_4$ que qualquer u satisfazendo (3.16) é não negativo. De fato, de $(f)_3, (f)_1$ e $(f)_4$ temos $f(u)u^- \geq 0$ quase sempre em

$\mathbb{R}^N$, onde u^- é a parte negativa de u . Então se u satisfaz (3.16), temos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla u^- dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) u u^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u) u^- dx \leq -\|u^-\|^2 \Rightarrow \|u^-\| \leq 0$$

pois

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla u^- + V(|x|) u u^-) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla(u^+ - u^-) \nabla u^- + V(|x|)(u^+ - u^-) u^-) dx \\ &= - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) (u^-)^2 dx \right) \\ &= -\|u^-\|^2 \end{aligned}$$

Portanto como $u^- = 0$ e $u = u^+ - u^-$ segue que $u = u^+$ como queríamos. $\square$

Prova do teorema 3.17

Aqui vamos usar o simétrico do Teorema do Passo da Montanha (ver apêndice teorema A.17). Precisamos primeiramente mostrar que o funcional I definido em (3.18) é par. De fato, de $(f)_5$ temos $f(u) = -f(-u)$, daí

$$F(-u) = \int_0^{-u} f(s) ds \stackrel{(f)_5}{=} - \int_0^{-u} f(-s) dx \stackrel{t=-s}{=} \int_0^u f(t) dt = F(u),$$

isto é, F é par e daí segue que

$$I(-u) = \frac{1}{2} \| -u \|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(-u) dx = \frac{1}{2} \| u \|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx = I(u), \text{ para todo } u \in X_r.$$

Agora podemos aplicar o simétrico do teorema do passo da montanha. Tendo em conta (3.19) e lema 3.19, necessitamos somente mostrar que I satisfaz a seguinte condição geométrica: para qualquer subespaço $Y \neq \{0\}$ de X_r cuja dimensão é finita, existe $R > 0$ tal que para todo $u \in Y$ com $\|u\| > R$, temos que $I(u) \leq 0$. De fato, seja Y um subespaço de X_r cuja dimensão é finita. Tome $u \in Y$, segue de (F_p) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \geq m \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx.$$

Como as normas são equivalentes em Y , temos $\int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \geq C \|u\|^p$, e como $p > 2$ temos

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx \leq \frac{1}{2} \|u\|^2 - C \|u\|^p \leq 0, \quad \text{onde } \|u\| \geq R,$$

para R suficientemente grande. Portanto segue o resultado, ou seja, existe uma sequência ilimitada de valores críticos para o funcional I . Usando o lema 3.18 obtemos o resultado desejado. $\square$

Apêndice A

Apêndice

Nós vamos apresentar aqui alguns resultados que foram utilizados no texto.

A.1 Espaços de funções

Vamos lembrar as definições e algumas propriedades de alguns espaços de funções,

Definição A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, Ω aberto. Nós denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas funções reais C^∞ com suporte compacto em Ω . Nós também assumiremos que o leitor esteja familiarizado com o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$. Sabemos que, para $N \geq 3$ e $2^* = \frac{2N}{(N-2)}$, o espaço*

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

com produto escalar e norma

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad ||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. Também sabemos que $D_0^{1,2}(\Omega)$ é o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $D_1^2(\mathbb{R}^N)$.

Teorema A.2 (Teorema de Imersões de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned}
(1.1) \quad & H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p < \infty, \quad N = 1, 2, \\
(1.2) \quad & H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3, \\
(1.1) \quad & D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*, \quad N \geq 3,
\end{aligned}$$

A.2 Lema de compacidade de Straus

Teorema A.3 *Sejam P e $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas satisfazendo*

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \rightarrow 0 \text{ quando } |s| \rightarrow +\infty. \quad (\text{A.1})$$

Se $u_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções mensuráveis, tal que

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n(x))| dx < \infty. \quad (\text{A.2})$$

e

$$P(u_n(x)) \rightarrow v(x) \text{ quase sempre, em } \mathbb{R}^N, \text{ quando } n \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.3})$$

então para qualquer conjunto de Borel B limitado temos

$$\int_B |P(u_n(x)) - v(x)| dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Se além disso assumirmos que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow 0. \quad (\text{A.4})$$

e

$$u_n(x) \rightarrow 0 \text{ quando } |x| \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente com respeito a } n, \quad (\text{A.5})$$

então $P(u_n)$ converge para $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \rightarrow +\infty$.

(Ver demonstração em [2] página 338).

