RENATO BRUNO DE JESUS MACHADO

ENTROPIA E O PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA ESPAÇOS NÃO COMPACTOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: André J. da Silva Corrêa

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

Machado, Renato Bruno de Jesus, 1997-

M149e Entropia e o princípio variacional para espaços não
2021 compactos / Renato Bruno de Jesus Machado. – Viçosa, MG, 2021.

99 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 97-99.

1. Entropia. 2. Princípios variacionais. 3. Espaços localmente compactos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.64

RENATO BRUNO DE JESUS MACHADO

ENTROPIA E O PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA ESPAÇOS NÃO COMPACTOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2021.

Assentimento:

Renato Bruno de Jesus Machado

Renato Bruno de Jesus Machado
Autor

André Junqueira da Silva Corrêa

André Junqueira da Silva Corrêa
Orientador

A Deus e aos meus pais, Maria e Joaquim.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e aos meus pais, Maria e Joaquim, por **tudo**.

Pelo companheirismo, agradeço aos meus amigos de graduação da UFMT e aos meus parceiros de estudo do mestrado da sala 306 - a sala 306 é a prova de que *"sonho que se sonha junto é realidade"*.

Pelo apoio e incentivo, agradeço ao Aldi Nestor, à Leidy Wolmuth, à Mariane Dias, ao Reinaldo de Marchi e à Sônia Fernandes.

Por me introduzir à Entropia em Sistemas Dinâmicos e pela orientação e suporte neste atípico ano pandêmico de 2020, agradeço ao Professor André Corrêa.

Pelos livros *Um convite à Matemática* e *Manual de Redação Matemática*, agradeço ao Professor Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG). Suas obras lapidaram minha escrita matemática. O último contribuiu diretamente para uma boa redação desta dissertação. Os livros citados são obras de leitura obrigatória para todo estudante de matemática.

Agradeço ao matemático russo Nikolai V. Ivanov pela tradução [26], do russo para o inglês, dos históricos artigos de Andrei Kolmogorov e Yakov Sinai. A tradução remove barreiras de acesso aos artigos originalmente escritos em russo no peculiar alfabeto cirílico.

Por financiar meus estudos de nível superior, agradeço à sociedade brasileira; espero honrar o investimento em mim realizado. O ganho não é somente pessoal, o Brasil ganha por possuir mais uma mão de obra qualificada. Destaco ainda o impacto social: o financiamento dá chance de realização aos sonhos de qualificação profissional dos *primeiros*: primeiros a ler da família, primeiros "ensino médio" da família, primeiros graduados da família, primeiros mestres e primeiros doutores da família; isto quebra o ciclo de falta de oportunidades das famílias menos favorecidas. Vida longa aos programas de aperfeiçoamento de pessoal e de fomento à pesquisa brasileira.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Seja forte e corajoso!"

Resumo

MACHADO, Renato Bruno de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2021. **Entropia e o princípio variacional para espaços não compactos**. Orientador: André Junqueira da Silva Corrêa.

O Princípio Variacional para entropia estabelece que a entropia topológica de uma aplicação contínua definida num espaço métrico compacto é igual ao supremo das entropias de medidas invariantes. Uma extensão deste resultado é apresentada para aplicações próprias definidas em espaços separáveis localmente compactos. É apresentada a definição de coberturas e métricas admissíveis e também de versões estendidas das entropias topológicas de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen. O resultado principal é obtido ao relacionar as versões estendidas das entropias da aplicação própria com as entropias usuais da extensão da aplicação própria, sendo esta última definida na compactificação por um ponto do espaço separável localmente compacto.

Palavras-chave: Entropia. Princípio Variacional. Espaços localmente compactos.

Abstract

MACHADO, Renato Bruno de Jesus, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2021. **Entropy and the variational principle for non-compact spaces**. Adviser: André Junqueira da Silva Corrêa.

The Variational Principle for entropy establishes that the topological entropy of a continuous application defined in a compact metric space is equal to the supreme of the entropy of invariant measures. An extension of this result is presented for proper applications defined in separable locally compact spaces. The definition of admissible coverages and metrics is presented, as well as extended versions of the topological entropies of Adler-Konheim-McAndrew and of Bowen. The main result is obtained by relating the extended versions of the entropies of the proper application with the usual entropies of the extension of the proper application defined in the compactification by a point of the separable locally compact space.

Keywords: Entropy. Variational Principle. Locally compact spaces.

Sumário

Introdução

Entropia, na Termodinâmica, é comumente descrita como a medida do grau de desordem de um sistema. Em 1948, Claude Shannon apresenta a Teoria da Informação, na qual define entropia como uma medida do grau médio de incerteza a respeito de fontes de informação. Já em 1958, Andrei Kolmogorov e Yakov Sinai se inspiram na definição matemática de entropia de Claude Shannon para propor um invariante ergódico [1] na Teoria Ergódica. Obtiveram sucesso, eles conseguiram provar que dois Shifts de Bernoulli são equivalentes se, e somente se, eles têm a mesma entropia; com isso foi possível distinguir Shifts de Bernoulli a partir de suas entropias. Uma versão para aplicações mensuráveis quaisquer é apresentado no Teorema 2.1.14. A entropia proposta por Andrei e Yakov é conhecida como Entropia de Kolmogorov-Sinai h_μ.

A partir da segunda metade da década de 60, novas definições de entropia foram propostas. Adler, Konheim e McAndrew [2] propuseram para aplicações em espaços topológicos a Entropia Topológica h. Dinaburg [3] e Bowen [4] propuseram para aplicações em espaços métricos a entropia métrica, conhecida como Entropia de Bowen h_d. Tais definições foram evidentemente inspiradas na entropia h_μ da Teoria da Medida proposta por Kolmogorov e Sinai.

No fim da década de 60, num trabalho não coordenado mas de contribuição comunitária, Goodwyn [5], Dinaburg [3] e Goodman [6] provaram resultados que juntos trouxeram ao campo da entropia o resultado conhecido como Princípio Variacional para entropia. Tal resultado é belíssimo, relaciona diferentes definições de entropia em espaços com diferentes estruturas matemáticas e estabelece que a entropia topológica de aplicações contínuas em espaço métrico compacto é igual ao supremo das entropias de Kolmogorov-Sinai tomado sobre as medidas de probabilidade invariantes:

$$h(T) = \sup \left\{ h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X,T) \right\}.$$

Observamos que o resultado citado é estabelecido apenas para aplicações contínuas em espaços métricos compactos. Mas há aplicações definidas em espaços não compactos para as quais se interessa determinar a entropia, vide Exemplo 3.2.36. Daí o interesse em verificar se o Princípio Variacional é válido para aplicações em espaços métricos não compactos - e é o que exploramos nesta dissertação. Um prenúncio do Princípio Variacional para espaços não compactos foi apresentado no Lema 1.5 do artigo [7] de Michael Handel e Bruce Kitchens. Em 2009, Mauro Patrão (UnB) aperfeiçoou este resultado utilizando definições estendidas de cobertura, métrica e entropia. O aperfeiçoamento em relação ao trabalho de Handel e Kitchens se deve ao fato de que Patrão garante que o ínfimo das entropias métricas é sempre atingido quando se toma um certo tipo de métrica, a qual denominou de métrica admissível, além de mostrar que a igualdade também coincide com a entropia topológica tomada sobre coberturas admissíveis. Nosso trabalho nesta dissertação visa explorar, por meio de pesquisa bibliográfica, a construção apresentada por Patrão no artigo [8], o qual estabelece o Princípio Variacional para aplicações próprias em espaços métricos separáveis localmente compactos:

$$\sup_\mu h_\mu(T) = h^*(T) = \min_d h_d(T),$$

sendo o mínimo atingido sempre que d é uma métrica admissível.

Em detalhes, para obter o resultado citado, Patrão define coberturas admissíveis e propõe a Entropia Topológica Admissível h^*, uma extensão da entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew - agora tomada sobre coberturas admissíveis. Visando lidar com espaços não compactos, Patrão também generaliza a entropia topológica de Bowen, propondo a Entropia de Bowen Estendida h_d^*, definindo-a sobre subconjuntos quaisquer, não obrigatoriamente compactos. Como essas novas definições de entropia são nada mais do que extensões das definições clássicas, as novas definições coincidem com as definições clássicas de entropia topológica quando o espaço é compacto.

Para que alguns resultados já conhecidos para o caso compacto fosse verificado para o caso não compacto, Patrão define a classe de métricas admissíveis. Com uma métrica desta classe é possível provar as Proposições 3.2.15 e 3.2.21, e também obter que o ínfimo das entropias métricas é sempre alcançado se a métrica tomada é do tipo admissível. Fazendo um paralelo, a Proposição 3.2.15 é a versão para espaços não compactos da Proposição 2.3.10. As métricas admissíveis também são, de certa forma, extensões para espaços não compactos das métricas usuais de espaços compactos, isso é tanto verdade que, quando o espaço é compacto, todas as métricas são admissíveis. Tecnicamente, a definição de métrica admissível é necessária para tomar métricas com propriedades que todas as métricas em espaços compactos possuem mas que nem todas as métricas em espaços não compactos possuem.

Afim de finalmente obter o resultado principal, Patrão toma a extensão $\tilde{T}$ da aplicação própria T definida na compactificação por um ponto $\tilde{X}$ do espaço localmente compacto X. Isto permite relacionar as entropias das aplicações correspondentes - Proposição 3.2.21 e Lema 3.2.22 - e facilita a demonstração do princípio variacional para espaços não compactos (Teorema 3.2.28), pois nos permite utilizar resultados já conhecidos para espaços compactos, obtendo, por exemplo, $h(\tilde{T}) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T)$.

No primeiro capítulo apresentaremos resultados e definições preliminares de espaços métricos, espaços topológicos, espaços de medida, sistemas dinâmicos e do conjunto das medidas invariantes de uma aplicação T. No segundo capítulo apresentaremos as definições clássicas de entropia: a entropia de Kolmogorov-Sinai para aplicações mensuráveis em espaços de probabilidade; a entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew para aplicações contínuas em espaços topológicos compactos e a entropia topológica de Bowen para aplicações contínuas em espaços métricos não necessariamente compactos. Apresentaremos no terceiro capítulo o Princípio Variacional para espaços compactos e, em seguida, as definições estendidas de entropia topológicas e demais construções propostas por Patrão para, então, apresentar o Princípio Variacional para espaços não compactos. Finalizaremos a dissertação apresentando um exemplo no qual se usa o Princípio Variacional para espaços não compactos para mostrar que a entropia topológica admissível de um isomorfismo linear de um espaço vetorial normado de dimensão finita é nula.

Capítulo 1

Preliminares

Colecionaremos ao longo deste capítulo resultados e definições que usaremos ao longo deste trabalho. Nas primeiras três seções apresentaremos definições e resultados básicos de espaços métricos, espaços topológicos e espaços de medida. Na quarta seção apresentaremos algumas definições de sistemas dinâmicos e na quinta seção apresentaremos resultados relacionados ao conjunto das medidas invariantes de uma aplicação contínua. O conteúdo deste capítulo tem como principais referências os livros [9], [10], [11], [12], [13] e [14].

1.1 Espaços métricos

Uma *métrica* num conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* do ponto x ao ponto y, que satisfaz às seguintes condições:

i) $d(x, x) = 0$;

ii) $d(x, y) > 0$, se $x \neq y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para quaisquer $x, y, z \in X$.

Um *espaço métrico* é um par (X, d) formado por um conjunto X e uma métrica d em X.

Sejam X um espaço métrico, $r > 0$ um número real e a um ponto de X. A *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto

$$B(a,r) = \{x \in X; d(x,a) < r\}.$$

Dado $B \subset X$, definimos o *diâmetro de B* como

$$\operatorname{diam} B = \sup_{x,y \in B} d(x,y).$$

A proposição a seguir mostra que para quaisquer dois pontos distintos num espaço métrico existem duas bolas abertas neles centrados que os separam disjuntamente.

Proposição 1.1.1. Dados dois pontos distintos a e b do espaço métrico X, existe em X duas bolas abertas disjuntas com centros em a e b, respectivamente.

Prova. A prova desta proposição está disponível para consulta na página 27 de nossa referência [9]. ■

Seja $T : X \to Y$ uma aplicação de um espaço métrico X no espaço métrico Y e a um ponto de X. Diz-se que T é *contínua no ponto a* se, dado arbitrariamente um número $\varepsilon > 0$, é sempre possível determinar $\delta > 0$ tal que $d(x,a) < \delta$ implique em $d(T(x), T(a)) < \varepsilon$.

Dizemos que $T : X \to Y$ é *contínua* se T for contínua em todos os pontos de X.

Dizemos que $T : X \to Y$ é um *homeomorfismo* se é uma aplicação bijetora contínua com inversa $T^{-1} : Y \to X$ também contínua.

1.2 Topologia

Definições básicas

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) composto por um conjunto X e uma *topologia* τ em X, que por sua vez é uma coleção de subconjuntos de X denominados *subconjuntos abertos* que satisfazem às seguintes condições:

i) X e o subconjunto vazio $\emptyset$ são abertos;

ii) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

iii) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Num espaço topológico X, diz-se que um conjunto $V \subset X$ é uma *vizinhança* de $x \in X$ se existe um aberto $A \subset V$ com $x \in A$.

Uma aplicação $T : X \to Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y, diz-se *contínua* se a imagem inversa $T^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X.

Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se *fechado* se seu complementar é aberto.

Proposição 1.2.1. Seja Y um subconjunto do espaço topológico X. O conjunto $L \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, $L = F \cap Y$, sendo F um fechado em X.

Prova. Consideraremos Y um subespaço do espaço topológico (X, τ), no qual a topologia de Y é a topologia induzida dada por $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

Suponha que $L \subset Y$ é fechado em Y. Então $Y \backslash L \in \tau_Y$. Em particular, $Y \backslash L = A \cap Y$, para algum $A \in \tau$. Como $\{A \cap Y, (X \backslash A) \cap Y\}$ é uma partição de Y, temos $L = (X \backslash A) \cap Y$. Uma vez que $X \backslash A$ é fechado em X, obtemos que $L = F \cap Y$, sendo F um fechado em X, a saber, $F = X \backslash A$.

Reciprocamente, se $L = F \cap Y$, com F fechado em X, temos $X \backslash F$ aberto em X e $(X \backslash F) \cap Y = Y \backslash (F \cap Y) = Y \backslash L$. Como $X \backslash F$ é aberto em X, temos $(X \backslash F) \cap Y \in \tau_Y$. Logo, $Y \backslash L$ é aberto em Y, o que implica em L fechado em Y. ■

Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semicontínua inferiormente* no ponto $a \in X$, se, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $x \in V$ implica $f(a) - \varepsilon < f(x)$. De modo análogo se define função semicontínua superiormente. É possível provar que toda função real é contínua se, e somente se, é semicontínua inferiormente e superiormente.

Proposição 1.2.2. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente se, e somente se, para todo $a \in X$, $f^{-1}((-\infty, a))$ é aberto em X.

Prova. Veja Teorema 4.35 de [15]. ■

Seja X um espaço topológico. A *função característica* de um subconjunto $S \subset X$ é a função $\chi_S : X \to \mathbb{R}$ tal que $\chi_S(x) = 1$ se $x \in S$ e $\chi_S(x) = 0$ se $x \notin S$.

Proposição 1.2.3. A função característica de um subconjunto F de um espaço topológico X é semicontínua superiormente se, e somente se, F é fechado.

Prova. Veja página 104 de nossa referência [9]. ∎

Considere um espaço topológico X e um subconjunto $S \subset X$. Diz-se que um ponto $z \in X$ é *aderente* à S se toda vizinhança de z em X contém pelo menos um ponto de S. Ao conjunto dos pontos aderentes a S chamamos de *fecho* de S e indicamos com a notação $\overline{S}$. É possível provar que o fecho de qualquer subconjunto de X é um conjunto fechado, vide página 78 de nossa referência [9].

Proposição 1.2.4. Seja $T : X \to Y$ uma aplicação contínua. Para todo $S \subset Y$, tem-se $\overline{T^{-1}(S)} \subseteq T^{-1}(\overline{S})$.

Prova. Queremos mostrar que $\overline{T^{-1}(S)} \subseteq T^{-1}(\overline{S})$. Suponha por absurdo que existe $x \in \overline{T^{-1}(S)}$ tal que $x \notin T^{-1}(\overline{S})$.

Como $x \notin T^{-1}(\overline{S})$, então $T(x) \notin \overline{S}$, isto é, $T(x)$ não é aderente à S. Em particular, existe $A_x \subset Y$ aberto com $T(x) \in A_x$ tal que $A_x \cap S = \emptyset$.

Como T é contínua, $T^{-1}(A_x) \subset X$ é aberto. Sabemos que $T^{-1}(A_x \cap S) = T^{-1}(A_x) \cap T^{-1}(S)$, e assim, temos $T^{-1}(A_x) \cap T^{-1}(S) = \emptyset$. Ou seja, existe aberto $T^{-1}(A_x) \subset X$ com $x \in T^{-1}(A_x)$ tal que $T^{-1}(A_x) \cap T^{-1}(S) = \emptyset$, isto é, x não é aderente à $T^{-1}(S)$, o que é absurdo uma vez que supomos $x \in \overline{T^{-1}(S)}$.

Portanto, $\overline{T^{-1}(S)} \subseteq T^{-1}(\overline{S})$. ∎

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é *denso* em X se seu fecho $\overline{S}$ coincide com o espaço inteiro X.

De forma similar a como definimos para espaços métricos, dizemos que uma aplicação $T : X \to Y$ de um espaço topológico X num espaço topológico Y é um *homeomorfismo* se é uma aplicação bijetora contínua cuja inversa $T^{-1} : Y \to X$ é também contínua..

Um espaço topológico X diz-se *metrizável* se é possível definir uma métrica d em X de forma que os abertos definidos por d coincidem com os abertos da topologia de X. É importante salientar que nem todo espaço topológico é metrizável.

Dizemos que duas métricas d e d' definidas sobre um conjunto X são *topologicamente equivalentes* se tais métricas definem uma mesma topologia sobre X, isto é, d e d' determinam os mesmos abertos em X.

Um espaço topológico X chama-se um *espaço de Hausdorff* (ou *espaço separado*) se, dados dois pontos arbitrários $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. Em virtude da Proposição 1.1.1, todo espaço metrizável é um espaço de Hausdorff. Assim, basta tomar um espaço topológico não Hausdorff e então teremos um exemplo de espaço topológico não metrizável.

Um espaço topológico X é dito *separável* se possui um subconjunto enumerável denso. Todo espaço metrizável compacto é separável [9].

Seja X um espaço topológico. Uma *cobertura* de X é uma família $\alpha = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Se todos os conjuntos de α são subconjuntos abertos em X, dizemos que α é uma cobertura aberta. Uma subcobertura de α é uma subfamília $\alpha' = \{A_{\lambda'}\}_{\lambda' \in L'}$, com $L' \subset L$, que é ainda uma cobertura de X.

Seja α uma cobertura de X. Denotamos por

$$N(\alpha) = \inf\{\#\alpha' : \alpha' \text{ é subcobertura de } \alpha\}$$

o ínfimo do conjunto das cardinalidades de todas as subcoberturas de α.

Sejam α e β coberturas do espaço topológico X. A *junção* das coberturas α e β é a cobertura

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ e } B \in \beta\}.$$

Dada uma família enumerável de coberturas α_n, definimos $\bigvee_n \alpha_n$ como a cobertura cujos elementos são conjuntos não-vazios da forma $\bigcap_n A_n$, com $A_n \in \alpha_n$ para cada n.

Dada uma aplicação contínua $T : X \to X$ e uma cobertura α de X, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos por *cobertura junção n-iterada de α relativa à T* a cobertura

$$\alpha^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha = \alpha \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}\alpha.$$

Espaços compactos

Um espaço topológico X é dito *compacto* se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Proposição 1.2.5. Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.

Prova. Disponível na página 178 de [9]. ∎

Proposição 1.2.6. Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X.

Prova. Disponível na página 178 de [9]. ∎

Proposição 1.2.7. A união finita de subespaços compactos de um espaço topológico X é compacto.

Prova. Seja $A_1, ..., A_k$ uma coleção finita de subespaços compactos de X. Defina $Y = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Seja α uma cobertura aberta arbitrária de Y. Em particular, α é cobertura aberta de A_i para cada $i \in \{1, ..., k\}$. Então, para cada A_i existe uma subcobertura finita α_i de α. Seja $\alpha_* = \bigcup_i \alpha_i$. . É fácil ver que α_* é uma subcobertura finita de α. Assim, segue que Y é compacto. ∎

Seja $\alpha = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de um espaço métrico X. Diz-se que um número $\varepsilon > 0$ é um *número de Lebesgue* da cobertura α se para todo conjunto $S \subset X$, com $\text{diam}(S) < \varepsilon$, existe um $\lambda \in L$ tal que $S \subset A_\lambda$.

Proposição 1.2.8. Toda cobertura aberta de um espaço métrico compacto possui um número de Lebesgue.

Prova. Disponível na página 194 de [9]. ∎

Seja X um espaço topológico. Dizemos que a aplicação $T : X \to X$ é *própria* se T é uma aplicação contínua tal que a imagem inversa por T de todo conjunto compacto é compacto.

Proposição 1.2.9. Sejam X e Y espaços topológicos. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então toda aplicação contínua $T : X \to Y$ é uma aplicação própria.

Prova. Seja $K \subset Y$ compacto. Como Y é Hausdorff, segue pela Proposição 1.2.6 que K é fechado em Y. Pela continuidade de T segue que $T^{-1}(K)$ é fechado em X. Como X é compacto e $T^{-1}(K)$ é fechado, segue pela Proposição 1.2.5 que $T^{-1}(K)$ é compacto. Como K é arbitrário em Y, segue que T é uma aplicação própria. ∎

Espaços localmente compactos

Um espaço topológico X é dito *localmente compacto* se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta. Todo espaço compacto é localmente compacto uma vez que o espaço inteiro é uma vizinhança compacta de qualquer um de seus pontos.

Uma *base* de um espaço topológico X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos abertos de X tal que todo aberto $A \subset X$ se exprime como reunião $A = \bigcup B_\lambda$ de conjuntos $B_\lambda \in \mathcal{B}$. Caso $\mathcal{B}$ seja uma coleção enumerável, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *base enumerável* de X.

A prova do resultado a seguir é a mesma da Proposição 4 do Capítulo VIII de nossa referência [9].

Proposição 1.2.10. Um espaço métrico X é separável se, e somente se, possui base enumerável.

Compactificação

Uma *compactificação* do espaço topológico X é uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ tal que Y é compacto, $\varphi(X)$ é denso em Y e φ é um homeomorfismo de X sobre $\varphi(X)$.

A página 202 de nossa referência [9] dispõe de alguns exemplos interessantes de compactificação, vale a consulta.

No Capítulo 3 desta dissertação trabalharemos com a *compactificação por um ponto* de um espaço topológico X. Tal compactificação é uma aplicação $\varphi : X \to \tilde{X}$ que satisfaz às seguintes condições:

i) $\tilde{X}$ é um espaço compacto de Hausdorff;

ii) φ é um homeomorfismo de X sobre $\varphi(X)$;

iii) $\tilde{X} = \varphi(X) \cup \{\infty\}$, $\infty \notin \varphi(X)$.

O ponto ∞ tal que $\tilde{X} \backslash \varphi(X) = \{\infty\}$ chama-se o *ponto no infinito* da compactificação $\varphi : X \to \tilde{X}$.

Na subseção 3.2.2 do Capítulo 3, consideraremos a compactificação por um ponto trivial, isto é, tomaremos φ de forma que $\varphi|_X$ é igual à aplicação identidade. Assim, obtemos $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$, sobre o qual consideraremos a seguinte topologia:

$$\tau = \{A : A \text{ é aberto em } X\} \cup \{A \cup \{\infty\} : \text{ A é aberto em } X \text{ e } X \backslash A \text{ é compacto em } X\}.$$

Verifiquemos que τ é topologia. Notadamente $\emptyset$ e $\tilde{X}$ pertencem à τ, pois são abertos em X. Agora, sejam A, B, C, D abertos em X, com $X \backslash C$ e $X \backslash D$ compactos. Então,

$X \backslash (C \cap D) = (X \backslash C) \cup (X \backslash D)$ é compacto. A interseção de dois conjuntos de τ em $\tilde{X}$ tem uma das formas: $A \cap B$, $A \cap (C \cup \{\infty\}) = A \cap C$, ou $(C \cup \{\infty\}) \cap (D \cup \{\infty\}) = (C \cap D) \cup \{\infty\}$. No primeiro e no segundo caso temos, essencialmente, interseções de abertos de X, o que por definição também está contido em τ; no terceiro caso temos a união de um aberto em X, $C \cap D$ - cujo complementar é compacto -, com $\{\infty\}$. Pela definição de τ, tem-se $(C \cap D) \cup \{\infty\} \in \tau$, isto é, $(C \cup \{\infty\}) \cap (D \cup \{\infty\}) \in \tau$. Isto prova que τ é fechado para interseção finita. Falta-nos mostrar que é fechado para união arbitrária. Pois bem, sejam $\{A_\lambda\}$ e $\{B_\mu\}$ famílias de abertos em X, com cada $X \backslash B_\mu$ compacto. Então, $A = \bigcup A_\lambda$ e $B = \bigcup B_\mu$ são abertos em X e $X \backslash B = \bigcap (X \backslash B_\mu)$, sendo uma interseção de fechados, é um fechado de X e, em particular, é contido em qualquer um dos compactos $X \backslash B_\mu$. Assim, temos $X \backslash B$ compacto. De forma análoga mostra-se que $X \backslash (A \cup B)$ é compacto. Bem, uma reunião de conjuntos de τ tem uma das formas: $\bigcup A_\lambda = A$, $\bigcup (B_\mu \cup \{\infty\}) = B \cup \{\infty\}$ ou $\bigcup_{\lambda,\mu} (A_\lambda \cup B_\mu \cup \{\infty\}) = (A \cup B) \cup \{\infty\}$. Em todo caso, temos τ fechado para a união arbitrária. Isto encerra a prova de que τ é topologia em $\tilde{X}$.

