

FÁBIO NASCIMENTO FAGUNDES

UM ESTUDO SOBRE A ASSOCIAÇÃO DA
ANÁLISE MICROLOCAL E *WAVELETS*
COM APLICAÇÃO NA ELETRODINÂMICA

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de Doctor Scientiae.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

F156e
2012

Fagundes, Fábio Nascimento, 1976-

Um estudo sobre a associação da análise microlocal e
Wavelets com aplicação na eletrodinâmica / Fábio Nascimento
Fagundes. – Viçosa, MG, 2012.
viii, 84f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 80-84

1. Eletrodinâmica. 2. *Wavelets* (Matemática). 3. Matemática
aplicada. I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 537.6

FÁBIO NASCIMENTO FAGUNDES

**UM ESTUDO SOBRE A ASSOCIAÇÃO DA ANÁLISE MICROLOCAL E
WAVELETS COM APLICAÇÃO NA ELETRODINÂMICA**

**Tese apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das
exigências do Programa de Pós-
Graduação em Física, para obtenção do
título de Doctor *Scientiae*.**

APROVADA: 11 de Julho de 2012.

Oswaldo Monteiro Del Cima

Mercio Botelho Faria

Etereldes Gonçalves Júnior

José Luiz Acebal Fernandes

Daniel Heber Theodoro Franco
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

A Deus, supremo Criador, Mantenedor e Sustentador de nossas vidas, uma vez que “*sem Ele nada podemos fazer*” (**João 15:5**)

À minha querida esposa Gisele Franciane Belisário Fagundes, pelo contínuo companheirismos e amor.

À minha família, pelos esforços dispensados em favor de minha formação básica.

Ao professor Dr. Daniel Heber Theodoro Franco, pela orientação e boa amizade.

Ao irmãos da Igreja Adventista do Sétimo Dia de: Goiabeiras em Vitória-ES, Viçosa-MG e Jacarandás em Sinop-MT, pelas incansáveis orações intercessórias em prol do meu sucesso acadêmico.

Aos meus colegas pós-graduandos do Departamento de Física, pelas ricas discussões.

Aos meus colegas professores do Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais da Universidade Federal de Mato Grosso, pela colaboração durante o tempo em que fiquei afastado para escrever essa tese.

A CAPES e à Universidade Federal de Viçosa.

“Meu filho, se você aceitar as minhas palavras e guardar no coração os meus mandamentos; se der ouvidos à sabedoria e inclinar o coração para o discernimento; se clamar por entendimento e por discernimento gritar bem alto; se procurar a sabedoria como se procura a prata e buscá-la como quem busca um tesouro escondido, então você entenderá o que é temer o Senhor e achará o conhecimento de Deus. Pois o Senhor é quem dá sabedoria; de sua boca procedem o conhecimento e o discernimento. Ele reserva a sensatez para o justo; como um escudo protege quem anda com integridade, pois guarda a vereda do justo e protege o caminho de seus fiéis.” (Provérbios 2:1-8)

“A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isto fica sendo a minha última e mais elevada descoberta” (Isaac Newton)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
1 Introdução e Motivação	1
2 Métodos Matemáticos	7
2.1 <i>Wavelet</i> e transformada <i>wavelet</i>	7
2.1.1 Definição, propriedades e exemplos	8
2.1.2 <i>Wavelets</i> na notação multi-índice de Schwartz	13
2.2 Análise microlocal	18
2.2.1 A propagação de singularidades	18
2.2.2 Conjunto de frente de ondas	28
3 Transformada <i>Wavelet</i> Direcional e Conjunto de Frente de Ondas	34
3.1 Valores limites distribucionais	36
3.2 Conjunto de frente de ondas analítico	43
4 Transformada <i>Wavelet</i> Direcional e Conjunto de Polarização	47
4.1 Propagação de Conjunto de Polarização	48
4.1.1 Distribuições avaliadas no espaço de Hilbert	49
4.1.2 Conjunto de polarização	51
4.1.3 Propagação de polarizações para Equações de Maxwell	56
5 Conclusões e Perspectivas	64
5.1 Motivação para futuras pesquisas: aplicações para dados de radar	66
A Apêndice: Análise das curvas características da equação da onda	69

B Apêndice: Relação entre os estados coerentes e as <i>wavelets</i>	74
Referências	80

LISTA DE FIGURAS

1.1	Ressonância magnética de um crânio humano.	2
1.2	Foto via satélite do desmatamento florestal.	2
1.3	Reconhecimento biométrico.	3
1.4	Radares que detectam o contorno do objeto.	3
1.5	Imagem de uma célula e seu contorno.	4
2.1	Gráfico da <i>wavelet</i> de Haar.	9
2.2	Gráfico do módulo da transformada de Fourier da <i>wavelet</i> de Haar. . .	10
2.3	Gráfico da <i>wavelet</i> contínua $(\psi * \varphi)(x)$	12
2.4	Gráfico da <i>wavelet</i> suave $(\psi * \phi)(x)$	12
2.5	Curvas características planas.	19
2.6	Círculos centrados na origem.	22
2.7	Gráfico da solução (2.44) do problema de Cauchy.	23
2.8	Projeção da faixa-bicaracterística em $\mathbb{R}^3$	26
2.9	Frente de ondas planas.	27
2.10	Propagação de ondas de Huygens.	28
2.11	Uma vizinhança cônica de k	30
2.12	Um ponto espalhador.	31
2.13	Cone em torno de k	33
3.1	Cone C , cone dual C^* e cone compacto C'	37
3.2	Cone próprio e convexo.	37
4.1	Feixe de retas formando o cone-de-luz.	63
5.1	Radar de abertura sintética.	66

RESUMO

FAGUNDES, Fábio Nascimento, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2012.
Um Estudo sobre a Associação da Análise Microlocal e *Wavelets* com Aplicação na Eletrodinâmica. Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco. Coorientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Winder Alexander de Moura Melo.

Usando uma classe de *wavelets* direcionais (denominadas *wavelets* cônicas, as quais tem suporte estritamente contido em um cone convexo próprio no espaço- k das frequências), mostramos que uma distribuição temperada é obtida como uma soma finita de valores limites de funções analíticas resultantes da complexificação do parâmetro translacional da transformada *wavelet*. Além disso, provamos que para uma dada distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada *wavelet* contínua de f com respeito à *wavelet* cônica é definida de tal maneira que a transformada *wavelet* direcional de f produz uma função no espaço de fase, cujas singularidades de alta-frequência são precisamente os elementos do conjunto de frente de ondas analítico de f . Como uma aplicação dos resultados acima, representamos as soluções das equações de Maxwell em termos da transformada *wavelet* direcional. Então, usamos o conjunto de polarização, o qual refina a noção do conjunto de frente de ondas para distribuições com caráter vetorial, a fim de analisar as singularidades de soluções das equações de Maxwell.

ABSTRACT

FAGUNDES, Fábio Nascimento, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2012.
A Study on the Association of Microlocal Analysis and Wavelets with Application in Electrodynamics. Advisor: Daniel Heber Theodoro Franco. Co-Advisors: Afrânio Rodrigues Pereira and Winder Alexander de Moura Melo.

By using a particular class of directional wavelets (namely the conical wavelets, which are wavelets strictly supported in a proper convex cone in the k -space of frequencies), it is shown that a tempered distribution is obtained as a finite sum of boundary values of analytic functions arising from the complexification of the translational parameter of the wavelet transform. Moreover, we show that for a given distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, the continuous wavelet transform of f with respect to a conical wavelet is defined in such a way that the directional wavelet transform of f yields a function on phase space whose high-frequency singularities are precisely the elements in the analytic wavefront set of f . As an application, we represent the solutions of Maxwell's equations in terms of directional wavelet transform. Then, we make use of the polarization set, which refine the notion of wavefront set for vector-valued distributions, in order to analyze the singularities of solutions of the Maxwell's equations.

Capítulo 1

Introdução e Motivação

Um dos mais importantes campos de estudo contemporâneos, que surgiu devido aos avanços na teoria da telecomunicação e tecnologias digitais, é o Processamento de Sinal Digital (DSP, do inglês *Digital Signal Processing*). Ele está presente nas mais diversas áreas de pesquisa científica e tecnológica, tais como: **imagens médicas** – no refinamento das imagens obtidas no exame de ressonância magnética nuclear; **senso-riamento remoto** – na filtragem de ruídos (refinamento da resolução) de fotos tiradas via satélite para análise de dados de relevo da superfície terrestre, ou para a distinção de áreas desmatadas em reservas florestais; **imagens de radar** – na minimização de interferências em tempo real nas imagens do *display* em centrais de monitoramento de vôos nos aeroportos ou na utilização de *softwares* que implementam métodos microlocais capazes de detectar até mesmo a forma geométrica do objeto que se aproxima da fonte emissora de radiação eletromagnética situada no perímetro das bases militares; **reconhecimento de padrões** – no processamento e classificação de imagens do contorno da impressão digital ou do bordo da íris dos olhos humanos com o máximo possível de fidedignidade no tratamento dos dados coletados para um posterior reconhecimento de padrões, podendo ser utilizado, por exemplo, no registro do ponto eletrônico adotado nas empresas; entre outras inúmeras áreas de aplicação.

Um exemplo mais usual onde todos usufruem dos benefícios do processamento de sinal digital, são os *downloads* de músicas da internet. Tipicamente, os *downloads* que eram feitos por usuários do início desse século tinham velocidade de 56 kilobits por segundo; assim, baixar uma música em seu tamanho original poderia levar horas. No entanto, usando os softwares atuais de compressão de MP3, o tamanho da música é reduzida em até 90%, podendo ser baixada em questão de minutos. Apesar da redução tão efetiva do tamanho do arquivo, a maioria dos usuários não consegue

distinguir entre a qualidade do arquivo reduzido, do original. Como isto é possível? Primeiro, é importante analisar a música original (um sinal/uma onda), e como ela é representada digitalmente. Esta análise leva a um algoritmo para armazenar os dados não-redundantes (compressão) que o usuário fará uso posteriormente. Tudo isso faz parte da dinâmica do Processamento de Sinal Digital (DSP). Porém, como nessa tese daremos um tratamento inteiramente analítico às discussões nela expostas, recomendamos ao leitor interessado em uma discussão pormenorizadamente numérica desse assunto as Referências [1, 2].

Um questionamento que é imprescindível e que sua resposta permeará todo o restante dessa tese, é o seguinte: *o que cada um dos exemplos que envolvem o tratamento de sinais (imagens), citados acima, têm em comum?* Resposta: *o estudo da forma geométrica da interface (bordo) entre os distintos meios analisados.*

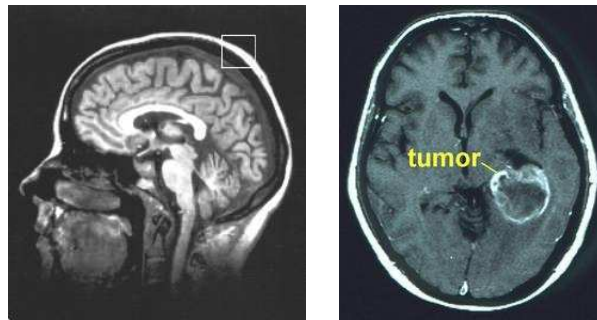


Figura 1.1: Ressonância magnética de um crânio humano.

No caso das **imagens médicas** poderia ser, por exemplo, o estudo da forma geométrica das regiões de contraste de tonalidade de cor entre a massa cinzenta cerebral e um possível tumor visualizado em uma tofo ressonância, conforme a Figura 1.1.



Figura 1.2: Foto via satélite do desmatamento florestal.

No caso do **sensoriamento remoto** poderia ser, por exemplo, o estudo do contorno

das regiões de mudança abrupta na tonalidade de cor nas fotos tiradas de satélites, diferenciando as áreas de florestas virgens das áreas desmatadas, conforme a Figura 1.2.



Figura 1.3: Reconhecimento biométrico.

No caso do **reconhecimento de padrões** poderia ser, por exemplo, a análise biométrica que estuda a diferença de contraste de cor entre o bordo do relevo (vales e picos) das ranhuras da impressão digital, conforme a Figura 1.3.

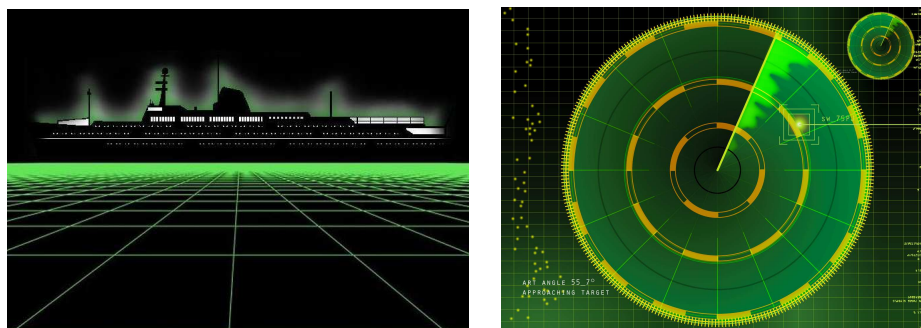


Figura 1.4: Radares que detectam o contorno do objeto.

E no caso das **imagens de radar** poderia ser, por exemplo, a análise das discontinuidades da função refletividade da onda eletromagnética emitida pelo radar, dando como resultado o contorno do navio, conforme a Figura 1.4.

Um sinal é um fenômeno variável no tempo que pode ser mensurado (um observável físico). É uma grandeza física que varia com o tempo, embora possa variar de acordo com qualquer outro parâmetro tal como o espaço. Nossa interação diária com o ambiente se dá através de diversos tipos de sinais:

- ✓ Sinais sonoros – via ondas mecânicas, como por exemplo: audição, fala, sonares de navios e submarinos, diferença de tensão produzida por um microfone etc;

- ✓ Sinais luminosos – via ondas eletromagnéticas, como por exemplo: visão/luz incidente, ondas de rádio, imagens transmitidas por uma câmera de vídeo, radares de aeroportos etc.

Tomando uma função $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o subconjunto $\mathcal{U}$ é a região do espaço na qual varia a grandeza física. Por exemplo, se $n = 1$, então a grandeza representa um sinal unidimensional (o som); se $n = 2$, essa grandeza representa um sinal bidimensional (uma imagem), cuja lei da função pode ser dada por $f(p) = \text{cor de } p$, onde p é um pixel da imagem num plano com a cor variando, por exemplo, na escala de cinza; se $n = 3$, a grandeza representa um sinal tridimensional (um vídeo) com a lei da função $f(p, t)$ representando a variação temporal da cor do pixel no plano.

Para estudar os sinais, é necessário descrevê-los matematicamente. O modelo matemático mais adequado para descrever os fenômenos sonoros é a equação da onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 f \quad (1.1)$$

onde “ c ” é a velocidade de propagação da onda mecânica. Já, para descrever a propagação da radiação eletromagnética, o modelo matemático mais adequado é dado pelo sistema de equações diferenciais de Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times B = \mu_o J + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \end{cases} . \quad (1.2)$$

As informações mais relevantes de um sinal, são muitas vezes carregadas por estruturas irregulares e fenômenos transientes, ou seja, são carregadas por singularidades. Em uma imagem, as descontinuidades da função intensidade de cor são interpretadas

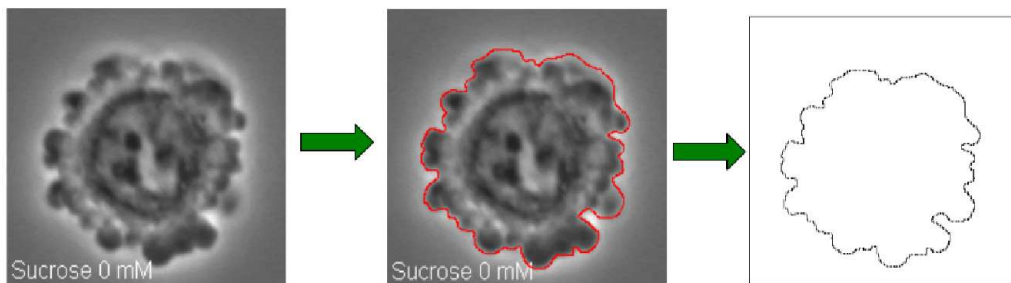


Figura 1.5: Imagem de uma célula e seu contorno.

como uma classe de singularidades que nos permite localizar o contorno de um objeto, conforme a Figura 1.5. Analogamente, ao se analisar as descontinuidades da função

refletividade da radiação eletromagnética emitida pelo radar, obter-se-á o contorno do objeto que interage com tais ondas emitidas. Um método matemático bastante completo para se estudar tais descontinuidades com o objetivo de obter o contorno dos objetos analisados, é a *análise microlocal*.

A análise microlocal estuda o comportamento singular de uma distribuição (por exemplo, uma onda eletromagnética) nos pontos (x, k) do espaço de fase. Ela só se preocupa com os pontos singulares e a direção de propagação das singularidades nas regiões assintóticas. No entanto, no processo físico de captação de tais singularidades, isto é, na medição das ondas retro-espalhadas, obtêm-se também ruídos (oriundos do multi-espalhamento da radiação emitida) indesejáveis para a análise, os quais podem ser filtrados usando operadores pseudo-diferenciais, conforme Margaret Cheney na Referência [3]. Afim de dar um tratamento alternativo em tal filtragem, optamos por trabalhar nessa tese com as funções *wavelets*, as quais tem as propriedades de: média nula, boa localização no espaço das frequências e inversibilidade [4].

A tese está organizada da seguinte forma: após uma breve revisão de algumas definições e propriedades básicas das *wavelets* e da análise microlocal no **Capítulo 2**, no **Capítulo 3** obtemos uma caracterização local do conjunto de frente de ondas analítico em termos dos valores limite generalizados de funções holomorfas usando a transformada *wavelet* direcional. Nós usamos a transformada *wavelet* direcional a fim de mostrar que as funções analíticas que satisfazem uma condição de crescimento temperado, obtêm valores limite distribucionais em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Tais resultados podem ser detalhadamente vistos na Referência [5]. No **Capítulo 4** revisitamos o problema analisado por Dencker sobre a propagação de polarizações das soluções das equações de Maxwell. Levando em conta que o campo eletromagnético é uma distribuição temperada com caráter vetorial, usamos os resultados da Referência [5] para representar as soluções das equações de Maxwell em termos das *wavelets* direcionais. Então, usamos o conjunto de polarização, o qual refina a noção de conjunto de frente de ondas para o caso de distribuições com caráter vetorial, como introduzido por Dencker [6], a fim de analisar as singularidades das soluções das equações de Maxwell. Finalmente, no **Capítulo 5**, tratamos das conclusões gerais dos resultados obtidos, bem como de suas consequências físicas, e motivamos a associação da análise microlocal com a análise *wavelet* observando o problema da análise de dados de radares de abertura sintética, cujo assunto é tratado com muita propriedade no livro *Fundamentals of Radar Imaging* de Margaret Cheney e Brett Borden [3]. Nosso objetivo, é chamar a atenção – não somente dos físicos-matemáticos, mas também dos matemáticos puros e físicos teóri-

cos interessados em temas interdisciplinares – para a relevância do estudo da ampla aplicação da análise microlocal e da análise *wavelet* em problemas de engenharia.

Capítulo 2

Métodos Matemáticos

2.1 *Wavelet* e transformada *wavelet*

O conceito de *wavelet*, ou ondoletas, surgiu na literatura somente nos anos 80. O conceito mais contemporâneo pode ser entendido como uma síntese de várias ideias originadas em diferentes áreas de conhecimento, como: a Matemática (operadores Calderón-Zygmund e teoria de Littlewood-Paley), a Física (formalismo de estados coerentes em mecânica quântica e grupo de renormalização) e a Engenharia (filtros de banda de frequência, codificação e decodificação em processamento de sinais/imagens). Em 1982, Jean Morlet, um engenheiro geofísico francês, introduziu pela primeira vez a noção de transformada *wavelet* como um novo método matemático para análise de sinais sísmicos. Foi Alex Grossmann, um físico teórico francês, quem rapidamente reconheceu a importância da transformada *wavelet* de Morlet, que é similar ao formalismo de estados coerentes em mecânica quântica, e desenvolveu uma fórmula exata para a inversa da transformada *wavelet*. Em 1984, em um encontro acadêmico com a presença de Morlet e Grossmann, teve início um estudo matemático mais detalhado das transformadas *wavelets* contínuas e suas diversas aplicações. Deste estudo ficou claro que, de maneira análoga às expansões de Fourier, a teoria das *wavelets* apresentava um novo método para decompor uma função (um sinal) ou uma distribuição.