A.3 Alguns lemas radiais

Lema A.4 *Seja $N \geq 3$; toda função radial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(1-N)}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \geq \alpha_N, \quad (\text{A.6})$$

para algum $\alpha_N \geq 0$, onde C_N depende apenas da dimensão N .

(Ver demonstração em [2] página 340).

Apresentaremos o lema radial para o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Lema A.5 *Seja $N \geq 3$. Toda função radial $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é quase sempre igual a função $U(x)$, contínua para $x \neq 0$ e tal que*

$$|U(x)| \leq C_N |x|^{\frac{(2-N)}{2}} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)}, \quad |x| \geq 1, \quad (\text{A.7})$$

onde C_N depende apenas da dimensão N .

(Ver demonstração em [2] página 340)

Lema A.6 *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p < +\infty$, é uma função radial não decrescente (i.e. $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então temos*

$$|u(x)| \leq |x|^{\frac{-N}{p}} \left(\frac{N}{|S^{N-1}|} \right)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad x \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

(Ver demonstração em [2] página 341)

A.4 Simetrização de Schwartz

Enunciaremos nesta seção, sem provar algumas propriedades da simetrização de Schwartz. Primeiro nós recordamos da definição de simetrização ou reagrupamento esférico de uma função. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$: então f^* , a simetrização de Schwartz de f , é uma função radial, não crescente em r , mensurável tal que para qualquer $\alpha > 0$.

$$m\{f^* \geq \alpha\} = m\{|f| \geq \alpha\},$$

onde m é a medida de Lebesgue. Disto é óbvio que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(f) dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(f^*) dx$$

para toda função contínua F tal que $F(f)$ é integrável.

Uma propriedade fundamental da aplicação $f \mapsto f^*$ é a seguinte:

Inequação de Riesz. Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$; então

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x)dx. \quad (\text{A.9})$$

Desta inequação nós tiramos que

$$\|f^* - g^*\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^N). \quad (\text{A.10})$$

Uma outra consequência importante da inequação de Riesz é o seguinte resultado:

Seja $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Se $N \geq 3$ (respectivamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para qualquer N). Então u^* pertence a $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ (respectivamente, em $H^1(\mathbb{R}^N)$) nós temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (\text{A.11})$$

Teorema A.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio regular limitado, com $N \geq 3$. Seja $g \in C(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e*

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^l} < +\infty \quad \text{onde} \quad l = \frac{N+2}{N-2}. \quad (\text{A.12})$$

Então o funcional

$$V(u) = \int_{\Omega} G(u(x))dx, \quad \text{onde} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

está bem definido e é da classe C^1 no espaço $H^1(\Omega)$. Temos também que

$$\langle V'(u), v \rangle = \int_{\Omega} g(u(x))v(x)dx, \quad u, v \in H^1(\Omega). \quad (\text{A.13})$$

(Ver demonstração em [2] página 342).

Teorema A.8 *Seja $N \geq 3$ e $g \in C(\mathbb{R})$ satisfazendo $g(0) = 0$, a condição (A.12), e*

$$\limsup_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ s \neq 0}} \frac{|g(s)|}{|s|} < +\infty \quad \text{onde} \quad l = \frac{N+2}{N-2}. \quad (\text{A.14})$$

Então o funcional

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx, \quad \text{onde} \quad G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

está bem definido e é da classe C^1 no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Temos também que

$$\langle V'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} g(u(x))v(x)dx, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (\text{A.15})$$

(Ver demonstração em [2] página 342).

A.5 Alguns resultados importantes de integração

Teorema A.9 (Teorema da convergência monótona) *Seja (f_n) uma sequência crescente de funções de L^1 tal que $\sup_n \int f_n < \infty$.*

Então $f_n(x)$ converge quase sempre em Ω para um limite finito denotado por $f(x)$; Mais, $f \in L^1$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Teorema A.10 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 . Suponhamos que*

- a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ em quase todo ponto de Ω ;
- b) existe uma função $g \in L^1$ tal que para cada n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ para quase todo ponto em Ω .

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$.