Proposição 1.2.11. Todo espaço de Hausdorff localmente compacto possui uma compactificação por um ponto.

Prova. Uma elegante prova para esta proposição é encontrada na página 204 de nossa referência [9]. ■

A prova do resultado a seguir é a mesma da Proposição 7 do Capítulo VIII de nossa referência [9].

Proposição 1.2.12. Um espaço métrico localmente compacto X possui base enumerável se, e somente, sua compactificação por um ponto $\tilde{X}$ é metrizável.

1.3 Teoria ergódica

Teoria da medida

Seja X um conjunto. Uma *álgebra* de X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfazem às seguintes condições:

i) o conjunto X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem à $\mathcal{B}$;

ii) se $A \in \mathcal{B}$, então $X \backslash A \in \mathcal{B}$;

iii) se $A, B \in \mathcal{B}$, então $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{B}$.

Uma álgebra $\mathcal{B}$ em X é dita σ-álgebra se, dada $A_1, A_2, ...$ uma família enumerável de subconjuntos de $\mathcal{B}$, a união $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e a interseção $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ pertencem à $\mathcal{B}$.

O par $(X, \mathcal{B})$ formado pelo conjunto X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ é chamado *espaço mensurável*. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *mensurável* ou $\mathcal{B}$-mensurável se $A \in \mathcal{B}$.

Uma aplicação $T : X \to Y$, de um espaço mensurável X num espaço mensurável Y, é dita *mensurável* se para cada $B \subset Y$ mensurável tem-se $T^{-1}(B) \subset X$ mensurável.

Se X é um espaço métrico ou um espaço topológico, então podemos falar em conjuntos abertos. Seja τ a coleção de subconjuntos abertos de X. A σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada pela coleção τ é denominada *Borel σ-álgebra* de X. Observe que os elementos de $\mathcal{B}$ são subconjuntos abertos e/ou fechados de X. No Capítulo 3 trabalharemos com a Borel σ-álgebra pois uma aplicação contínua, de um espaço topológico X nele mesmo, é uma aplicação mensurável em $(X, \mathcal{B})$, o que será fundamental para que possamos trabalhar com a entropia de Kolmogorov-Sinai.

Proposição 1.3.1. Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua do espaço topológico X, então T é uma aplicação mensurável do espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a Borel σ-álgebra de X.

Prova. Seja τ a topologia do espaço topológico X.

Pela definição da Borel σ-álgebra $\mathcal{B}$, sabemos que τ em união com a coleção formada pelos complementares dos conjuntos de τ é uma base para $\mathcal{B}$, isto é, todo conjunto $\mathcal{B}$-mensurável pode ser descrito como união e/ou interseção de conjuntos abertos ou fechados de X. Assim, é suficiente mostrar que T preserva a mensurabilidade dos abertos e dos fechados de X.

De fato, como T é contínua, a imagem inversa de subconjunto aberto em X é aberto em X e a imagem inversa de subconjunto fechado em X é fechado em X; isto é, a imagem inversa de abertos e de fechados em X é $\mathcal{B}$-mensurável. Então, T preserva a mensurabilidade dos abertos e dos fechados de X. Concluímos então que T é um aplicação mensurável do espaço $(X, \mathcal{B})$. ∎

Sejam X um conjunto e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra formada por subconjuntos de X. Uma *medida* em $(X, \mathcal{B})$ é a aplicação $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ que satisfaz às seguintes condições:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) se $A_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, ...$, são dois a dois disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Dizemos que μ é uma *medida de probabilidade* se $\mu(X) = 1$.

À terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ formada por um conjunto X, uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ e uma medida μ do espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ atribuimos o nome *espaço de medida*. Dizemos que um espaço de medida é um *espaço de probabilidade* se μ é uma medida de probabilidade.

Shift de Bernoulli

A construção aqui apresentada foi fortemente inspirada na versão apresentada na Seção 10 de nossa referência [12].

Seja X um espaço topológico finito com $n \geq 1$ elementos. Denotaremos por $B(X)$ o conjunto das sequências $\theta : \mathbb{Z} \to X$ munido da topologia produto, isto é, $B(X) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} X_i$, com $X_i = X \ \forall \ i \in \mathbb{Z}$. Indentifiquemos X com o conjunto $\{1, ..., n\}$ munido da topologia discreta, ou seja, associamos cada elemento de X a um número inteiro de 1 a n de forma biunívoca.

Seja $\mathcal{B}(X)$ a Borel σ-álgebra de X. Consideraremos uma medida de probabilidade $\mu_0 : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\mu_0(\{i\}) = p_i$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, o que implica em $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Observe que, para cada i, temos associado ao conjunto $\{i\}$ um elemento de X e, assim, p_i é a probabilidade associada a um único elemento dentre os n elementos de X.

Dados $B_1, ..., B_m \in \mathcal{B}(X)$, definimos em $B(X)$ o *cilindro de comprimento m* dado pelo conjunto

$$[j, B_1, ..., B_m] = \{\theta \in B(X) \ : \ \theta(j + i) \in B_i \ \forall \ 1 \leq i \leq m\}.$$

Consideremos $\mathcal{B}(B(X))$ a Borel σ-álgebra de $B(X)$. Observe que, como consideramos a topologia produto para $B(X)$, sabemos que seus conjuntos abertos são da forma $\prod_{j_0 < j_i \leq j_m} B_{j_i} \times \prod_{i \in (\mathbb{Z} \setminus \{j_1, ..., j_m\})} X$, com $B_{j_i} \in \mathcal{B}(X)$ para todo $j_i \in \{j_1, ..., j_m\}$. Em forma de cilindros, obtemos que os conjuntos abertos são da forma $[j_0, B_{j_1}, ..., B_{j_m}]$. Como os abertos geram $\mathcal{B}(B(X))$, podemos definir uma medida de probabilidade com base numa restrição a seus conjuntos abertos. Definamos então a medida

$\mu : \mathcal{B}(B(X)) \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\mu([j, B_1, ..., B_m]) = \prod_{i=1}^{m} \mu_0(B_i).$$

Não é difícil verificar que μ é uma medida de probabilidade de $(B(X), \mathcal{B}(B(X)))$. Denotaremos o espaço de probabilidade $(B(X), \mathcal{B}(B(X)), \mu)$ por $B(p_1, ..., p_n)$.

Denominamos *Shift de Bernoulli* a aplicação $\sigma : B(p_1, ..., p_n) \to B(p_1, ..., p_n)$ que, dada $\theta \in B(p_1, ..., p_n)$, associa à θ uma sequência $\sigma(\theta)$ tal que $\sigma(\theta)(n) = \theta(n+1)$.

Ergodicidade

Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{C}, \rho)$ espaços de probabilidade. Dizemos que uma aplicação $T : X \to Y$ *preserva medida* se T é mensurável e $\mu(T^{-1}(C)) = \rho(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Dizemos que $T : X \to Y$ é uma aplicação que *preserva medida invertivelmente* se T preserva medida, é bijetora e T^{-1} é também uma aplicação que preserva medida.

Se $T : X \to X$ preserva medida em $(X, \mathcal{B}, \mu)$, dizemos que T *preserva* μ ou que μ *é T-invariante*.

Dizemos que uma certa propriedade matemática é válida em μ-quase todo ponto de um conjunto X se tal propriedade é válida para quase todo ponto de X exceto num subconjunto de μ-medida nula de X.

Definição 1.3.2. Sejam $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i \in \{1, 2\}$, espaços de medida e $T_i : X_i \to X_i$, $i \in \{1, 2\}$, aplicações que preservam medida. Dizemos que T_1 é *equivalente* à T_2 se existe uma aplicação mensurável $F : X_1 \to X_2$ tal que:

i) $\forall\ B_2 \in \mathcal{B}_2, F^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$ e $\mu_1(F^{-1}(B_2)) = \mu_2(B_2)$;

ii) Existe $Q : X_2 \to X_1$ tal que $I = Q \circ F = F \circ Q$, para quase todo ponto;

iii) $\forall\ B_1 \in \mathcal{B}_1, Q^{-1}(B_1) \in \mathcal{B}_2$ e $\mu_2(Q^{-1}(B_1)) = \mu_1(B_1)$;

iv) $T_2 \circ F = F \circ T_1$, para quase todo ponto.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Uma aplicação que preserva medida T de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é chamada *ergódica* se todos os conjuntos B de $\mathcal{B}$ com $T^{-1}(B) = B$ são tais que $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$. Alternativamente, diz-se que T é ergódica relativa à μ.

Seja $T : X \to X$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dizemos que a medida μ é *ergódica* - relativa à T - se T é uma aplicação ergódica de $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Teorema 1.3.3 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** Seja $T : X \to X$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dada qualquer função integrável $\varphi : X \to \mathbb{R}$, o limite

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x))$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso, a função $\tilde{\varphi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

A definição e a proposição a seguir foram extraídas do artigo *Ergodic Sets* de John Oxtoby [16]. As usaremos pontualmente no Lema 3.2.25.

Um ponto $p \in X$ é dito *quasi-regular* se $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i p)$ é definida para toda $f \in \mathcal{C}(X)$, onde $\mathcal{C}(X)$ denota o espaço das funções reais contínuas de X com a norma $||f|| = \max |f(p)|$.

Proposição 1.3.4. Para qualquer subconjunto compacto $K_0 \subset X$, qualquer ponto quasi-regular p e qualquer medida ergódica μ, existe um conjunto compacto K tal que $K_0 \subset K \subset K_0 \cup O^+(p)$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_K(f^i p) = \mu(K) = \mu(K_0)$.

Prova. Disponível na página 121 de [16]. ∎

O teorema a seguir nos será útil pontualmente na prova da Proposição 3.2.27. O teorema é devido a Dmitri Egorov, um matemático russo nascido em 1869. Seu sobrenome é traduzido do alfabeto cirílico hora como Egorov e hora como Egoroff, sendo o motivo do teorema ser conhecido por ambos os nomes.

Dizemos que uma sequência (f_n) de funções mensuráveis converge uniformemente em S para uma função mensurável f se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in S$ e para todo $n > N$ tem-se $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorema 1.3.5 (Teorema de Egoroff/Egorov)**.** Se μ é uma medida finita e (f_n) é uma sequência de funções reais mensuráveis que converge em quase todo ponto em X para uma função real mensurável f, então, para cada $\delta > 0$, existe um subconjunto $E_\delta \subset X$ com $\mu(X \backslash E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) converge uniformemente para f em E_δ.

Prova. A prova deste teorema está disponível na nossa referência [10]. ■

Partições

Uma *partição* $\mathcal{P}$ do espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é uma família finita ou enumerável de conjuntos de $\mathcal{B}$, com μ-medida não-nula, tais que:

i) $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mu(P_1 \cap P_2) = 0$;

ii) $\mu\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \backslash X\right) = 0$.

Observe que, por definição, toda partição é formada por conjuntos mensuráveis. pois seus conjuntos são provenientes da σ-álgebra $\mathcal{B}$.

Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é *refinamento* de (ou, *mais fina* que) $\mathcal{P}$, o que denotamos por $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, se todo conjunto de $\mathcal{Q}$ está contido em algum conjunto de $\mathcal{P}$. Isto implica no fato de que todo conjunto de $\mathcal{P}$ é união de conjuntos de $\mathcal{Q}$.

Suponha $T : X \to X$ uma aplicação que preserva medida. Se $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ é uma partição, então $T^{-m}\mathcal{P}$ denota a partição $\{T^{-m}P_1, ..., T^{-m}P_n\}$.

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. A *junção* das partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ é a partição

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P} \text{ e } Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Dada uma família enumerável de partições $\mathcal{P}_n$, definimos $\bigvee_n \mathcal{P}_n$ como a partição cujos elementos são conjuntos de medida não nula da forma $\bigcap_n P_n$, com $P_n \in \mathcal{P}_n$ para cada n.

Dada uma aplicação mensurável $T : X \to X$ e uma partição $\mathcal{P}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos por *partição junção n-iterada de $\mathcal{P}$ relativa à T* a partição

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P} = \mathcal{P} \vee ... \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}.$$

A seguir apresentamos uma observação retirada da página 76 de [14].

Observação 1.3.6. Se $n \geq 0$ e T é uma aplicação que preserva medida, então

i) $T^{-m}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = T^{-m}\mathcal{P} \vee T^{-m}\mathcal{Q}$;

ii) $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \Rightarrow T^{-m}\mathcal{P} \leq T^{-m}\mathcal{Q}$.

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Denotamos por $N(\mathcal{P})$ o número de conjuntos não vazios da partição $\mathcal{P}$.

Para uma partição $\mathcal{P}$ de um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ metrizável, definimos o *diâmetro de* $\mathcal{P}$ como

$$\operatorname{diam} \mathcal{P} = \sup\{ \operatorname{diam} P \mid P \in \mathcal{P} \}.$$

1.4 Sistemas dinâmicos

Dadas as aplicações T e S, denotamos a *composição* de duas funções calculada num ponto x por $T \circ S(x) = T(S(x))$. A n-ésima composição de T consigo mesmo denotamos por

$$T^n(x) = T \circ ... \circ T(x),$$

onde n indica que ocorrem $n-1$ composições. Se a inversa T^{-1} existe, escrevemos $T^{-n}(x) = T^{-1} \circ ... \circ T^{-1}(x)$, onde $-n$ indica que ocorrem $n-1$ composições.

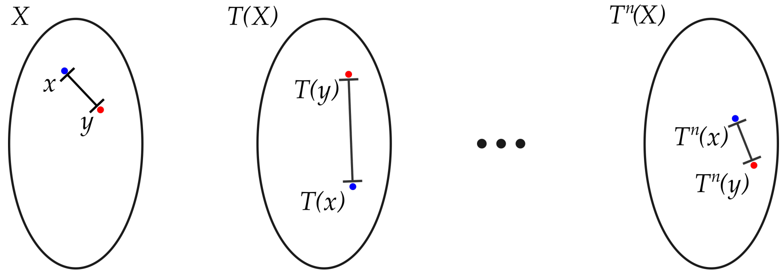
A *órbita futura* de x é o conjunto de pontos $x, T(x), T^2(x), ...$ e é denotado por $\mathcal{O}^+(x)$. Se T possui inversa, definimos a *órbita completa* de x por $\mathcal{O}(x)$ como o conjunto de pontos $T^n(x)$ com $n \in \mathbb{Z}$. A *órbita passada* é o conjunto de pontos $x, T^{-1}(x), T^{-2}(x), ...$ e é denotado po $\mathcal{O}^-(x)$. Nos referimos ao ponto $T^n(x)$ da órbita de x como a *n-ésima iterada de x pela aplicação T*.

Dados uma aplicação $T : X \to X$ contínua num espaço métrico (X, d) e um número n natural, consideraremos a métrica d_n definida por

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} d(T^i(x), T^i(y)).$$

Observe que tal métrica simplesmente avalia as órbitas futuras de x e de y, comparando iterada a iterada a distância entre elas, entregando por fim qual a maior distância alcançada entre os pontos correspondentes das órbitas de x e y até a n-ésima iterada, vide Figura 1.1.

Figura 1.1: Distância entre elementos da órbita futura de x e de y



Fonte: do autor.

Uma bola de centro x e raio $\varepsilon > 0$ na métrica d_n é denominada *bola dinâmica* e é dada por

$$B_{d_n}(x, \varepsilon) = \bigcap_{i=0}^{n} T^{-i}B(T^i x, \varepsilon) = \{y \in X : d_n(x, y) < \varepsilon\}.$$

Proposição 1.4.1. Considere (X, d) um espaço métrico e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. As métricas d e d_n são topologicamente equivalentes, onde

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} d(T^i(x), T^i(y)), \text{ para algum } n \text{ natural.}$$

Prova. Seja B um aberto em X segundo a métrica d. Então $B = \bigcup_{x \in B} B(x, \varepsilon_x)$, onde $B(x, \varepsilon_x)$ é uma bola aberta (segundo a métrica d) centrada em x de raio ε_x tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset B$. Para cada $x \in B$, tomemos a bola dinâmica $B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$. Note que $B_{d_n}(x, \varepsilon_x) \subset B(x, \varepsilon_x)$ para todo $x \in B$. Assim, $\bigcup_{x \in B} B_{d_n}(x, \varepsilon_x) \subset \bigcup_{x \in B} B(x, \varepsilon_x) = B$. Por outro lado, temos $B \subset \bigcup_{x \in B} B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$, e portanto, $B = \bigcup_{x \in B} B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$. Constatamos que B é união de abertos em X segundo a métrica d_n, o que implica em B aberto em X segundo a métrica d_n.

Reciprocamente, seja B um aberto em X segundo a métrica d_n. Então $B = \bigcup_{x \in B} B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$, situação na qual $B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$ é uma bola aberta (segundo a métrica d_n) centrada em x de raio ε_x tal que $B_{d_n}(x, \varepsilon_x) \subset B$. Observe que,

$$B_{d_n}(x, \varepsilon_x) = \bigcap_{i=1}^{n} T^{-i}(B(T^i x, \varepsilon_x)).$$

Como T é contínua, $T^{-i}(B(T^i x, \varepsilon_x))$ é aberto (segundo a métrica d) em X para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Dessa forma, $B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$ é interseção finita de abertos em X segundo a métrica d, o que implica em $B_{d_n}(x, \varepsilon_x)$ aberto em X segundo a métrica d. Daí, B é união de abertos em X segundo a métrica d, o que implica em B aberto em X segundo a métrica d.

Portanto, d e d_n determinam os mesmos abertos em X, isto é, d e d_n são topologicamente equivalentes. ■

1.5 O conjunto das medidas invariantes $\mathcal{M}(X,T)$

Seja X um espaço métrico compacto. Denotaremos por $\mathcal{M}(X)$ a coleção de todas as medidas de probabilidades definidas no espaço mensurável $(X,\mathcal{B})$, sendo $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel de X.

Dada uma aplicação contínua T, denotaremos por

$$\mathcal{M}(X,T) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) \ : \ \mu \text{ é } T\text{-invariante}\}$$

o conjunto formado por todas as medidas T-invariantes de $\mathcal{M}(X)$.

Teorema 1.5.1. Se X é um espaço métrico e $\mu \in \mathcal{M}(X)$, então μ é *regular*, isto é, para cada $B \in \mathcal{B}$ e para cada $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto U_ε e um conjunto fechado C_ε com $C_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ e $\mu(U_\varepsilon \backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$.

Prova. A prova deste teorema é a mesma do Teorema 6.1 de [14]. ■

Definição 1.5.2. Seja X um espaço métrico compacto. A *topologia-fraca** de $\mathcal{M}(X)$ é a menor topologia tal que as aplicações $\mu \longmapsto \int_X f d\mu$, com $f \in C(X)$, são contínuas.

$C(X)$ é o espaço das funções contínuas em X.

Observação 1.5.3. Seja X um espaço métrico compacto. Se $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}(X), n \geq 1$, podemos provar que as seguintes sentenças são equivalentes:

i) $\mu_n \to \mu$ na topologia-fraca*;

ii) Para cada subconjunto fechado F de X, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$;

iii) Para cada subconjunto aberto U de X, $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$;

iv) Para cada $A \in \mathcal{B}$ com $\mu(\partial A) = 0$, $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

Prova. A prova desta observação está disponível para consulta na página 149 de nossa referência [14]. ■

Teorema 1.5.4. Se X é um espaço métrico compacto, então $\mathcal{M}(X)$ é um compacto na topologia-fraca*.

Prova. Disponível para consulta na página 150 de nossa referência [14]. ■

Teorema 1.5.5. Seja $T : X \to X$ contínua do espaço métrico compacto X. Se $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{M}(X)$ e $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência dada por $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n \circ T^{-i}$, então qualquer ponto limite μ de $\{\mu_n\}$ é um elemento de $\mathcal{M}(X,T)$. (A compacidade de $\mathcal{M}(X)$ garante a existência do ponto limite.)

Prova. Disponível para consulta na página 151 de nossa referência [14]. ■

Corolário 1.5.5.1. Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua do espaço métrico compacto X, então o conjunto $\mathcal{M}(X,T)$ não é vazio.

Prova. Disponível para consulta na página 152 de nossa referência [14]. ■

Capítulo 2

Entropia

Nos estudos de Termodinâmica a entropia é presente desde 1865, comumente descrita como medida do grau de desordem de um sistema.

Em 1948, o matemático Claude Shannon propôs no artigo [17] a Teoria Matemática da Comunicação, a qual veio a ser popularmente denominada Teoria da Informação. Ali, relacionando com escolha, incerteza e probabilidade, Shannon propôs também a definição de entropia de sistemas de comunicação da Teoria da Informação, a qual denotou, sem motivo aparente, pela letra H. Não temos a pretensão de expor aqui toda a riqueza histórica existente em volta do tema entropia. Para saber mais detalhes sobre a origem da entropia na teoria da informação vale a leitura do artigo [17].

De olho nesta rica teoria, Andrei Kolmogorov e Yakov Sinai, em 1958, desenvolveram para Teoria Ergódica a entropia num espaço de probabilidade, tendo aqui o objetivo de obter um invariante de equivalência ergódica. Em 1965 tal definição de entropia foi usada como base para a definição da entropia topológica proposta pelos pesquisadores Adler, Konheim e McAndrew. Já no fim dos anos 60, Dinaburg e Bowen propuseram uma versão para espaços métricos da entropia topológica, a qual se provou intimamente relacionada com a entropia de Adler, Konheim e McAndrew em espaços compactos (Proposição 2.3.10).

Neste capítulo apresentaremos as definições e alguns resultados envolvendo as entropias de Kolmogorov-Sinai, de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen. Na primeira seção apresentaremos a entropia de Kolmogorov-Sinai, também conhecida por entropia com medida, uma vez que é definida num espaço de medida. Na segunda seção apresentaremos a entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew e, na terceira seção, a entropia topológica de Bowen.

2.1 Entropia com medida de Kolmogorov-Sinai

A definição de entropia que apresentaremos a seguir foi proposto pelos matemáticos russos Andrei Kolmogorov e Yakov Sinai. A história conta que esta definição surge em 1958 com Kolmogorov transladando a noção de entropia de Shannon da Teoria da Informação para a Teoria Ergódica. Juntamente com o seu, a época, aluno de doutorado, Yakov Sinai, Kolmogorov publicou a teoria que ele chamou de "nova métrica invariante para sistemas dinâmicos"[1]. Tal teoria permitiu verificar quando duas aplicações que preservam medida num espaço de probabilidade não são equivalentes. Isto ocorre quando as aplicações não possuem uma mesma entropia. Este resultado é especialmente lembrado por permitir distinguir dois Shifts de Bernoulli por meio de suas entropias, que são facilmente calculáveis, vide Exemplo 2.1.16.

Ao longo deste texto, log representa o logaritmo natural - o logaritmo na base e. Por convenção, consideraremos $0 \log 0 = 0$.

No Capítulo 1 definimos partição tomando conjuntos na σ-álgebra $\mathcal{B}$. Por esta razão, por definição, partições neste texto são sempre partições de Borel, ou simplesmente, partições mensuráveis.

2.1.1 Entropia de partição

Definição 2.1.1. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ uma partição do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. A *entropia da partição* $\mathcal{P}$ é o número

$$H_\mu(\mathcal{P}) := -\sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) \log \mu(P_i).$$

De acordo com [14], segue da definição as seguintes observações.

Observação 2.1.2.

i) $H_\mu(\mathcal{P}) \geq 0$.

ii) Se $T : X \to X$ é aplicação que preserva medida, então $H_\mu(T^{-1}\mathcal{P}) = H_\mu(\mathcal{P})$.

Muitas propriedades de entropia são consequências do seguinte resultado elementar.

Teorema 2.1.3. A função $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ x \log x, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

é estritamente convexa, isto é, $\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ se $x, y \in [0, \infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$; a igualdade é obtida somente se $x = y$ ou $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Por indução obtém-se que

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(x_i)$$

se $x_i \in [0, \infty)$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$; a igualdade é obtida quando $x_i = x_j$ para quaisquer $i, j \in \{1, ..., k\}$ tais que α_i, α_j são não-nulos.