2.1.1 Definição, propriedades e exemplos

De forma mais geral, uma transformada integral, é um operador $\mathbb{T}$ num espaço de funções sobre algum subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$, o qual é definido por

$$(\mathbb{T}f)(y) = \int_{\Omega} K(x, y) f(x) dx \quad . \quad (2.1)$$

As propriedades da transformada, dependem da função K , que na equação (2.1) é chamada de *kernel* da transformada. Por exemplo, no caso da transformada de Fourier, o *kernel* assume a seguinte função $K(x, y) = e^{-i\langle x, y \rangle}$. Note que a variável y pode ser independente como um fator de escala (um parâmetro), ou seja, se tomarmos a função exponencial $\varphi(x) = e^{-ix}$, podemos gerar a partir dela, uma família de funções de um só parâmetro tomando cópias escaladas de φ , isto é, $\varphi_{\alpha}(x) = e^{-i\alpha x}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. A transformada *wavelet* contínua é similar à transformada de Fourier, no sentido de que ela está baseada em uma função única ψ , que também é escalada. Mas, ao contrário da transformada de Fourier, podemos também deslocar a função ψ , gerando assim uma família de funções de dois parâmetros $\psi_{a,b}$ do tipo:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \quad .$$

onde as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Definição 1. *Uma wavelet é uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de admissibilidade*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad , \quad (2.2)$$

onde, $\widehat{\psi}$ é a transformada de Fourier de ψ , definida como

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \psi(x) dx \quad . \quad (2.3)$$

Uma importante propriedade das *wavelets* é que dada uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, então a função bi-parametrizada $\psi_{a,b}$ gerada a partir da ψ , também é de quadrado integrável,

ou seja, $\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$, uma vez que

$$\begin{aligned} \|\psi_{a,b}(x)\|^2 &= |a|^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= \|\psi(x)\|^2 . \end{aligned} \quad (2.4)$$

A transformada de Fourier de $\psi_{a,b}(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{a,b}(\omega) &= |a|^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= \sqrt{|a|} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

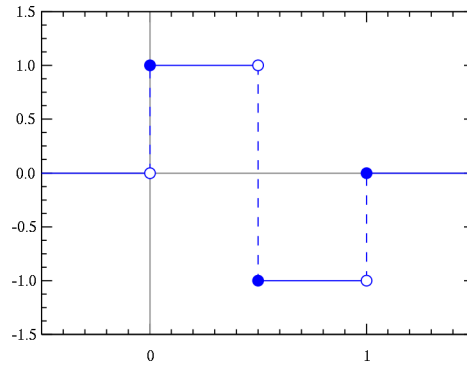


Figura 2.1: Gráfico da *wavelet* de Haar.

Um dos exemplos mais clássicos na teoria das *wavelets*, é a *wavelet* de Haar. Ela foi proposta em 1909 pelo matemático húngaro Alfred Haar. A transformada de Haar é um caso particular de transformada *wavelet* discreta, onde a *wavelet* de Haar é um pulso quadrado definido por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & , \text{ para qualquer outro valor de } x \end{cases} . \quad (2.6)$$

Então, a transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{[\text{sen}(\frac{\omega}{4})]^2}{(\frac{\omega}{4})} e^{-i(\omega-\pi)/2} \quad (2.7)$$

e a condição de admissibilidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\text{sen}(\frac{\omega}{4})|^4}{\omega^3} d\omega < \infty . \quad (2.8)$$

Podemos ver na Figura 2.1, que a *wavelet* de Haar é bem localizada¹ no domínio do tempo, apesar de não ser contínua. O valor absoluto de sua transformada de Fourier, $|\widehat{\psi}(\omega)|$, plotada na Figura 2.2, mostra claramente que a *wavelet* de Haar tem localização pobre no domínio da frequência e também que ela não tem suporte compacto nesse domínio.

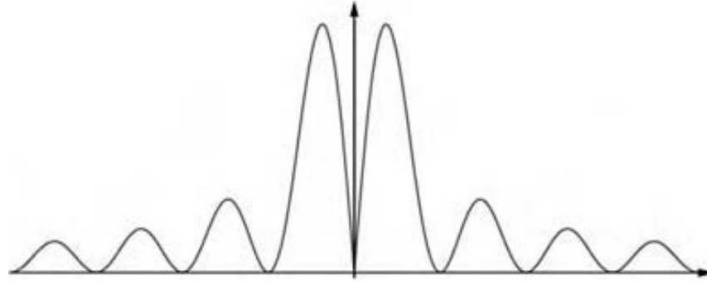


Figura 2.2: Gráfico do módulo da transformada de Fourier da *wavelet* de Haar.

A função $|\widehat{\psi}(\omega)|$ é par e atinge seu ponto de máxima frequência em $\omega_0 \approx 4,662$. Sua taxa de decaimento é de ω^{-1} quando $\omega \rightarrow \infty$, ou seja, o decaimento é lento em virtude da descontinuidade de ψ , de modo que essa natureza descontínua é sua maior fraqueza em muitas aplicações. No entanto, a *wavelet* de Haar é um dos exemplos mais fundamentais que ilustram a principal característica da teoria geral das *wavelets*, conforme o

Teorema 1. *Sejam ψ uma wavelet e φ uma função integrável e limitada. Então a convolução $(\psi * \varphi)$ é uma wavelet.*

¹Conforme [7], dizemos que uma função $y = f(x)$ é bem localizada num espaço, por exemplo em $\mathbb{R}^2$, se a maior parte dos pontos y da imagem são nulos, ou pelo menos próximos de zero, exceto para alguns valores de x próximos de um x_0 fixado.

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi * \varphi)(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-u) \varphi(u) du \right|^2 dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-u)| |\varphi(u)| du \right)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-u)| |\varphi(u)|^{1/2} |\varphi(u)|^{1/2} du \right)^2 dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-u)|^2 |\varphi(u)| du \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| du \right) dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| du \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-u)|^2 |\varphi(u)| dx du \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| du \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty, \tag{2.9}
\end{aligned}$$

mostrando que $(\psi * \varphi) \in L^2(\mathbb{R})$, uma vez que φ é limitada. Além disso, do teorema da convolução [8], temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{(\psi * \varphi)}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega) \widehat{\varphi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega \\
&\leq \sup \left\{ |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Logo, a função $(\psi * \varphi)(x)$ é uma *wavelet*. □

Como uma aplicação imediata do **Teorema 1**, vamos tomar a *wavelet* de Haar definida na equação (2.6) e vamos convolucioná-la com a seguinte função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x < 0 \\ 1 & , \quad \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{se } x > 1 \end{cases}. \tag{2.11}$$

Assim, obtemos a função $(\psi * \varphi)(x)$ contínua mostrada na Figura 2.3.

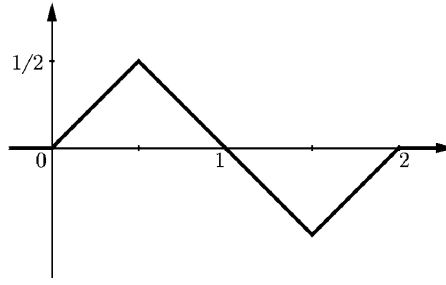


Figura 2.3: Gráfico da *wavelet* contínua $(\psi * \varphi)(x)$.

Mas, se convolucionarmos a *wavelet* de Haar (2.6) com a função $\phi(x) = e^{-x^2}$, obtemos a função suave na Figura 2.4.

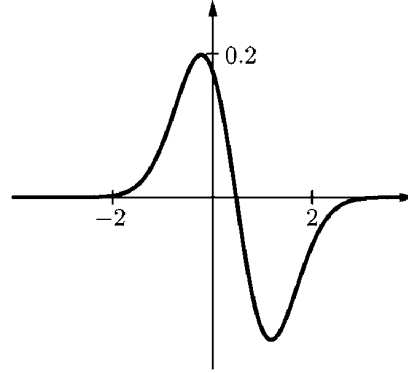


Figura 2.4: Gráfico da *wavelet* suave $(\psi * \phi)(x)$.

Definição 2. Sejam $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ uma função de quadrado integrável e $\psi_{a,b}$ uma família de funções bi-parametrizadas geradas a partir de ψ , dada por

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (2.12)$$

onde as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Assim, a transformada integral $\mathbb{W}_\psi$ definida sobre $L^2(\mathbb{R})$ via

$$\begin{aligned} (\mathbb{W}_\psi f)(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{a,b}(x)} dx \\ &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

é chamada de **transformada wavelet contínua** de f , sendo f qualquer função bem definida em $L^2(\mathbb{R})$.

A função ψ é frequentemente chamada de *wavelet* “mãe” ou *wavelet* analisadora; o parâmetro “ b ” pode ser interpretado como uma translação temporal ou espacial, dependendo do contexto em que ele está inserido; já a constante “ a ” geralmente é interpretada como um parâmetro de escala que mede o grau de dilatação ou contração. A transformada *wavelet* contínua de f não é única, como é o caso da transformada de Fourier, mas qualquer transformação obtida segundo a **Definição 2** usando uma função ψ arbitrária, e que obedeça a condição de admissibilidade (2.2), satisfará as exigências de transformada *wavelet*.

Para uma abordagem n -dimensional, como é o caso tratado nos Capítulos 3 e 4 desta tese, na próxima subseção faremos uma releitura das duas definições enunciadas acima, usando a notação multi-índice de Schwartz.

2.1.2 Wavelets na notação multi-índice de Schwartz

Nesta subseção, vamos revisitar algumas definições e propriedades básicas das *wavelets* apresentadas na subseção anterior, onde agora usaremos a notação padrão de Schwartz para multi-índices. Sejam $\mathbb{R}^n$ o espaço real euclidiano n -dimensional cujos pontos genéricos nele contidos serão denotados pela n -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbb{C}^n$ o espaço complexo n -dimensional onde quaisquer pontos nele contidos serão denotados pela n -upla $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, tais que as operações de soma e produto por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, são dados por

$$\begin{cases} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{cases} \quad (2.14)$$

e o produto interno é

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad , \quad (2.15)$$

onde $x \geq 0$ significa $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Como consequência da definição do produto interno, temos

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad . \quad (2.16)$$

Além disso, definimos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0$, onde $\mathbb{N}_0$ é o conjunto dos

inteiros não-negativos, tal que o comprimento de α é a correspondente norma ℓ^1 dada por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, onde

$$\begin{cases} \alpha + \beta & \text{significa } (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) \\ \alpha \geq \beta & \text{significa } (\alpha_1 \geq \beta_1, \alpha_2 \geq \beta_2, \dots, \alpha_n \geq \beta_n) \end{cases} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{cases} \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \end{cases} . \quad (2.18)$$

Já um operador diferencial atuando em uma função, φ , neste formalismo é descrito como

$$\begin{aligned} D^\alpha \varphi(x) &= (-i)^{|\alpha|} \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \varphi(x) \\ &= (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} , \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde a constante $(-i)$ foi introduzida para facilitar os cálculos da transformada de Fourier e onde os ∂_j significam a diferenciação com respeito à j -ésima variável. Para um melhor entendimento, veja o

Exemplo 1. Considere o operador diferencial no formalismo de Schwartz (2.19).

Se $n = 3$ e $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 5)$, temos que

$$\begin{aligned} \chi &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

Logo, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 + 0 + 5 = 7$, de modo que

$$\begin{aligned} D^\alpha \varphi(\chi) &= (-i)^7 \frac{\partial^7 \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2 \partial x_2^0 \partial x_3^5} \\ &= i \frac{\partial^7 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2 \partial z^5} \end{aligned}$$

□

Consideremos dois espaços n -dimensionais, o espaço- x e o espaço- k , com a trans-

formada de Fourier definida por

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)](k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle k, x \rangle} d^n x \quad , \quad (2.20)$$

de modo que a fórmula da transformada inversa é dada por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(k)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) e^{i\langle k, x \rangle} d^n k \quad , \quad (2.21)$$

onde a variável k sempre pertencerá ao conjunto dos números reais, enquanto que a variável x , tanto poderá pertencer aos reais como aos complexos. Quando ela for complexa, será denotada por $z = x + iy$.

Definição 3. Uma wavelet é uma função complexa ψ avaliada no espaço das funções de quadrado integrável $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e satisfazendo a condição de admissibilidade

$$C_\psi = (2\pi)^n \int \frac{|\widehat{\psi}(k)|^2}{|k|^n} d^n k < \infty \quad , \quad (2.22)$$

onde $\widehat{\psi}$ é a transformada de Fourier de ψ . Tal condição, permite a existência da transformada inversa de wavelet.

Se ψ é suficientemente regular, pelo menos o suficiente para admitirmos que $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n, d^n x) \cap L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, então a condição de admissibilidade é equivalente a

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \Leftrightarrow \int \psi(x) d^n x = 0 \quad , \quad (2.23)$$

o que simplesmente significa que a wavelet tem média nula.

Definição 4. A transformada wavelet contínua de uma distribuição temperada $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ com respeito a alguma wavelet “mãe”, ψ , é definida conforme o seguinte operador convolução

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\psi f(x', \ell) &= \langle f(x), \overline{\psi_{x', \ell}(x)} \rangle \\ &= \int \overline{\psi_{x', \ell}(x)} f(x) d^n x \quad , \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde

$$\psi_{x', \ell}(x) = \frac{1}{\ell^n} \psi\left(\ell^{-1} (x - x')\right) \quad , \quad (2.25)$$

sendo $\ell \in \mathbb{R}_+$ o parâmetro de escala de dilatação (ou contração) com o qual analisamos a distribuição temperada $f(x)$ e $x' \in \mathbb{R}^n$ o parâmetro de translação correspondente à posição da wavelet “mãe” ψ .

Nota 1. Ao longo desta tese a transformada de Fourier, a transformada *wavelet* e os valores limites das funções analíticas serão sempre interpretados no sentido distribucional.

Note que a transformada *wavelet* contínua (2.24) pode ser reescrita como

$$\mathbb{W}_\psi f(x', \ell) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{\mathbb{W}_\psi f}(k, \ell) e^{i\langle k, x' \rangle} d^n k, \quad (2.26)$$

onde

$$\widehat{\mathbb{W}_\psi f}(k, \ell) = \widehat{\psi}(\ell k) \widehat{f}(k), \quad (2.27)$$

é a transformada de Fourier de $\mathbb{W}_\psi f$. Como consequência temos o

Lema 1. Para qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbb{W}_\psi f(x', \ell)](k, \ell) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{W}_\psi f(x', \ell) e^{-i\langle k, x' \rangle} d^n x \\ &= \widehat{\psi}(\ell k) \widehat{f}(k), \end{aligned} \quad (2.28)$$

isto é, a transformada de Fourier da transformada *wavelet* de f é exatamente o produto da transformada de Fourier da *wavelet* analisadora ψ pela transformada de Fourier da função f .

Demonstração. Partindo diretamente da equação (2.24), têm-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\psi f(x', \ell) &= (\ell)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}(\ell^{-1}(x - x')) f(x) d^n x \\ &= \frac{(\ell)^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}(\ell^{-1}(x - x')) e^{i\langle k, x \rangle} \widehat{f}(k) d^n x d^n k \\ &= \frac{(\ell)^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}(\ell^{-1}(x - x')) e^{i\langle k, x \rangle} d^n x \widehat{f}(k) d^n k \\ &= \frac{(\ell)^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi}(\ell^{-1}(x - x')) e^{-i\langle k, x \rangle} d^n x \right] \widehat{f}(k) d^n k \end{aligned}$$

Neste ponto, faremos a seguinte mudança de variável

$$y = \ell^{-1}(x - x') \quad ,$$

assim,

$$x = \ell y + x' \quad ,$$

de modo que

$$d^n x = \ell^n d^n y \quad .$$

Retornando, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\psi f(x', \ell) &= \frac{(\ell)^{-n}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\overline{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-i\langle k, (\ell y + x') \rangle} \ell^n d^n y} \right] \widehat{f}(k) d^n k \\ \mathbb{W}_\psi f(x', \ell) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\overline{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-i\langle \ell k, y \rangle} d^n y} \right] e^{i\langle k, x' \rangle} \widehat{f}(k) d^n k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle k, x' \rangle} \overline{\widehat{\psi}(\ell k)} \widehat{f}(k) d^n k \end{aligned} \quad (2.29)$$

Isso significa que

$$\mathcal{F}[\mathbb{W}_\psi f(x', \ell)](k, \ell) = \overline{\widehat{\psi}(\ell k)} \widehat{f}(k) \quad . \quad (2.30)$$

Finalmente, o resultado segue imediatamente do fato que, no espaço de Fourier, as *wavelets* direcionais tratadas no próximo capítulo são reais.

□

Nota 2. O domínio de uma transformada *wavelet* é usualmente o espaço das funções de quadrado integrável L^2 , mas o **Lema 1** pode ser estendido para o espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, o qual é o dual do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, na **Nota 4** será observado que a classe de *wavelets* cônicas pertence ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Isto nos permite definir a transformada *wavelet* direcional de uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ de tal maneira que a transformada *wavelet* de f produza uma função no espaço de fase, cujas singularidades de alta-frequência são precisamente os elementos do conjunto de frente de ondas analítico de f .

2.2 Análise microlocal

As singularidades de uma dada distribuição u podem ser descritas por um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, chamado o suporte singular de u e denotado por $\text{SS}(u)$. Especificamente, se u é uma distribuição em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o $\text{SS}(u)$ é o menor subconjunto fechado relativo a Ω , tal que $u \in C^\infty(\Omega \setminus \text{SS}(u))$. Um grande avanço, introduzido por Hörmander e Duistermaat, foi a ideia de considerar que as singularidades da distribuição u são melhor descritas pelo subconjunto de todos os pares ordenados (x, k) do espaço de fase, chamado conjunto de frente de ondas $WF(u)$ de uma distribuição², o qual representa um refinamento da noção de suporte singular de uma distribuição. O conceito de conjunto de frente de ondas está fundamentado na análise que investiga a suavidade de uma distribuição próxima a um ponto em $\mathbb{R}^n$, via a propriedade de decaimento da transformada de Fourier de *localizações* em torno deste ponto. Neste caso, os pares (x, k) não somente nos dizem em quais pontos ocorrem uma singularidade, mas também especificam as direções singulares “ k ” no espaço dual responsáveis pelo “mau” comportamento da transformada de Fourier $\widehat{u}(k)$ quando $k \rightarrow \infty$, que por sua vez, são responsáveis pela não-suavidade de u , no ponto “ x ” no espaço das posições. Assim, usualmente estaremos interessados nos $k \neq 0$, já que faremos uso da transformada de Fourier. Em resumo, a ideia central da análise de Hörmander e Duistermaat, também chamada de *análise microlocal*, é a transferência do estudo de singularidades de distribuições do espaço das configurações, para o espaço de fase $\mathbb{R}_x^n \times (\mathbb{R}_k^n \setminus \{0\})$ de dimensão $2n$, muito embora as distribuições sejam definidas sobre o espaço n -dimensional [9].

2.2.1 A propagação de singularidades

As ideias embrionárias no estudo do conjunto de frente de ondas tiveram como principal motivação a resolução quantitativa e qualitativa de Equações Diferenciais Parciais (EDP), especialmente o estudo pormenorizado do problema de Cauchy com EDPs hiperbólicas. Na história da Matemática e da Física estão relatadas que, para compreender tais ideias e dar uma explicação concebível, muitos físicos teóricos e matemáticos fizeram amplo estudo sobre a teoria da propagação, reflexão e refração da onda. No último século muito progresso foi feito, particularmente por: J. Hadamard, I. G. Petrovsky, L. Garding, P. D. Lax [10] etc. Suas contribuições melhoraram considerav-

²Usaremos a abreviação $WF(u)$ para o Conjunto de Frente de Ondas (do inglês *Wavefront Set*).

elemente a compreensão das propriedades das soluções das EDP que descrevem vários tipos de movimento ondulatório. Com o intuito final de estudar um famoso sistema de EDPs hiperbólicas lineares de primeira ordem conhecido como equações de Maxwell, faremos uma superficial revisão na teoria das EDPs focalizando na busca pelos dois elementos primordiais na análise do conjunto de frente de ondas: a localização e a direção de propagação das oscilações com alta-frequência.

Iniciaremos apresentando o teorema clássico da propagação de singularidades e para tanto, consideraremos alguns exemplos, definições e teoremas muito bem discutidos na referência [11], começando com um problema envolvendo a EDP linear de primeira ordem no espaço $\mathbb{R}^2$:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y) \quad , \quad (2.31)$$

onde $a(x, y)$, $b(x, y)$ e $c(x, y)$ são funções infinitamente diferenciáveis, ou seja, de classe C^∞ , com $a(x, y)$ e $b(x, y)$ obedecendo a condição $a^2 + b^2 \neq 0$. A equação (2.31) pode ser resolvida usando o método das características [12]. A técnica consiste em encontrar

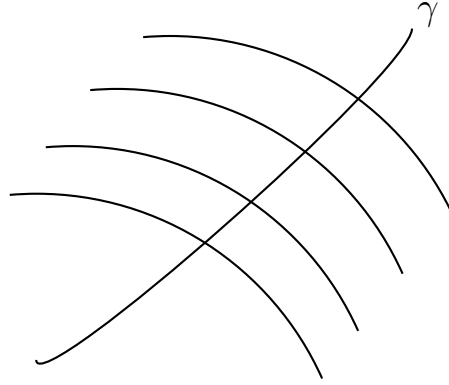


Figura 2.5: Curvas características planas.

curvas características ao longo das quais a EDP torna-se uma equação diferencial ordinária (EDO). A resolução da EDO ao longo das curvas características, é uma solução para a EDP original. As características de (2.31) são solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x, y) \\ \frac{dy}{ds} = b(x, y) \end{cases} . \quad (2.32)$$

Suponhamos que exista uma curva parametrizada

$$\gamma : \begin{cases} x = \xi(t) \\ y = \eta(t) \\ u = \zeta(t) \end{cases}, \quad (2.33)$$

onde $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ são continuamente diferenciáveis, obedecendo $\left[\frac{d\xi}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d\eta}{dt}\right]^2 \neq 0$. O problema que consiste em procurar uma função $u(x, y)$ satisfazendo a equação (2.31) e a condição inicial

$$u(\xi(t), \eta(t)) = \zeta(t), \quad (2.34)$$

é chamado *problema de Cauchy*. Para resolvermos este problema, primeiro temos que resolver o sistema de EDOs (2.32) com o dado inicial

$$\begin{cases} x(0) = \xi(t) \\ y(0) = \eta(t) \end{cases}, \quad (2.35)$$

de modo que a solução do problema de valor inicial é uma família de curvas com um parâmetro t , descritas por

$$\begin{cases} x = \xi(s, t) \\ y = \eta(s, t) \end{cases}. \quad (2.36)$$

A família de curvas integrais cobre uma vizinhança Ω de $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$. Se a matriz Jacobiana for não-nula, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0$, em qualquer ponto de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, então existe um homomorfismo do espaço (s, t) em (x, y) .

