ELIMAR MOREIRA DO NASCIMENTO

# INTEGRAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

N244i
2017

Nascimento, Elimar Moreira do, 1981-
Integração entre álgebra e geometria no ensino da matemática / Elimar Moreira do Nascimento. – Viçosa, MG, 2017.
viii, 117f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Marinês Guerreiro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.116-117.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Geometria analítica. 4. Álgebra. 5. Simetria (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 510

ELIMAR MOREIRA DO NASCIMENTO

# INTEGRAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 12 de maio de 2017.

Valéria Mattos da Rosa

Catarina Mendes de Jesus

Marinês Guerreiro
(Orientadora)

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e ao Imaculado Coração de Maria por estarem sempre ao meu lado me guiando e iluminando o meu caminho e por terem me proporcionado a chance de cursar esse Mestrado, que agora concluo.

Agradeço ao meu noivo, por estar sempre ao meu lado nos momentos mais difíceis, por ter me apoiado e entendido a minha dedicação a esse mestrado. Dênis, as suas palavras de incentivo me deram estímulo para alcançar esta vitória.

Agradeço aos meus pais, Dalva e Élio, por acreditarem que eu chegaria até aqui e por sempre confiarem no meu potencial. Vocês me ensinaram a lutar e, consequentemente, a subir cada degrau desta conquista. Agradeço a minha irmã Betinha, pelas palavras de apoio e confiança. Você também foi responsável por eu ter chegado até aqui.

Agradeço aos familiares e amigos pelas orações e pela fé que me acompanharam por esses 2 anos de estrada, sempre me encorajando a ir mais longe.

Agradeço a minha professora orientadora, pelas construtivas correções e orientações, tais que me levaram a concluir com êxito minha dissertação. Marinês, obrigada por repartir comigo seus conhecimentos e por ter sido minha guia nesta caminhada.

Agradeço a minha eterna veterana Georgia *(in Memorian)* pelas orientações no início do mestrado e pelos materiais fornecidos. O tempo de convivência foi muito curto, mas intenso e verdadeiro.

Agradeço a minha turma, PROFMAT 2015, pelos momentos de alegria e união e, em especial, aos "sobreviventes" Bruno, Eduardo, Gleisiani e Paulo. Foram dias de luta e dias de glória, como dizia o poeta. A vocês digo um "até breve", não me despedirei, pois tenho certeza que encontrarei todos nos caminhos do sucesso.

Agradeço a todos os professores que participaram desta caminhada. Vocês foram os mestres que me deram uma visão mais crítica e ampla sobre a Matemática.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro e aos responsáveis pela criação deste programa em Rede Nacional.

Por fim, um agradecimento sincero a todos aqueles que fizeram parte desta conquista: família, amigos, colegas de trabalho e a todos que sempre acreditaram nesta vitória.

# Sumário

# Resumo

NASCIMENTO, Elimar Moreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2017. **Integração entre Álgebra e Geometria no Ensino da Matemática.** Orientadora: Marinês Guerreiro.

Neste trabalho abordamos algumas interações entre a Álgebra e a Geometria, a partir da ampliação do conhecimento histórico do desenvolvimento da Geometria Analítica e suas aplicações, bem como do estudo do tema simetria. Analisamos alguns livros didáticos para perceber como esses temas são abordados no Ensino Fundamental e Médio. Desenvolvemos um estudo dos grupos de simetria de figuras geométricas no plano e no espaço, bem como dos grupos de friso e de grupos cristalográficos. Propomos um material para o ensino de simetria, com desenvolvimento gradual, desde o $6^o$ ano do Ensino Fundamental até o $3^o$ ano do Ensino Médio.

# Abstract

NASCIMENTO, Elimar Moreira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2017. **Integration between Geometry and Algebra in Mathematics Teaching.** Advisor: Marinês Guerreiro.

In this work we discuss some interactions between Algebra and Geometry, from the broadening of the knowledge of the historical development of Analytical Geometry and its applications, as well as the study of symmetry. We evaluate some textbooks to understand how these topics are approached in Elementary and High School. We also develop a study of the groups of symmetry of geometric figures in the plane and in space, as well as groups of frieze and crystallographic groups. We propose a material for the teaching of symmetry, with a gradual development, from the sixth year of the Elementary School to the third o year of the High School.

# Introdução

A Matemática só iniciou como ciência com Descartes. (*Augusto Comte*)

A Matemática é tradicionalmente dividida em três grandes áreas: a Geometria, a Álgebra e a Análise. Essas áreas são também conhecidas como delineadoras de maneiras de pensar em Matemática.

A solução para um mesmo problema pode ser encontrada "geometricamente", "algebricamente" ou "analiticamente". A decisão sobre qual é a melhor, a mais simples, ou a mais adequada solução, depende da natureza do problema e das preferências pessoais bastante subjetivas de quem o resolve. No entanto, na maioria das vezes, as áreas do conhecimento matemático se entrelaçam de maneira significativa e isso nem sempre é percebido nos assuntos ministrados no Ensino Básico.

O proeminente matemático Russo Vladimir Rokhlin certa vez afirmou bastante emocionado que "a profundidade e a beleza da Geometria não podem ser comparadas com as de qualquer outra área da Matemática" [24]. Já no século XVIII, Jean Le Rond d'Alembert afirmava que "a Álgebra é generosa, muitas vezes nos dá mais do que lhe pedimos" [7, p. 478].

Historicamente, a Geometria Euclidiana é um dos conhecimentos que teve seu desenvolvimento desde as civilizações mais antigas, na Grécia e no Egito e era principalmente utilizada para resolver problemas práticos da Agricultura, Astronomia, Arquitetura e Engenharia. No entanto, já na Escola Pitagórica, começou a ser apresentada com uma abordagem sintética em que certas noções geométricas são consideradas primitivas e onde o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas é a ferramenta principal para obter proposições verdadeiras [7]. Nos dias atuais, os conhecimentos de Geometria são aplicados nos mais variados campos do conhecimento humano, tais como: Física, Química, Geologia, Astronomia, Engenharia, Biologia, Navegação, Cartografia, Computação Gráfica e muitos outros. Na maioria dos livros didáticos atuais, os temas de Geometria Euclidiana são ainda tratados axiomaticamente e poucas aplicações são apresentadas.

A Álgebra também é uma das áreas mais antigas da Matemática, se considerarmos seus primórdios vinculados à Teoria de Números e à Aritmética Básica. Ao longo da História, muito conhecimento foi sendo adicionado e, desde o século XVII, a partir da observação de regras comuns que certos conjuntos com determinadas operações satisfaziam, foram se originando as diferentes estruturas algébricas (e subáreas da Álgebra) que hoje são estudadas [7]. Nos dias atuais, as aplicações de Álgebra também são muitas, como na Tecnologia da Informação, com a transmissão de mensagens, a Criptografia para a segurança dos dados digitais, funcionamento dos telefones celulares, armazenamento de grande quantidade de dados, etc. De modo geral, na escola, o ensino da Álgebra se restringe a resolução de equações algébricas de modo mecânico, quase sempre sem vincular com problemas reais ou, pelo menos, geométricos.

Com a introdução do plano cartesiano por René Descartes, no início do século XVII, problemas de outras áreas da Matemática, como os da Álgebra, puderam ser transformados em problemas de Geometria (e vice-versa), muitas vezes conduzindo à simplificação das soluções [7]. Essa integração da Álgebra com a Geometria deu origem, dentre outras, à Geometria Analítica que foi um dos pontos chaves para que Isaac Newton e Gottfried Leibniz pudessem desenvolver as ideias do Cálculo Diferencial e Integral no final daquele mesmo século.

> Enquanto a Álgebra e a Geometria estiveram separadas, seus progressos foram lentos e suas aplicações limitadas. No entanto, quando estas duas ciências foram unidas, deram uma a outra renovada vitalidade e seguiram rapidamente rumo à perfeição.(*Joseph Louis Lagrange*) [15]

A Geometria Analítica, também chamada Geometria Cartesiana, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da Álgebra e da Análise. É um campo matemático no qual são utilizados métodos e símbolos algébricos para representar e resolver problemas geométricos. Sua importância está presente no fato de que estabelece uma correspondência entre equações algébricas e curvas geométricas. Tal correspondência torna possível a reavaliação de problemas na Geometria como problemas equivalentes em Álgebra, e vice-versa; os métodos de um âmbito podem ser utilizados para solucionar problemas no outro [25].

No estudo da Geometria integrada à Álgebra destacamos ainda a noção de simetria que é encontrada nas formas presentes na natureza: nas folhas, nas flores, no corpo humano e de outros animais, nos cristais de gelo, na neve, entre tantos outros exemplos de objetos com formas simétricas. Ao longo da evolução do conhecimento, a noção de simetria se tornou uma das mais importantes, não apenas em Geometria, mas em todas as áreas da Matemática e na Física, onde o entendimento de simetrias dos objetos e fenômenos físicos fornece meios extremamente eficazes para a compreensão das leis que regem tais fenômenos. Os "argumentos de simetria" fornecem atalhos e soluções elegantes para problemas matemáticos e físicos [24]. Os diferentes tipos de simetrias existentes no plano e no espaço podem ser classificados de modo bastante elegante ao se utilizar certas estruturas algébricas conhecidas como grupos.

As ideias de simetria são influentes não apenas por fornecerem métodos para a resolução de problemas: o seu aspecto mais importante é que elas são peças-chave em muitas das ligações entre os diferentes ramos das ciências [24]. Explorar essas ideias de modo dinâmico pode motivar a aprendizagem de tópicos de Álgebra e Geometria nos diversos níveis de ensino.

Nesta dissertação abordaremos principalmente as interações que existem entre a Álgebra e a Geometria, a partir de uma ampliação do conhecimento em relação a esse tema em seus diversos aspectos.

No Capítulo 1, fazemos uma abordagem histórica sobre o surgimento e o desenvolvimento da Geometria Analítica ao longo dos anos, destacando os estudiosos que deram sua contribuição, em especial René Descartes e Pierre de Fermat.

No Capítulo 2, apresentamos como a Geometria Analítica é tratada nos dias atuais e quais os conceitos estudados nos Ensinos Fundamental, Médio e Superior e, em seguida, exibimos algumas aplicações das cônicas.

No Capítulo 3, será feita uma análise crítica de alguns livros didáticos adotados nas escolas de Ensino Básico, observando a presença da Geometria Analítica e da simetria e como estes conteúdos são abordados nesses livros.

No Capítulo 4, abordamos o estudo da simetria, presente nos objetos e na natureza, os conceitos intuitivos e matemáticos, os tipos de simetria e algumas de suas aplicações nas diversas áreas.

No Capítulo 5, propomos um material didático para ser trabalhado com os estudantes de forma gradual por ano de estudo. Nesse material sugerimos diversas atividades, dentre elas algumas para serem realizadas no Geogebra, explorando assim a ideia de simetria de uma maneira visual associada aos conceitos geométricos e algébricos das figuras planas.

# Capítulo 1

# O surgimento e o desenvolvimento da Geometria Analítica ao longo da História

Neste capítulo abordamos os principais fatos históricos sobre as origens e os desenvolvimentos da Geometria Analítica. As principais fontes consultadas para esta parte do trabalho foram [3], [4], [7].

Há diversos pontos de vista sobre as origens da Geometria Analítica e a época que isso ocorreu. Existem indicativos de que a Geometria Analítica se iniciou na Grécia. Os gregos antigos dedicavam-se de forma considerável à Álgebra Geométrica. A ideia de coordenadas foi usada pelos gregos na confecção de mapas e pelos egípcios e romanos na agrimensura.

Menaecmus $(380-320$ a.C.) era astrônomo e importante geômetra grego da Academia de Platão. Deduziu as propriedades das seções cônicas e resolveu o problema da duplicação dos cubos utilizando duas curvas: uma parábola e uma hipérbole. Na tentativa de encontrar esta solução descobriu uma nova curva: a elipse. Essas três curvas chamadas de seções cônicas foram obtidas através da interseção de um plano com uma superfície cônica. Algumas vezes foi afirmado que ele utilizava a Geometria Analítica, pois seus escritos tinham fortes indícios do uso de coordenadas ([3], p. 70), mas não se pode ter certeza desta afirmação. Menaecmus não sabia que uma equação com duas variáveis determinava uma curva, aliás, os gregos não conheciam o conceito geral de equações com variáveis. A ausência de notações algébricas foi o principal motivo que impediu os gregos de construírem a verdadeira Geometria de coordenadas.

Apolônio $(262-190$ a.C.) foi o maior geômetra grego da antiguidade e escreveu importantes tratados. Dentre eles o que mais se destacou foi o tratado sobre cônicas que substituiu todas as outras publicações antigas feitas sobre seções cônicas. Neste tratado ele deduziu, de forma geométrica, centenas de novos teoremas sobre as seções cônicas, originados a partir dos conhecimentos de Menaecmus. Os tratados de Apolônio continham uma Matemática bastante avançada e inclusive muito do que conhecemos hoje como Geometria Analítica. As deduções de Apolônio apresentavam fatos geométricos semelhantes às equações cartesianas. Mas, o desenvolvimento da Geometria Analítica por Apolônio ficou impedido por causa das poucas curvas que os gregos conheciam.

A aritmética de Diofanto $(221 - 305$ d.C), considerado o pai da Álgebra, representou um grande avanço na Matemática dos gregos devido à introdução da notação algébrica. Ele usou abreviações para representar potências de números, relações e operações, e letras gregas para representar números desconhecidos. Embora Diofanto tenha avançado no uso das simbologias, ainda não tinha a notação adequada para expressar métodos mais gerais. Isso fez com que seu trabalho se reduzisse a problemas particulares.

A Geometria grega se restringia ao estudo de um número limitado de curvas planas, mas graças a sua predisposição para generalizar, Pappus $(290 - 350$ d.C) propôs um problema generalizado que permitia a obtenção de uma infinidade de novos tipos de curvas. No entanto, Pappus não fez um estudo aprofundado desses lugares que simplesmente eram chamados de curvas e que nada mais se sabia sobre elas. Desse ponto em diante se fazia necessário trabalhar ao mesmo tempo com Álgebra e Geometria. Treze séculos após, suas conclusões foram o ponto de partida para Descartes que, a partir do problema de Pappus, finalmente impulsionou o desenvolvimento da Geometria Analítica.

Por volta de 1350, Nicole Oresme $(1323-1380)$ começou a se interessar pela Matemática, em particular por problemas que envolvia taxas de variação, como velocidade e aceleração. Nesse sentido ele foi o primeiro estudioso a apresentar gráficos de velocidade. Antecipou a Geometria Analítica ao localizar pontos por coordenadas e propôs o uso de um gráfico para representar uma grandeza variável que dependesse de outra. A função era representada graficamente associando a variável dependente com a independente, à medida que esta última sofresse variações. Essa foi a primeira aparição clara da equação da reta. Assim, pode-se considerar Oresme como inventor da Geometria de coordenadas antes de Descartes. No entanto, as técnicas algébricas e geométricas não permitiram que ele fosse mais longe nesse estudo, sendo necessário esperar mais de 200 anos por Viète, Descartes e Fermat, que retomaram e desenvolveram os ensaios naquelas áreas.

François Viète $(1540 - 1603)$, maior matemático francês do século XVI, desenvolveu o simbolismo da Álgebra introduzindo o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Foi um algebrista por excelência. O seu pensamento se aproximava muito da Geometria, mas a sua Geometria tinha um nível mais elevado do que a de seus predecessores Apolônio e Pappus, pois tratava as operações algébricas fundamentais de forma geométrica. Ele tinha uma tendência muito significativa em associar a nova Álgebra com a antiga Geometria. Introduziu métodos gráficos para resolver equações cúbicas e biquadradas (ou de $4^o$ grau) e trigonometria, para as equações de graus mais elevados. Viète, que também simplifica as relações trigonométricas, pode ser considerado um precursor da Geometria Analítica.

Estes acontecimentos nos quais apareceram indícios da Geometria Analítica parecem nos confundir, mas, na realidade, o argumento principal sobre esta área da Matemática consiste em transferir uma análise geométrica para uma análise algébrica correspondente e vice-versa. Antes de a Geometria Analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes $(1596-1650)$ e Pierre de Fermat $(1601-1665)$ como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à Geometria Analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados nos dias de hoje.

Figura 1.1: René Descartes.

A Matemática de Descartes tinha muita ligação com as obras escritas no passado e foi numa tentativa de resgatar algumas dessas obras que Descartes deu sua principal contribuição à Matemática: a Geometria Analítica. Isso, em parte, se deve ao fato de na Matemática os conhecimentos serem acumulativos, isto é, não se descarta nada, só se acrescenta. Em ciências mais experimentais, novas descobertas algumas vezes tornam obsoleto o conhecimento até então existente.

A contribuição de Descartes à Geometria Analítica se deu no último apêndice do tratado *Discours de la Méthode pour Bien Conduire as Raison et Chercher la Verité dans les Sciences*, escrito e publicado em 1637. O título *La Géométrie*, embora não se assemelhe muito ao que hoje chamamos de Geometria Analítica, é dedicado a uma completa aplicação da Geometria à Álgebra e da Álgebra à Geometria. A primeira parte do trabalho de Descartes é considerada a base da nova Geometria e apresenta alguns dos princípios da Geometria Algébrica, revelando um avanço em relação aos gregos. Assim, introduz a noção de coordenadas espaciais, estabelece o conceito de função com duas variáveis, demonstra que cada curva corresponde a uma função e apresenta o processo para obtenção de raízes quadradas e cúbicas ([4], p. 182). Na segunda parte, mostra que, quando temos a equação de uma determinada curva, podemos, através de suas tangentes, descobrir e estudar todas as suas propriedades. A terceira parte traz uma série de teoremas, apresenta uma inovação no uso das nomenclaturas e introduz uma simbologia extremamente moderna que está muito próxima da atual.

Figura 1.2: Pierre de Fermat.

Ao mesmo tempo em que Descartes formulava as bases da Geometria Analítica moderna, o assunto também ocupava a atenção de outro gênio matemático francês, Pierre de Fermat. A contribuição de Fermat à Geometria Analítica se encontra num pequeno texto intitulado *Isagoge ad locus planos et sólidos*, que só foi publicado, postumamente, junto com sua obra completa. Fermat era bastante modesto e contrário á publicação de seus trabalhos. Descartes também não tinha o costume de publicar suas obras, mas manteve correspondência científica com muitos dos principais matemáticos de seu tempo, exercendo, dessa maneira, considerável influência sobre seus contemporâneos. Talvez por causa disso é mais comum lembrar de Descartes como sendo criador da Geometria Analítica. Fermat usou a notação de Viète para escrever seu trabalho que, assim, tinha uma aparência antiga em termos de simbolismo quando comparado ao de Descartes.

Apesar de terem estudado o mesmo assunto e na mesma época, eles mantinham algumas diferenças. Enquanto Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o correspondente lugar geométrico. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da Geometria Analítica. Cada um a seu modo, sabia que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste, em particular, Fermat foi mais feliz. Descartes superou Fermat na notação algébrica.

É uma pena que Fermat não tenha publicado quase nada em toda sua vida, pois sua exposição era muito mais sistemática e didática que a de Descartes. Além disso, sua Geometria Analítica era um tanto mais próxima da nossa no fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abscissas. Como Descartes, Fermat percebia a existência de uma Geometria Analítica a mais que duas dimensões. Mas se Fermat tinha realmente isso em mente não foi além. Mesmo a Geometria em três dimensões teria que esperar até o século XVIII, antes de ser efetivamente desenvolvida. Fermat enriqueceu tantos os ramos da matemática com tantas contribuições importantes que é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Mais tarde Jan De Witt ($1625-1672$), La Hire ($1390-1443$) e Johann Bernoulli ($1667-1748$) também deram as suas contribuições para a Geometria Analítica. Em 1691, Jakob Bernoulli introduziu a idéia do sistema de coordenadas polares. Assim, com essa descoberta, os geômetras tiveram de romper com os sistemas cartesianos quando as situações indicavam um referencial mais conveniente. Em 1731, Antoine Parent ($1666-1716$) foi o primeiro a escrever sobre curvas não-planas no espaço de forma analítica.

Leonhard Euler ($1707-1783$) foi o mais importante matemático nascido na Suíça do início do século XVIII. Ele aumentou os conhecimentos disponíveis de quase todos os ramos da Matemática. Além disso, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje. Usamos as notações introduzidas por Euler não só para designação de números importantes, mas também em Geometria, Álgebra, Trigonometria e Análise encontramos símbolos, bem como terminologias e ideias.

O *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler é um importante tratado em dois volumes. Escrito em 1748, serviu como fonte dos desenvolvimentos da Matemática durante a segunda metade do século XVIII. Nessa época a ideia de função tornou-se fundamental na Análise e estava implícita na Geometria Analítica de Fermat e Descartes. No primeiro volume da *Introductio*, Euler define função de uma quantidade variável como sendo qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes. Mais informalmente, função era a relação entre duas coordenadas de pontos sobre uma curva traçada em um plano. O segundo volume, que era mais extenso e sistemático, descreve os desenvolvimentos da Geometria Analítica em três dimensões. Euler escreveu sobre o uso de Geometria de coordenadas no espaço, apresentando equações gerais para superfícies. Percebe-se como Euler trabalhava da forma mais geral possível. Esse livro tornou o uso de coordenadas, tanto em duas quanto em três dimensões, a base para um estudo sistemático das curvas e superfícies.

Gaspard Monge ($1748-1818$) era especialista em Geometria, além de professor e excelente formador de currículos ([3], p. 350). A Geometria no espaço ressurgiu graças às atividades matemáticas e revolucionárias de Monge. Foi a partir daí que a Geometria Analítica de três dimensões tomou forma.

A Geometria Analítica estava muito sobrecarregada de cálculos algébricos. Era necessário desenvolver procedimentos novos e avançados. Julius Plücker ($1801 - 1868$) foi um dos pioneiros a contribuir no aprimoramento da Geometria Analítica tornando-se especialista através de um novo e importante ponto de vista. Ele acreditava que os métodos algébricos eram mais preferíveis que os puramente geométricos. A sua notação abreviada influenciou a Geometria de coordenadas. Gabriel Lamé ($1795 - 1870$) foi o primeiro a estudar, na Geometria Analítica, famílias a um parâmetro por meio do uso da notação abreviada, mas foi Plücker quem levou mais longe esse estudo.

Plücker não conseguiu desenvolver a Geometria Analítica de mais de três dimensões, pois sendo seu lado algébrico fraco, não conseguiu aproveitar os desenvolvimentos sobre a teoria dos determinantes. Ele só chegou a esse conhecimento um tempo depois no qual desenvolveu a ideia de uma nova Geometria Analítica no espaço a quatro dimensões. Mas enquanto isso Cayley iniciou os estudos sobre Geometria Analítica em $n$ dimensões através do uso de determinantes.

O surgimento da Geometria Analítica foi essencial para que Issac Newton ($1642-1727$) e Gottfried Wilhelm Leibniz ($1646-1716$), independentemente, pudessem desenvolver o Cáculo Diferencial e Integral, o que significou um grande avanço em várias áreas do conhecimento desde então.

Atualmente, com o auxílio de softwares computacionais a maioria das curvas e superfícies estudadas no Ensino Fundamental e Médio pode ser visualizada no plano e no espaço. Tanto o conhecimento da História da Matemática quanto a utilização desses softwares podem e devem auxiliar o ensino de tópicos de Geometria Analítica nas escolas. No capítulo 5 iremos explorar um pouco o uso do Geogebra para essa finalidade.

# Capítulo 2

# A Geometria Analítica

Na primeira seção deste capítulo apresentamos os conceitos básicos de Geometria Analítica e seus elementos. Na segunda seção focamos a atenção nas cônicas e algumas de suas aplicações.

## 2.1 A Geometria Analítica e seus elementos

No século XVII, Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar por meio de métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas.

A Geometria Analítica, como ensinada nos livros escolares, pode ser explicada de uma forma simples: ela diz respeito à definição e representação de formas geométricas de modo numérico e à extração de informação numérica dessa representação.

Com base nesses estudos, a Matemática passa a ser vista como uma disciplina moderna, capaz de explicar e demonstrar situações relacionadas ao espaço. As noções intuitivas de vetores começam a ser exploradas de forma contundente na busca por resultados numéricos que expressem as ideias da união da Geometria com a Álgebra [16].

Os conceitos de ponto, reta e plano são considerados noções intuitivas da Geometria desde Euclides. Na Geometria Analítica, utilizamos essa intuição para representá-los com dados numéricos ou equações.

A base da Geometria Analítica está em representar os pontos de uma reta utilizando os números reais. Cada ponto de uma reta é representado por (ou representa) um único número real e vice versa. Esse número real é obtido pela distância entre o referido ponto e a origem da reta, que é o ponto relacionado com o número zero como mostra a Figura 2.1.

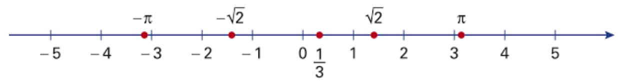



Figura 2.1: Reta Real.

Posteriormente, essa idéia foi expandida para a representação de pontos no plano e no espaço como descrevemos na Figura 2.2.

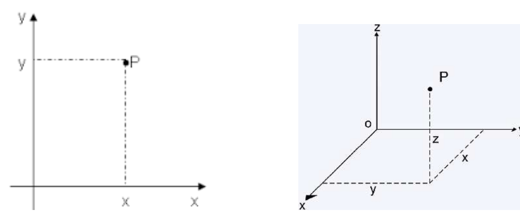



Figura 2.2: O ponto $P$ localizado no plano e no espaço.

O objeto fundamental de destaque na Geometria Analítica é, sem dúvida, o sistema de coordenadas cartesianas, pois uma vez estabelecido, permite manipular em duas dimensões, equações de retas e curvas e, em três dimensões, retas, planos e superfícies em geral.

O plano cartesiano é formado por dois eixos perpendiculares, ou seja, eixos que, ao se cruzarem, formam entre si quatro ângulos de $90^o$. Cada ponto no plano cartesiano é determinado pela coordenada situada no eixo horizontal e situada no eixo vertical. Ao localizarmos um ponto, temos a sua posição representada pelo par ordenado de números.

Já os pontos do espaço são representados por um conjunto de três números reais, conhecidos como ternas ordenadas. Cada terna ordenada representa um único ponto no espaço e, vice-versa, a cada ponto do espaço fica univocamente associada uma terna de números reais.

O conceito de distância, portanto, é um dos mais importantes dentro da Geometria Analítica. Por meio dele são definidos outros conceitos importantes, como o de circunferência. Além disso, a maioria das definições algébricas de figuras geométricas é obtida por intermédio do conceito de distância.

Se um ponto pertence a uma reta e é representado por um número real, dizemos que o lugar geométrico onde esse ponto está localizado (a reta) possui apenas uma dimensão e o número real é chamado de coordenada do ponto. Caso o ponto pertença a um plano, é representado por um par de números reais. O lugar geométrico onde está localizado (o plano) possui duas dimensões e esse ponto possui duas coordenadas. Desse modo, o número de coordenadas que um ponto possui é igual ao número da dimensão que possui o lugar geométrico onde esse ponto está localizado. O ponto pertencente ao espaço tridimensional, por exemplo, será representado por três coordenadas.

Qualquer objeto matemático, figura geométrica, forma, etc., que esteja no espaço pode ser representado geometricamente por um desenho ou algebricamente por uma fórmula matemática. Essa fórmula é o que materializa a Geometria Analítica e conecta a Geometria à Álgebra.

O estudo da Geometria Analítica geralmente é dividido em tópicos e ensinado de acordo com o nível em que o aluno se encontra. No Ensino Fundamental, estuda-se o sistema cartesiano ortogonal no plano, de modo bastante intuitivo. No Ensino Médio, são aprofundados os conceitos e as equações são associadas às curvas, ainda no plano. Somente no Ensino Superior, em alguns cursos de Ciências Exatas, é trabalhada a Geometria Analítica Espacial, com tratamento vetorial [17].

Os conteúdos trabalhados no Ensino médio são:

1. **O ponto**
   - 1.1 Plano Cartesiano
   - 1.2 Distância entre dois pontos
   - 1.3 Ponto médio de um segmento
   - 1.4 Condição de alinhamento de três pontos
2. **A reta**
   - 2.1 Equações da reta
   - 2.2 Posições relativas entre retas
   - 2.3 Ângulo entre retas
   - 2.4 Paralelismo
   - 2.5 Perpendicularidade
   - 2.6 Distância entre ponto e reta
3. **A circunferência**
   - 3.1 Equações da circunferência
   - 3.2 Posições relativas entre ponto e circunferência
   - 3.3 Posições relativas entre reta e circunferência
   - 3.4 Posições relativas entre circunferência e circunferência

4. **As cônicas**

    4.1 Elipse

    4.2 Hipérbole

    4.3 Parábola

No Ensino Superior, estuda-se os seguintes tópicos:

1. **Vetores**

    1.1 O que são e como se representam os vetores?

    1.2 Operações básicas envolvendo vetores

    1.3 Ângulo entre vetores

2. **Quádricas**

    2.1 Elipsóide

    2.2 Hiperbolóide

    2.3 Parabolóide

## 2.2 Cônicas: noções intuitivas, propriedades e aplicações

O estudo sistemático das cônicas ou das seções cônicas foi realizado pelo geômetra grego Apolônio. Ele registrou seus estudos numa obra composta por 8 volumes chamada *Seções Cônicas*. A obra de Apolônio foi a mais completa e aprofundada e, além disso, ele conseguiu gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando o plano de interseção, como mostra a Figura 2.3.

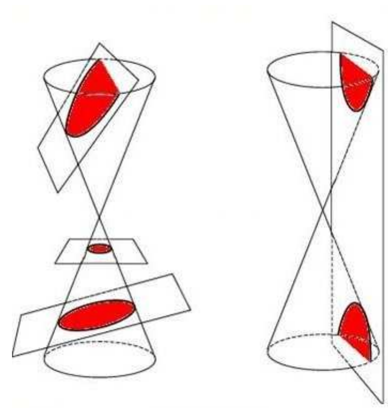


Figura 2.3: Cônicas.

A importância da contribuição da obra de Apolônio está na sua influência nos estudos astronômicos e geográficos de Ptolomeu, nas aplicações de ótica, na construção de espelhos, no estudo das órbitas planetárias de Kepler ($1571 - 1630$), nos estudos sobre a trajetória de projéteis de Galileu ($1564 - 1642$) e outros. Mais tarde, matemáticos como Newton ($1643 - 1727$) e Fermat também fizeram uso, mesmo que indiretamente, dos estudos deixados por Apolônio [23].

Consideremos um cone circular reto e um plano que o intercepta. Da posição deste plano relativamente ao cone, a seção obtida na superfície lateral poder ser uma *circunferência*, uma *elipse* ou uma *parábola*.

### 2.2.1 A circunferência

É uma curva obtida quando o plano é perpendicular ao eixo do cone e não passa pelo vértice [2]. A circunferência também pode ser definida como o conjunto de todos os pontos que estão à uma mesma distância de um ponto fixo. Essa distância é o *raio* e o ponto fixo é o *centro* da circunferência. Veja na Figura 2.4.

A circunferência é uma figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente e é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria, características não comumente encontradas em outras figuras planas.

O estudo das circunferências, de seus elementos como o perímetro e a área, e de outras relações envolvendo essas curvas tem sua importância dada pela grande variedade de ítens com essa forma presentes em nosso dia a dia. Um exemplo é a roda que, devido ao fato de ter essa forma circular, faz com que a ação da força de atrito com o solo seja minimizada, facilitando o deslocamento de grandes massas [23].

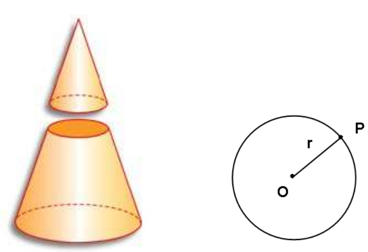



Figura 2.4: A circunferência.

### 2.2.2 A elipse

É uma curva obtida quando o plano é oblíquo ao eixo, não passa pelo vértice e não é paralelo a nenhuma geratriz do cone [2]. Na elipse há a presença de dois pontos fixos, denominados *focos*. A soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até esses focos é sempre um valor constante. Observe a Figura 2.5.

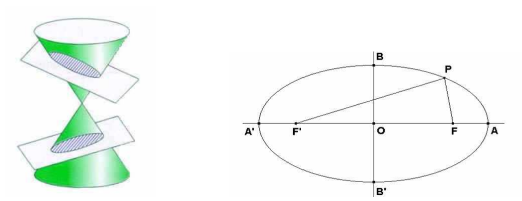



Figura 2.5: A elipse.

Uma propriedade muito importante da elipse é que qualquer raio luminoso ou onda sonora que saia de um dos focos será refletido pela elipse na direção do outro foco. Essa propriedade justifica algumas aplicações da elipse como, por exemplo, a aplicação óptica de um dispositivo de iluminação usado em consultórios odontológicos. Este dispositivo consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.

Ainda no campo da saúde, existe um procedimento muito utilizado no tratamento de cálculo renal, denominado litotripsia extracorpórea. Neste procedimento, conforme mostra a Figura 2.6, ondas de choque criadas fora do corpo do paciente viajam através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O litotriptor possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão.

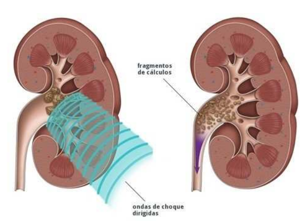



Figura 2.6: Litotripsia extracorpórea.

Outra aplicação da propriedade acima é no campo da acústica utilizada em igrejas, auditórios e teatros, pois quando duas pessoas estão cada uma em um dos focos de um elipsóide (sólido que se obtém rodando uma elipse em torno do seu eixo, isto é, da reta definida pelos dois focos) e uma delas falar, mesmo que seja baixo, a outra pessoa ouvirá perfeitamente, mesmo que haja outros ruídos e sem que as demais pessoas que estiverem entre os dois focos possam ouvir. Esses espaços são chamados de sala dos murmúrios ou sala dos sussurros e são utilizados em vários edifícios públicos da Europa e dos Estados Unidos.

Na Arquitetura e Engenharia há uma grande variedade de aplicações como no famoso Coliseu de Roma e em outras construções de pontes, arcos e cúpulas de igrejas.

Figura 2.7: Coliseu de Roma.

Outra aplicação da elipse foi nos estudos de Kepler na área de Astronomia. Ele formulou três leis a respeito dos movimentos planetários, sendo que a primeira dessas leis afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas com o Sol ocupando um dos focos [23].

Figura 2.8: As Leis de Kleper.

### 2.2.3 A parábola

É uma curva obtida quando o plano é paralelo a uma só geratriz do cone [2]. Na parábola, todos os pontos estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado foco, e de uma reta fixa, chamada diretriz.Veja a Figura 2.9.

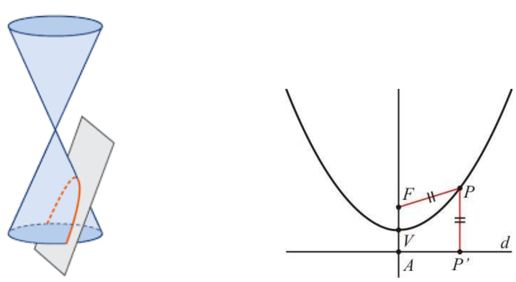



Figura 2.9: A parábola.

A propriedade de destaque na parábola, denominada de propriedade de reflexão, é o fato de que todo raio luminoso ou onda sonora que incida sobre a parábola paralelamente ao seu eixo é refletido de modo a passar pelo foco da parábola. O processo inverso também acontece, ou seja, qualquer raio ou onda que seja emitido do foco da parábola e que incida sobre a parábola é refletido numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola. Essa propriedade faz com que a parábola apresente várias aplicações, como por exemplo, em antenas parabólicas, faróis de veículos, fornos solares e em telescópios.

Em particular, no caso dos fornos ou coletores solares, os raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico convergem para o foco do espelho, onde a temperatura pode chegar a 3.500$^{o}$C, e neste ponto, é colocado um dispositivo que irá utilizar a energia concentrada. Essa energia pode ser usada para gerar eletricidade, derretimento de aço, fazer combustível de hidrogênio ou nanomateriais. A seguir, a imagem do maior forno solar do mundo, situado na França.

Figura 2.10: Maior forno solar do mundo.