Prova. Disponível na página 79 de [14]. ∎

Corolário 2.1.3.1. Se $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$, então $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log k$. Além disso, $H_\mu(\mathcal{P}) = \log k$ se, e somente se, $\mu(P_i) = \frac{1}{k}\ \forall\ i \in \{1, ..., k\}$.

Prova. Este resultado segue do anterior, basta tomar $\alpha_i = \frac{1}{k}$ e $x_i = m(P_i), 1 \leq i \leq k$, conforme sugerido em [14]. ∎

2.1.2 Entropia condicional

Definição 2.1.4. Dadas as partições $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ e $\mathcal{Q} = \{Q_1, ..., Q_p\}$ do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, a *entropia da partição $\mathcal{P}$ dada a partição $\mathcal{Q}$* é o número

$$H_\mu\left(\mathcal{P}/\mathcal{Q}\right) = -\sum_{i,j} \mu\left(P_i \cap Q_j\right) \log \frac{\mu\left(P_i \cap Q_j\right)}{\mu(Q_j)}.$$

As observações a seguir são resultados imediatos.

Observação 2.1.5.

i) $H_\mu\left(\mathcal{P}/\mathcal{Q}\right) \geq 0$.

ii) Se $\mathcal{Q} = \{X\}$, então $H_\mu\left(\mathcal{P}/\mathcal{Q}\right) = H_\mu\left(\mathcal{P}\right)$.

Proposição 2.1.6. Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ e $\mathcal{M}$ partições do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então,

i) $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}/\mathcal{M}) = H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{M}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{P} \vee \mathcal{M})$.

ii) $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{P})$.

iii) $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \Rightarrow H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{M}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{M})$.

iv) $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q} \Rightarrow H_\mu(\mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{Q})$.

v) $\mathcal{Q} \leq \mathcal{M} \Rightarrow H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) \geq H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{M})$.

vi) $H_\mu(\mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$.

vii) $H_\mu(\mathcal{P}) \geq H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{M})$.

viii) $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}/\mathcal{M}) \leq H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{M}) + H_\mu(\mathcal{Q}/\mathcal{M})$.

ix) $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$.

x) Se T preserva medida, então $H_\mu\left(T^{-1}\mathcal{P}/T^{-1}\mathcal{Q}\right) = H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$ e

xi) $H_\mu\left(T^{-1}\mathcal{P}\right) = H_\mu(\mathcal{P})$.

xii) $H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = 0 \iff \mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$.

Prova. As provas dos itens i) até xi) podem ser encontradas a partir da página 81 de [14]. Já a prova do item xii) é trivial, conforme consta em [12] na Página 215. ∎

2.1.3 Entropia de uma aplicação que preserva medida

Definição 2.1.7. Dadas $T : X \to X$ uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\mathcal{P}$ uma partição de X com entropia finita, definimos a *entropia de T relativa à partição* $\mathcal{P}$ como

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P}\right).$$

Observe que $h_\mu(T, \mathcal{P}) \geq 0$. Tal fato segue imediatamente do item i) da Observação 2.1.2.

Devemos garantir que o limite presente na definição anterior sempre existe. Para tal, apresentamos primeiro o teorema a seguir que considera a seguinte definição: uma sequência $(a_n)_n$ em $[-\infty, +\infty)$ é dita *subaditiva* se $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ para todos $m, n \geq 1$.

Teorema 2.1.8. Se $(a_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência subaditiva de números reais positivos limitada inferiormente (isto é, $\inf_n \left(\frac{a_n}{n}\right) > -\infty$), então o limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$ existe.

Prova. Disponível na página 87 de [14]. ■

Corolário 2.1.8.1. Se $T : X \to X$ é uma aplicação que preserva medida e $\mathcal{P}$ é uma partição de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ com entropia finita, o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P} \right) \text{ existe.}$$

Prova. Disponível na página 88 de [14]. ■

Apresentamos agora importantes propriedades de $h_\mu(T, \mathcal{P})$; suas provas estão disponíveis na página 216 de [12].

Proposição 2.1.9. Sejam T uma aplicação que preserva medida e $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições com entropia finita do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Então,

i) $h_\mu(T, \mathcal{P}) - h_\mu(T, \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$.

ii) Se $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, então $h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T, \mathcal{Q})$.

iii) $h_\mu(T, T^{-1}\mathcal{P}) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

iv) $\forall\, n \geq 0$, $h_\mu(T, \mathcal{P}) = h_\mu(T, \bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}\mathcal{P})$.

O próximo teorema nos será necessário na prova da Proposição 3.2.27. Seu enunciado exige conhecimento prévio de alguns conhecimentos mais aprofundados de Teoria da Medida - aqui omitidos.

Notação: $\mathcal{P}^n(x)$ é o elemento da partição $\mathcal{P}^n$ que contém x.

Teorema 2.1.10 (Teorema de Shannon-McMillan-Breiman)**.** Dada qualquer partição $\mathcal{P}$

com entropia finita, o limite

$$h_\mu(T,\mathcal{P},x) = \lim_n -\frac{1}{n}\log \mu(\mathcal{P}^n(x))$$

existe em μ-quase todo ponto.

A função $x \longmapsto h_\mu(T,\mathcal{P},x)$ é μ-integrável, e o limite também vale em $L^1(\mu)$. Além disso,

$$\int h_\mu(T,\mathcal{P},x)\, d\mu(x) = h_\mu(T,\mathcal{P}).$$

Se T é ergódica, então $h_\mu(T,\mathcal{P},x) = h_\mu(T,\mathcal{P})$ em μ-quase todo ponto.

Prova. A prova deste teorema pode ser encontrada em nossas referências [12] e [13]. ■

Definição 2.1.11. Dada $T : X \to X$ uma aplicação que preserva medida de um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, definimos

$$h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}\,:\,finita} h_\mu(T,\mathcal{P}),$$

onde h_μ é a *entropia de Kolmogorov-Sinai* e o supremo é tomado sobre todas as partições finitas de $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

É evidente que $h_\mu(T) \geq 0$. Eventualmente nos referiremos à entropia de Kolmogorov-Sinai por *entropia com medida*.

Observação 2.1.12. O supremo de $h_\mu(T,\mathcal{P})$ tomado sobre todas as partições $\mathcal{P}$ com $H_\mu(\mathcal{P}) < +\infty$ coincide com $h_\mu(T)$.

Prova. Conforme o Corolário 2.1.3.1, todas as partições finitas tem entropia finita, logo, o supremo de $h_\mu(T,\mathcal{P})$ tomado sobre todas as partições $\mathcal{P}$ com entropia finita é maior ou igual que $h_\mu(T)$.

Por outro lado, se $\mathcal{P} = (P_i)_{i\geq 1}$ e $H_\mu(\mathcal{P}) < +\infty$, definimos

$$\mathcal{P}^{(n)} := \{P_1, ..., P_n, \bigcup_{j>n} P_j\}.$$

Como $\mathcal{P}^{(n)} \leq \mathcal{P}$, pelos itens i) e ii) da Proposição 2.1.9, temos

$$
\begin{aligned}
0 \leq h_\mu(T,\mathcal{P}) - h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)}) &\leq H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{P}^{(n)}) \\
&= -\sum_{\substack{P_i \in \mathcal{P} \\ P_j \in \mathcal{P}^{(n)}}} \mu(P_i \cap P_j) \log \frac{\mu(P_i \cap_j)}{\mu(P_j)} \\
&= -\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \mu(P_i \cap P_j) \log \frac{\mu(P_i \cap P_j)}{\mu(P_j)} + \\
&- \sum_{i,j > n} \mu(P_i \cap P_j) \log \frac{\mu(P_i \cap P_J)}{\mu(P_j)} \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Note que, se $i \neq j$, então $\mu(P_i \cap P_j) = 0$; e se $i = j$, $\log \frac{\mu(P_i \cap P_j)}{\mu(P_j)} = 0$. Além disso, $j > n$ implica $P_j = \bigcup_{j>n} P_j$. Então, para $i, j > n$, temos $\mu(P_i \cap P_j) = \mu(P_i)$. Então reescrevemos a desigualdade (2.1) como

$$
\begin{aligned}
0 \leq h_\mu(T,\mathcal{P}) - h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)}) &\leq -\sum_{i>n} \mu(P_i) \log \frac{\mu(P_i)}{\mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right)} \\
&= -\sum_{i>n} \mu(P_i) \log \mu(P_i) + \sum_{i>n} \mu(P_i) \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right).
\end{aligned}
$$

Como $\mathcal{P}^{(n)}$ é partição, temos $\sum_{i>n} \mu(P_i) = \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right)$. Então,

$$
0 \leq h_\mu(T,\mathcal{P}) - h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)}) \leq -\sum_{i>n} \mu(P_i) \log \mu(P_i) + \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right) \log \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right).
$$

Note que, $\lim_{n\to\infty} -\sum_{i>n} \mu(P_i) \log \mu(P_i) = 0$, pois $H_\mu(\mathcal{P}) < +\infty$. Temos também $\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right) \log \mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right) = 0$, pois $\mu\left(\bigcup_{j>n} P_j\right) \to 0$ se $n \to \infty$.

Logo,

$$
\lim_{n\to\infty} \left(h_\mu(T,\mathcal{P}) - h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)})\right) = 0,
$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)}) = h_\mu(T,\mathcal{P})$. Isto significa que a entropia de T relativa a uma partição enumerável $h_\mu(T,\mathcal{P})$, se $H_\mu(\mathcal{P}) < +\infty$, pode ser aproximada por $h_\mu(T,\mathcal{P}^{(n)})$; como $\mathcal{P}^{(n)}$ é finita, segue

$$
\sup_{\mathcal{P}\,:\,finita} h_\mu(T,\mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}\,:\,H_\mu(\mathcal{P})<+\infty} h_\mu(T,\mathcal{P}).
$$

■

Fazendo uso da Proposição 2.1.9 deduzimos a propriedade a seguir. A prova pode ser encontrada em [12] na página 222.

Proposição 2.1.13. Se $T : X \to X$ é uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$, então

$$h_\mu(T^m) = mh_\mu(T),\ \forall\ m > 0.$$

Diversas propriedades de um objeto matemático podem ser obtidas conhecendo propriedades de outro objeto de mesmo tipo, bastando para isso estabelecer uma relação de similaridade entre os dois objetos. Na Teoria do Caos, propriedades da dinâmica de uma aplicação são garantidas para outra aplicação por meio de conjugação topológica. Na Geometria Diferencial, duas superfícies tem a mesma curvatura gaussiana se existe uma isometria local entre elas. Na Topologia, "dois conjuntos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista topológico"[18]. Nesta linha, o teorema a seguir mostra que as entropias com medida de aplicações equivalentes são iguais, isto é, se duas aplicações que preservam medida são conjugadas por uma bijeção mensurável, então a entropia de tais aplicações é um mesmo número.

Teorema 2.1.14. Aplicações equivalentes possuem mesma entropia.

Prova. Sejam $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i \in \{1, 2\}$, espaços de probabilidade e $T_i : X_i \to X_i$, $i \in \{1, 2\}$, aplicações equivalentes. Então, existe uma bijeção mensurável $\rho : X_1 \to X_2$ tal que, dados $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e $B_2 \in \mathcal{B}_2$, $T_2 \circ \rho = \rho \circ T_1$, $\mu_2 \circ \rho(B_1) = \mu_1(B_1)$ e $\mu_1 \circ \rho^{-1}(B_2) = \mu_2(B_2)$. Considere também $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ partições com entropia finita de $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$, respectivamente.

Mostraremos primeiro que são iguais as entropias das n-iteradas das partições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ relativas à T_1 e T_2, respectivamente. Temos,

$$\begin{aligned} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}\mathcal{P}\right) &= -\sum_j \mu_1\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}P_{j_i}\right)\log\mu_1\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}P_{j_i}\right), \text{onde } P_{j_i} \in \mathcal{P}; \\ &= -\sum_j \mu_2\left(\rho\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}P_{j_i}\right)\right)\log\mu_2\left(\rho\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}P_{j_i}\right)\right). \end{aligned}$$

E então

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}\mathcal{P}\right) = -\sum_j \mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \rho\left(T_1^{-i}P_{j_i}\right)\right)\log\mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \rho\left(T_1^{-i}P_{j_i}\right)\right) \quad (2.2)$$
$$= -\sum_j \mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\rho\left(P_{j_i}\right)\right)\log\mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\rho\left(P_{j_i}\right)\right).$$

O passo (2.2) é devido a Observação 1.3.6.

Como ρ é bijeção, $\rho(\mathcal{P})$ é partição de X_2. Defina $\mathcal{Q} = \rho(\mathcal{P})$ e faça $\rho(P_{j_i}) = Q_{j_i}$. Segue,

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_1^{-i}\mathcal{P}\right) = -\sum_j \mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}Q_{j_i}\right)\log\mu_2\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}Q_{j_i}\right)$$
$$= H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T_2^{-i}\mathcal{Q}\right). \quad (2.3)$$

Dividindo por n a igualdade (2.3) e fazendo $n \to \infty$, obtemos $h_\mu(T_1, \mathcal{P}) = h_\mu(T_2, \mathcal{Q})$.

Então, para toda partição $\mathcal{P}$ de X_1 existe uma partição $\mathcal{Q}$ de X_2 tal que $h_\mu(T_2, \mathcal{Q}) = h_\mu(T_1, \mathcal{P})$. De forma análoga prova-se que, para toda partição $\mathcal{Q}$ de X_2 existe uma partição $\mathcal{P}$ de X_1 tal que $h_\mu(T_1, \mathcal{P}) = h_\mu(T_2, \mathcal{Q})$. Numericamente, temos

$$\{h_\mu(T_1, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partição de } X_1\} = \{h_\mu(T_2, \mathcal{Q}) \mid \mathcal{Q} \text{ partição de } X_2\}.$$

Portanto, $h_\mu(T_1) = h_\mu(T_2)$. ∎

2.1.4 O teorema de Kolmogorov-Sinai

Elencaremos agora alguns resultados de grande utilidade para o efetivo cálculo de entropia de aplicações. Para os teoremas a seguir, considere T uma aplicação que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

A prova do Teorema a seguir e também de seus corolários estão disponíveis para consulta em [12].

Teorema 2.1.15. Sejam $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec ... \prec \mathcal{P}_n \prec ...$ partições de X e $\mathcal{P}$ uma partição de

X com entropia finita. Então $\mathcal{P} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} H_\mu(\mathcal{P}/\mathcal{P}_n) = 0.$$

Corolário 2.1.15.1. Se $\mathcal{P}_1 \prec P_2 \prec ... \prec \mathcal{P}_n \prec ...$ é uma sequência de partições com entropia finita tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ gera a σ-álgebra $\mathcal{B}$, então

$$h_\mu(T) = \sup_n h_\mu(T, \mathcal{P}_n).$$

Seja T uma aplicação invertível que preserva medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Dizemos que uma partição $\mathcal{P}$ com entropia finita é um *T-gerador* se a σ-álgebra $\mathcal{B}$ é gerada pela união dos iterados $\bigvee_{j=-n}^{+n} T^j\mathcal{P}$, $n \geq 1$.

Corolário 2.1.15.2 (Kolmogorov-Sinai)**.** Se $\mathcal{P}$ é um T-gerador, então $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

Denotamos por $\mathcal{P}(x)$ o conjunto $P \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P$.

Corolário 2.1.15.3. Seja $\mathcal{P}_1 \prec P_2 \prec ... \prec P_n \prec ...$ uma sequência não decrescente de partições com entropia finita tais que $\operatorname{diam} \mathcal{P}_n(x) \to 0$ para μ-quase todo $x \in X$. Então,

$$h_\mu(f) = \sup_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n).$$

Nos próximos dois corolários, considere X um espaço metrizável munido de sua σ-álgebra de Borel.

Os corolários a seguir são ferramentas muito úteis no cálculo de entropia com medida para o caso em que o conjunto X admite alguma métrica; suas respectivas provas são apresentadas em [13], no qual pode ser encontrado mais detalhes e informações aqui oportunamente omitidos.

A tarefa de calcular a entropia com medida de uma aplicação torna-se muito simples quando se é possível tomar uma partição $\mathcal{P}$ tal que o diâmetro de $\mathcal{P}^n$ tende a zero quando n tende ao infinito, pois é suficiente calcular $h_\mu(T, \mathcal{P})$. Isto é o que garante o corolário a seguir.

Corolário 2.1.15.4. Se $\mathcal{P}$ é uma partição com entropia finita tal que, para μ-quase todo $x \in X$, tem-se $\operatorname{diam} \mathcal{P}^n(x) \to 0$, então $h_\mu(T) = h_\mu(T, \mathcal{P})$.

No exemplo a seguir utilizamos os resultados apresentados nesta seção para determinar a entropia do *Shift de Bernoulli*. Definições basilares para a compreensão do exemplo a seguir encontram-se disponíveis na Seção 1.3.

Exemplo 2.1.16 (Shift de Bernoulli)**.** Considere a aplicação *Shift de Bernoulli*

$$\sigma : B(p_1, ..., p_n) \to B(p_1, ..., p_n)$$

que associa à cada $\theta \in B(p_1, ..., p_n)$ uma sequência $\sigma(\theta)$ tal que $\sigma(\theta)(n) = \theta(n+1)$. A entropia do *Shift de Bernoulli* é $h_\mu(\sigma) = -\sum p_i \log p_i$.

Prova. Seja $P_j := \{\theta \in B(p_1, ..., p_n) \mid \theta(0) = j\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, e $\mathcal{P} := \{P_1, ..., P_n\}$. Note que $\mathcal{P}$ é uma partição de $B(p_1, ..., p_n)$. Pelo Corolário 2.1.3.1, como $\mathcal{P}$ é finita, $\mathcal{P}$ é uma partição com entropia finita.

A aplicação σ é uma aplicação que preserva medida considerando a medida produto μ associada à μ_0 apresentada na Seção 1.3.

Agora, consideremos

$$\bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma^i(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \vee \sigma^{-1}(\mathcal{P}) \vee \sigma^{-2}(\mathcal{P}) \vee ... \vee \sigma^{-(k-1)}(\mathcal{P}).$$

Note que, para cada $i \in \{0, ..., k-1\}$ e cada $j \in \{1, ..., n\}$, $\sigma^{-i}(P_j) = \{\theta \in B(p_1, ..., p_n) \mid \theta(i) = j\}$.

Então, dado $\tilde{P} \in \bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma^i(\mathcal{P})$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P_{j_0} \cap \sigma^{-1}(P_{j_1}) \cap \sigma^{-2}(P_{j_2}) \cap \cdots \cap \sigma^{-(l-1)}(P_{j_{k-1}}) \\ &= \{\theta \in B(p_1, ..., p_n) \mid \theta(i) = j_i \ \forall\, i \in \{0, 1, ..., k-1\}\} \\ &= [0; P_{j_0}, P_{j_1}, ..., P_{j_{k-1}}]. \end{aligned}$$

onde $P_{j_i} \in \mathcal{P}$ para cada $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Observe que existem n^k combinações possíveis para o cilindro $[0; P_{j_0}, P_{j_1}, ..., P_{j_{k-1}}]$, ou seja, existem n^k conjuntos em $\bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma^i(\mathcal{P})$.

Tomemos $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{P}$ quaisquer, com $\tilde{P} = [0; P_{j_0}, P_{j_1}, ..., P_{j_{k-1}}] \in \bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma^i(\mathcal{P})$.

Consideremos a métrica apresentada em [11] que define a distância entre duas sequências

$$d[\theta_1, \theta_2] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\theta_1(i) - \theta_2(i)|}{2^i}. \tag{2.4}$$

Observe que $\forall\ \theta_1, \theta_2 \in B(p_1, ..., p_n)\ \forall\ i \in \mathbb{Z},\quad |\theta_1(i) - \theta_2(i)| \leq n$. Como a série geométrica é convergente, a série apresentada em (2.4) é também convergente.

Note que, como $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{P} = [0; P_{j_0}, P_{j_1}, ..., P_{j_{k-1}}]$, para cada $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, temos $|\theta_1(i) - \theta_2(i)| = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} d[\theta_1, \theta_2] &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{|\theta_1(i) - \theta_2(i)|}{2^i} + \sum_{i=l}^{\infty} \frac{|\theta_1(i) - \theta_2(i)|}{2^i} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|\theta_1(i) - \theta_2(i)|}{2^i} \leq \sum_{i=k}^{\infty} n \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=k}^{\infty} n \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} n \frac{1}{2^i} - \sum_{i=0}^{k-1} n \frac{1}{2^i} = 2n - \frac{1 - 2^{-k}}{1 - 2^{-1}} n = \frac{2n}{2^k} = \frac{n}{2^{k-1}},$$

segue $d[\theta_1, \theta_2] \leq \frac{n}{2^{k-1}}$.

Note que $d[\theta_1, \theta_2] \to 0$ se $k \to \infty$. Ou seja, $\mathrm{diam}\mathcal{P}^k \to 0$ para $k \to \infty$. Pelo Corolário 2.1.15.4, temos $h_\mu(\sigma) = h_\mu(\sigma, \mathcal{P})$.

Calculando $h_\mu(\sigma, \mathcal{P})$, obtemos

$$\begin{aligned} h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} \sigma^{-i}(\mathcal{P})\right) \\ &= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m+1} H\left(\bigvee_{i=0}^{m} \sigma^{-i}(\mathcal{P})\right) \\ &= -\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m+1} \sum_j \mu\left(\bigcap_{i=0}^{m} P_{j_i}\right) \log \mu\left(\bigcap_{i=0}^{m} P_{j_i}\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Temos

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{m} P_{j_i}\right) &= \mu\left([0; P_{j_0}, P_{j_1}, ..., P_{j_m}]\right) \\ &= \prod_{i=0}^{m} p_{j_i} = p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_m}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aplicando (2.6) na igualdade (2.5), temos

$$\begin{aligned} h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_j p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_m} \log p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_m} \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_j p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_m} \left(\sum_{i=0}^{m} \log p_{j_i} \right) \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_j \sum_{i=0}^{m} \left(p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_m} \log p_{j_i} \right) \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \sum_j \left(p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{i+1}} ... p_{j_m} p_{j_i} \log p_{j_i} \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe que para cada j e cada i, temos $p_{j_i} \in \{p_1, ..., p_n\}$.
Definamos

$$Q_{p_k} = p_k \log p_k \sum_{j \mid p_{j_i} = p_k} p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{j+1}} ... p_{j_m}.$$

Note que,

$$\sum_j \left(p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{j+1}} ... p_{j_m} p_{j_i} \log p_{j_i} \right) = \sum_{j_i=1}^{n} Q_{p_{j_i}}.$$

Note também que $\sum_{j \mid p_{j_i} = p_k} p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{i+1}} ... p_{j_m}$ é a soma das probabilidades de todas as n^m sequências de comprimento m. Segue

$$\forall\ p_k \in \{p_1, ..., p_n\}, \sum_{j \mid p_{j_i} = p_k} p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{j+1}} ... p_{j_m} = 1.$$

Logo, $Q_{p_k} = p_k \log p_k$. Então,

$$\sum_j \left(p_{j_0} p_{j_1} ... p_{j_{i-1}} p_{j_{j+1}} ... p_{j_m} p_{j_i} \log p_{j_i} \right) = \sum_{j_i=1}^{n} p_{j_i} \log p_{j_i}.$$

Daí, segue

$$\begin{aligned} h_\mu(\sigma, \mathcal{P}) &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j_i=1}^{n} p_{j_i} \log p_{j_i} \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} (m+1) \sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log p_j.$$

■

2.2 Entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew

Introduzimos agora a noção de entropia topológica. Tal noção foi apresentada pelos pesquisadores R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew em 1963 no artigo [2]. O objetivo principal do artigo era apresentar a entropia como um invariante de aplicação contínuas, resultado aqui apresentado na Proposição 2.2.9. A entropia de Adler-Konheim-McAndrew é considerada análoga à entropia de Kolmogorov-Sinai, pois sua definição lembra muito à definição dada por Kolmogorov e Sinai.

Ao longo desta seção consideraremos X um espaço topológico compacto.

Definição 2.2.1. Uma cobertura aberta β é um *refinamento* de uma cobertura aberta α se todo elemento de β é um subconjunto de um membro de α. Notação: $\alpha < \beta$.

Definição 2.2.2. Se α é uma cobertura aberta de X, denotamos por $N(\alpha)$ o número de conjuntos da subcobertura finita de α de menor cardinalidade. Denominamos *entropia de α* o número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

Observação 2.2.3.

i) $H(\alpha) \geq 0$.

ii) Se $\alpha < \beta$, então $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

iii) $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

iv) Se $T : X \to X$ é contínua, então $H(T^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Se T é também sobrejetora, então $H(T^{-1}\alpha) = H(\alpha)$.

O primeiro item é imeadiato. Os demais itens tem provas disponíveis para consulta na página 165 de nossa referência [14].