Como as curvas características são curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = c(x(s, t), y(s, t)) \\ u|_{s=0} = \zeta(t) \end{cases}, \quad (2.37)$$

integrando, chegamos à função $u(s, t)$. Assim, usando a transformação inversa de (2.36), obtemos a solução $u(x, y)$ do problema (2.31) e (2.32). Obviamente, já que as funções a e b dependem apenas das variáveis x e y , então, o procedimento de resolução dos dois problemas de valores iniciais listados acima, é equivalente a resolver o seguinte

problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = a & ; & \frac{dy}{ds} = b & ; & \frac{dz}{ds} = c \\ x|_{s=0} = \xi(t) & ; & y|_{s=0} = \eta(t) & ; & z|_{s=0} = \zeta(t) \end{cases} . \quad (2.38)$$

Os argumentos acima são usuais e também podem ser encontrados na Referência [13].

Vamos agora analisar a singularidade da solução para o problema acima. Nesse contexto, sabemos que singularidade é o antônimo de regularidade, de modo que na classe de funções suaves C^∞ , qualquer ponto onde a solução não é C^∞ , pode ser considerado como um ponto singular. Portanto, mesmo para uma função continuamente diferenciável $u(x, y)$, podemos também discutir o conjunto dos pontos singulares de suas derivadas. Suponha que a solução $u(x, y)$ da EDP (2.31) seja de classe C^∞ no ponto (x_1, y_1) , então, podemos representar uma curva suave,

$$\gamma : x = \xi_1(t) \quad ; \quad y = \eta_1(t) \quad , \quad (2.39)$$

passando por (x_1, y_1) , tal que a direção tangencial de γ seja transversal ao campo vetorial em todos os pontos. Denotando por $\zeta_1(t) = u(\xi_1(t), \eta_1(t))$ e usando os procedimentos mencionados acima, a integral de superfície da equação (2.31) passando por $(\xi_1(t), \eta_1(t), \zeta_1(t))$, nada mais é do que $u = u(x, y)$. Ademais, as funções $x(s, t)$ e $y(s, t)$ obtidas, são suaves, já que a solução $u(x, y)$ e a curva γ são, por hipótese, de classe C^∞ no ponto (x_1, y_1) . Além disso, a matriz Jacobiana

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = a \eta'_1(t) - b \xi'_1(t) \neq 0 \quad , \quad (2.40)$$

implica que $u(x, y)$ é de classe C^∞ em qualquer ponto ao longo de todas as características passando por $(x_1, y_1, u(x_1, y_1))$. Reciprocamente, se $u(x, y)$ não for de classe C^∞ em um ponto (x_2, y_2) , então $u(x, y)$ também não será de classe C^∞ ao longo da curva característica inteira que passa por (x_2, y_2) , devido à singularidade do problema de valor inicial da EDO. Em outras palavras, pode-se compreender que, *a singularidade de uma solução diferenciável se propaga ao longo das características da equação.*

Existem diferentes extensões da conclusão acima, uma delas, é que *se uma dada solução suave por partes da EDP (2.31) tem descontinuidade fraca (descontinuidade das derivadas) sobre uma curva, então esta curva deve ser característica da equação.* Para melhor compreendermos tal afirmação, consideremos o seguinte exemplo envolvendo um problema de valor inicial.

Exemplo 2. Resolva o problema de Cauchy

$$\begin{cases} -y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 8xy \\ u(x, 0) = f(x), \quad x > 0 \end{cases}. \quad (2.41)$$

Começaremos calculando as curvas características planas da EDP em (2.41). Procuramos então curvas $s \rightarrow (\alpha(s), \beta(s))$ satisfazendo a condição (2.32), isto é

$$\begin{cases} \alpha'(s) = -\beta(s) \\ \beta'(s) = \alpha(s) \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação por $\alpha(s)$, a segunda por $\beta(s)$ e somando, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha(s)\alpha'(s) + \beta(s)\beta'(s) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}[\alpha(s)^2 + \beta(s)^2] &= 0 \\ \Rightarrow \alpha(s)^2 + \beta(s)^2 &= \text{constante}. \end{aligned}$$

Portanto, as curvas características planas da EDP em (2.41) são círculos centrados na origem. Como a curva inicial γ é o semi-eixo $y = 0, x > 0$, então γ intercepta ortogonalmente cada característica plana em exatamente um ponto e todos os pontos em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ estão em algumas dessas características.

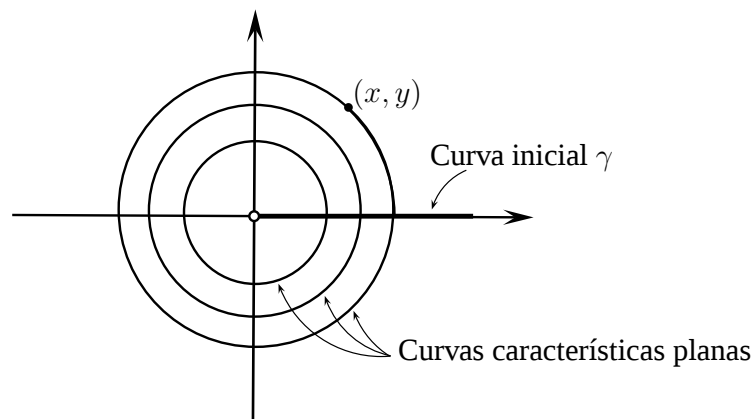


Figura 2.6: Círculos centrados na origem.

Ao longo do círculo de raio r centrado na origem, a EDP fica

$$\frac{d}{d\theta} [u(r \cos \theta, r \sin \theta)] = 8r^2 \sin \theta \cos \theta \quad .$$

Usando então coordenadas polares para integrar a EDP, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{\theta(x,y)} 8r^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta + u(r, 0) \\ &= 4r^2 \sin^2 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta(x,y)} + f(r) \\ &= 4y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Com isso, a solução geral do problema (2.41) é dada por

$$u(x, y) = 4y^2 + f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad , \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad . \tag{2.43}$$

Observe que na origem, como $\sqrt{x^2 + y^2}$ não é derivável, a diferenciabilidade de u depende de f . Por exemplo, se tomarmos a função f como sendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \text{ se } x > 1 \end{cases} \quad ,$$

obtemos como solução

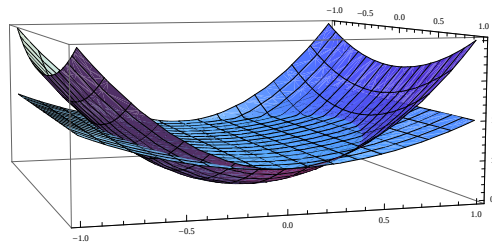


Figura 2.7: Gráfico da solução (2.44) do problema de Cauchy.

$$u(x, y) = \begin{cases} x^2 + 5y^2 & , \text{ se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 + 4y^2 & , \text{ se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad . \tag{2.44}$$

Note que $u \in C(\mathbb{R}^2)$ mas u não é diferenciável no círculo $x^2 + y^2 = 1$. A função u satisfaz a equação diferencial no interior e no exterior deste círculo, que é precisamente a característica plana passando pelo ponto $(1, 0)$.

Analisando graficamente essa solução $u(x, y)$ conforme a Figura 2.7, de fato observamos que existe uma “quina”, ou seja, uma não-diferenciabilidade no conjunto dos pontos do gráfico, cuja projeção no plano- xy é exatamente a equação $x^2 + y^2 = 1$. Assim, a descontinuidade fraca de u sobre o círculo nos fornece a característica da equação. $\square$

Desse ponto em diante, observaremos que as conclusões acima ainda são válidas para EDPs de maior ordem. Para ver isto, considere uma EDP linear de ordem m , dada por

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha \\ |\alpha| \leq m}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x_1, \dots, x_n) \quad (2.45)$$

de modo que sua solução fracamente descontínua é definida por:

Definição 5. *Suponhamos que exista uma superfície S de classe C^∞ no domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, onde a função $u(x_1, \dots, x_n)$ é definida. Se $u \in C^\infty(\Omega \setminus S)$ é uma solução da EDP (2.45), $u \in C^{m-1}(\Omega)$ e a m -ésima derivada de u tem descontinuidade de primeira classe em S , então u é chamada de **solução fracamente descontínua** da EDP (2.45).*

Para a EDP (2.45) a superfície $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ é chamada sua **superfície característica**, se a igualdade:

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha \\ |\alpha| = m}} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = 0 \quad (2.46)$$

é satisfeita em cada ponto sobre $\phi = 0$.

Teorema 2. *Se $u(x_1, \dots, x_n)$ é uma solução fracamente descontínua da EDP (2.45), então a superfície portando a descontinuidade fraca de u deve ser uma superfície característica.*

Demonstração. A prova deste teorema se encontra na Referencia [11], Pág. 4. $\square$

Nota 3. O teorema acima afirma que a descontinuidade da m -ésima derivada da solução da EDP (2.45), está sempre distribuída sobre a superfície característica. Este fato também é válido para singularidades fracas. Isto é, se $u(x_1, \dots, x_n)$ é uma solução de classe C^k da EDP (2.45) com $k \geq m$ e as $(k+1)$ -ésimas derivadas tem descontinuidade de primeira classe em S , então S deve ser uma característica da EDP (2.45).

Uma consequência imediata do **Teorema 2** e da **Nota 3** é que a singularidade de soluções fracamente singulares devem ser distribuídas sobre a superfície característica. No entanto, geralmente singularidades podem não aparecer em ponto algum de uma dada superfície característica. Assim, somos impelidos a fazer a seguinte pergunta: como podemos fornecer uma informação mais precisa sobre a distribuição das singularidades da solução? Mais adiante, seremos capazes de responder tal questão através do estudo do conjunto de frente de ondas.

Definição 6. Tomando a equação (2.46) como uma EDP de primeira ordem, suas características são chamadas bicaracterísticas da EDP (2.45) de ordem m .

Desse modo, denotaremos a equação (2.46) como

$$H\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\right) = 0 \quad . \quad (2.47)$$

Assim, aplicando o método usual das características, para uma dada solução ϕ , a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad (2.48)$$

satisfazendo a condição inicial $x_i(0) = x_{i0}$, é chamada de características da EDP (2.46). Denotando $p = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ sobre a superfície $\phi = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{ds} \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} H_{p_j} \quad . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Além disso, diferenciando a equação (2.46), temos

$$H_{x_i} + \sum_j H_{p_j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad .$$

Assim, os $p_i(s)$ satisfazem

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, \phi_x) \quad . \quad (2.50)$$

Consequentemente, $(x_1(s), \dots, x_n(s), p_1(s), \dots, p_n(s))$ satisfará o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n) \quad , \quad (2.51)$$

onde os argumentos de H são $x_1, \dots, x_n$ e $p_1, \dots, p_n$. A solução do sistema (2.51) é também chamada de faixa-bicaracterística da EDP (2.45) e a bicaracterística desta EDP é a projeção desta faixa-bicaracterística. Por exemplo, a projeção de uma faixa-bicaracterística em $\mathbb{R}^3$ gera uma curva caraterística γ no plano- xy , como mostra a Figura 2.8.

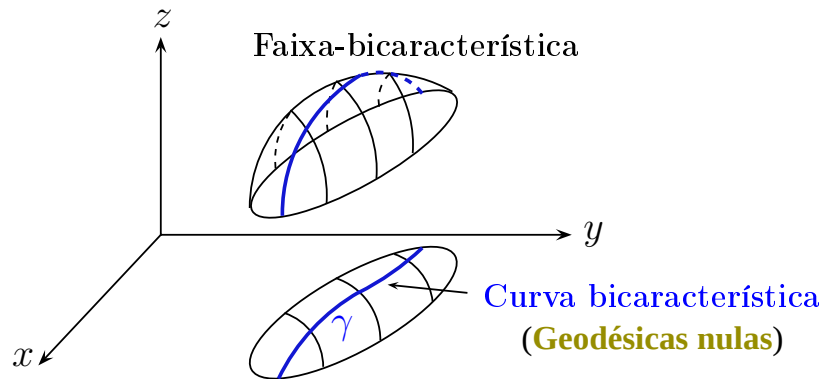


Figura 2.8: Projeção da faixa-bicaracterística em $\mathbb{R}^3$.

Agrupando essas ideias, enunciaremos o seguinte

Teorema 3. *As singularidades das soluções fracamente descontínuas da EDP linear de ordem m (2.45) sobre a superfície característica $\phi = 0$, se propagam ao longo das bicaracterísticas.*

Demonstração. A prova deste teorema se encontra na Referencia [11], Pág. 6. $\square$

Em outras palavras, uma característica ϕ é uma hipersuperfície nula³ de modo que, existe em cada ponto Q de ϕ uma única direção nula que é tanto normal quanto tangencial em ϕ . As curvas sobre ϕ que são tangenciais a este campo de direções nulas, são chamadas bicaracterísticas. Desse modo, as bicaracterísticas são geodésicas nulas (Teorema 3.2.2 da Referência [14]) ao longo das quais as singularidades das soluções da EDP (2.45) se propagam. Como exemplo, veja o problema discutido no Apêndice A, mostrando que uma onda óptica (raio de luz) se propaga em linha reta em um meio homogêneo.

Assim, a discussão acima indica dois importantes fatos:

- i) Com respeito às soluções de equações diferenciais parciais lineares, as oscilações com alta frequência se propagam ao longo das bicaracterísticas, como discutido para singularidades.
- ii) O caminho de propagação da oscilação com alta frequência, depende não somente da localização onde ocorre a oscilação (pontos singulares), mas também da direção de tais oscilação (curva característica).

Estes fatos nos dão um esclarecimento de que as singularidades das soluções devem ser descritas usando a *localização* e a *direção* como dois elementos fundamentais, e o caminho de propagação dependerá de ambos. Na verdade, este é um conceito imprescindível para a análise de singularidades na teoria moderna das equações diferenciais parciais, na análise de propagadores na teoria quântica de campos e em muitas outras áreas da física e da matemática. Com base neste conceito, discutiremos a partir de agora, o que vem a ser *análise microlocal* e *conjunto de frente de ondas*.

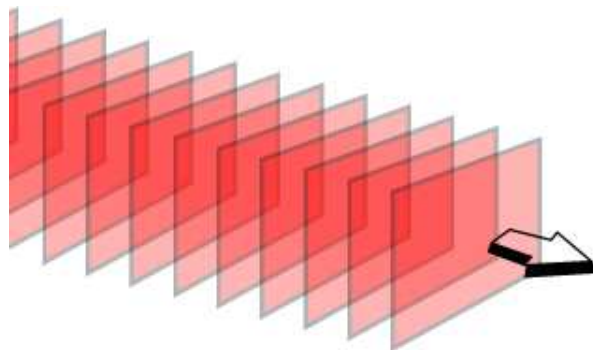


Figura 2.9: Frente de ondas planas.

³Um conhecido exemplo de uma hipersuperfície nula é o cone de luz.

2.2.2 Conjunto de frente de ondas

Vamos agora introduzir o método matemático necessário para investigar as singularidades de distribuições. A teoria da análise microlocal foi desenvolvida por Lars Hörmander (medalha Fields de 1962) e Johannes Jisse Duistermaat na década de 70 com o objetivo de analisar soluções de equações diferenciais parciais, conforme os artigos originais [15, 16]. A análise microlocal estuda o comportamento singular de uma distribuição no espaço de todos os possíveis pares ordenados (x, k) de *posição* e *momento* (o espaço de fase). Em particular, este estudo nos permite responder questões básicas, tais como:

- ✓ quando o produto de duas distribuições é bem definido, o que é formalmente mostrado pelo critério de Hörmander [9];
- ✓ em quais direções se propagam as polarizações das soluções das equações de Maxwell, o que é pormenorizadamente estudado na análise de propagação do conjunto de polarização [17].

Um conceito fundamental na análise microlocal, é o conceito de *conjunto de frente de ondas*. O termo “conjunto de frente de ondas” foi cunhado por Lars Hörmander, ao considerar a analogia existente entre o estudo da propagação de singularidades de distribuições via o método de análise das curvas características e a construção clássica da propagação de ondas de Huygens⁴.

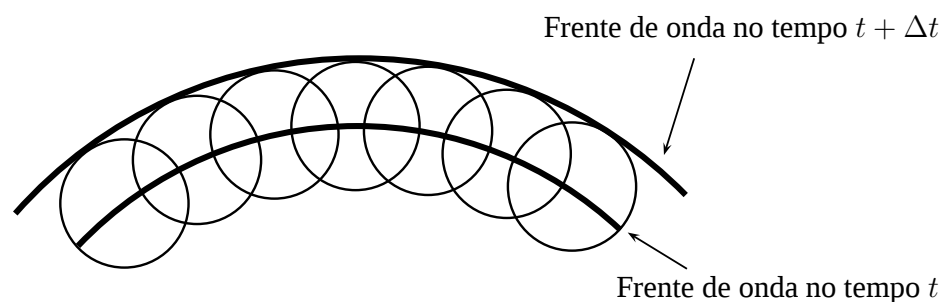


Figura 2.10: Propagação de ondas de Huygens.

A definição do conjunto de frente de ondas foi motivada por uma versão do teorema de Paley-Wiener, que caracteriza uma função suave, ou de classe C^∞ , com

⁴Huygens concluiu que cada ponto localizado na frente de onda se comporta como uma nova fonte pontual de emissão de novas ondas esféricas, que ao se somarem, formam uma nova frente de onda e assim consecutivamente.

suporte compacto por uma condição de decrescimento assintótico sobre sua transformada de Fourier.

Teorema 4 (Teorema de Paley-Wiener para C_0^∞). *O espaço das funções suaves com suporte compacto é isomorfo, via transformada de Fourier, ao espaço de funções holomorfas inteiras. Em outras palavras, uma função inteira F sobre $\mathbb{C}^n$ é a transformada de Fourier de uma dada distribuição $u \in C_0^\infty$ infinitamente diferenciável com suporte compacto se, e somente se, para cada inteiro $N > 0$ existe uma constante C_N , tal que a estimativa*

$$|F(z)| \leq C_N (1 + |z|)^{-N} e^{B|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad (2.52)$$

é satisfeita, onde B é uma constante positiva.

Demonstração. A prova desse teorema se encontra na Referência [18], Teorema 7.3.1. □

Em particular, se u pertence ao espaço dual das funções infinitamente diferenciáveis $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, então sobre $\mathbb{R}^n$ têm-se o seguinte

Corolário 1. *Uma distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ é suave se, e somente se, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe uma constante C_N tal que a estimativa*

$$|\widehat{u}(k)| \leq C_N (1 + |k|)^{-N}, \quad (2.53)$$

é satisfeita.

Porém, considerando o contexto em que a distribuição $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ não é suave; ainda assim pode ocorrer que em certas direções k , sua transformada de Fourier $\widehat{u}(k)$ seja assintoticamente limitada. Neste caso, o conjunto formado pelos valores de k para os quais a transformada de Fourier $\widehat{u}(k)$ ainda satisfaz a estimativa (2.53) é chamado *conjunto de direções regulares* de $u(x)$. Com efeito, as direções ao longo das quais $\widehat{u}(k)$ não decai suficientemente rápido servirão para caracterizar as singularidades de $u(x)$.

Definição 7 (Conjunto de frente de ondas). *Seja $u(x) \in \mathcal{E}'(X)$ uma distribuição de suporte compacto em um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$. Então, o conjunto*

$$WF(u) = \left\{ (x_0, k) \in X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) ; k \in \Sigma_X(u) \right\} , \quad (2.54)$$

*é chamado **conjunto de frente de ondas** de u , onde $\Sigma_X(u)$ é o complementar do conjunto de todas as direções $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ para os quais existe uma vizinhança cônica Γ de k , tal que a transformada de Fourier $\hat{u}$ é de decrescimento rápido em Γ .*

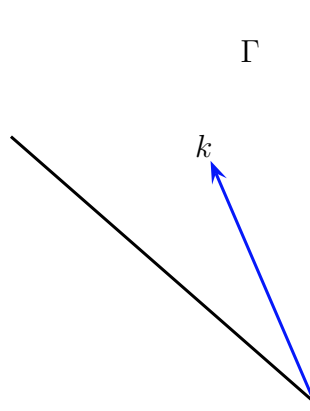


Figura 2.11: Uma vizinhança cônica de k .

Uma consequência imediata da **Definição 7**, é que um ponto x_0 é um ponto **não-singular** (ou regular) de uma distribuição arbitrária $u(x)$, não necessariamente de suporte compacto, em um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, se existe uma função *cutoff* $\phi \in C_0^\infty(V)$, com suporte compacto em uma vizinhança V de x_0 , de tal forma que a transformada de Fourier

$$\widehat{u\phi}(k) = \int u(x)\phi(x)e^{-ikx} d^n x , \quad (2.55)$$

é de decrescimento rápido para todas as direções $k \in \mathbb{R}^n$. Em particular, se x_0 é um ponto singular da distribuição u e a função *cutoff* $\phi \in C_0^\infty(V)$, com $\phi(x_0) \neq 0$, então o produto $u\phi$ é de suporte compacto e é singular no ponto x_0 .

Em suma, dada uma distribuição $u(x)$, não necessariamente de suporte compacto, em um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^n$, para determinar se $(x_0, k_0) \in WF(u)$ é necessário:

- i) localizar $u(x)$ em torno de x_0 via uma função *cutoff* $\phi \in C_0^\infty(V)$ com suporte em uma vizinhança V de x_0 ;

- ii) calcular a transformada de Fourier de $(u\phi)(x)$;
- iii) identificar as direções no espaço- k de decaimento rápido de $(\widehat{u\phi})(k)$.