Na engenharia, as pontes suspensas (juntamente com as pontes estaiadas) são bastante utilizadas, pois possibilitam os maiores vãos. Nessas pontes, a base (tabuleiro) é sustentada por vários cabos metálicos verticais (pendurais) ligados a dois cabos maiores principais que, por sua vez, são conectados às torres de sustentação. Os cabos comprimem as torres de sustentação e estas últimas transferem as forças de compressão para as fundações. Como os cabos verticais são distribuídos de maneira regular, a carga da ponte é distribuída de modo uniforme aos cabos principais, que formam uma parábola. A maior ponte suspensa do mundo, que fica no Japão, tem extensão de quase 4 Km e vão central de quase 2 Km. Outra ponte suspensa, conhecida no Brasil, é a Ponte Hercílio Luz, que fica em Florianópolis, SC [23], como mostra a Figura 2.11.

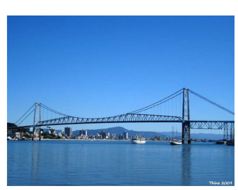


Figura 2.11: Ponte Hercílio Luz - Florianópolis, SC.

### 2.2.4 A hipérbole

Se considerarmos dois cones iguais e opostos pelo vértice e o plano secante paralelo a duas geratrizes, obteremos na superfície lateral dos dois cones a curva constituída por dois ramos chamada *hipérbole* [2]. Na hipérbole há a presença de dois pontos fixos, denominados *focos*, tal que a diferença entre as distâncias de qualquer ponto da hipérbole aos focos é sempre um valor constante. Veja a Figura 2.12.

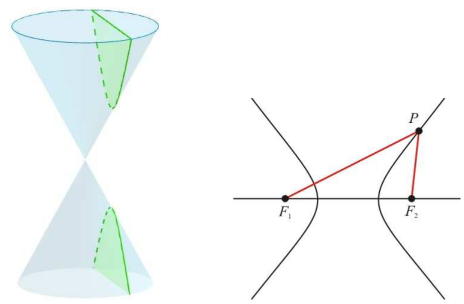



Figura 2.12: A hipérbole.

A propriedade de reflexão da hipérbole afirma que qualquer segmento de reta dirigido a um dos focos da hipérbole encontra o ramo correspondente e é refletido em direção ao outro foco. Essa propriedade é muito aplicada nos telescópios de reflexão, os quais são constituídos de dois espelhos, sendo um maior, que é parabólico e outro menor, que é hiperbólico. Esses dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole, conforme Figura 2.13.

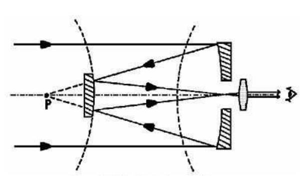



Figura 2.13: Telescópio de Reflexão.

Nesse tipo de telescópio, quando os raios de luz se refletem no espelho parabólico são dirigidos para o foco, pela propriedade de reflexão da parábola. Como este também é foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho primário, atrás do qual está uma lente ocular que permite corrigir ligeiramente a trajetória da luz, que chega finalmente aos olhos do observador ou à película fotográfica. A vantagem deste tipo de telescópio reside no fato de ter um comprimento muito menor do que os telescópios de refração (isto é, de lentes) com o mesmo poder de ampliação.

As curvas hiperbólicas também são utilizadas na arquitetura como pode ser observado da Catedral de Brasília e no planetário do St. Louis Science Center, nos Estados Unidos.

Figura 2.14: Catedral de Brasília.

Já na engenharia civil, o hiperbolóide (sólido originado da rotação de uma hipérbole) é utilizado na construção de torres de refrigeração de usinas nucleares. Isso se deve ao fato de que o hiperbolóide é uma superfície duplamente regrada, ou seja, para cada um dos seus pontos existem duas retas distintas que se interceptam na superfície. Deste modo as torres podem ser construídas com vigas de aço retas, permitindo assim uma minimização dos ventos transversais e mantendo a integridade estrutural com uma utilização mínima de materiais de construção.

Figura 2.15: Hiperbolóide.

Finalmente, outra importante utilização das hipérboles é no sistema de localização em navegação, denominado de LORAN (Long Range Navigation - Navegação de Longa Distância). Este sistema permite a um navegante de um navio ou o piloto de um avião achar sua posição sem confiar em marcos visíveis. O LORAN utiliza hipérboles confocais, isto é, hipérboles com um dos focos em comum, onde estão os radares que emitem sinais. Cada par de radares dá uma hipérbole que contém a posição do navio ou do avião e, assim, a sua posição exata é o ponto onde as três hipérboles interceptam-se. Essa posição pode ser determinada pela plotagem das três hipérboles em um mapa, obtendo a interseção em comum usando coordenadas e computando algebricamente a interseção [23].

# Capítulo 3

# Análise de livros didáticos

Na primeira seção deste capítulo apresentamos uma análise de quatro livros didáticos, dois do Ensino Fundamental e dois do Ensino Médio, em relação aos conteúdos de Geometria Analítica contido nesses livros. Na segunda seção, analisamos a presença de conteúdos referentes à simetria em alguns livros didáticos em uso atualmente.

## 3.1 A Geometria Analítica nos livros didáticos

Em geral, no Ensino Fundamental é feita uma introdução a quase todos os conteúdos da Matemática e no Ensino Médio estes conhecimentos são consolidados e aprofundados. A Geometria Analítica é pouco abordada no Ensino Fundamental. De acordo com as experiências ao longo de alguns anos em sala de aula lecionando para alunos dos dois níveis e observando os livros didáticos pude constatar que nas séries finais do Ensino Fundamental é estudado o sistema de coordenadas cartesianas e a localização de pontos no plano cartesiano. Ao estudar equações com duas incógnitas e sistemas de equações com duas incógnitas usamos o sistema de coordenadas para representar e ou encontrar soluções. O plano cartesiano também é usado para construir os gráficos das funções de $1^o$ e $2^o$ graus.

As coleções de livros do Ensino Fundamental selecionadas foram: *A conquista da Matemática* e *Vontade de saber Matemática*. A coleção *A conquista da Matemática* é de autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedito Castrucci, publicada pela editora FTD, em 2009 e usada nos anos de 2011, 2012 e 2013 pela Escola Estadual José Alves de Magalhães, município de Brás Pires, MG. A coleção *Vontade de Saber Matemática* é de autoria de Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, publicada pela editora FTD em 2012 e foi usada nos anos de 2014, 2015 e 2016 pela Escola Estadual Terezinha Pereira em Dores do Turvo, MG.

As coleções de livros do Ensino Médio selecionadas foram: *Matemática, Ciência, Linguagem e Tecnologia* e *Matemática, Ciência e Aplicações*. A coleção *Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia* é de autoria de Jackson Ribeiro, publicada pela editora Scipione, em 2010 e foi usada nos anos de 2012, 2013 e 2014 pela Escola Estadual Senador Levindo Coelho situada no município de Ubá, MG. A coleção *Matemática, Ciência e Aplicações* é de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, publicada pela editora Saraiva, em 2013 e foi usada nos anos de 2015 e 2016, continuando seu uso em 2017 pela Escola Estadual Terezinha Pereira.

Ao analisar as coleções pude constatar que a Geometria Analítica não está presente nos 4 livros didáticos de cada coleção. Na Coleção 1, a Geometria Analítica está pouco presente e aparece nos livros do 6$^o$ e 9$^o$ anos; na Coleção 2, a Geometria Analítica é estudada somente nos livros do 8$^o$ e 9$^o$ anos; nas Coleções 3 e 4 observa-se que a Geometria Analítica é trabalhada somente no livro do 3$^o$ ano do Ensino Médio. Estes livros foram analisados minuciosamente, observando-se quais tópicos apareceram e como foram tratados. Nas subseções seguintes descrevemos os conteúdos de cada um dos livros analisados. A figura 3.1 mostra a capa de um exemplar de cada uma das coleções.

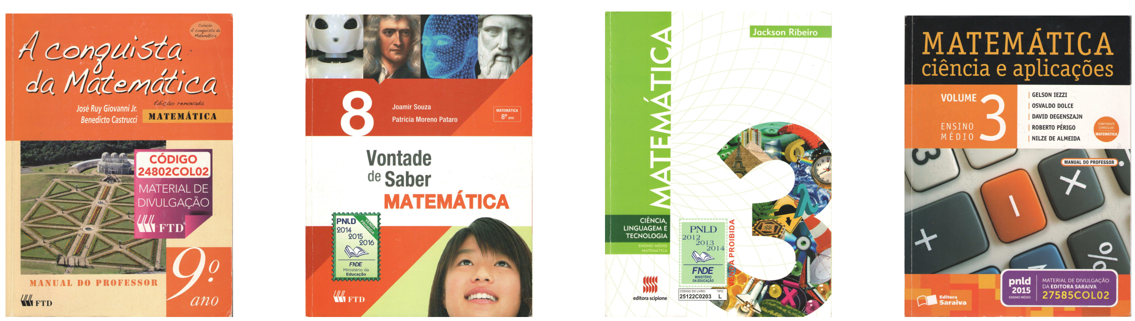
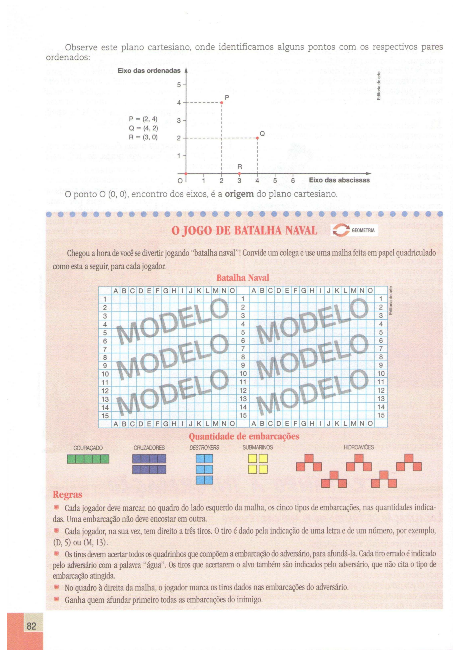



Figura 3.1: Livros didáticos

### 3.1.1 A Conquista da Matemática

Em análise ao livro do 6$^o$ ano, no Capítulo 2 *Calculando com números naturais*, Seção 7 *Resolvendo problemas*, no tópico *Tratando a informação*, o autor fala sobre *Localização de pontos no plano cartesiano*. Ele menciona o assunto para ensinar o estudante a jogar *Batalha Naval*, como mostra a Figura 3.2. Faz-se uma comparação entre o jogo e o plano cartesiano. No jogo, para localizar as embarcações na batalha naval, utiliza-se as coordenadas: letra (horizontal) e número (vertical), nessa ordem. No plano cartesiano, identificamos os pontos por meio de pares de números: o primeiro (abscissa) marcado no eixo horizontal e o segundo (ordenada) marcado no eixo vertical.


Observe este plano cartesiano, onde identificamos alguns pontos com os respectivos pares ordenados:



O ponto O (0, 0), encontro dos eixos, é a **origem** do plano cartesiano.

**O JOGO DE BATALHA NAVAL** GEOMETRIA

Chegou a hora de você se divertir jogando "batalha naval"! Convide um colega e use uma malha feita em papel quadriculado como esta a seguir, para cada jogador.

**Batalha Naval**



**Quantidade de embarcações**



**Regras**

- Cada jogador deve marcar, no quadro do lado esquerdo da malha, os cinco tipos de embarcações, nas quantidades indicadas. Uma embarcação não deve encostar em outra.
- Cada jogador, na sua vez, tem direito a três tiros. O tiro é dado pela indicação de uma letra e de um número, por exemplo, (D, 5) ou (M, 13).
- Os tiros devem acertar todos os quadrinhos que compõem a embarcação do adversário, para afundá-la. Cada tiro errado é indicado pelo adversário com a palavra "água". Os tiros que acertarem o alvo também são indicados pelo adversário, que não cita o tipo de embarcação atingida.
- No quadro à direita da malha, o jogador marca os tiros dados nas embarcações do adversário.
- Ganha quem afundar primeiro todas as embarcações do inimigo.

82

Figura 3.2: Coleção 1, Volume 6, Página 82.

Analisando o livro do 9º ano, no Capítulo 5 que fala sobre Função polinomial do 1º grau, na Seção 29, o autor trata do assunto *O sistema de coordenadas cartesianas*. A seção começa com um tópico intitulado *Explorando*. A Figura 3.3 mostra a maquete de uma cidade e um sistema de referências indicado por letras e números. Para localizar os elementos dessa maquete, adotamos uma letra e um número, nessa ordem. Por exemplo, a torre da igreja pode ser representada pelo par ordenado $(C, 9)$.

Em seguida, o autor explica que um par de números, dispostos numa certa ordem, pode determinar a posição de um ponto no plano. O primeiro número representa a distância medida horizontalmente e o segundo representa a distância medida verticalmente do ponto em relação a um par de retas ortogonais que se interceptam. É assim que se constrói um sistema no qual pares de números podem ser associados a pontos e vice-versa.

No tópico *Aplicações do sistema cartesiano* são apresentados alguns exemplos sobre a utilização do plano cartesiano para a localização de qualquer ponto em mapas, plantas de regiões e gráficos. Dando continuidade ao tópico, o autor ensina a construir o plano cartesiano usando duas retas perpendiculares que se cruzam, uma horizontal, eixo $x$, e outra vertical, eixo $y$. O ponto de interseção das retas recebe o nome de origem. Os eixos são divididos em segmentos de mesma medida. A cada ponto de cada reta corresponde um número real. Os números positivos à direita e acima da origem; os números negativos à esquerda e abaixo da origem. O sistema formado recebe o nome de plano cartesiano. Assim, todo ponto do plano fica definido a partir de dois valores: um no eixo $x$ e outro no eixo $y$, ou seja, todo ponto pode ser representado por um par ordenado $(x, y)$. Esses valores são as coordenadas do ponto. É dado um exemplo de plano cartesiano no qual estão desenhados alguns pontos para que possa ser feito a identificação das suas coordenadas.

29 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Explorando

A figura abaixo nos mostra uma maquete de parte de uma cidade e um sistema de referência indicado por letras e números.



Se adotarmos uma letra e um número, nessa ordem, para localizar os elementos dessa maquete, a torre da igreja pode ser representada pelo par ordenado (C, 9).

CHEGOU A SUA VEZ!

1. Usando o critério acima, dê a localização do:
a) restaurante. (H, 9) e (I, 9).
b) chafariz. (H, 6)

2. O que você encontra em:
a) (K, 9)? Casa.
b) (C, 5)? A bomba do posto de gasolina.
c) (I, 5)? Árvore.

147

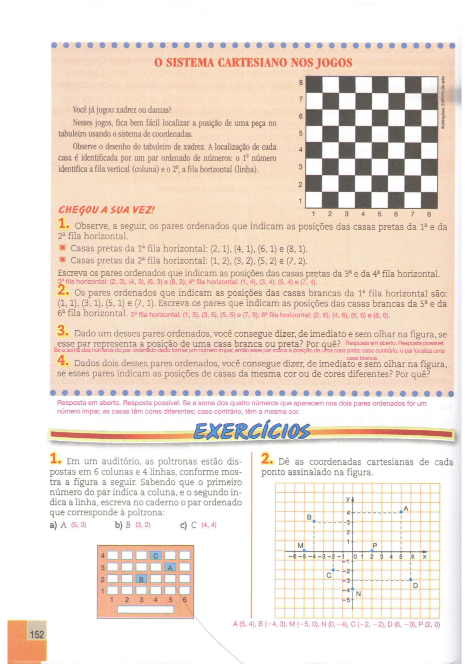
Figura 3.3: Coleção 1, Volume 9, Página 147.

Esse trabalho de construção é bem interessante, pois quando o estudante aprende a construir o plano cartesiano, ele é capaz de localizar e determinar as coordenadas do ponto com mais facilidade e compreensão.

No tópico *Sistema cartesiano nos jogos* é apresentado um tabuleiro de xadrez, Figura 3.4. Nesse tabuleiro se torna mais fácil localizar a posição de uma peça usando o sistema de coordenadas. A localização de cada casa é identificada por um par ordenado de números: o $1^o$ número identifica a fila vertical (coluna) e o $2^o$, a fila horizontal (linha).

Os exercícios propostos são bem técnicos e não há muita contextualização. Estes desenvolvem no estudante a capacidade de localizar pontos, objetos, pessoas e lugares no plano determinando suas coordenadas.

Na seção 32 que fala sobre *Gráfico da função polinomial do* $1^o$ *grau no plano cartesiano*, o autor nos diz que podemos representar graficamente uma função polinomial do $1^o$ grau, utilizando um sistema de coordenadas cartesianas. Essa representação deve nos dar todas as informações sobre como se comporta essa função sendo um recurso muito utilizado por ser de fácil visualização.



O SISTEMA CARTESIANO NOS JOGOS

Você já jogou xadrez ou damas?

Nesses jogos, fica bem fácil localizar a posição de uma peça no tabuleiro usando o sistema de coordenadas.

Observe o desenho do tabuleiro de xadrez. A localização de cada casa é identificada por um par ordenado de números: o 1º número identifica a fila vertical (coluna) e o 2º, a fila horizontal (linha).

Ilustrações: Editoria de arte

CHEGOU A SUA VEZ!

1. Observe, a seguir, os pares ordenados que indicam as posições das casas pretas da 1ª e da 2ª fila horizontal.
- Casas pretas da 1ª fila horizontal: (2, 1), (4, 1), (6, 1) e (8, 1).
- Casas pretas da 2ª fila horizontal: (1, 2), (3, 2), (5, 2) e (7, 2).

Escreva os pares ordenados que indicam as posições das casas pretas da 3ª e da 4ª fila horizontal.
3ª fila horizontal: (2, 3), (4, 3), (6, 3) e (8, 3); 4ª fila horizontal: (1, 4), (3, 4), (5, 4) e (7, 4).

2. Os pares ordenados que indicam as posições das casas brancas da 1ª fila horizontal são: (1, 1), (3, 1), (5, 1) e (7, 1). Escreva os pares que indicam as posições das casas brancas da 5ª e da 6ª fila horizontal. 5ª fila horizontal: (1, 5), (3, 5), (5, 5) e (7, 5); 6ª fila horizontal: (2, 6), (4, 6), (6, 6) e (8, 6).

3. Dado um desses pares ordenados, você consegue dizer, de imediato e sem olhar na figura, se esse par representa a posição de uma casa branca ou preta? Por quê? Resposta em aberto. Resposta possível: Se a soma dos números do par ordenado dado formar um número ímpar, então esse par indica a posição de uma casa preta; caso contrário, o par localiza uma casa branca.

4. Dados dois desses pares ordenados, você consegue dizer, de imediato e sem olhar na figura, se esses pares indicam as posições de casas da mesma cor ou de cores diferentes? Por quê?

Resposta em aberto. Resposta possível: Se a soma dos quatro números que aparecem nos dois pares ordenados for um número ímpar, as casas têm cores diferentes; caso contrário, têm a mesma cor.

EXERCÍCIOS

1. Em um auditório, as poltronas estão dispostas em 6 colunas e 4 linhas, conforme mostra a figura a seguir. Sabendo que o primeiro número do par indica a coluna, e o segundo indica a linha, escreva no caderno o par ordenado que corresponde à poltrona:

a) A (5, 3) b) B (3, 2) c) C (4, 4)

2. Dê as coordenadas cartesianas de cada ponto assinalado na figura.

A (5, 4), B (−4, 3), M (−5, 0), N (0, −4), C (−2, −2), D (6, −3), P (2, 0)

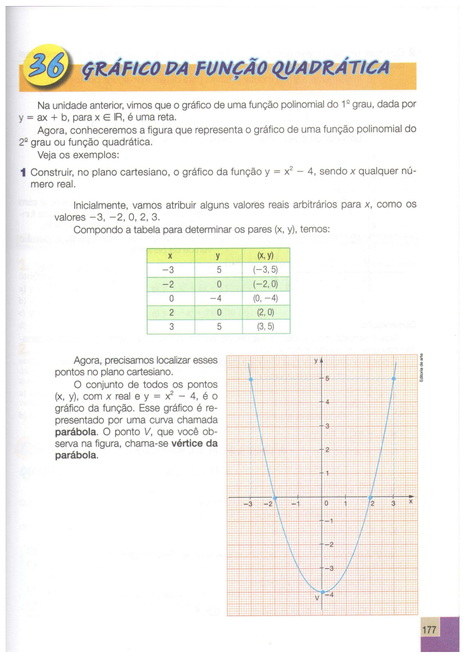
152

Figura 3.4: Coleção 1, Volume 9, Página 152.

Nos exemplos, é dada uma função para que seja feito o gráfico. Observe a Figura 3.5. Atribui-se alguns valores para $x$, substitui na função e encontra-se os valores correspondentes para $y$. Em seguida localiza-se os pares de números no plano cartesiano. Atribuindo infinitos valores para a variável independente $x$ podemos encontrar infinitos valores para a variável dependente $y$. Obtemos assim, infinitos pontos alinhados formando sempre uma reta. O mesmo acontece no Capítulo 6 destinado ao estudo de *Função polinomial do 2º grau ou Função quadrática*, na seção 36 sobre *Gráfico da função quadrática*, cujo gráfico é uma parábola.

### 3.1.2 Vontade de Saber Matemática

O Capítulo 4 do livro do 8º ano é dedicado ao estudo do Plano Cartesiano. O autor começa falando sobre *Coordenadas geográficas, latitude e longitude*. Apresenta uma figura do globo terrestre onde é destacado o sistema de coordenadas geográficas de lugares famosos no mundo. Em seguida, o autor propõe uma *Conversa sobre o assunto*, onde pergunta ao aluno sobre o conhecimento, utilização e importância do GPS automotivo. O interessante é que ele faz uma integração da Geografia com a Matemática ao mencionar o meridiano de Greenwich e a linha do Equador para fazer certas localizações. É imprescindível que o aluno tenha o conhecimento geográfico sobre o assunto ou que o professor detenha desse saber para explicar ao aluno caso ele não saiba ou não se lembre. O autor fala também muito brevemente sobre *Localização*. Nesse momento ele propõe uma situação em um teatro onde é preciso identificar a localização de uma cadeira, lugar onde a pessoa que comprou o ingresso vai se sentar. Essa localização é feita usando códigos. O código é composto por uma letra, que indica a linha, e por um número, que indica a coluna. Por exemplo, se no ingresso estiver escrito Cadeira $H12$, significa que a cadeira a ser ocupada está na linha $H$ e coluna 12. Esse assunto é bem introdutório e básico e envolve não apenas o conhecimento matemático, mas o contextualiza.



36 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Na unidade anterior, vimos que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, dada por $y = ax + b$, para $x \in \mathbb{R}$, é uma reta.

Agora, conheceremos a figura que representa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

Veja os exemplos:

**1** Construir, no plano cartesiano, o gráfico da função $y = x^2 - 4$, sendo $x$ qualquer número real.

Inicialmente, vamos atribuir alguns valores reais arbitrários para $x$, como os valores $-3, -2, 0, 2, 3$.

Compondo a tabela para determinar os pares $(x, y)$, temos:

| x | y | (x, y) |
|---|---|---|
| −3 | 5 | (−3, 5) |
| −2 | 0 | (−2, 0) |
| 0 | −4 | (0, −4) |
| 2 | 0 | (2, 0) |
| 3 | 5 | (3, 5) |

Agora, precisamos localizar esses pontos no plano cartesiano.

O conjunto de todos os pontos $(x, y)$, com $x$ real e $y = x^2 - 4$, é o gráfico da função. Esse gráfico é representado por uma curva chamada **parábola**. O ponto $V$, que você observa na figura, chama-se **vértice da parábola**.



177

Figura 3.5: Coleção 1, Volume 9, Página 177.

Em seguida são propostas atividades envolvendo localização de objetos, lugares e pontos. Dentre elas destacamos algumas que estão contextualizadas e outras que apresentam a interdisciplinaridade, como por exemplo, na Figura 3.6.

Na Seção seguinte, *Estudando o plano cartesiano*, ele formaliza o conhecimento e apresenta o sistema de coordenadas cartesianas. Faz um breve relato histórico sobre as origens desse sistema de localização de pontos, por quem e quando se desenvolveu. Introduzir o conteúdo no seu contexto histórico é de suma importância para uma melhor compreensão do aluno sobre o assunto.

O autor conclui o texto apresentando a seguinte definição de plano cartesiano: O plano cartesiano é composto por duas retas numeradas, uma horizontal e outra vertical, que se cruzam perpendicularmente em um único ponto, chamado origem. A reta horizontal é denominada eixo das abscissas (eixo $x$) e a reta vertical, eixo das ordenadas (eixo $y$). A localização de um ponto no plano cartesiano é indicada por meio de coordenadas cartesianas que são representadas por um par ordenado na forma $(x, y)$.

**Contexto**

**4** Leia algumas informações acerca do jogo de xadrez.

**Xadrez**

**O mais famoso e misterioso dos jogos de tabuleiro**

Um dos jogos de tabuleiro mais antigos, a história do xadrez é envolta em lendas e incertezas. A hipótese mais provável é a de que o jogo tenha surgido na Índia, por volta do século 6 a.C. Nas origens orientais do jogo, a peça conhecida como bispo era, por exemplo, um elefante. Mudou de nome porque o homem europeu não conhecia o animal. Além disso, na cultura hindu o elefante é considerado um símbolo de sabedoria, tal eram os bispos na Idade Média. Da Índia, onde era chamado de chaturanga, teria se espalhado para a China e depois se popularizado entre os povos árabes, que o trouxeram para os países do Ocidente.

Goste você ou não de xadrez, o fato é que ele é considerado o jogo mais complexo já inventado – reza a lenda que o número de jogadas possíveis é superior à quantidade de átomos do universo. Exageros à parte, é certo que a prática do xadrez estimula a inteligência e ajudou a humanidade a desenvolver o pensamento estratégico e noções táticas.[...]

Juliana Lopes; Érika Sallum (Eds.). *101 ideias que mudaram a humanidade.* São Paulo: Abril, 2006. v. 2. p. 77. (Super essencial).

O tabuleiro de um jogo de xadrez é composto por 64 casas, distribuídas em 8 linhas e 8 colunas. Cada uma das peças do jogo movimenta-se nesse tabuleiro de acordo com algumas regras. O cavalo, por exemplo, realiza um movimento que lembra a letra "L". Observe no tabuleiro abaixo as casas para as quais o cavalo poderia se movimentar a partir da posição que ocupa.



a) No tabuleiro acima, qual posição é ocupada pelo cavalo?

b) Dessa posição, para quais outras o cavalo poderá se movimentar?

c) Se o cavalo estiver em A2, para quais posições ele poderá se movimentar?

80

Figura 3.6: Coleção 2, Volume 8, Página 80.

A seguir, ele coloca a figura de um plano cartesiano onde é mostrado o eixo das ordenadas, o eixo das abscissas e o sentido positivo e negativo de cada um. Um exemplo é dado para que o aluno possa entender como é feita a localização de um ponto no plano obtendo suas coordenadas.

As atividades propostas são numerosas e, às vezes, contextualizadas, enfatizando a localização de pontos em diversas situações.

Para finalizar o capítulo, ele apresenta o tópico *Refletindo sobre o capítulo*, onde retoma os conteúdos estudados de uma forma mais participativa e envolvente através de perguntas que levam o aluno a refletir sobre a utilização do conteúdo na prática. O tópico *Explorando* o tema fala um pouco mais sobre os eixos fazendo um relato dos desenvolvimentos ao longo da história e a sua importância nos dias atuais. A revisão e os testes retomam todos os conhecimentos através de exercícios mais contextualizados e testes com questões de avaliações externas como OBMEP e outras.

O autor aborda o tema novamente no Capítulo 7 sobre *Equações, sistemas de equações e inequações*. Na seção *Equações do 1º grau com duas incógnitas*, ele fala sobre as equações do 1º grau que possuem duas incógnitas, por exemplo, $x$ e $y$, e que podem ser escritas na forma $ax + by = c$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Neste tipo de equação, as soluções são dois números expressos por pares ordenados $(x, y)$ e representados graficamente. As constatações são feitas a partir de um exemplo onde se atribui alguns valores independentes pra variável $x$, substitui na equação e encontra o valor correspondente de $y$. Podemos observar que para qualquer valor real atribuído à incógnita $x$ temos um valor correspondente de $y$. Cada par ordenado de números reais representa um ponto. Há infinitos pares ordenados que são soluções de uma equação do $1^o$ grau com duas incógnitas, portanto existem infinitos pontos. Esses pontos, quando localizados no plano cartesiano, constituem uma reta. Importante ressaltar que o autor não define a solução da equação de imediato e sim permite que o estudante construa as suas ideias.

Nas atividades propostas ele traz um gráfico onde estão localizados alguns pontos ligados por uma reta. Em seguida, apresenta quatro equações e pede para identificar qual delas é a equação cuja solução esta representada no gráfico. No próximo exercício ele pede que o estudante construa, no plano cartesiano, o gráfico correspondente às soluções de cada equação dada.

Outro momento em que o autor utiliza o sistema de coordenadas cartesianas é na seção destinada ao *Sistema de duas equações do $1^o$ grau com duas incógnitas*. Aqui temos duas equações e duas incógnitas e devemos encontrar uma solução que satisfaça as duas ao mesmo tempo. A solução de um sistema também pode ser determinada graficamente. Neste caso, representa-se o sistema em um plano cartesiano e determinam-se as soluções das duas equações dadas por duas retas que podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes. Se as retas forem concorrentes, ou seja, se cruzam em um único ponto, o sistema tem uma única solução que corresponde às coordenadas do ponto de interseção das duas retas. Se as retas são paralelas e distintas, o sistema não tem solução e se as retas forem coincidentes, o sistema tem infinitas soluções que correspondem às coordenadas de cada ponto dessas retas.

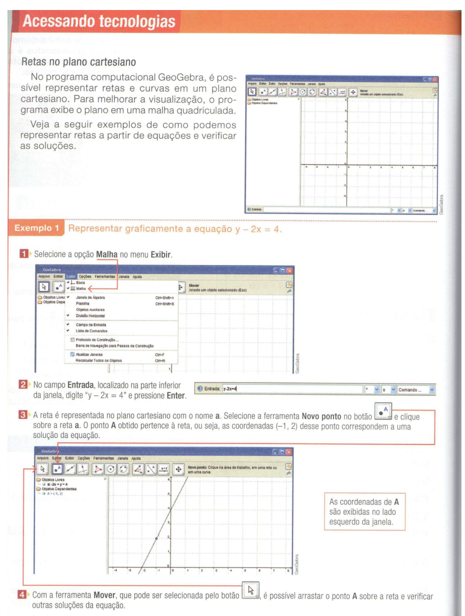
Nas atividades ele propõe um exercício que pergunta qual dos gráficos representa a solução do sistema dado. São três gráficos nos quais as retas representadas se cruzam em um ponto. O estudante deverá verificar quais desses pontos de interseção é a solução do sistema dado, substituindo cada um deles nas equações do sistema. Se as coordenadas do ponto satisfazem as duas equações simultaneamente, então esse ponto é a solução do sistema.

No próximo exercício, o autor pede para associar cada sistema de equações à sua representação gráfica. Os três gráficos apresentam os três casos de soluções: em um as retas são paralelas e distintas, no outro as retas são coincidentes e no terceiro as retas são concorrentes. É necessário que o aluno use uma estratégia bastante interessante para resolver esse exercício: se uma das equações é múltipla da outra, então as retas são coincidentes. Se somente o primeiro membro das equações são múltiplos, e o termo independente é diferente, então as retas são paralelas. Em outro exercício, o aluno deve construir a representação gráfica de cada sistema dado, dizer se ele possui solução, quantas são e se tiver uma única solução escrevê-la.

Nessa seção o autor induz o estudante a encontrar a solução de um sistema através do gráfico. Na próxima seção, destinada à resolução de sistemas de duas equações, o autor mostra como resolver um sistema usando os métodos da adição e da substituição. Em todos os métodos, é feita a representação da solução do sistema graficamente, fazendo um paralelo entre o método algébrico e o método geométrico. O autor também apresenta situações concretas onde se aplica o conhecimento desenvolvido na seção com vários problemas contextualizados.

Na seção *Inequações do* 1$^o$ *grau com uma incógnita*, o autor explica o que é uma inequação, ensina como resolver uma inequação e representa a solução através da reta real destacando a parte dessa reta que contém os números que são soluções da inequação.

Para finalizar o capítulo, além de apresentar o tópico *Refletindo sobre o capítulo*, a *Revisão* e os *Testes*, apresenta também o tópico *Acessando tecnologias*, no qual faz o uso do GeoGebra para representar retas no plano cartesiano. Veja a Figura 3.7. São propostos dois exemplos: um pede para representar graficamente a solução de uma equação com duas retas incógnitas e o outro, pede para resolver graficamente um sistema de equações.


Acessando tecnologias

Retas no plano cartesiano

No programa computacional GeoGebra, é possível representar retas e curvas em um plano cartesiano. Para melhorar a visualização, o programa exibe o plano em uma malha quadriculada.

Veja a seguir exemplos de como podemos representar retas a partir de equações e verificar as soluções.

Exemplo 1 Representar graficamente a equação y – 2x = 4.

1 Selecione a opção **Malha** no menu **Exibir**.

2 No campo **Entrada**, localizado na parte inferior da janela, digite "y – 2x = 4" e pressione **Enter**.

3 A reta é representada no plano cartesiano com o nome **a**. Selecione a ferramenta **Novo ponto** no botão e clique sobre a reta **a**. O ponto **A** obtido pertence à reta, ou seja, as coordenadas (–1, 2) desse ponto correspondem a uma solução da equação.

As coordenadas de **A** são exibidas no lado esquerdo da janela.

4 Com a ferramenta **Mover**, que pode ser selecionada pelo botão, é possível arrastar o ponto **A** sobre a reta e verificar outras soluções da equação.

Figura 3.7: Coleção 2, Volume 8, Página 170.

Analisando o livro do 9$^o$ ano, observa-se que no capítulo referente às Equações do 2$^o$ grau e sistemas de equações, na seção sobre Sistema de duas equações com duas incógnitas, o autor utiliza o sistema de coordenadas cartesianas para representar a solução de um sistema. Nesse caso, faze-se apenas a localização dos pontos que são solução do sistema no plano cartesiano.

No capítulo que trata das *Funções*, seção destinada à *Representação gráfica de uma função*, o autor retoma os conhecimentos sobre plano cartesiano vistos no ano anterior. Faz uma menção histórica destacando René Descartes como a pessoa que mais contribuiu para o estudo do plano cartesiano. Em seguida, propõe uma situação envolvendo função na qual é atribuído alguns valores para $x$ e encontra-se os valores correspondentes de $y$. Assim, são obtidos alguns pares ordenados de números que podem ser localizados em um plano cartesiano. Como podemos atribuir infinitos valores para a variável independente $x$, encontraremos infinitos valores para a variável dependente $y$. Portanto, existem infinitos pontos que unidos formam o gráfico da função. Se a função é do $1^o$ grau, ou seja, a função é afim, o gráfico que a representa é uma reta e se a função é do $2^o$ grau, isto é, a função é quadrática, então o gráfico é uma curva chamada de parábola.

No Ensino Médio, é comum trabalhar a Geometria Analítica no $3^o$ ano, ocasião em que se estudam a reta, a circunferência e as cônicas no plano cartesiano. A fragmentação dos conceitos estudados é um aspecto que persiste na Geometria Analítica trabalhada no Ensino Médio e tem sido alvo de críticas por parte dos profissionais que trabalham na área. No estudo da reta, por exemplo, as equações nas diferentes formas geral, reduzida, segmentária, paramétrica são apresentadas isoladamente e não há uma abordagem mais integrada dessas equações.

No estudo da circunferência e das cônicas também há uma segmentação como observado no estudo da reta. O que intensifica essa limitação é a atenção crescente que vem sendo dispensada ao método de completar quadrados para obter a forma canônica de equação de uma circunferência e que permite determinar as coordenadas do centro e o comprimento do raio.

É importante fazer as conexões entre a Geometria Analítica e outros tópicos como: gráficos de funções; representações geométricas dos sistemas lineares; matrizes de transformações geométricas. Apesar disso, ainda são pouco valorizadas no Ensino Médio essas articulações, tanto ao tratar dos sistemas lineares, funções e matrizes, quanto no estudo da Geometria Analítica.

### 3.1.3 Matemática, Ciência, Linguagem e Tecnologia

A unidade III é dedicada ao estudo da Geometria Analítica e está dividida em três capítulos.

O capítulo 5 é destinado ao estudo do ponto e da reta. No tópico 1, o autor faz uma introdução à Geometria Analítica relatando brevemente como se deu o seu surgimento citando as contribuições dos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat.