Teorema 2.2.4. Se α é uma cobertura aberta de X e $T : X \to X$ é contínua, então o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \text{ existe.}$$

Prova. A prova consiste simplesmente em definir $a_n = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right)$ e em seguida mostrar que $a_{n+k} \leq a_n + a_k$ para $k, n \geq 1$. Daí o resultado segue pelo Teorema 2.1.8. ■

Definição 2.2.5. Sejam α uma cobertura aberta de X e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Definimos por *entropia de T relativa à α* o limite

$$h(T, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right).$$

Observação 2.2.6.

i) $h(T, \alpha) \geq 0$.

ii) Se $\alpha < \beta$, então $h(T, \alpha) \leq h(T, \beta)$.

Novamente, o primeiro item é imediato. O segundo item tem prova disponível para consulta na página 166 de nossa referência [14].

Definição 2.2.7. Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Definimos por *entropia topológica de T* o supremo

$$h(T) = \sup_{\alpha} h(T, \alpha)$$

tomado sobre todas as coberturas abertas de X.

Eventualmente nos referiremos a tal entropia por *entropia de Adler-Konheim-McAndrew*.

Observação 2.2.8.

i) $h(T) \geq 0$

O resultado a seguir estabelece para a entropia de Adler-Konheim-McAndrew uma ideia semelhante àquela estabelecida para a entropia de Kolmogorov-Sinai no Teorema 2.1.14. Mostraremos que a entropia topológica é invariante por homeomorfismo. Este resultado é muito útil por nos permitir escolher dentre aplicações homeomorfas aquela que terá sua entropia determinada com mais facilidade. Por outro lado, obtemos que duas aplicações com entropia topológica diferentes não são homeomorfas.

Proposição 2.2.9. Sejam X_1, X_2 espaços topológicos compactos e $T_i : X_i \to X_i$ aplicações contínuas para $i \in \{1,2\}$ e $\phi : X_1 \to X_2$ é uma aplicação contínua tal que $\phi(X_1) = X_2$ e $\phi \circ T_1 = T_2 \circ \phi$, então $h(T_1) \geq h(T_2)$. Se ϕ é um homeomorfismo, então $h(T_1) = h(T_2)$.

Prova. Disponível na página 167 de [14]. ∎

2.3 Entropia topológica de Bowen

Apresentaremos agora a definição de entropia topológica alternativa que usa o conceitos de conjuntos geradores e conjuntos separados. Tais definições foram apresentadas por Dinaburg e Bowen nos artigos [3] e [4], sendo extensamente explorada neste último.

Peter Walters define a entropia de Bowen para aplicações uniformemente contínuas [14]. Nós optamos por acompanhar Krerley e Viana [13] e definir para aplicações contínuas e exigir a uniformidade somente quando necessário. Além do mais, se X é compacto, toda aplicação contínua é uniformemente contínua. Nesta seção consideraremos (X, d) um espaço métrico - não necessariamente compacto - e $T : X \to X$ uma aplicação contínua.

Definição 2.3.1 (Conjunto (n, ε)-gerador)**.** Seja n um número natural, $\varepsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Um subconjunto $G \subset X$ é dito (n, ε)-*gerador* de K com respeito a T se para todo $x \in K$ existe $y \in G$ tal que $d_n(x, y) \leq \varepsilon$, isto é, se existe $y \in G$ tal que $x \in B_{d_n}(y, \varepsilon)$.

Denotaremos por $G_n(\varepsilon, K)$ a menor cardinalidade dos conjuntos (n, ε)-geradores de K. A compacidade de K garante que $G_n(\varepsilon, K) < \infty$, pois toda cobertura de K possui uma subcobertura finita.

Observação 2.3.2. Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $G_n(\varepsilon_1, K) \geq G_n(\varepsilon_2, K)$.

Prova. Sejam $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Seja G_{ε_1} um (n, ε_1)-gerador de K tal que $G_n(\varepsilon_1, K) = \#G_{\varepsilon_1}$. Ora, $\forall\ x \in G_{\varepsilon_1}$, $B_{d_n}(x, \varepsilon_1) \subset B_{d_n}(x, \varepsilon_2)$. Então, o conjunto G_{ε_1} é também um (n, ε_2)-gerador de K. Logo, $G_n(\varepsilon_1, K) \geq G_n(\varepsilon_2, K)$. ∎

Definimos

$$g(\varepsilon, K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_n(\varepsilon, K).$$

A compacidade de K garante a existência de tal limite.

Observação 2.3.3. Seja K um subconjunto compacto do espaço métrico X. Temos $g(\varepsilon, K)$ monótona com respeito a ε.

A prova dessa observação é consequência direta da observação imediatamente anterior.

Definição 2.3.4. Se K é um subconjunto compacto do espaço métrico X, definimos $h_d(T, K) = \lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon, K)$.

Denominaremos por *entropia topológica de Bowen* da aplicação contínua $T : X \to X$ o número

$$h_d(T) = \sup_K h_d(T, K),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subconjuntos compactos K de X.

A seguir apresentamos a definição de entropia topológica que faz uso da noção de conjuntos separados. Tal definição tem íntima relação com a apresentada anteriormente e é comumente apontada como definição dual da dada por conjuntos geradores. Em [14] é possível obter mais detalhes, entre eles, a prova de que as duas definições coincidem.

Definição 2.3.5 (Conjunto (n, ε)-separado)**.** Seja n um número natural, $\varepsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X. Um subconjunto $S \subset K$ é dito (n, ε)-*separado* com respeito a T se $x, y \in S$, $x \neq y$, implica $d_n(x, y) > \varepsilon$, isto é, $y \notin B_{d_n}(x, \varepsilon)$.

Denotaremos por $s_n(\varepsilon, K)$ a maior cardinalidade de todos os subconjuntos (n, ε)-separados de K com respeito a T. A observação a seguir nos mostra o impacto da variação de ε na cardinalidade máxima dos subconjuntos (n, ε)-separados.

Observação 2.3.6. Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $s_n(\varepsilon_1, K) \geq s_n(\varepsilon_2, K)$.

Definição 2.3.7. Definimos

$$s(\varepsilon, K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon, K).$$

Eventualmente denotaremos o limite acima por $s(\varepsilon, K, T)$ para evidenciar a dependência em relação à aplicação T.

Definição 2.3.8. Definimos

$$h_d(T, K) = \lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, K)$$

e denominamos por *entropia topológica de Bowen* da aplicação contínua $T : X \to X$ o número

$$h_d(T) = \sup_K h_d(T, K).$$

A seguir disponibilizamos o enunciado de alguns resultados que nos serão úteis no próximo capítulo. Suas provas, aqui omitidas, estão disponíveis para consulta em nossa referência [14].

Teorema 2.3.9. Seja (X, d) um espaço métrico e $T : X \to X$ uma aplicação uniformemente contínua. Se $K \subset K_1 \cup ... \cup K_m$ são subconjuntos compactos de X então $h_d(T, K) \leq \max_{0 \leq i \leq m} h_d(T, K_i)$.

O corolário a seguir nos garante que o supremo de $h_d(T, K)$ tomado sobre $K \subset X$ compacto é igual $h(T, X)$ se X é compacto.

Corolário 2.3.9.1. Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua do espaço topológico compacto metrizável X e d é uma métrica compatível com a topologia de X, então $h_d(T) = h_d(T, X)$.

A proposição a seguir estabelece a importantíssima relação de igualdade existente entre as entropias topológica de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen de uma aplicação contínua T quando X é um espaço métrico compacto.

Proposição 2.3.10. Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua do espaço métrico compacto (X, d), então as entropias topológicas de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen da aplicação T coincidem, isto é, $h(T) = h_d(T)$.

Em virtude da proposição anterior, como na proposição a seguir X é um espaço métrico compacto, observamos que a relação a seguir verificada é verdadeira tanto para entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew quanto para a entropia topológica de Bowen.

Proposição 2.3.11. Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua do espaço métrico compacto X e $m > 0$, então $h_d(T^m) = mh_d(T)$.

Capítulo 3

Princípio Variacional

O Princípio Variacional é um princípio científico utilizado com o cálculo de variações com o objetivo de desenvolver ferramentas para encontrar funções que minimizem ou maximizem os valores de quantidades de um certo objeto de estudo. O Princípio Variacional para entropia estabelece uma relação básica entre as entropias topológica e com medida. No caso compacto, as entropias topológicas de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen coincidem (Proposição 2.3.10) e então obtemos que ambas as definições de entropia topológica coincidem com o supremo da entropia de Kolmogorov-Sinai tomada sobre as medidas de probabilidade borelianas T-invariantes. Isto significa que a entropia topológica revela o valor máximo que a entropia de Kolmogorov-Sinai pode atingir.

Para o caso não compacto, uma versão de Princípio Variacional para entropia é estabelecida por Mauro Patrão (UnB) em [8]. Tal resultado é um aperfeiçoamento do Lema 1.5 do artigo [7] de Michael Handel e Bruce Kitchens. O Lema 1.5 garante para homeomorfismos em espaços métricos localmente compactos que o supremo da entropia com medida coincide com o ínfimo da entropia topológica de Bowen. Patrão aperfeiçoa tal resultado ao adicionar a presença da entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew - numa versão estendida utilizando coberturas admissíveis - e ao garantir que o ínfimo da entropia topológica de Bowen - também numa versão estendida - é atingido sempre que se toma uma métrica admissível.

Abordaremos o caso compacto na primeira seção deste capítulo e o caso não compacto na segunda seção.

Antes de prosseguir, estabeleceremos configurações básicas do nosso ambiente de trabalho. O teorema clássico do Princípio Variacional é enunciado para um conjunto X munido de uma métrica, isto é, X é um espaço métrico; no entanto, sua prova trabalha sobre o mesmo conjunto X hora como um espaço topológico e hora como um espaço de medida. Estabelecemos que daqui em diante, sempre que necessário, a topologia a ser considerada num espaço métrico X é a topologia compatível com a métrica deste espaço; e também, a σ-álgebra a ser considerada é a σ-álgebra de Borel gerada pelos abertos do espaço métrico, a qual denotaremos por $\mathcal{B}(X)$. Isto nos garantirá que aplicações contínuas são sempre aplicações mensuráveis, conforme garante a Proposição 1.3.1.

3.1 Princípio Variacional para espaços compactos

Apresentaremos ao fim desta seção o Princípio Variacional da entropia para espaços métricos compactos. Este resultado estabelece uma relação básica entre a entropia topológica e a entropia com medida, garantindo que se T é uma aplicação contínua definida num espaço métrico compacto, então

$$h(T) = \sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathcal{M}(X,T)\}.$$

O primeiro passo para provar o Princípio Variacional foi dado por L. Wayne Goodwyn em 1969 no artigo [5], quando provou que $h_\mu(T) \leq h(T)$ para qualquer medida μ de probabilidade boreliana T-invariante. Em 1970, E. I. Dinaburg provou no artigo [3] o Princípio Variacional para homeomorfismos definidos em espaço métrico compacto de dimensão finita. Ainda em 1970, T. N. T. Goodman submeteu o artigo [6], o qual veio a ser publicado em 1971, no qual constava uma extensão do resultado de Dinaburg, estabelecendo o Princípio Variacional para uma aplicação apenas contínua num espaço compacto de Hausdorff. Em seu artigo, Goodman agradece Peter Walters por ter lhe chamado a atenção para o importante resultado publicado por Dinaburg. Peter Walters atualmente é professor emérito da Universidade de Warwick na Inglaterra e é o autor do livro *An Introduction to Ergodic Theory* [14], uma de nossas ricas fontes de informação utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Iniciamos provando alguns lemas que nos serão úteis na prova do Princípio Variacional (Teorema 3.1.5). Denotaremos a fronteira de um conjunto B (isto é,

$\overline{B}\backslash\text{int}(B))$ por ∂B.

Lema 3.1.1. Seja X espaço métrico compacto e $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

(i) Se $x \in X$ e $\delta > 0$, então existe $\delta' < \delta$ tal que $\mu(\partial B(x, \delta')) = 0$.

(ii) Se $\delta > 0$, existe uma partição finita $\xi = \{A_1, ..., A_k\}$ de $(X, \mathcal{B}(X))$ tal que $\text{diam}(A_j) < \delta$ e $\mu(\partial A_j) = 0$ para cada j.

Prova.

(i) Suponha por absurdo que $\mu\left(\partial B\left(x, \delta'\right)\right) \neq 0$ para todo $\delta' < \delta$, com $\delta' \in \mathbb{R}$. Considere a coleção $\mathcal{C} = \{\partial B\left(x, \delta'\right) : \delta' \in \mathbb{R}, \delta' < \delta\}$. Note que $\mathcal{C}$ é uma coleção disjunta de conjuntos de medida positiva. Sabendo que toda coleção disjunta de conjuntos com medida positiva com relação a uma medida μ finita do espaço X é no máximo enumerável, segue que $\mathcal{C}$ é enumerável. No entanto, isto é um absurdo, pois evidentemente $\mathcal{C}$ é não enumerável uma vez que $\mathcal{C}$ tem tantos conjuntos quantos $\delta' \in \mathbb{R}$ tais que $\delta' < \delta$. Portanto, existe $\delta' < \delta$ tal que $\mu\left(\partial B\left(x, \delta'\right)\right) = 0$.

(ii) Pelo item (i), existe uma cobertura aberta finita $\beta = \{B_1, ..., B_r\}$ de X formada por bolas de raio menor que $\frac{\delta}{2}$ com $\mu(\partial B_j) = 0$ para todo $j \in \{1, ..., r\}$.

Seja $A_1 = \bar{B}_1$ e, para $n > 1$, seja $A_n = \bar{B}_n \backslash \left(\bar{B}_1 \cup ... \cup \bar{B}_{n-1}\right)$. Então, $\xi = \{A_1, ..., A_r\}$ é uma partição de $(X, \mathcal{B}(X))$ com $\text{diam}(A_n) < \delta$. Como $\partial A_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} \partial B_i$, temos $\mu(\partial A_n) = 0$ para todo n.

$\blacksquare$

Precisaremos também das três observações a seguir. Utilizaremos a notação $\mathcal{B}(X)$ para denotar a σ-álgebra de Borel do espaço métrico compacto X.

Observação 3.1.2. Se $\mu_n \in \mathcal{M}(X), 1 \leq i \leq n$, e $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, então

$$H_{\sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i}(\xi) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i H_{\mu_i}(\xi)$$

para qualquer partição finita ξ de $(X, \mathcal{B}(X))$.

Prova. Como $\varphi(x) = x \log x$ é convexa (Teorema 2.1.3), sabemos que se $B \in \mathcal{B}(X)$ e

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, então

$$\begin{aligned}
0 &\geq \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(B)\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi\left(\mu_i(B)\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(B)\log\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(B) - \sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(B)\log\mu_i(B) \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Daí, fazendo somatório da desigualdade (3.1) tomado sobre os elementos da partição $\xi = \{A_1, ..., A_r\}$ de $(X, \mathcal{B}(X))$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(A_j)\log\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(A_j) - \sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i(A_j)\log\mu_i(A_j)\right) \\
&\geq -H_{\sum_{i=1}^{n} p_i\mu_i}(\xi) + \sum_{i=1}^{n} p_i H_{\mu_i}(\xi).
\end{aligned}$$

■

Observação 3.1.3. Suponha q, n naturais e $1 < q < n$. Para $0 \leq j \leq q-1$, considere $a(j) = \left[\frac{n-j}{q}\right]$. Aqui, $[b]$ denota a parte inteira de $b > 0$. Temos os seguintes fatos:

(i) $a(0) \geq a(1) \geq ... \geq a(q-1)$

(ii) Fixe j com $0 \leq j \leq q-1$. Então,

$$\{0, 1, ..., n-1\} = \{j + rq + i \mid 0 \leq r \leq a(j) - 1,\ 0 \leq i \leq q-1\} \cup S,$$

situação na qual

$$S = \{0, 1, ..., j-1, j + a(j)q, j + a(j)q + 1, ..., n-1\}.$$

Como $j + a(j)q \geq j + \left[\frac{n-j}{q} - 1\right] q = n - q$, então a cardinalidade de S é no máximo $2q$.

(iii) Para cada $0 \leq j \leq q-1$, $(a(j) - 1)q + j \leq \left[\frac{n-j}{q} - 1\right] q + j = n - q$. Os números $\{j + eq \mid 0 \leq j \leq q-1,\ 0 \leq r \leq a(j) - 1\}$ são todos distintos e não maiores do que $n - q$.

Observação 3.1.4. Se $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ e $\mu(\partial A_i) = 0, 0 \leq i \leq n-1$, então

$$\mu\left(\partial\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}A_i\right)\right) = 0, \text{ pois } \partial\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}A_i\right) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}\partial A_i.$$

Prova. Observe que a fronteira $\partial\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}A_i\right)$ é formada por elementos que pertencem à $T^{-i}\partial A_i$, para algum i entre 0 e $n-1$. Como T preserva medida, temos $\mu\left(T^{-i}\partial A_i\right) = 0$ para todo i entre 0 e $n-1$. Daí, segue que

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}\partial A_i\right) = 0.$$

Como $\partial\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}A_i\right) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}\partial A_i$, segue

$$\mu\left(\partial\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}A_i\right)\right) = 0.$$

■

O roteiro da prova do Princípio Variacional que exibiremos a seguir é inspirado na versão disponível no livro [14] de Peter Walters. Walters, por sua vez, inspirou-se na - como ele mesmo adjetivou - elegante prova desenvolvida pelo matemático polonês Misiurewicz em seu artigo [19]. Tal prova é apresentada em duas partes: 1) a primeira parte mostra o que Goodwyn provou em [5] e 2) a segunda parte mostra que o supremo das entropias de Kolmogorov-Sinai de T não é menor que a entropia topológica de T.

Teorema 3.1.5 (Princípio Variacional)**.** Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua de um espaço métrico compacto (X,d), então

$$h(T) = \sup\left\{h_\mu(T) \ : \ \mu \in \mathcal{M}(X,T)\right\}.$$

Prova.

(1) Seja $\mu \in \mathcal{M}\,(X,T)$. O Corolário 1.5.5.1 garante que $\mathcal{M}\,(X,T)$ é não vazio. Nesta primeira parte da prova nos ocuparemos de provar $h_\mu(T) \leq h(T)$.

Seja $\xi = \{A_1, ..., A_k\}$ uma partição finita do espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(X))$.

Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{1}{k log k}$.

Como μ é regular, conforme o Teorema 1.5.1, existem conjuntos compactos $B_j \subset A_j$, $a \leq j \leq k$, tais que $\mu(A_j \backslash B_j) < \varepsilon$.

Considere a partição $\eta = \{B_0, B_1, ..., B_k\}$ na qual $B_0 = X \backslash \bigcup_{j=1}^{k} B_j$.

Note que $\mu(B_0) < k\varepsilon$ e

$$\begin{aligned} H_\mu(\xi/\eta) &= -\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{k} \mu(B_i)\varphi\left(\frac{\mu\left(B_i \cap A_j\right)}{\mu(B_i)}\right) \\ &= -\left[\sum_{j=1}^{k} \mu(B_0)\varphi\left(\frac{\mu\left(B_0 \cap A_j\right)}{\mu(B_0)}\right) + ... + \sum_{j=1}^{k} \mu(B_k)\varphi\left(\frac{\mu\left(B_k \cap A_j\right)}{\mu(B_k)}\right)\right] \end{aligned}$$

sendo φ a aplicação do Teorema 2.1.3.

Observe que, para todo $i \neq 0$, temos

$$\frac{\mu(B_i \cap A_j)}{\mu(B_i)} \in \{1, 0\},$$

pois $\forall\, i \neq 0\ \exists!\ j \in \{1, ..., k\}$ tal que $B_i \subset A_j$ e $B_i \cap A_l = \emptyset\ \forall\, l \in \{1, ..., k\} \backslash \{j\}$.

Daí, segue

$$\varphi\left(\frac{\mu\left(B_i \cap A_j\right)}{\mu(B_i)}\right) = 0 \ \ \forall\ \ i \neq 0.$$

Então,

$$H_\mu(\xi/\eta) = -\mu(B_0)\sum_{j=1}^{k} \varphi\left(\frac{\mu\left(B_0 \cap A_j\right)}{\mu(B_0)}\right).$$

Observe que

$$-\sum_{j=1}^{k} \varphi\left(\frac{\mu\left(B_0 \cap A_j\right)}{\mu(B_0)}\right) = -\sum_{j=1}^{k} \frac{\mu\left(B_0 \cap A_j\right)}{\mu(B_0)} \log \frac{\mu\left(B_0 \cap A_j\right)}{\mu(B_0)} = H_{\frac{\mu}{\mu(B_0)}}(\xi),$$

sendo o último membro a entropia da partição do conjunto B_0 induzida por ξ.

Pelo Corolário 2.1.3.1, temos $H_{\frac{\mu}{\mu(B_0)}}(\xi) \leq \log k$. Então,

$$H_\mu(\xi/\eta) = \mu(B_0) H_{\frac{\mu}{\mu(B_0)}}(\xi) \leq \mu(B_0) \log k.$$

Como $\mu(B_0) < k\varepsilon$ e a escolha de ε nos garante $\varepsilon < \frac{1}{klogk}$, segue

$$H_\mu(\xi/\eta) \quad \le \quad k\varepsilon \log k \le 1. \tag{3.2}$$

Introduziremos agora o relacionamento com a entropia topológica de T. Observe que, para cada $i \neq 0$, o conjunto $B_0 \cup B_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} B_j$ é um conjunto aberto.

Assim, $\beta = \{B_0 \cup B_1, ..., B_0 \cup B_k\}$ é uma cobertura aberta de X.

Novamente pelo Corolário 2.1.3.1, temos, para $n \ge 1$,

$$H_\mu(\eta^n) \le \log N(\eta^n).$$

Afirmação 3.1.5.1. Uma subcobertura de β^n deve ter pelo menos $\frac{1}{2^n} N(\eta^n)$ elementos.

Prova. Primeiro, note que

$$T^{-i}(B_0 \cup B_j) = T^{-i}(B_0) \cup T^{-i}(B_j),$$

para cada $j \in \{1, ..., k\}$ e cada $i \in \mathbb{N}$; ou seja, cada elemento de $T^{-i}\beta$ é união de dois elementos da partição $T^{-i}\eta$. Isto implica no fato de que cada elemento de β^n é união de 2^n elementos de η^n.

Agora, seja α uma cobertura tal que seus elementos são união de 2^n conjuntos de η^n. Como η^n é partição, então α deve ter no mínimo $\frac{1}{2^n} N(\eta^n)$ elementos, caso contrário, existiriam pelo menos 2^n elementos de η^n que não estariam cobertos por α, logo, α não seria uma cobertura.

Observe que α é uma subcobertura de β^n. Logo, uma subcobertura de β^n deve ter pelo menos $\frac{1}{2^n} N(\eta^n)$ elementos. □

Então,

$$H_\mu(\eta^n) \le \log N(\eta^n) \le \log 2^n N(\beta^n).$$

Daí, aplicando propriedade de logaritmo do produto, dividindo por n e, em seguida, fazendo $n \to \infty$, temos

$$h_\mu(T,\eta) \le h(T,\beta) + \log 2.$$

Como $h(T,\beta) \le h(T)$, temos

$$h_\mu(T,\eta) \le h(T) + \log 2. \tag{3.3}$$

Utilizando o item i) da Proposição 2.1.9 em (3.3), temos

$$h_\mu(T,\xi) \le h(T) + \log 2 + H_\mu(\xi/\eta).$$

Por (3.2), segue

$$h_\mu(T,\xi) \le h(T) + \log 2 + 1.$$

Como ξ é arbitrário, podemos escrever $h_\mu(T) \le h(T) + \log 2 + 1$. Como T é contínua e $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, o mesmo vale para T^n, donde escrevemos $h_\mu(T^n) \le h(T^n) + \log 2 + 1$.

Pela Proposição 2.3.11, temos $h(T^n) = nh(T)$.

Pela Proposição 2.1.13, temos, para $n > 0, h_\mu(T^n) = nh_\mu(T)$.

Então,

$$nh_\mu(T) \le nh(T) + \log 2 + 1,$$

que ao dividir por n e fazer $n \to \infty$, obtemos $h_\mu(T) \le h(T)$, como queríamos.

(2) Seja $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar algum $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ tal que $h_\mu(T) \ge s(\varepsilon, X, T)$; isto implica $\sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X,T)\} \ge h(T)$, uma informação que será fundamental para provarmos o objetivo final deste teorema.

Seja E_n um conjunto (n,ε)-separado de X de cardinalidade $S_n(\varepsilon, X)$.

Considere a medida $\sigma_n \in \mathcal{M}(X)$, uma medida atômica uniformemente centrada nos pontos de E_n, isto é, $\sigma_n = \frac{1}{S_n(\varepsilon,X)} \sum_{x \in E_n} \delta_x$, com $\delta_x(B) = 0$, se $x \notin B$ e $\delta_x(B) = 1$, se $x \in B$, para algum $B \subset X$.

Seja $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ definida por $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n \circ T^{-i}$.

Como $\mathcal{M}(X)$ é compacto (Teorema 1.5.4), podemos escolher uma subsequência $\{n_j\}$ de números naturais tais que $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log s_{n_j}(\varepsilon, X) = s(\varepsilon, X, T)$ e $\{\mu_{n_j}\}$ converge em $\mathcal{M}(X)$ para algum $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Pelo Teorema 1.5.5 obtemos que $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$.