Para melhor fixarmos tal conceito, considere os exemplos a seguir.

Exemplo 3. Considere um pequeno “ponto” espalhador representado pela distribuição $V(x) = \delta(x)$. Assim, qual é o conjunto de frente de ondas da distribuição delta de Dirac $WF(\delta)$?

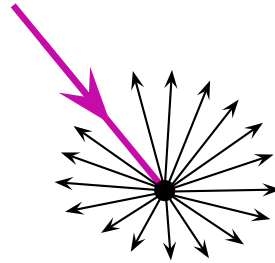


Figura 2.12: Um ponto espalhador.

Como a transformada de Fourier

$$(\widehat{V\phi})(k) = \int \delta(x)\phi(x)e^{-ikx} dx = \phi(0) = \text{Constante} ,$$

não decai em nenhuma direção, então o conjunto de frente de ondas é dado por

$$WF(\delta) = \left\{ (0, k) ; k \neq 0 \right\} ,$$

ou seja, no espaço- k todas as direções são direções de propagação de singularidades.

□

Exemplo 4. Considere as duas distribuições definidas por

$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left[\frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} \right] dx \quad (2.56)$$

e

$$v(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left[\frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} \right] dx \quad (2.57)$$

e calcule seus respectivos conjuntos de frente de ondas. A transformada de Fourier das distribuições (2.56) e (2.57) são, respectivamente [9]:

$$\widehat{u}(k) = -2\pi i \theta(-k) \quad (2.58)$$

e

$$\widehat{v}(k) = 2\pi i \theta(k) \quad (2.59)$$

onde θ são as funções de Heaviside

$$\theta(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } k > 0 \\ 0 & , \text{ se } k \leq 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

e

$$\theta(-k) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } k \geq 0 \\ 1 & , \text{ se } k < 0 \end{cases} . \quad (2.61)$$

Consequentemente, os conjuntos de frente de ondas de u e v são dados por

$$WF(u) = \{(0, k) ; k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\} \quad (2.62)$$

e

$$WF(v) = \{(0, k) ; k \in \mathbb{R}_- \setminus \{0\}\} \quad (2.63)$$

□

Listaremos agora, algumas das propriedades mais úteis do conjunto de frente de ondas de distribuições, as quais usaremos nos próximos capítulos:

- a) o conjunto de frente de ondas $WF(u)$ é cônico, isto é, se $(x, k) \in WF(u)$ então $(x, \lambda k) \in WF(u)$ para toda constante real $\lambda > 0$;
- b) para qualquer operador diferencial parcial linear P , com coeficientes C^∞ , o conjunto de frente de ondas $WF(Pu) \subseteq WF(u)$;
- c) se u e v são distribuições pertencentes ao dual do espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, com conjuntos de frente de ondas $WF(u)$ e $WF(v)$, respectivamente, então o conjunto de frente de ondas da soma $(u + v) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ está contido em $WF(u) \cup WF(v)$;
- d) o conjunto de frente de ondas $WF(u) = \emptyset$ se a distribuição u é suave;
- e) para toda função suave ϕ com suporte compacto, têm-se que $WF(\phi u) \subset WF(u)$;

- f)* a projeção de $WF(u)$ sobre a primeira coordenada, $\pi_1(WF(u)) \rightarrow X$, corresponde ao suporte singular $SS(u)$;
- g)* a projeção de $WF(u)$ sobre a segunda coordenada, $\pi_2(WF(u)) \rightarrow \Sigma_X(u)$, corresponde ao cone em torno de k . Este cone contém todas as direções responsáveis pelo aparecimento de uma singularidade no ponto x_0 .

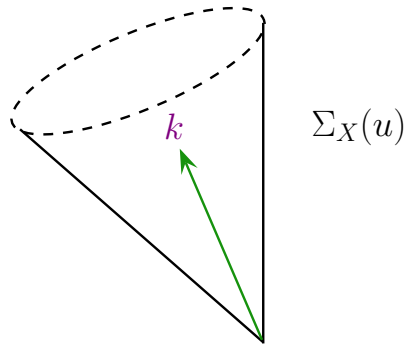


Figura 2.13: Cone em torno de k .

As propriedades de projeção serão usadas no **Capítulo 4**, para mostrar que o conjunto de frente de ondas é um caso particular do conjunto de polarização definido por Nils Dencker em [6].

Capítulo 3

Transformada *Wavelet* Direcional: Valor Limite Distribucional e Conjunto de Frente de Onda

As *wavelets* são objetos relativamente novos em matemática; assim como a teoria das distribuições, elas têm encontrado inúmeras aplicações nos campos da matemática pura e aplicada, na física e engenharia. A alguns anos J.-P. Antoine e colaboradores estudaram com detalhes uma classe particular de *wavelets* direcionais, a saber as *wavelets* cônicas, com o objetivo de determinar as simetrias de um dado padrão com respeito à rotação e dilatação [19, 20]. No entanto, as exigências da matemática moderna, da física-matemática e da engenharia trouxeram a necessidade de incorporar ideias da análise de *wavelets* na teoria das distribuições e vice-versa. Nos últimos anos, alguns autores tem estudado a relação entre *wavelets* e a teoria das distribuições (veja por exemplo [21–36] e Referências lá citadas). Particularmente, nas Referências [25, 27, 31] os autores investigaram as singularidades de distribuições temperadas via a transformada *wavelet*. Na Referência [25] Moritoh introduziu uma classe de transformada *wavelet* como uma versão contínua e microlocal da decomposição Littlewood-Paley e comparou o conjunto de frente de ondas definido via sua transformada *wavelet* com o conjunto de frente de ondas definido por Hörmander em [18]. Mais recentemente, Pilipović e Vuletić [31] deram algumas informações mais precisas concernente ao trabalho de Moritoh. Eles consideraram uma transformada *wavelet* especial de Moritoh e deram novas definições para o conjunto de frente de ondas de uma distribuição temperada usando essas transformadas *wavelets* de Moritoh. O principal resultado em [31]

foi que estes conjuntos de frente de ondas são iguais ao conjunto de frente de ondas no sentido Hörmander para os casos $n = 1, 2, 4, 8$. Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 8\}$, eles combinaram resultados para dimensões $n = 1, 2, 4, 8$ e caracterizaram o conjunto de frente de ondas ξ -dimensional, onde os ξ são representados como produtos de pontos não-nulos de $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \dots, \mathbb{R}^{n_s}$ sendo $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$ tal que $n_i \in \{1, 2, 4, 8\}$, $i = 1, 2, \dots, s$. No artigo [27], Navarro apresentou uma *wavelet* analisadora em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ e um grupo de ação irredutível, com a propriedade de que a transformada *wavelet* associada de uma distribuição temperada é singular ao longo do conjunto de frente de ondas da distribuição. O resultado mais relevante deste artigo é a relação entre a noção de conjunto de frente de ondas e a transformada *wavelet* de distribuições em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Deve-se notar ainda que, a parte central da construção de Navarro – a ação do grupo irredutível sobre $L^2(\mathbb{R}^2)$ – é similar à construção de Kutyniok e Labate [37], onde eles consideram uma noção diferente de conjunto de frente de ondas baseado no conceito de *transformada shearlet contínua*.

Neste capítulo, usando a classe de *wavelets* cônicas, as quais tem suporte estritamente contido em um cone convexo próprio no espaço- k das frequências, mostramos que uma distribuição f pertencente ao espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pode ser obtida como uma soma finita de valores limites de funções analíticas resultantes da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada *wavelet* contínua de f com respeito à *wavelet* analisadora¹ ψ . Além disso, caracterizamos o conjunto de frente de ondas analítico de uma distribuição temperada em termos do comportamento de sua transformada *wavelet* direcional. Os principais resultados deste capítulo são descritos pelo **Lema 2** e pelo **Teorema 5**. No **Lema 2**, provamos que a transformada *wavelet* distribucional com respeito à *wavelet* direcional, é uma função analítica de crescimento lento (ou temperado). Ademais, usando este Lema, mostramos que as distribuições temperadas podem ser obtidas como uma soma finita de valores limites de funções analíticas de crescimento lento, cujo resultado se encontra no **Teorema 5**. Na Seção 3.2, aplicamos o **Teorema 5** no estudo do conjunto de frente de ondas analítico de distribuições temperadas. Mostramos que, para uma dada distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada de f com respeito à *wavelet* cônica é definida de tal maneira que a transformada *wavelet* direcional de f produz uma função no espaço de fase, cujas singularidades de alta-frequência são precisamente os elementos do conjunto de frente de ondas analítico de f . Em [39], Hörmander introduziu a noção

¹Do termo em inglês *analyzing wavelet*, que significa a dilatação e translação de uma função básica única $\psi_{0,1}$ também chamada de **wavelet “mãe”**, conforme Antoine e colaboradores na Referência [38].

de conjunto de frente de ondas analítico $WF_a(f)$ de uma distribuição f , como um subconjunto do espaço cotangente $T^*(X) \setminus \{0\}$, cuja projeção sobre X coincide com o suporte singular analítico de f . Sua definição baseia-se no emprego da transformada de Fourier de f . Porém neste capítulo, apresentamos uma definição alternativa para o conjunto $WF_a(f)$, em termos de valores limites de funções analíticas decorrentes da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada *wavelet* contínua de f com respeito a ψ .

3.1 Valores limites distribucionais

Nesta seção a transformada *wavelet* direcional será usada para mostrar que funções analíticas que satisfazem uma condição de crescimento temperado (ou crescimento lento), obtêm valores limites distribucionais no espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Antes porém, a fim de definir uma *wavelet* direcional, precisamos relembrar algumas terminologias sobre cones.

Um conjunto aberto $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um **cone** se C é invariante sob homotetia positiva, isto é, para todo $\lambda > 0$ tem-se que $\lambda C \subset C$. Propriedades do cone:

- ✓ Um cone C é um cone conectado aberto se C é um conjunto conectado aberto. Lembramos que um conjunto é conectado quando ele não pode ser particionado em dois ou mais subconjuntos não vazios e abertos, segundo a topologia induzida sobre o conjunto.
- ✓ Um cone C é chamado convexo se $C + C \subset C$, ou seja, se para todo $x, y \in C$ e quaisquer escalares $a > 0$ e $b > 0$, tem-se que $ax + by \in C$.
- ✓ Um cone C é chamado próprio se, e somente se, $x \in C$ e $x \neq 0$ implicar em $-x \notin C$.
- ✓ Um cone C' é chamado compacto em C , se dadas as projeções $\mathbf{pr}\overline{C}' \stackrel{\text{def}}{=} \overline{C}' \cap S^{n-1}$ e $\mathbf{pr}C \stackrel{\text{def}}{=} C \cap S^{n-1}$ tem-se que $\mathbf{pr}\overline{C}' \subset \mathbf{pr}C$, onde S^{n-1} é a hipersfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Para tal cone, escreveremos $C' \Subset C$.
- ✓ Dado um cone C no espaço- x , associaremos a ele um cone convexo fechado C^* no espaço- k , sendo $C^* = \{k \in \mathbb{R}^n; \langle k, x \rangle \geq 0, \forall x \in C\}$. O cone C^* é chamado cone dual de C .

A menos de uma especificação em contrário, consideraremos que todos os cones tenham seus vértices na origem do sistema.

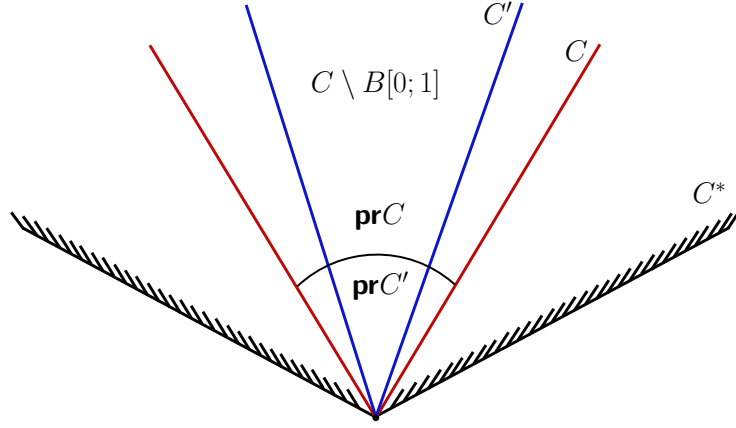


Figura 3.1: Cone C , cone dual C^* e cone compacto C' .

Definição 8. Uma wavelet $\psi(x)$ é denominada **direcional** se o suporte de sua transformada de Fourier $\hat{\psi}(k)$ está contido em um cone próprio e convexo no espaço- k das frequências, com vértice na origem. Ela também será direcional, se for possível definí-la como uma união finita de cones disjuntos, e neste caso, ela é usualmente chamada ψ **multidirecional**.

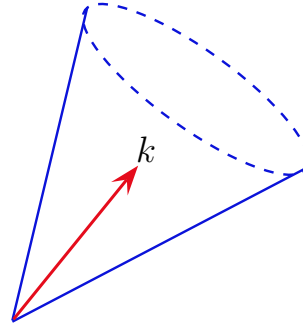


Figura 3.2: Cone próprio e convexo.

Nota 4. De acordo com a Referência [19], para chegarmos a uma wavelet genuinamente direcional $\psi(x)$, é suficiente considerarmos uma função suave $\hat{\psi}(k)$ com suporte estritamente contido no cone convexo C^* no espaço- k das frequências, tendo um número arbitrariamente grande de momentos tendendo a zero sobre a fronteira do cone suporte e se comportando dentro do cone dual C^* como uma função produto

$P(k_1, k_2, \dots, k_n)e^{-\langle k, y \rangle}$, onde $y \in C$ e $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$ denota um polinômio de n variáveis $k_i \in C^*$, $i = 1, 2, \dots, n$. Neste caso, a *wavelet* direcional resultante é chamada de **cônica**. Note que para todo $y \in C$, a função exponencial de $k \in C^*$ cuja lei é dada por $e^{-\langle k, y \rangle}$ pertence ao espaço das funções de decaimento rápido (espaço de Schwartz) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e consequentemente, $P(k_1, k_2, \dots, k_n)e^{-\langle k, y \rangle} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Visto que a transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ é um isomorfismo topológico² de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue de imediato que $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Em particular, a partir da **Nota 4** apresentada acima, podemos reescrever a *wavelet* direcional (2.26) da seguinte forma

$$\mathbb{W}_\psi f(z, \ell) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int P(\ell k) \widehat{f}(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^n k \quad , \quad (3.1)$$

onde introduzimos a variável complexa $z = x + i\ell y \in \mathbb{R}^n + iC$. Lembremos que a variável “ x ” aqui apresentada, corresponde à localização da transformada *wavelet* contínua de f com respeito à *wavelet* “mãe” ψ . Portanto, é evidente a partir da equação (3.1), que a transformada *wavelet* direcional, $\mathbb{W}_\psi f(x, \ell)$, de uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é naturalmente extensível como uma função analítica cujo domínio está contido em $\mathbb{C}^n$, para cada parâmetro de escala arbitrário, porém fixado, $\ell > 0$. Além disso, já que o cone dual C^* é um conjunto regular conforme a Referência [40], Pág.98 e 99, tem-se que

$$\text{supp}(\widehat{\mathbb{W}_\psi f}) = \text{supp}(\widehat{\psi}) \subseteq C^* \quad . \quad (3.2)$$

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Então, denotaremos por $\mathcal{O}(\Omega)$ o espaço de funções holomorfas³ em Ω . Seja C um cone convexo aberto próprio e C' um cone compacto arbitrário contido em C . Denotaremos por $T(C')$ o subconjunto de $\mathbb{C}^n$ constituído por todos os elementos cuja parte imaginária pertence ao cone compacto C' ; chamaremos tais conjuntos de **domínio tubo**. Assim, definiremos como tubo, o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}^n$ tais que

$$T(C') = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n; \ x \in \mathbb{R}^n, y \in C', |y| < \delta \right\} \quad . \quad (3.3)$$

onde $\delta > 0$ é uma constante arbitrária.

²Isomorfismo topológico é um isomorfismo linear contínuo com inversa contínua, também conhecido na literatura como **homeomorfismo**.

³São funções analíticas ou também chamadas de funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{C}^n$.

Definição 9. Seja Z uma vizinhança complexa de $\mathbb{R}^n$. Uma função analítica $f(z) \in \mathcal{O}(Z \cap T(C'))$ será de **crescimento temperado** se existir um inteiro $\alpha > 0$ e uma constante $\mathbf{M}$, dependente do cone C' , tal que a estimativa

$$|f(x + iy)| \leq \mathbf{M}(C')|y|^{-\alpha} \quad , \quad (3.4)$$

é satisfeita, para todo ponto $z = x + iy$ no domínio $Z \cap T(C')$.

Definição 10. Para cada número real s define-se o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ de ordem s como o espaço de todas as $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Este espaço é munido com a norma

$$\|f\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |\hat{f}(k)|^2 d^n k \right)^{1/2} .$$

Lema 2. Para uma escala arbitrária, porém fixada, $\ell \in \mathbb{R}_+$, suponhamos que a função $\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)$, resultante da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada de wavelet contínua de $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com respeito à wavelet direcional ψ , é holomorfa no domínio $Z \cap T(C')$. Então, a função $\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)$ é de **crescimento temperado** como uma função da variável “ z ”.

Demonstração. Com efeito, consideremos a transformada wavelet direcional (3.1) no domínio do cone dual C^*

$$\mathbb{W}_\psi f(x + i\ell y, \ell) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C^*} P(\ell k) \hat{f}(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^n k \quad . \quad (3.5)$$

Como $P(\ell k)$ é um polinômio na variável $k \in C^*$ e $\hat{f}(k)$ é uma distribuição temperada, de acordo com o Teorema 7.13 da Referência [41], segue que a função produto $P(\ell k) \hat{f}(k)$ é também uma distribuição temperada. Note que podemos escrever

$$P(\ell k) = P_m(\ell k) + P_{m-1}(\ell k) + \cdots + P_0 \quad , \quad (3.6)$$

onde P_j é homogêneo de grau j e $P_m(\ell k) \neq 0$ quando $k \neq 0$. Daí, conclui-se que, para alguma constante $\mathbf{M}$, temos a seguinte desigualdade

$$|P(\ell k)| \leq \mathbf{M} \ell^m |P(k)| \quad . \quad (3.7)$$

Isto implica que

$$|P(\ell k)\widehat{f}(k)| \leq \mathbf{M}\ell^m |P(k)\widehat{f}(k)| \quad . \quad (3.8)$$

Além disso, o quadrado de $(1 + |k|)^s |P(k)\widehat{f}(k)|$ pode ser estimado pela função $(1 + |k|)^{2(s+N)}$ que é integrável se $s < -\frac{n}{2} - N$,⁴ ou seja, existe uma constante $\mathbf{M}_1$ tal que $P(k)\widehat{f}(k)$ satisfaz a estimativa

$$|P(k)\widehat{f}(k)| \leq \mathbf{M}_1 (1 + |k|)^N \quad (3.9)$$

e consequentemente,

$$|P(\ell k)\widehat{f}(k)| \leq \ell^m \mathbf{M}_2 (1 + |k|)^N \quad . \quad (3.10)$$

Usando o teorema binomial, a estimativa acima pode ser reescrita como:

$$|P(\ell k)\widehat{f}(k)| \leq \ell^m \mathbf{M}_2 \sum_{j=0}^N c_j |k|^j \quad . \quad (3.11)$$

Agora, seja C' um cone compacto, isto é, $C' \Subset C$. Então, existe uma constante $c > 0$ de modo que o produto interno obedeça à desigualdade $\langle k, \ell y \rangle \geq c|k||\ell y|$, para todo $k \in C^*$ e para todo $y \in C'$. Portanto, para $x + i\ell y \in \mathbb{R}^n + iC'$, temos

$$\left| \mathbb{W}_\psi f(x + i\ell y, \ell) \right| \leq \frac{\ell^m}{(2\pi)^n} \left| \int_{C^*} P(\ell k)\widehat{f}(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^n k \right| \quad . \quad (3.12)$$

Como $|e^{i\langle k, z \rangle}| = |e^{i\langle k, x \rangle}| |e^{-\langle k, \ell y \rangle}| = |e^{-\langle k, \ell y \rangle}| = e^{-\langle k, \ell y \rangle}$, segue que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{W}_\psi f(x + i\ell y, \ell) \right| &\leq \frac{\ell^m}{(2\pi)^n} \int_{C^*} |P(\ell k)\widehat{f}(k)| e^{-\langle k, \ell y \rangle} d^n k \\ &\leq \frac{\ell^m \mathbf{M}_2}{(2\pi)^n} \sum_{j=0}^N c_j \int_{C^*} |k|^j e^{-c|k||\ell y|} d^n k \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

⁴ Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|)^{2(s+N)} d^n k = \sigma^{n-1} \int_0^\infty (1 + r)^{2(s+N)} r^{n-1} dr \quad ,$$

que é finita se, e somente se, $2(s+N) < -n$ uma vez que o integrando depende “grosseiramente” de $r^{2(s+N)+n-1}$ para r muito grande.