Na seção *Conversando* são apresentadas algumas perguntas para que o professor possa conversar com os estudantes sobre a Geometria Analítica. São questionamentos que levam a refletir como a Geometria Analítica pode aliar a Geometria com a Álgebra. Por meio deles são verificados os conhecimentos sobre gráfico de função e representação de um sistema no plano cartesiano e a contribuição da Geometria Analítica no estudo desses conteúdos.

No tópico 2, o autor traz a definição de sistema cartesiano ortogonal, que é formado por duas retas perpendiculares que se cruzam em um único ponto. O plano determinado pelos eixos é chamado plano cartesiano.

O tópico 3, dedicado ao estudo do ponto, começa com a seção *Distância entre dois pontos.* É feita a demonstração da fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos distintos usando um triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras. Com esta fórmula é preciso conhecer somente as coordenadas dos pontos. Para calcular as distâncias entre pontos que têm abscissas ou ordenadas iguais não é necessário a aplicação da fórmula.

A segunda seção, *Ponto médio de um segmento*, começa com a seguinte situação: "Em certo trecho em linha reta de uma estrada será instalada uma placa eqüidistante das extremidades... Quais as coordenadas do ponto M em que a placa será instalada?". O cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento foi desenvolvido de forma geral considerando dois pontos distintos quaisquer situados no plano cartesiano por meio do Teorema de Tales.

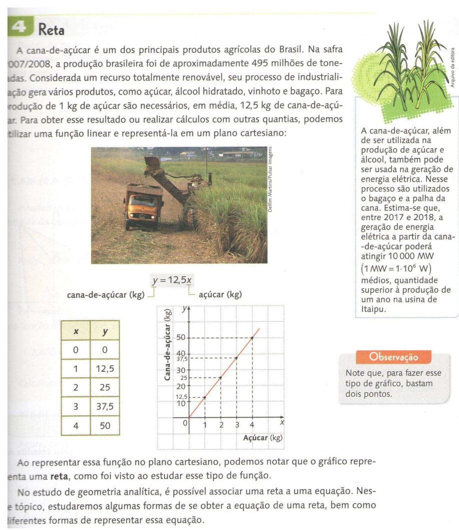
Na terceira seção o autor aproveita as conclusões a cerca das coordenadas do ponto médio de um segmento para obter também de forma genérica as coordenadas do baricentro, ponto de interseção das medianas de um triângulo.

Na quarta seção o autor mostra que podemos verificar se três pontos distintos são colineares ou não colineares utilizando apenas as suas coordenadas. Para fazer esta verificação, ele usa uma técnica simples que é demonstrada para o estudante comprovando assim sua veracidade. A demonstração é feita utilizando três pontos alinhados e situados no plano cartesiano e aplicando o Teorema de Tales. Chega-se a uma expressão envolvendo as coordenadas dos pontos que é igual a zero pelo fato dos pontos estarem alinhados. Essa expressão é igual ao determinante da matriz quadrada de ordem 3 em que a $1^a$ coluna é composta pelas abscissas dos três pontos, a $2^a$ coluna pelas ordenadas e a $3^a$ coluna completa com o número 1. Se os pontos estão alinhados, então o determinante é zero e, reciprocamente, se o determinante for igual a zero, então os três pontos pertencem à mesma reta.

Na quinta seção o autor demonstra uma fórmula que permite calcular a área de um triângulo usando apenas as coordenadas dos seus três vértices. Aplicando a fórmula para o cálculo da área do triângulo estudada na Geometria Plana, a distância entre dois pontos e semelhança de triângulos, chega-se à conclusão de que a área do triângulo dado é igual ao módulo do determinante da matriz quadrada de ordem 3 formada pelas coordenadas dos três vértices dividido por dois.

Concluindo o tópico sobre o estudo do ponto podemos fazer algumas observações. Nas demonstrações das fórmulas o autor utiliza o Teorema de Tales, o Teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. Essas demonstrações são claras e de fácil entendimento. Os conteúdos são divididos em seções. As seções estão interligadas, pois as relações obtidas em uma são utilizadas para as conclusões de outras relações na outra.

O tópico 4 é dedicado ao estudo da reta. O texto começa com uma situação envolvendo função linear, como mostra a Figura 3.8. O gráfico desta função é representado no plano cartesiano e é uma reta que passa pela origem. No estudo da Geometria Analítica é possível associar uma reta a uma equação. Nesse tópico o autor traz algumas formas de se obter a equação de uma reta, bem como as diferentes formas de representar essa equação.



4 Reta

A cana-de-açúcar é um dos principais produtos agrícolas do Brasil. Na safra 007/2008, a produção brasileira foi de aproximadamente 495 milhões de tone-adas. Considerada um recurso totalmente renovável, seu processo de industriali-ação gera vários produtos, como açúcar, álcool hidratado, vinhoto e bagaço. Para rodução de 1 kg de açúcar são necessários, em média, 12,5 kg de cana-de-açú-ar. Para obter esse resultado ou realizar cálculos com outras quantias, podemos tilizar uma função linear e representá-la em um plano cartesiano:

Delfim Martins/Pulsar Imagens

$y = 12{,}5x$

cana-de-açúcar (kg) — açúcar (kg)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 12,5 |
| 2 | 25 |
| 3 | 37,5 |
| 4 | 50 |



Ao representar essa função no plano cartesiano, podemos notar que o gráfico repre-enta uma **reta**, como foi visto ao estudar esse tipo de função.

No estudo de geometria analítica, é possível associar uma reta a uma equação. Nes-e tópico, estudaremos algumas formas de se obter a equação de uma reta, bem como liferentes formas de representar essa equação.

Arquivo da editora

A cana-de-açúcar, além de ser utilizada na produção de açúcar e álcool, também pode ser usada na geração de energia elétrica. Nesse processo são utilizados o bagaço e a palha da cana. Estima-se que, entre 2017 e 2018, a geração de energia elétrica a partir da cana-de-açúcar poderá atingir 10 000 MW $(1\ \text{MW} = 1 \cdot 10^6\ \text{W})$ médios, quantidade superior à produção de um ano na usina de Itaipu.

Observação

Note que, para fazer esse tipo de gráfico, bastam dois pontos.

Figura 3.8: Coleção 3, Volume 3, Página 184.

A primeira das formas é a equação geral da reta. Essa equação é obtida considerando dois pontos distintos $A$ e $B$ pertencentes a uma reta no plano cartesiano e um ponto $P$ qualquer dessa reta. Como esses pontos são colineares, então o determinante da matriz quadrada formada por estes três pontos é igual a zero. Fazendo as manipulações algébricas necessárias chega-se a uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, sendo $x$ e $y$ as coordenadas do ponto $P$. Assim, pode-se afirmar que toda reta do plano cartesiano pode ser associada a uma equação desse tipo e toda equação desse tipo pode ser associada a uma reta.

Na segunda seção, o autor fala que uma reta, representada no plano cartesiano, forma um ângulo em relação ao eixo $x$. Este ângulo é formado partindo-se, no sentido anti-horário, do eixo para a reta e é chamado de ângulo de inclinação da reta. O coeficiente angular ou a declividade da reta é o número real que expressa a tangente trigonométrica do ângulo de inclinação. O cálculo do coeficiente angular pode ser feito em termos das coordenadas de dois pontos distintos da reta.

Outro tipo de equação é a equação da reta que passa por um ponto, conhecidos seu coeficiente angular. O autor nos diz que existe uma única reta que passa por dois pontos distintos. De maneira semelhante, dado um ponto e um coeficiente angular não nulo existe também uma única reta sob estas condições. A partir da fórmula para o cálculo do coeficiente angular é possível, através de manipulações algébricas, obter a equação da reta conhecendo-se apenas um ponto e o coeficiente angular da reta.

A partir da forma da equação da reta que passa por um ponto e de algumas manipulações algébricas chega-se à equação reduzida da reta. O autor faz uma comparação entre a equação reduzida da reta e a função afim e conclui que a expressão algébrica que representa a função afim é igual à equação reduzida da reta, ou seja, $y = ax + b$, onde $a$ é o coeficiente angular e $b$ é o coeficiente linear.

O autor nos informa que as posições relativas de duas retas no plano cartesiano podem ser dadas de acordo com o coeficiente angular das duas retas. O estudo de cada uma dessas posições pode ser feito graficamente e também por meio das equações das retas. Se os coeficientes angulares forem iguais as duas retas são paralelas e se seus coeficientes angulares forem diferentes elas serão concorrentes. Podemos encontrar o ponto de interseção das duas retas concorrentes montando um sistema com as equações das duas retas. A solução desse sistema é o ponto de interseção entre elas.

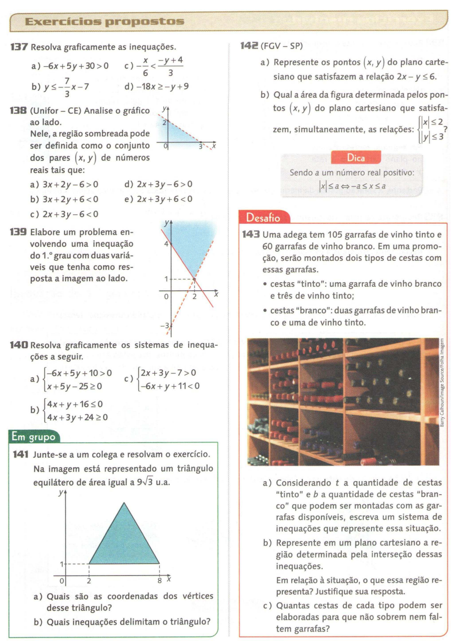
A partir da resolução de um sistema formado pelas equações de duas retas do plano é possível também verificar as suas posições relativas. Se o sistema tem uma única solução, as retas são concorrentes; se o sistema tem infinitas soluções, as retas são coincidentes; se o sistema não tem solução, as retas são paralelas. O autor ainda nos lembra que uma solução de um sistema linear com duas incógnitas e duas equações corresponde ao par ordenado $(x, y)$ que satisfaz simultaneamente as duas equações do sistema.

Na seção, o autor fala sobre as retas perpendiculares que é um caso particular de retas concorrentes e inicia o assunto com a seguinte pergunta: "Dada uma reta $r$, não paralela ao eixo $x$ nem ao eixo $y$, qual é o coeficiente angular de uma reta $s$ perpendicular a ela?"Para responder a esta pergunta, ele considera duas retas perpendiculares inseridas em um plano cartesiano. O triângulo formado por essas duas retas e o eixo $x$ é retângulo. Usando algumas relações envolvendo os ângulos de um triângulo e a tangente de um ângulo, chega-se à conclusão de que o coeficiente angular de uma das retas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

Outro assunto discutido é o ângulo formado por duas retas concorrentes quando estas não são perpendiculares entre si. Usando algumas relações envolvendo os ângulos do triângulo, relações trigonométricas envolvendo tangente e algumas manipulações algébricas, é possível chegar a uma fórmula para se calcular a tangente do ângulo formado por essas duas retas em função dos seus coeficientes angulares.

A seção traz uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta. Para isso basta considerar a projeção ortogonal do ponto sobre a reta. A distância entre o ponto e sua projeção ortogonal é a distância entre o ponto e a reta. O autor faz algumas manipulações algébricas envolvendo área de triângulo, distância entre pontos e determinantes para se chegar a uma fórmula que permite calcular essa distância usando somente as coordenadas do ponto e os coeficientes numéricos da equação da reta.

Para finalizar o capítulo, o autor mostra que podemos relacionar o estudo de retas com o de inequações do $1^o$ grau com duas variáveis. As regiões delimitadas por uma reta traçada no plano cartesiano podem ser associadas a expressões do tipo $ax+by+c \geq 0$, $ax+by+c > 0$, $ax+by+c \leq 0$ ou $ax+by+c < 0$ as quais são chamadas de inequações do $1^o$ grau com duas variáveis.



**Exercícios propostos**

**137** Resolva graficamente as inequações.

a) $-6x+5y+30>0$ c) $-\frac{x}{6}<\frac{-y+4}{3}$

b) $y \leq -\frac{7}{3}x-7$ d) $-18x \geq -y+9$

**138** (Unifor – CE) Analise o gráfico ao lado.
Nele, a região sombreada pode ser definida como o conjunto dos pares $(x, y)$ de números reais tais que:

a) $3x+2y-6>0$ d) $2x+3y-6>0$

b) $3x+2y+6<0$ e) $2x+3y+6<0$

c) $2x+3y-6<0$

**139** Elabore um problema envolvendo uma inequação do 1.º grau com duas variáveis que tenha como resposta a imagem ao lado.

**140** Resolva graficamente os sistemas de inequações a seguir.

a) $\begin{cases} -6x+5y+10>0 \\ x+5y-25 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y-7>0 \\ -6x+y+11<0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+y+16 \leq 0 \\ 4x+3y+24 \geq 0 \end{cases}$

**Em grupo**

**141** Junte-se a um colega e resolvam o exercício.
Na imagem está representado um triângulo equilátero de área igual a $9\sqrt{3}$ u.a.

a) Quais são as coordenadas dos vértices desse triângulo?

b) Quais inequações delimitam o triângulo?

**142** (FGV – SP)

a) Represente os pontos $(x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem a relação $2x-y \leq 6$.

b) Qual a área da figura determinada pelos pontos $(x, y)$ do plano cartesiano que satisfazem, simultaneamente, as relações: $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 3 \end{cases}$?

**Dica**
Sendo $a$ um número real positivo:
$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

**Desafio**

**143** Uma adega tem 105 garrafas de vinho tinto e 60 garrafas de vinho branco. Em uma promoção, serão montados dois tipos de cestas com essas garrafas.

- cestas "tinto": uma garrafa de vinho branco e três de vinho tinto;
- cestas "branco": duas garrafas de vinho branco e uma de vinho tinto.

Barry Calhoun/Image Source/Folha Imagem

a) Considerando $t$ a quantidade de cestas "tinto" e $b$ a quantidade de cestas "branco" que podem ser montadas com as garrafas disponíveis, escreva um sistema de inequações que represente essa situação.

b) Represente em um plano cartesiano a região determinada pela interseção dessas inequações.
Em relação à situação, o que essa região representa? Justifique sua resposta.

c) Quantas cestas de cada tipo podem ser elaboradas para que não sobrem nem faltem garrafas?

Figura 3.9: Coleção 3, Volume 3, Página 212.

Durante todo o capítulo os conteúdos são fragmentados, tratados em seções diferentes, mas conectados uns aos outros. As relações obtidas vão sendo trabalhadas de modo a se obterem novas relações a partir daquelas. Ao final de cada seção o autor traz exercícios resolvidos e exercícios propostos contendo atividades para serem feitas em grupo, desafios e questões de exames de diferentes instituições, como mostra a Figura 3.9. Estas atividades permitem que o estudante tenha uma compreensão melhor do conteúdo e das aplicações das fórmulas. São apresentados diferentes problemas em diversas situações, ás vezes contextualizadas, outras mais técnicas.

Ao final, na seção *Saiba mais*, o autor fala do estudo analítico de representações gráficas de funções e equações que são amplamente utilizadas em situações que envolvem duas ou mais grandezas. Por exemplo, a representação do montante de um investimento em relação ao tempo em que o dinheiro ficou aplicado; o consumo de combustível de um automóvel de acordo com a distância percorrida; o custo de produção de produtos em relação à quantidade produzida; o consumo de energia elétrica em relação ao desempenho do aparelho e o tempo durante o qual ele ficou ligado. O estudo analítico destas representações gráficas contribui para a obtenção de respostas de para questões relacionadas com as grandezas envolvidas por ser de fácil visualização. Na Física, a Geometria Analítica pode ser aplicada no cálculo do espaço percorrido por um móvel de acordo com sua velocidade e o tempo.

Na seção *Conectando ideias*, o autor instiga o estudante a refletir sobre a importância do conhecimento e aplicação da Geometria Analítica na compreensão e funcionamento do GPS (Global Postioning System - Sistema de Posicionamento Global).

No *Finalizando a conversa*, são propostas algumas perguntas sobre o que foi estudado no capítulo com o objetivo de revisar os conhecimentos adquiridos e verificar a aprendizagem dos conteúdos.

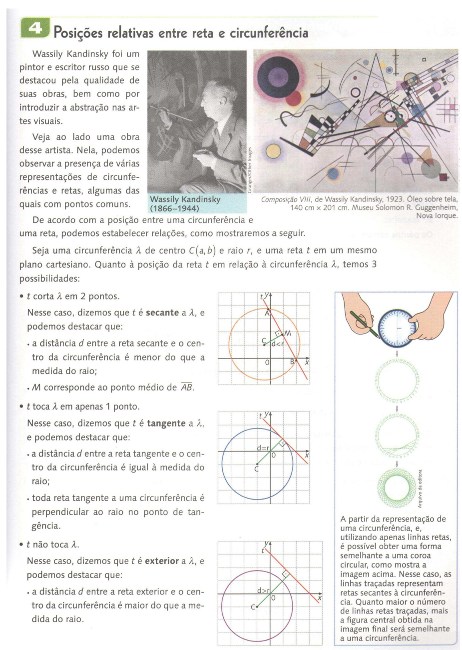
O Capítulo 6 é destinado ao estudo da circunferência. Na introdução, o autor nos diz que a circunferência é uma forma geométrica utilizada em várias áreas devido ao seu aspecto visual e suas características próprias. Assim como no capítulo anterior, é feita uma associação entre uma equação e uma circunferência no plano cartesiano e vice versa. Aqui também se estuda as posições relativas entre ponto e circunferência, reta e circunferência e duas circunferências.

No tópico 2, o autor inicia o texto recordando a definição de circunferência. Em seguida, ele faz a sua representação no plano cartesiano destacando seus elementos: centro e raio e um ponto qualquer desta circunferência. A partir do cálculo da distância entre o centro e o ponto qualquer da circunferência, representada pelo raio, e de algumas manipulações algébricas chega-se à equação reduzida da circunferência. Desenvolvendo os quadrados da equação reduzida é possível escrever a forma geral da equação da circunferência.

No tópico 3, o autor traz as posições relativas entre ponto e circunferência. Essas posições dependem da ocorrência de três situações: se a distância entre o ponto e o centro da circunferência é igual ao raio, então o ponto pertence à circunferência; se a distância entre o ponto e o centro da circunferência é maior que o raio, então o ponto é exterior à circunferência e se a distância entre o ponto e o centro da circunferência é menor que o raio, então o ponto é interior à circunferência.

Ainda no tópico 3, o autor ressalta a relação entre o estudo das posições relativas entre o ponto e a circunferência com a resolução de inequações do $2^o$ grau do tipo $f(x, y) \geq 0$ ou $f(x, y) < 0$ e suas variações sendo $f(x, y) = 0$ igual à equação da circunferência. Por exemplo, o conjunto solução da inequação $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos que estão situados no interior da circunferência.

No tópico 4, o autor diz que, de acordo com a posição entre uma circunferência e uma reta, podemos estabelecer algumas relações: se a reta corta a circunferência em dois pontos, então dizemos que a reta é secante à circunferência e a distância entre a reta e o centro da circunferência é menor do que o raio; se a reta toca a circunferência em apenas um ponto, então dizemos que a reta é tangente à circunferência e a distância entre a reta e o centro da circunferência é igual ao raio e se a reta não toca a circunferência, então dizemos que a reta é exterior à circunferência e a distância entre a reta e o centro da circunferência é maior do que o raio. Veja a Figura 3.10.


**4 Posições relativas entre reta e circunferência**

Wassily Kandinsky foi um pintor e escritor russo que se destacou pela qualidade de suas obras, bem como por introduzir a abstração nas artes visuais.

Veja ao lado uma obra desse artista. Nela, podemos observar a presença de várias representações de circunferências e retas, algumas das quais com pontos comuns.

Wassily Kandinsky (1866–1944)

*Composição VIII*, de Wassily Kandinsky, 1923. Óleo sobre tela, 140 cm × 201 cm. Museu Solomon R. Guggenheim, Nova Iorque.

De acordo com a posição entre uma circunferência e uma reta, podemos estabelecer relações, como mostraremos a seguir.

Seja uma circunferência $\lambda$ de centro $C(a, b)$ e raio $r$, e uma reta $t$ em um mesmo plano cartesiano. Quanto à posição da reta $t$ em relação à circunferência $\lambda$, temos 3 possibilidades:

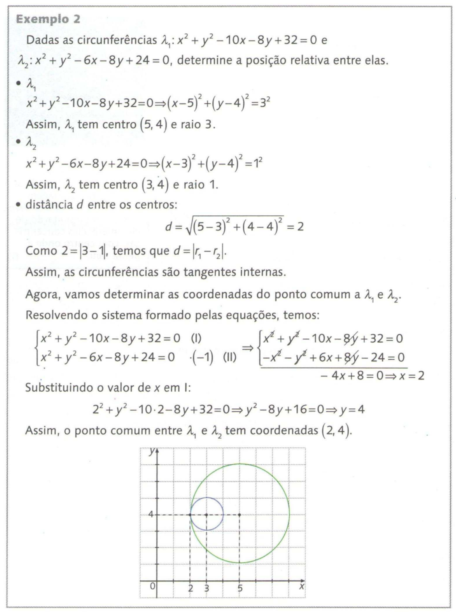
- $t$ corta $\lambda$ em 2 pontos.
  Nesse caso, dizemos que $t$ é **secante** a $\lambda$, e podemos destacar que:
  - a distância $d$ entre a reta secante e o centro da circunferência é menor do que a medida do raio;
  - $M$ corresponde ao ponto médio de $\overline{AB}$.
- $t$ toca $\lambda$ em apenas 1 ponto.
  Nesse caso, dizemos que $t$ é **tangente** a $\lambda$, e podemos destacar que:
  - a distância $d$ entre a reta tangente e o centro da circunferência é igual à medida do raio;
  - toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.
- $t$ não toca $\lambda$.
  Nesse caso, dizemos que $t$ é **exterior** a $\lambda$, e podemos destacar que:
  - a distância $d$ entre a reta exterior e o centro da circunferência é maior do que a medida do raio.

A partir da representação de uma circunferência, e, utilizando apenas linhas retas, é possível obter uma forma semelhante a uma coroa circular, como mostra a imagem acima. Nesse caso, as linhas traçadas representam retas secantes à circunferência. Quanto maior o número de linhas retas traçadas, mais a figura central obtida na imagem final será semelhante a uma circunferência.



Figura 3.10: Coleção 3, Volume 3, Página 229.

No último tópico, o autor fala que, de acordo com a posição entre duas circunferências, também podemos estabelecer algumas relações. Se as circunferências têm dois pontos em comum, então dizemos que elas são secantes e a distância entre os centros é maior do que o módulo da diferença entre os raios e menor do que a soma desses raios. Se as circunferências têm apenas um ponto em comum, então dizemos que elas são tangentes. No caso de elas serem tangentes externas, a distância entre os centros é a soma dos raios e caso elas sejam tangentes internas, a distância entre os centros é o módulo da diferença entre os raios. Se as circunferências não têm pontos em comum, então dizemos que elas são secantes internas ou externas. A distância entre os centros é maior do que o módulo da diferença entre os raios no primeiro caso e menor do que a soma desses raios no segundo caso. As circunferências de mesmo centro são chamadas de concêntricas e a distância entre os centros é nula.


**Exemplo 2**

Dadas as circunferências $\lambda_1: x^2+y^2-10x-8y+32=0$ e $\lambda_2: x^2+y^2-6x-8y+24=0$, determine a posição relativa entre elas.

- $\lambda_1$

  $x^2+y^2-10x-8y+32=0 \Rightarrow (x-5)^2+(y-4)^2=3^2$

  Assim, $\lambda_1$ tem centro $(5,4)$ e raio 3.
- $\lambda_2$

  $x^2+y^2-6x-8y+24=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=1^2$

  Assim, $\lambda_2$ tem centro $(3,4)$ e raio 1.
- distância $d$ entre os centros:

$$d=\sqrt{(5-3)^2+(4-4)^2}=2$$

Como $2=|3-1|$, temos que $d=|r_1-r_2|$.

Assim, as circunferências são tangentes internas.

Agora, vamos determinar as coordenadas do ponto comum a $\lambda_1$ e $\lambda_2$.

Resolvendo o sistema formado pelas equações, temos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-8y+32=0 & \text{(I)} \\ x^2+y^2-6x-8y+24=0 & \cdot(-1) \quad \text{(II)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-10x-\cancel{8y}+32=0 \\ -\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+6x+\cancel{8y}-24=0 \end{cases}$$
$$-4x+8=0 \Rightarrow x=2$$

Substituindo o valor de $x$ em I:

$$2^2+y^2-10\cdot 2-8y+32=0 \Rightarrow y^2-8y+16=0 \Rightarrow y=4$$

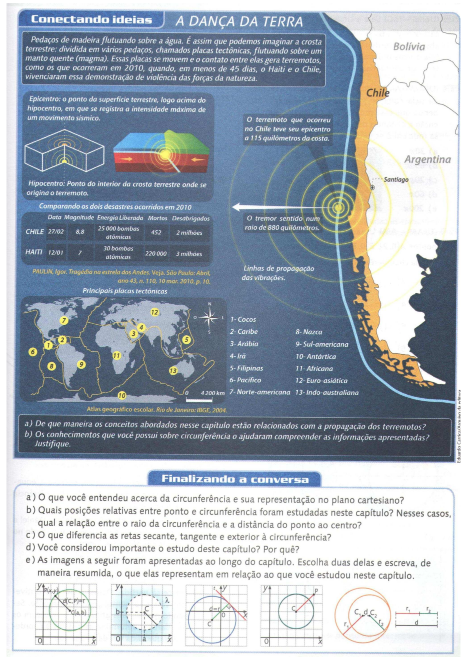
Assim, o ponto comum entre $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tem coordenadas $(2,4)$.


Figura 3.11: Coleção 3, Volume 3, Página 236.

Em todos os tópicos, o autor traz exemplos (Figura 3.11), exercícios resolvidos e exercícios propostos. No *Saiba mais*, ele fala da aceleração centrípeta que é um vetor perpendicular ao vetor velocidade de um movimento circular e aponta sempre para o centro da curvatura da trajetória.

O *conectando ideias*, ele fala um pouco sobre a dança da Terra, Figura 3.12, que trata da propagação dos terremotos feitos em movimentos circulares. No *Finalizando a conversa*, são propostas algumas perguntas sobre o estudo da circunferência no plano cartesiano com o intuito de revisar os conteúdos ensinados.

O autor dedica o capítulo 7 ao estudo das cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Na introdução ele fala sobre o surgimento de cada cônica que seu deu a partir da interseção de um plano com um cone circular reto e faz um breve relato histórico sobre as origens desses termos introduzidos pelo matemático Apolônio (262 a 190 a.C). Ele mostra também algumas situações nas quais as cônicas estão inseridas. Por exemplo, a trajetória dos planetas é semelhante a uma elipse, a trajetória descrita no lançamento de uma bola se parece com uma parábola e em alguns sistemas de navegação são utilizadas linhas de posição hiperbólica para orientar navios. Neste capitulo são estudadas cada uma dessas curvas no plano cartesiano juntamente com as equações que as representam.



**Conectando ideias** A DANÇA DA TERRA

Pedaços de madeira flutuando sobre a água. É assim que podemos imaginar a crosta terrestre: dividida em vários pedaços, chamados placas tectônicas, flutuando sobre um manto quente (magma). Essas placas se movem e o contato entre elas gera terremotos, como os que ocorreram em 2010, quando, em menos de 45 dias, o Haiti e o Chile, vivenciaram essa demonstração de violência das forças da natureza.

Epicentro: o ponto da superfície terrestre, logo acima do hipocentro, em que se registra a intensidade máxima de um movimento sísmico.

Hipocentro: Ponto do interior da crosta terrestre onde se origina o terremoto.

Comparando os dois desastres ocorridos em 2010

| | Data | Magnitude | Energia Liberada | Mortos | Desabrigados |
|---|---|---|---|---|---|
| CHILE | 27/02 | 8,8 | 25 000 bombas atômicas | 452 | 2 milhões |
| HAITI | 12/01 | 7 | 30 bombas atômicas | 220 000 | 3 milhões |

PAULIN, Igor. Tragédia na estrela dos Andes. Veja. São Paulo: Abril, ano 43, n. 110, 10 mar. 2010. p. 10.

O terremoto que ocorreu no Chile teve seu epicentro a 115 quilômetros da costa.

O tremor sentido num raio de 880 quilômetros.

Linhas de propagação das vibrações.

Bolívia

Chile

Argentina

Santiago

Principais placas tectônicas

1- Cocos
2- Caribe
3- Arábia
4- Irã
5- Filipinas
6- Pacífico
7- Norte-americana
8- Nazca
9- Sul-americana
10- Antártica
11- Africana
12- Euro-asiática
13- Indo-australiana

0 4 200 km

Atlas geográfico escolar. Rio de Janeiro: IBGE, 2004.

a) De que maneira os conceitos abordados nesse capítulo estão relacionados com a propagação dos terremotos?
b) Os conhecimentos que você possui sobre circunferência o ajudaram compreender as informações apresentadas? Justifique.

Eduardo Carrica/Arquivo da editora

**Finalizando a conversa**

a) O que você entendeu acerca da circunferência e sua representação no plano cartesiano?
b) Quais posições relativas entre ponto e circunferência foram estudadas neste capítulo? Nesses casos, qual a relação entre o raio da circunferência e a distância do ponto ao centro?
c) O que diferencia as retas secante, tangente e exterior à circunferência?
d) Você considerou importante o estudo deste capítulo? Por quê?
e) As imagens a seguir foram apresentadas ao longo do capítulo. Escolha duas delas e escreva, de maneira resumida, o que elas representam em relação ao que você estudou neste capítulo.

Figura 3.12: Coleção 3, Volume 3, Página 241.

No tópico 2, o autor faz o estudo da elipse. Primeiramente ele faz a definição da elipse em termos algébricos e geométricos. Depois destaca e define cada um de seus elementos. A partir da definição de elipse e fazendo-se algumas manipulações algébricas chega-se na equação reduzida da elipse quando o eixo maior é paralelo ao eixo $x$ ou paralelo ao eixo $y$.

O tópico 3 traz o conceito de hipérbole. O autor apresenta a definição, os elementos e as assíntotas da hipérbole. A partir da definição de hipérbole e fazendo alguns desenvolvimentos algébricos chega na equação reduzida da hipérbole quando o eixo real é paralelo ao eixo $x$ ou paralelo ao eixo $y$.

O tópico 4, define e apresenta os elementos da parábola. Através da definição de parábola e fazendo-se alguns procedimentos algébricos é encontrada a equação reduzida da parábola de acordo com o posicionamento de sua diretriz.

O autor traz três experiências bastante interessantes para os estudantes: obter de maneira prática a representação da elipse, da hipérbole e da parábola utilizando lápis, pregos, barbante, régua e esquadro. Observe a Figura 3.13.

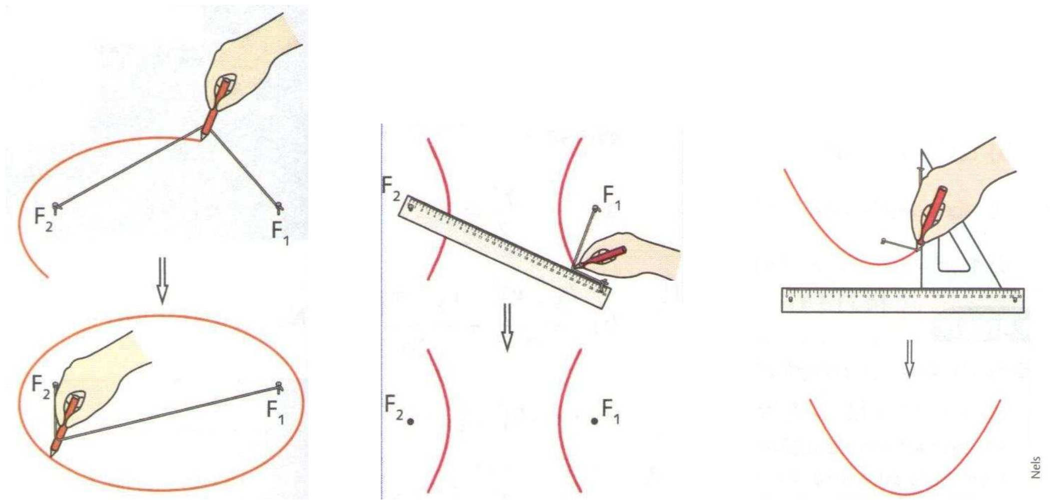



Figura 3.13: Coleção 3, Volume 3.

Em todos os tópicos o autor traz exercícios resolvidos e exercícios propostos. Na seção *Saiba mais* temos uma situação bastante interessante: a reflexão do som por meio de refletores parabólicos, como mostra a Figura 3.14. No *Conectando ideias* ele fala sobre os cometas (bolas de gelo e poeira) e a órbita percorrida por eles em torno do sol que se assemelha a uma elipse. E no *finalizando a conversa* o autor propõe umas questões sobre o estudo das cônicas a fim de revisar os conteúdos estudados.

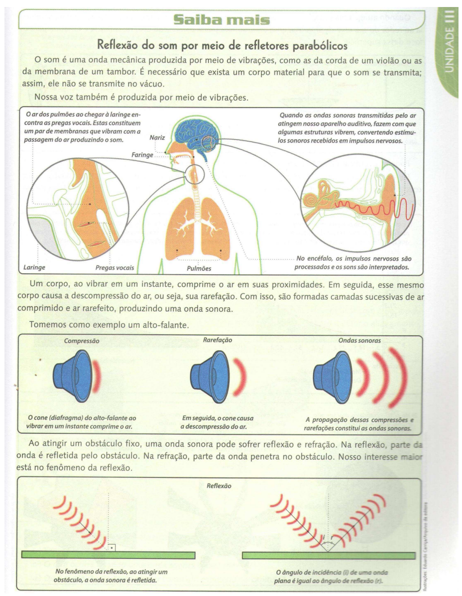
### 3.1.4 Matemática, Ciência e Aplicações

O Capítulo 1 é dedicado ao estudo do ponto. Na introdução, os autores relatam um pouco da história da Geometria Analítica. Eles destacam René Descartes e Pierre de Fermat como os responsáveis diretamente pelo surgimento da Geometria Analítica, mas não deixam de mencionar outros nomes que também devem ser lembrados como Roberval, Desargues, Merssenne e Pascal. Além disso, é relatado um pouco da vida e obra de René Descartes e Pierre de Fermat e suas importantes contribuições para o desenvolvimento da Geometria Analítica.

Na primeira seção os autores falam sobre o plano cartesiano, plano determinado por dois eixos orientados e perpendiculares. Os eixos dividem o plano em quatro regiões chamadas de quadrantes. Destacam-se os eixos das abscissas e das ordenadas e a origem do sistema. Considera-se um ponto $P$ qualquer e apresenta-se as suas coordenadas, ou seja, os números reais que representam as localizações do ponto em relação aos eixos $x$ e $y$.

A seguir eles fazem algumas observações a respeito da bissetriz dos quadrantes ímpares e da bissetriz dos quadrantes pares.

A segunda seção fala sobre a distância entre dois pontos que é igual à medida do segmento de reta que tem esses dois pontos por extremidades. Os autores apresentam o cálculo desta distância divido em três casos. Quando o segmento é paralelo ao eixo $x$ ou ao eixo $y$, o cálculo da distância é feito subtraindo as coordenadas $x$ e $y$ dos pontos, respectivamente. Quando o segmento não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados existe uma fórmula para se calcular a distância entre os dois pontos. Esta fórmula é deduzida considerando-se um triângulo retângulo situado no plano cartesiano e a distância entre os dois pontos é a medida da hipotenusa. Aplicando o Teorema de Pitágoras e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, chegam à fórmula da distância entre os dois pontos usando apenas as suas coordenadas.



**Saiba mais**

UNIDADE III

**Reflexão do som por meio de refletores parabólicos**

O som é uma onda mecânica produzida por meio de vibrações, como as da corda de um violão ou as da membrana de um tambor. É necessário que exista um corpo material para que o som se transmita; assim, ele não se transmite no vácuo.

Nossa voz também é produzida por meio de vibrações.



Um corpo, ao vibrar em um instante, comprime o ar em suas proximidades. Em seguida, esse mesmo corpo causa a descompressão do ar, ou seja, sua rarefação. Com isso, são formadas camadas sucessivas de ar comprimido e ar rarefeito, produzindo uma onda sonora.

Tomemos como exemplo um alto-falante.



Ao atingir um obstáculo fixo, uma onda sonora pode sofrer reflexão e refração. Na reflexão, parte da onda é refletida pelo obstáculo. Na refração, parte da onda penetra no obstáculo. Nosso interesse maior está no fenômeno da reflexão.