Mostraremos a seguir que $h_\mu(T) \geq s(\varepsilon, X, T)$.

Considerando o Lema 3.1.1, podemos escolher uma partição $\xi = \{A_1, ..., A_k\}$ de $(X, \mathcal{B}(X))$ tal que $\operatorname{diam}(A_i) < \varepsilon$ e $\mu(\partial A_i) = 0$ para $1 \leq i \leq k$.

Note que,

$$H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) = \log s_n(\varepsilon, X).$$

A igualdade provém do fato de que nenhum membro de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$ pode ter mais do que um elemento de E_n (que é (n, ε)-separado de X). Assim, temos $s_n(\varepsilon, X)$ elementos com σ_n-medida igual a $\frac{1}{s_n(\varepsilon, X)}$ e os demais tem σ_n-medida nula.

Fixe números naturais q, n com $1 < q < n$ e, considerando a Observação 3.1.3, defina $a(j)$, para $0 \leq j \leq q-1$, por $a(j) = \left[\frac{n-j}{q}\right]$.

Fixe j tal que $0 \leq j \leq q-1$. Pelo item ii) da Observação 3.1.3, temos

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi = \bigvee_{r=0}^{a(j)-1} T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \vee \bigvee_{l\in S} T^{-l}\xi.$$

onde $\#S \leq 2q$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\log s_n(\varepsilon, X) &= H_{\sigma_n}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\right) \\
&\leq \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n}\left(T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right) + \sum_{k\,\in\, S} H_{\sigma_n}\left(T^{-k}\xi\right).
\end{aligned}$$

Note que $H_{\sigma_n}\left(T^{-(rq+j)} \bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right) = H_{\sigma_n \circ T^{-(rq+j)}}\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right)$.

Como $\#T^{-k}\xi = \#\xi$, considerando o Corolário 2.1.3.1, temos $H_{\sigma_n}\left(T^{-k}\xi\right) \leq \log k$. Como a cardinalidade de S é no máximo $2q$, segue

$$\sum_{k\,\in\, S} H_{\sigma_n}\left(T^{-k}\xi\right) \leq \sum_{k\,\in\, S} \log k \leq 2q \log k.$$

Então,

$$\log s_n(\varepsilon, X) \quad \leq \quad \sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n \circ T^{-(rq+j)}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) + 2q \log k.$$

Somando em j, fazendo variar de 0 até $q-1$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{q-1} \log s_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{r=0}^{a(j)-1} H_{\sigma_n \circ T^{-(rq+j)}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) + 2q \log k \right).$$

Façamos $p = qr + j$. Como $0 \leq j \leq q-1$ e $0 \leq q \leq a(j) - 1$, pelo item iii) da Observação 3.1.3, temos $0 \leq p \leq n - q$. Então, reescrevemos

$$q \log s_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{p=0}^{n-q} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) + 2q^2 \log k.$$

Como $1 < q$, então $n - q < n - 1$. Logo,

$$\sum_{p=0}^{n-q} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) \leq \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right).$$

Então,

$$q \log s_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{p=0}^{n-1} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) + 2q^2 \log k.$$

Dividindo por n, obtemos

$$\frac{q}{n} \log s_n(\varepsilon, X) \leq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) + \frac{2q^2}{n} \log k. \tag{3.4}$$

Como $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ e $\sigma_n \circ T^{-p} \in \mathcal{M}(X)\ \forall\ 0 \leq p \leq n-1$, pela Observação 3.1.2, temos

$$H_{\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right) \geq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{\sigma_n \circ T^{-p}} \left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi \right).$$

Como $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_n \circ T^{-i}$, reescrevemos

$$H_{\mu_n}\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right) \geq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n} H_{\sigma_n \circ T^{-p}}\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right).$$

Aplicando a desigualdade acima na desigualdade (3.4), obtemos

$$\frac{q}{n}\log s_n(\varepsilon, X) \leq H_{\mu_n}\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right) + \frac{2q^2}{n}\log k \tag{3.5}$$

Pela Observação 3.1.4 sabemos que os conjuntos de $\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi$ tem fronteira de μ-medida nula. Assim, considerando a Observação 1.5.3, temos $\lim_{j\to\infty} \mu_{n_j}(B) = \mu(B)$ para cada conjunto B de $\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi$. Obtemos que $\lim_{j\to\infty} H_{\mu_{n_j}}\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right) = H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right)$.

Substituindo n por n_j em (3.5) e fazendo $j \to \infty$, obtemos

$$qs(\varepsilon, X, T) \leq H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right).$$

Dividindo a desigualdade por q, obtemos

$$s(\varepsilon, X, T) \leq \frac{1}{q} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{q-1} T^{-i}\xi\right).$$

Fazendo $q \to \infty$, obtemos

$$s(\varepsilon, X, T) \leq h_\mu(T, \xi) \leq h_\mu(T).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos $h_\mu(T) \geq h_d(T, X)$. Pelo Corolário 2.3.9.1, temos $h_d(T; X) = h_d(T)$. Como as entropias topológicas de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen num espaço compacto coincidem, temos $h_d(T) = h(T)$ (Veja Proposição 2.3.10).

Logo, $h_\mu(T) \geq h(T)$. Isto encerra a segunda parte da prova, pois daí segue $\sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X, T)\} \geq h(T)$.

Finalizando, suponha $h(T) \neq \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X, T)\}$.

Como $h_\mu(T) \leq h(T)$ para $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ arbitrário (de acordo com a primeira parte desta prova) e $h(T) \neq \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X, T)\}$, temos $h_\mu(T) \leq \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in$

$M(X,T)\} < h(T)$. Absurdo! Provamos na segunda parte desta prova que $\sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X,T)\} \geq h(T)$.

Portanto, $h(T) = \sup\{h_\mu(T) \mid \mu \in \mathcal{M}(X,T)\}$.

■

3.2 Princípio Variacional para espaços não compactos

Toda esta seção é desenvolvida visando detalhar os resultados expostos no artigo *Entropy and its variational principle for noncompact metric spaces* [8] publicado em 2009 pelo matemático Mauro Patrão da Universidade de Brasília.

O objetivo é apresentar em detalhes o teorema principal do artigo citado, o resultado que estabelece para aplicações próprias em espaços separáveis localmente compactos a seguinte relação:

$$\sup_{\mu} h_\mu(T) = h^*(T) = \min_{d} h_d(T),$$

onde h^* é a entropia topológica admissível e o mínimo do terceiro membro da igualdade é atingido sempre que d é uma métrica admissível.

Um importante detalhe é que este resultado é válido para uma família restrita de aplicações contínuas em espaços localmente compactos, as aplicações próprias. Tal família se posiciona entre as aplicações contínuas e os homeomorfismos. A exigência de que a aplicação T seja própria é necessária para garantir que a extensão $\tilde{T}$ seja também contínua.

Na primeira subseção exploraremos as extensões idealizadas por Patrão das definições de entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew e de Bowen, as quais chamaremos de entropia topológica admissível e de entropia de Bowen estendida, respectivamente. Na subseção seguinte verificaremos resultados preliminares que nos serão úteis na demonstração do teorema principal desta seção - o qual vem a ser finalmente apresentado na terceira subseção. Na quarta subseção apresentaremos um exemplo que faz uso do Princípio Variacional para espaços não compactos para determinar a entropia de um isomorfismo linear de um espaço vetorial normado de dimensão finita.

3.2.1 Entropia para espaços métricos não compactos

Iniciamos esta seção apresentando uma extensão, proposta pelo matemático Mauro Patrão em [8], da entropia topológica de Adler-Konheim-McAndrew [2].

Considere X um espaço topológico não necessariamente compacto e $T : X \to X$ uma aplicação própria.

Definição 3.2.1 (Cobertura admissível)**.** Uma cobertura α de X é dita *cobertura admissível* de X se é uma cobertura aberta e finita tal que, para cada $A \in \alpha$, o fecho ou o complemento de A é compacto.

Observação 3.2.2. Toda cobertura admissível de um espaço topológico não compacto possui pelo menos um conjunto cujo fecho não é compacto.

Prova. De fato, seja $\alpha = \{A_1, ..., A_k\}$ uma cobertura admissível do espaço topológico não compacto X. Suponha por absurdo que o fecho de cada um dos conjuntos de α é compacto. Então a coleção $\{\overline{A_1}, ..., \overline{A_k}\}$ é uma família de compactos. Sabemos que $\overline{A_i} \subset X$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Como α é cobertura de X, segue que $X = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$. Assim, X é união finita de compactos. Segue pela Proposição 1.2.7 que X é compacto, o que figura como absurdo uma vez que, por hipótese, X é não compacto. Concluímos então que α possui pelo menos um conjunto cujo fecho não é compacto. ■

Uma consequência imediata dessa observação é que toda cobertura admissível de um espaço topológico X possui pelo menos um conjunto cujo complementar é compacto. Este resultado nos será útil na prova da Observação 3.2.16.

Provaremos a seguir que, se α é uma cobertura admissível e T é uma aplicação própria, então a cobertura junção n-iterada de α relativa à T é também uma cobertura admissível.

Observação 3.2.3. Dada uma cobertura admissível α de X e uma aplicação própria T, para todo $n \in \mathbb{N}$, a cobertura junção n-iterada de α relativa à T

$$\alpha^n = \{A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n) : A_i \in \alpha\}$$

é também uma cobertura admissível de X.

Prova. De fato, dado

$$A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-j}(A_j) \cap ... \cap T^{-n}(A_n) \in \alpha^n,$$

como T é contínua, é evidente que tal conjunto é aberto. Dado $x \in X$, como α é cobertura de X, $x \in A$ para algum $A \in \alpha$. Como T é uma aplicação definida em X, x possui imagem por T e assim, $T^i(x) \in A_i$, para algum $A_i \in \alpha$, para todo $i \in 1, ..., n$. Portanto, $x \in T^{-i}(A_i)$, $A_i \in \alpha$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, isto é, x pertence à algum conjunto $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-j}(A_j) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$ de α^n. Isto prova que α^n é cobertura de X. Quanto a propriedade que envolve compacidade, temos duas possibilidades: 1) se, para algum $j \in \{0, ..., n\}$, A_j possui fecho compacto, então $T^{-j}(\overline{A_j})$ é compacto pois T é aplicação própria. Note que o fecho de $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-j}(A_j) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$ está contido no fecho de cada A_i para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Pela Proposição 1.2.4 sabemos que $\overline{T^{-j}(A_j)} \subseteq T^{-j}(\overline{A_j})$, isto é, o fecho de $T^{-j}(A_j)$ é subconjunto do compacto $T^{-j}(\overline{A_j})$. Como $\overline{T^{-1}(A_j)}$ é um subconjunto fechado de compacto, segue que $\overline{T^{-1}(A_j)}$ é compacto. Por raciocínio análogo, o fecho de $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-j}(A_j) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$ é subconjunto fechado do compacto $\overline{T^{-1}(A_j)}$, o que implica no fato de que o fecho de $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-j}(A_j) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$ é compacto. 2) Agora, se, para todo $i \in \{0, ..., n\}$, $X \backslash A_i$ é compacto, como T é aplicação própria, $T^{-i}(A_i)$ é aberto e $T^{-i}(X \backslash A_i) = X \backslash T^{-i}(A_i)$ é compacto para cada $i \in \{0, ..., n\}$. Como a reunião finita de compactos é compacta, pelas Leis de Morgan temos $X \backslash (A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n))$ compacto. Portanto, α_n é uma cobertura aberta e finita tal que, para cada $A \in \alpha^n$, o fecho ou o complemento de A é compacto, isto é, α^n é uma cobertura admissível de X. ∎

Sabendo que $N(\alpha^n)$ representa a menor cardinalidade de todas as subcoberturas de α^n, é possível provar que $\log N(\alpha^n)$ é subaditivo. Tal prova é similar à prova deste fato para o caso em que X é um espaço topológico compacto, que nada mais é do que uma implicação a partir do Teorema 2.1.8. A subaditividade de $N(\alpha^n)$ implica na existência do limite a seguir

$$h^*(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\alpha^n),$$

o qual denominamos de *entropia topológica admissível de T relativa à cobertura α.*

Definição 3.2.4. A *entropia topológica admissível* da aplicação própria T é definida por

$$h^*(T) = \sup_{\alpha} h^*(T, \alpha),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as coberturas admissíveis α de X.

Ancoramos o asterisco na notação dessa nova definição de entropia para sinalizar que estamos nos referindo à entropia topológica considerando coberturas admissíveis. Tal definição nada mais é do que uma extensão da entropia de Adler-Konheim-McAndrew. É interessante notar que as definições de $h(T)$ e de $h^*(T)$ coincidem quando o espaço topológico X é um espaço compacto, pois neste contexto toda aplicação contínua é própria e toda cobertura aberta finita de X é admissível.

O resultado que apresentamos a seguir generaliza, para espaços não compactos, a relação entre as entropias topológicas de duas aplicações semi-conjugadas (Proposição 2.2.9).

Proposição 3.2.5. Sejam $T : X \to X$ e $S : Y \to Y$ duas aplicações próprias, onde X e Y são espaços topológicos. Se $f : Y \to X$ é uma aplicação sobrejetora própria tal que $f \circ S = T \circ f$, então $h^*(T) \leq h^*(S)$.

Prova. Seja α uma cobertura admissível de X. Por hipótese f é uma aplicação própria, em particular, f é contínua - e por isso a imagem inversa de cada aberto em X é aberto em Y - e a imagem inversa de todo conjunto compacto é compacto. Logo, a coleção

$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) : A \in \alpha\}$$

é uma cobertura admissível do espaço topológico Y.

Afirmamos que se β é um subconjunto de α^n, então $f^{-1}(\beta)$ é um subconjunto de $f^{-1}(\alpha)^n$. De fato, $B \in \beta$ se, e só se, $B = A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$, com $A_i \in \alpha \ \forall \ i \in \{0, ..., n\}$. Então, temos

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(A_0) \cap f^{-1}(T^{-1}(A_1)) \cap ... \cap f^{-1}(T^{-n}(A_n)) \\ &= f^{-1}(A_0) \cap S^{-1}(f^{-1}(A_1)) \cap ... \cap S^{-n}(f^{-1}), \end{aligned}$$

uma vez que $f^{-1} \circ T^{-i} = S^{-i} \circ f^{-1}$, conforme a hipótese de que $f \circ S = T \circ f$. Note que, $f^{-1}(A_0) \cap S^{-1}(f^{-1}(A_1)) \cap ... \cap S^{-n}(f^{-1}) \in f^{-1}(\alpha)^n$, e portanto, $f^{-1}(\beta) \subset$

$f^{-1}(\alpha)^n$. Reciprocamente, afirmamos que se γ é um subconjunto de $f^{-1}(\alpha)^n$, então $\gamma = f^{-1}(\beta)$, onde β é algum subconjunto de α^n. Provemos. Seja $C \in \gamma$. Então,

$$\begin{aligned} C &= f^{-1}(A_0) \cap S^{-1}(f^{-1}(A_1)) \cap ... \cap S^{-n}(f^{-1}(A_n)) \\ &= f^{-1}(A_0) \cap f^{-1}(T^{-1}(A_1)) \cap ... \cap f^{-1}(T^{-n}(A_n)) \\ &= f^{-1}(A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^n(A_n)), \end{aligned}$$

onde $A_i \in \alpha \ \forall \ i \in \{0, ..., n\}$. Concluímos que $C = f^{-1}(B)$ para algum $B \in \alpha^n$, o que implica em $\gamma = f^{-1}(\beta)$, sendo β algum subconjunto de α^n.

Então, se β é uma subcobertura de α^n, então $f^{-1}(\beta)$ é uma subcobertura de $f^{-1}(\alpha)^n$. Reciprocamente, se γ é uma subcobertura de $f^{-1}(\alpha)^n$, então $\gamma = f^{-1}(\beta)$, sendo β algum subconjunto de α^n. O fato de f ser sobrejetora garante que β é uma subcobertura de α^n.

Concluímos que $N(\alpha^n) = N(f^{-1}(\alpha)^n)$. Tomando o logaritmo dessa igualdade, dividindo por n e, em seguida, tomando o limite com $n \to \infty$, temos

$$h^*(T, \alpha) = h^*(S, f^{-1}(\alpha)) \leq h^*(S).$$

Como α é uma cobertura admissível arbitrária de X, escrevemos $h^*(T) \leq h^*(S)$. ■

Apresentaremos agora a extensão da entropia de Bowen sugerida por Patrão em [8]. A partir da definição de entropia de Bowen, apresentada na Seção 2.3, faremos algumas adaptações e a nomearemos de entropia estendida de Bowen.

Considere X um espaço métrico não necessariamente compacto e $T : X \to X$ uma aplicação contínua.

Definição 3.2.6. Seja n um número natural, $\varepsilon > 0$ e Y um subconjunto arbitrário do espaço métrico (X, d). Um subconjunto G de X é dito (n, ε)-*gerador* de Y com respeito a T se para todo $x \in Y$ existe $y \in G$ tal que $d_n(x, y) \leq \varepsilon$, isto é, se existe $y \in G$ tal que $x \in B_{d_n}(y, \varepsilon)$.

Denotaremos por $G_n(\varepsilon, Y)$ a menor cardinalidade de todos os conjuntos (n, ε)-geradores de Y.

Observação 3.2.7. Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então $G_n(\varepsilon_1, Y) \geq G_n(\varepsilon_2, Y)$.

Prova. A prova é a mesma que exibimos para o caso em que $Y = K$ compacto na

Observação 2.3.2. ■

Definição 3.2.8. Definimos

$$g(\varepsilon, Y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_n(\varepsilon, Y).$$

Quando Y é compacto temos $G_n(\varepsilon, Y) < \infty$, o que garante a existência do limite de forma imediata. Como neste caso Y é arbitrário, provaremos a desigualdade $G_n(\varepsilon, Y) \leq G_q(\varepsilon, Y) G_{n-q}(\varepsilon, Y)$ e em seguida faremos uso do Teorema 2.1.8, provando enfim que o limite da definição $g(\varepsilon, Y)$ existe. Esta prova foi desenvolvida considerando a sugestão presente na Observação 1.2.24 de nossa referência [20].

Proposição 3.2.9. Dado $Y \subset X$, temos

$$G_n(\varepsilon, Y) \leq G_q(\varepsilon, Y) G_{n-q}(\varepsilon, Y)$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $q \in \{0, ..., n\}$.

Prova. Suponha por absurdo que $G_q(\varepsilon, Y) G_{n-q}(\varepsilon, Y) < G_n(\varepsilon, Y)$.

Seja $G_q = \{x_1, ..., x_k\} \subset Y$ tal que $G_q(\varepsilon, Y) = \# G_q$ e $G_{n-q} = \{y_1, ..., y_l\} \subset Y$ tal que $G_{n-q}(\varepsilon, Y) = \# G_{n-q}$. Dessa forma,

$$\alpha = \{B_{d_q}(x_1, \varepsilon), ..., B_{d_q}(x_k, \varepsilon)\} \;\text{ e }\; \beta = \{B_{d_{n-q}}(y_1, \varepsilon), ..., B_{d_{n-q}}(y_l, \varepsilon)\}$$

são coberturas de Y. Tomemos $T^{-q}\beta = \{T^{-q}\left(B_{d_{n-q}}(y_1, \varepsilon)\right), ..., T^{-q}\left(B_{d_{n-q}}(y_l, \varepsilon)\right)\}$.

Consideremos $\alpha \vee T^{-q}\beta$ a junção das coberturas α e $T^{-q}\beta$. Seja p o número de conjuntos não vazios de $\alpha \vee T^{-q}\beta$. Para cada $A_j \in \alpha \vee T^{-q}\beta$, com $1 \leq j \leq p$, tome $z_j \in Y$ tal que $A_j \subset B_{d_n}(z_j, \varepsilon)$. Assim, $G = \{z_1, ..., z_p\}$ é um conjunto (n, ε)-gerador de Y. Portanto, $G_n(\varepsilon, Y) \leq \# \alpha \vee T^{-q}\beta \leq G_q(\varepsilon, Y) G_{n-q}(\varepsilon, Y)$, o que contraria flagrantemente a hipótese absurda. ■

Proposição 3.2.10. O limite da igualdade $g(\varepsilon, Y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_n(\varepsilon, Y)$ existe para todo $\varepsilon > 0$.

Prova. Consideremos uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \log G_n(\varepsilon, Y)$.

Tomando o logaritmo da desigualdade presente na proposição anterior, temos

$$\log G_n(\varepsilon, Y) \leq \log G_q(\varepsilon, Y) + \log G_{n-q}(\varepsilon, Y),$$

para algum $q \in \{1, ..., n\}$. Logo, $a_n \leq a_q + a_{n-q}$. Assim, o resultado segue naturalmente pelo Teorema 2.1.8. ■

Observação 3.2.11. Para $Y \subset X$ arbitrário, $g(\varepsilon, Y)$ é monótona com respeito a ε.

Prova. A prova desta observação é análoga à prova da Observação 2.3.3. ■

Definição 3.2.12. Se Y é um subconjunto arbitrário do espaço métrico (X, d), definimos

$$h_d^*(T, Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon, Y).$$

Denominamos por *entropia estendida de Bowen* da aplicação contínua T o número

$$h_d^*(T) = \sup_{Y \subset X} h_d^*(T, Y),$$

sendo o supremo tomado sobre todos os subconjuntos Y de X em vez de apenas os subconjuntos compactos como no caso da entropia de Bowen $h_d(T)$.

Observação 3.2.13. Uma vez que $h_d^*(T, Y)$ é monótona com respeito a Y, segue que

$$h_d^*(T) = h_d^*(T, X).$$

Prova. Sejam $Y \subset X$ e $\varepsilon > 0$. É imediato que $G_n(\varepsilon, Y) \leq G_n(\varepsilon, X)$. Logo, $h_d^*(T, Y) \leq h_d^*(T, X)$. Daí, temos

$$h_d^*(T) = \sup_{Y \subseteq X} h_d^*(T, Y) = h_d^*(T, X).$$

■

Note que,

$$h_d^*(T) = \sup_{Y \subset X} h_d^*(T, Y) \quad \text{e} \quad h_d(T) = \sup_{Y \subset X compacto} h_d^*(T, Y),$$

isto é, o supremo de $h_d(T)$ é tomado sobre uma restrição do conjunto sobre o qual o supremo de $h_d^*(T)$ é tomado. Isto implica em $h_d(T) \leq h_d^*(T)$. É interessante notar que a igualdade é obtida sempre que X é um espaço métrico compacto, pois neste contexto tem-se $h_d^*(T) = h_d^*(T, X) = h_d(T, X) = h_d(T)$.

Daqui em diante simplificaremos nossa notação e denotaremos $G_n(\varepsilon, X)$ e $g(\varepsilon, X)$ por $G_n(\varepsilon)$ e $g(\varepsilon)$, respectivamente.

O primeiro resultado da próxima seção exige alguma regularidade na métrica adotada. Visando atender esta exigência, definimos agora uma classe de métricas com algumas propriedades básicas.

Definição 3.2.14. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que d é uma *métrica admissível* se as seguintes condições são verificadas:

i) Se $\alpha_\delta = \{B(x_1, \delta), ..., B(x_k, \delta)\}$ é uma cobertura de X para todo $\delta \in (a, b)$, com $0 < a < b$, então existe $\delta_\varepsilon \in (a, b)$ tal que $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é uma cobertura admissível.

ii) Toda cobertura admissível de X tem um número de Lebesgue.

Observamos que se (X, d) é compacto, então d é naturalmente admissível. Isto segue do fato de que toda cobertura aberta e finita de um espaço compacto é admissível e, ainda, toda cobertura aberta de um espaço métrico compacto possui um número de Lebesgue, conforme a Proposição 1.2.8.

3.2.2 Resultados preliminares

Apresentaremos nesta seção alguns resultados que utilizaremos na demonstração do Teorema 3.2.28. Poderíamos nomear tais resultados por lemas, mas replicaremos os nomes propostos por Patrão em [8] e os nomearemos por proposição.

O resultado a seguir é uma generalização do conhecido resultado apresentado na Proposição 2.3.10 que afirma que se (X, d) é compacto, então a entropia de Adler-Konheim-McAndrew e a entropia de Bowen coincidem. No caso não compacto obtemos um resultado similar que envolve as entropias $h^*(T)$ e $h_d^*(T)$ mas com a exigência de que d seja uma métrica admissível.

Proposição 3.2.15. Seja $T : X \to X$ uma aplicação própria do espaço métrico (X, d). Se d é uma métrica admissível, então $h^*(T) = h_d^*(T)$.