Conforme a Proposição 32 da Referência [40], tem-se

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{W}_\psi f(x + i\ell y, \ell) \right| &\leq \frac{\ell^m \mathbf{M}_2}{(2\pi)^n} \sum_{j=0}^N c_j \sigma^{n-1} \int_0^\infty t^{n+j-1} e^{-c|\ell y|t} dt \\ &\leq \mathbf{M}_3(C') |\ell y|^{-(n+N)} , \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde σ^{n-1} é a área da hipersfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Logo, conseguimos um majorante para $\left| \mathbb{W}_\psi f(x + i\ell y, \ell) \right|$ conforme a estimativa (3.4), de modo que a função holomorfa $\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)$ é de **crescimento temperado** como uma função da variável “ z ”. $\square$

Consideremos agora, um cone aberto C de forma que $C = \bigcup_{j=1}^m C_j$, $m < \infty$, onde cada C_j é um cone convexo aberto e próprio. Se tomarmos o cone compacto como sendo $C' \subseteq C$, isso significa que $C' = \bigcup_{j=1}^m C'_j$, $m < \infty$, com cada $C'_j \subseteq C_j$. Ademais, definiremos os conjuntos

$$C_j^* = \left\{ k \in \mathbb{R}^n; \langle k, x \rangle \geq 0, \forall x \in C_j \right\} , \quad (3.15)$$

como sendo os cones duais de cada C_j , tais que cada cone dual C_j^* , $j = 1, 2, \dots, m$, têm as propriedades de que os conjuntos

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^m C_j^* \right\} \\ C_j^* \cap C_k^*, \quad j \neq k \text{ para } j, k = 1, 2, \dots, m \end{cases} , \quad (3.16)$$

sejam de medida nula a Lesbegue. Além disso, admitiremos que a função produto $P(\ell k) \widehat{f}(k)$ possa ser escrita como

$$P(\ell k) \widehat{f}(k) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(k) P(\ell k) \widehat{f}(k) , \quad (3.17)$$

onde $\lambda_j(k)$ denota a função característica de C_j^* , $j = 1, 2, \dots, m$. Consideraremos também a propriedade assintótica de $\mathbb{W}_\psi f(x, \ell)$ quando $\ell \rightarrow 0$ para $z = x + i\ell y \in Z \cap T(C')$.

Teorema 5. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada. Então f pode ser expressa*

como uma soma finita do tipo

$$f = \sum_{j=1}^m b_{C'_j} \left(\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \right) , \quad (3.18)$$

onde cada função $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$, resultante da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada de wavelet contínua de cada $f_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ com respeito à wavelet direcional ψ , é:

i) holomorfa no domínio $Z \cap T(C'_j)$;

ii) de crescimento temperado,

onde os $b_{C'_j} \left(\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \right)$ denotam os valores limites em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Com efeito, observemos que a distribuição f é uma combinação linear de m valores limites de funções analíticas. Assim, ao fazermos uso da **Definição 9** e do **Lema 2** m vezes, provamos que cada função holomorfa $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$ é de crescimento temperado. Escolha agora $y_0 \in C'_j$ e escreva $y = \ell y_0$. Esta escolha define um semi-espaço para $0 \neq y_0 \in C'_j$. Note que com $y = \ell y_0$ na equação (3.1), tem-se que $\ell \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow 0$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \langle b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j), \varphi \rangle &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{W}_\psi f_j(x + iy, \ell) \varphi(x) d^n x \right] \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_j^*} \lambda_j(k) P(\ell k) \widehat{f}(k) e^{i\langle k, x+iy \rangle} d^n k \right] \varphi(x) d^n x \right\} . \end{aligned}$$

Como $e^{i\langle k, x+iy \rangle} = e^{i\langle k, x \rangle} e^{-\langle k, y \rangle}$, temos

$$\langle b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j), \varphi \rangle = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i\langle k, x \rangle} d^n x \right] \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_j^*} \lambda_j(k) P(\ell k) \widehat{f}(k) e^{-\langle k, y \rangle} d^n k \right] \right\} ,$$

usando a definição (2.20) de transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} \langle b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j), \varphi \rangle &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_j^*} \lambda_j(k) P(\ell k) \widehat{\varphi}(-k) \widehat{f}(k) e^{-\langle k, y \rangle} d^n k \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_j^*} \lambda_j(k) \widehat{f}(k) \widehat{\varphi}(-k) d^n k = \langle f_j, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Por conseguinte, usando a linearidade da distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e as restrições em (3.16), obtemos que

$$\begin{aligned}\langle f, \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle f_j, \varphi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j), \varphi \rangle .\end{aligned}\tag{3.19}$$

Assim, para $y \in C'$ e $y \rightarrow 0$, o limite de cada $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$ existe em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, em outras palavras, a distribuição f admite ser expressa como valor limite distribucional $\sum_{j=1}^m b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j)$ no sentido da convergência fraca. Mas, como o espaço de Schwartz das funções de decaimento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é Montel⁵, conforme Proposição 34.6 da Referência [42], então f também é expressa como valor limite distribucional $\sum_{j=1}^m b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi f_j)$ no sentido da convergência forte. $\square$

3.2 Conjunto de frente de ondas analítico

Pelo que vimos na seção anterior que uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pode ser obtida como uma soma finita de valores limites de funções analíticas $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$ com $j = 1, 2, \dots, m$, resultante da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada *wavelet* contínua de cada f_j com respeito à *wavelet* direcional ψ e onde uma condição de crescimento temperado foi descrita para caracterizar tais valores limites. Nesta seção, nosso objetivo é traduzir a referida condição de crescimento em termos do conjunto de frente de ondas analítico. Para tanto, consideremos a seguinte definição

Definição 11. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada, tal que*

$$f = b_C(\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)) ,$$

onde $b_C(\mathbb{W}_\psi f(z, \ell))$ denota o valor limite no sentido da convergência forte em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

⁵Um espaço vetorial topológico E é chamado um espaço Montel, se E é localmente convexo, Hausdorff, *Barreled* e se cada subconjunto limitado e fechado de E é compacto. Veja a Definição 34.2 na Referência [42] para mais informações.

de uma função analítica $\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)$, resultante da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada wavelet contínua de f com respeito à wavelet direcional ψ . Seja $q = (x_0, k_0)$ um elemento do espaço de fase. Então $q \notin WF_a(f)$ se, e somente se, existir uma constante $\mathbf{M}(C')$ e um inteiro $N > 0$ tal que a estimativa abaixo é satisfeita

$$|\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)| \leq \mathbf{M}(C') |\ell y|^{-N}, \quad z = x + i\ell y \in Z \cap T(C') . \quad (3.20)$$

O conjunto $WF_a(f)$ é chamado de **conjunto de frente de ondas analítico** de f .

Proposição 1. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o valor limite, no sentido distribucional, de uma função analítica $\mathbb{W}_\psi f(z, \ell)$ no domínio $Z \cap T(C')$, resultante da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada wavelet contínua de f com respeito à wavelet direcional ψ e que satisfaz a estimativa (3.20). Então, na vizinhança de x_0 a fibra $WF_a(f)|_{x_0}$ está contida no cone dual C^* .*

Demonstração. Para tanto, seja $WF_a(f)|_{x_0} = \{k \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}); (x_0, k) \in WF_a(f)\}$ a fibra sobre x_0 (veja a **Nota 5**). Seja $\{C_j^*\}_{j \in L}$ uma cobertura finita do cone convexo próprio fechado de C^* e considere a decomposição da função produto $P(\ell k) \hat{f}(k)$ como segue

$$P(\ell k) \hat{f}(k) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(k) P(\ell k) \hat{f}(k) , \quad (3.21)$$

onde os $\lambda_j(k)$ denotam a função característica de C_j^* , $j \in L$. Então, via o **Teorema 5**, tal decomposição induz uma representação de f na forma de uma soma de valores limites de funções holomorfas $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$, tal que $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \rightarrow f_j$ na topologia forte do espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $y \rightarrow 0$ sendo $y \in C_j' \subseteq C_j$. De acordo com o **Lema 2**, a família de funções $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$ satisfaz a estimativa

$$|\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)| \leq \mathbf{M}(C') |\ell y|^{-N}, \quad z = x + i\ell y \in Z \cap T(C') , \quad (3.22)$$

exceto quando $\langle k, Y \rangle < 0$ para $k \in C_j^*$ e para $Y \in -C_j'$, com $|Y| < \delta$. Desse modo, os cones de direções singulares, responsáveis pelas singularidades destes valores limites, estão contidos nos cones duais C_j^* , dos cones base C_j e consequentemente, temos a inclusão

$$WF_a(f) \subset \mathbb{R}^n \times \left\{ \bigcup_{j \in L} C_j^* \right\} . \quad (3.23)$$

Assim, fazendo um refinamento da cobertura $\{C_j^*\}_{j \in L}$ e reduzindo-a ao cone dual C^* , obtemos que a fibra

$$WF_a(f)|_{x_0} \subset C^* . \quad (3.24)$$

□

Nota 5. É observado que para Hörmander, na Referência [39], a fibra sobre x_0 , $WF_a(f)|_{x_0}$, é completamente caracterizada via sequências do tipo $f_N = \phi_N f$, onde $\{\phi_N\}$ é uma sequência limitada no espaço das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto $C_0^\infty(X)$, que é igual a 1 em uma vizinhança comum de x_0 e satisfaz a condição

$$|D^{\alpha+\beta} \phi_N| \leq C_\alpha (CN)^{|\beta|}, \quad \text{se } |\beta| \leq N ,$$

onde a existência de tais funções são asseguradas pelo Lema 2.2 de [39].

Note que, podemos reunir a **Definição 11** e a **Proposição 1** na

Proposição 2. *Sejam:*

- $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada e
- $(x_0, k_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ um par ordenado no espaço cotangente, onde essa notação significa $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} := \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Então, um ponto no espaço de fase $(x_0, k_0) \notin WF_a(f)$ se, e somente se, existe uma família finita $\{C_j\}$ de cones convexos abertos próprios em $\mathbb{R}^n$, uma vizinhança complexa Z de “ x_0 ” em $\mathbb{C}^n$ e uma decomposição da distribuição f dada por

$$f = \sum_{j=1}^m b_{C_j'} \left(\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \right) , \quad (3.25)$$

com cada função $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \in \mathcal{O}(Z \cap T(C_j'))$ sendo de crescimento temperado e analítica próxima de “ x_0 ”, para cada j satisfazendo $C_j' \subset \{y ; \langle k_0, y \rangle \geq 0\}$ e onde os $b_{C_j'}(\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell))$ denotam os valores limites, no sentido distribucional, das funções analíticas $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell)$ resultantes da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada wavelet contínua de f com respeito à wavelet direcional ψ .

Note que a **Proposição 2** acima mostra que uma decomposição de uma distribuição temperada f em uma soma de valores limites de funções analíticas é equivalente a uma decomposição do conjunto de frente de ondas analítico de f , uma vez que a fibra $WF_a(f)|_{x_0}$ está contida na união dos cones duais $\bigcup_j C_j^*$. Além disso, a decomposição (3.25) é realizada no espaço das funções infinitamente diferenciáveis C^∞ , desde que a distribuição f seja C^∞ .

Finalmente, recordamos que na Referência [15] Hörmander definiu o conjunto de frente de ondas de uma distribuição, $WF(f)$, como o conjunto de pontos no espaço cotangente $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, os quais devem ser característicos para cada operador pseudo-diferencial P tais que $Pf \in C^\infty$. É evidente que o conjunto $WF(f) \subset WF_a(f)$, de modo que, segundo Nishiwada na Referência [43], uma outra caracterização para o conjunto de frente de ondas $WF(f)$ pode ser obtida a partir dos resultados discutidos acima.

Proposição 3. *Sejam:*

- U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$,
- $(x_0, k_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ um par ordenado no espaço cotangente e
- $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada.

Então, um ponto no espaço de fase $(x_0, k_0) \notin WF(f)$ se existe uma família finita $\{C_j\}$ de cones convexos abertos próprios em $\mathbb{R}^n$, com $j = 1, 2, \dots, m$, uma vizinhança complexa Z de “ x_0 ” e uma decomposição da distribuição f próxima de “ x_0 ”, dada por

$$f = \sum_{j=1}^m b_{C'_j} \left(\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \right) \quad , \quad \text{em } U \quad , \quad (3.26)$$

com cada função holomorfa $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \in \mathcal{O}(Z \cap T(C'_j))$ sendo de crescimento temperado, tal que os valores limites distribucionais $\mathbb{W}_\psi f_j(z, \ell) \in C^\infty$ próximo de “ x_0 ”, para cada j satisfazendo $C'_j \subset \{y ; \langle k, \ell y \rangle \geq 0\}$.

Demonstração. A prova dessa proposição é similar à primeira parte da demonstração do Teorema 3.4 que se encontra na Referência [44]. □

Capítulo 4

Transformada *Wavelet* Direcional e a Propagação de Conjunto de Polarização para Soluções das Equações de Maxwell

No **Capítulo 3**, usando a classe de *wavelets* cônica, mostramos que uma distribuição temperada pode ser obtida como uma soma finita de valores limites de funções analíticas resultante da complexificação do parâmetro translacional da transformada *wavelet* contínua. Além disso, mostramos que para uma dada distribuição (escalar) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada *wavelet* contínua de f com respeito a uma *wavelet* cônica ψ é definida de tal forma que a transformada *wavelet* direcional de f produz uma função no espaço de fase, cujas singularidades de alta-frequência são precisamente os elementos do conjunto de frente de ondas analítico de f .

Neste capítulo, é realizada a generalização para o caso de distribuições a valores-vetoriais, seguindo o formalismo original de Nils Dencker apresentado no artigo [6]. Em particular, estudamos a propagação de singularidades para soluções das equações de Maxwell. Como é bem conhecido de todos, uma das mais importantes predições feitas pelas equações de Maxwell é a existência de ondas eletromagnéticas as quais podem transportar energia e momento. As soluções mais triviais em tais problemas, são soluções de ondas planas em meios infinitos (no vácuo). No entanto, ondas planas tem energia infinita e é um conceito altamente ideal (um modelo teórico). Nenhuma fonte física emite ondas planas. Além disso, o estudo de ondas planas não provê ferra-

mental suficiente para deduzir a óptica geométrica a partir das equações de Maxwell (veja [45]). Portanto, uma alternativa seria representar o campo eletromagnético como superposições lineares de *wavelets*. De fato, no início dos anos 90, Gerald Kaiser [46] (veja também [47], capítulo 9) obteve uma nova representação para as soluções das equações de Maxwell como superposições lineares de *wavelets esféricas*¹. Ao contrário das ondas planas, que se prolongam por todo o espaço-tempo, a representação em *wavelets* das soluções das equações de Maxwell tem a vantagem de ser *local* (embora seja análoga à sua representação de Fourier).

Revisitamos o problema analisado por Dencker sobre a propagação de polarizações das soluções das equações de Maxwell. Levando em conta que o campo eletromagnético é uma distribuição temperada com caráter vetorial, usamos os resultados do **Capítulo 3** para representar as soluções das equações de Maxwell em termos das *wavelets* direcionais. Então, usamos o conjunto de polarização, o qual refina a noção de conjunto de frente de ondas para o caso de distribuições a valores-vetoriais, como introduzidas por Dencker [6], a fim de analisar as singularidades das soluções das equações de Maxwell. Enfatizamos ainda que Dencker [6] aplicou seus resultados para as equações de Maxwell sem se preocupar com a representação do campo eletromagnético, isto é, representando-o via ondas planas ao invés de via *wavelets*, como é o caso da nossa abordagem.

4.1 Propagação de Conjunto de Polarização para Soluções das Equações de Maxwell

Tendo em vista a aplicação dos resultados do **Capítulo 3**, em imagens de radar de abertura sintética (ver **Seção 5.1**), lembramos que as ondas de radar são ondas eletromagnéticas e, portanto, são regidas pelas equações de Maxwell. Quase toda análise de propagação de onda de radar é considerada em ar seco, o qual tem propriedades eletromagnéticas semelhantes às do vácuo ou espaço-livre. Consequentemente, no decorrer de todo este Capítulo, vamos supor que as ondas eletromagnéticas têm velocidade de onda constante igual a “ c ”, a velocidade da luz no vácuo.

Focalizando no modelo matemático para a propagação de polarizações das soluções das equações de Maxwell, Nils Dencker em seu elegante e pioneiro artigo [6], definiu

¹Veja com mais detalhes no Apêndice B, o porquê é possível representar o campo de radiação via *wavelets*.

o conjunto de polarização para distribuições com caráter vetorial (um refinamento do conjunto de frente de ondas no sentido de que o conjunto de polarização indica as componentes “mais singulares” de uma distribuição) e estudou a propagação do conjunto de polarização de soluções de sistemas lineares do tipo-principal real (um exemplo, é o sistema de equações de Maxwell). O Teorema de Dencker sobre a propagação de polarização provê informações precisas sobre o comportamento futuro das polarizações, com base no conhecimento de onde elas estão após algum intervalo de tempo. Neste Capítulo, aplicamos os resultados do capítulo anterior para ondas eletromagnéticas, ou seja, nas soluções das equações de Maxwell no espaço-livre². Estamos interessados no estudo da propagação de singularidades das soluções das equações de Maxwell, usando o conceito de propagação do conjunto de polarização como introduzido por Dencker.

4.1.1 Distribuições avaliadas no espaço de Hilbert

Para iniciar, vamos primeiro definir o que é uma distribuição avaliada em um espaço de Hilbert³. Suponhamos que nos é dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Definição 12. *O espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ de distribuições $\mathcal{H}$ -avaliadas, ou de distribuições com valores em $\mathcal{H}$, é definido como sendo o conjunto de todos os mapeamentos lineares fracamente contínuos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}$.*

Note que devido à nuclearidade do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esses mapeamentos são automaticamente fortemente contínuos. Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto, um mapeamento linear

$$f : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{H} , \quad (4.1)$$

está em $\mathcal{S}'(X, \mathcal{H})$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(\varphi)| \leq C \sup_{x \in X} \left\{ (1 + |x|)^\alpha |D_x^\beta \varphi(x)| \right\} < \infty , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n , \quad (4.2)$$

para toda função teste φ no espaço de Schwartz $\mathcal{S}(X)$, onde $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$.

²De acordo com Gerald Kaiser em [46], isto é possível e natural, porque as equações de Maxwell no espaço-livre são invariantes sob um grupo grande de simetrias (o grupo conforme do espaço-tempo), que incluem translações e dilatações ou contrações, as quais são as operações básicas da teoria das *wavelets*.

³A apresentação dessa Seção está baseada na Referência [48].

Seja f uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{e}$ um vetor fixado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, o produto $(f\mathbf{e})$ definido por

$$(f\mathbf{e})(\varphi) = f(\varphi)\mathbf{e} \quad , \quad (4.3)$$

para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, é uma distribuição $\mathcal{H}$ -avaliada. Além disso, quando $\mathcal{H}$ é de dimensão finita, pode-se escolher uma base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ de $\mathcal{H}$, de tal forma que qualquer distribuição $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ pode ser escrita como a combinação linear

$$\mathbf{f} = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + \dots + f_N\mathbf{e}_N \quad , \quad (4.4)$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_N$ são distribuições escalares unicamente determinadas. Então, para obtermos uma distribuição $\mathcal{H}$ -avaliada $\mathbf{f}$, é suficiente encontrarmos N distribuições escalares $f_1, f_2, \dots, f_N$.

A diferenciação de distribuições a valores-vetoriais é definida da seguinte forma: seja $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ uma distribuição $\mathcal{H}$ -avaliada e seja D^α o operador diferencial definido em (2.19). Assim, $D^\alpha\mathbf{f}$ é definida como sendo a aplicação que mapeia as funções testes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $(-1)^{|\alpha|}\mathbf{f}(D^\alpha\varphi) \in \mathcal{H}$. Isso implica que a derivada $D^\alpha\mathbf{f}$ é uma distribuição $\mathcal{H}$ -avaliada.

Definição 13. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\mathbf{I}_d$ uma aplicação identidade que mapeia $\mathcal{H}$ nele próprio. O mapeamento linear contínuo $\mathcal{F} \in \mathbf{I}_d$ do espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ é chamado a **transformada de Fourier** de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ nele mesmo.*

Usando o fato de que $\mathcal{F}^{-1}$ é a inversa da transformada de Fourier $\mathcal{F}$ e que $\mathcal{F} \in \mathbf{I}_d$ e $\mathcal{F}^{-1} \in \mathbf{I}_d$ implicam em $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \in \mathbf{I}_d$, vemos que

$$\mathcal{F} \in \mathbf{I}_d : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}) \quad , \quad (4.5)$$

é de fato um automorfismo. Em resumo, se $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, então pode-se definir a transformada de Fourier $\hat{\mathbf{f}}$ da mesma forma como é feito para as distribuições usuais, como mostra a

Proposição 4. *Considere uma distribuição com caráter vetorial $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ e uma função teste $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ no espaço de Schwartz. Assim, a transformada de*

Fourier de $\mathbf{f}$ é dada por

$$\mathcal{F}\mathbf{f}(\varphi) = \mathbf{f}(\mathcal{F}\varphi) \quad . \quad (4.6)$$

Demonstração. A prova completa dessa proposição se encontra na Referência [48], Proposição 8.1. $\square$

4.1.2 Conjunto de polarização

A fim de definir o conjunto de polarização de uma distribuição com caráter vetorial, assumimos que $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^N$, na definição de distribuições avaliadas no espaço de Hilbert. Seja

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \quad , \quad (4.7)$$

uma distribuição a valores-vetoriais temperada N -dimensional, ou seja, um vetor cujas componentes são distribuições escalares

$$f_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (4.8)$$

Consequentemente, devemos notar que o conjunto de frente de ondas de uma distribuição a valores-vetoriais $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$, é definido simplesmente como a união dos conjuntos de frente de ondas de cada uma das suas componentes,

$$WF(\mathbf{f}) = \bigcup_{j=1}^N WF(f_j) \quad , \quad (4.9)$$

porém, tal conjunto não nos fornece quaisquer informações sobre quais componentes de $\mathbf{f}$ são singulares. Portanto, é necessário definir o correspondente conjunto de polarização com caráter vetorial.