Figura 3.14: Coleção 3, Volume 3, Página 267.

Na terceira seção, os autores nos falam de situações que envolvem o ponto médio de um segmento. Para isso se faz necessário estabelecer uma fórmula para o cálculo das coordenadas deste ponto. Considerando um segmento de reta situado no plano cartesiano os autores nos mostram, a partir da semelhança de triângulos, como obter as coordenadas do ponto médio desse segmento que são obtidas pela média aritmética das coordenadas dos pontos das extremidades do segmento.

Na quarta seção os autores nos mostram como conhecer as medidas das medianas de um triângulo. Para determinar a medida da mediana relativa a um vértice do triângulo primeiro se obtém o ponto médio do lado oposto e depois se calcula a distância do vértice até esse ponto médio. O ponto de interseção das medianas de um triângulo é chamado de baricentro. Usando uma propriedade da Geometria Plana que diz que o baricentro divide cada mediana na razão 2 : 1, o ponto médio de um segmento e algumas substituições algébricas é possível deduzir que as coordenadas do baricentro são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices do triângulo.

Na quinta seção, os autores nos dizem que três pontos estarão alinhados se as suas coordenadas obedecerem a uma condição. Essa condição foi deduzida considerando três pontos sobre uma mesma reta, situados no plano cartesiano. Utilizando semelhança de triângulos e fazendo alguns desenvolvimentos algébricos obtemos uma expressão que é igual ao determinante da matriz quadrada de ordem 3, na qual a primeira coluna contém as coordenadas $x$ dos três pontos, a segunda coluna as coordenadas $y$ e a terceira coluna composta pelo número 1. Se o determinante dessa matriz é zero, os pontos estão alinhados, caso contrário, não são colineares. Esse é o algoritmo utilizado para determinar a colinearidade ou não de três pontos do plano.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da reta. Na introdução os autores colocam um exemplo mostrando uma reta que passa por vários pontos de coordenadas conhecidas. Um ponto qualquer pertencerá a esta reta quando estiver alinhado a dois outros pontos distintos dessa reta. Utilizando o algoritmo mencionado acima, colocam as coordenadas desses três pontos em uma matriz, calculam o seu determinante e o igualam a zero, chegando a uma equação. Qualquer ponto de tal reta satisfará esta igualdade e qualquer ponto do plano que satisfaça essa igualdade também estará na reta.

Na segunda seção, os autores definem a equação geral da reta e a demonstram de forma genérica considerando três pontos pertencentes a uma reta sendo um deles um ponto genérico. Como eles estão alinhados o determinante da matriz deve ser igual a zero. Fazendo o cálculo do determinante e algumas manipulações algébricas, chega-se à equação $ax + by + c = 0$, em que $a$, $b$ e $c$ são números reais e $a$ e $b$ não são simultaneamente nulos. Toda reta do plano cartesiano está associada a uma equação desse tipo e vice versa.

Na terceira seção, os autores nos dizem que o ponto de interseção de duas retas concorrentes pertence a cada uma das retas e, por esse motivo, as suas coordenadas devem satisfazer as equações de ambas, ao mesmo tempo. Portanto, para obter o ponto de interseção de duas retas basta escrever um sistema com as equações das duas retas. A solução desse sistema é o ponto de interseção das retas. O estudo dos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas nos mostra que há três possibilidades em relação ao número de soluções e podemos usar esse critério para conhecer as três posições relativas de duas retas no plano. Se o sistema possui uma única solução, as retas se interceptam em único ponto, ou seja, elas são concorrentes. Se o sistema possui infinitas soluções, as retas têm infinitos pontos em comum, ou seja, elas são coincidentes. Se o sistema não possui solução, as retas não têm ponto em comum, ou seja, elas são paralelas.

Na quarta seção, apresentam a inclinação de uma reta que é dada pelo ângulo formado por essa reta com o eixo $x$ medido no sentido anti-horário. Os autores nos mostram que o coeficiente angular de uma reta é definido como sendo a tangente do ângulo de inclinação da reta. A partir da definição de tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo podemos fazer o cálculo do coeficiente angular de uma reta usando apenas as coordenadas de dois de seus pontos.

Na quinta seção, os autores deduzem a equação reduzida de uma reta a partir da fórmula para o cálculo do coeficiente angular. Para isso, eles consideram estrategicamente o ponto onde a reta corta o eixo $y$ cuja abscissa é zero e outro ponto qualquer da reta. A partir de manipulações algébricas chega-se à equação reduzida da reta.

A sexta seção nos mostra como escrever a equação de uma reta usando apenas um ponto e a declividade dessa reta. Esta equação é obtida também a partir da fórmula para o cálculo do coeficiente angular de uma reta e de algumas manipulações algébricas.

Na sétima seção os autores fazem uma comparação entre a função afim e a equação reduzida da reta. Podemos notar que a lei de uma função afim é igual à equação reduzida da reta e a representação gráfica da reta no plano cartesiano é igual ao gráfico da função afim. A conclusão é de que a equação reduzida de uma reta representa outra maneira de expressar a lei de uma função afim.

A oitava seção traz uma maneira de constatar quando duas retas são paralelas a partir dos seus coeficientes angulares. Os autores nos mostram que duas retas do plano são paralelas se seus coeficientes angulares são iguais. Quando queremos saber se duas retas de um plano são ou não paralelas, comparamos os seus coeficientes angulares. Isso pode ser feito usando tanto a equação reduzida como a geral.

Ainda dentro da seção sobre paralelismo os autores nos mostram, por meio da Geometria Analítica, uma importante propriedade da Geometria Plana que fala sobre a base média de um triângulo. Utilizando a fórmula para se calcular o coeficiente angular de uma reta, o ponto médio de um segmento e a distância entre dois pontos, eles nos mostram que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e sua medida é igual à metade da medida desse lado.

A nona seção fala sobre a perpendicularidade. Os autores nos dizem que é possível procurar uma relação entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares do plano. A partir das equações reduzidas das retas, do ângulo externo de um triângulo e de operações trigonométricas, chegamos à seguinte relação: duas retas de um plano são perpendiculares se o produto dos seus coeficientes angulares é igual a $-1$.

Na décima seção os autores propõem outros modos de escrever a equação da reta. A forma segmentária e a forma paramétrica. A forma segmentária é deduzida considerando três pontos escolhidos estrategicamente. Os pontos onde a reta corta os eixos $x$ e $y$ no qual a ordenada de um e a abscissa do outro é igual a zero, e um ponto qualquer desta reta. Em seguida, calcula-se o determinante da matriz formada por estes pontos. Como os pontos estão sobre uma mesma reta a expressão obtida para o determinante é igual a zero. Fazendo algumas manipulações algébricas obtemos a equação segmentária da reta. A equação paramétrica é uma alternativa de estabelecer a equação da reta expressando cada uma das coordenadas de seus pontos em função de uma terceira variável, denominada parâmetro. Os autores explicam como obter as equações paramétricas de uma reta através de um exemplo.

Na décima primeira seção se mostra como calcular a distância entre ponto e reta. Considera-se para isso a projeção ortogonal do ponto sobre a reta e calcula-se a distância entre o ponto e sua projeção ortogonal. Os autores fazem um exemplo mostrando como obter, analiticamente, a distância entre um ponto e uma reta. Primeiro, encontra-se a equação da reta perpendicular à reta dada que passa pelo ponto dado. Em seguida, calcula-se o ponto de interseção da reta dada com a reta perpendicular. Por último, calcula-se a distância entre o ponto dado e o ponto de interseção das retas obtendo assim a distância entre o ponto e a reta. É possível generalizar o procedimento descrito no exemplo para o cálculo da distância entre o ponto e a reta. A demonstração da fórmula é feita usando os mesmos procedimentos do exemplo só que com termos genéricos.

A décima segunda seção mostra como calcular a área de um triângulo a partir das coordenadas dos seus três vértices. A dedução foi feita usando a fórmula vista na Geometria Plana, distância entre dois pontos e cálculo do determinante. Através de algumas manipulações algébricas chega-se à formula que diz que a área de um triângulo é igual à metade do determinante da matriz formada pelas coordenadas dos três vértices desse triângulo.

A décima terceira seção fala sobre as inequações do $1^o$ grau. Os autores nos dizem que, com base na Geometria Espacial e de posição, uma reta contida em um plano divide-o em dois semiplanos, ambos com origem na própria reta. Considerando uma reta do plano cartesiano, temos que cada um desses semiplanos pode ser representado por uma inequação de $1^o$ grau (com uma ou duas incógnitas). Pode-se afirmar que o conjunto de pontos pertencentes a um semiplano, satisfaz uma inequação do tipo $ax + by + c > 0$, $x + by + c \geq 0$, $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c \leq 0$. No caso de um ponto $(x, y)$ satisfazer a igualdade $ax + by + c = 0$, o mesmo pertence à reta.

Ainda nesta seção, há um item chamado aplicações em que os autores apresentam um problema para ser resolvido usando inequações do $1^o$ grau. As inequações lineares são utilizadas em problemas importantes de uma área conhecida como Otimização Linear.

Na última seção do capítulo, os autores falam sobre o ângulo entre retas. O objetivo é calcular a medida do ângulo agudo formado por duas retas concorrentes e não perpendiculares. Usando algumas relações entre ângulos e as fórmulas para adição de arcos, mostram que para calcular a tangente do ângulo entre duas retas é necessário conhecer somente os coeficientes angulares destas retas.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da circunferência. Sabe-se que uma circunferência é o conjunto dos pontos eqüidistantes a um ponto fixo dado, que é o centro. À distância do ponto ao centro se chama raio. Calculando essa distância e elevando ambos os membros da equação ao quadrado encontra-se a equação reduzida da circunferência.

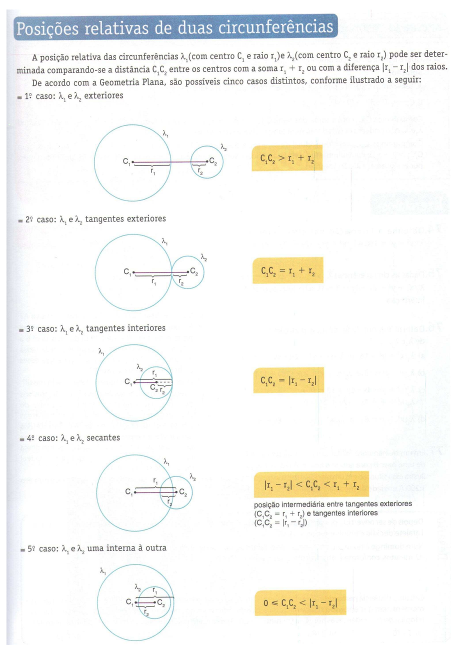
Na segunda seção, os autores mostram a equação geral da circunferência. A partir da forma reduzida da equação de uma circunferência, desenvolvendo os quadrados e agrupando os termos convenientemente, obtém uma expressão conhecida como equação geral da circunferência. Reciprocamente, para saber qual é a circunferência representada por uma equação, ou mesmo se a equação representa de fato uma circunferência, utiliza-se um processo prático que consiste em completar os quadrados para se escrever a equação na sua forma reduzida. Os autores ainda nos dizem que nem sempre uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais, representa uma circunferência. Sendo assim, é necessário fazer uma análise dos coeficientes para verificar se a equação representa ou não uma circunferência.

A terceira seção fala sobre as posições relativas entre ponto e circunferência. Os autores dizem que todos os pontos de uma circunferência distam igualmente do seu centro e mantêm dele distância igual ao raio. Isso significa que se um ponto não dista do centro uma medida igual ao raio, ele é externo ou interno à circunferência. Assim, se a distância de um ponto ao centro da circunferência é igual ao raio o ponto pertence à circunferência; se esta distância for maior do que o raio o ponto é exterior à circunferência e se for menor que o raio o ponto é interior à circunferência.

Na quarta seção os autores dizem que a principal conseqüência do estudo sobre as posições entre um ponto e uma circunferência é conhecer um método para resolver inequações do $2^o$ grau da forma $f(x, y) > 0$, $f(x, y) \geq 0$, $f(x, y) < 0$ ou $f(x, y) \leq 0$, em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma circunferência com coeficiente de $x^2$ positivo. Dada a circunferência, o plano cartesiano fica divido em três subconjuntos: o subconjunto dos pontos interiores à circunferência, o conjunto dos pontos da circunferência e o conjunto dos pontos exteriores à circunferência. Portanto, esses subconjuntos representam as soluções de (in) equações do $2^o$ grau.

Na quinta seção, apresenta-se a posição relativa de reta e circunferência, conseqüência dos conhecimentos adquiridos na terceira seção. Os autores afirmam que no plano existem retas que cortam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não interceptam a circunferência em ponto algum. Estas retas são chamadas, respectivamente, secantes, tangentes e externas à circunferência. Os autores ainda fazem um resumo de como obter a posição relativa entre uma reta e uma circunferência. Considera-se a equação da reta, isola-se uma das incógnitas e substitui-se na equação da circunferência obtendo assim uma equação do 2$^o$ grau. Se esta equação tem duas soluções então a reta é secante, se a equação tem apenas uma solução, a reta é tangente e se a equação não tem solução a reta é exterior à circunferência. Existe outro processo, menos trabalhoso, para determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência. Este é um método alternativo e consiste em calcular a distância entre o centro da circunferência e a reta, comparando-a a seguir com o raio.

A sexta seção fala especificamente da tangência. Os autores dizem que uma reta é tangente a uma circunferência quando a intercepta unicamente em um ponto. Nesse ponto, a reta é perpendicular ao raio e a distância do centro da circunferência à reta tangente é igual à medida do raio. Na sétima seção os autores trazem a interseção de duas circunferências. A interseção consiste em um ponto ou dois pontos que pertencem às duas circunferências ao mesmo tempo. Para determinar as coordenadas desse ponto montamos e resolvemos um sistema formado pelas equações das circunferências. Na última seção temos as posições relativas de duas circunferências. De acordo com a Geometria Plana, são possíveis 5 casos distintos, como mostra a Figura 3.15.



Posições relativas de duas circunferências

A posição relativa das circunferências $\lambda_1$(com centro $C_1$ e raio $r_1$)e $\lambda_2$(com centro $C_2$ e raio $r_2$) pode ser determinada comparando-se a distância $C_1C_2$ entre os centros com a soma $r_1 + r_2$ ou com a diferença $|r_1 - r_2|$ dos raios.

De acordo com a Geometria Plana, são possíveis cinco casos distintos, conforme ilustrado a seguir:

- 1º caso: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ exteriores

$C_1C_2 > r_1 + r_2$

- 2º caso: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tangentes exteriores

$C_1C_2 = r_1 + r_2$

- 3º caso: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tangentes interiores

$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

- 4º caso: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ secantes

$|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$

posição intermediária entre tangentes exteriores ($C_1C_2 = r_1 + r_2$) e tangentes interiores ($C_1C_2 = |r_1 - r_2|$)

- 5º caso: $\lambda_1$ e $\lambda_2$ uma interna à outra

$0 \leqslant C_1C_2 < |r_1 - r_2|$

Figura 3.15: Coleção 4, Volume 3, Página 87.

O Capítulo 4 é destinado ao estudo das cônicas. Os autores fazem uma introdução falando da origem de uma superfície cônica de duas folhas a partir de duas retas: uma fixa e outra que gira em torno dela. Eles ainda citam o nome de Apolônio de Perga, cerca de 200 a.C como sendo o matemático que iniciou o estudo das curvas obtidas quando se seciona uma superfície cônica com um plano. Dependendo da posição deste plano, diferentes seções podem ser obtidas.

A primeira seção traz o estudo da elipse, curva obtida a partir da interseção de um plano oblíquo com uma das folhas da superfície cônica. Primeiramente os autores mostram fotos de lugares e objetos que tem o formato de uma elipse. Em seguida eles trazem a definição de elipse e apresentam seus elementos principais. A partir da definição de elipse é feita a dedução da equação reduzida da elipse considerando o eixo focal como sendo o eixo $x$ e depois como sendo o eixo $y$.

Os autores trazem uma experiência interessante para os estudantes: desenhar uma elipse usando o lápis e um barbante. Um barbante de comprimento $2a$, onde a é uma medida fixada é preso em dois pregos distantes $2c$ um do outro (de modo que $2a > 2c$). Mantendo o barbante esticado, desloca-se a ponta do lápis. A curva que ele descreverá será uma elipse.

A seguir temos as *aplicações*. Aqui os autores falam das órbitas dos planetas que se assemelham a uma elipse para que o estudante possa fazer um paralelo entre os conteúdos estudados e o mundo ao seu redor e verificar que a Matemática está em toda parte, nas mais variadas situações. Além disso, faz uma interdisciplinaridade, envolvendo conteúdos de Matemática com conhecimentos de Geografia. Dando continuidade à seção, os autores falam sobre a translação do sistema cartesiano para em seguida apresentarem a equação reduzida da elipse com centro fora da origem.

A segunda seção traz o estudo da hipérbole, curva obtida a partir da interseção de um plano oblíquo com as duas folhas da superfície cônica. Primeiramente os autores mostram fotos de situações e lugares cujo contorno tem a forma da hipérbole. Em seguida eles trazem a definição de hipérbole apresentando seus elementos principais. A partir da definição de hipérbole é feita a dedução da equação reduzida da hipérbole tomando primeiro o eixo $y$ como sendo o eixo imaginário e depois o eixo $x$. Aqui eles falam sobre as assíntotas e o que é uma hipérbole eqüilátera. Dando continuidade à seção, os autores apresentam a equação reduzida da hipérbole com centro fora da origem. Além disso, eles trazem também hipérboles e funções recíprocas, no qual é feito o estudo de algumas funções cujo gráfico tem a forma de uma hipérbole.

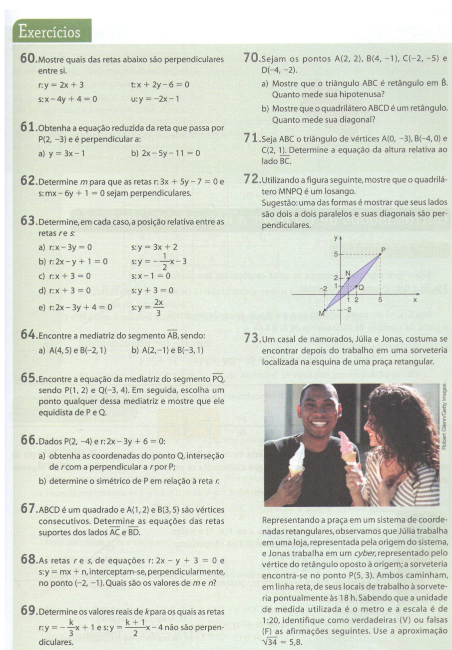
A terceira seção traz o estudo da parábola, curva obtida a partir da interseção de um plano paralelo a uma geratriz da superfície cônica com uma das folhas da mesma. Primeiramente os autores mostram fotos de movimentos de objetos, situações e lugares cuja forma lembra uma parábola. Em seguida eles trazem a definição de parábola e mostram seus elementos principais. A partir da definição de parábola é feita a dedução da equação reduzida da parábola tendo primeiro o foco no eixo $x$ e depois no eixo $y$. Dando continuidade à seção, os autores apresentam a equação reduzida da parábola com vértice fora da origem. Além disso, eles falam sobre a parábola e as funções quadráticas. O gráfico desse tipo de equação é sempre uma parábola.

A última seção ensina a fazer o reconhecimento de uma cônica pela equação. Os autores mostram as equações das elipses, das hipérboles e das parábolas e nos dizem que uma equação do $2^o$ grau nas incógnitas $x$ e $y$ representa uma dessas cônicas se for redutível a uma das formas de suas equações.

Ainda nesta seção os autores nos dizem que é regra geral na Geometria Analítica que dadas duas curvas $f(x,y)=0$ e $g(x,y)=0$, a interseção delas é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema formado por estas duas equações. O mesmo conceito se aplica para obter a interseção de uma reta e uma cônica, de uma circunferência e uma cônica e de duas cônicas.

Em todas as seções temos exemplos, exercícios resolvidos nos quais os autores mostram ao estudante como aplicar os conteúdos estudados e exercícios propostos para exercitar essa aplicação. Veja a Figura 3.16. Alguns exercícios são contextualizados, mas a maioria não é exigindo técnica do estudante. E no final de cada capítulo é proposto um desafio.

Em todos os capítulos, os autores colocam uma demanda do tipo *Pense nisto* para que o estudante reflita sobre o conteúdo apresentado levando-o a identificar questões importantes do conteúdo proposto.



Exercícios

**60.** Mostre quais das retas abaixo são perpendiculares entre si.

r: $y = 2x + 3$ t: $x + 2y - 6 = 0$

s: $x - 4y + 4 = 0$ u: $y = -2x - 1$

**61.** Obtenha a equação reduzida da reta que passa por P(2, −3) e é perpendicular a:

a) $y = 3x - 1$ b) $2x - 5y - 11 = 0$

**62.** Determine *m* para que as retas r: $3x + 5y - 7 = 0$ e s: $mx - 6y + 1 = 0$ sejam perpendiculares.

**63.** Determine, em cada caso, a posição relativa entre as retas *r* e *s*:

a) r: $x - 3y = 0$ s: $y = 3x + 2$

b) r: $2x - y + 1 = 0$ s: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

c) r: $x + 3 = 0$ s: $x - 1 = 0$

d) r: $x + 3 = 0$ s: $y + 3 = 0$

e) r: $2x - 3y + 4 = 0$ s: $y = \frac{2x}{3}$

**64.** Encontre a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, sendo:

a) A(4, 5) e B(−2, 1) b) A(2, −1) e B(−3, 1)

**65.** Encontre a equação da mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, sendo P(1, 2) e Q(−3, 4). Em seguida, escolha um ponto qualquer dessa mediatriz e mostre que ele equidista de P e Q.

**66.** Dados P(2, −4) e r: $2x - 3y + 6 = 0$:

a) obtenha as coordenadas do ponto Q, interseção de *r* com a perpendicular a *r* por P;

b) determine o simétrico de P em relação à reta *r*.

**67.** ABCD é um quadrado e A(1, 2) e B(3, 5) são vértices consecutivos. Determine as equações das retas suportes dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

**68.** As retas *r* e *s*, de equações r: $2x - y + 3 = 0$ e s: $y = mx + n$, interceptam-se, perpendicularmente, no ponto (−2, −1). Quais são os valores de *m* e *n*?

**69.** Determine os valores reais de *k* para os quais as retas r: $y = -\frac{k}{3}x + 1$ e s: $y = \frac{k+1}{2}x - 4$ não são perpendiculares.

**70.** Sejam os pontos A(2, 2), B(4, −1), C(−2, −5) e D(−4, −2).

a) Mostre que o triângulo ABC é retângulo em $\hat{B}$. Quanto mede sua hipotenusa?

b) Mostre que o quadrilátero ABCD é um retângulo. Quanto mede sua diagonal?

**71.** Seja ABC o triângulo de vértices A(0, −3), B(−4, 0) e C(2, 1). Determine a equação da altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

**72.** Utilizando a figura seguinte, mostre que o quadrilátero MNPQ é um losango.
Sugestão: uma das formas é mostrar que seus lados são dois a dois paralelos e suas diagonais são perpendiculares.



**73.** Um casal de namorados, Júlia e Jonas, costuma se encontrar depois do trabalho em uma sorveteria localizada na esquina de uma praça retangular.



Representando a praça em um sistema de coordenadas retangulares, observamos que Júlia trabalha em uma loja, representada pela origem do sistema, e Jonas trabalha em um *cyber*, representado pelo vértice do retângulo oposto à origem; a sorveteria encontra-se no ponto P(5, 3). Ambos caminham, em linha reta, de seus locais de trabalho à sorveteria pontualmente às 18 h. Sabendo que a unidade de medida utilizada é o metro e a escala é de 1:20, identifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações seguintes. Use a aproximação $\sqrt{34} = 5{,}8$.

Figura 3.16: Coleção 4, Volume 3, Página 47.

Os livros didáticos analisados têm um bom contexto histórico. Relatam brevemente sobre os desenvolvimentos da Geometria Analítica, dando ênfase às contribuições dos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat. Explicam os conceitos de sistema de coordenadas cartesianas e a localização de pontos no plano cartesiano. Esses conhecimentos são básicos e importantes para uma melhor compreensão da Geometria Analítica.

O livro 1 deduz as fórmulas para o cálculo das coordenadas do ponto médio de um segmento e a condição de alinhamento de três pontos usando o Teorema de Tales, enquanto o livro 2 usa semelhança de triângulos. A dedução dessa fórmula pela semelhança de triângulos é encontrada na maioria dos livros didáticos. Devido a este fato, a prova da fórmula usando o Teorema de Tales foi uma novidade pra mim. É uma opção bastante interessante de se mostrar para o aluno caso não a tenha no livro adotado.

O livro 1 apresenta mais ilustrações do que o livro 2. Os dois trazem exemplos e exercícios resolvidos. O livro 1 possui seções como *Conversando*, *Saiba mais*, *Conectando ideias* e *Finalizando a conversa*. Na seção *Conversando* são apresentadas algumas perguntas para que o professor possa conversar com os estudantes e verificar o que eles trazem de aprendizado. Na seção *Saiba mais* são apresentadas algumas situações que envolvem a aplicação do conteúdo estudado. A seção *Conectando ideias* instiga o estudante a refletir sobre a importância do conhecimento e aplicação da Geometria Analítica. No *Finalizando a conversa* são propostas algumas perguntas sobre o que foi estudado no capítulo com o objetivo de revisar os conhecimentos adquiridos e verificar o grau de aprendizagem dos conteúdos. O livro 2 traz a seção *Aplicações* para que o estudante possa fazer um paralelo entre os conteúdos estudados e o mundo ao seu redor e verificar que a Matemática está em toda parte, nas mais variadas situações. Além disso, faz uma interdisciplinaridade, envolvendo conteúdos de Matemática com conhecimentos de outras disciplinas.

Os dois últimos livros, que são do ensino Médio, apresentam todos os conteúdos da Geometria Analítica, com uma diferença: o último livro traz outras formas de escrever a equação da reta, como a equação segmentária e a paramétrica, enquanto o penúltimo livro traz somente as equações geral e reduzida.

O penúltimo livro é mais contextualizado e, algumas vezes, introduz os conteúdos com situações práticas. Os exercícios propostos apresentam problemas, desafios, atividades em grupo e questões de exames de outras instituições de ensino. Dessa forma prepara melhor o aluno para as provas internas e externas, desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de argumentação e o capacita para enfrentar situações desafiantes do dia a dia. O último livro é mais técnico e traz poucos exercícios contextualizados. Os exercícios propostos são de aplicação de fórmulas, porém não deixam de exigir do aluno o raciocínio lógico, a capacidade de pensar e de buscar caminhos para resolver determinados problemas como em um desafio.

Em geral, os dois livros são bem parecidos, diferenciando-se pela ordem e forma como apresentam os conteúdos e deduzem as fórmulas. Nas duas escolas públicas de Ensino Médio em que trabalhei, uma usou o primeiro livro e a outra, o segundo. A qualidade dos livros escolhidos e adotados é excelente e isso se deve ao fato de as escolas serem muito bem conceituadas na região pela qualidade do ensino, nas quais os professores são bem preparados e se importam com a aprendizagem dos alunos.

## 3.2 A Simetria no Ensino Fundamental

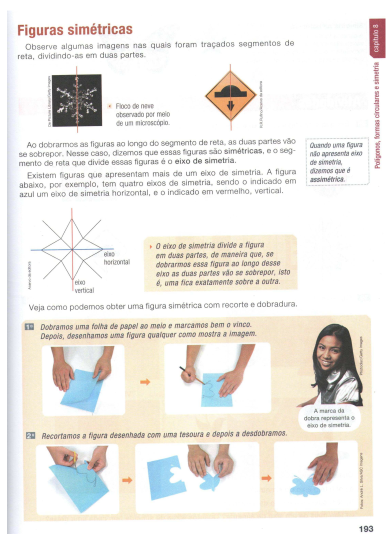
Esta seção contém a análise de alguns livros didáticos de Matemática destinados às séries finais do Ensino Fundamental com relação ao conceito de Simetria. Foram escolhidas três coleções de livros didáticos com o objetivo de identificar a presença do conteúdo Simetria, quais temas são abordados e como são tratados. Essa análise se faz necessária devido à importância do uso do livro didático em sala de aula como norteador do processo ensino aprendizagem e como influência de forma significativa à prática do professor. Essas obras são, na maioria das vezes, a principal fonte para a elaboração das suas aulas. A escolha das coleções ocorreu observando-se os períodos em que elas foram adotadas e por terem sido usadas por mim em sala de aula, na condição de professora, em três diferentes escolas nas quais lecionei. A terceira coleção foi adotada nesse ano de 2017 por uma das escolas para ser trabalhado nos próximos três anos.

Os livros selecionados foram: *A conquista da Matemática*, *Vontade de saber Matemática* e *Projeto Teláris: Matemática*. A coleção *A conquista da Matemática* é de autoria de José Ruy Giovanni Júnior e Benedito Castrucci e foi publicada pela editora FTD, em 2009. Foi usada nos anos de 2011, 2012 e 2013. A coleção *Vontade de Saber Matemática* é de autoria de Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro e foi publicada pela editora FTD em 2012. Foi usada nos anos de 2014, 2015 e 2016. A coleção denominada *Projeto Teláris* é de autoria de Luiz Roberto Dante, foi publicada pela editora Ática em 2016 e será usada nos anos de 2017, 2018 e 2019 na Escola Estadual Professor Cícero Torres Galindo localizada no município de Senador Firmino, MG.


Figura 3.17: Livros didáticos

Na Coleção 1, que é mais antiga, o autor não traz os conteúdos de simetria. No estudo do gráfico da função quadrática não é mencionado o eixo de simetria da parábola. Isso mostra que, a alguns anos atrás, a simetria não era estudada em sala de aula. Só depois de muitas discussões devido à importância do ensino da simetria para a compreensão dos conteúdos matemáticos e, principalmente, à cobrança do conteúdo em provas externas como o SIMAVE e ENEM é que este assunto começou a aparecer mais nos livros didáticos e a ser abordado em sala de aula. Mesmo assim é pouco e ainda há muita resistência por parte dos professores em ministrar o conteúdo. As seções sobre o assunto são puladas e deixadas para o final do ano e, na maioria das vezes, o conteúdo não é trabalhado por falta de tempo.

Analisando a Coleção 2 podemos observar que o conteúdo Simetria aparece nos volumes 6, 7 e 9. O volume 6 é composto por 14 capítulos e o assunto Simetria é abordado no capítulo 8, sob o título *Polígonos, formas circulares e simetria*, na Seção 5, sob o título *Figuras simétricas*. O autor apresenta um conceito inicial de simetria em relação a um eixo, ou seja, a simetria da figura é dada a partir da existência do eixo de simetria. Veja a Figura 3.18. O texto explicativo e os exercícios são todos voltados para o eixo de simetria e destacam de forma implícita a simetria de reflexão.



## Figuras simétricas

Observe algumas imagens nas quais foram traçados segmentos de reta, dividindo-as em duas partes.

Floco de neve observado por meio de um microscópio.

Ao dobrarmos as figuras ao longo do segmento de reta, as duas partes vão se sobrepor. Nesse caso, dizemos que essas figuras são **simétricas**, e o segmento de reta que divide essas figuras é o **eixo de simetria**.

Existem figuras que apresentam mais de um eixo de simetria. A figura abaixo, por exemplo, tem quatro eixos de simetria, sendo o indicado em azul um eixo de simetria horizontal, e o indicado em vermelho, vertical.

*Quando uma figura não apresenta eixo de simetria, dizemos que é **assimétrica**.*



*O eixo de simetria divide a figura em duas partes, de maneira que, se dobrarmos essa figura ao longo desse eixo as duas partes vão se sobrepor, isto é, uma fica exatamente sobre a outra.*

Veja como podemos obter uma figura simétrica com recorte e dobradura.

1º *Dobramos uma folha de papel ao meio e marcamos bem o vinco. Depois, desenhamos uma figura qualquer como mostra a imagem.*

A marca da dobra representa o eixo de simetria.

2º *Recortamos a figura desenhada com uma tesoura e depois a desdobramos.*

capítulo 8 — Polígonos, formas circulares e simetria

193

Figura 3.18: Coleção 3, Volume 6, Página 193.

O volume 7 é composto por 12 capítulos e o assunto Simetria é abordado no Capítulo 11, sob o título *Transformação de figuras e simetria*, nas Seções 2 e 3 sob o título *Figuras simétricas e simetria de rotação*, respectivamente. Na Seção 2, o autor repete o que foi feito no volume 6, apresentando também a simetria em relação a um eixo. Os exercícios têm a mesma finalidade e em todos se fala do eixo de simetria. Assim, ele apenas recorda o que foi visto no ano anterior sobre simetria. Na Seção 3, fala-se brevemente da simetria de rotação em torno de um ponto. O conteúdo não está bem explicado, apresenta um exemplo de rotação que não facilita o entendimento do aluno. Além disso, as duas seções não se interligam e não há uma sequencia progressiva do conteúdo, pois passa de simetria em relação a um eixo para a simetria de rotação em relação a um ponto sendo esta última uma transformação geométrica no plano.

O volume 9 é composto por 10 capítulos e o assunto Simetria é abordado no Capítulo 4, sob o título *Simetria*, nas Seções 1 e 2 sob o título *Simetria de rotação e Simetria de translação*, respectivamente. Na Seção 1, o autor traz novamente o conceito de simetria de rotação de forma superficial como foi feito no volume 7. Além disso, menciona a simetria central obtida por uma rotação de 180. É dado apenas um exemplo no qual é mostrado uma simetria de rotação. Em seguida apresenta o passo a passo para a construção de uma figura simétrica por rotação a partir de um retângulo. A mínima exploração do conteúdo dificulta a aprendizagem do aluno que possui pouco conhecimento sobre simetria.

Na Seção 2, fala-se da simetria de translação que é tratada da mesma forma, de maneira superficial e com poucas informações e exemplos. Os poucos exercícios exigem apenas que o aluno identifique as figuras que apresentam simetria de translação.

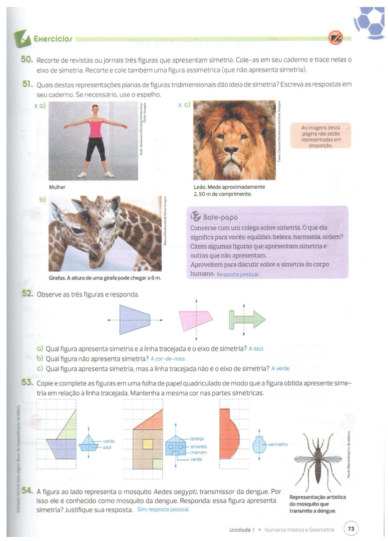
No exercício 13, página 77, o autor mostra uma obra do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898- 1972) no qual é possível identificar a simetria de rotação. Assim o aluno toma conhecimento da presença da simetria em importantes artes.

O *Explorando o tema* no final do capítulo traz a simetria na natureza, fundamental para dar beleza aos seres. O tipo de simetria apresentada é a simetria bilateral. Aqui o autor menciona também, mais uma vez, a simetria de reflexão.

Um ponto positivo é que as duas seções tratam do mesmo tipo de simetria por rotação e translação, que são aquelas obtidas por uma transformação geométrica. Além disso, a definição de cada uma é feita de forma clara e objetiva.

No Capítulo 5 sobre *Funções*, na seção *Gráfico de uma função quadrática*, o autor fala do gráfico de uma função quadrática destacando o eixo de simetria da parábola. Observamos que esse eixo de simetria ajuda o aluno a compreender que os pontos da parábola são simétricos em relação ao eixo que passa pelo vértice da parábola. Assim, encontrado um ponto da parábola é possível encontrar outro por simetria. Neste caso, os valores da variável independente x são simétricos em relação ao eixo y e os valores da variável dependente y que é o valor da função são iguais. O eixo de simetria também facilita a identificação do vértice da parábola, interseção do eixo com a curva.

A Coleção 3 traz o estudo da simetria nos volumes 7 e 9. O volume 7 é composto por 9 capítulos e o assunto Simetria é abordado no Capítulo 2 sob o título *Geometria: Sólidos Geométricos*, regiões planas e contornos, na Seção 7 sob o título *Simetria*. O autor simplesmente faz uma dobradura e diz que a figura apresenta simetria ou é simétrica em relação a "dobra"que divide a figura em duas partes iguais. A dobra é o eixo de simetria. Em seguida, apresenta figuras com simetria em relação a mais de um eixo. Depois diz que a figura e seu reflexo são simétricos ou que uma é simétrica da outra. Neste livro falta um pouco mais de explicação sobre o conceito de figura simétrica e assimétrica, com uma definição formal, objetiva e de fácil entendimento. Há pouco conteúdo explicativo e os exercícios são de identificação do tipo de simetria existente na figura. Veja a Figura 3.19. A simetria predominante é a de reflexão que se mostra de forma implícita nos exercícios e que depois é mostrada em algumas figuras simétricas. Aqui o estudo de simetria é vago e deixa um pouco a desejar.