Lema A.11 (lema de Fatou's) *Seja (f_n) uma sequência de funções de L^1 tal que*

- 1. para cada n , $f_n(x) \geq 0$ em quase todo ponto em Ω ;

$$2. \sup_n \int f_n < \infty.$$

Para cada $x \in \Omega$ ponha $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

A.6 Alguns resultados importantes

Proposição A.12 Como u satisfaz a equação $-\Delta u = g(u)$ em $\mathbb{R}^N$, temos

$$-u_{rr} - \frac{N-1}{r}u_r = g(u), \quad r \in (0, +\infty)$$

De fato, como $u(x) = u(|x|) = u\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$,

então como $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, temos $r_{x_i} = \frac{x_i}{r}$. Agora

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= u'(r) \cdot r_{x_i} = u'(r) \frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= u''(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + u'(r) \left(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\right). \end{aligned}$$

Dáí

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = u'' + \frac{u'}{r}n - \frac{u'}{r} = u'' + \frac{1}{r}(n-1)u'.$$

□

Teorema A.13 Seja $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $1 < p < \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f \cdot g \in L^1$ e

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se verifica a **desigualdade de interpolação**

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Desigualdade de Cauchy-Schwartz: Todo produto escalar satisfaz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{para todo } u, v \in X,$$

onde X é um espaço de Hilbert.

Corolário A.14 Seja $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty)$ uma função convexa semicontínua inferiormente (para topologia forte). Então φ é semicontínua inferiormente para a topologia fraca $\sigma(X, X')$. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(X, X')$, então

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Em particular temos se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(Ver demonstração em [5], página 38).

Definição A.15 *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que um funcional $C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de **Palais Smale** (PS) se qualquer sequência $\{u_n\} \subset H$ tal que $\{\Phi(u_n)\}$ é limitada e $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$, possui uma subsequência convergente.*

Teorema A.16 (Teorema do Passo da Montanha) *Suponha que $E \in C^1(V)$ satisfaz Palais Smale (PS), V é um espaço de Banach. Assuma*

- (1) $E(0) = 0$;
- (2) Existe $\rho > 0$, $\alpha > 0$ tal que $\|u\| = \rho$, então $E(u) \geq \alpha$;
- (3) Existe $\bar{u} \in V$ tal que $\|\bar{u}\| \geq \rho$ e $E(\bar{u}) < \alpha$.

Defina

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C^0([0, 1]; V) ; \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \bar{u} \right\}$$

então

$$\beta := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0, 1]} E(\gamma(t))$$

é um valor crítico.

(Ver demonstração em [14] página 101).

Teorema A.17 (Simétrico do Teorema do Passo da Montanha) *Suponha que V é um espaço de Banach de dimensão infinita e suponha que $E \in C^1(V)$ satisfaz Palais Smale, $E(u) = E(-u)$ para todo u , e $E(0) = 0$. Suponha que $V = V^+ \oplus V^-$, onde V^+ tem dimensão finita e assuma as seguintes condições:*

- (1) Existe $\alpha > 0$, $\rho > 0$ tal que se $\|u\| = \rho$, $u \in V^+$, então $E(u) \geq \alpha$.
- (2) Para qualquer subspaço $W \subset V$ de dimensão finita existe $R = R(W)$ tal que $E(u) \leq 0$ para $u \in W$, $\|u\| \geq R$.

Então E possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

(Ver demonstração em [14] página 106).

Teorema A.18 (Princípio do Máximo Forte) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $-\Delta u \geq 0$ em Ω . Então temos uma das alternativas:*

ou u é constante (e então $\Delta u = 0$)

ou $u(x) > \inf_{\Omega} u$, para todo $x \in \Omega$, isto é, o ínfimo é atingido em $\partial\Omega$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Badiale, Rolando S., *A note on nonlinear elliptic problems with singular potential*, Rend. lincei Math. Appl. 17 (2006), 1-13.
- [2] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I - Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), 313-345.
- [3] M. S. Berger, *Nonlinearity and nonlinear functional analysis*, Academic Press, New York (1979).
- [4] M. S. Berger, *On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordon equation*, J. Func. Anal. 9, (1972) 249-261.
- [5] H. Brézis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [6] C. V. Coffman, *Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions*, Arch. Rat Mech. Anal. 46 (6) (1972) 81-95.
- [7] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [8] V. Felli, M. Schneider, *Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type*, J. Differential Equations 191 (2003), 121-142.
- [9] T. Kato, *Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient*, Comm. Pure Applied Math. 12 (1959) 403-425.
- [10] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications to differential equation*, Springer-Verlag, (Paris, New York) 1993.
- [11] S. I. Pohožaev, *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Sov. Math Doklady 5,(1965) 1408-1411.

- [12] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, no. 65, Providence 1986.
- [13] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. 55 (1977), 149-172.
- [14] M. Struwe, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1990.
- [15] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with singular coefficient and critical exponent*, Adv. Differential Equations 1 (1996), 241-264.
- [16] M. Willem, *Minimax theorem*, Birkhäuser, Berlin, 1996.