Definição 14. *O conjunto de polarização de uma distribuição a valores-vetoriais $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ é definido por*

$$WF^{\text{pol}}(\mathbf{f}) = \bigcap_{A\mathbf{f} \in C^\infty} \left\{ (x, k; \omega(x, k)) \in (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^N ; \omega(x, k) \in \text{Ker } \sigma(A)(x, k) \right\} \quad , \quad (4.10)$$

onde A é um sistema $1 \times N$ de operadores pseudo-diferenciais usuais com símbolo principal $\sigma(A)$ e onde $T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} := \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ denota o espaço cotangente.

Para o caso de uma distribuição escalar (situação em que $N = 1$), o conjunto de polarização contém a mesma informação que o conjunto de frente de ondas usual definido em (2.54). Para um N arbitrário, a relação entre o conjunto de polarização e o conjunto de frente de ondas de uma distribuição a valores-vetoriais, é obtida via a projeção dos pontos não-triviais (pontos singulares) sobre o fibrado cotangente, conforme descrito no

Teorema 6. *Seja $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N)$ uma distribuição a valores-vetoriais e seja*
 $\pi : (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^N \longrightarrow (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\})$ *a projeção sobre o fibrado cotangente*
 $\pi : (x, k; \omega(x, k)) = (x, k)$. *Então*

$$\pi\left(WF^{\text{pol}}(\mathbf{f}) \setminus \{(T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \{0\}\}\right) = WF(\mathbf{f}) \quad . \quad (4.11)$$

Demonstração. A prova deste teorema se encontra na Referência [6], Proposição 2.5. $\square$

Isto mostra claramente que o conjunto de polarização é um refinamento do conjunto de frente de ondas. Além disso, o conjunto de polarização $WF^{\text{pol}}(\mathbf{f})$ contém informações sobre as direções no espaço vetorial adicional $\omega(x, k)$ em que a distribuição é singular, como mostrado no seguinte

Exemplo 5. Na análise microlocal, duas propriedades bem conhecidas do conjunto de frente de ondas são:

$$WF(\nabla\varphi) \subseteq WF(\varphi) \quad (4.12)$$

e

$$WF(\nabla \times \mathbf{u}) \subseteq WF(\mathbf{u}) \quad , \quad (4.13)$$

onde φ é uma distribuição a valores-escalares e $\mathbf{u}$ é uma distribuição a valores-vetoriais. Ou seja, o cálculo do conjunto de frente de ondas ignora os efeitos do operador gradiente ∇ e do operador rotacional $\nabla \times$ atuando nas distribuições. Isso significa que se, por exemplo,

$$WF(\varphi) = WF(\mathbf{u}) \quad ,$$

então não podemos explicar a diferença entre $WF(\nabla\varphi)$ e $WF(\nabla \times \mathbf{u})$ via seus conjuntos de frente de ondas. No entanto, os conjuntos de polarização de $\nabla\varphi$ e de $\nabla \times \mathbf{u}$ são claramente distintos. Para ver isso, consideremos uma distribuição a valores-escalares

$\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ de modo que $\mathbf{u} = \nabla \varphi$. Consequentemente, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. E como

$$\text{Ker } \sigma(\nabla \times) = \{zk ; z \in \mathbb{C}\} ,$$

têm-se que

$$WF^{\text{pol}}(\mathbf{u}) \subseteq \{(x, k; zk)\} . \quad (4.14)$$

Por outro lado, considerando uma distribuição a valores-vetoriais $\mathbf{v} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ de modo que $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v}$, terá como consequência, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. E como

$$\text{Ker } \sigma(\nabla \cdot) = \{z \in \mathbb{C}^3 ; z \cdot k = 0\} ,$$

têm-se que

$$WF^{\text{pol}}(\mathbf{u}) \subseteq \{(x, k; z) ; z \cdot k = 0\} . \quad (4.15)$$

□

Definição 15. Um operador pseudo-diferencial P sobre $\mathbb{R}^n$ é denominado **tipo-principal real** se seu símbolo principal $p(x, k)$ é real. Para o caso em que $p = 0$ o campo vetorial Hamiltoniano

$$H_p(x, k) = \sum_{\mu} \left(\frac{\partial p(x, k)}{\partial k_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial p(x, k)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \right) , \quad (4.16)$$

não é identicamente nulo e nem tão pouco tem direção radial, isto é, $H_p \neq -\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}}$.

Nota 6. Os símbolos principais são homogêneos, uma vez que consideram apenas operadores pseudo-diferenciais clássicos. Assim, o conjunto de polarização é fechado, cônico nas variáveis k e linear no fibrado.

Um importante resultado mostrado na Referência [6] é a propagação do conjunto de polarização para sistemas do tipo-principal real.

Definição 16. Um sistema $N \times N$ de operadores pseudo-diferenciais P sobre $\mathbb{R}^n$ com símbolo principal $p(x, k)$ é do tipo-principal real em $(x_0, k_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ se existe um símbolo $\tilde{p}(x, k)$, $N \times N$, tal que

$$\tilde{p}(x, k)p(x, k) = q(x, k) \cdot \mathbb{I} , \quad (4.17)$$

em uma vizinhança de (x_0, k_0) , onde $q(x, k)$ é um símbolo escalar do tipo-principal real e $\mathbb{I}$ é a identidade em $\mathbb{C}^N$.

Definindo $\mathcal{N}_p$ como sendo

$$\mathcal{N}_p = \left\{ (x, k; \omega(x, k)) \in (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^N ; \omega(x, k) \in \text{Ker } p(x, k) \right\} , \quad (4.18)$$

então o **conjunto característico** de um sistema de operadores pseudo-diferenciais P sobre $\mathbb{R}^n$ com símbolo principal $p(x, k)$ é definido como

$$\begin{aligned} \text{Char}(P) &= \left\{ (x, k) \in (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) ; \det p(x, k) = 0 \right\} \\ &= \pi \left(\mathcal{N}_p \setminus \{(x, k; 0)\} \right) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

De acordo com a **Definição 14**, se o operador pseudo-diferencial atuando na distribuição temperada N -dimensional com caráter vetorial $P\mathbf{f} \in C^\infty$, têm-se como consequência

$$WF^{\text{pol}}(\mathbf{f}) \subseteq \mathcal{N}_p . \quad (4.20)$$

Isso implica que o conjunto de polarização de $\mathbf{f}$, satisfazendo $P\mathbf{f} \in C^\infty$, pode propagar-se somente em $\mathcal{N}_p$ (veja a **Nota 7**). Para melhor apresentar a propagação do conjunto de polarização de um sistemas do tipo-principal real, Dencker introduziu a noção de órbitas de Hamilton.

Nota 7. Para uma distribuição escalar, o conjunto característico de um operador pseudo-diferencial P sobre $\mathbb{R}^n$, com símbolo principal $p(x, k)$, é definido como

$$\text{Char}(P) = \left\{ (x, k) \in (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) ; p(x, k) = 0 \right\} ,$$

e pode ser interpretado como o conjunto de todas as direções k subordinadas ao operador P de maior ordem, em um ponto “ x ”. De acordo com Duistermaat e Hörmander em [16], se P é um operador pseudo-diferencial sobre $\mathbb{R}^n$ com símbolo principal $p(x, k)$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é uma distribuição temperada tal que $Pf \in C^\infty$, então

$$WF(f) \subset \text{Char}(P) .$$

Se, além disso, P é do tipo-principal real, então o conjunto de frente de ondas $WF(f)$ é invariante sob o fluxo gerado pelo campo vetorial Hamiltoniano de p .

Definição 17. *Seja γ uma curva bicaracterística-nula no conjunto $\text{Char}(P)$. Uma **órbita de Hamilton** de um sistema P do tipo-principal real é definida pelo conjunto das ternas ordenadas*

$$\left\{ (x, k; z\omega(x, k)) ; \omega(x, k) \in \gamma, \quad z \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{N}_p, \quad (4.21)$$

onde $\omega(x, k)$ é uma função- C^∞ satisfazendo a equação $D_p \omega(x, k) = 0$ sendo $D_p \omega(x, k)$ a **conexão de Dencker** dada por

$$D_p \omega(x, k) = H_q \omega(x, k) + \frac{1}{2} \{ \tilde{p}, p \} \omega(x, k) + i \tilde{p} p^s \omega(x, k), \quad (4.22)$$

de modo que

$$H_q(x, k) = \sum_{\mu} \left(\frac{\partial q(x, k)}{\partial k_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial q(x, k)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial k_{\mu}} \right), \quad (4.23)$$

é o **campo de Hamilton** associado com q ,

$$\{ \tilde{p}, p \} = \sum_{\mu} \frac{\partial \tilde{p}(x, k)}{\partial k_{\mu}} \frac{\partial p(x, k)}{\partial x^{\mu}} - \sum_{\mu} \frac{\partial \tilde{p}(x, k)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial p(x, k)}{\partial k_{\mu}}, \quad (4.24)$$

é o **colchete de Poisson** e

$$p^s(x, k) = p_{m-1}(x, k) - \frac{1}{2i} \sum_{\mu} \frac{\partial^2 p(x, k)}{\partial x^{\mu} \partial k_{\mu}}, \quad (4.25)$$

é o **símbolo subprincipal** de P .⁴

Nota 8. É conveniente enfatizar que as órbitas de Hamilton são independentes da escolha de $\tilde{p}$. Além disso, os vetores polarização sobre os pontos no conjunto de frente de ondas seguem uma lei de transporte paralelo simples ao longo das bicaracterísticas que formam tal conjunto. Isto significa que para cada campo vetorial $\omega(x, k)$ ao longo de uma curva bicaracterística γ em $\text{Char}(P)$, têm-se que

$$D_p \omega \in \text{Ker } p \quad \text{ao longo de } \gamma,$$

⁴Lembrando que o símbolo de P é uma soma de termos homogêneos,

$$\sigma(P)(x, k) = p(x, k) + p_{m-1}(x, k) + p_{m-2}(x, k) + \dots,$$

onde $p(x, k) = \sigma_P(P)$ é o símbolo principal e $p_j(x, k)$ é homogêneo de ordem j .

se, e somente se,

$$\omega \in \text{Ker } p \quad \text{ao longo de } \gamma \quad .$$

A equação $D_p \omega = 0$ pode então ser resolvida com $(x, k; \omega) \in \mathcal{N}_p$, que é uma condição necessária para elementos do conjunto de polarização (para mais detalhes, veja [6]).

Uma vez definida a órbita de Hamilton, a propagação do conjuntos de polarização para sistemas do tipo-principal é expressa como segue.

Teorema 7 (Propagação de singularidades para distribuições com caráter vetorial). *Seja P um sistema do tipo-principal real sobre $\mathbb{R}^n$. Se $P\mathbf{f} \in C^\infty$, então o conjunto de polarização, $WF^{\text{pol}}(\mathbf{f})$, é uma união de órbitas de Hamilton de P .*

Demonstração. A prova desse teorema é similar à demonstração do Teorema 4.2 na Referência [6]. $\square$

Além disso, uma consequência imediata do **Teorema 7** é que o conjunto

$$\pi\left(WF^{\text{pol}}(\mathbf{f}) \setminus \{(T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \{0\}\}\right) = WF(\mathbf{f})$$

é invariante sob *shifts* ao longo das trajetórias do **sistema Hamiltoniano**

$$\begin{cases} \dot{k} = -\frac{\partial p(x, k)}{\partial x} \\ \dot{x} = \frac{\partial p(x, k)}{\partial k} \end{cases} . \quad (4.26)$$

4.1.3 Propagação de polarizações para Equações de Maxwell

Qualquer teoria da electrodinâmica determina o movimento das ondas electromagnéticas através do seu correspondente sistema de equações diferenciais parciais. As trajetórias das ondas electromagnéticas podem ser obtidas no limite da óptica geométrica via o estudo da propagação das **singularidades** dos campos electromagnéticos. Por outro lado, no capítulo anterior vimos que a transformada *wavelet* direcional fornece uma caracterização construtiva simples para o conjunto de frente de ondas analítico de uma distribuição. A invariância do conjunto de frente de ondas analítico de uma solução para uma equação diferencial parcial sob o fluxo de bicaracterísticas geradas pelo símbolo do operador pseudo-diferencial, faz com que a transformada *wavelet* direcional de uma solução exiba um comportamento simples sob este fluxo

de bicaracterísticas no espaço de fase, com o limite de alta-frequência invariante sob tal fluxo. Portanto, é concebível que a transformada *wavelet* direcional forneça uma decomposição canônica dos dados iniciais para o sistema de equações de Maxwell, fracionando-os em componentes que se propagam ao longo de curvas bicaracterísticas.

Nesta subseção gostaríamos de aplicar o **Teorema 7** num estudo das equações de Maxwell no espaço-livre. Porém, primeiro vamos apresentar o método matemático que implementa a extensão de nossa análise de distribuições com caráter vetorial.

Seja $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ uma distribuição a valores-vetoriais, então a transformada *wavelet* de $\mathbf{f}$ pode ser escrita como

$$\mathbb{W}_\psi \mathbf{f}(x', \ell) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{\mathbb{W}_\psi \mathbf{f}}(k, \ell) e^{i\langle k, x' \rangle} d^n k \quad , \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{W}_\psi \mathbf{f}}(k, \ell) &= \widehat{\psi}(\ell k) \widehat{\mathbf{f}}(k) \\ &= \widehat{\psi}(\ell k) \left(\widehat{f}_1 \mathbf{e}_1 + \widehat{f}_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \widehat{f}_N \mathbf{e}_N \right) \quad , \end{aligned} \quad (4.28)$$

é a transformada de Fourier de $\mathbb{W}_\psi \mathbf{f}$.

Definição 18. *Seja $q_0 = (x_0, k_0)$ um ponto do espaço de fase. Para $\mathbf{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$, pode-se afirmar que $(q_0, z_0) \notin WF^{\text{pol}}(\mathbf{f}) \subseteq (T^*(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^N$ se existir um operador pseudo-diferencial P com coeficientes constantes sobre $\mathbb{R}^n$ e um símbolo principal $p(k)$, tal que $p(k_0)z_0 \neq 0$.*

Investigaremos agora as equações de Maxwell sobre um espaço-tempo $(\mathbb{R}^{1,3}, \eta)$, onde η é a métrica plana. Trabalharemos em unidades naturais, isto é, assumiremos que a velocidade da onda $c = 1$. Em Mecânica Clássica Avançada é muitas vezes útil, e na Mecânica Quântica é quase sempre essencial, o uso de potenciais no *gauge* de Lorentz (que é usado para conservar a invariância relativística explícita), para expressar as equações de Maxwell em uma alternativa formulação manifestamente covariante. Isso envolve o quadri-potencial eletromagnético definido por $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$, formado a partir do potencial-vetor $\mathbf{A}$ e do potencial-escalar A_0 , resultando em uma única equação conhecida como a forma manifestamente covariante das equações de Maxwell no *gauge*

de Lorentz $\partial_x^\mu A_\mu(x) = 0$, que na ausência de fonte é dada por:

$$\square_x A_\mu(x) = 0 \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad (4.29)$$

onde $\square_x = \partial_\mu^x \partial_x^\mu$ é o operador d'Alembertiano (ou operador de onda), sendo

$$\partial_x^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad . \quad (4.30)$$

Assim, cada componente de $A_\mu(x)$ obedece separadamente à equação de Klein-Gordon (com $m = 0$). No espaço de Fourier as equações de Maxwell (4.29) tomam a seguinte forma

$$k^2 \widehat{A}_\mu(k) = 0 \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad . \quad (4.31)$$

Para uma solução não-trivial, isso implica que

$$k^2 = k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0 \quad , \quad (4.32)$$

onde $k^\mu = (k^0, -\mathbf{k})$ é um vetor tipo-luz e $\widehat{A}_\mu(k)$ é qualquer quadri-vetor.

Tomando a transformada *wavelet* direcional de $A_\mu(x)$ e efetuando sua extensão como uma função analítica da variável z , obtemos

$$\mathbb{W}_\psi A_\mu(z, \ell) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C^*} P(\ell k) \widehat{A}_\mu(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^4 k \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad . \quad (4.33)$$

Conforme observado na **Nota 4**, as *wavelets* direcionais estão estritamente contidas em um cone convexo no espaço- k das frequências, com um ângulo de abertura totalmente controlável, independentemente de sua amplitude. Além disso, tal transformada tem um número arbitrariamente de momentos tendendo a zero sobre o bordo do cone suporte e possui um decaimento exponencial no interior de tal cone. Assim, levando em consideração a transformada de Fourier de (4.29) (no *gauge* de Lorentz $k^\mu A_\mu(x) = 0$), podemos assumir que $P(\ell k) = \ell^2 k^2$ na transformada *wavelet* (4.33), de modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_\psi A_\mu(z, \ell) &= \frac{\ell^2}{(2\pi)^4} \int_{C^*} k^2 \widehat{A}_\mu(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^4 k \\ &= \frac{\ell^2}{(2\pi)^4} \int_{C^*} \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \delta_\mu^\nu \widehat{A}_\nu(k) e^{i\langle k, z \rangle} d^4 k \quad . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Em particular, a transformada *wavelet* (4.34) nos retorna o número de momentos ten-

dendo a zero de $\widehat{\psi}$ sobre o bordo do cone C^* , e com isso, controla a regularidade da *wavelet*.⁵ Deste modo, a transformada *wavelet* (2.26) é “cega” para a parte mais suave do campo A_μ , o qual é polinomial de grau até dois. Assim, somente a parte mais nítida (de maior contraste/descontinuidade) da onda é captada pela transformada, o que inclui todas as singularidades. Essa propriedade melhora a eficiência na detecção de singularidades do campo A_μ .

De acordo com a **Proposição 3**, para cada componente do campo A_μ temos que $(x_0, k_0) \notin WF(A_\mu)$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, se existe uma família finita $\{C_j\}_{j=1,\dots,m}$ de cones convexos abertos próprios em $\mathbb{R}^n$, uma vizinhança complexa Z de x_0 e uma decomposição de A_μ próxima de x_0 dada por

$$A_\mu = \sum_{j=1}^m b_{C'_j} \left(\mathbb{W}_\psi(A_\mu)_j(z, \ell) \right) \quad , \quad \text{em } U \text{ subconjunto aberto de } \mathbb{R}^{1,3} \quad , \quad (4.35)$$

com $\mathbb{W}_\psi(A_\mu)_j(z, \ell) \in \mathcal{O}(Z \cap T(C'_j))$, tal que o limite $b_{C'_j}(\mathbb{W}_\psi(A_\mu)_j(z, \ell)) \in C^\infty$ próximo de x_0 para cada j satisfazendo $C'_j \subset \{y ; \langle k, \ell y \rangle \geq 0\}$. Portanto, o conjunto de frente de ondas do quadri-potencial eletromagnético A_μ é a união dos conjuntos de frente de ondas de todas as suas componentes,

$$\bigcup_{\mu=0}^3 WF(A_\mu) \quad ; \quad (4.36)$$

porém, isso não nos fornece nenhuma informação sobre quais componentes de A_μ são singulares. Assim, só nos resta calcular os vetores polarização sobre os pontos do conjunto de frente de ondas. Primeiramente, note que o número de momentos tendendo a zero de $\widehat{\psi}$ sobre o bordo do cone, é dado por

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \delta_\mu^\nu \quad , \quad (4.37)$$

⁵Na prática, se quisermos estudar o comportamento da M -ésima derivada de $\widehat{\psi}(k)$, as *wavelets* devem ter cancelamentos até ordem M , a fim de não reagirem às variações de baixa-ordem de $\widehat{\psi}(k)$, ou seja, deve-se ter

$$\int_{C^*} k^m \widehat{\psi}(k) d^4 k = 0 \quad ,$$

sobre o bordo do cone C^* , para todo $m \leq M$.

o qual é exatamente o símbolo principal do operador $P = \square_x$. Assim, podemos escolher

$$\begin{cases} (\tilde{p}(k))^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\nu \\ q(k) = \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \end{cases}, \quad (4.38)$$

a fim de obter $\tilde{p}p = q \cdot \mathbb{I}$. Observemos que q é um símbolo escalar do tipo-principal real, portanto, o operador P é do tipo-principal real. Consequentemente, o conjunto característico de tal operador é dado por

$$\text{Char}(P) = \left\{ (t, \mathbf{x}, k_0, \mathbf{k}) \in (T^*(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \times (T^*(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}) ; q(k) = 0 \right\}. \quad (4.39)$$

Isso implica que $k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0$, ou seja, a superfície do cone-de-luz. Além disso, para $k^2 = 0$,

$$q(k) = \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = k^2 \quad (4.40)$$

é a Hamiltoniana que gera geodésicas nulas. Para ver isso, considere as equações de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial q}{\partial k_\mu} \\ \frac{dk_\nu}{d\tau} = -\frac{\partial q}{\partial x^\nu} \end{cases}. \quad (4.41)$$

Assim, segue que

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 2\eta^{\mu\nu} k_\nu \\ \frac{dk_\nu}{d\tau} = 0 \end{cases}. \quad (4.42)$$

A condição $q(k) = 0$ implica que

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0, \quad (4.43)$$

ou

$$\frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau) = 0, \quad (4.44)$$

para todo τ no domínio da curva. Assim, a curva $\tau \rightarrow x(\tau)$ é uma curva nula. Para ver que essa curva é uma geodésica nula, recordamos que sobre um espaço-tempo de Minkowski a equação da geodésica é exatamente a equação da reta, ou seja, solução da

curva $\ddot{x}(\tau) = 0$. Além disso, utilizando o fato de que

$$k_\nu = \frac{1}{2} \eta_{\nu\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad . \quad (4.45)$$

obtemos que

$$\frac{dk_\nu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0 \quad , \quad (4.46)$$

que é a equação da geodésica.