Exercícios

50. Recorte de revistas ou jornais três figuras que apresentam simetria. Cole-as em seu caderno e trace nelas o eixo de simetria. Recorte e cole também uma figura assimétrica (que não apresenta simetria).

51. Quais destas representações planas de figuras tridimensionais dão ideia de simetria? Escreva as respostas em seu caderno. Se necessário, use o espelho.

x a) Mulher

b) Girafas. A altura de uma girafa pode chegar a 6 m.

x c) Leão. Mede aproximadamente 2,50 m de comprimento.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Bate-papo

Converse com um colega sobre simetria. O que ela significa para vocês: equilíbio, beleza, harmonia, ordem? Citem algumas figuras que apresentam simetria e outras que não apresentam.
Aproveitem para discutir sobre a simetria do corpo humano. Resposta pessoal.

52. Observe as três figuras e responda.

a) Qual figura apresenta simetria e a linha tracejada é o eixo de simetria? A azul.
b) Qual figura não apresenta simetria? A cor-de-rosa.
c) Qual figura apresenta simetria, mas a linha tracejada não é o eixo de simetria? A verde.

53. Copie e complete as figuras em uma folha de papel quadriculado de modo que a figura obtida apresente simetria em relação à linha tracejada. Mantenha a mesma cor nas partes simétricas.

verde
azul
laranja
amarelo
marrom
verde
vermelho

54. A figura ao lado representa o mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. Por isso ele é conhecido como mosquito da dengue. Responda: essa figura apresenta simetria? Justifique sua resposta. Sim; resposta pessoal.

Representação artística do mosquito que transmite a dengue.

Unidade 1 • Números inteiros e Geometria 73

Figura 3.19: Coleção 3, Volume 7, Página 73.

O volume 9 é composto por 9 capítulos e o assunto Simetria é abordado no Capítulo 5 sob o título *Semelhança*, na seção 3, sob o título *Transformações geométricas*. O autor fala sobre a translação, a reflexão em relação a uma reta e a rotação. Esse estudo é mais elaborado devido a maneira como é abordado. A translação é feita por meio de um de segmento orientado (vetor) que é um conceito novo para o aluno apesar do conhecimento já adquirido sobre segmentos orientados. É mostrada também a reflexão em torno de uma reta e um caso particular de simetria destacando o eixo de reflexão que é o eixo de simetria. Mostra a rotação em torno de um ponto de forma confusa com poucas figuras dificultando a compreensão. O conteúdo é tratado de forma superficial com poucas informações e exemplos. Traz poucos exercícios nos quais é cobrado do estudante que ele faça as transformações geométricas das figuras na malha quadriculada.

No Capítulo 3, *Explorando a ideia de função*, na Seção 4 sobre *Função Quadrática*, o autor mostra o gráfico deste tipo de função e diz que a parábola é uma figura simetrica, na qual o eixo de simetria é perpendicular ao eixo $x$ e o encontro da parábola com o eixo de simetria é o vértice da parábola.

Há uma variação da presença da simetria nos 4 volumes de cada coleção, com ausência do conteúdo em alguns livros e aparições em outros, não seguindo assim uma sequência progressiva dos conteúdos aos longo dos anos. A didática dos livros das coleções é bastante insatisfatória o que compromete a aprendizagem do conceito de simetria tão importante na formação matemática do estudante. Assim, o ideal seria que estes conceitos fossem abordados em todos os anos e em níveis progressivos de extensão e de complexidade.

Nas coleções analisadas podemos observar que o conteúdo de simetria não aparece no final do livro, o que é positivo nas obras, pois dadas as limitações do tempo escolar, conteúdos que se situam no fim dos livros têm menor chance de serem estudados de modo adequado. Mas, mesmo sendo abordado no início ou no meio do livro, o conteúdo é superficial e pouco explorado.

Os conceitos de "eixo de simetria"aparecem com bastante frequência nos livros didáticos. A simetria de reflexão e de rotação são as que mais aparecem nas obras analisadas. Foram observadas limitações na abordagem desses tipos de simetria como a vinculação da ideia de simetria de reflexão à ideia de "metade da figura"e o uso do espelho como suporte material associado à ideia de simetria. A abordagem destes conceitos de simetria em situações muito próximas se dá sem nenhuma explicação das relações existentes entre elas. O estudante é chamado a realizar atividades relativas ora a uma ora a outra de modo indiscriminado.

Não é feito uma descrição do modelo matemático para o conceito de simetria que evidencie o papel fundamental das transformações isométricas no plano euclidiano. O enfoque específico e explícito das isometrias é quase ausente nas coleções. Além disso, quando esse conteúdo é abordado, suas conexões com o conceito de simetria são implícitos ou muito sutis.

Convém observar que há uma predominância do estudo, no plano, da simetria de reflexão em relação a um eixo. Os textos e atividades que envolvem simetria exigem que os estudantes identifiquem se uma figura possui simetria de reflexão em relação a um eixo indicado; verifiquem se uma figura possui simetria de reflexão, identificando o eixo de simetria; construam figuras com simetria em relação a um eixo dado, conhecendo uma parte da figura, em especial com suporte na malha quadriculada ou com recurso a um espelho real ou imaginário; obtenha figuras com simetria de reflexão utilizando a dobradura a partir de uma dobra no papel; produza figura simétrica a uma dada figura, conhecendo-se o eixo de reflexão.

Em nenhum desses casos, explicita-se a intervenção de uma isometria no plano, mesmo no caso da dobradura, que envolve uma rotação espacial em torno de um eixo. Apenas nas situações, em número relativamente pequeno, que envolvem as simetrias de rotação e de translação, ocorrem referências explícitas às isometrias no plano.

# Capítulo 4

# Simetria

Um tema interessante que também promove a integração entre Geometria e Álgebra é o estudo de simetrias de figuras geométricas. Neste capítulo abordamos este tema, iniciando com as definições de simetria encontradas em alguns dicionários, suas noções intuitivas e, em seguida, passamos para um ponto de vista mais matemático do assunto. Na Seção 3.2, fizemos um relato de como esse tema está presente nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. Apresentamos no Capítulo 5 uma proposta de material didático para o ensino deste tema no Ensino Fundamental e Médio.

## 4.1 Definição e tipos de Simetria

No Dicionário Aurélio [8] encontramos a definição a seguir:

> Simetria [Do gr. symmetría, 'justa proporção'.] Substantivo feminino. 1.Correspondência, em grandeza, forma e posição relativa, de partes situadas em lados opostos de uma linha ou plano médio, ou, ainda, que se acham distribuídas em volta de um centro ou eixo. 2.Harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares. 3.Anál. Mat. Propriedade duma função que não se altera numa determinada transformação de suas variáveis. 4.Geom. Propriedade duma configuração que é invariante sob transformações que não alteram as relações métricas, mas alteram a posição dos seus elementos constitutivos. 5.Lóg.

> Propriedade da relação que, afirmada entre A e B, pode ser afirmada entre B e A, sem transformação. [Cf. assimetria.] Simetria axial. 1. Geom. Simetria em relação a rotações em torno de um eixo, ou a reflexões nesse eixo; simetria cilíndrica. Simetria bilateral. 1. Biol. A simetria do corpo da maioria dos animais. Simetria central. 1. Geom. Simetria em relação à reflexão em um ponto; simetria polar. Simetria cíclica. 1. Anál. Mat. Simetria de uma função sob permutação cíclica. Simetria cilíndrica. 1. Geom. Simetrial axial. Simetria circular. 1. Geom. Simetria axial de uma configuração plana. Simetria esférica. 1. Geom. Simetria sob as rotações em torno de um ponto. Simetria especular. 1. Geom. Simetria sob reflexão num plano. Simetria polar. 1. Geom. Simetria central.

Podemos perceber que a definição encontrada no dicionário é bastante fiel à noção intuitiva que se tem de simetria.

> Um objeto ou figura tem simetria quando pode ser dividido em duas partes que devem coincidir perfeitamente quando sobrepostas. A simetria está presente em toda a parte, seja na natureza, nas artes ou na Matemática. [18]

No campo estético, a simetria é a responsável por proporcionar harmonia a uma imagem, e, consequentemente, a sua beleza: quanto mais simétrico for um objeto ou figura, mais belo tende a ser considerado.

Em Matemática, a simetria é uma correspondência entre pontos de uma mesma figura como na definição a seguir para figuras planas:

**Definição 4.1** *Uma figura $X$ é um conjunto de pontos do plano. Uma simetria de uma figura $X$ é uma transformação $T$ do plano em si mesmo tal que:*

1. *$T(X) = X$, isto é, $T$ envia cada ponto em $X$ para outro ponto em $X$ e cada ponto em $X$ é a imagem de algum ponto em $X$ sob $T$.*

2. *$T$ preserva distância, isto é, se $d(p, q)$ denota a distância entre os pontos $p$ e $q$, então $D(T(p), T(q)) = d(p, q)$, para todos os pontos $p$ e $q$.*

Neste contexto, o objeto se "move", mas as distâncias, ângulos, tamanhos e formas são preservados pela simetria. Existem quatro tipos de simetrias em um plano: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento.

*Simetria* e *assimetria* são palavras antônimas, ou seja, possuem significados completamente distintos e opostos. A simetria consiste na conformidade e correspondência entre posição, forma e medida em relação a um eixo, por exemplo, e outras características harmoniosas entre duas ou mais partes. A assimetria, por sua vez, seria a ausência da simetria, ou seja, quando não há esta correspondência entre as partes, sendo estas desproporcionais ou não harmoniosas.

A seguir descrevemos os diferentes tipos de simetrias com mais detalhes.

### 4.1.1 Simetria de reflexão

Em Matemática, de acordo com [19], uma **reflexão** é uma transformação geométrica do ponto, da reta, do plano ou do espaço que "espelha" todos os pontos em relação, respectivamente, a um ponto (dito *centro de reflexão*), uma reta (dita *eixo de reflexão* ou *eixo de simetria*) ou um plano (chamado *plano de reflexão* ou *de simetria*), transformando o ponto, a reta ou o plano num outro, que lhe é *simétrico* em relação ao eixo ou ao ponto dado.

Uma reflexão do plano euclidiano é uma simetria ortogonal em relação a uma reta. Assim, uma reflexão é também chamada uma *simetria axial ortogonal*.

Em geral, dentro de um espaço euclidiano qualquer, uma reflexão é uma simetria ortogonal em relação a um hiperplano, isto é, a um subespaço de codimensão 1. Em dimensão 3, trata-se, portanto, de uma simetria ortogonal em relação a um plano.

Uma reflexão $S$ é uma transformação involutiva, isto é, aplicada (ou composta) duas vezes nos dá a transformação identidade do plano ou do espaço. Na linguagem da Teoria de Grupos, isto significa que é uma transformação de *ordem* 2 (ver [6, p.140]). O termo nos remete intuitivamente aos espelhos, que refletem uma imagem. A figura imagem e a figura original são *isométricas*.

De acordo com [1], apresentamos a construção do conceito de simetria de reflexão.

Consideremos uma reta $r$ e um ponto qualquer $P$ não pertencente à reta. Marquemos um ponto $P'$ na perpendicular por $P$ à reta $r$ em $M$, no semiplano oposto ao de $P$ tal que $P'M = PM$. Veja Figura 4.1.

Dizemos que $P'$ é o *simétrico* de $P$ em relação ao eixo $r$. Em particular, se um ponto $Q$ pertence ao eixo $r$, o seu simétrico $Q'$ coincide com o próprio ponto $Q$.

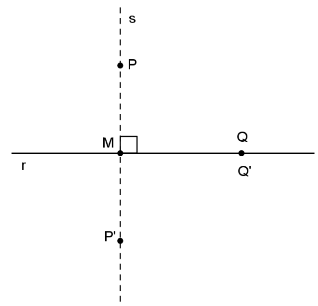



Figura 4.1: Reflexão do ponto $P$ em relação à reta $r$.

Agora, os simétricos $A'$ e $B'$ de $A$ e $B$ em relação ao eixo $r$, conforme a Figura 4.2, nos permitem obter o simétrico do segmento $AB$ em relação ao eixo $r$, a saber, o segmento $A'B'$.

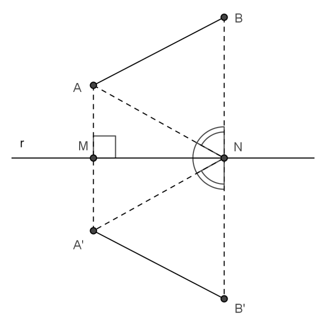



Figura 4.2: Reflexão do segmento $AB$ em relação à reta $r$.

Observamos ainda que $MA' = MA$ (I) e $NB' = NB$ (II). Como os ângulos em $M$ são retos e $MN$ é lado comum, segue de (I) $\Delta AMN \equiv \Delta A'MN$. Logo $NA' = NA$ (III) e $M\hat{N}A' = M\hat{N}A$ (IV). Os ângulos em $N$ também são retos; assim de (IV) segue $A'\hat{N}B' = A\hat{N}B$ (V). De (II), (III) e (V), temos $A'NB' = ANB$, ou ainda, $A'B' = AB$.

Mostramos assim uma propriedade importante da simetria axial: ela *conserva distâncias*. Por esse motivo, diz-se que a simetria axial é uma *isometria* ("mesma medida"). Em consequência, conserva também os ângulos.

Entretanto, a simetria axial inverte os sentidos, como se observa na Figura 4.3, pois lendo os vértices do triângulo na ordem alfabética, temos $A$, $B$ e $C$ no sentido horário. No triângulo simétrico, a leitura dos vértices na ordem alfabética se dá no sentido anti-horário.

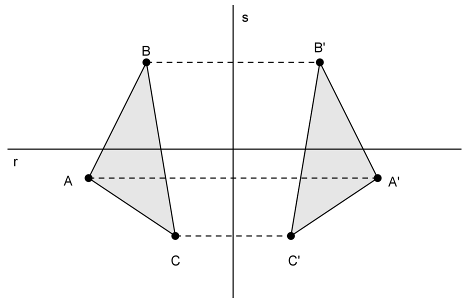



Figura 4.3: Reflexão do triângulo $ABC$ em relação à reta $r$.

**Figuras com estrutura simétrica reflexional**

Considere uma figura qualquer e procure desenhar uma reta que a divida em duas partes idênticas. Serão encontradas figuras em que essa operação é possível e outras em que não é possível.

Num triângulo isósceles, existe a reta bissetriz do ângulo formado pelos lados congruentes. Num triângulo equilátero, existem três retas (as três bissetrizes dos ângulos internos que coincidem com as mediatrizes dos lados). Entretanto, no triângulo escaleno não existe uma tal reta (Figura 4.4).

Observe que nos dois primeiros triângulos existem eixos de simetria, enquanto que no escaleno não existe. Em outras palavras, há figuras que apresentam *estrutura simétrica* e outras *estrutura assimétrica*.

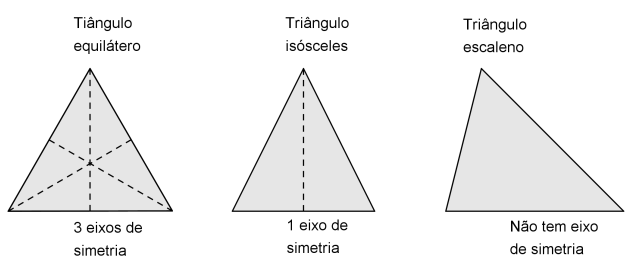



Figura 4.4: Simetria axial de triângulos.

Nos quadriláteros, observamos que o paralelogramo não retângulo com lados opostos de medidas diferentes e o trapézio escaleno não possuem simetrias. O trapézio isósceles possui um eixo de simetria que é a reta suporte da mediana dos lados paralelos, o losango e o retângulo possuem dois eixos de simetria que são as retas suportes das diagonais do primeiro e as medianas dos lados do segundo e o quadrado (losango e retângulo) possui quatro eixos de simetria que são as retas suportes das diagonais e as medianas dos lados. Veja a Figura 4.5.

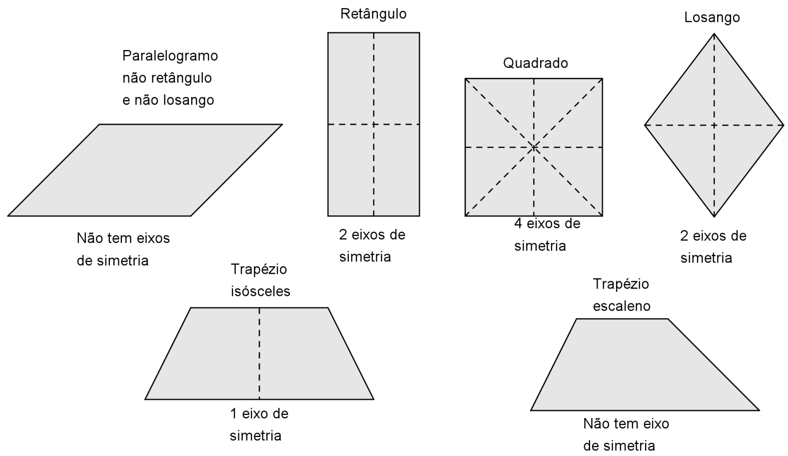



Figura 4.5: Simetria axial dos quadriláteros.

Um polígono regular de $n$ lados possui $n$ eixos de simetria que são as retas passando pelo "centro" e pelos vértices; os polígonos regulares de número par de lados admitem o circuncentro por centro de simetria. Já os de número ímpar de lados não possuem centro de simetria. Todos os polígonos regulares apresentam estrutura simétrica, ou são *figuras simétricas* como mostra a Figura 4.6. No entanto, os polígonos irregulares podem ter estrutura simétrica ou não.

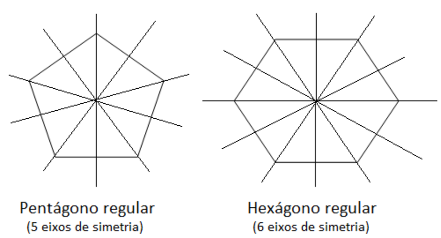



Figura 4.6: Simetria axial dos polígonos regulares.

O círculo tem infinitos eixos de simetria que são as retas contendo os diâmetros.

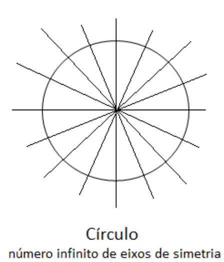



Figura 4.7: Simetria axial do círculo.

### 4.1.2 Simetria de rotação

Segundo [20], uma **simetria de rotação** ou **rotacional** ocorre quando se roda uma figura numa amplitude maior que $0^o$ e menor que $360^o$, tal que o resultado dessa rotação seja uma figura igual à figura em sua posição inicial. Assim, diz-se que uma figura tem simetria de rotação ou rotacional, se existir pelo menos uma rotação, que não de $0^o$ ou $360^o$, tal que a imagem dessa rotação forme a mesma figura.

De acordo com [1], apresentamos o conceito matemático de simetria de rotação.

Dados um ponto fixo $O$ e um ângulo $\alpha$, com $0 < \alpha < 360^o$ e um ponto qualquer $P$, não coincidente com $O$, construamos um ponto $P'$ tal que $OP' = OP$ e $P\hat{O}P' = \alpha$. Veja a Figura 4.8.

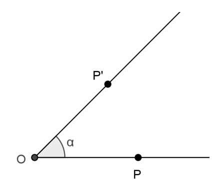



Figura 4.8: Rotação de ângulo $\alpha$.

Dizemos que $P'$ é o simétrico de $P$ por *simetria rotacional* ao redor de $O$ de ângulo $\alpha$. Ao ponto $O$ chamamos de *centro de rotação* ou *rotocentro* e a $\alpha$ de *ângulo de rotação* ou de *giro*.

Na prática se diz *dar uma rotação ao ponto*, o que pode ser facilmente observado, pois como $OP' = OP$ resulta que os pontos $P$ e $P'$ pertencem a uma circunferência de centro $O$.

A cada ponto $P$ corresponde, em geral, dois pontos por simetria rotacional de mesmo ângulo, assim se torna conveniente algumas vezes orientar o ângulo, obtendo rotações no sentido *horário* ou no sentido *anti-horário*. Veja a Figura 4.9.

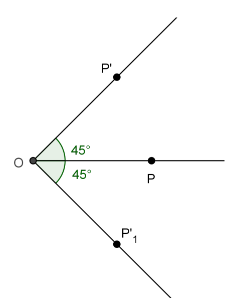



Figura 4.9: Simetria rotacional de mesmo ângulo.

Em particular, se $P$ coincide com $O$ dizemos que o seu simétrico rotacional é o próprio ponto. Dizemos então que o rotocentro é *ponto invariante*, como acontece na simetria reflexional, quando todos os pontos do eixo são invariantes.

Da igualdade dos ângulos $A\hat{O}A'$ e $B\hat{O}B'$ com $\alpha$ resulta $\Delta AOB \equiv \Delta A'OB'$, como mostra a Figura 4.10. Portanto, a rotação é uma isometria que conserva os sentidos.

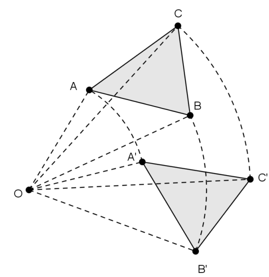



Figura 4.10: Rotação de ângulo $\alpha$.

Em particular, se o ângulo de rotação é de $180^o$, ou seja, de meia volta ou de meio giro, dizemos que a simetria é *central*. A denominação é oriunda do fato de o centro de rotação ser agora ponto médio do segmento $PP'$, qualquer que seja o ponto $P$. Veja a Figura 4.11.

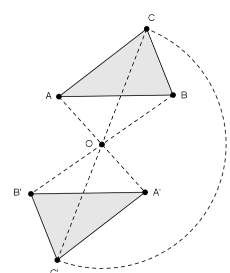



Figura 4.11: Rotação de $180^o$.

Se o ângulo de rotação é de $0^o$, o simétrico coincide com o próprio ponto. Daí, pode-se dizer que a transformação é a *identidade*.

## Figuras com estrutura simétrica rotacional

Os polígonos regulares possuem os seus ângulos centrais dados por $a_n = \frac{360}{n}$, onde $n$ é o número de lados. Assim, para qualquer rotação de centro no centro do polígono, de ângulo de rotação dado pelo ângulo central ou múltiplos inteiros dele obtém-se o mesmo polígono.

Por esse motivo dizemos que os polígonos regulares de $n$ lados possuem *estrutura simétrica rotacional de ângulo central*. Assim, o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular possuem estrutura rotacional respectivamente de $120^o$, $90^o$ e $72^o$, e assim sucessivamente, como mostrado na Figura 4.12.

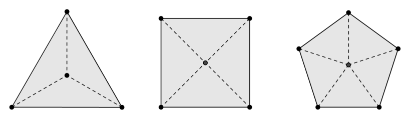


Figura 4.12: Estrutura simétrica rotacional dos polígonos.

### 4.1.3 Simetria de translação

Em [21], encontramos um conceito intuitivo da simetria de translação.

Uma **translação** é uma isometria que desloca a figura original segundo uma direção, um sentido e um comprimento (vetor). As translações conservam a direção e o comprimento de segmentos de reta, e as amplitudes dos ângulos.

Na simetria de translação, a figura "desliza" sobre uma reta, mantendo-se inalterada. Em todas as translações se observa que um mesmo elemento se desloca numa determinada direção e sempre paralelo a si próprio, isto é, sem nunca rodar.

Apresentamos o conceito matemático de simetria de translacão, seguindo [1].

Dados uma direção por uma reta $r$ e um segmento $MN$ de comprimento $u$, consideremos um ponto $P$ qualquer do plano. Construamos um ponto $P'$ tal que $PP'//r$ e $PP' = MN$. Dizemos que $P'$ é simétrico de $P$ por *simetria translacional* na direção $r$ e no módulo $u$. A reta $r$ é chamada *reta de translação*. Veja a Figura 4.13.

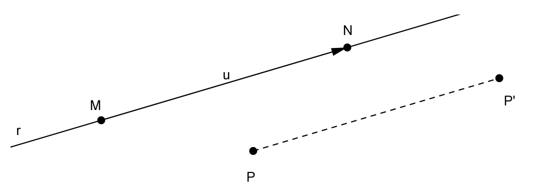



Figura 4.13: Simetria translacional.

A cada ponto $P$ correspondem dois simétricos por simetria translacional, assim é conveniente orientar a reta num dos dois sentidos. Assim, dizemos que a transformação geométrica é uma *translação*, de vetor $\overrightarrow{u}$, que possui direção e sentido de $r$ e módulo $|\overrightarrow{u}|$.

Por causa do paralelismo e da congruência de $AA'$ e $BB'$ com o segmento $MN$, resulta que o quadrilátero $ABB'A'$ é um paralelogramo, ou que $A'B' \parallel AB$ e ainda $A'B' = AB$. Portanto, a simetria translacional é uma isometria que conserva os sentidos. Veja a Figura 4.14.

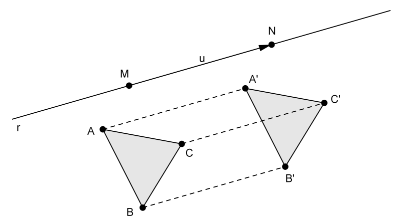



Figura 4.14: Translação do triângulo.

### 4.1.4 Simetria translacional refletida

Um conceito intuitivo da simetria translacional refletida proveniente de [22] é dado a seguir.

Uma **reflexão com deslizamento** é uma composição de uma reflexão com uma translação por meio de um vetor com a mesma direção da reta de reflexão.

Seguindo [1], apresentamos o conceito matemático de simetria translacional refletida.

Consideremos um ponto $P$ qualquer e façamos uma simetria translacional de reta $r$, obtendo o ponto $P_1$ e, em seguida, uma simetria reflexional de eixo $r$, obtendo o ponto $P'$. Dizemos que $P'$ é obtido de $P$ por uma *simetria translacional refletida* (ou *reflexão com deslizamento*). Observe a Figura 4.15.

Assim, a simetria translacional refletida pode ser chamada de produto de duas transformações (duas simetrias). No entanto, esse produto é comutativo, pois podemos trocar a ordem, isto é, se aplicamos a simetria reflexional de eixo $r$ e em seguida a simetria translacional de reta $r$, com o mesmo módulo, ou vice-versa, obtemos o mesmo resultado.

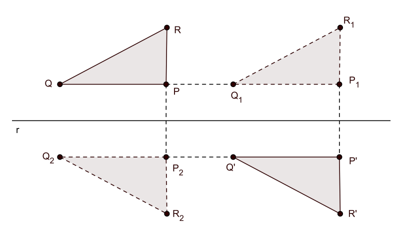



Figura 4.15: Translação refletida.

As duas simetrias utilizadas numa simetria translacional refletida são isometrias, com uma só *isometria inversa* ou *oposta*. É impossível fazer uma figura coincidir por superposição com a sua simétrica somente movimentando-a sobre o plano, é necessário usar um movimento no espaço.

## 4.2 Grupos de simetrias

Dada uma figura no plano (ou no espaço), queremos colecionar todas as transformações do plano (ou no espaço) que são simetrias dessa figura. Este conjunto tem uma estrutura algébrica que é chamada de grupo. Iniciamos esta seção pela compreensão de como os diferentes tipos de simetrias podem ser combinados. Veremos que cada figura terá o seu "grupo de simetrias".

É conveniente começar tal discussão com a definição de uma isometria em $\mathbb{R}^n$, generalizando a Definição 4.1 de isometria de figuras planas.

A principal referência para esta seção é [9, Chapter 27].

**Definição 4.2** *Uma* **isometria** *do espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que preserva a distância. Em outras palavras, uma função $T$ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é uma isometria se, para cada par de pontos $p$ e $q$ em $\mathbb{R}^n$, a distância de $T(p)$ a $T(q)$ é a mesma que a distância de $p$ a $q$.*

Com essa definição, podemos agora fazer a definição do grupo de simetrias de uma figura com $n$ dimensões.

**Definição 4.3** *Seja $X$ um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^n$. O* **grupo de simetrias** *de $X$ em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$ que levam $X$ sobre si mesmo. A operação do grupo é a composição de funções.*

É importante perceber que o grupo de simetrias de um objeto depende não apenas do objeto, mas também do espaço em que o vemos. Por exemplo, o grupo de simetria de um segmento de linha em $\mathbb{R}$ tem ordem 2, o grupo de simetria de um segmento de linha considerado como um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$ tem ordem 4 e o grupo de simetria de um segmento de linha visto como um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^3$ tem ordem infinita.

### 4.2.1 Composição de simetrias

Vimos na Seção 4.1 que uma simetria de reflexão é uma transformação involutiva do plano (ou do espaço), ou seja, uma reflexão $S$ sobre uma reta $r$ no espaço $\Omega$ é uma transformação de $\Omega$ que leva cada ponto $P$ num ponto $P'$, sobre a reta $r'$, perpendicular a $r$ que contém $P$, tal que $P$ e $P'$ são equidistantes de $r$. É imediato, por definição, que $S^2 = Id$.

Sejam $S_1$ e $S_2$ reflexões sobre as retas $r_1$ e $r_2$, respectivamente, com $r_1 \neq r_2$, $r_1 \not\parallel r_2$ ($r_1$ não é paralela a $r_2$) e seja $\alpha$ o ângulo formado pelas retas $r_1$ e $r_2$. A composição $S_1 \circ S_2 = S_1 S_2$ é uma rotação de $2\alpha$ em torno do ponto comum às duas retas.

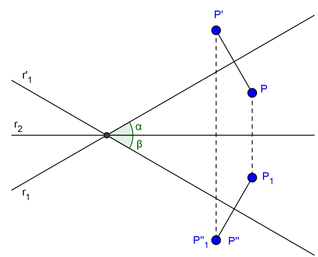



Figura 4.16: Composição de reflexões.

O efeito de $S_1 S_2$ sobre o ponto $P$ é o mesmo obtido pela aplicação de $S_2 S_1'$, onde $S_1'$ é a reflexão sobre a reta $r_1'$ (imagem de $r_1$ sob a reflexão $S_2$).

$$P_1 = S_2;\ P" = S_1 S_2;\ P" = S_2 S_1'$$

Assim como fizemos a composição de duas reflexões no plano (ou no espaço), podemos compor os diferentes tipos de simetrias de uma mesma figura.

**Teorema 4.4** *O conjunto $G$ de todas as simetrias de uma figura $X$ forma um grupo $G$, chamado o grupo de simetrias da figura.*

**Demonstração:** Mostremos primeiro que se $S, T \in G$, então o produto $ST$, definido por $ST(p) = S(T(p))$, para todo ponto $p$, pertence a $G$. Temos $ST(X) = S(T(X)) = S(X) = X$ e, para $p$, $q$ pontos quaisquer, $d(ST(p), ST(q)) = d(S(T(p)), S(T(q))) = d(T(p), T(q)) = d(p, q)$ e, portanto, $ST \in G$. A associatividade da composição de simetrias de $X$ decorre da associatividade da composição de funções. A transformação $Id$ é tal que $Id(p) = p$, para todo $p$, logo $Id(X) = X$ e, portanto, $Id \in G$ e satisfaz $S \circ Id = Id \circ S = S$, para todo $S \in G$. Finalmente, se $S \in G$, existe a simetria $S^{-1}$ tal que $SS^{-1} = Id = S^{-1}S$. Logo, $X = Id(X) = S^{-1}(S(X)) = S^{-1}(X)$ e, portanto, $S^{-1}$ é simetria de $X$. $\square$

Nas subseções a seguir falaremos dos grupos de simetrias do triângulo equilátero, do quadrado e do polígono regular de $n$ lados.

### 4.2.2 O grupo de simetrias do triângulo equilátero

Para caracterizar geometricamente as simetrias do triângulo equilátero, Figura 4.17, indiquemos seus vértices consecutivamente por 1, 2 e 3 e por $O$ o seu baricentro. Consideremos as seguintes retas: $a$, por $O$ e pelo vértice 1, $b$, por $O$ e pelo vértice 2, e $c$, por $O$ e pelo vértice 3. O grupo de simetrias do triângulo equilátero consiste das três reflexões em torno das retas $a$, $b$ e $c$ e de três rotações por ângulos de $120^o$, $240^o$ e $360^o$.

Utilizando a composição de funções, mostramos que as simetrias do triângulo equilátero podem ser construídas a partir de duas dessas simetrias, a saber, $R$ a rotação em torno do baricentro no sentido anti-horário por um ângulo de $120^o$ e $S$ a reflexão em torno da reta $a$. Assim, o grupo de simetrias $G$ do triângulo equilátero consiste das simetrias

$$\{Id, R, R^2, S, SR, SR^2\}.$$

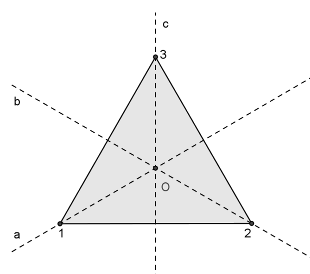



Figura 4.17: Eixos de simetria do triângulo equilátero.

Verifica-se que valem as relações $S^2 = Id$, $R^3 = Id$ e $SR = R^{-1}S$ e que estas são suficientes para compor os elementos arbitrários de $G$.

O conjunto das rotações $\{Id, R, R^2\}$ forma um subgrupo do grupo de simetrias do triângulo equilátero.

Mostraremos a seguir, por meio da construção de uma tábua, que o conjunto das simetrias do triângulo equilátero, com a composição de transformações, é um grupo não abeliano. Efetuando-se todas as composições possíveis, obtemos a seguinte tábua:

| $\circ$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Id$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ |
| $R$ | $R$ | $R^2$ | $Id$ | $SR^2$ | $S$ | $SR$ |
| $R^2$ | $R^2$ | $Id$ | $R$ | $SR$ | $SR^2$ | $S$ |
| $S$ | $S$ | $SR^2$ | $SR$ | $R$ | $R^2$ | $R$ |
| $SR$ | $SR$ | $S$ | $SR^2$ | $R$ | $Id$ | $R^2$ |
| $SR^2$ | $SR^2$ | $SR$ | $S$ | $R^2$ | $R$ | $Id$ |

Tabela 4.1: Grupo de simetrias do triângulo equilátero.

### 4.2.3 O grupo de simetrias do quadrado

Para caracterizar geometricamente as simetrias do quadrado, Figura 4.18, indiquemos seus vértices consecutivamente por 1, 2, 3 e 4. Consideremos as retas $a$ e $b$, respectivamente, pelas diagonais 13 e 24 do quadrado, e as retas $c$ e $d$, a primeira perpendicular aos lados 12 e 34, pelo ponto médio de ambos, e a segunda perpendicular aos lados 23 e 14 também pelo ponto médio de ambos. O centro do quadrado, que é interseção dessas retas, será indicado por $O$.

O grupo de simetrias do quadrado consiste das quatro reflexões em torno das retas $a$, $b$, $c$ e $d$ e das quatro rotações por ângulos de $90^o$, $180^o$, $270^o$ e $360^o$, em torno do centro $O$. Utilizando a composição de funções, mostramos que as simetrias no quadrado podem ser construídas a partir de duas dessas simetrias, a saber, $R$ a rotação no sentido anti-horário por um ângulo de $90^o$ e $S$ a reflexão em torno da reta $a$. Assim, o grupo de simetria $G$ do quadrado consiste das simetrias

$$\{Id, R, R^2, R^3, S, SR, SR^2, SR^3\}.$$

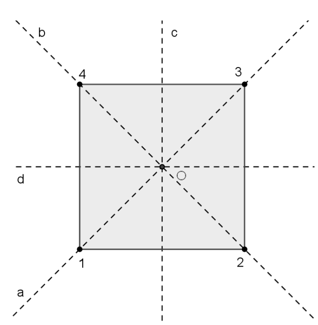



Figura 4.18: Eixos de simetria do quadrado.

Novamente, verifica-se que valem as relações $S^2 = Id$, $R^4 = Id$ e $SR = R^{-1}S$ e que estas são suficientes para compor os elementos arbitrários de $G$.

O conjunto $\{Id, R, R^2, R^3\}$ forma o subgrupo das rotações do grupo de simetrias do quadrado.