Prova. Primeiro, afirmamos que, para qualquer cobertura admissível α de X, temos

$$g(|\alpha|) \leq h^*(T,\alpha), \tag{3.6}$$

com $|\alpha| = \max\{\operatorname{diam} A : A \in \alpha\}$. De fato, os elementos de α^n são dados por $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$, com $A_i \in \alpha \ \forall \ i \in \{0,...,n\}$. Tomemos β uma subcobertura α^n. Para cada $B \in \beta$, tome um elemento $x \in B$ e defina G o conjunto que reúne esses elementos. Observe que G é um conjunto $(n,|\alpha|)$-gerador de X. De fato, seja $y \in X$ e tome algum $A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n) \in \beta$ que contenha y. Tomando $x \in G$ tal que $x \in A_0 \cap T^{-1}(A_1) \cap ... \cap T^{-n}(A_n)$, temos $d(T^i(x),T^i(y)) \leq |\alpha|$, para todo $i \in \{0,1,...,n\}$, pois $T^i(x),T^i(y) \in A_0$ e $\operatorname{diam} A_0 \leq |\alpha|$.

Então, para cada subcobertura β de α^n, existe um conjunto $(n,|\alpha|)$-gerador de X tal que $G_n(|\alpha|) \leq \#G \leq \#\beta$. Isto é, temos

$$G_n(|\alpha|) \leq N(\alpha^n). \tag{3.7}$$

Tomando o logaritmo de (3.7), dividindo por n e, em seguida, fazendo $n \to \infty$, segue

$$g(|\alpha|) \leq h^*(T,\alpha).$$

Agora, afirmamos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon \in (\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$ tal que $h^*(T,\alpha_{\delta_\varepsilon}) \leq g(\frac{\varepsilon}{2})$, onde $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é uma cobertura admissível de bolas com raio igual a δ_ε. De fato, se $G = \{x_1,...,x_k\}$ é um conjunto $(n,\frac{\varepsilon}{2})$-gerador de X, para todo $\delta \in (\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$ temos a seguinte cobertura aberta e finita de X

$$\beta_\delta = \{B(x_i,\delta) \cap ... \cap T^{-n}(B(T^n(x_i),\delta)) : x_i \in G\}.$$

Note que, dado $x \in X$, existe $x_i \in G$ tal que $d_n(x,x_i) < \frac{\varepsilon}{2} < \delta$, isto é,

$$x \in B(x_i,\delta) \cap ... \cap T^{-n}(B(T^n(x_i),\delta)). \tag{3.8}$$

Tomemos $\alpha_\delta = \{B(T^l(x_i),\delta) : x_i \in G, 0 \leq l \leq n\}$. Por (3.8) vê-se facilmente que α_δ é uma cobertura aberta e finita de X para todo $\delta \in (\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$. Como d é uma métrica admissível, existe $\delta_\varepsilon \in (\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)$ tal que $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é uma cobertura admissível de X formada por bolas de raio igual δ_ε.

Além disso, obtemos que $\beta_{\delta_\varepsilon}$ é uma subcobertura de $\alpha^n_{\delta_\varepsilon}$. Assim, para cada conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$-gerador G de X, existe $\delta_\varepsilon \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ e uma subcobertura $\beta_{\delta_\varepsilon}$ de $\alpha^n_{\delta_\varepsilon}$ tal que $N\left(\alpha^n_{\delta_\varepsilon}\right) \leq \#\beta_{\delta_\varepsilon} \leq \#G$.

Daí, segue que

$$N\left(\alpha_{\delta_\varepsilon}\right) \leq G_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{3.9}$$

Tomando o logaritmo dos membros da desigualdade (3.9), dividindo por n e fazendo $n \to \infty$, obtemos que existe $\delta_\varepsilon \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ tal que

$$h^*(T, \alpha_{\delta_\varepsilon}) \leq g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Como $|\alpha_{\delta_\varepsilon}| \leq 2\delta_\varepsilon \leq 2\varepsilon$ e considerando as desigualdades (3.6), (3.7) e pela Observação 3.2.11, segue

$$g(2\varepsilon) \leq g(|\alpha_{\delta_\varepsilon}) \leq h(T, \alpha_{\delta_\varepsilon}) \leq g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Tomando o limite com $\varepsilon \to 0$, temos

$$h^*_d(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} h^*(T, \alpha_{\delta_\varepsilon}) = \sup_{\varepsilon > 0} h^*(T, \alpha_{\delta_\varepsilon}). \tag{3.10}$$

Para finalizar a prova é necessário mostrar que o supremo da igualdade (3.10) é igual a $h^*(T)$. Pois bem, para qualquer cobertura admissível α de X, tome ε o número de Lebesgue dessa cobertura. A existência do número de Lebesgue é garantida pelo fato de d ser uma métrica admissível. Afirmamos que $N(\alpha^n) \leq N(\alpha^n_{\delta_\varepsilon})$. De fato, perceba que todo elemento de $\alpha^n_{\delta_\varepsilon}$ é dado por $B_0 \cap T(B_1) \cap ... \cap T^{-n}(B_n)$, com $\{B_0, ..., B_n\}$ bolas de raio $\delta_\varepsilon < \varepsilon$. Como ε é número de Lebesgue de α, existe $\{A_0, ..., A_n\} \subset \alpha$ tal que $B_i \subset A_i$, para todo $i \in 0, ..., n$. Assim, temos

$$B_0 \cap ... \cap T^{-n}(B_n) \subset A_0 \cap ... \cap T^{-n}(A_n),$$

o que significa que, para cada subcobertura β de $\alpha^n_{\delta_\varepsilon}$, existe uma subcobertura γ de α^n de forma que $N(\alpha^n) \leq \#\gamma = \#\beta$. Logo, $N\left(\alpha^n\right) \leq N\left(\alpha^n_{\delta_\varepsilon}\right)$. Tomando o logaritmo, dividindo por n e tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos

$$h^*(T,\alpha) \leq h^*(T,\alpha_{\delta_\varepsilon}) \leq \sup_{\varepsilon>0} h^*(T,\alpha_{\delta_\varepsilon}).$$

Como α é uma cobertura admissível arbitrária de X, temos $h^*(T) = \sup_{\varepsilon>0} h^*(T,\alpha_{\delta_\varepsilon})$. Portanto, $h_d^*(T) = h^*(T)$. ∎

Daqui em diante assumiremos que X é um espaço métrico localmente compacto. Assim, de acordo com a Proposição 1.2.11, existe uma compactificação por um ponto para X, a qual escolhemos denotar por $\tilde{X}$. Tomando a compactificação por um ponto trivial, sendo $\varphi|_X$ igual à aplicação identidade, obtemos $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$, sendo ∞ um ponto que não pertence a X e é chamado de ponto no infinito. Consideraremos $\tilde{X}$ munido da topologia τ definida na Seção 1.2 do Capítulo 1 desta dissertação.

Observação 3.2.16. Se $\tilde{X}$ é compactificação por um ponto de X, então, para qualquer cobertura admissível α de X, existe uma cobertura aberta $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{X}$ tal que $\alpha = X \cap \tilde{\alpha}$, isto é, $A \in \alpha$ se, e somente se, existe $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}$, com $A = \tilde{A} \cap X$.

Prova. Consideraremos X não compacto, uma vez que o caso compacto é trivial. Seja α uma cobertura admissível de X. Pela Observação 3.2.2, existe pelo menos um conjunto em α cujo complementar em X é compacto. Seja $A \in \alpha$ um aberto com tal propriedade.

Defina $\tilde{A} = A \cup \{\infty\}$. Note que $\tilde{A}$ é uma vizinhança aberta de ∞ em $\tilde{X}$. Definindo

$$\tilde{\alpha} = \{\tilde{A}\} \cup \{B \in \alpha : B \neq A\}.$$

Perceba que o complementar de $\tilde{A}$ em $\tilde{X}$ é compacto, pois $X \backslash \tilde{A} = X \backslash A$.

Por construção de $\tilde{\alpha}$, temos $X \cap \tilde{\alpha} = \{\tilde{A} \cap X\} \cup \{X \cap B : B \in \alpha \text{ e } B \neq A\}$. Isto é, $X \cap \tilde{\alpha} = \alpha$. Assim se encerra esta prova. ∎

Definição 3.2.17. Seja $T : X \to X$ uma aplicação própria. Definimos $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ dada por

$$\tilde{T}(\tilde{x}) = \begin{cases} T(\tilde{x}), & \tilde{x} \neq \infty, \\ \infty, & \tilde{x} = \infty. \end{cases}$$

Dizemos que $\tilde{T}$ é a *extensão de T para $\tilde{X}$*.

Observe que nossa Definição 3.2.17 pressupõe T uma aplicação própria. O objetivo é garantir que a extensão de T para $\tilde{X}$ é contínua, o que não é verdade de forma geral. O exemplo a seguir exibe uma aplicação T que é contínua, mas que sua extensão para $\tilde{X}$ não é contínua; tal exemplo foi inspirado numa versão apresentada em [20].

Exemplo 3.2.18. Considere $X = (0,1)$. Note que X é um espaço localmente compacto. Considere a aplicação $T : X \to X$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A extensão de T para $\tilde{X} = (0,1) \cup \{\infty_{\tilde{X}}\}$ não é contínua.

Prova. De fato, considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Quando $n \to \infty$ temos $x_n \to \infty_{\tilde{X}}$. No entanto,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{T}(x_n) = \frac{1}{2},$$

isto é, existe uma sequência (x_n) tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty_{\tilde{X}}$, mas $\lim_{n\to\infty} \tilde{T}(x_n) \neq \tilde{T}(\infty_{\tilde{X}})$. Segue que $\tilde{T}$ não é contínua. ■

Observação 3.2.19. Assim como T, a aplicação $\tilde{T}$ também é própria.

Prova. De fato, provaremos primeiro que $\tilde{T}$ é contínua - sendo suficiente mostrar que $\tilde{T}$ é contínua em ∞. Pois bem, seja $A \cup \{\infty\}$ uma vizinhança de ∞. Assim, A é aberto e seu complemento é compacto, e então,

$$\tilde{T}^{-1}(A \cup \{\infty\}) = T^{-1}(A) \cup \{\infty\}$$

é uma vizinhança de ∞ no domínio de $\tilde{T}$, uma vez que $T^{-1}(A)$ é aberto e seu complementar é compacto. Em detalhes, $T^{-1}(A)$ é aberto pois T é contínua e A é aberto. Ainda, temos $T^{-1}(X \backslash A) = X \backslash T^{-1}(A)$; como T é aplicação própria, segue que $X \backslash T^{-1}(A)$ é compacto. Portanto, $\tilde{T}$ é contínua também em ∞. Para concluirmos que $\tilde{T}$ é própria, falta-nos mostrar que a imagem inversa por $\tilde{T}$ de compacto é compacto. Dado $B \in \tilde{X}$ compacto, se $\infty \notin B$, temos $\tilde{T}^{-1}(B) = T^{-1}(B)$, o que garante $\tilde{T}^{-1}(B)$ compacto, pois T é aplicação própria; se $\infty \in B$, temos $B \backslash \{\infty\}$ compacto em X, caso contrário, existiria uma cobertura aberta $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de $B \backslash \{\infty\}$ em X que não admitiria subcobertura finita, o que implicaria em B não compacto em $\tilde{X}$, uma vez que $\mathcal{C} \cup \{\infty\} = \{C_\lambda \cup \{\infty\}\}_{\lambda \in L}$ seria uma cobertura aberta de B em $\tilde{X}$ que não admitiria subcobertura finita, um completo absurdo frente ao fato de que tomamos B compacto em $\tilde{X}$. Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{-1}(B) &= \tilde{T}^{-1}(B\backslash\{\infty\}) \cup \tilde{T}^{-1}(\{\infty\}) \\ &= T^{-1}(B\backslash\{\infty\}) \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Mostramos que $B\backslash\{\infty\}$ é compacto em X, assim, como T é própria, segue que $\tilde{T}^{-1}(B\backslash\{\infty\})$ é compacto. Seja $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{C}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $\tilde{T}^{-1}(B)$ em $\tilde{X}$. Então, $\tilde{\mathcal{C}}\backslash\{\infty\} = \{\tilde{C}_\lambda\backslash\{\infty\}\}_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de $\tilde{T}^{-1}(B\backslash\{\infty\})$ em $\tilde{X}$. Como $\tilde{T}^{-1}(B\backslash\{\infty\})$ é compacto, existe uma subcobertura finita de $\tilde{\mathcal{C}}\backslash\{\infty\}$, digamos, $\{\tilde{C}_{\lambda_1}\backslash\{\infty\}, ..., \tilde{C}_{\lambda_k}\backslash\{\infty\}\}$. Tomando uma coleção formada pelos $\tilde{C}_\lambda$ aí presentes, mas sem a retirada de ∞, temos $\{\tilde{C}_{\lambda_1}, ..., \tilde{C}_{\lambda_k}\}$. Se tal coleção não cobre $\tilde{T}^{-1}(B)$ - isto é, não cobre $\{\infty\}$ - basta escolher um conjunto de $\tilde{C}$ que contenha ∞, digamos, $\tilde{C}_{\lambda_*}$, e então temos a seguinte subcobertura finita $\{\tilde{C}_{\lambda_1}, ..., \tilde{C}_{\lambda_k}, \tilde{C}_{\lambda_*}\} \subset \tilde{C}$ para o conjunto $\tilde{T}^{-1}(B)$. Como $\tilde{C}$ é cobertura aberta arbitrária, obtemos que $\tilde{T}^{-1}(B)$ é compacto em $\tilde{X}$. Portanto, para todo B compacto em $\tilde{X}$, temos $\tilde{T}^{-1}(B)$ compacto. Dessa forma, obtemos que $\tilde{T}$ é aplicação própria. ∎

Daqui em diante consideraremos X um espaço métrico separável e localmente compacto. O objetivo é garantir que $\tilde{X}$ é metrizável, pois para que uma compactificação por um ponto seja metrizável é necessário e suficiente que X seja um espaço métrico separável localmente compacto. Tal resultado segue pela simples combinação das Proposições 1.2.10 e 1.2.12.

A próxima proposição mostra que a restrição para X de qualquer métrica em $\tilde{X}$ é sempre admissível e que as entropias topológicas de T e da extensão de T para $\tilde{X}$ coincidem. Antes deste resultado, apresentamos o Lema 3.2.20, o qual nos garante que as coberturas admissíveis do espaço métrico localmente compacto da Proposição 3.2.21 possui número de Lebesgue.

Lema 3.2.20 (Número de Lebesgue)**.** Se (X, d) é um espaço métrico que admite compactificação por um ponto $(\tilde{X}, \tilde{d})$, tal que d é a restrição de $\tilde{d}$ ao espaço X, então toda cobertura admissível de X possui número de Lebesgue.

Prova. Consideraremos X não compacto em razão de que o caso compacto já é contemplado pela Proposição 1.2.8. Mostraremos a seguir que toda cobertura admissível de X tem número de Lebesgue.

Seja α uma cobertura admissível de X. Dada a Observação 3.2.16, existe uma cobertura aberta $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{X}$ tal que $A \in \alpha$ se, e somente se, existe $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}$, com $A = \tilde{A} \cap X$. Assim, se ε é o número de Lebesgue de $\tilde{\alpha}$, então ε é também número de Lebesgue de α. De fato, dada uma bola $B(x, \varepsilon)$ em X, existe $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \tilde{A}$. Consequentemente, existe $\tilde{A} \cap X = A \in \alpha$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. ∎

Proposição 3.2.21. Seja $T : X \to X$ uma aplicação própria do espaço separável localmente compacto X. Seja d uma métrica dada pela restrição a X de alguma métrica $\tilde{d}$ em $\tilde{X}$, a compactificação por um ponto de X. Então, d é uma métrica admissível e

$$h_d^*(T) = h_{\tilde{d}}^*(\tilde{T}),$$

onde $\tilde{T}$ é a extensão de T para $\tilde{X}$. Em particular, temos $h^*(T) = h(\tilde{T})$.

Prova. Primeiro, mostraremos que $G_n(\varepsilon)$ é finito para todo $\varepsilon > 0$.

Seja $\tilde{G} = \{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k\} \subset \tilde{X}$ um conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$-gerador de $\tilde{X}$. Nos é permitido assumir $\tilde{G}$ finito pois $\tilde{X}$ é compacto. Pela densidade de X em $\tilde{X}$, existem $\{x_1, ..., x_k\} \subset X$ tais que $\tilde{d}_n(x_i, \tilde{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Note que afirmamos isto para a métrica $\tilde{d}_n$ pois esta é equivalente à $\tilde{d}$.

Para $x \in X \subset \tilde{X}$, temos $\tilde{d}_n(x, \tilde{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ para algum $\tilde{x}_i \in \tilde{G}$. Então,

$$\tilde{d}_n(x, \tilde{x}_i) + \tilde{d}_n(x_i, \tilde{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\tilde{d}_n$ é métrica, segue $\tilde{d}_n(x, x_i) < \varepsilon$. Uma vez que $x, x_i \in X$, temos $d_n(x, x_i) < \varepsilon$, sendo d_n a restrição da métrica $\tilde{d}_n$ ao conjunto X. Como x é arbitrário em X, segue que $G = \{x_1, ..., x_k\}$ é um conjunto (n, ε)-gerador de X, pois todo elemento de X está contido numa bola aberta de raio ε centrada em algum ponto de G.

Se escolhermos $\tilde{G}$ de forma que $\#\tilde{G} = \tilde{G}_n(\frac{\varepsilon}{2})$, então podemos afirmar que $G_n(\varepsilon) \leq \tilde{G}_n(\frac{\varepsilon}{2}) < \infty$, pois para cada conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$-gerador de $\tilde{X}$ temos um conjunto (n, ε)-gerador de X de mesma cardinalidade. Assim, segue que $G_n(\varepsilon)$ é finito para todo $\varepsilon > 0$.

Agora, assuma que $\alpha_\delta = \{B(x_1,\delta),...,B(x_k,\delta)\}$ é uma cobertura de X, para todo $\delta \in (a,b)$, com $0 < a < b$. Afirmamos que existe $\delta_\varepsilon \in (a,b)$ tal que $\infty \notin \tilde{S}(x_i,\delta_\varepsilon)$ para todo $i \in \{1,...,k\}$, com $\tilde{S}(x,r)$ a esfera em $\tilde{X}$ de raio r centrada em x. De fato, para cada $i \in \{1,...,k\}$, seja $\delta_{\varepsilon_i} \in (a,b)$ o número real tal que $\infty \in \tilde{S}(x_i,\delta_{\varepsilon_i})$, se existir δ_{ε_i} em (a,b) com tal propriedade; caso não exista, defina $\delta_{\varepsilon_i} = 0$. Temos dois casos possíveis: 1) se $\delta_{\varepsilon_i} = 0$ para todo i, então para todo $\delta \in (a,b)$ temos $\infty \notin \tilde{S}(x_i,\delta)$ para todo $i \in \{1,...,k\}$. 2) se para algum i tem-se $\delta_{\varepsilon_i} \neq 0$, defina $D = (a,b)\backslash\{\delta_{\varepsilon_i} : i \in \{1,...,k\} \text{ e } \delta_{\varepsilon_i} \neq 0\}$. Tomemos $\delta_\varepsilon \in D$ qualquer. Note que $\infty \notin \tilde{S}(x_i,\delta_\varepsilon)$ para todo $i \in \{1,...,k\}$. Portanto, existe $\delta_\varepsilon \in (a,b)$ tal que $\infty \notin \tilde{S}(x_i,\delta_\varepsilon)$ para todo $i \in \{1,...,k\}$, como bem queríamos mostrar. A seguir, concluíremos que $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é admissível.

Denotando por $\tilde{B}(x,r)$ a bola aberta em $\tilde{X}$ de raio r centrada em X, existem duas possibilidades: 1) o ponto ∞ está contido em $\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$ ou 2) o ponto ∞ não está contido no fecho de $\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$. No primeiro caso, o complementar de $B(x_i,\delta_\varepsilon)$ é igual ao complementar de $\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$, que é compacto. No segundo caso, existe uma vizinhança aberta U de ∞ que tem interseção vazia com $\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$, pois ∞ não é ponto aderente à $\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$. Então, $B(x_i,\delta_\varepsilon) = \tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)$ está contido no complemento de U em $\tilde{X}$, que é compacto, uma vez que o complementar de U é um subconjunto fechado do compacto $\tilde{X}$. Temos $\overline{B(x_i,\delta_\varepsilon)} = \overline{\tilde{B}(x_i,\delta_\varepsilon)}$ compacto, pois é subconjunto fechado do compacto U. Mostramos então que o complemento ou o fecho de cada $B(x_i,\delta_\varepsilon)$ em X é compacto, o que nos permite concluir que $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é cobertura admissível de X.

Como existe $\delta_\varepsilon \in (a,b)$ tal que $\alpha_{\delta_\varepsilon}$ é cobertura admissível e, de acordo com o Lema 3.2.20, toda cobertura admissível de X possui número de Lebesgue, segue que d é métrica admissível.

Nos ocuparemos agora de provar a igualdade $h^*_d(T) = h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T})$. Seja $G = \{x_1,...,x_k\}$ um conjunto $(n,\frac{\varepsilon}{2})$-gerador de X. Pela densidade de X em $\tilde{X}$, se $\tilde{x} \in \tilde{X}$, existe $x \in X$ tal que $\tilde{d}_n(\tilde{x},x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Note que nesta desigualdade passamos diretamente ao uso da métrica $\tilde{d}_n$, pois esta é topologicamente equivalente à métrica $\tilde{d}$ (veja Proposição 1.4.1).

Sabemos ainda que $\tilde{d}_n(x,x_i) = d_n(x,x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, para algum $x_i \in G$. Assim, segue

$$\tilde{d}_n(\tilde{x},x_i) \leq \tilde{d}_n(\tilde{x},x) + \tilde{d}_n(x,x_i) < \varepsilon,$$

o que nos garante que G é um conjunto (n,ε)-gerador de $\tilde{X}$.

Escolhendo G tal que $\#G = G_n(\frac{\varepsilon}{2})$, constatamos que $\tilde{G}_n(\varepsilon) \leq G_n(\frac{\varepsilon}{2})$, pois cada conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$-gerador de X é um conjunto (n, ε)-gerador de $\tilde{X}$.

Ao longo desta prova mostramos que, dado $\varepsilon > 0$, $G_n(\varepsilon) \leq \tilde{G}_n(\frac{\varepsilon}{2})$ e também $\tilde{G}_n(\varepsilon) \leq G_n(\frac{\varepsilon}{2})$. Tomando o logaritmo destas desigualdades, dividindo por n e em seguida tomando o limite com $n \to \infty$, obtemos

$$g(\varepsilon) \leq \tilde{g}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(\varepsilon) \leq g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Então, podemos escrever

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g(4\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{g}(2\varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon).$$

Note que, no membro central desta desigualdade temos $\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{g}(2\varepsilon) = h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T})$. Nos membros laterais temos $\lim_{\varepsilon \to 0} g(4\varepsilon) = h^*_d(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon)$. Em suma, temos

$$h^*_d(T) \leq h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T}) \leq h^*_d(T),$$

o que confirma a tese de que $h^*_d(T) = h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T})$.

Para finalizar, mostraremos que $h^*(T) = h(\tilde{T})$.

Por um lado, pela Proposição 3.2.15, temos $h^*(T) = h^*_d(T)$.

Por outro lado, como $\tilde{X}$ é compacto, sabemos que a entropia de Bowen $h_{\tilde{d}}$ coincide com sua versão estendida $h^*_{\tilde{d}}$, razão pela qual temos $h_{\tilde{d}}(\tilde{T}) = h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T})$. Como, em particular, $\tilde{T}$ é contínua, obtemos pela Proposição 2.3.10 que as entropias topológicas de Bowen e de Adler-Konheim-McAndrew coincidem $h_{\tilde{d}}(\tilde{T}) = h(\tilde{T})$. Daí segue que $h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T}) = h(\tilde{T})$.

Portanto,

$$h^*(T) = h^*_d(T) = h^*_{\tilde{d}}(\tilde{T}) = h(\tilde{T}).$$

∎

O nosso próximo resultado (Lema 3.2.22) foi provado primeiro no Lema 1.5 de nossa referência [7], no qual Michael Handel e Bruce Kitchens usam o fato de que o supremo das entropias de Kolmogorov-Sinai tomado sobre medidas de probabilidades invariantes é igual ao supremo tomado apenas sobre as medidas ergódicas. A prova que apresentaremos a seguir é baseada na prova proposta por Mauro Patrão em [8], no qual o resultado citado não é utilizado.

Lema 3.2.22. Se $T : X \to X$ é uma aplicação própria e $\tilde{T} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ a extensão de T na compactificação por um ponto $\tilde{X}$ do espaço separável localmente compacto X, então

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) = \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}\left(\tilde{T}\right)$$

sendo os supremos tomados sobre $\mathcal{M}(X,T)$ e $\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$, respectivamente.

Prova. Iniciaremos esta prova verificando que os conjuntos $\mathcal{M}(X,T)$ e $\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$ são não vazios. Sabemos que $\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$ é não vazio em razão do Corolário 1.5.5.1. Quanto ao conjunto $\mathcal{M}(X,T)$, trazemos a seguinte afirmação.

Afirmação 3.2.22.1. O conjunto $\mathcal{M}(X,T)$ é não vazio.