Agora, expandiremos o quadri-vetor $\hat{A}_\mu(k)$ em uma base de quatro vetores polarização

$$\hat{A}_\mu(k) = \sum_{\gamma=0}^3 a_\gamma (\varepsilon_\mu(k))^\gamma \quad . \quad (4.47)$$

Destes quatro quadri-vetores polarização, escolhemos $\varepsilon_\mu^0(k)$ como sendo tipo-tempo e os $\varepsilon_\mu^i(k)$, com $i = 1, 2, 3$, como sendo tipo-espaço. Os vetores polarização formam um sistema ortonormal quadridimensional satisfazendo a relação

$$(\varepsilon_\mu(k))^\gamma \cdot (\varepsilon^\mu(k))^{\gamma'} = \eta^{\gamma\gamma'} \quad ,$$

que também significa que

$$(\varepsilon_\mu(k))^\gamma \cdot (\varepsilon_\nu(k))^{\gamma'} \eta_{\gamma\gamma'} = \eta_{\mu\nu} \quad . \quad (4.48)$$

Neste ponto, queremos encontrar os elementos do conjunto característico (4.39), $\text{Char}(P)$, com $P = \square_x$, que sejam solução da equação $q(k) = 0$. Então, substituindo (4.48) na expressão $q(k)$ de (4.38), obtemos

$$q(k) = \left[(\varepsilon_\mu(k))^\gamma \cdot k^\mu \right] \left[(\varepsilon_\nu(k))^{\gamma'} \cdot k^\nu \right] \eta_{\gamma\gamma'} \quad . \quad (4.49)$$

Uma vez que os vetores polarização dependem do quadri-momento k do fóton, por simplicidade, se orientarmos k ao longo da direção x_3 , veremos que $k_\mu = (k; 0, 0, k)$.

Assim, tomando as seguintes bases

$$\varepsilon_\mu^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon_\mu^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon_\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \varepsilon_\mu^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.50)$$

e $k_\mu = (1; 0, 0, 1)$, a partir da expressão 4.49 conclui-se que, as polarizações tipo-espaço, ε_μ^1 e ε_μ^2 (estados físicos de polarizações transversais) satisfazem a condição

$$\varepsilon_\mu^1(k) \cdot k^\mu = \varepsilon_\mu^2(k) \cdot k^\mu = 0 \quad . \quad (4.51)$$

Isto implica que

$$\text{Ker } p(k) = \left\{ \varepsilon_\mu^i \in \mathbb{C}^4 ; \varepsilon_\mu^i(k) \cdot k^\mu = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \right\} \quad . \quad (4.52)$$

Isso mostra que as componentes de A_μ , cujas soluções das equações de Maxwell são fortemente oscilantes (chamadas de direções mais singulares em $\mathbb{C}^n$), estão diretamente relacionadas com os estados físicos de polarização.

Nota 9. Poderíamos ter escolhido tomar como uma solução da equação (4.51) os vetores polarização no sentido horário (dextrogiro) e no sentido anti-horário (levógiro) respectivamente representados por $\varepsilon_\mu^\pm = (0; 1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$, em vez de os vetores linearmente polarizados $\varepsilon_\mu^1 = (0; 1, 0, 0)$ e $\varepsilon_\mu^2 = (0; 0, 1, 0)$ conforme a referência [49]. Além disso, note que o terceiro vetor tipo-espaço $\varepsilon_\mu^3(k)$ (o estado de polarização longitudinal) e o estado de polarização tipo-tempo $\varepsilon_\mu^0(k)$, que são os dois estados de polarização não-físicos, não são soluções de (4.51) e consequentemente não pertencem ao $\text{Ker } p(k)$.

Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p = \left\{ (t, \mathbf{x}, k_0, \mathbf{k}; \omega(t, \mathbf{x}, k_0, \mathbf{k})) \in (T^*(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \times (T^*(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^4 ; \right. \\ \left. \omega(t, \mathbf{x}, k_0, \mathbf{k}) \in \text{Ker } p(k) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Então, de acordo com o **Teorema 7**, as órbitas de Hamilton γ (onde γ são as bicaracterísticas nulas associadas a q) associadas com $\mathcal{N}_p$ são tais que $D_p \omega = 0$. Através de um simples cálculo, podemos ver que

$$D_p \omega = 2\eta^{\mu\nu} k_\mu \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} \quad . \quad (4.54)$$

Usando as equações de Hamilton, têm-se

$$D_p \omega = \frac{d\omega}{d\tau} \quad . \quad (4.55)$$

Assim, segue do teorema sobre a propagação de singularidades para distribuições com caráter vetorial (**Teorema 7**), que o conjunto de polarização de uma solução das equações de Maxwell (no espaço-tempo plano) é uma união de órbitas de Hamilton, ou seja, tal conjunto consiste das curvas

$$(x, k; \omega)(\tau) \in (T^*(\mathbb{R}) \setminus \{0\}) \times (T^*(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^4, \quad (4.56)$$

parametrizadas por τ , tal que:

- ✓ $x(\tau)$ descreve a geodésica nula (linha reta), de modo que a união de todas essas linhas retas (ver Figura 4.1), as quais podem ser consideradas passando pela origem do sistema de coordenadas, formam a superfície do cone-de-luz cuja equação é dada por $x^2(\tau) = 0$;
- ✓ $k(\tau)$ é tangente às linhas retas $x(\tau)$ ou tangente à superfície cone-de-luz $x^2(\tau) = 0$;
- ✓ $\omega(\tau)$ descreve os estados físicos de polarizações transversais, interpretados como o transporte paralelo ao longo das linhas retas $x(\tau)$ ou ao longo do cone-de-luz $x^2(\tau) = 0$.

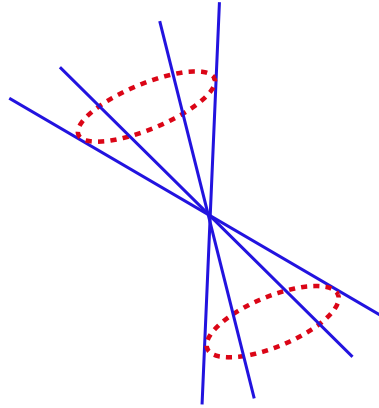


Figura 4.1: Feixe de retas formando o cone-de-luz.

Este resultado pode ser interpretado como o fato bem conhecido de que a luz se propaga em linha reta em um espaço homogêneo.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

No artigo [50] Roy J. Glauber descreve o campo de radiação eletromagnética usando os estados coerentes da mecânica quântica. No Apêndice B mostra-se que uma *wavelet* pode representar naturalmente um estado coerente canônico. Além disso, Antoine e Murenzi mostraram em [19] que a classe de *wavelets* de Cauchy tem incerteza mínima (que é uma propriedade inerente aos estados coerentes). Então concluímos que é possível descrever as ondas eletromagnéticas via *wavelets*. De fato, Gerald Kaiser em seu artigo [46] deu uma nova representação para as soluções das equações de Maxwell, ao tratá-las como superposições lineares de *wavelets* esféricas, dinamicamente adaptadas e bem-localizadas no espaço, obtendo com isso uma representação análoga à de Fourier, porém bem localizada no espaço das frequências.

Motivados por tais resultados e usando a classe de *wavelets* cônicas, as quais tem suporte estritamente contido em um cone convexo próprio no espaço- k das frequências, mostramos que uma distribuição f pertencente ao espaço das distribuições temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, pode ser obtida como uma soma finita de valores limites de funções analíticas resultantes da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada *wavelet* contínua de f com respeito à *wavelet* “mãe” ψ . Além disso, caracterizamos o conjunto de frente de ondas analítico de uma distribuição temperada em termos do comportamento de sua transformada *wavelet* direcional. Os principais resultados do **Capítulo 3** dessa tese são descritos pelo **Lema 2** e pelo **Teorema 5**. No **Lema 2**, provamos que a transformada *wavelet* distribucional com respeito à *wavelet* direcional, é uma função analítica de crescimento lento (ou temperado). Ademais, usando este Lema, mostramos que as distribuições temperadas podem ser obtidas como uma soma finita de valores limites de funções analíticas de crescimento lento, cujo resultado se encontra no **Teorema 5**. Na Seção 3.2, aplicamos o **Teorema 5** no estudo

do conjunto de frente de ondas analítico de distribuições temperadas. Mostramos que para uma dada distribuição $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, a transformada de f com respeito à *wavelet* cônica é definida de tal maneira que a transformada *wavelet* direcional de f produz uma função no espaço de fase, cujas singularidades de alta-frequência são precisamente os elementos do conjunto de frente de ondas analítico de f . Em [39], Hörmander introduziu a noção de conjunto de frente de ondas analítico $WF_a(f)$ de uma distribuição f , como um subconjunto do espaço cotangente $T^*(X) \setminus \{0\}$, cuja projeção sobre X coincide com o suporte singular analítico de f . Sua definição baseia-se no emprego da transformada de Fourier de f . Porém no **Capítulo 3**, apresentamos uma definição alternativa para o conjunto $WF_a(f)$, em termos de valores limites de funções analíticas decorrentes da complexificação da variável “ x ” correspondente à localização da transformada *wavelet* contínua de f com respeito a ψ .

No **Capítulo 4**, é realizada a generalização para o caso de distribuições a valores-vetoriais, seguindo o formalismo original de Nils Dencker apresentado no artigo [6]. Em particular, estudamos a propagação de singularidades das soluções das equações de Maxwell. Revisitamos o problema analisado por Dencker sobre a propagação de polarizações das soluções das equações de Maxwell. Então, levando em conta que o campo eletromagnético é uma distribuição temperada a valores-vetoriais, usamos os resultados de Referência [5] para representar as soluções das equações de Maxwell em termos das *wavelets* direcionais. Desse modo, utilizamos o conjunto de polarização, o qual refina a noção de conjunto de frente de ondas para o caso de distribuições a valores-vetoriais, a fim de analisar as singularidades das soluções das equações de Maxwell. Enfatizamos ainda que Dencker [6] aplicou seus resultados para as equações de Maxwell sem se preocupar com a representação do campo eletromagnético, isto é, representando-o via ondas planas ao invés de via *wavelets*, como é o caso da nossa representação.

Através da representação de tais soluções via *wavelets* direcionais, ao invés de representá-las via *wavelets* esféricas como feito por Kaiser [46], esperamos um refinamento da informação captada, já que ao usarmos *wavelets* direcionais como filtro para detectar características orientadas (tais como: arestas, bordas, campos vetoriais etc) na implementação numérica das conclusões do **Capítulo 4**, teremos, por exemplo, como resultado o refinamento do tratamento das imagens geradas via a captação das ondas retro-espalhadas por meio de um radar de abertura sintética, conforme motivado na próxima Seção.

5.1 Motivação para futuras pesquisas: aplicações para dados de radar

Encerraremos este Capítulo motivando a associação da análise microlocal com *wavelets* direcionais observando o problema de análise de dados de radar. Lembremos que o objetivo do radar é a obtenção de informações sobre objetos através da análise de ondas refletidas a partir destes objetos. Sinais de radar são, na realidade, ondas eletromagnéticas no espaço-tempo, portanto, eles estão sujeitos às leis físicas de propagação e espalhamento. Um dos aparatos tecnológicos contemporâneos mais eficazes na análise de sinais de radar é o Radar de Abertura Sintética (SAR)¹ [3]. A imagem de um radar de abertura sintética é gerada a partir de um avião ou satélite carregando uma antena e se movendo ao longo de uma trajetória de varredura, conforme apresentado na figura 5.1. A antena emite pulsos de radiação eletromagnética, que se espalham por todo o terreno e as ondas espalhadas são detectadas com a mesma antena.

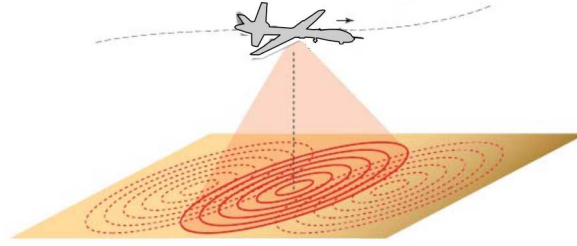


Figura 5.1: Radar de abertura sintética.

É claro que o modelo mais fidedigno para descrever ondas de radar são as equações de Maxwell, porém, na Referência [3] os autores utilizam um modelo escalar simplificado para representar a propagação da onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(x)} \partial_t^2 \right) U(t, x) = 0 \quad , \quad (5.1)$$

onde $c(x)$ é a velocidade local de propagação das ondas eletromagnéticas, com cada componente dos campos elétrico e magnético no espaço livre satisfazendo a equação da onda (5.1). Por sua vez, o espalhamento pode ser observado como sendo devido às perturbações na velocidade da onda, o qual descreveremos como

$$\frac{1}{c^2(x)} = \frac{1}{c_0^2} - V(x) \quad , \quad (5.2)$$

¹A sigla SAR é oriunda do inglês *Synthetic Aperture Radar*.

de modo que $V(x)$ é a função refletividade, a qual não correspondem exatamente à perturbação na velocidade da onda electromagnética no material, mas sim representa uma medida da refletividade do radar para a polarização medida pela antena.

A imagem $I(y)$ de um radar de abertura sintética está relacionada com a função refletividade $V(x)$ via a seguinte convolução

$$I(y) = \int K(y, x) V(x) dx \quad (5.3)$$

onde $K(y, x)$ é o *kernel* de um operador pseudo-diferencial, que pode ser escrito na forma

$$K(x, y) = \int a(x, y, k) e^{ik(x-y)} dk, \quad (5.4)$$

onde a amplitude $a(x, y, k)$, que são filtros², satisfazem certas estimativas [15, 16].

Em se tratando de objetos no espaço, a sua forma é determinada pelas fronteiras entre os diferentes materiais (como por exemplo, ar e metal). Nessa interface, espera-se que a função refletividade $V(x)$ tenha uma descontinuidade de salto, que é um tipo de singularidade. Singularidades (como descontinuidades de salto ao longo de uma superfície ou curva) tem uma localização e uma direção. No caso de uma descontinuidade de salto ao longo de uma superfície, a direção é a normal à superfície. Esta noção é formalizada na análise microlocal através do conceito de conjunto de frente de onda.

Dentre os problemas em aberto relacionados com imagens de radar de abertura sintética, listados no Capítulo 11 da Referência [3], estamos interessados na questão sobre “*Como podemos explorar plenamente a informação da polarização no campo espalhado?*” De acordo com Cheney-Borden [3], “*este problema está intimamente ligado à questão do espalhamento múltiplo: não temos um modelo linear que prevê qualquer **mudança** na polarização do campo elétrico retro-espalhado. Consequentemente, o nosso método de imagem linear não pode fornecer informações sobre como o espalhamento **muda** a polarização do campo analisado.*” Em nossa opinião, este problema poderia ser resolvido se trabalhássemos com as equações de Maxwell, em vez de trabalhar apenas com o modelo escalar simplificado. Na verdade, o conjunto de frente de ondas associado ao modelo escalar simplificado (5.1) não contém qualquer informação sobre as componentes do campo elétrico (ou do campo magnético) que são singulares. A fim de especificar as direções singulares no espaço vetorial, pode-se considerar operadores

²Filtros são simplesmente convoluções ou operadores multiplicação no domínio da transformada de Fourier.

a valores-vetoriais que mapeiam distribuição a valores-vetoriais em funções escalares suaves, em vez de manusear apenas com operadores escalares mapeando componentes individuais em funções suaves. Esta abordagem leva à definição do conjunto de polarização de Dencker [6].

Em um outro artigo que está em andamento [51], é estudado um problema de reflexão linear inversa para o modelo a valores-vetoriais mencionado acima. A partir de tal estudo, é obtida a relação entre o conjunto de polarização de ondas refletidas e ondas incidentes, para dados de radar de abertura sintética. O uso do conjunto de polarização de distribuições a valores-vetoriais é imprescindível nessa discussão. Neste ponto, é importante ressaltar que os métodos de análise microlocal foram usados por Cheney e colaboradores (vejam as Referências citadas em [3]) para reconstruir as singularidades da região de espalhamento. Os métodos microlocais nos fornecem meios de reconstruir tais singularidades, mesmo nos casos quando os dados são incompletos, imprecisos e não-ideais. Além disso, tais métodos nos permitem lidar com dados que são limitados no tempo e no espaço. No entanto, os métodos microlocais têm a limitação de que eles só podem fornecer a reconstrução de singularidades e sua intensidade, o que pode ser um obstáculo nos casos em que a antena de radar tenha uma pobre direcionabilidade. Neste caso, seria interessante tomar como filtro as *wavelets* direcionais, uma vez que são capazes de detectar características orientadas (segmentos, arestas, bordas, campos vetoriais etc) em imagens com uma boa seletividade direcional [19, 20]. Desse modo, a aplicação de tais *wavelets* poderiam ser uma maneira de superar as limitações dos métodos microlocais.

A

Apêndice: Análise das curvas características da equação da onda

Considere a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

usando as definições e os teoremas apresentados na Subseção 2.2.1. Essa equação pode ser usada para descrever o movimento de uma onda de som, uma onda eletromagnética ou uma onda óptica. Se $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ é a superfície característica da equação (A.1), então a função ϕ deve satisfazer

$$\phi_t^2 - \phi_{x_1}^2 - \phi_{x_2}^2 - \phi_{x_3}^2 = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Quando $\phi_t \neq 0$, pode-se resolver $\frac{\partial \phi}{\partial t} = k$ para obter $t = \psi(x_1, x_2, x_3)$, onde ψ satisfaz

$$\begin{aligned} \psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right)^2 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se $\phi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ é uma superfície portando as singularidades da solução u , então para qualquer “ t ” fixo, a equação (A.3) provê a localização dessa superfície no espaço (x_1, x_2, x_3) no tempo fixado “ t ”. Assim, as características de (A.3) podem ser obtidas

via a projeção das curvas integrais

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{ds} = 2p_i \\ x_i(0) = x_{i0} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_i}{ds} = 0 \\ p_i(0) = p_{i0} \end{array} \right., \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (\text{A.4})$$

Efetuada os cálculos na variável x_1 (uma vez que nas outras variáveis o cálculo é análogo), têm-se que

$$\frac{dx_1}{ds} = 2p_1 \quad \Rightarrow \quad x_1(s) = 2p_1s + k \quad ,$$

como $x_1(0) = x_{10}$,

$$x_1(0) = 2p_1 \cdot 0 + k = x_{10} \quad \Rightarrow \quad k = x_{10} \quad ,$$

daí

$$x_1(s) = 2p_1s + x_{10} \quad . \quad (\text{A.5})$$

Da equação diferencial ordinária na variável p , temos

$$\frac{dp_1}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1(s) = c \quad ,$$

como $p_1(0) = p_{10}$,

$$p_1(0) = c = p_{10} \quad ,$$

daí

$$p_1 = p_{10} \quad . \quad (\text{A.6})$$

De modo que este sistema na variável x_{10}

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(s) = 2p_1s + x_{10} \\ p_1 = p_{10} \end{array} \right., \quad (\text{A.7})$$

junto com os sistemas para as variáveis $x_2(s)$ e $x_3(s)$, representam uma reta paramétrica em s , pertencente ao $\mathbb{R}^3$ e com direção (p_{10}, p_{20}, p_{30}) .

As características da equação (A.3) podem ser obtidas via a projeção das curvas

integrais

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = 2p_1 \\ \frac{dx_2}{ds} = 2p_2 \\ \frac{dx_3}{ds} = 2p_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{ds} = 0 \\ \frac{dp_2}{ds} = 0 \\ \frac{dp_3}{ds} = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.8})$$

sobre o espaço (x_1, x_2, x_3) . Tomando um ponto arbitrário $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, p_{10}, p_{20}, p_{30})$, satisfazendo a condição

$$\sum_{i=1}^3 p_{i0}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_{30}^2 = 1, \quad (\text{A.9})$$

então a solução da equação (A.8) com o dado inicial

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ x_3(0) = x_{30} \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1(0) = p_{10} \\ p_2(0) = p_{20} \\ p_3(0) = p_{30} \end{cases}, \quad (\text{A.10})$$

é dada por

$$\begin{cases} x_1 = p_{10}s + x_{10} \\ x_2 = p_{20}s + x_{20} \\ x_3 = p_{30}s + x_{30} \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 = p_{10} \\ p_2 = p_{20} \\ p_3 = p_{30} \end{cases}. \quad (\text{A.11})$$

Essa é a equação paramétrica de uma reta em $\mathbb{R}^3$ com direção (p_{10}, p_{20}, p_{30}) . Da condição (A.9) e do sistema (A.11) obtemos a equação da esfera de raio s

$$\begin{aligned} & p_{10}^2 + p_{20}^2 + p_{30}^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x_1 - x_{10}}{s} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_{20}}{s} \right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_{30}}{s} \right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & (x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2 = s^2. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Já que (p_{10}, p_{20}, p_{30}) é a direção normal da superfície (A.3), então, o Teorema 3 indica que as singularidades fracas da solução da equação da onda (A.1) se propagam ao longo da direção normal à frente de ondas $\psi(x_1, x_2, x_3) = t$ e que a velocidade de propagação é uma constante. Portanto, se tal equação da onda é aplicada para descrever uma onda

óptica, então o sistema de equações (A.11) denota que o raio de luz se propaga ao longo de linhas retas em um meio homogêneo.