Efetuando-se todas as composições possíveis, obtemos a seguinte tábua:

| $\circ$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $R^3$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Id$ | $R$ | $R^1$ | $R^2$ | $R^3$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
| $R$ | $R$ | $R^2$ | $R3$ | $Id$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
| $R^2$ | $R^2$ | $R^3$ | $Id$ | $R$ | $S$ | $SR$ | $R^2$ | $SR^3$ |
| $R^3$ | $R^3$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $SR^3$ | $SR^2$ | $S$ | $SR$ |
| $S$ | $S$ | $SR^2$ | $SR$ | $SR^3$ | $Id$ | $R^2$ | $R$ | $R^3$ |
| $SR$ | $SR$ | $SR^3$ | $S$ | $SR^2$ | $R^2$ | $Id$ | $R^3$ | $R$ |
| $SR^2$ | $SR^2$ | $SR$ | $SR^3$ | $S$ | $R^3$ | $R$ | $Id$ | $R^2$ |
| $SR^3$ | $SR^3$ | $S$ | $SR^2$ | $SR$ | $R$ | $R^3$ | $R^2$ | $Id$ |

Tabela 4.2: Grupo de simetrias do quadrado.

### 4.2.4 O grupo de simetrias do polígono regular de $n$ lados

O conceito de simetria de um triângulo e de um quadrado pode ser estendido naturalmente para um polígono regular qualquer de $n$ lados. Tal como nos casos particulares, o número das simetrias de um polígono regular de $n$ lados é o dobro do número de lados, isto é, $2n$ no caso geral.

Para descrever essas simetrias denotemos os vértices do polígono, consecutivamente, por 1, 2, ..., $n$. Duas simetrias bastam para gerar o grupo de simetrias de um polígono regular de $n$ lados: a rotação $R$ de $\frac{360^o}{n}$ em torno do centro $O$ do polígono e a reflexão $S$ em torno da reta $a_1$ pelo vértice 1 e pelo centro do polígono. Veja a Figura 4.19.

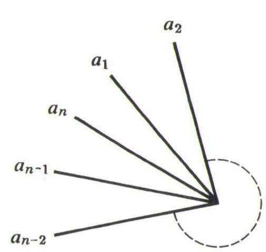



Figura 4.19: Polígono regular de $n$ lados.

O grupo de simetrias do polígono regular de $n$ lados consiste exatamente das simetrias

$$\{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, S, SR, \ldots, SR^{n-1}\} \tag{4.1}$$

e estas simetrias são multiplicadas de acordo com as regras

$$R^n = 1,\ S^2 = 1,\ SR = R^{-1}S.$$

O conjunto das rotações

$$\{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\}. \tag{4.2}$$

é um subgrupo do grupo de simetrias do polígono regular de $n$ lados.

O grupo (4.1) é chamado o grupo diedral $D_n$ e o grupo (4.2) é chamado o grupo cíclico $C_n$. Estes são os únicos grupos finitos de simetrias de figuras planas.

Para provar a veracidade desta afirmação, seguindo [5, Chapter 4, Section 14], primeiramente identificamos o plano com o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ de todos os pares de números reais $(a, b)$ que também identificamos com o vetor com origem em $(0, 0)$ e ponto final em $(a, b)$. Se $p$ é um vetor $(a, b)$, então o comprimento $||p||$ é definido por $||p|| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e a distância de $p$ a $q$ (ver a Figura 4.20) é dada por $d(p, q) = ||p - q||$. Temos também que $p = (a, b)$ é perpendicular a $q = (c, d)$ (notação: $p \perp q$) se, e somente se, $ac + bd = 0$.

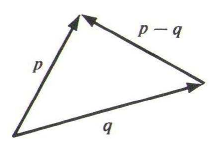



Figura 4.20: Distância de $p$ a $q$.

**Teorema 4.5** *Uma transformação $T$ de $\mathbb{R}^2$ que preserva distância e deixa o elemento zero fixo é uma transformação linear.*

**Demonstração:** Pode-se demonstrar que um ponto $p$ no plano é completamente determinado por suas distâncias a 0, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Assim, $T(p)$ é completamente determinada por $T(e_1)$ e $T(e_2)$, uma vez que $T(0) = 0$. Podemos definir uma transformação linear $T'$ tal que $T(e_1) = T'(e_1)$, $T(e_2) = T'(e_2)$. Como $T$ e $T'$ são determinados pela sua ação em $e_1$ e $e_2$, temos $T = T'$. □

Mostramos a seguir a caracterização de uma transformação que preserva distância.

**Teorema 4.6** *Uma transformação linear $T$ preserva distância se, e somente se,*

$$||T(e_1)|| = ||T(e_2)|| = 1 \quad e \quad T(e_1) \perp T(e_2). \tag{4.3}$$

**Demonstração:** Se $T$ preserva as distâncias, então é claro que (4.3) é válido. Reciprocamente, suponha que $T$ seja uma transformação linear tal que (4.3) ocorra. Para provar que $T$ preserva distâncias é suficiente provar que, para todos os vetores $p$, $||T(p)|| = ||p||$, para então $d(T(p), T(q)) = ||T(p) - T(q)|| = ||T(p - q)|| = ||p - q|| = d(p, q)$.

Agora, sejam $p = ue_1 + ve_2$ e $T(e_1) = (a, b)$, $T(e_2) = (c, d)$. Assim, (4.3) implica $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$. Daí,

$$\begin{aligned} ||T(p)||^2 &= ||uT(e_1) + vT(e_2)||^2 = || < ua + vc, ub + vd > ||^2 \\ &= (ua + vc)^2 + (ub + vd)^2 \\ &= u^2a^2 + 2uavc + v^2c^2 + u^2b^2 + 2ubvd + v^2d^2 \\ &= u^2(a^2 + b^2) + v^2(c^2 + d^2) + 2uv(ac + bd) \\ &= u^2 + v^2 = ||p||^2. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração. □

Agora, seja $T$ uma transformação que preserva distância e fixa a origem, tal que $T(e_1) = (a, b)$. Então $T(e_2)$ é um ponto no círculo unitário cujo raio-vetor é perpendicular a $T(e_1)$, Figura 4.21. Disto temos ou $T(e_2) = (a, b)$ ou $T(e_2) = (b, -a)$.

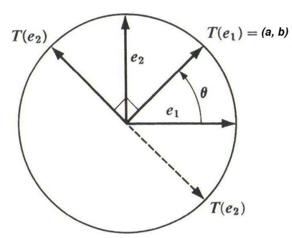



Figura 4.21: Transformação no círculo unitário.

No primeiro caso, a matriz de $T$ em relação a $\{e_1, e_2\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

enquanto que no último caso a matriz é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, $T$ é uma rotação por um ângulo $\theta$ tal que $cos\theta = \alpha$, enquanto que, neste último caso, $T$ é uma simetria bilateral em torno da linha que forma um ângulo $\frac{1}{2}\theta$

com $e_1$. Observe que no segundo caso a matriz de $T^2$ é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2+\beta^2 \end{pmatrix} = Id$$

de modo que $T^2 = 1$. O segundo tipo de transformação é uma *reflexão*, o primeiro é uma *rotação*.

As reflexões e as rotações se combinam do seguinte modo.

**Teorema 4.7** *Sejam $S$ e $T$ transformações lineares que preservam distância, então:*

1. *Se $S$, $T$ são rotações, então $ST$ é uma rotação.*
2. *Se $S$, $T$ são reflexões, então $ST$ é uma rotação.*
3. *Se uma de $S$, $T$ é uma rotação e a outra é uma reflexão, então $ST$ é uma reflexão.*

**Teorema 4.8** *Seja $G$ um grupo finito de transformações lineares que preservam distância em $\mathbb{R}^2$. Então $G$ é isomorfo com um dos seguintes grupos:*

1. *O grupo cíclico $C_n = \{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\}$, $R^n = 1$, consistindo de todas as potências de uma única rotação.*
2. *O grupo diedral $D_n = \{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, S, SR, \ldots, SR^{n-1}\}$, onde $R$ é uma rotação, $S$ uma reflexão e $R^n = 1$, $S^2 = 1$, $SR = R^{-1}S$.*

**Demonstração:** Podemos supor $G \neq 1$. Se todos os elementos de $G$ são rotações, seja $R$ uma rotação em $G$ pelo menor ângulo positivo. Considere as potências de $R$, $\{1, R, R^2, \ldots\}$. Estas já são todo o grupo $G$, como será visto. Suponha que $T \in G$ é uma rotação diferente de todas as potências de $R$. Se $\varphi$ é o ângulo de $T$ e $\theta$ o ângulo de $R$, então, para algum $i$, $i\theta < \varphi < (i+1)\theta$, Figura 4.22. Assim, $G$ contém $TR^{-i}$ que é uma rotação em $G$ por um ângulo $\varphi - i\theta$ menor que $\theta$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $G$ é constituído pelas potências de $R$ e é um grupo cíclico.

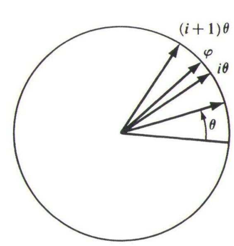



Figura 4.22: Rotação de ângulo $\theta$.

Agora suponha que $G$ contenha uma reflexão $S$. Seja $H$ o conjunto de todas as rotações contidas em $G$. Então $H$ é subgrupo de $G$ e, pela primeira parte da prova, existe uma rotação $R$ em $H$ tal que

$$H = \{1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}\} \text{ e } R^n = 1.$$

Agora seja $X \in G$. Ou $X \in H$ ou $X$ é uma reflexão. Neste último caso, $SX$ é uma rotação. Logo $SX = R^i$, para algum $i$, e como $S^2 = 1$, temos

$$X = S(SX) = SR^i.$$

Assim, provamos a igualdade

$$G = \{1, R, \ldots, R^{n-1}, S, SR, \ldots, SR^{n-1}\}.$$

Finalmente, $SR$ é uma reflexão, logo $(SR)^2 = 1$ ou $SRSR = 1$ e temos $S = RS^{-1}$. Portanto, $G$ é isomorfo ao grupo diedral e o teorema está provado. $\square$

### 4.2.5 Os grupos diedrais: algumas aplicações

Os grupos diedrais aparecem freqüentemente na arte e na natureza. Muitos projetos decorativos usados em revestimentos de assoalho, cerâmica e edifícios têm um dos grupos diedrais como um grupo de simetria. Logotipos corporativos são ricas fontes de simetria diédrica. O logotipo da Chrysler tem grupo de simetria $D_5$ e o da Mercedes-Benz tem grupo de simetria $D_3$. A estrela de cinco pontas tem o grupo de simetria $D_5$. Muitos animais marinhos, tais como estrela do mar, pepinos do mar, estrelas de penas e dólares de areia exibem padrões com simetria $D_5$.

Os químicos classificam as moléculas de acordo com sua simetria. Além disso, considerações de simetria são aplicadas em cálculos orbitais, na determinação de níveis de energia de átomos e moléculas e no estudo de vibrações moleculares. O grupo de simetria de uma molécula piramidal como a amônia ($NH3$), representada na Figura 4.23, tem o grupo de simetria $D_3$.

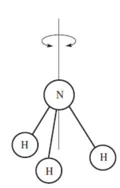



Figura 4.23: Uma molécula piramidal com grupo de simetria $D_3$.

Mineralogistas determinam as estruturas internas dos cristais, isto é, corpos rígidos nos quais as partículas são dispostas em padrões de repetição tridimensionais como o sal e o açúcar de mesa, estudando projeções bidimensionais de raios-X da composição atômica dos cristais. A simetria presente nas projeções revela a simetria interna dos próprios cristais. Padrões de simetria de ocorrência comum são $D_4$ e $D_6$ (ver Figura 4.24). Curiosamente, é matematicamente impossível que um cristal possua um padrão de simetria $D_n$ com $n = 5$ ou $n > 6$.

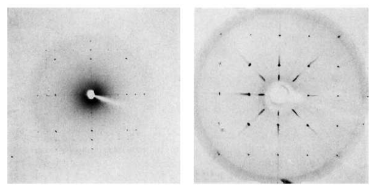


Figura 4.24: Imagens de difração de raios $X$ revelando padrões de simetria $D_4$ em cristais.

Muitos objetos e figuras têm somente simetria rotacional. Um grupo de simetria constituído pelas simetrias de rotação de $0^o$, $\frac{360^o}{n}$, $\frac{2(360^o)}{n}$, ... , $\frac{(n-1)360^o}{n}$, e nenhuma outra simetria é chamada um *grupo de rotação cíclica de ordem* $n$ e é denotado por $C_n$. Grupos de rotação cíclica, juntamente com grupos diedrais, são favoritos de artistas, designers e natureza. A Figura 4.25 ilustra com logotipos corporativos os grupos de rotação cíclica de ordens 2, 3, 4, 5, 6, 8, 16 e 20.

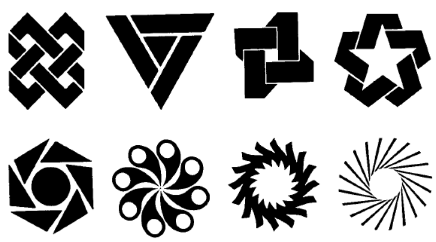


Figura 4.25: Logos com grupos de simetria de rotação cíclica.

### 4.2.6 Classificação de grupos finitos de rotações em $\mathbb{R}^3$

Poder-se-ia pensar que o conjunto de todos os possíveis grupos de simetria finita em três dimensões seria muito mais diverso do que o caso de duas dimensões. Surpreendentemente, este não é o caso. Por exemplo, mover em três dimensões introduz apenas três novos grupos de rotações. Esta observação foi feita pela primeira vez pelo físico e mineralogista Auguste Bravais em 1849, em seu estudo de possíveis estruturas de cristais. Aqui denotamos por $S_n$ o grupo de permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e por $A_n$ o subgrupo de $S_n$ das permutações pares. A principal referência desta seção é [9, Chapter 27].

**Teorema 4.9** *[9, Theorem 27.2] Os grupos finitos de rotações em $R^3$ são $C_n$, $D_n$, $A_4$, $S_4$ e $A_5$.*

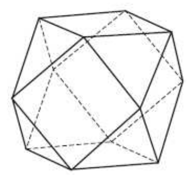


Figura 4.26: Exemplo.

**Exemplo:** A Figura 4.26, é composta por seis quadrados congruentes e oito triângulos equiláteros congruentes. Começamos por selecionar qualquer um dos quadrados. Obviamente, há quatro rotações que mapeiam este quadrado para si, e o quadrado designado pode ser girado para o local de qualquer um dos outros cinco. Assim, o grupo de rotação tem ordem $4 \cdot 6 = 24$ e $G$ é um dos grupo $C_{24}$, $D_{12}$ ou $S_4$. Mas cada um dos dois primeiros grupos tem exatamente dois elementos de ordem 4, enquanto que $G$ tem mais de dois. Assim, $G$ é isomorfo a $S_4$.

O grupo de rotações de um tetraedro (o grupo tetraédrico) é isomorfo a $A_4$. O grupo de rotações de um cubo ou um octaedro (o grupo octaédrico) é isomorfo a $S_4$.

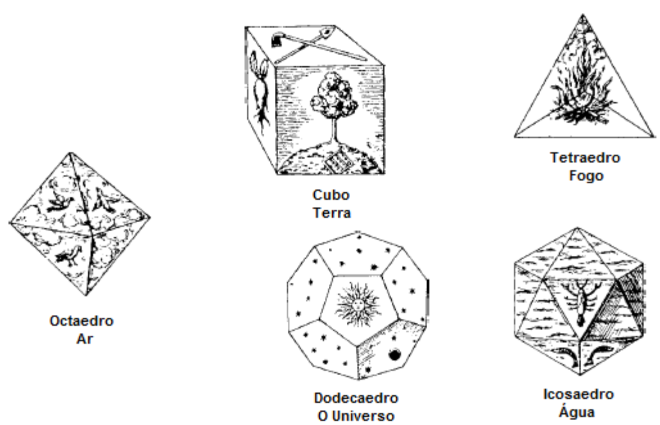



Figura 4.27: Os cinco sólidos regulares representados por Jhoannes Kepler em *Harmonices Mundi*, livro II (1619).

O grupo de rotações de um dodecaedro ou um icosaedro (o grupo icosaédrico) é isomorfo a $A_5$. Estes cinco sólidos estão ilustrados na Figura 4.27. As demonstrações dessas afirmações podem ser encontradas em [9, Chapter 27].

### 4.2.7 Grupos de frisos e grupos cristalográficos

A principal referência para esta seção é [9, Chapter 28].

#### Os grupos de frisos

Existe uma interessante coleção de grupos de simetria infinitos que surgem de desenhos periódicos em um plano. Existem dois tipos de tais grupos. Os grupos de frisos discretos são os grupos de simetria de padrões planos cujos subgrupos de translações são isomorfos a $\mathbb{Z}$. Esses tipos de desenhos são usados em faixas decorativas e padrões em jóias, como ilustrado na Figura 4.28. Em Matemática, exemplos familiares incluem os gráficos de $y = \text{sen}\, x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = |\text{sen}\, x|$, e $|y| = \text{sen}\, x$. Após analisarmos os grupos de frisos discretos, examinamos os grupos de simetria discreta de padrões planos cujos subgrupos de translações são isomorfos a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

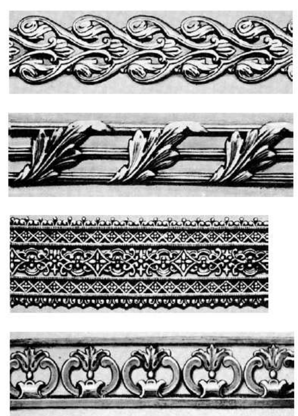


Figura 4.28: Padrões de frisos.

Grupos isomorfos, apesar de algebricamente serem "o mesmo", geometricamente podem ser bem diferentes. Veremos isto no caso de grupos de friso. Para enfatizar essa diferença, vamos tratá-los separadamente. Existem exatamente sete tipos de padrões de friso, como mostra a Figura 4.29. Em cada um dos casos, o padrão dado estende-se infinitamente em ambas as direções.

O grupo de simetria do Padrão I consiste apenas em translações. Deixando $x$ representar uma translação de uma unidade para a direita (ou seja, a distância entre dois R consecutivos é de uma unidade), podemos escrever o grupo de simetria do padrão I como

$$F_1 = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}.$$

O grupo do Padrão II, como o do Padrão I, é infinitamente cíclico. Deixando $x$ denotar uma reflexão com deslizamento, podemos escrever o grupo de simetria do Padrão II como

$$F_2 = \{x^n / n \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que o subgrupo de translação do Padrão II é apenas $< x^2 >$, onde $< x^2 >$ significa o grupo gerado por $x^2$.

O grupo de simetria para o Padrão III é gerado por uma translação $x$ e uma reflexão $y$ através da linha vertical tracejada. Existem um número infinito de eixos de simetria reflexiva, incluindo aqueles entre pares consecutivos de $R's$ opostos de frente. Todo o grupo é

$$F_3 = \{x^n y^m / n \in \mathbb{Z},\ m = 0 \ ou\ m = 1\}.$$

Observe que os dois elementos $xy$ e $y$ possuem ordem 2, geram $F_3$ e seu produto $(xy)y = x$ tem ordem infinita. Assim, $F_3$ é o grupo diedro infinito. Um fato geométrico sobre o Padrão III é que a distância entre pares consecutivos de eixos de reflexão vertical é a metade do comprimento do menor vetor de translação.

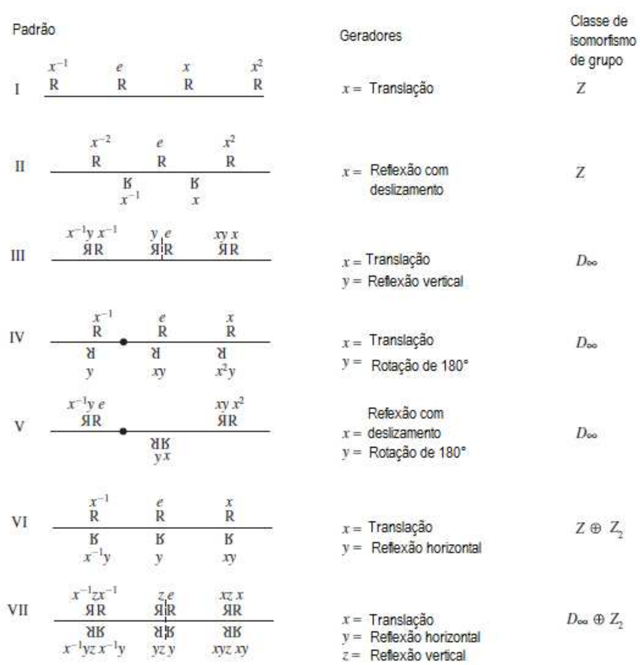



Figura 4.29: Os sete padrões de friso e seus grupos de simetrias.

No Padrão IV, o grupo de simetria $F_4$ é gerado por uma translação $x$ e uma rotação $y$ de

$180^o$ em torno de um ponto $p$ intermediário entre $R's$ consecutivos. Este grupo, como $F_3$, é também diedral infinito. Outro ponto de rotação está entre uma parte superior e uma parte inferior $R$. Como no Padrão III, a distância entre pontos consecutivos de simetria rotacional é a metade do comprimento do menor vetor de translação. Portanto,

$$F_4 = \{x^n y^m / n \in \mathbb{Z},\ m = 0 \ ou \ m = 1\}.$$

O grupo de simetria $F_5$ para o Padrão V é outro grupo diedral infinito gerado por uma reflexão com deslizamento $x$ e uma rotação $y$ de $180^o$ em torno do ponto $p$. Observe que o Padrão V tem simetria de reflexão vertical $xy$. Os pontos de rotação estão a meio caminho entre os eixos verticais de reflexão. Portanto,

$$F_5 = \{x^n y^m / n \in \mathbb{Z},\ m = 0 \ ou \ m = 1\}.$$

O grupo de simetria $F_6$ para o Padrão VI é gerado por uma translação $x$ e uma reflexão horizontal $y$. O grupo é

$$F_6 = \{x^n y^m / n \in \mathbb{Z},\ m = 0 \ ou \ m = 1\}.$$

Note que, uma vez que $x$ e $y$ comutam, $F_6$ não é diedral infinito. De fato, $F_6$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. O Padrão VI é invariante sob uma reflexão com deslizamento chamada, neste caso, de trivial, uma vez que o seu eixo é também um eixo de reflexão. Reciprocamente, uma reflexão com deslizamento não é trivial se seu eixo não é um eixo de simetria reflexiva para o padrão.

O grupo de simetria $F_7$ do Padrão VII é gerado por uma translação $x$, uma reflexão horizontal $y$, e uma reflexão vertical $z$. É isomorfo ao produto direto do grupo diedral infinito e $\mathbb{Z}_2$. O produto de $y$ e $z$ é uma rotação de $180^o$. Assim sendo,

$$F_7 = \{x^n y^m z^k / n \in \mathbb{Z},\ m = 0 \ ou \ m = 1,\ k = 0 \ ou \ k = 1\}.$$

Ao descrever os sete grupos de frisos, não explicamos explicitamente como a multiplicação é feita algébricamente. No entanto, cada elemento do grupo corresponde a alguma isometria, de modo que a multiplicação é a mesma que a composição de funções. Assim, sempre podemos usar a Geometria para determinar o produto de uma determinada seqüência de elementos.

### Os grupos cristalográficos

Os sete grupos de frisos catalogam todos os grupos de simetria que deixam um design invariável sob todos os múltiplos de apenas uma translação. No entanto, existem 17 tipos adicionais de grupos de simetria que surgem infinitamente ao repetir desenhos no plano. Estes grupos são os grupos de simetria de padrões planos cujos subgrupos de translações são isomorfos a $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Consequentemente, os padrões são invariantes sob combinações lineares de duas translações linearmente independentes. Estes 17 grupos foram inicialmente estudados por cristalógrafos do século XIX e são freqüentemente chamados de *grupos cristalográficos planos*. Outro termo usado ocasionalmente para estes grupos é *grupos de papel de parede*.

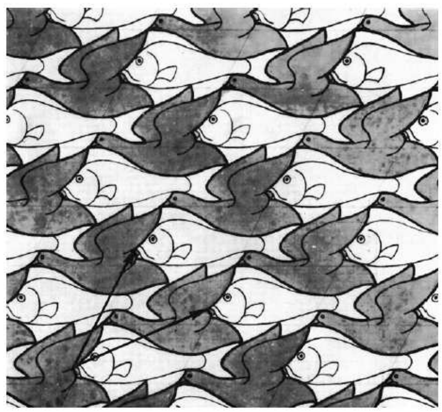


Figura 4.30: Estudo de Divisão Regular do Plano com Peixe e Aves, 1938. Desenho de Escher com grupo de simetria p1. As setas são vetores de translação.

Nossa abordagem aos grupos cristalográficos será geométrica. O objetivo é determinar qual dos 17 grupos de simetria planos corresponde um dado padrão periódico. Começamos com alguns exemplos.

O mais simples dos 17 grupos cristalográficos contém apenas translações. Na Figura 4.30, apresentamos uma ilustração de um padrão representativo para este grupo, como se o padrão fosse repetido para preencher todo o plano. A notação cristalográfica para ele é $p1$.

O grupo de simetria do padrão na Figura 4.31 contém translações e reflexões deslizantes. Este grupo não tem simetria rotacional ou reflexiva. A notação cristalográfica para ele é $pg$.

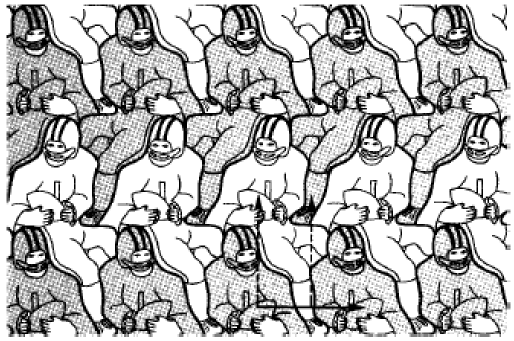


Figura 4.31: Tecelagem do tipo Escher por J. L. Teeters, com grupo de simetria $pg$ (desconsiderando sombreamento). A seta sólida é um vetor de translação. As setas tracejadas são vetores de reflexão com deslizamento.

A Figura 4.32 tem simetria translacional e simetria rotacional tripla, isto é, a figura pode ser girada $120^o$ em torno de um certo ponto e ser trazida para coincidência consigo mesma). A notação para este grupo é $p3$.

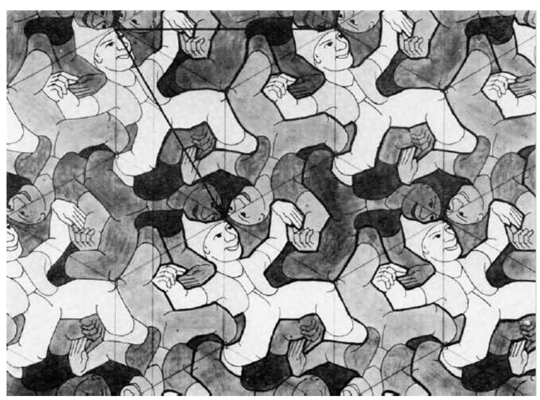


Figura 4.32: Estudo da Divisão Regular do Plano com Figuras Humanas, 1938. Desenho de Escher com simetria p3 (desconsiderando sombreamento). As setas inseridas são vetores de translação.

Padrões representativos para todos os 17 grupos cristalográficos planos, juntamente com as suas notações, são dados na Figura 4.33. A Figura 4.34 usa um motivo triangular para ilustrar as 17 classes de padrões de simetria.

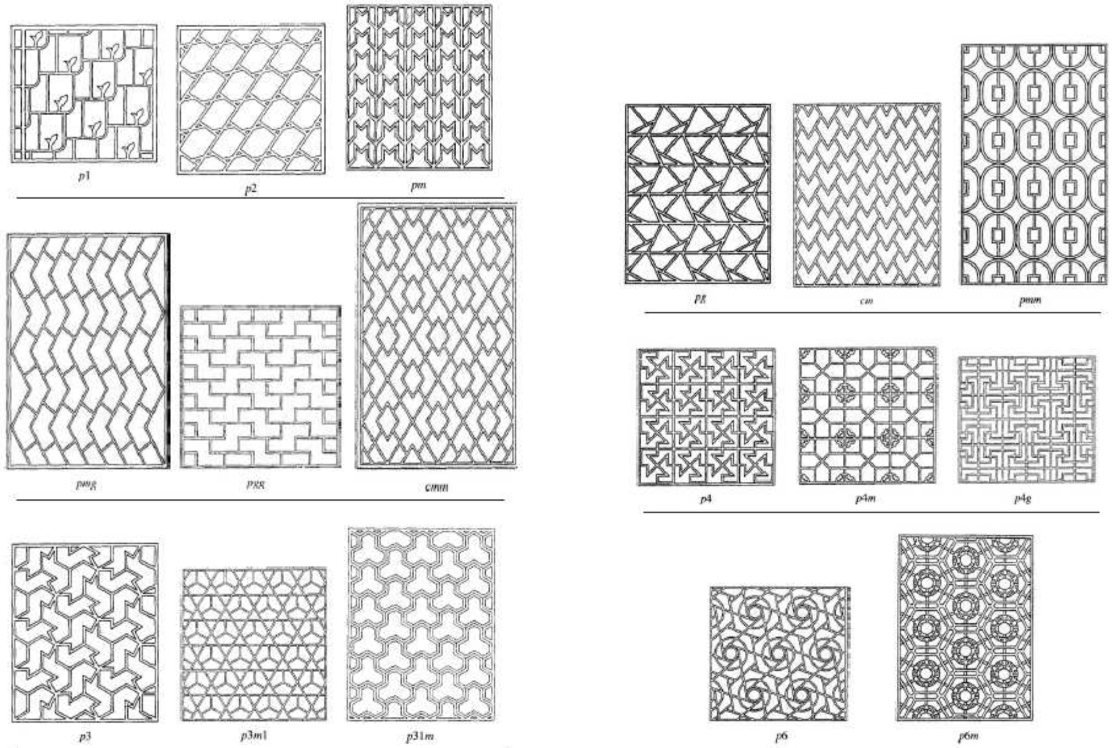


Figura 4.33: Os grupos de simetria do plano.

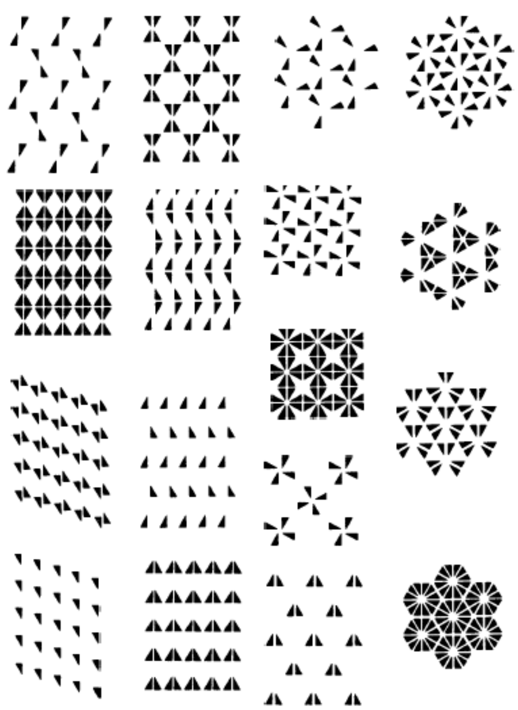


Figura 4.34: Os 17 padrões periódicos planos formados usando um motivo triangular.

# Capítulo 5

# Proposta de material para o ensino de Simetria

Nesta seção propomos um material didático sobre simetria para ser aplicado nas escolas de Ensino Básico. Apresentamos atividades interessantes para que os estudantes se sintam motivados a estudar Matemática olhando para a beleza da Geometria e como ela se integra com a Álgebra em vários temas. Entre os diversos conteúdos da Geometria, destacamos o estudo das simetrias de figuras geométricas e suas aplicações, como à Cristalografia, por exemplo, e que pode ser abordado em seus aspectos algébricos e geométricos. Identificamos a simetria que há na natureza e mostramos também várias aplicações às ciências. Faremos uma abordagem intuitiva e matemática da simetria, procurando sanar as deficiências apresentadas nos livros didáticos. Os diversos conceitos envolvidos nesse tema serão tratados de forma gradual e distribuídos de acordo com a série em curso. Ao longo deste capítulo introduzimos alguns conceitos de Geometria e Álgebra que são utilizados no estudo de simetria e sugerimos atividades didáticas para o estudo desses no Ensino Fundamental e Médio.

## 5.1 Teoria e atividades propostas para as séries finais do Ensino Fundamental

### 5.1.1 Atividades para o $6^o$ ano

#### Objetivos

1. Reconhecer que uma figura tem simetria quando puder ser movida no plano ou no espaço de modo a se obter a mesma figura por sobreposição.

2. Desenvolver as ideias intuitivas da simetria de reflexão, rotação e translação.

3. Reconhecer a simetria de figuras, objetos e na natureza.

4. Identificar figuras simétricas e assimétricas.

5. Identificar os eixos de simetria de uma figura.

6. Fazer a reflexão (em relação a uma reta) e a rotação (girar em torno de um ponto sob o ângulo de $90^o$, $180^o$ ou $270^o$) de uma figura qualquer no Geogebra.

7. Fazer a translação de uma figura usando dobraduras.

**Simetria**

É possível encontrar simetria em toda parte no mundo que nos rodeia. Na natureza, ela ocorre com grande frequência: no corpo humano, nas imagens em um espelho, no reflexo na água, nas asas de uma borboleta, nas pétalas de uma flor, numa concha do mar.

Dizemos que uma figura é *simétrica* ou apresenta simetria quando é possível dobrá-la de modo que as duas partes coincidam (a "dobra"é o eixo de simetria) denominada *simetria de reflexão* ou ao girá-la em torno de um ponto, obtemos a figura na posição original a qual chamamos de *simetria de rotação*. Podemos também deslocar uma figura verticalmente ou horizontalmente de modo a não deformá-la obtendo, assim, uma *simetria de translação*.

Observe as figuras simétricas abaixo. Todas apresentam simetria de reflexão e podemos identificar os seus eixos de simetria. Em algumas delas podemos observar também uma simetria de rotação em torno do centro da figura.

Figura 5.1: Figuras simétricas.

A simetria é muitas vezes relacionada à ideia de perfeição, de harmonia, de mesma forma e tamanho. Várias das ideias que temos de beleza estão intimamente ligadas a princípios de simetria. Por esse motivo ela passou a ser um elemento fundamental em vários momentos da cultura humana. A Arte torna-se mais rica quando a simetria se une a movimentos das figuras e padrões geométricos. Muitas vezes, artistas plásticos utilizam simetria em esculturas ou em pinturas para obter certa harmonia em suas obras. A simetria também pode ser observada na Arquitetura e em objetos da nossa vida comum.

Figura 5.2: Simetria na Arte, Arquitetura, logotipos e em objetos da vida comum.

Se uma figura não apresenta simetria dizemos que ela é *assimétrica*. Note que nas figuras abaixo não podemos traçar um eixo de simetria.

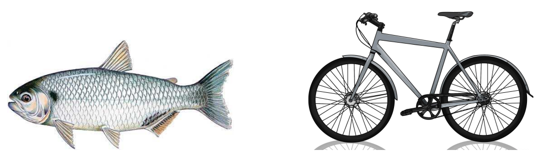


Figura 5.3: Figuras assimétricas.

**Atividades**

1. Faça a seguinte dobradura.
    - Comece dobrando três vezes um papel de forma quadrada.
    - Crie uma figura qualquer e desenhe-a junto à última dobra.
    - Recorte pelas linhas e abra o papel.
    - A figura obtida é simétrica?
    - Qual o tipo de simetria existente?
    - A figura obtida possui eixos de simetria? Quantos?
2. Faça a seguinte dobradura:
    - Dobre e recorte uma folha de revista, de modo a obter um quadrado dobrado ao meio.
    - Faça mais uma dobra de forma a obter o quadrado divido em quatro partes.
    - Segurando a ponta da folha faça recortes usando diferentes possibilidades.
    - Qual o tipo de simetria existente?

- De quantos graus é o ângulo de rotação?
- E se fizermos mais uma dobra na folha de forma a dividir o quadrado em 8 partes iguais? quais as conclusões podemos tirar?

3. Faça a seguinte dobradura.
   - Pegue uma folha qualquer.
   - Dobre a folha várias vezes como se estivesse fazendo um leque largo.
   - Após fazer as dobras, desenhe uma figura em uma das faces.
   - Recorte e desfaça o leque.
   - O que você pode concluir?