Prova. Para cada n natural defina $\sigma_n = \delta_y$, para algum $y \in \tilde{X}$ com $y \neq \infty$. Consideremos δ_y uma medida tal que, para todo $B \in \mathcal{B}(\tilde{X})$, $\delta_y(B) = 1$ se $y \in B$ e $\delta_y(B) = 0$ se $y \notin B$. É imediato que $\sigma_n \in \mathcal{M}(\tilde{X})$ para todo n natural. Temos aí uma sequência $\{\sigma_n\}_{i=1}^{\infty}$. Definimos uma nova sequência $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \circ \tilde{T}^{-i}.$$

Pelo Teorema 1.5.5, o ponto limite $\tilde{\mu}$ de $\{\tilde{\mu}_n\}_{n=1}^{\infty}$ é um elemento de $\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$. Agora, observe que, como $y \neq \infty$, temos $\sigma_n(\{\infty\}) = 0$ para todo n, o que implica em $\tilde{\mu}_n(\{\infty\}) = 0$ para todo n natural, pois $\{\infty\}$ é um conjunto $\tilde{T}$-invariante. Consequentemente, $\tilde{\mu}$ é um elemento de $\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$ tal que $\tilde{\mu}(\{\infty\}) = 0$. Como X e $\{\infty\}$ são conjuntos $\tilde{T}$-invariantes e disjuntos, segue que $\tilde{\mu}(X) = 1$.

Basta observar a relação entre as topologias de X e $\tilde{X}$ para notar que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(\tilde{X})$. Visto isso, definamos $\mu = \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)}$. Queremos mostrar que $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$. De imediato temos $\mu(X) = 1$, restando apenas mostrar que μ é T-invariante. Sabemos que, em particular, se $B \in \mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(\tilde{X})$ então $\tilde{\mu} \circ \tilde{T}^{-i}(B) = \tilde{\mu}(B)$. Como $B \in \mathcal{B}(X)$, temos

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)}(B) \quad \text{ e } \quad \mu \circ T^{-i}(B) = \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)} \circ \tilde{T}^{-i}(B),$$

o que implica em

$$\tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)} \circ \tilde{T}^{-i}(B) = \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)}(B).$$

Sabemos que $\tilde{T}^{-i}(B) = T^{-i}(B)$ para todo $B \subset X$. Assim, segue $\mu \circ T^{-i}(B) = \mu(B)$. Portanto, $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, o que prova que $\mathcal{M}(X,T)$ é não vazio. □

Provaremos a igualdade apresentada no enunciado deste Lema numa prova em duas partes. Primeiro mostraremos que $\sup_\mu h_\mu(T) \leq \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$.

Graças à afirmação anterior sabemos que $\mathcal{M}(X,T)$ é não vazio. Seja $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ arbitrário. Defina $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(\tilde{A} \cap X)$. Não é difícil provar que $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$, basta observar que X e $\{\infty\}$ são conjuntos $\tilde{T}$-invariantes.

Em razão da definição de $\tilde{\mu}$ temos $h_\mu(T) = h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$. De fato, seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_k\}$ uma partição de X. Tomemos um número qualquer j fixado tal que $P_j \in \mathcal{P}$. Defina $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_k\}$ tal que $\tilde{P}_i = P_i$ para todo $i \neq j$ e $\tilde{P}_j = P_j \cup \{\infty\}$. Note que $\tilde{\mathcal{P}}$ é partição de $\tilde{X}$. Note também que, para todo $\tilde{P}_i \in \tilde{\mathcal{P}}$, temos $\tilde{\mu}(\tilde{P}_i) = \mu\left(\tilde{P}_i \cap X\right) = \mu(P_i)$. Observando isto é possível provar que $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T},\tilde{\mathcal{P}}) = h_\mu(T,\mathcal{P})$. Em suma, mostramos que para toda partição $\mathcal{P}$ de X existe uma partição $\tilde{\mathcal{P}}$ de $\tilde{X}$ tal que $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T},\tilde{\mathcal{P}}) = h_\mu(T,\mathcal{P})$, o que implica em $h_\mu(T) \leq h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$.

Por outro lado, dada uma partição $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., \tilde{P}_k\}$ de $\tilde{X}$, seja j o único número natural tal que $\tilde{P}_j \in \tilde{\mathcal{P}}$ contém ∞. Defina $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_k\}$ tal que $P_i = \tilde{P}_i \cap X$ para todo i. É imediato que $\mathcal{P}$ é partição de X. Note também que, dado $P_i \in \mathcal{P}$, temos $\mu(P_i) = \tilde{\mu}(\tilde{P}_i)$, pois $\tilde{\mu}(\tilde{P}_i) = \mu(\tilde{P}_i \cap X) = \mu(P_i)$. Observando isto é possível provar que $h(T,\mathcal{P}) = h(\tilde{T},\tilde{\mathcal{P}})$. Em suma, para toda partição $\tilde{\mathcal{P}}$ de $\tilde{X}$ existe uma partição $\mathcal{P}$ de X tal que $h(T,\mathcal{P}) = h(\tilde{T},\tilde{\mathcal{P}})$, o que implica em $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) \leq h_\mu(T)$. Portanto, $h_\mu(T) = h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$.

Então, para cada $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ existe $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$ tal que $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) = h_\mu(T)$, o que implica em

$$\sup_{\mu \,\in\, \mathcal{M}(X,T)} h_\mu(T) \leq \sup_{\tilde{\mu} \,\in\, \mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}).$$

Iniciamos agora a segunda parte da prova, na qual queremos mostrar que $\sup_\mu h_\mu(T) \geq \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$. Seja $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$. Se $\tilde{\mu}(\{\infty\}) = 1$, é imediato que $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) = 0$, basta notar que X e $\{\infty\}$ são $\tilde{T}$-invariantes. Como nosso interesse se concentra no supremo de $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$ tomado sobre todas as medidas $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})$, podemos assumir $\tilde{\mu}(\{\infty\}) = c < 1$, pois para medidas com essa propriedade temos entropia de $\tilde{T}$ maior ou igual a zero. Isto é, não há prejuízo em considerarmos o supremo de $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$ tomado sobre as medidas $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X}, \tilde{T})$ tais que $\tilde{\mu}(\{\infty\}) = c < 1$.

Definamos $\mu = \left(\frac{1}{1-c}\right) \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)}$. Afirmamos que $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$. De fato, primeiro note que μ é medida de probabilidade em $(X, \mathcal{B}(X))$, pois

$$\mu(X) = \left(\frac{1}{1-c}\right) \tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)}(X) = \left(\frac{1}{1-c}\right) (\tilde{\mu}(\tilde{X}) - \tilde{\mu}(\{\infty\})) = \frac{1-c}{1-c} = 1.$$

Além disso, temos $\tilde{\mu} \circ \tilde{T}^{-i}(B) = T^{-i}(B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(\tilde{X})$. Em particular, $\tilde{\mu}|_{\mathcal{B}(X)} \circ T^{-i}(B) = \tilde{\mu}|_{B(X)}(B)\ \forall\ B \in \mathcal{B}(X)$, pois $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(\tilde{X})$ e $\tilde{T}^{-i}(B) = T^{-i}(B)\ \forall\ B \subset X$. Dividindo tal igualdade por $(1-c)$ obtemos $\mu \circ T^{-i}(B) = \mu(B)$, isto é, μ é T-invariante. Portanto, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$.

Afirmamos que $h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) \le h_{\mu}(T)$. Pois bem, seja $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_1, ..., \tilde{P}_l\}$ uma partição de $\tilde{X}$. Definindo $P_i = \tilde{P}_i \cap X$, temos $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_l\}$ uma partição de X. Não é difícil provar que $P \in \mathcal{P}^n$ se, e somente se, existe $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}^n$ tal que $\tilde{P} \cap X = P$. Isso é facilmente justificado notando que $\tilde{T}^{-j}\left(\tilde{P}_i\right) \cap X = T^{-j}(P_i)$ para quaisquer $j \in \{0, ..., n\}$ e $i \in \{1, ..., l\}$ pois X e $\{\infty\}$ são conjuntos $\tilde{T}$-invariantes. Assim, segue que

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{\mathcal{P}}^n\right) &= -\sum_{\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}^n} \tilde{\mu}(\tilde{P}) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}) \\ &= -\tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) - \sum_{\tilde{P} \neq \tilde{P}_\infty} \tilde{\mu}(\tilde{P}) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

sendo $\tilde{P}_\infty \in \tilde{\mathcal{P}}^n$ o conjunto de $\tilde{\mathcal{P}}^n$ tal que $\infty \in \tilde{P}_\infty$.

Como para cada $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}^n$ existe $P = \tilde{P} \cap X \in \mathcal{P}^n$, observemos que: se $\tilde{P} \neq \tilde{P}_\infty$, então $\tilde{P} \in \mathcal{B}(X)$, o que nos permite escrever $\tilde{\mu}(\tilde{P}) = (1-c)\mu(P)$ com $P = \tilde{P} \cap X \in \mathcal{P}^n$. Para $\tilde{P}_\infty$, defina $P_\infty = \tilde{P}_\infty \cap X$. Atente-se para o fato de que P_∞ é um elemento de $\mathcal{P}^n$. Agora, definimos $a = 1 - c$ e reescrevemos a igualdade (3.11) como segue

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{\mathcal{P}}^n\right) &= -\tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) - \sum_{P \neq P_\infty} a\mu(P) \log a\mu(P) \\ &= -\tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) + a\mu(P_\infty) \log a\mu(P_\infty) - \sum_{P \in \mathcal{P}^n} a\mu(P) \log a\mu(P) \\ &= b - \sum_{P \in \mathcal{P}^n} a\mu(P) \log a\mu(P), \end{aligned}$$

sendo $b = -\tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) \log \tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty) + a\mu(P_\infty) \log a\mu(P_\infty)$. Fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{\mathcal{P}}^n\right) &= b - \sum_{P\in\mathcal{P}^n} a\mu(P)\log a\mu(P) \\ &= b - a\left(\sum_{P\in\mathcal{P}^n} \mu(P)\left(\log a + \log\mu(P)\right)\right) \\ &= b - a\left(\mu(X)\log a + \sum_{P\in\mathcal{P}^n}\mu(P)\log\mu(P)\right) \\ &= b - a\log a + aH\left(\mathcal{P}^n\right). \end{aligned}$$

Observe que

$$b - a\log a = -\varphi(\tilde{\mu}(\tilde{P}_\infty)) + \varphi(a\mu(P_\infty)) \leq d = 2\max\{-\varphi(x) : x \in [0,1]\},$$

sendo φ a aplicação do Teorema 2.1.3. Lembrando ainda que $a \leq 1$, temos

$$H(\tilde{\mathcal{P}}^n) \leq d + H(\mathcal{P}^n).$$

Dividindo tal desigualdade por n e tomando o limite com $n \to \infty$, temos

$$h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}, \tilde{\mathcal{P}}) \leq h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq h_\mu(T).$$

Como $\tilde{\mathcal{P}}$ foi tomado arbitrariamente, temos

$$h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) \leq h_\mu(T) \leq \sup_\mu h_\mu(T).$$

Como $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}(\tilde{X}, \tilde{T})$ é também arbitrário, segue

$$\sup_{\tilde{\mu}\in\mathcal{M}(\tilde{X},\tilde{T})} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) \leq \sup_{\mu\in\mathcal{M}(X,T)} h_\mu(T).$$

Concatenando as duas partes dessa prova temos a igualdade desejada

$$\sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}) = \sup_\mu h_\mu(T).$$

∎

A nossa próxima proposição, a Proposição 3.2.27, foi extraída do artigo [7] publicado por Handel e Kitchens em 1993. Tal resultado estabelece que, dada uma aplicação contínua T num espaço métrico localmente compacto X (não necessariamente compacto), o supremo das entropias de Kolmogorov-Sinai não é maior que o ínfimo das entropias de Bowen. Tal resultado é fundamental para a prova de nosso resultado principal, o qual apresentaremos na próxima subseção.

Em preparação para a prova da proposição citada, apresentamos agora alguns resultados que se farão necessários. Os extraímos também do artigo [7]. Nesses resultados consideramos convenientemente que as medidas tomadas são ergódicas. A existência de medida ergódica é garantida pelo fato de que a compactificação por um ponto de X possui medida ergódica, pois o conjunto de medidas de probabilidades $\tilde{T}$-invariantes do compacto $\tilde{X}$ possui membros ergódicos, vide Página 127 de [12]. Dessa forma, basta tomar a restrição de uma medida ergódica definida em $\mathcal{B}(\tilde{X})$ para $\mathcal{B}(X)$. Não é difícil verificar que tal restrição é ergódica.

Considerar as medidas ergódicas não traz prejuízo, haja visto que a entropia maximal é obtida pela entropia de Kolmogorov-Sinai tomada sobre medidas ergódicas, conforme exposto no Corolário 8.6.1 [14] e, mais detalhadamente, na Seção 8.3 de [14].

Definição 3.2.23. Seja $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_k\}$ uma coleção finita disjunta de subconjuntos de X que não necessariamente é uma cobertura de X. Diremos que um conjunto finito $E \subset K$ é *$(n, \mathcal{C})$-separado de K* se para qualquer par de pontos distintos $x, y \in K$, existem $0 \leq i < n$ e $1 \leq r \neq s \leq k$ tais que $T^i x \in C_r$ e $T^i y \in C_s$. Definimos $s_n(\mathcal{C}, K)$ como a cardinalidade máxima dos conjuntos $(n, \mathcal{C})$-separados de K.

A observação a seguir nos permitirá relacionar $s_n(\mathcal{C}, K)$ com a entropia de Bowen dada por conjuntos separados. A distância entre conjuntos sugerida na definição de γ deve ser interpretada como a menor das distâncias entre elementos dos conjuntos avaliados.

Observação 3.2.24. Seja (X, d) um espaço métrico. Se

$$\gamma = \min\{d(C_r, C_s) : 1 \leq r \neq s \leq k\}$$

é maior do que zero, então

$$s_n(\mathcal{C}, K) \leq s_n(\gamma', K) \ \ \forall \ \ \gamma' \leq \gamma.$$

Apresentamos agora alguns lemas que utilizaremos na prova da Proposição 3.2.27.

Lema 3.2.25. Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua do espaço métrico localmente compacto X. Para qualquer medida invariante μ e qualquer conjunto compacto C com $\mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2}$, existe um conjunto compacto $K \subseteq C$ com $\mu(K) > 1 - \delta$ e um número N tal que para todo $n \geq N$ e para todo $x \in K$, temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta.$$

Prova. Para cada $N > 0$, seja

$$G_N(C) = \left\{ x \in X : \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta \ \forall \ n \geq N \right\}.$$

É suficiente mostrar que algum $K = C \cap G_N(C)$ é compacto e satisfaz $\mu(K) > 1 - \delta$.

Iniciamos afirmando que $G_N(C)$ é fechado em X, o que implica em $C \cap G_N(C)$ compacto uma vez que, por hipótese, C é compacto. De fato, como C é um subconjunto compacto do Hausdorff, C é fechado. Assim, pela Proposição 1.2.3 , obtemos que a aplicação característica χ_C é semicontínua superiormente. Como T é contínua, não é difícil provar que a composição $\chi_C \circ T^i$ é também semicontínua superiormente, basta usar a Proposição 1.2.2. Daí obtemos que

$$\psi = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C \circ T^i : X \to \mathbb{R}$$

é semicontínua superiormente. Agora, observe que

$$G_N(C) = X \backslash \psi^{-1}((-\infty, 1 - \delta)).$$

Segue pela Proposição 1.2.2 que $G_N(C)$ é fechado. Como $K = C \cap G_N(C)$, pela Proposição 1.2.1, segue que K é fechado em C. Como C é compacto, segue pela Proposição 1.2.5 que K é compacto.

Agora, notemos que μ-quase todo ponto de X está contido em algum $G_N(C)$. Pelo Teorema de Birkhoff (Teorema 1.3.3) deduzimos que μ-quase todo ponto de X é quasi-regular, uma vez que toda aplicação contínua é integrável. Assim, pela Proposição 1.3.4, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) = \mu(C) \geq 1 - \frac{\delta}{2} \geq 1 - \delta.$$

Ou seja, para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta.$$

Em particular, para N suficientemente grande, temos $x \in G_N(C)$. Como isto é válido para μ-quase todo ponto de X, temos $\mu(\bigcup G_N(C)) = 1$.

Afirmamos que $\{G_N(C)\}_{N\in\mathbb{N}}$ é uma família crescente. De fato, dados $N_1 \leq N_2$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta \;\; \forall\, n \geq N_1 \;\forall\, x \in G_{N_1}(C).$$

Em particular, para todo $x \in G_{N_1}(C)$ temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta \;\forall\, n \geq N_2.$$

Logo, $G_{N_1}(C) \subseteq G_{N_2}(C)$.

Como $\{G_N(C)\}_{N\in\mathbb{N}}$ é crescente e contém os pontos regulares, sabemos que para algum N suficientemente grande temos $\mu(G_N(C)) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$.

Agora, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2.25.1. Se A e B são subconjuntos de um espaço de probabilidade com $\mu(A) > 1 - \frac{\delta}{2}$ e $\mu(B) > 1 - \frac{\delta}{2}$, então $\mu(A \cap B) > 1 - \delta$.

Prova. Como μ é medida de probabilidade, sabemos que

$$\mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq 1.$$

Fazendo uso das hipóteses, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &> 1 - \frac{\delta}{2} + 1 - \frac{\delta}{2} - \mu(A \cap B) \\ &= 2 - \delta - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 e passando os numerais e o δ a um mesmo membro da inequação, obtemos

$$\mu(A \cap B) > -1 + 2 - \delta = 1 - \delta.$$

Portanto, $\mu(A \cap B) > 1 - \delta$. □

Assim, como $\mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2}$ e $\mu(G_N(C)) > 1 - \frac{\delta}{2}$, temos $\mu(C \cap G_N(C)) > 1 - \delta$ para algum N suficientemente grande. Isto é, $\mu(K) > 1 - \delta$ para algum N suficientemente grande.

Portanto, fica provado que, qualquer que seja o compacto C com $\mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2}$, existe um compacto $K = C \cap G_N(C) \subseteq C$ com $\mu(K) > 1 - \delta$ e um número N tal que, para todo $n \geq N$ e para todo $x \in K$, tem-se

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta.$$

■

Lema 3.2.26. Sejam $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ uma partição de X, $C_r \subset P_r$ subconjuntos compactos e $\mathcal{C} = \{C_1, ..., C_k\}$. Suponha que $K \subseteq C = \bigcup C_r$ é compacto e que existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \geq N$ e todo $x \in K$ tem-se $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta$. Então,

$$\limsup \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{C}, K) \geq \limsup \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{P}, K) - \varepsilon(\delta),$$

onde $\varepsilon(\delta) \to 0$ sempre que $\delta \to 0$.

Prova. Se $x, y \in K$ e $\{x, y\}$ não é um conjunto $(n, \mathcal{C})$-separado, então nós dizemos que x e y são $(n, \mathcal{C})$-*indistinguíveis*. Em outras palavras, x e y são $(n, \mathcal{C})$-indistinguíveis se para cada $0 \leq i < n$, ou $T^i(x)$ e $T^i(y)$ estão contidos num mesmo elemento de $\mathcal{C}$ ou pelo menos um dos pontos $T^i(x)$ ou $T^i(y)$ estão contido em $X \backslash \mathcal{C}$.

Assumindo sem perda de generalidade que δ é racional, escolha $n \geq N$ tal que δn é um inteiro. A primeira etapa desta prova é mostrar que a cardinalidade de um subconjunto $(n, \mathcal{P})$-separado $S \subset K$ cujo elementos são todos $(n, \mathcal{C})$-indistinguíveis é no máximo $k^{2\delta n}\binom{n}{2\delta n}$.

Para $x \in S$, seja $J(x) = \{j : 0 \leq j < n, T^j(x) \in X \backslash \mathcal{C}\}$. Observe que $J(x)$ não é vazio, pois, caso fosse, então x não seria $(n, \mathcal{C})$-indistinguível, o que contraria a definição de S. Por hipótese, $J(x)$ tem cardinalidade no máximo δn. Isso é justificado pelo fato de que $x \in S \subset K$ e que para todo $x \in K$ tem-se $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq 1 - \delta$, ou seja, $\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq n - \delta n$. Daí, deduzimos que a quantidade de $i \in \{0, ..., n-1\}$ tais que $T^i(x) \notin \mathcal{C}$ é no máximo δn, caso contrário, teríamos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \leq n - (\delta n + 1),$$

o que contraria flagrantemente a hipótese de que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C(T^i x) \geq n - \delta n.$$

Assim, segue que $\#J(x) \leq \delta n$.

Escolhamos uma coleção J de $2\delta n$ números inteiros entre 0 e $n-1$. Suponha que $x, y \in S$ e que $J(x) \cup J(y) \subset J$. Se $0 \leq i \leq n-1$ não é um elemento de J, então $T^i(x)$ e $T^i(y)$ são contidos num mesmo elemento de $\mathcal{C}$ e, portanto, num mesmo elemento de $\mathcal{P}$. Como $\{x, y\}$ é $(n, \mathcal{P})$-separado, existe $i \in J$ tal que $T^i(x)$ e $T^i(y)$ estão contidos em elementos diferentes de $\mathcal{P}$. Como $\#J = 2\delta n$, notamos que existem $k^{2\delta n}$ combinações de orbitas possíveis para pontos $(n, \mathcal{P})$-separados de x em S com $J(x) \subset J$. A nossa afirmação inicial segue agora do fato de que existem no máximo $\binom{n}{2\delta n}$ maneiras de compor J.

Afirmamos agora que

$$s_n(\mathcal{C}, K) \geq \frac{s_n(\mathcal{P}, K)}{k^{2\delta n}\binom{n}{2\delta n}}.$$

Pois bem, observe que, dado S um conjunto $(n, \mathcal{P})$-separado de K arbitrário, temos duas possibilidades: 1) S é um $(n, \mathcal{C})$-separado de K ou 2) os elementos de S são $(n, \mathcal{C})$-indistinguíveis. No primeiro caso, S é tal que $\#S \leq s_n(\mathcal{C}, K)$ e então a desigualdade da afirmação é imediata. No segundo caso, a cardinalidade de S é no máximo $k^{2\delta n}\binom{n}{2\delta n}$,

e então
$$\frac{\#S}{k^{2\delta n}\binom{n}{2\delta n}} \leq 1 \leq s_n(\mathcal{C}, K).$$

Daí segue que $s_n(\mathcal{C}, K) \geq \frac{s_n(\mathcal{P},K)}{k^{2\delta n}\binom{n}{2\delta n}}$.

Agora, usando a fórmula de Stirling para estimar assintoticamente $\binom{n}{k}$, obtemos a seguinte expressão
$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^{\frac{2n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{2k+1}{2}} (n-k)^{\frac{2(n-k)+1}{2}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{C}, K) &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log s_n(\mathcal{P}, K) - \log k^{2\delta n} - \log \binom{n}{2\delta n}\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{P}, K) - 2\delta \log k + \\
&\quad - \left[2\delta \log 2\delta + (1-2\delta)\log(1-2\delta))\right].
\end{aligned}$$

O resultado fica provado ao perceber que todos os termos envolvidos por δ tendem a zero quanto δ tende a zero. ■

Usaremos os lemas apresentados para provar a seguinte desigualdade. A proposição a seguir é a Proposição 1.4 do artigo [7].

Proposição 3.2.27. Seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua do espaço métrico localmente compacto X. Então,

$$\sup_{\mu} h_\mu(T) \leq \inf_{d} h_d(T).$$

Prova. Fixe uma métrica d, uma medida de probabilidade T-invariante μ, uma partição $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Escolhamos conjuntos compactos $C_r \subseteq P_r$ tais que $C = \bigcup_{r=1}^{k} C_r$ satisfaz $\mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2}$. Escolha um conjunto K e um número N como os do Lema 3.2.25. Então, $K \subseteq C$ é tal que $\mu(K) > 1 - \delta$ e, para todo $x \in K$ e para todo $n > N$, tem-se

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \chi_C\left(T^i x\right) \geq 1 - \delta.$$

Pelo Teorema de Shannon-McMillan-Breiman (Teorema 2.1.10), temos

$$h_\mu(T,\mathcal{P}) = \lim_n -\frac{1}{n}\log\mu\left(\mathcal{P}^n(x)\right),$$

para μ-quase todo ponto de $x \in X$.

De $\mu(K) > 1-\delta$ sabemos que $\mu(X\backslash K) < \delta$. Pelo Teorema de Egorov (Teorema 1.3.5), sabemos que existe um subconjunto de X, com medida quase total, sobre o qual a sequência $-\frac{1}{n}\log\mu\left(\mathcal{P}^n(x)\right)$ converge uniformemente para $h_\mu(T,\mathcal{P})$. Como $\mu(X\backslash K) < \delta$, podemos assumir que K é um conjunto sobre o qual $-\frac{1}{n}\log\mu\left(\mathcal{P}^n(x)\right)$ converge uniformemente para $h_\mu(T,\mathcal{P})$. Então, em particular, para o dado $\delta > 0$, existe $N_* \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in K$ e para todo $n > N_*$, temos

$$h_\mu(T,\mathcal{P}) - \delta < -\frac{1}{n}\log\mu\left(\mathcal{P}^n(x)\right).$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} n\left(h_\mu(T,\mathcal{P})-\delta\right) &< -\log\mu(\mathcal{P}^n(x)) \\ e^{n\left(h_\mu(T,\mathcal{P})-\delta\right)} &< \mu(\mathcal{P}^n(x))^{-1} \\ \mu(\mathcal{P}^n(x)) &< e^{-n\left(h_\mu(T,\mathcal{P})-\delta\right)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $x \in K$ e todo $n > N_*$.