Figura 5.4: Simetria de reflexão, rotação e translação.

4. Realize a atividade abaixo no Geogebra.
   - Insira uma figura no Geogebra.
   - Desenhe uma reta qualquer.
   - Faça a reflexão da figura em relação à reta construida.
   - Movimente os pontos destacados na figura.
   - O que você pode concluir?
5. Realize a atividade abaixo no Geogebra.
   - Insira uma figura no Geogebra.
   - Desenhe um ponto qualquer.
   - Faça a rotação da figura em torno do ponto desenhado sob os ângulos de $90^o$, $180^o$ ou $270^o$.
   - O que você pode concluir?
6. Realize a atividade abaixo no Geogebra.
   - Insira uma figura no Geogebra.

- Desenhe um segmento orientado chamado *vetor*.
- Faça a translação da figura.
- Movimente os pontos $A$ e $B$ da figura.
- O que você pode concluir?

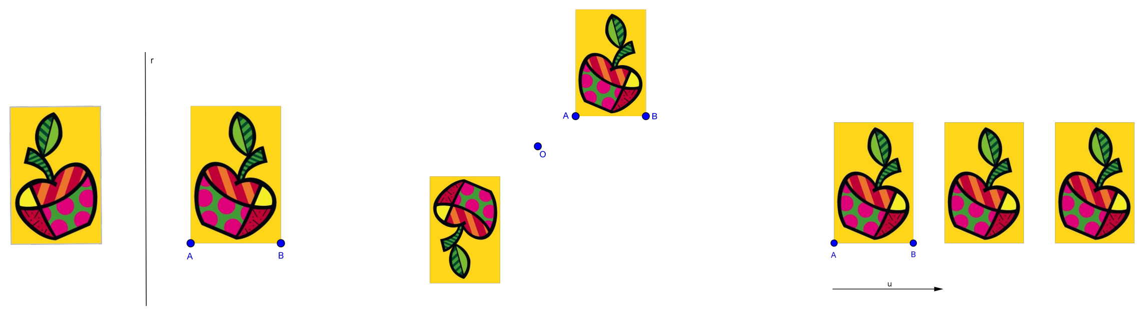


Figura 5.5: Reflexão em relação a uma reta, rotação em torno de um ponto e translação.

7. Quais as letras maiúsculas do nosso alfabeto são simétricas? Em cada uma delas desenhe o(s) eixo(s) de simetria.

8. Entre os 10 algarismos que utilizamos no sistema decimal, quantos são simétricos?

9. Recorte de livros, revistas ou imprima da internet três figuras assimétricas e três simétricas, destacando seus eixos de simetria.

### 5.1.2 Atividades para o $7^o$ ano

**Objetivos**

1. Definir intuitivamente as simetrias axial e central.

2. Usar a simetria axial e a central para fazer a simétrica de uma figura geométrica no Geogebra.

3. Reconhecer que a simetria é uma transformação que preserva distâncias.

4. Reconhecer que dois pontos são simétricos se estão a uma mesma distância da reta de reflexão, porém em lados opostos.

5. Construir mosaicos no Geogebra usando as simetrias de reflexão, rotação e translação de figuras geométricas.

### Simetria

Uma figura no plano é simétrica se podemos dividi-la em partes de alguma maneira, de tal modo que as partes resultantes desta divisão, coincidam perfeitamente, quando sobrepostas.

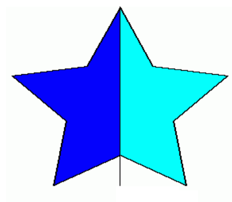


Figura 5.6: Simetria.

As simetrias podem ser de diferentes tipos. Os dois tipos principais são as simetrias *axiais* e as simetrias *centrais*.

A simetria axial ou simetria em relação a uma reta é aquela na qual pontos, objetos ou partes de objetos são a imagem espelhada um do outro em relação à reta dada, chamada *eixo de simetria*. O eixo de simetria é a mediatriz do segmento que une os pontos correspondentes.

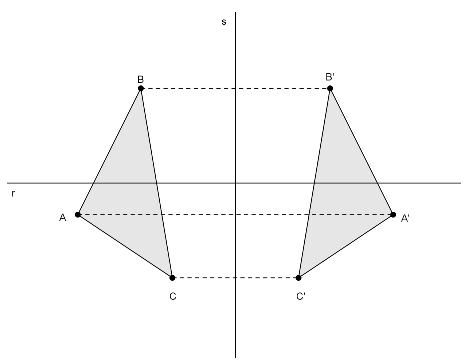



Figura 5.7: Simetria axial.

### Pontos simétricos

Dizemos que dois pontos são simétricos em relação a uma reta fixa, quando um é a imagem espelhada do outro em relação à reta fixa. Esta reta é chamada *eixo de simetria*.

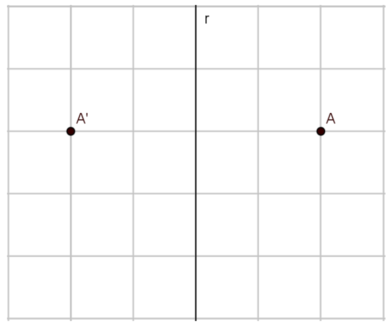



Figura 5.8: Simétrico de um ponto em relação à reta $r$.

Na figura, a reta $r$ é o eixo de simetria e os pontos $A$ e $A'$ são simétricos em relação a esta reta. Construa a Figura 5.8 no Geogebra e siga os passos descritos abaixo:

- Mova o ponto $A$ e observe como muda a sua imagem espelhada $A'$.
- Mova a reta e observe que o ponto $A'$ é a imagem espelhada de $A$ em relação a esta reta.
- Clique em "Distância, Comprimento ou Perímetro" para mostrar a distância do ponto $A$ e do Ponto $A'$ da reta $r$. Mova o ponto $A$ e a reta. Repare que o eixo de simetria é sempre a mediatriz do segmento que liga os pontos $A$ e $A'$.

Observe a malha quadriculada abaixo:

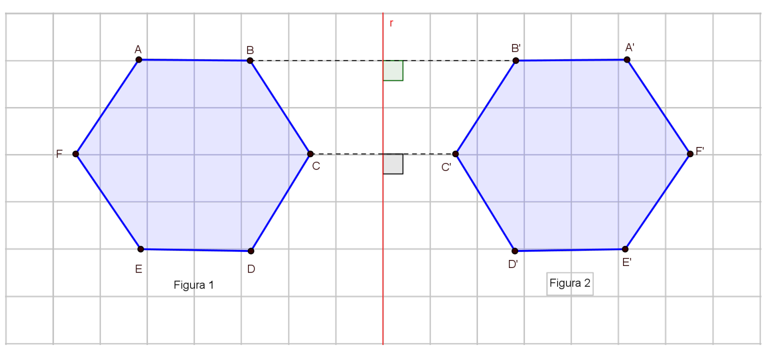



Figura 5.9: Figuras com simetria de reflexão em relação à reta $r$.

As figuras 1 e 2 são simétricas em relação à reta $r$. Podemos observar qua cada ponto da Figura 1 tem um ponto correspondente na Figura 2 que é o seu simétrico em relação à reta $r$. Isso sempre ocorre com duas *figuras simétricas* em relação a uma reta: cada ponto de uma delas é simétrico a um ponto da outra em relação à mesma reta, e vice-versa. Em outras palavras, dizemos que esta reta, ou seja, o eixo de simetria é a mediatriz do segmento de reta que une estes dois pontos.

A simetria central ou rotacional é aquela em que um ponto, objeto ou parte de um objeto podem ser girados em relação a um ponto fixo, central, chamado *centro da simetria*, de tal maneira que essas partes ou objetos coincidam um com o outro um determinado número de vezes.

Observe que qualquer reta que passe pelo centro de simetria divide o objeto em duas imagens espelhadas e que o centro de simetria é o ponto médio dos segmentos que unem os pontos correspondentes.

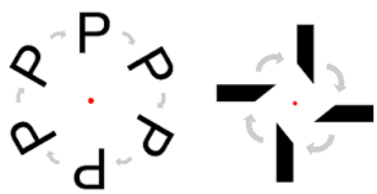



Figura 5.10: Simetria central.

Dizemos que dois pontos $A$ e $A'$ são simétricos em relação a um terceiro ponto $O$, quando $O$ é ponto médio do segmento que une $A$ e $A'$. Neste caso, o ponto O é chamado *centro da simetria*.

Na figura abaixo, estão representados vários pontos e seus simétricos em relação a simetria de centro em O.

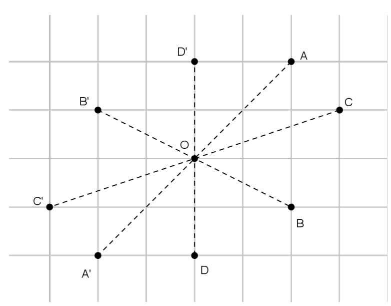



Figura 5.11: Pontos simétricos com relação a um ponto.

Construa a Figura 5.11 no Geogebra e siga os passos a seguir:

- Mova o centro de simetria e observe como mudam as posições dos pontos simétricos.
- Mova um dos pontos e observe o que acontece com o seu simétrico.

- Por uma simetria central, qual é o simétrico do centro de simetria?

**Atividades**

1. Desenhe no Geogebra figuras geométricas e obtenha as simétricas de cada uma a partir de simetrias axial e central.

2. Desenhe no Geogebra uma figura simétrica a outra em relação a um eixo de simetria. Verifique que os pontos simétricos distam igualmente da reta de reflexão.

    - A figura desenhada será a refletida da outra em relação a reta $r$.
    - Clique em "Distância, Comprimento ou Perímetro" para mostrar a distância de um ponto e de seu simétrico até a reta de reflexão. Mova a reta e comprove que pontos simétricos estão sempre à mesma distância do eixo de simetria.
    - Modifique a figura arrastando os pontos que a definem. Veja como as novas figuras são refletidas em relação a reta $r$.
    - Que pontos do plano permanecem fixos por uma reflexão axial?

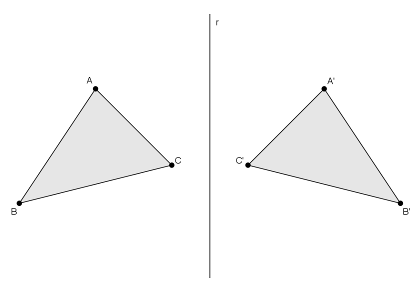



Figura 5.12: Figura simétrica a outra em relação a um eixo de simetria.

3. Faça um mosaico usando figuras geométricas usando simetria de reflexão axial e central.

### 5.1.3 Atividades para o $8^o$ ano

**Objetivos**

1. Defirnir intuitivamente as simetrias de translação, rotação e reflexão.

2. Construir figuras simétricas no Geogebra em relação a uma reta e a um ponto.

3. Reconhecer que a distância entre um ponto e a reta de reflexão é dada perpendicularmente à reta.

4. Identificar os eixos de simetria nas figuras geométricas e suas propriedades.

5. Identificar os eixos de simetria de um polígono regular de $n$ lados.

### Simetria

Dizemos que duas figuras são simétricas se coincidirem perfeitamente por sobreposição, a partir de uma mudança de posição ou movimento rígido, isto é, movimentos que preservam a forma e o tamanho.

Os tipos de simetria são: rotação, translação e reflexão.

1. **Rotação:** Podemos girar uma figura em torno de um ponto segundo um determinado ângulo, no sentido horário ou anti-horário, e obter outra figura congruente à original. A essa transformação chamamos *simetria de rotação.*

   Quando o giro em uma rotação for de $180^o$, no sentido horário ou anti-horário, dizemos que esse é um caso de *simetria central*.

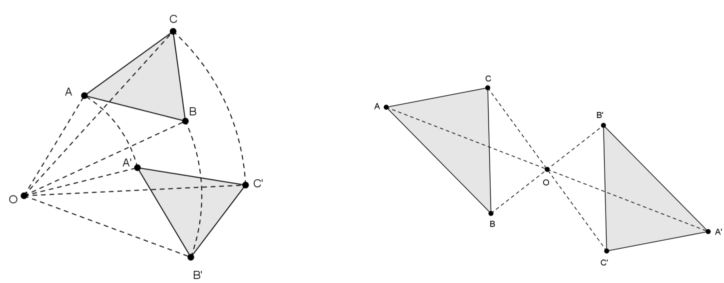



Figura 5.13: Simetria de Rotação.

2. **Translação:** Podemos deslocar (transladar ou transportar) uma figura no plano de acordo com uma distância, uma direção e um sentido, de modo que a figura obtida seja congruente à original. A essa transformação chamamos *simetria de translação.*

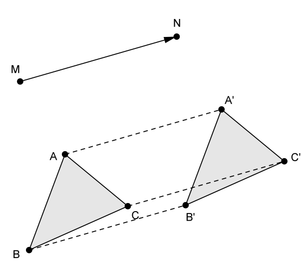



Figura 5.14: Simetria de Translação.

3. **Reflexão:** Dizemos que as figuras são *simétricas* em relação à reta $r$, denominada *eixo de simetria*, quando qualquer ponto $P$ de uma das figuras possui um correspondente $P'$ na outra figura que é o simétrico de $P$ em relação à reta $r$. Diz-se também que uma das figuras foi obtida da outra por uma *reflexão* em relação à reta $r$. Esse tipo de simetria é uma *simetria axial* ou de *reflexão em relação a uma reta*.

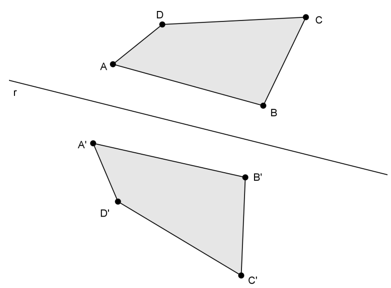



Figura 5.15: Simetria de Reflexão.

Na Figura acima, se fizermos uma dobra sobre a reta $r$, um dos polígonos ficará sobreposto ao outro, ou seja, as duas figuras serão coincidentes. Isso significa que em uma simetria axial uma figura e a figura simétrica a ela têm lados correspondentes com medidas iguais e ângulos correspondentes com medidas iguais. Elas são figuras *congruentes*.

**Distância de um ponto a uma reta**

Na figura a seguir os triângulos $ABC$ e $A'B'C'$ são simétricos em relação ao eixo $r$. Observe os pontos $A$, $A'$, $P$ e $Q$.

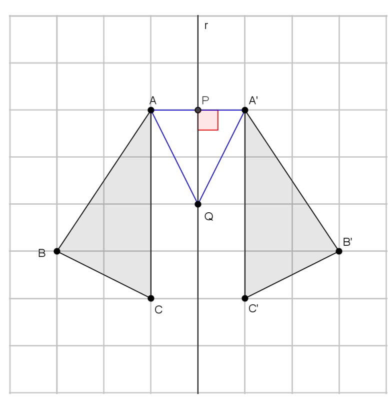



Figura 5.16: Distância de um ponto a uma reta.

As retas $AA'$ e $r$ são perpendiculares. Note que a medida de $AP$ é menor que a medida de qualquer outro segmento de reta com uma das extremidades em $A$ e a outra em um outro ponto da reta $r$ (diferente de $P$).

Fazer a demonstração usando o Teorema de Pitágoras.

Dizemos que a *distância do ponto $A$ à reta $r$* é a medida deste segmento de reta $AP$, ou seja, é a medida do menor segmento de reta que une o ponto $A$ a qualquer ponto da reta $r$.

Observe que a distância do ponto $A$ à reta $r$ é igual a distância do ponto $A'$ à reta $r$ e $A$ e $A'$ são pontos de $AA'$, que é perpendicular a $r$. Os pontos $A$ e $A'$ são *simétricos em relação a $r$*.

### Figuras com simetria em relação a mais de um eixo de simetria

Observe estes desenhos:

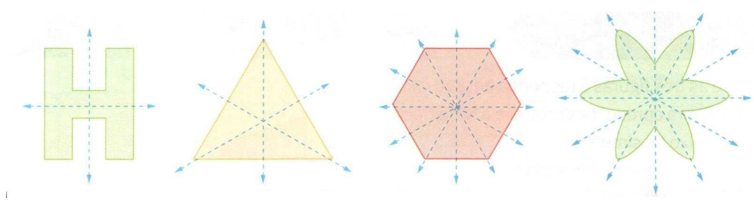


Figura 5.17: Figuras com mais de um eixo de simetria.

### Atividades

1. Desenhe no Geogebra uma figura simétrica a outra em relação a uma reta e a um ponto.

2. Desenhe no Geogebra uma figura simétrica a outra por smetria de rotação e translação.

3. Observe o triângulo equilátero abaixo.

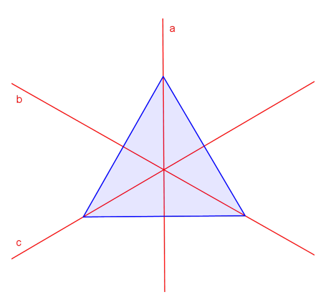



Figura 5.18: Eixos de simetria do triângulo equilátero.

Note que as retas $a$, $b$, $c$ são eixos de simetria deste triângulo. Por isso, dizemos que o triângulo equilátero possui 3 eixos de simetria, que são as medianas dos lados desse triângulo.

Os triângulos isósceles e escaleno são simétricos em relação a algum eixo? Em caso afirmativo, quantos eixos de simetria tem cada um? Faça um desenho no Geogebra para ilustrar.

4. O retângulo é uma figura simétrica que tem dois eixos de simetria que são as medianas dos seus lados. Veja a Figura 5.19.

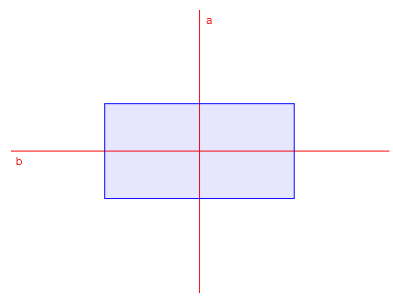



Figura 5.19: Eixos de simetria do retângulo.

E o quadrado é uma figura simétrica? Quantos eixos de simetria ele possui? E os demais quadriláteros, como o losango, paralelogramo oblíquo, trapézio isósceles e escaleno, possuem simetria? Quantos eixos de simetria cada um possui? Quais as características desses eixos? Faça um desenho no Geogebra para ilustrar.

5. O que se pode concluir a respeito dos eixos de simetria de um polígono regular de $n$ lados?

6. A circunferência é uma figura simétrica? Em caso afirmativo, quantos eixos de simetria ela tem? O que se pode dizer a respeito dos eixos de simetria da circunferência? Estabeleça uma propriedade da circunferência que a diferencie dos demais polígonos.

### 5.1.4 Atividades para o $9^o$ ano

#### Objetivos

1. Definir os tipos de simetria: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento.

2. Reconhecer que a simetria é uma isometria, ou seja, uma transformação que preserva distâncias.

3. Fazer reflexões, rotações, translações e reflexões com deslizamento de figuras geométricas no Geogebra.

4. Identificar as características das coordenadas dos pontos simétricos no plano cartesiano.

**Transformações no plano**

Em Geometria, dizemos que duas figuras são congruentes quando podemos fazê-las coincidir perfeitamente por meio de uma mudança de posição. Translações, rotações e reflexões são movimentos do plano que preservam as distâncias entre dois pontos, isto é, estas transformações mudam a posição dos objetos mantendo a sua forma e o seu tamanho originais, dando origem a figuras congruentes. Por isso estas transformações, são também chamadas de *isometrias* (do grego: mesma medida) ou *movimentos rígidos*.

1. **Translação:** Uma figura sofre uma translação quando se desloca, sem se deformar, paralelamente a uma direção fixada. Podemos caracterizar qualquer translação, indicando o deslocamento total na direção horizontal, que chamaremos de $x$ e o deslocamento total na direção vertical, que chamaremos de $y$. Estas grandezas determinam um segmento orientado de reta, chamado *vetor de translação*, de coordenadas $(x, y)$. A Figura 5.20 ilustra esta idéia.

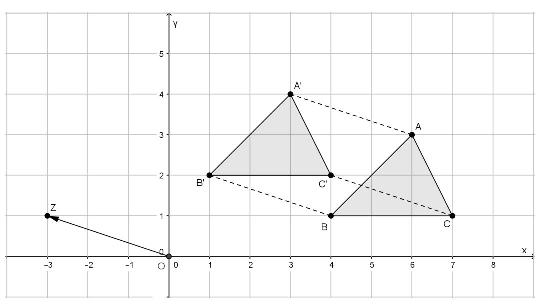



Figura 5.20: Simetria de translação.

Na figura, o triângulo $ABC$ é o original e o triângulo $A'B'C'$ o transladado. O vetor de translação é determinado pelo segmento orientado de reta $OZ$. Note que, dependendo dos sinais de $x$ e $y$, coordenadas do vetor de translação $OZ$, a figura se desloca $|x|$ unidades para a direita $(x > 0)$ ou para a esquerda $(x < 0)$ e $|y|$ unidades para cima $(y > 0)$ ou para baixo $(y < 0)$.

A propriedade mais importante da translação é o fato desta transformação não apresentar *pontos fixos*.

Para entender o que quer dizer pontos fixos, imagine um quadrado desenhado numa folha de papel sobre uma mesa e marque um ponto na mesa fora do papel no qual você deseja que um dos vértices do quadrado seja colocado após uma movimentação da folha. Para *transladar o quadrado*, você deve escorregar a folha de papel na direção da posição final que o quadrado deve atingir. Ao fazermos isso, podemos observar que não há nenhum ponto da folha de papel que permaneça no lugar onde estava antes de iniciarmos o movimento. Em outras palavras, todos os pontos do quadrado, na realidade todos os pontos da folha inteira se moveram para uma nova posição como resultado da translação efetuada.

2. **Rotação:** A rotação é obtida quando fixamos um ponto do plano e giramos a figura de um ângulo $\alpha$ qualquer, ao redor deste ponto.

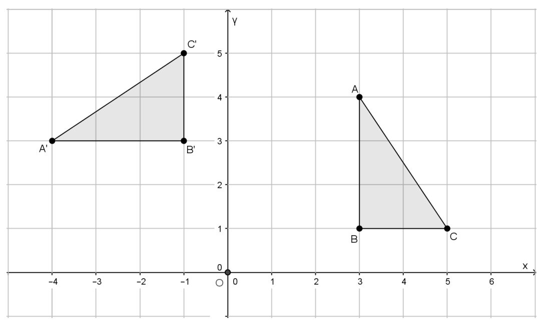



Figura 5.21: Rotação de $90^o$ em torno do ponto $O$.

Cada rotação tem um único ponto fixo, isto é, um ponto que não muda de posição sob o efeito da rotação. Este ponto é chamado o *centro da rotação*.

Na prática, podemos desenhar um quadrado numa folha de papel e prender a folha com um alfinete no centro do quadrado e girar a folha no sentido horário ou anti-horário. Observamos que "tudo se mexe" com exceção do centro do quadrado preso pelo alfinete, que é o centro de rotação.

3. **Reflexão:** Dizemos que duas figuras são *simétricas em relação a uma reta* quando uma é a imagem espelhada da outra em relação à reta considerada, chamada *eixo de simetria*. Isto quer dizer que se desenharmos as figuras numa folha de papel e dobrarmos o papel de tal modo que a dobra coincida com a reta em questão, as duas figuras coincidirão perfeitamente. Isto acontece porque pontos simétricos estão em lados opostos, mas à mesma distância do eixo de simetria, isto é, o eixo de simetria é a mediatriz do segmento de reta que une estes dois pontos.

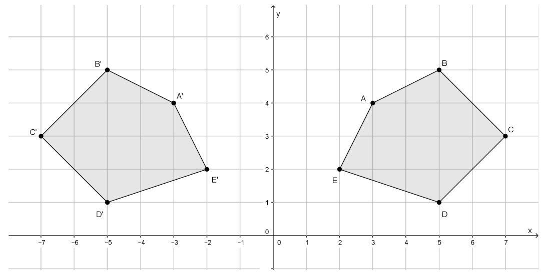


Figura 5.22: Os polígonos são simétricos em relação ao eixo $y$ .

Reflexões são isometrias que têm infinitos pontos fixos. Nenhum ponto que pertença ao eixo de reflexão se move sob o efeito da reflexão em relação a este eixo.

As reflexões são especiais, também, por introduzirem uma outra propriedade geral das isometrias. Dizemos que reflexões, ao contrário de translações e rotações, invertem a orientação do plano.

Imagine uma figura qualquer no plano e a sua imagem por uma isometria. Sabemos que, para cada ponto $P$, da figura original, existe um correspondente ponto $P'$ na figura transformada. Imagine, também, que o ponto $P$ se movimente sobre a figura original. À medida que o ponto $P$ percorre a figura original, o seu correspondente $P'$, percorre a figura transformada. Dizemos que uma isometria preserva a orientação do plano, quando o ponto $P'$ percorre a figura transformada mantendo o mesmo sentido de percurso determinado pelo ponto $P$, ao percorrer a figura original. Em outras palavras, se o ponto $P$ percorre a figura no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido anti-horário), este mesmo sentido de percurso deve ser mantido pelo ponto $P'$, seu correspondente, ao percorrer a figura transformada. Translações e rotações preservam a orientação do plano, já as reflexões invertem essa orientação.

Um outro modo de entender o significado desta propriedade é, novamente, imaginar um quadrado desenhado numa folha de papel colocada em cima de uma mesa. Para transladar ou rodar o quadrado, a única coisa que precisamos fazer é deslizar a folha de papel sobre a mesa. Ao contrário, para refletirmos o quadrado, em relação a um eixo qualquer, é necessário levantar a folha e dobrá-la sobre este eixo. Neste sentido, as primeiras transformações preservam a orientação do plano. Já as reflexões invertem esta orientação.

4. **Reflexão com deslizamento:** A reflexão com deslizamento é uma combinação de reflexão e translação. Esta transformação se caracteriza por uma reflexão axial seguida por uma translação paralela ao eixo de reflexão ou vice-versa. Observe que este é o tipo de combinação de reflexões e translações na qual a ordem na qual as transformações são efetuadas não altera o resultado final. Tanto faz transladarmos e depois refletirmos a figura como refletirmos e depois transladarmos: a posição da figura trans-

formada após a aplicação das duas transformações sucessivas, será a mesma. As figuras abaixo, ilustram o efeito geométrico da aplicação deste tipo de transformação sobre um quadrado.

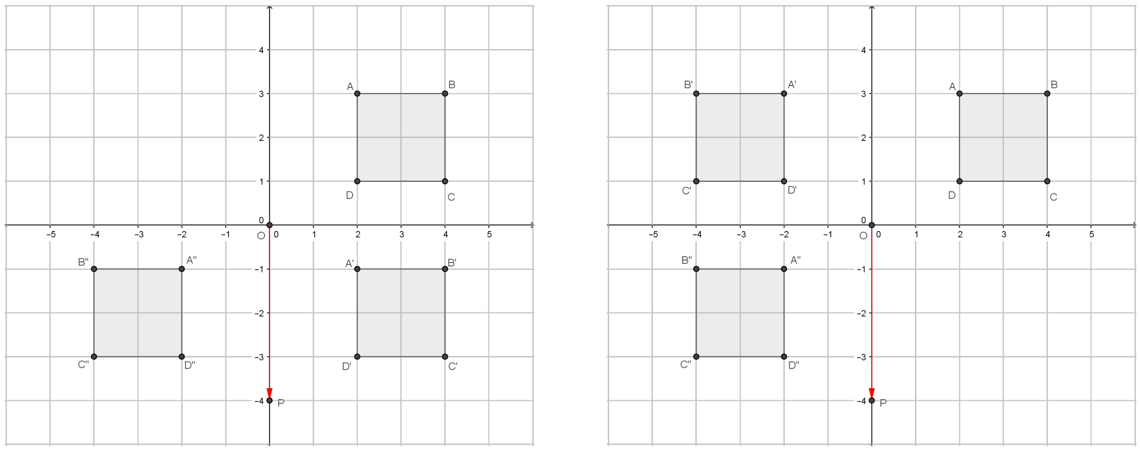



Figura 5.23: Reflexão com deslizamento.

Como as translações, reflexões com deslizamento não têm nenhum ponto fixo. Num primeiro momento você poderia imaginar que os pontos sobre o eixo de reflexão permanecem fixos por esta transformação, mas basta lembrar da nossa simulação usando um desenho numa folha de papel para perceber que, ao deslizar a folha sobre a mesa para que o quadrado atinja a sua posição final, todos os pontos do eixo de simetria deslizam também na mesma direção do movimento.

Como as reflexões, reflexões com deslizamento invertem a orientação do plano, pois para executá-las com a folha de papel, é preciso, em algum momento, dobrar a folha sobre si mesma e, assim, obter uma imagem espelhada do quadrado em relação à dobra (eixo de reflexão).

## Atividades

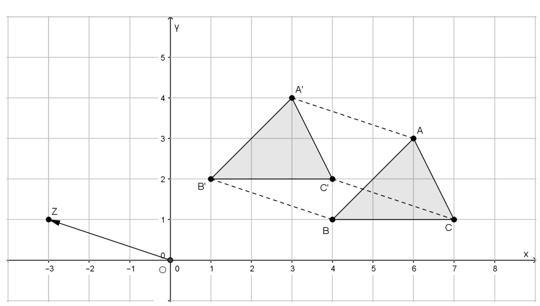



Figura 5.24: Simetria de translação.

As atividades a seguir foram adaptadas de [26] e serão realizadas no Geogebra.

1. Na Figura 5.24, o vetor $OZ$ determina a translação a ser aplicada ao triângulo $ABC$. Verifica-se isto realizando os passos a seguir:

   - Altere o vetor $OZ$ (para isso movimente o ponto $Z$) e observe como varia a posição do triângulo imagem $A'B'C'$.
   - Selecione a opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" e meça os segmentos que ligam os vértices $A$, $B$ e $C$ às suas imagens $A'$, $B'$ e $C'$. O que podemos concluir em relação a estes segmentos e ao vetor $OZ$?
   - Teste as suas conclusões com triângulos diferentes. Para isso altere o triângulo dado e repita os passos anteriores.
   - Observe o que ocorre quando aplicamos ao triângulo original uma translação determinada pelo vetor $OZ = (x, y)$, se
     - $x$ e $y$ são positivos;
     - $x$ e $y$ são negativos;
     - $x$ é positivo e $y$ é negativo;
     - $x$ é negativo e $y$ é positivo;
     - $x$ é zero ou $y$ é zero.

2. Conhecendo-se as coordenadas do vetor de translação é possível determinar as coordenadas dos pontos transladados e, consequentemente, determinar a nova posição de uma figura após a translação. As atividades a seguir, mostram como isso pode ser feito.

   - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, quatro unidades para cima?
   - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, duas unidades para baixo?
   - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção horizontal, oito unidades para a esquerda?
   - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção horizontal, três unidades para a direita?
   - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, sete unidades para baixo, seguida de uma tranlação, na direção horizontal, quatro unidades para a direita? Quais as coordenadas do vetor que define esta translação?

3. Nos itens abaixo, considere $n$ e $m$ números reais positivos.

    - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, $n$ unidades para cima?
    - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, $n$ unidades para baixo?
    - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção horizontal, $n$ unidades para a esquerda?
    - A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção horizontal, $n$ unidades para a direita?
    - Sejam $n$ e $m$ números reais positivos. A que mudança nas coordenadas dos pontos que definem uma figura corresponde uma translação, na direção vertical, $n$ unidades para baixo, seguida de uma tranlação, na direção horizontal, $m$ unidades para a direita? Qual o vetor de translação, neste caso?
    - Invertendo-se a ordem em que as translações são feitas no item anterior, o resultado se altera?

4. Na figura abaixo, o ponto $O$ é o centro de rotação. Altere o centro, o ângulo de rotação e os pontos $A$, $B$ e $C$. Observe como rotações transformam figuras planas.

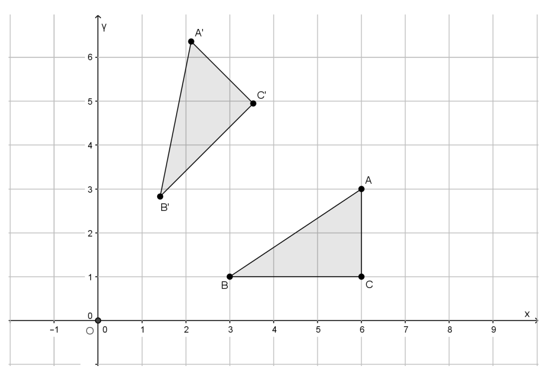



Figura 5.25: Rotação de $45^o$ em torno do ponto $O$.

- Qualquer que seja o ângulo de rotação escolhido, qual o transformado do centro da rotação?
- Para quais ângulos de rotação as duas figuras coincidirão, qualquer que seja o centro da rotação?
- Gire a figura de $180^o$. Como é possível descrever esta transformação em termos de simetrias?

- Onde deve estar localizado o centro de rotação para que, ao fazermos uma rotação de $120^o$, um triângulo equilátero não mude de posição? Quais outras rotações não mudam a posição de um triângulo equilátero?

5. Na figura abaixo o ponto $A'$ é a imagem do ponto $A$ por uma rotação de centro em $O$ e ângulo de $90^o$. As coordenadas do ponto $A = (x, y)$ podem ser modificadas alterando-se os valores de $x$ e $y$, respectivamente. Observe que o ponto $A'$ é sempre o transformado de $A$ por uma rotação de centro em $O$ e ângulo indicado. As atividades a seguir, relacionam as coordenadas de $A$ e $A'$ para algumas rotações particulares.

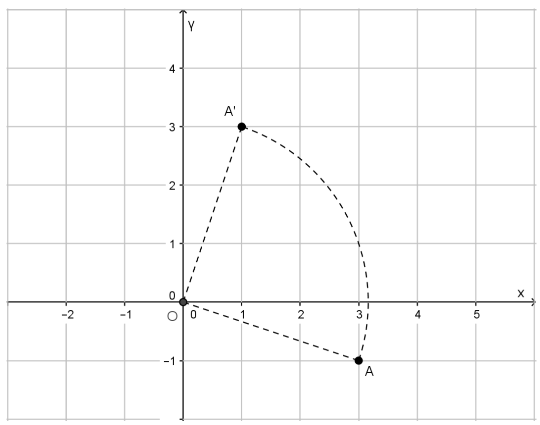



Figura 5.26: Rotação de $90^o$ do ponto $A$ em torno do ponto $O$.

- Fixe o ângulo de rotação em $90^o$. Faça o ponto $A$ percorrer os quatro quadrantes. Observe como as coordenadas de $A$ e $A'$ estão relacionadas. Se $A$ é o ponto $(x, y)$, quais são as coordenadas do seu transformado por uma rotação de $90^o$?
- Idem para uma rotação de $180^o$.
- Idem para uma rotação de $270^o$.
- Repita as atividades anteriores para os mesmos ângulos medidos no sentido dos ponteiros do relógio, isto é, para ângulos de $-90^o$, $-180^o$ e $-270^o$. A que rotações de ângulo positivo (medidos no sentido anti-horário) corresponde cada uma delas?
- Que mudança nas coordenadas de um ponto $(x, y)$, corresponde a uma rotação de $90^o$ no sentido anti-horário, em relação à origem?
- Que mudança nas coordenadas de um ponto $(x, y)$, corresponde a uma rotação de $180^o$ no sentido anti-horário, em relação à origem?
- Qual o efeito geométrico obtido sobre a figura original, neste último caso?

6. Construa um polígono qualquer no plano cartesiano.

- Faça a reflexão do polígono em relação ao eixo $y$.
- Selecione a opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" e meça a distância de um ponto do polígono original e de seu simétrico até o eixo $y$. Mova um dos pontos do polígono e comprove que pontos simétricos estão sempre à mesma distância do eixo de simetria.
- Modifique o polígono arrastando os pontos que o definem e veja como as novas figuras são refletidas em relação ao eixo $y$.
- Que pontos do plano permanecem fixos por uma reflexão axial?

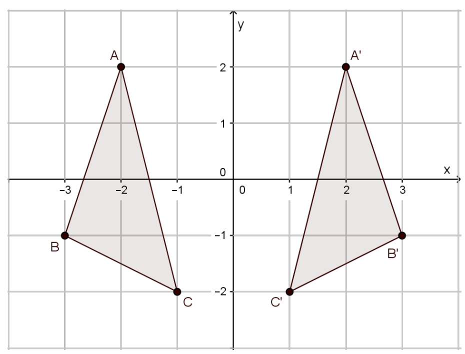



Figura 5.27: Os polígonos são simétricos em relação ao eixo $y$ .

7. Use a figura abaixo para realizar as atividades.

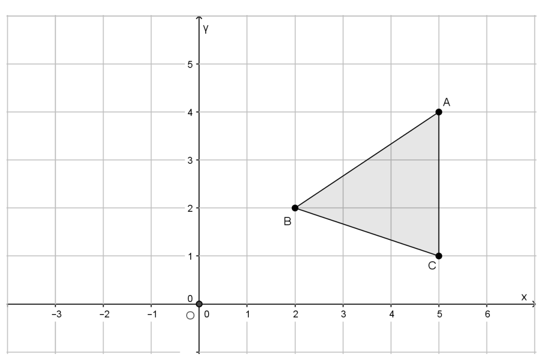



Figura 5.28: Simetria de reflexão.

- Faça a reflexão da figura em relação ao eixo $y$. Relacione as coordenadas dos vértices do triângulo original às do triângulo refletido.
- Mude a figura movendo os vértices do triângulo e torne a refleti-la em relação ao eixo $y$. Observe o que acontece com as coordenadas da figura refletida.
- Se as coordenadas de um ponto são $(x, y)$, quais são as coordenadas do seu transformado por meio de uma reflexão em relação ao eixo $y$?

- Faça a reflexão da figura em relação ao eixo $x$. Relacione as coordenadas dos vértices do triângulo original às do triângulo refletido.
- Mude a figura movendo os vértices do triângulo e torne a refleti-la em relação ao eixo $x$. Observe o que acontece com as coordenadas da figura refletida.
- Se as coordenadas de um ponto são $(x, y)$, quais são as coordenadas do seu transformado por meio de uma reflexão em relação ao eixo $x$?
- Faça a reflexão da figura em relação à reta $y = x$. Relacione as coordenadas dos vértices do triângulo original às do triângulo refletido.
- Mude a figura movendo os vértices do triângulo e torne a refleti-la em relação ao eixo $y = x$. Observe o que acontece com as coordenadas da figura refletida.
- Se as coordenadas de um ponto são $(x, y)$, quais são as coordenadas do seu transformado por meio de uma reflexão em relação à reta $y = x$?
- Faça a reflexão da figura em relação ao eixo $y$.
- A seguir, reflita o triângulo transformado em relação ao eixo $x$. Relacione as coordenadas dos vértices do triângulo original às do triângulo obtido após às duas reflexões sucessivas.
- Se as coordenadas de um ponto são $(x, y)$, quais são as coordenadas do seu transformado por meio de uma reflexão em relação ao eixo $y$ seguida de uma reflexão em torno do eixo $x$? Como é possível caracterizar esta dupla transformação em termos de simetrias centrais?
- Repita a atividade invertendo a ordem das reflexões, isto é, refletindo primeiro em relação ao eixo $x$ e, a seguir, em relação ao eixo $y$. Existe diferença no resultado final?

8. Na figura a seguir, mude o triângulo a ser transformado. Comprove que neste tipo de combinação de movimentos, a ordem em que as transformações são executadas não altera o resultado final.

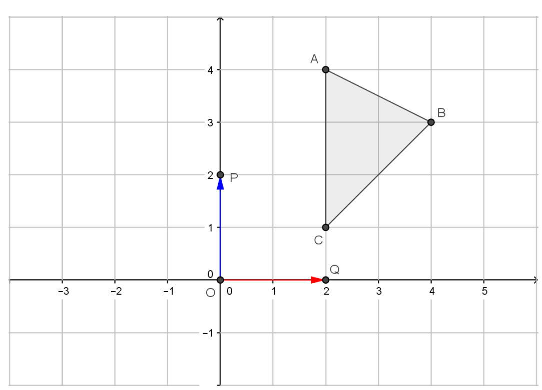



Figura 5.29: Simetria de reflexão.

- Faça uma translação do triângulo na direção vertical. Movendo o ponto $P$ que determina esse deslocamento. Depois reflita, em relação ao eixo vertical, a figura translada.
- Agora, vamos inverter a ordem em que as transformações foram efetuadas. Faça uma reflexão do triângulo, em relação ao eixo vertical e, depois, uma translação da figura resultante. Observe o resultado final da combinação das transformações nas duas figuras. O que é possível concluir?
- Modifique a figura inicial e refaça os itens $a$) e $b$).
- Nos dois casos, o que se pode afirmar em relação à posição final da figura transformada depois de aplicadas as duas transformações? Neste caso, a ordem em que são aplicadas as transformações influi na posição final do objeto?
- Agora, faça uma reflexão com deslizamento com o eixo de simetria horizontal. Repita as atividades anteriores para este caso. Neste tipo de movimento a ordem em que são executadas as transformações influi na posição final do objeto transformado?

## 5.2 Teoria e atividades propostas para o Ensino Médio

### 5.2.1 Atividades para o $1^o$ ano

**Objetivos**

1. Compreender o conceito de simetria no estudo das funções.
2. Reconhecer a simetria existente em alguns tipos de funções e identificar seus eixos de simetria.
3. Identificar se uma função é par ou ímpar a partir da simetria.
4. Fazer a translação e a reflexão de funções.
5. Fazer o gráfico de algumas funções no Geogebra que apresentam simetria.

**Gráfico de uma função**

O gráfico de uma função do tipo $y = f(x)$ é uma curva plana na qual qualquer reta vertical só a intercepta em um único ponto.

O gráfico de uma função pode ser simétrico em relação ao eixo $x$ ? Se o ponto $(x, y)$ pertence ao gráfico de uma curva que é simétrica em relação ao eixo $x$, o ponto $(x, -y)$, também pertence a esta curva. Assim, uma reta vertical que corte esta curva num ponto $(x_0, y_0)$, também passará pelo ponto $(x_0, -y_0)$ e, portanto, esta curva não será gráfico de nenhuma função.

E em relação ao eixo $y$ ? Existem vários exemplos de gráficos de funções que são simétricos em relação ao eixo $y$, por exemplo $f(x) = x^2$.

### Simetrias: Funções Pares e Ímpares

O gráfico de uma função pode apresentar muitos tipos de simetrias ou nenhum. O conhecimento das propriedades de simetria de uma função pode ajudar no traçado de seu gráfico. Podemos, por exemplo, determinar os valores de uma função em uma determinada zona do plano, conhecendo tão somente os valores que essa função assume na zona simétrica. De todos os possíveis tipos de simetria que o gráfico de uma função pode apresentar, existem dois que são facilmente detectados.

O objetivo dessa e da próxima atividade é caracterizar funções em relação a tipos especiais de simetrias. A figura abaixo mostra o gráfico de uma função e dois de seus pontos. Movendo o ponto $P$, você pode fazer estes pontos percorrerem o gráfico.

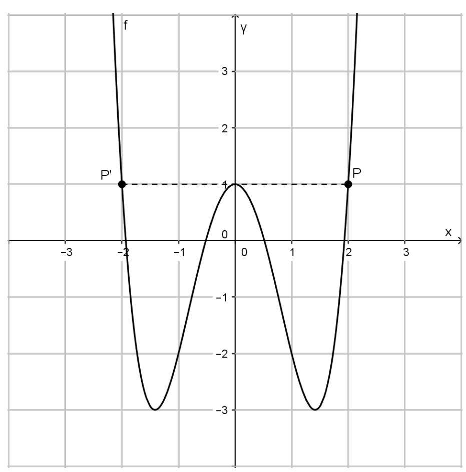



Figura 5.30: Gráfico da função $y = x^4 - 4x^2 + 1$.

- Como os pontos $P$ e $P'$ estão relacionados?
- Que tipo de simetria apresenta a curva traçada na figura?

- Usando a definição de gráfico de função, tente caracterizar, analiticamente, funções cujos gráficos apresentem este tipo de simetria. (Lembre-se: pontos que pertencem o gráfico de uma função são da forma $(x, f(x))$.)
- Tente dar exemplos de outras funções cujos gráficos apresentem este mesmo tipo de simetria.

O gráfico da função estudada na atividade anterior é simétrico em relação ao eixo $y$. Para que o gráfico de uma função seja simétrico em relação ao eixo $y$, é necessário que os pontos $(x, y)$ e $(-x, y)$ pertençam ambos a este gráfico. Como o gráfico de uma função é o conjunto de pontos do plano da forma $(x, f(x))$, temos $f(x) = y = f(-x)$, para todo $x$ no domínio de $f$. O eixo $y$ é chamado *eixo de simetria da função f.*

O gráfico da função $y = x^2$ é simétrico em relação ao eixo $y$ pois, como $y = x^2$, temos $f(x) = f(-x)$. Veja a Figura 5.31.

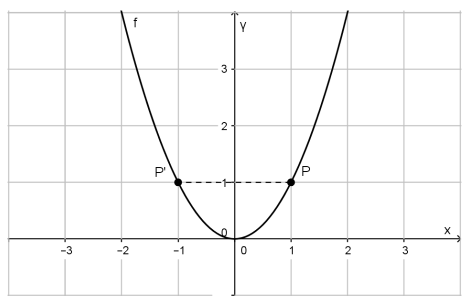



Figura 5.31: Gráfico da função $y = x^2$.

O objetivo dessa atividade é caracterizar funções em relação a outro tipo de simetria. A Figura 5.32 mostra o gráfico de uma função e dois de seus pontos. Movendo o ponto $P$, você pode fazer estes pontos percorrerem o gráfico.

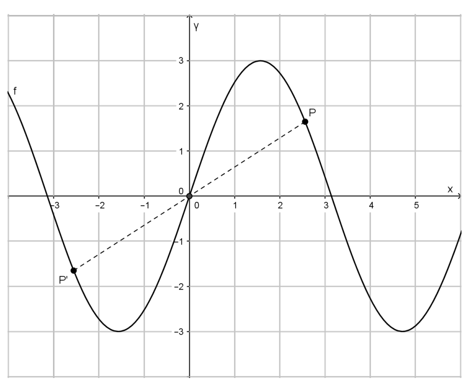



Figura 5.32: Gráfico da função $y = 3sen(x)$.

- Como os pontos $P$ e $P'$ estão relacionados?
- Que tipo de simetria apresenta a curva traçada na figura?
- Usando a definição de gráfico de função, tente caracterizar, analiticamente, funções cujos gráficos apresentem este tipo de simetria. (Lembre-se: pontos que pertencem o gráfico de uma função são da forma $(x, f(x))$.)
- Tente dar exemplos de outras funções cujos gráficos apresentem este mesmo tipo de simetria.

O gráfico da função estudada é simétrico em relação à origem. De um modo geral, o gráfico de uma curva é simétrico em relação à origem se $(-x, -y)$ pertencer à curva sempre que $(x, y)$ também pertencer, como ilustra a Figura 5.33. Levando em conta a definição de gráfico de função, como anteriormente, podemos concluir que o gráfico de uma função será simétrico em relação à origem sempre que $f(-x) = -f(x)$.

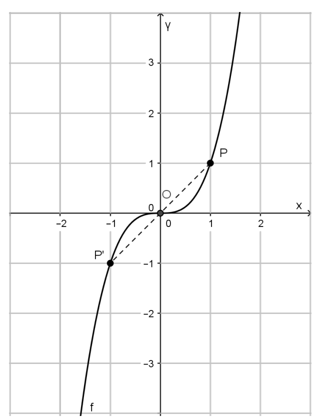



Figura 5.33: Gráfico da função $y = x^3$.

A função cujo gráfico é simétrico em relação ao eixo $y$ é chamada *função par*. Uma função cujo gráfico é simétrico em relação à origem é chamada *função ímpar*. As definições abaixo resumem estas idéias.

**Definição 5.1**

*(i) Uma função $y = f(x)$ é dita par se $f(-x) = f(x)$, para todo $x$ no domínio de $f$. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo $y$.*

*(ii) Uma função $y = f(x)$ é dita ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x$ no domínio de $f$. O gráfico de uma função par é simétrico em relaçào à origem.*

**Transformações e Gráficos de Funções**

**Translações**

1. Construa o gráfico da função $y = f(x) + c$, com $f(x) = x^2$ e $c = 0$.
    - Varie o valor da constante $c$ e observe o efeito geométrico ocorrido no gráfico de $y$.
    - Altere a definição da função $f(x)$. Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = |x|$.
    - Como é possível obter o gráfico de $y = f(x) + c$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?
    - Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam?
2. Construa o gráfico da função $y = f(x + c)$, com $f(x) = x^2$ e $c = 0$.
    - Varie o valor da constante $c$ e observe o efeito geométrico ocorrido no gráfico de $y$.
    - Altere a definição da função $f(x)$. Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = |x|$.
    - Como é possível obter o gráfico de $y = f(x + c)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?
    - Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam?

**Reflexões**

1. Construa o gráfico da função $y = af(x)$, com $f(x) = x^2$ e $a = 1$.
    - Varie o valor da constante $a$ e observe o efeito geométrico ocorrido no gráfico de $y$.
    - Altere a definição da função $f(x)$. Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = |x|$.
    - Como é possível obter o gráfico de $y = af(x)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?
    - Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam?
2. Construa o gráfico da função $y = f(ax)$, com $f(x) = x^2$ e $a = 1$.
    - Varie o valor da constante $a$ e observe o efeito geométrico ocorrido no gráfico de $y$.

- Altere a definição da função $f(x)$. Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = |x|$.
- Como é possível obter o gráfico de $y = f(ax)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?
- Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam?

3. Construa o gráfico da função $y = bf(ax)$, com $f(x) = x^2$, $a = 1$ e $b = 1$.

   - Varie o valor das constante $a$ e $b$ e observe o efeito geométrico ocorrido no gráfico de $y$.
   - Altere a definição da função $f(x)$. Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = cos(x)$, $f(x) = |x|$.
   - Como é possível obter o gráfico de $y = bf(ax)$ a partir do gráfico de $y = f(x)$?
   - Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam?

**Atividades**

As atividades a seguir foram adaptadas de [26] e deverão ser realizadas no Geogebra.

1. Construa o gráfico de algumas funções simétricas destacando o eixo ou o ponto de simetria de cada uma delas.

2. Construa o gráfico de funções que não apresentam simetria.

3. Determine se as funções abaixo são pares ou ímpares a partir de seus gráficos e usando a forma algébrica.

   - $f(x) = x^2 + 3$
   - $f(x) = x^3 - 3x/2$

4. Determine se cada uma das funções da Figura 5.34 é par ou ímpar ou nenhuma das duas. Use o gráfico para obter uma pista e comprove a sua conjectura algebricamente.

   - Qual o aspecto característico do gráfico de uma função par?
   - Qual o aspecto característico do gráfico de uma função ímpar?
   - O que se pode afirmar a respeito da soma de funções pares?
   - O que se pode afirmar a respeito da soma de funções ímpares?
   - O que se pode afirmar a respeito do produto de funções pares?
   - O que se pode afirmar a respeito do produto de funções ímpares?

- O que se pode afirma a respeito do produto de uma função par por uma função ímpar?

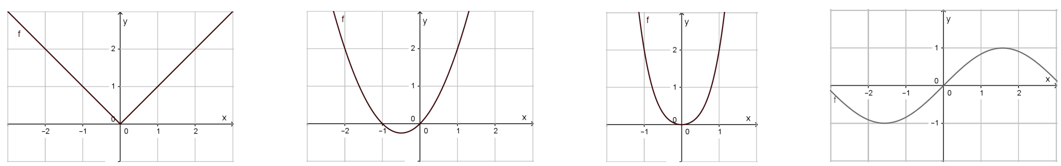


Figura 5.34: Gráfico das funções $y = |x|$, $y = x^2 + x$, $y = x^4 + x^2$ e $y = sen(x)$.

5. Responda às perguntas:
   - Como é possível obter o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ a partir do gráfico de $f(x) = x^2$?
   - Como é possível obter o gráfico de $f(x) = (x-5)^2$ a partir do gráfico de $f(x) = x^2$?
   - Como é possível obter o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ a partir do gráfico de $f(x) = x^2$?

### 5.2.2 Atividades para o $2^o$ ano

**Objetivos**

1. Fazer composição de reflexões, rotações e translações de figuras geométricas no Geogebra.
2. Construir mosaicos a partir da composição dos tipos de simetria no Geogebra.

**Composição de simetrias**

As reflexões podem ser combinadas executando-se várias reflexões em sequência (composição de funções). Existem alguns fatos importantes que merecem um pouco mais de atenção.

Primeiramente, note que se fizermos uma reflexão seguida por outra, o resultado deverá preservar a orientação do plano. De fato, como resultado da primeira reflexão, obteremos uma imagem espelhada da figura original em relação ao eixo de reflexão e aplicando-se uma segunda reflexão à imagem obtida pela primeira, obteremos uma imagem espelhada de uma imagem espelhada, ou seja, retornaremos à orientação original.

Esta observação sugere que a composição de reflexões deve ter como resultado final ou uma translação ou uma rotação.

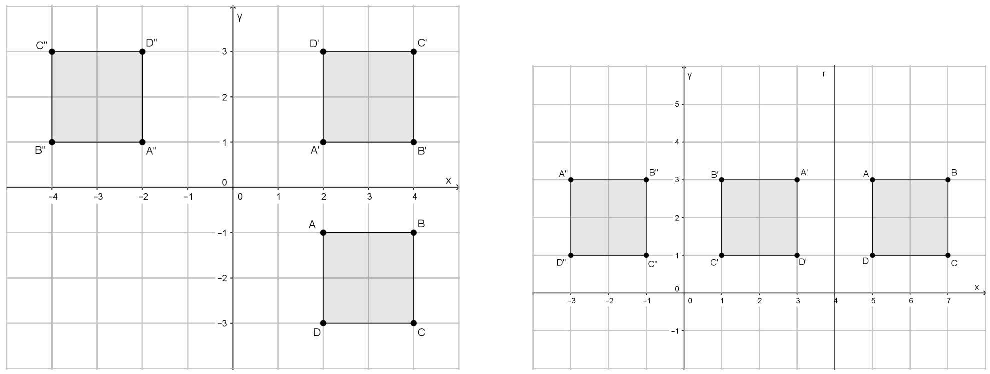


Figura 5.35: Composição de reflexões.

Além disso, podemos saber se o resultado final será uma translação ou uma rotação, observando se os eixos de simetria são concorrentes ou não. Observe ainda, que no caso de composição de transformações, a ordem em que estas transformações são efetuadas pode ser importante para o resultado final.

Podemos obter o efeito de uma translaççao, por meio da composição de duas reflexões e obter o efeito de reflexões com deslizamento por meio de três reflexões. Essa observação nos leva a investigar o que acontece quando combinamos duas isometrias quaisquer, pois o efeito conjunto de translações, rotações e reflexões com deslizamento pode ser produzido por uma sequência de reflexões.

Por exemplo, a idéia é que se fizermos a composição de uma rotação ( de $180^0$ em torno do ponto $O$ no sentido anti-horário) com uma translação (mover a figura horizontalmente 8 unidades para a esquerda), primeiro podemos imaginar duas reflexões (uma em relação à reta $t$ e outra em relação à reta $s$) para obter o efeito da rotação e, a seguir, mais duas reflexões (uma em relação à reta $s$ e outra em relação à reta $r$) para simular a translação. Assim, podemos simular o movimento completo pela combinação de quatro reflexões, como ilustrado na Figura 5.36.

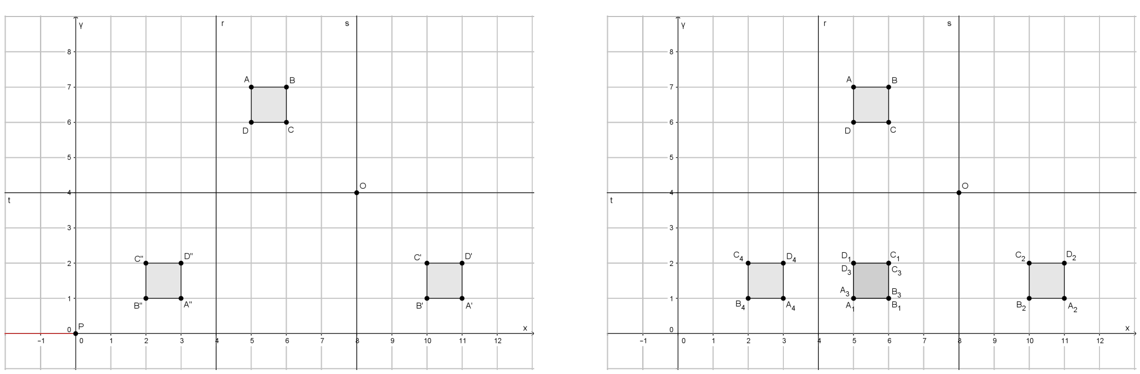


Figura 5.36: Composição de reflexões.

Se escolhermos as quatro reflexões cuidadosamente, é possível arranjá-las de tal modo que duas delas se cancelem e, dessa maneira, simular o efeito final com apenas duas reflexões (uma em relação à reta $t$ e outra em relação à reta $r$). Como já sabemos que a combinação de duas reflexões produz ou uma translação ou uma rotação, podemos concluir que a combinação de uma translação com uma rotação resulta, novamente, ou em uma translação ou em uma rotação.

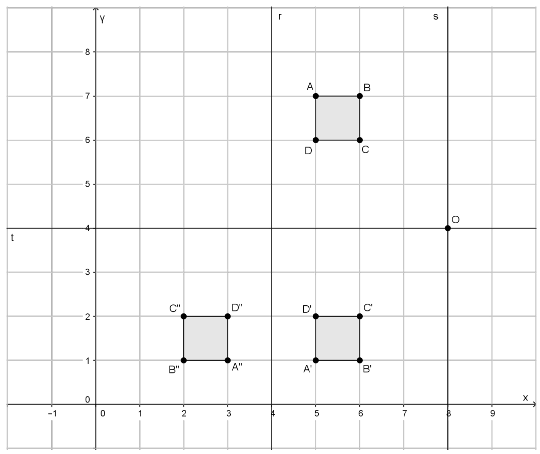



Figura 5.37: Composição de reflexões.

Fato semelhante acontece com as outras combinações possíveis dos quatro tipos conhecidos de isometrias e, dessa maneira, chegamos ao final de um ciclo. Podemos concluir que qualquer isometria no plano é uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento e não importa o modo como combinamos estes tipos, o resultado final será sempre uma isometria de um desses quatro tipos.

**Atividades**

1. Fazer composição de reflexões, rotações e translações de figuras geométricas no Geogebra.

2. Construir mosaicos a partir da composição dos tipos de simetria no Geogebra.

### 5.2.3 Atividades para o $3^o$ ano

**Objetivos**

1. Reconhecer as simetrias do triângulo equilátero e do quadrado.

2. Construir a tábua de composição de simetrias do triângulo equilátero e do quadrado.

3. Identificar o grupo de simetrias do triângulo equilátero, do quadrado e dos polígonos regulares de $n$ lados.

4. Identificar o grupo de simetrias de algumas figuras no plano.

### Simetrias de um quadrado

Podemos mover um quadrado em um plano de forma a colocá-lo de volta no espaço ocupado por ele originalmente. Nosso objetivo é descrever todas as formas possíveis em que isso pode ser feito. Mais especificamente, enumerando os vértices do quadrado, queremos descrever todas as posições do quadrado após a realização de cada movimento, quando comparadas com a posição inicial.

Consideremos um quadrado cujo centro é a origem do sistema de coordenadas cartesianas e cujos vértices, indicados consecutivamente por $A$, $B$, $C$ e $D$, pertencem aos eixos $x$ e $y$, conforme mostrado na Figura 5.38.

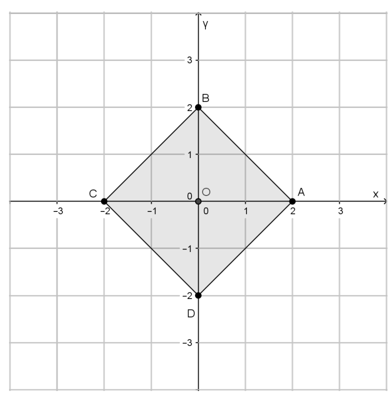



Figura 5.38: Simetrias de um quadrado.

Vamos agora descrever todas as formas possíveis de mover o quadrado. Podemos fazer quatro rotações diferentes do quadrado em torno do ponto $O$, por ângulos de $90^o$, $180^o$, $270^o$ e $360^o$, no sentido anti-horário. Observamos, no entanto, que se denotarmos por $R$ a rotação de $90^o$ no sentido anti-horário, $R^2$, $R^3$ e $R^4$ corresponderão, respectivamente, às outras rotações. Observamos que $R^4$, que é a rotação de $360^o$, é igual à transformação idêntica $Id$ (ou identidade) do plano. Assim, temos $Id = R^4 = R^3R = RR^3$. isto significa que $R$ e $R^3$ são transformações inversas uma da outra (o que uma faz a outra desfaz).

Além das rotações, temos ainda a reflexão em relaçao ao eixo $x$, que denotaremos por $S$. Observamos que as composições $SR$ e $R^3S$ deixam o quadrado na mesma posição. Assim podemos dizer que são iguais como simetrias do quadrado. Observe a Figura 5.39.

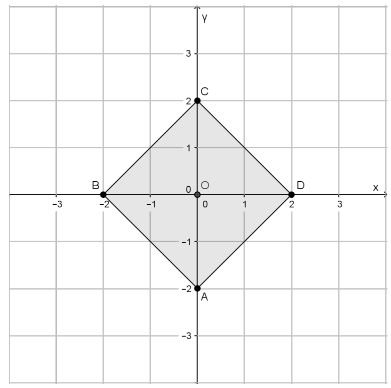



Figura 5.39: Simetrias de um quadrado.

Identificadas todas as simetrias do quadrado, é fácil perceber que correspondem a oito movimentos denotados por $Id$, $R$, $R^2$, $R^3$, $S$, $SR$, $SR^2$ e $SR^3$. Este conjunto de movimentos, com a composição de simetrias, formam um sistema matemático chamado *o grupo de simetrias do quadrado* ou *o grupo diedral de ordem* 8 (a ordem de um grupo é o número de elementos que ele contém). É denotado por *D4*. Assim,

$$D_4 = \{Id, R, R^2, R^3, S, SR, SR^2, SR^3\}.$$

Vamos construir uma tabela da composição das simetrias do quadrado. Veja Tabela 5.1.

**Atividades**

1. Com imagens e palavras, descreva as simetrias em $D_3$ (o conjunto de simetrias de um triângulo equilátero).

2. Escreva uma tábua de composição para $D_3$.

3. O que podemos dizer sobre o conjunto de simetrias de polígono regular de $n$ lados?

4. Em $D_4$, explique geometricamente por que uma reflexão seguida por outra reflexão deve ser uma rotação.

5. Em $D_4$, explique geometricamente por que uma rotação seguida por uma rotação deve ser uma rotação.

6. Em $D_4$, explique geometricamente por que uma rotação e uma reflexão compostas em qualquer ordem devem ser uma reflexão.

| $\circ$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $R^3$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Id$ | $R$ | $R^1$ | $R^2$ | $R^3$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
| $R$ | $R$ | $R^2$ | $R3$ | $Id$ | $S$ | $SR$ | $SR^2$ | $SR^3$ |
| $R^2$ | $R^2$ | $R^3$ | $Id$ | $R$ | $S$ | $SR$ | $R^2$ | $SR^3$ |
| $R^3$ | $R^3$ | $Id$ | $R$ | $R^2$ | $SR^3$ | $SR^2$ | $S$ | $SR$ |
| $S$ | $S$ | $SR^2$ | $SR$ | $SR^3$ | $Id$ | $R^2$ | $R$ | $R^3$ |
| $SR$ | $SR$ | $SR^3$ | $S$ | $SR^2$ | $R^2$ | $Id$ | $R^3$ | $R$ |
| $SR^2$ | $SR^2$ | $SR$ | $SR^3$ | $S$ | $R^3$ | $R$ | $Id$ | $R^2$ |
| $SR^3$ | $SR^3$ | $S$ | $SR^2$ | $SR$ | $R$ | $R^3$ | $R^2$ | $Id$ |

Tabela 5.1: Grupo de simetrias do quadrado.

7. Para cada um dos flocos de neve na Figura 5.40, encontre o grupo de simetria e localize os eixos de simetria reflexiva (desconsiderar imperfeições).

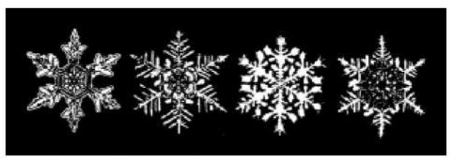


Figura 5.40: Flocos de neve.

8. Determine o grupo de simetria de cada figura abaixo (ignore as imperfeições).

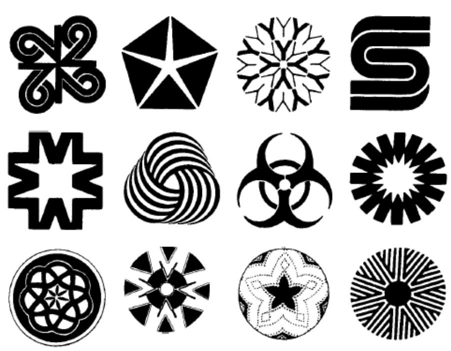


Figura 5.41: Figuras.

# Considerações Finais

A Geometria e a Álgebra são conhecimentos estudados há muitos séculos. Nesta dissertação falamos sobre a integração da Álgebra com a Geometria que, muitas vezes no desenvolvimento histórico e no ensino atual, foram e são tratadas como áreas disjuntas, ou seja, sem nenhuma ligação. Uma das conexões entre essas duas importantes áreas da Matemática deu origem à Geometria Analítica na qual se estudam os entes geométricos, como a reta, o plano ou o espaço e seus subconjuntos (curvas, segmentos, etc), associando-se a eles equações algébricas e vice versa. Essa associação facilitou os trabalhos de muitos estudiosos ao longo da História. Dentre os envolvidos, destacamos René Descartes e Pierre de Fermat. Hoje René Descartes é considerado o precursor da Geometria Analítica.

A Geometria Analítica é muito importante em Matemática, pois é a base de grandes campos de estudos nos dias atuais e muito utilizada em atividades não explicitamente matemáticas. Seja na Geometria Algébrica, Física, Geometria Diferencial, Engenharia e outras, ou ainda na vida prática como nos mapas, satélites e no moderno Sistema de Posicionamento Global (GPS) ela está presente.

Percebemos, pela análise dos livros didáticos, que a Geometria Analítica é um conteúdo pouco explorado no Ensino Básico, mas deveria ser ensinado nas escolas de modo mais satisfatório, pois muitos conhecimentos dependem da Geometria Analítica. No Ensino Fundamental, mais especificamente no $8^o$ ano, é ensinado o plano cartesiano e localização de pontos no plano e, no Ensino Médio, o tema só é abordado no $3^o$ ano. Em alguns livros didáticos desta série, a Geometria Analítica é muito bem apresentada, sendo os tópicos dados de forma gradual, com seus conceitos demonstrados para que o estudante compreenda os resultados. Como é um conteúdo extenso, às vezes não dá tempo de ministrá-lo todo e, infelizmente, quase sempre é omitido o tema das cônicas. O estudo das cônicas é muito importante e tem muita aplicabilidade, como vimos no decorrer deste trabalho.

Outro conteúdo importante na Matemática é o de simetria. Apesar de pouco explorada nas escolas e nos livros didáticos, vem sendo cobrada em provas como PROEB (Programa de Avaliação da Rede Pública da Educação Básica), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Nas séries finais do Ensino Fundamental, geralmente é dada uma noção intuitiva de simetria, apresentando algumas figuras simétricas com seus eixos de simetria. O tipo de simetria mais explorado é o de reflexão e os autores usam a ideia de espelho e dobraduras para introduzir o conteúdo. Este estudo é muito vago, pois não explora a ideia intuitiva de simetria de rotação tão presente na natureza e nos objetos ao nosso redor. Um objeto ou qualquer figura simétrica quase sempre apresenta simetria de reflexão ou de rotação. A ideia intuitiva de simetria de translação também poderia ser explorada, por se tratar de um deslocamento da figura ou objeto no plano ou espaço.

Os livros falham ao abordar de forma superficial os conceitos de simetria. O estudante quando chega no $9^o$ ano precisa ter o conhecimento claro de simetria para estudar o gráfico de uma equação do $2^o$ grau, no qual é destacado o eixo de simetria da parábola. Como o estudo é precário, os estudantes ficam meio perdidos quando se menciona esse termo, apresentando dificuldades para entender que o eixo de simetria de uma parábola é o conjunto de pontos que distam igualmente dos pontos da parábola, ou seja, é a reta que divide a parábola em duas partes iguais.

No Ensino Médio, o estudo de simetria é quase nulo. Poucas vezes se menciona o termo simetria a não ser no estudo das funções. No estudo da Geometria Analítica é pouco explorada e relacionada com os conteúdos analíticos.

A simetria pode ser tratada no Ensino Fundamental e no Médio de forma gradual e, com esta finalidade, propomos um material nesta dissertação. Assim, os estudantes poderão ter contato com os conceitos de simetria em todas as séries, o que facilitará a sua compreensão. Acredito que isto fará com que a simetria deixe de ser considerada um conteúdo difícil, tanto para ser explicado quanto para ser entendido. Além disso, as inúmeras aplicações que existem de simetria podem ser motivantes para o seu estudo, respondendo à famosa pergunta do "Para que serve isto?". Há muito o que se estudar sobre simetria além do que é apresentado aqui.

O uso de softwares como, por exemplo, o Geogebra é essencial nos dias de hoje para o ensino da Geometria Analítica e da simetria, pois apresenta esses conhecimentos de forma dinâmica. Com o uso deste software, o estudante tem a oportunidade de visualizar a figura e ser capaz de entender as suas propriedades algébricas e geométricas através de movimentos no plano ou no espaço.

Os estudos desenvolvidos para a realização desta dissertação foram um grande desafio para mim: aprendi principalmente a não temer o desconhecido, mas a enfrentá-lo com meu trabalho, interesse e dedicação. Ainda há muito a aprender da beleza da integração entre diferentes áreas da Matemática e estou preparada para novos desafios nesse sentido.

# Referências Bibliográficas


[1] R. M. Barbosa, *Descobrindo Padrões em Mosaicos.* Atual Editora. São Paulo, 1993.

[2] J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni *Matemática Completa.* Volume 3. $2^a$ edição renovada. Editora FTD. São Paulo, 2005.

[3] C. B. Boyer, *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. Editora Da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1974.

[4] P. R. M. Contador, *Matemática, Uma Breve História.* Vol. II. Editora Livraria da Física. $4^a$ Edição. São Paulo, 2012.

[5] C. W. Curtis, *Linear Algebra: An Introductory Approach.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1984.

[6] H. H. Domingues, G. Iezzi, *Álgebra Moderna.* $4^a$ edição reformulada. Atual Editora. São Paulo, 2003.

[7] H. Eves, *Introdução à História da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Editora da UNICAMP. Campinas, 2004.

[8] A. B. H. Ferreira, *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.* Positivo Editora. $5^a$ edição, 2010.

[9] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra.* $7^a$ Edição. Brooks/Cole, Cengage Learning, USA, 2010.

[10] J. R. Giovanni Jr e B. Castrucci, *A conquista da Matemática.* $6^o$ ao $9^o$ anos do Ensino Fundamental. Edição Renovada. Editora FTD. São Paulo, 2009.

[11] G. Iezzi, O. Dolce, D. Degenszajn, R. Périgo e N. de Almeida, *Matemática, Ciência e Aplicações.* Ensino Médio. Editora Saraiva. $7^a$ edição. São Paulo, 2013.

[12] J. Ribeiro, *Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia.* Ensino Médio. Editora Scipione. São Paulo, 2010.

[13] J. Souza e P. M. Pataro, *Vontade de saber Matemática.* $6^o$ ao $9^o$ anos do Ensino Fundamental. $2^a$ Edição. Editora FTD. São Paulo, 2012.

[14] E. L. Lima, *Isometrias,* $2^a$ Edição, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2007.

[15] A. C. M. Neto, *Fundamentos de Cálculo.* Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[16] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/geometria-analitica.htm

[17] http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/geometria-analitica.htm

[18] https://www.significados.com.br/simetria/

[19] https://pt.wikipedia.org/wiki/Reflexao-(matematica)

[20] http://www.estudarmatematica.pt/2015/02/simetria-de-rotacao-ou-rotacional.html

[21] https://pt.wikipedia.org/wiki/Translacao

[22] http://ajudaalunos.blogspot.com.br/2011/10/reflexao-rotacao-e-translacao-novo-tema.html

[23] http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html

[24] https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria

[25] https://pt.wikipedia.org/wiki/Geometriaanalitica

[26] http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/conteudop.htm