Agora, consideremos a seguinte afirmação.

Afirmação 3.2.27.1. Dado que $\mu(K) > 1-\delta$, temos

$$s_n(\mathcal{P},K) \geq (1-\delta)e^{n\left(h_\mu(T,\mathcal{P})-\delta\right)}$$

para todo $n > N_*$.

Prova. Considere as coleções $\mathcal{P}_1 = \{P \in \mathcal{P}^n : P \cap K \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{P \in \mathcal{P}^n : P \cap (X\backslash K) \neq \emptyset\}$. Note que,

$$1 = \sum_{P\in\mathcal{P}_1}\mu\left(P\cap K\right) + \sum_{P\in\mathcal{P}_2}\mu\left(P\cap(X\backslash K)\right).$$

Sabemos que $\mu(K) > 1 - \delta$, o que implica em $\mu(X \backslash K) < \delta$. Em particular,

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_2} \mu \left(P \cap (X \backslash K) \right) < \delta.$$

Daí, segue

$$1 - \delta \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_1} \mu \left(P \cap K \right).$$

Da desigualdade (3.12) sabemos que $\mu \left(P \right) < e^{-n \left(h_\mu(T,\mathcal{P}) - \delta \right)}$ para todo $P \in \mathcal{P}_1$ e todo $n > N_*$, o que implica em

$$1 - \delta \leq e^{-n \left(h_\mu(T,\mathcal{P}) - \delta \right)} \# \mathcal{P}_1. \tag{3.13}$$

Seja E um conjunto $(n, \mathcal{P})$-separado de K. Então, para todo $P \in \mathcal{P}_1$, obtemos que $E \cap P$ tem no máximo cardinalidade 1. Daí deduzimos que $\# E \leq \# \mathcal{P}_1$. Afirmamos que $s_n(\mathcal{P}, K) = \# \mathcal{P}_1$. De fato, para cada $P_i \in \mathcal{P}_1$ tome um único $x_i \in P_i$ e seja R a coleção de tais pontos. É imediato que R é um conjunto $(n, \mathcal{P})$-separado de K. Como todo E, conjunto $(n, \mathcal{P})$-separado de K, tem-se $\# E \leq \# \mathcal{P}_1$, segue que $s_n(\mathcal{P}, K) = \# \mathcal{P}_1$. Daí, substituindo em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} 1 - \delta &\leq e^{-n \left(h_\mu(T,\mathcal{P}) - \delta \right)} s_n(\mathcal{P}, K) \\ s_n(\mathcal{P}, K) &\geq (1 - \delta) e^{n \left(h_\mu(T,\mathcal{P}) - \delta \right)}. \end{aligned}$$

E isto encerra a prova da afirmação. □

Agora, definamos $N_0 = \max\{N, N_*\}$. Dessa forma, para todo $n > N_0$ temos garantido a validade do Lema 3.2.26 e da Afirmação 3.2.27.1.

Da desigualdade da Afirmação 3.2.27.1, tomando o logaritmo, dividindo por n e tomando o $\limsup$ com $n \to \infty$, obtém-se

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{P}, K) \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - \delta.$$

Pela Observação 3.2.24, para $\gamma > 0$ suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} h_d(T) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\gamma, K) & \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{C}, K) \\ & \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\mathcal{P}, K) - \varepsilon(\delta), \text{ pelo Lema 3.2.26.} \\ & \geq h_\mu(T, \mathcal{P}) - (\varepsilon(\delta) + \delta). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon(\delta) + \delta$ pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, e, além disso, a partição $\mathcal{P}$ e a métrica d são arbitrárias, segue que $h_d(T) \geq h_\mu(T)$. Como tal desigualdade vale para qualquer medida ergódica μ relativa à T e qualquer métrica d em X, podemos escrever $\sup_\mu h_\mu(T) \leq \inf_d h_d(T)$. ∎

3.2.3 O Princípio Variacional para espaços não compactos

Apresentaremos nesta seção o Princípio Variacional para entropia de aplicações próprias em espaços separáveis localmente compactos. A prova que aqui apresentamos é a desenvolvida por Mauro Patrão em 2009 e publicada no artigo de título *Entropy and its variational principle for noncompact metric spaces* [8]. O prenúncio de tal resultado foi apresentado por Michael Handel e Bruce Kitchens no Lema 1.5 do artigo de título *Metrics and entropy for non-compact spaces* [7] submetido em 1993. Na ocasião, Handel e Kitchens provaram para homeomorfismos a seguinte igualdade

$$\sup_\mu h_\mu(T) = \inf_d h_d(T). \tag{3.14}$$

No segundo membro desta igualdade temos o ínfimo das entropias de Bowen da aplicação T tomado sobre as métricas do espaço X. Vale lembrar que se X é compacto a entropia de Bowen de T é invariante quanto a métrica d, mas isso não é válido de forma geral (veja Observação 15 da página 171 da referência [14]). Em vista disto, o resultado de Patrão incrementa o resultado de Handel e Kitchens ao mostrar que o ínfimo da igualdade (3.14) é atingido se tomarmos uma métrica admissível em X. Além disso, Patrão adiciona na igualdade a presença da entropia topológica admissível, aquela definida no início da Seção 3.2.1, e prova o resultado para aplicações próprias - não somente para homeomorfismos como no resultado de Handel e Kitchens.

Teorema 3.2.28 (Princípio Variacional para espaços métricos não compactos)**.** Se $T : X \to X$ é uma aplicação própria do espaço métrico separável localmente compacto X, então

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) = h^{*}(T) = \min_{d} h_{d}(T),$$

sendo o mínimo atingido sempre que d é uma métrica admissível.

Prova. Primeiramente, o fato de X ser um espaço métrico localmente compacto garante que X admite uma compactificação por um ponto $\tilde{X}$ em virtude da Proposição 1.2.11. Além disso, como X é um espaço métrico separável e localmente compacto, sabemos que a compactificação por um ponto $\tilde{X}$ é metrizável em virtude das Proposições 1.2.10 e 1.2.12.

Como T é aplicação própria, sabemos que sua extensão para $\tilde{X}$ é contínua. Pelo Princípio Variacional para espaços compactos (Teorema 3.1.5) temos

$$h(\tilde{T}) = \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T}).$$

Pela Proposição 3.2.27 temos

$$\sup_{\mu} h_{\mu}(T) \leq \inf_{d} h_{d}(T).$$

Pelo Lema 3.2.22 temos $\sup_{\mu} h_{\mu}(T) = \sup_{\tilde{\mu}} h_{\tilde{\mu}}(\tilde{T})$. Então,

$$h(\tilde{T}) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T) \leq \inf_{d} h_{d}(T).$$

Da Proposição 3.2.21 temos $h^{*}(T) = h(\tilde{T})$. Então, $h^{*}(T) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T) \leq \inf_{d} h_{d}(T)$. Já pela Proposição 3.2.15, temos $h^{*}(T) = h^{*}_{d}(T)$ sempre que d é uma métrica admissível. Sabemos também que $h_{d}(T) \leq h^{*}_{d}(T)$. Então, considerando d uma métrica admissível de X, temos

$$h_{d}(T) \leq h^{*}_{d}(T) = h^{*}(T) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T) \leq \inf_{d} h_{d}(T).$$

Da expressão acima concluímos que, em particular, existe uma métrica d definida em X tal que $h_{d}(T) \leq \inf_{d} h_{d}(T)$. Perceba que tal desigualdade só é verdadeira na sua igualdade, isto é, $h_d(T) = \inf_d h_d(T)$.

Como existe uma métrica d em X tal que $h_d(T) = \inf_d h_d(T)$, segue que o conjunto

$$\{h_d(T) : d \text{ é métrica de X}\}$$

possui mínimo e $\min_d h_d(T) = h_d(T)$. Como a métrica que faz jus a essa propriedade é uma métrica admissível arbitrária, dizemos que o mínimo do conjunto $\{h_d(T) : d \text{ é métrica em X}\}$ é atingido sempre que d é uma métrica admissível. Assim, temos

$$\min_d h_d(T) = h_d(T) \leq h^*_d(T) = h^*(T) = \sup_\mu h_\mu(T) \leq \inf_d h_d(T) = \min_d h_d(T),$$

o que implica em

$$\sup_\mu h_\mu(T) = h^*(T) = \min_d h_d(T).$$

■

3.2.4 Exemplo: entropia topológica admissível de um isomorfismo linear

Mostraremos que a entropia topológica admissível de um isomorfismo linear de um espaço vetorial normado de dimensão finita é nula (Exemplo 3.2.36). Tal resultado foi retirado do artigo de Patrão [8], no qual faz uso do Princípio Variacional para espaços não compactos (3.2.28) para verificar sua validade.

A prova do Exemplo 3.2.36 faz uso da Decomposição Multiplicativa de Jordan de um isomorfismo linear, da noção de pontos recorrentes de uma aplicação e do Teorema da Recorrência de Poincaré. Considerando isto, apresentamos as definições e resultados relacionados a estes temas que se farão necessários e, em seguida, provaremos o exemplo.

Faremos uso do teorema a seguir, conhecido como Decomposição Multiplicativa de Jordan, para deduzir uma caracterização para o conjunto dos pontos recorrentes de um isomorfismo linear na Proposição 3.2.31.

Teorema 3.2.29 (Decomposição Multiplicativa de Jordan)**.** Se $T : V \to V$ é um isomorfismo linear definida no espaço vetorial de dimensão finita V, então podemos escrever

$$T = T_H \circ T_E \circ T_U,$$

sendo $T_H : V \to V$ uma transformação linear diagonalizável em V com autovalores positivos, $T_E : V \to V$ uma isometria relativa à uma norma apropriada de V e $T_U : V \to V$ um isomorfismo linear que pode ser decomposto como uma soma da transformação linear identidade mais uma transformação linear nilpotente. As transformações lineares T_H, T_E e T_U comutam, são únicas e denominadas, respectivamente, a *hiperbólica*, a *elíptica* e a *unipotente* componentes da Decomposição Multiplicativa de Jordan de T.

Prova. Disponível na página 430 de nossa referência [21]. ∎

Definição 3.2.30. Um ponto $x \in V$ é *recorrente* para T se, para qualquer aberto $A \subset V$ com $x \in A$, existe $n > 0$ tal que $T^n(x) \in A$. Denotamos por $\mathcal{R}(T)$ o *conjunto recorrência de* T, formado por todos os pontos recorrentes de T.

O resultado a seguir caracteriza os pontos recorrentes de um isomorfismo linear de um espaço vetorial de dimensão finita, mostrando que os pontos recorrentes de T são os pontos de V que são pontos fixos de T_H e de T_U. Utilizamos $\text{fix}(T_H)$ e $\text{fix}(T_U)$ para denotar os conjuntos formados pelos pontos fixos de T_H e T_U, respectivamente.

Proposição 3.2.31. Se $T : V \to V$ é um isomorfismo linear de um espaço vetorial de dimensão finita V, então o conjunto recorrência de T é dado por

$$\mathcal{R}(T) = \text{fix}(T_H) \cap \text{fix}(T_U).$$

Prova. Disponível no artigo [8]. ∎

A observação a seguir é de suma importância para a conclusão da prova do Exemplo 3.2.36, pois nos permite concluir que o isomorfismo T restrito ao conjunto de recorrência de T é uma isometria.

Observação 3.2.32. A igualdade $\mathcal{R}(T) = \text{fix}(T_H) \cap \text{fix}(T_U)$ implica em

$$T|_{\mathcal{R}(T)} = T_E|_{\mathcal{R}(T)}.$$

Prova. Temos $T = T_H \circ T_E \circ T_U$. De $\mathcal{R}(T) = \text{fix}(T_H) \cap \text{fix}(T_U)$ obtemos que, se

$x \in \mathcal{R}(T)$, então $T_H(x) = x$ e $T_U(x) = x$. Dessa forma, temos

$$T(x) = T_H(T_E(T_U(x))) = T_H(T_E(x)) = T_E(x),$$

para todo $x \in \mathcal{R}(T)$. Isto é, $T|_{\mathcal{R}(T)} = T_E|_{\mathcal{R}(T)}$. ∎

A proposição a seguir garante que o espaço vetorial do Exemplo 3.2.36 é separável e localmente compacto, o que nos permite fazer uso do Princípio Variacional para espaços não compactos.

Proposição 3.2.33. Todo espaço vetorial normado de dimensão finita é separável e localmente compacto.

Prova. Basta notar que todo espaço vetorial normado é isomorfo ao espaço euclidiano (Veja página 16 de nossa referência [22]). O resultado segue do fato de que o espaço euclidiano é separável e localmente compacto. ∎

O resultado a seguir estabelece condições para que o espaço vetorial do Exemplo 3.2.36 seja compacto.

Proposição 3.2.34. Num espaço normado V de dimensão finita, qualquer subconjunto M de V é compacto se, e somente se, M é fechado e limitado.

Prova. Disponível na página 77 de nossa referência [23]. ∎

Em nosso exemplo não nos é garantido que o espaço V é fechado e limitado, portanto, não é possível concluir que tal espaço é compacto. Sendo assim, assumiremos que o espaço V do Exemplo 3.2.36 é apenas localmente compacto, o que é garantido pela Proposição 3.2.33.

A seguir, disponibilizamos o conhecido Teorema da Recorrência de Poincaré na sua versão topológica. A prova desse resultado pode ser consultada na página 49 de [13].

Teorema 3.2.35 (Recorrência de Poincaré - Versão topológica)**.** Seja V um espaço topológico que admite uma base enumerável de abertos. Seja $T : V \to V$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita em V invariante por T. Então, μ-quase todo ponto $x \in V$ é recorrente para T.

Munidos de todos os resultado necessários, vamos ao exemplo:

Exemplo 3.2.36. Se $T : V \to V$ é um isomorfismo linear de um espaço vetorial normado de dimensão finita V, então $h^*(T) = 0$.

Prova. Queremos mostrar que a entropia topológica admissível da aplicação T é nula. Iniciamos afirmando que, para toda medida $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, temos $h_\mu(T) = h_\mu(T|_{\mathcal{R}(T)})$. De fato, como V é uma espaço vetorial normado de dimensão finita, pela Proposição 3.2.33, temos V separável. Segue pela Proposição 1.2.10 que V tem base enumerável. Aqui subentende-se V como um espaço topológico munido da topologia compatível com a métrica induzida pela norma de V. Considerando a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(V)$, como T é contínua, pela Proposição 1.3.1, temos T mensurável. Assim, nos é permitido aplicar o Teorema de Recorrência de Poincaré na versão topológica (Teorema 3.2.35), que nos garante que μ-quase todo ponto de V é recorrente. Portanto, dado $B \in \mathcal{B}(V)$, temos

$$\mu(B) = \mu(B \cap \mathcal{R}(T)).$$

Daí deduzimos que

$$\mu(T^{-1}B) = \mu(T|_{\mathcal{R}(T)}^{-1}B),$$

o que nos permite deduzir que $h_\mu(T) = h_\mu(T|_{\mathcal{R}(T)})$.

Não é difícil verificar que T e $T|_{\mathcal{R}(T)}$ são aplicações próprias. Além disso, V é separável e localmente compacto, conforme a Proposição 3.2.33. Então, podemos fazer uso do Princípio Variacional para entropia em espaços não compactos (Teorema 3.2.28), o qual nos garante

$$\sup_\mu h_\mu(T) = h^*(T) \quad \text{e} \quad \sup_\mu h_\mu(T|_{\mathcal{R}(T)}) = h^*(T|_{\mathcal{R}(T)}) \leq h_d(T|_{\mathcal{R}(T)}),$$

para toda métrica d de V.

Como $h_\mu(T) = h_\mu(T|_{\mathcal{R}(T)})$, segue

$$h^*(T) = h^*(T|_{\mathcal{R}(T)}) \leq h_d(T|_{\mathcal{R}(T)}). \tag{3.15}$$

Sabemos da Observação 3.2.32 que $T|_{\mathcal{R}(T)} = T_E|_{\mathcal{R}(T)}$, o que nos mostra que $T|_{\mathcal{R}(T)}$ é uma isometria relativa à alguma métrica d de V, pois isso é uma propriedade de $T_E|_{\mathcal{R}(T)}$ (Veja Teorema 3.2.29). Dessa forma, considerando a métrica d para a qual $T|_{\mathcal{R}(T)}$ é isometria, observamos que a distância entre os pontos das órbitas de $x, y \in V$

não varia, isto é

$$d(x,y) = d(T|^i_{\mathcal{R}(T)}x, T|^i_{\mathcal{R}(T)}y), \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Então, $d_n(x,y) = d(x,y)$ para todo n. Isto implica em $G_{n_1}(\varepsilon, V) = G_{n_2}(\varepsilon, V)$ para quaisquer naturais n_1 e n_2; isto é, fixado ε, $G_n(\varepsilon, V) = a$, a constante, para todo n natural. Então,

$$g(\varepsilon, V) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log G_n(\varepsilon, V) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a = 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Pela Observação 3.2.13, temos

$$\begin{aligned} h_d^*(T|_{\mathcal{R}(T)}) &= h_d^*(T|_{\mathcal{R}(T)}, V) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon, V) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $h_d(T|_{\mathcal{R}(T)}) \leq h_d^*(T|_{\mathcal{R}(T)})$, temos $h_d(T|_{\mathcal{R}(T)}) \leq 0$.

Portanto, considerando a desigualdade (3.15), segue $h^*(T) = 0$.

■

Considerações finais

Dezesseis anos separam o artigo de Handel e Kitchens [7] (1993) e o artigo de Patrão [8] (2009). O incremento ao resultado de 1993 foi possível ao vislumbrar uma interessante possibilidade: a de estender as definições clássicas de entropia para espaços não compactos, sendo necessário para isso, tomar coberturas e métricas com propriedades especiais, o que motivou o termo *admissíveis*. Essas propriedades são naturais das coberturas e métricas dos espaços compactos, mas não estão presentes em todas as coberturas e métricas de espaços não compactos.

Outro grande trunfo foi vislumbrar o potencial da compactificação de Alexandrov - a compactificação por um ponto. Com ela foi possível concluir de forma indireta que $h^*(T) = \sup_\mu h_\mu(T)$ através do Lema 3.2.22 e da Proposição 3.2.21. Para garantir que essa compactificação é metrizável, exige-se que X seja separável, pois, para que uma compactificação por um ponto seja metrizável, é necessário e suficiente que X seja um espaço métrico separável localmente compacto.

O resultado final não seria possível sem o uso da Proposição 1.4 de Handel e Kitchens [7], aqui apresentada como Proposição 3.2.27. É um resultado que lembra o resultado de Goodwyn - apresentado na primeira parte do Princípio Variacional para espaços compactos - que relaciona as entropias com medida e a topológica.

Concatenando todas essas informações e resultados, obtém-se enfim o Princípio Variacional para aplicações próprias em espaços não compactos:

$$\sup_\mu h_\mu(T) = h^*(T) = \min_d h_d(T),$$

sendo o mínimo alcançado sempre que d é uma métrica admissível.

Um detalhe é que o resultado de Patrão é dado para aplicações próprias, justificado pela necessidade de garantir que a extensão $\tilde{T}$ seja também contínua. Informo o leitor que uma extensão desse resultado foi publicado em 2018 no artigo *Entropy and its Variational Principle for Locally Compact Metrizable Systems* [24], em que o resultado proposto exige que a aplicação $T : X \to X$ seja apenas contínua. Tal artigo foi desenvolvido por Patrão em parceria com seu orientando de doutorado André Caldas; atualmente ambos são colegas de trabalho e integrantes do grupo de Sistemas Dinâmicos do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O artigo é uma continuação e extensão do trabalho desenvolvido por André Caldas em sua tese de doutorado [20] sob orientação de Mauro Patrão.

Pesquisas proeminentes inspiradas na construção apresentada em [8] - e aqui exploradas - estão em curso. Em [25] os autores desenvolvem a teoria de entropia para ações de semigrupos em espaços admissíveis inspirados na definição de coberturas admissíveis proposta por Patrão. No contexto de ações de semigrupos, um problema ainda em aberto é justamente o Princípio Variacional.

Faço votos de que esta dissertação se mostre uma palatável fonte de informação para futuros estudantes que vierem a se aprofundar no estudo do Princípio Variacional para entropia em espaços compactos ou espaço não compactos. Entropia em Sistemas Dinâmicos é uma área de pesquisa relativamente jovem e muito promissora, novos pesquisadores são sempre bem-vindos. Nota-se através deste trabalho que estudar o Princípio Variacional para entropia se mostra um interessante exercício de diversos conhecimentos matemáticos. O Princípio Variacional é especialmente rico - e belo - por relacionar diferentes estruturas matemáticas, instando a visualizar um mesmo conjunto hora como espaço métrico, hora como espaço topológico e hora como espaço de medida. Aquele que estuda o Princípio Variacional obtém - inevitavelmente - um grande enriquecimento em experiência matemática.

Referências Bibliográficas

[1] KOLMOGOROV, A. N. A new metric invariant of transitive dynamical systems and of automorphisms of lebesgue spaces. **Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)**, v. 119, n. 5, p. 861-864, 1958.

[2] ADLER, R., KONHEIM, A. e MCANDREW, H. Topological entropy. **Transactions of the american mathematical society**, n. 114, p. 309-319, 1965.

[3] DINABURG, E. I. A correlation between topological entropy and metric entropy. **Doklady akademii nauk SSSR**, v. 190, n. 1, p. 19-22, 1970.

[4] BOWEN, R. Entropy for group endomorphism and homogeneous spaces. **Transactions of the american mathematical society**, n. 153, p. 401-414, Jan 1971.

[5] GOODWYN, L. W. Topological entropy bounds measure-theoretic entopy. **Proceedings of the american mathematical society**, v. 23, n. 3, p. 679-688, 1969.

[6] GOODMAN, T. N. T. Relating topological entropy and measure entropy. **Bulletin of the london mathematical society**, v. 3, n. 3, p. 176-180, jul. 1971.

[7] HANDEL, M., KITCHENS, B. e RUDOLPH, D. J. Metrics and entropy for non-compact spaces. **Israel journal of mathematics**, n. 91, p. 253-271, Out 1995.

[8] PATRÃO, M. Entropy and its variational principle for noncompact metric spaces. **Ergodic theory and dynamical systems**, v. 30, Maio 2008.

[9] LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A., 1970.

[10] BARTLE, R. G. **The elements of integration**. 1ª Edição. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1966.

[11] DEVANEY, R. L. **An introduction to chaotic dynamical systems**. 2ª Edição. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[12] MAÑÉ, R. **Ergodic theory and differentiable dynamics**. Tradução do Português de Silvio Levy. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[13] OLIVEIRA, K; VIANA, M. **Fundamentos da teoria ergódica**. (versão preliminar do livro). 2014.

[14] WALTERS, P. **An introduction to ergodic theory**. 1ª Edição. New York: Springer-Verlag, 2000.

[15] CIPOLATTI, R. **Cálculo avançado I**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 1970.

[16] OXTOBY, J. C. Ergodic Sets. **Bulletin of the american mathematical society**, n. 58, p. 116-136, 1952.

[17] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. **The bell system thechnical journal**, v. 27, p. 379-423, 623-656, 1948.

[18] LIMA, E. L. **Curso de análise, volume 2**. 11ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[19] MISIUREWICZ, M. A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}_+^N$ action on a compact space. **International conference on dynamical systems in mathematical physics**, Paris, Astérisque, n. 40, p. 147-157, 1976.

[20] SOUZA, A. C. **Princípio variacional e entropia de endomorfismos de grupos de lie**. 2012. Tese (Doutorado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade de Brasília. Brasília, 2012.

[21] HELGASON, S. **Differential geometry, lie groups and symmetric spaces**. New York: Academic Press, 1978.

[22] FILHO, G. S. S. **O teorema de Hahn-Banach e aplicações em espaços separáveis**. 2012. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Ensino, Colegiado de Matemática, Instituto Federal da Bahia - Campus Eunápolis. Eunápolis, 2012.

[23] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. USA: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[24] CALDAS, A. e PATRÃO, M. Entropy and its variational principle for locally compact metrizable systems. **Ergodic theory and dynamical systems**, v. 38, n. 2, p. 540-565, 2018.

[25] SOUZA, J. A., SANTANA, A. J. Entropy for semigroup actions on general topological spaces. **Mathematische nachrichten**, p. 1-26, 2020.

[26] IVANOV, N. V. **A. N. Kolmogorov's and Y. G. sinais's papers introducing entropy of dynamical systems.** , Mai 2015. Disponível em: https://s3.amazonaws.com/KolmogorovSinaiEntropy/DefinitionEntropy2014-2015.pdf. Acesso em: 24 nov. 2020.