Porém, se considerarmos a propagação de uma onda óptica em um meio não-homogêneo, a equação da onda (A.1) torna-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad , \quad (\text{A.13})$$

onde $n = n(x_1, x_2, x_3)$ é o índice de refração. De maneira análoga aos cálculos feitos para o caso homogêneo, vemos que a função ψ satisfaz

$$\psi_{x_1}^2 + \psi_{x_2}^2 + \psi_{x_3}^2 = [n(x_1, x_2, x_3)]^2 \quad . \quad (\text{A.14})$$

E conseqüentemente, suas características satisfazem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{ds} = 2p_1 \\ \frac{dx_2}{ds} = 2p_2 \\ \frac{dx_3}{ds} = 2p_3 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{ds} = (n^2)_{x_1} \\ \frac{dp_2}{ds} = (n^2)_{x_2} \\ \frac{dp_3}{ds} = (n^2)_{x_3} \end{array} \right. , \quad (\text{A.15})$$

obedecendo ao dado inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ x_3(0) = x_{30} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1(0) = p_{10} \\ p_2(0) = p_{20} \\ p_3(0) = p_{30} \end{array} \right. . \quad (\text{A.16})$$

Novamente, efetuando os cálculos apenas para a variável x_1 (uma vez que nas outras variáveis o cálculo é análogo), a solução de $\frac{dx_1}{ds} = 2p_1$ com condição inicial $x_1(0) = x_{10}$ é a mesma já calculada

$$x_1(s) = 2p_1 s + x_{10} \quad .$$

Porém, para este meio não-homogêneo, o índice de refração $n = n(x_1, x_2, x_3)$ é dependente da posição do feixe. Com isso a equação diferencial ordinária na variável p

fica

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{ds} &= (n^2)_{x_1} \\ \Leftrightarrow \quad p_1(s) &= (n^2)_{x_1} s + c \quad ,\end{aligned}$$

como $p_1(0) = p_{10}$,

$$\begin{aligned}p_1(0) &= (n^2)_{x_1} 0 + c = p_{10} \\ \Rightarrow \quad c &= p_{10} \quad ,\end{aligned}$$

daí

$$p_1(s) = (n^2)_{x_1} s + p_{10} \quad .$$

Assim,

$$\begin{aligned}\begin{cases} x_1(s) = 2p_1 s + x_{10} \\ p_1(s) = (n^2)_{x_1} s + p_{10} \end{cases} \quad , \\ \Rightarrow \quad x_1(s) &= 2[(n^2)_{x_1} s + p_{10}] s + x_{10} \\ \Rightarrow \quad x_1(s) &= 2(n^2)_{x_1} s^2 + 2p_{10} s + x_{10} \quad .\end{aligned}$$

Como o cálculo é análogo para as variáveis x_2 e x_3 , as equações paramétricas ficam

$$\begin{cases} x_i = 2(n^2)_{x_i} s^2 + 2p_{i0} s + x_{i0} \\ p_i = (n^2)_{x_i} s + p_{i0} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (\text{A.17})$$

Geralmente, os p_i não são constantes já que o índice de refração em um meio não-homogêneo $n = n(x_1, x_2, x_3)$ não é constante. Portanto, as características não são mais linhas retas, uma vez que as parametrizações (A.17) não são mais equações de retas, mesmo que $(n^2)_{x_i}$ não dependa do parâmetro s . Isto significa que a luz não se propaga ao longo de linhas retas em meios não-homogêneos.

□

B

Apêndice: Relação entre os estados coerentes e as *wavelets*

Em Mecânica Quântica, um estado coerente é um tipo específico de estado quântico aplicável ao oscilador harmônico quântico, ao campo eletromagnético, etc, o qual descreve um tipo máximo de coerência e um tipo clássico de comportamento. Erwin Schrödinger em 1926, avaliou o estado coerente como um pacote de ondas de incerteza mínima, enquanto buscava a solução da equação que levou o seu nome, impondo que tais soluções satisfizessem o princípio de correspondência¹. Assim, ele definiu estes estados como sendo a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo [52], Pág. 57.

Matematicamente, o estado coerente $|\alpha\rangle$ é definido como sendo o auto-estado *ket* do operador aniquilação $\hat{a}$, formalmente descrito como

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad . \quad (\text{B.1})$$

Como $\hat{a}$ não é hermitiano, α é um número complexo cuja parte imaginária não é necessariamente nula, o qual pode ser representado como

$$\alpha = |\alpha|e^{i\theta} \quad , \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad , \quad (\text{B.2})$$

onde $|\alpha|$ e θ são, respectivamente, a amplitude e a fase do estado. Na literatura, o estado $|\alpha\rangle$ é chamado de estado quase-clássico ou estado Gaussiano, conforme Referência

¹O princípio de correspondência formulado por Niels Bohr em 1920, é o estado em que o comportamento dos sistemas descritos pela teoria da Mecânica Quântica reproduz a física clássica no limite em que constantes quânticas tendem às clássicas.

([53], pág.559) e como ele é a espinha dorsal da Óptica Quântica, neste contexto, $|\alpha\rangle$ é chamado de estado coerente canônico ou padrão. Para uma representação matematicamente bem fundamentada, consideremos a seguinte definição

Definição 19. *Sejam $\mathfrak{H}$ um espaço de Hilbert separável e complexo, X um espaço localmente compacto e $d\nu$ uma medida sobre X . Seja $|x\rangle$ um vetor em $\mathfrak{H}$ definido para cada $x \in X$. Vamos assumir que este conjunto de vetores são munidos das seguintes propriedades:*

i) *O mapeamento $x \mapsto |x\rangle$ é fracamente contínuo, isto é, para cada vetor $|\phi\rangle \in \mathfrak{H}$, a função $\Psi(x) = \langle x|\phi\rangle$ é contínua na topologia de X .*

ii) *A resolução da identidade*

$$\int_X |x\rangle\langle x| d\nu(x) = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}} \quad , \quad (\text{B.3})$$

é assegurada no sentido fraco no espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$, ou seja, para quaisquer dois vetores $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ em $\mathfrak{H}$, a seguinte equação é válida

$$\int_X \langle \phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle d\nu(x) = \langle \phi|\psi\rangle \quad . \quad (\text{B.4})$$

Um conjunto de vetores $|x\rangle$ satisfazendo as duas propriedades acima, é chamado uma família de estados coerentes generalizados.

Para recuperar a definição canônica (ou padrão) de estados coerentes, basta definir $X \equiv \mathbb{C}$ como o plano complexo, tomar $x \equiv \alpha$ e a medida

$$d\nu(x) \equiv \frac{1}{\pi} d^2\alpha = \frac{1}{\pi} d(\text{Re}(\alpha))d(\text{Im}(\alpha)) \quad , \quad (\text{B.5})$$

conforme a Referência ([53], pág.569).

O principal objetivo da identidade (B.3), é assegurar que um vetor arbitrário $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ seja expresso como uma combinação linear (integral) da família de estados coerentes formada pelo conjunto de vetores $|x\rangle$. De fato, multiplicando $|\psi\rangle$ em ambos os lados de tal identidade, tem-se

$$\int_X |x\rangle\langle x|\psi\rangle d\nu(x) = |\psi\rangle \quad , \quad (\text{B.6})$$

definindo $\Psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, temos

$$|\psi\rangle = \int_X \Psi(x)|x\rangle d\nu(x) . \quad (\text{B.7})$$

Estes vetores Ψ são funções contínuas de quadrado integrável sobre o espaço localmente compacto X e satisfazendo as condições da transformada integral definida em (2.1), de modo que

$$\int_X K(x,y)\Psi(y) d\nu(y) = \Psi(x) , \quad (\text{B.8})$$

onde $K(x,y) = \langle x,y\rangle$ é o *kernel*, que neste contexto, goza das propriedades:

- $K(x,y) \geq 0$;
- $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$;
- $\int_X K(x,z)k(z,y) d\nu(z) = k(x,y)$.

Uma maneira alternativa de se descrever os estados quânticos é usando o formalismo de grupos. Gilmore e Perelomov perceberam, de uma forma praticamente independente, que a construção de estados coerentes as vezes pode ser vista como um problema de Teoria de Grupos [54–58].

Seja G um grupo localmente compacto. Suponhamos que G tenha uma representação irredutível e contínua U , sobre o espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ via o operador unitário $U(g)$, $\forall g \in G$. Esta representação é chamada de quadrado integrável se existe um vetor não-nulo $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$, para o qual a integral

$$c(\psi) = \int_G |\langle \psi|U(g)\psi\rangle|^2 d\mu(g) , \quad (\text{B.9})$$

converge. Aqui, $d\mu$ é a medida de Haar invariante à direita sobre o grupo G . Um vetor $|\psi\rangle$ para o qual $c(\psi) < \infty$, é chamado de *admissível* e pode ser mostrado que a existência de um vetor como este, garante a existência de um conjunto inteiramente denso de tais vetores $|\psi\rangle$ em $\mathfrak{H}$. Além disso, se o grupo G é unimodular, isto é, se as medidas invariantes à esquerda e à direita são coincidentes, então a existência de um vetor admissível $|\psi\rangle$, implica que cada vetor em $\mathfrak{H}$ é admissível. Assim, dada uma representação quadrado integrável U e um vetor admissível $|\psi\rangle$, definiremos os vetores

$$|g\rangle = \frac{1}{\sqrt{c(\psi)}} U(g)|\psi\rangle , \quad \forall g \in G . \quad (\text{B.10})$$

Estes vetores são análogos aos dos estados coerentes canônicos, os quais, naquele formalismo são escritos em termos da representação do grupo de Heisenberg. Ademais, pode ser mostrado que a resolução da identidade

$$\int_G |g\rangle\langle g| d\mu(g) = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}} \quad , \quad (\text{B.11})$$

é assegurada sobre o espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$. Assim, os vetores $|g\rangle$ constituem uma família de estados coerentes generalizados. As funções $F(g) = \langle g|\psi\rangle$, para todos os vetores $|\phi\rangle \in \mathfrak{H}$, são quadrado integráveis com respeito à métrica $d\mu$ e o conjunto de tais funções, que de fato são contínuas na topologia de G , formam um subespaço fechado de $L^2(G, d\mu)$. Além disso, o mapeamento $\phi \mapsto F$ é uma isometria linear entre os espaços $\mathfrak{H}$ e $L^2(G, d\mu)$ e de acordo com esta isometria, a representação U é mapeada para uma sub-representação da representação regular² esquerda de G sobre $L^2(G, d\mu)$.

Um típico exemplo da construção de estados coerentes generalizados usando o formalismo de teoria de grupos, são as *wavelets*. Tal construção é provida pelo grupo afim – grupo de todas as translações afins inversíveis do espaço nele mesmo – da reta real $\mathbb{R}$, simbolizada por G_{Af} . Este é o grupo de todas as matrizes 2×2 do tipo

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{B.12})$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, de modo que sua matriz inversa é dada por

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Para facilita as manipulações algébricas, escreveremos g como a matriz linha $g = (b, a)$, com a ação sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$(b, a) \circ x = b + ax \quad . \quad (\text{B.14})$$

Este grupo é não-unimodular, com a medida invariante à esquerda sendo dada por $d\mu(b, a) = a^{-2}db da$ e a medida invariante à direita dada por $d\mu(b, a) = a^{-1}db da$. O grupo afim tem uma representação unitária e irredutível sobre o espaço de Hilbert

²A representação regular de um grupo G , é a representação linear proporcionada pelo grupo de ação de G sobre ele mesmo, via uma translação.

$L^2(\mathbb{R}, dx)$, onde os vetores em $L^2(\mathbb{R}, dx)$ são funções mensuráveis $\varphi(x)$ de uma variável real x e o operador unitário $U(b, a)$ desta representação, atua sobre os $\varphi(x)$ como

$$\begin{aligned} (U(b, a)\varphi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \varphi\left((b, a)^{-1} \circ x\right) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde $(b, a)^{-1} = g^{-1} = \left(-\frac{b}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

De modo geral, se ψ é uma função em $L^2(\mathbb{R}, dx)$ tal que sua transformada de Fourier $\widehat{\psi}$ satisfaz a condição de admissibilidade

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(k)|^2}{|k|} dk < \infty, \quad (\text{B.16})$$

então, $\widehat{\psi}$ é um vetor admissível, ou seja,

$$c(\psi) = \int_{G_{Af}} \left| \langle \psi | U(b, a) \psi \rangle \right|^2 \frac{db da}{a^2} < \infty. \quad (\text{B.17})$$

Com isso, seguindo a construção geral descrita acima, os vetores

$$|b, a\rangle = \frac{1}{\sqrt{c(\psi)}} U(b, a) \psi, \quad (b, a) \in G_{Af}, \quad (\text{B.18})$$

definem uma família de estados coerentes generalizados. Tais vetores tem a solução da identidade

$$\int_{G_{Af}} |b, a\rangle \langle b, a| \frac{db da}{a^2} = \mathbb{I}_{L^2}, \quad (\text{B.19})$$

assegurada sobre o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Na literatura que trata de análise de sinais, um vetor satisfazendo a condição de admissibilidade (B.16), é chamado de *wavelet* “mãe” e os estados coerentes generalizados $|b, a\rangle$ são chamados *wavelets*. Com isso, os sinais são identificados com os vetores $|\varphi\rangle$ em $L^2(\mathbb{R}, dx)$ e a função

$$F(b, a) = \langle b, a | \varphi \rangle, \quad (\text{B.20})$$

é chamada de transformada *wavelet* contínua do sinal φ , conforme as Referências [59, 60]. Em outras palavras, uma *wavelet* pode representar naturalmente um estado coerente canônico.

Este conceito pode ser estendido para duas ou mais dimensões finitas. Com isso, o grupo afim G_{Af} seria substituído pelo assim chamado grupo de similaridades do plano (ou de similaridades do espaço n -dimensional estudado), o qual, consiste de transformações planas, rotações e dilatações globais. As resultantes *wavelets* bidimensionais, e algumas de suas generalizações para mais dimensões, são amplamente utilizadas no processamento de sinais de imagens [20]. Além disso, Antoine e Murenzi mostraram em [19] que a classe de *wavelets* de Cauchy tem incerteza mínima, ou seja, uma propriedade inerente aos estados coerentes.

Para nós, tal conexão entre os estados coerentes e as *wavelets* é de fundamental importância, visto que no artigo [50] Roy J. Glauber descreve o campo de radiação eletromagnética usando os estados coerentes da Mecânica Quântica. Ou seja, é possível descrever as ondas eletromagnéticas via *wavelets*. Assim, habilitado por tão grande resultado, Gerald Kaiser em seu artigo [46] deu uma nova representação para as soluções das equações de Maxwell, ao tratá-las como superposições lineares de *wavelets* esféricas, dinamicamente adaptadas e bem-localizadas no espaço, obtendo com isso uma representação análoga à de Fourier, porém bem localizada no espaço das frequências. Trilhando em caminhos correlatos, porém esperando obter uma precisão ainda maior na análise dos dados, o tratamento dado no **Capítulo 4** desta tese, teve por objetivo descrever as soluções das equações de Maxwell usando uma classe de *wavelets* cônicas chamadas *wavelets* direcionais.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Weeks. *Digital Signal Processing*. Infinity Science Press, 2007.
- [2] S. A. Broughton and K. Bryan. *Discrete Fourier Analysis and Wavelets – Applications to Signal and Image Processing*. WILEY, 2009.
- [3] M. Cheney and B. Borden. *Fundamentals of radar imaging*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.
- [4] D. F. Walnut. *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhäuser Boston, 2002.
- [5] D.H.T. Franco F.A. Apolonio and F.N. Fagundes. A note on directional wavelet transform: distributional boundary values and analytic wavefront sets. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012:11 pages. Article ID758694.
- [6] N. Dencker. On the propagation of polarization sets for systems of real principal type. *Journal of Functional Analysis*, 46:351 –372, 1982.
- [7] Michael W. Frazier. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Springer, 1999.
- [8] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists, Sixth Edition*. Elsevier Academic Press, 2005.
- [9] D.H.T. Franco. *Métodos Matemáticos da Física II: Distribuições, Transformada de Fourier, Análise Microlocal, Campos Quantizados e Renormalização*. Notas de Aula, 2000-2012.
- [10] P. D. Lax. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. *Duke Math. J.*, 24:627 – 646, 1957.
- [11] S. Chen. *Analysis of Singularities of Partial Differential Equations*. World Scientific, 2011.

-
- [12] Fritz John. *Partial Differential Equations, V.1.* Springer, 1982.
 - [13] V. M. Iório. *EDP um Curso de Graduação, Terceira Edição.* IMPA, 2010.
 - [14] F. G. Friedlander. *The Wave Equation on a Curved Space-Time.* Cambridge University Press, 1975.
 - [15] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta Math.*, 127:79 – 183, 1971.
 - [16] J. J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta Math.*, 128:183 – 269, 1972.
 - [17] D.H.T. Franco and F.N. Fagundes. A note on directional wavelet transform and propagation of polarization sets for solutions of maxwell’s equations. Submitted for publication, 2012.
 - [18] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I.* Springer Verlag. Second Edition, 1990.
 - [19] J.-P. Antoine, R. Murenzi, and P. Vandergheynst. Directional wavelets revisited: Cauchy wavelets and symmetry detection in patterns. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6(3):314 – 345, 1999.
 - [20] J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, and S. Twareque Ali. *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives.* Cambridge University Press, 2004.
 - [21] G.G. Walter. *Wavelets and generalized functions.* in Wavelets – a tutorial in theory and applications, C.K Chui (ed.), pp.51-70. Academic Press, 1992.
 - [22] M. Holschneider. Localization properties of wavelet transforms. *Journal of Mathematical Physics*, 34(3227), 1993.
 - [23] M. Holschneider. *Wavelets: an analysis tool.* Oxford University Press, 1995.
 - [24] J. Schmeelk. Wavelet transforms in generalized fock spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 20(4):657 – 672, 1997.
 - [25] S. Moritoh. Wavelet transforms in euclidean spaces – their relation with wave front sets and besov, triebel-lizorkin spaces. *Tohoku Math. J.*, 47(4):555 – 565, 1995.

-
- [26] M. Holschneider. *Some directional microlocal classes defined using wavelet transforms.* in S. Dubuc, G. Deslauries, J.-M. Lima, and B. MacGibbon, editors, *Comptes Rendues des Ateliers sur les Fonctions Splines et la Theorie des Ondelettes*. Publications AMS, 1998.
- [27] J. Navarro. Singularities of distributions via the wavelet transform. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(2):454 – 467, 1999.
- [28] B.K. Sohn and D.H. Pahk. Analytic representation of generalized tempered distributions by wavelets. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 37:141 – 149, March 2001.
- [29] R-Q. Jia, J. Wang, and D-X. Zhou. Compactly supported wavelet bases for Sobolev spaces. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15(3):224 – 241, 2003.
- [30] R.S. Pathak. The wavelet transform of distributions. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 56(3):411 – 421, 2004.
- [31] S. Pilipović and M. Vuletić. Characterization of wave front sets by wavelet transforms. *Tohoku Math. J.*, 58(3):369 – 391, 2006.
- [32] S. Pilipović and N. Teofanov. Multiresolution expansion, approximation order and quasiasymptotic behavior of tempered distributions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331(1):455 – 471, 2007.
- [33] K. Saneva. Application of the quasiasymptotic boundedness of distributions on wavelet transform. *Publications de l’Institut Mathematique*, 86(100):115 – 122, 2009.
- [34] K. Saneva and J. Vindas. Wavelet expansions and asymptotic behavior of distributions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 370(2):543 – 554, 2010.
- [35] J. Vindas, S. Pilipović, and D. Rakić. Tauberian theorems for the wavelet transform. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 17:65 – 95, 2011. 10.1007/s00041-010-9146-1.
- [36] S. Pilipović and J. Vindas. Multidimensional tauberian theorems for wavelet and non-wavelet transforms. arXiv:1012.5090v2 [math.FA].
- [37] G. Kutyniok and D. Labate. Resolution of the wavefront set using continuous shearlets. *Trans. Am. Math. Soc.*, 361(5):2719 – 2754, 2009.

- [38] J.-P. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi, and B. Piette. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform. *Signal Process*, 31:241 – 272, 1993.
- [39] L. Hörmander. Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24:671–704, 1971.
- [40] L. Schwartz. *Methodes mathematiques pour les sciences physiques*. Hermam, Second Edition, 1979.
- [41] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1973.
- [42] F. Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, 1967.
- [43] K. Nishiwada. On the local surjectivity of analytic partial differential operators in the space of distributions with given wave front sets. *Surikaiseki-kenkyusho kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ.*, 239:19, 1975.
- [44] K. Nishiwada. On local characterization of wave front sets in terms of boundary values of holomorphic functions. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 14:309, 1978.
- [45] M. Kline. Electromagnetic theory and geometrical optics. *Research Report No. EM-171, Courant Institute of Mathematical Research*, 1962.
- [46] G. Kaiser. Wavelet electrodynamics. *Physics Letters A*, 168:28 – 34, 1992.
- [47] G. Kaiser. *A friendly guide to wavelets*. Birkhäuser, sixth printing, 1999.
- [48] L. Schwartz. *Lectures on partial differential equations and representations of semi-groups*. Notes by K. Varadarajan, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [49] M.E. Peskin and D.V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Westview Press, (Reprint edition 1995).
- [50] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Physical Review*, 131(6):2766 – 2788, 1963.
- [51] D.H.T. Franco. On the relation between singularities of incident and reflected waves to synthetic aperture radar data. *Work in progress*.

- [52] F. Schwabl. *Quantum mechanics, 4th Ed.* Springer, 2007.
- [53] C. Cohen, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics, Volume One.* WILEY-VCH, 1977.
- [54] A. M. Perelomov. Coherent states for arbitrary lie group. *Commun. Math. Phys.*, 26(3):222 – 236, 1972.
- [55] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications.* Springer-Verlag, 1986.
- [56] R. Gilmore. Geometry of symmetrized states. *Ann. Phys.*, 74:391 – 463, 1972.
- [57] R. Gilmore. On properties of coherent states. *Rev. Mex. Fis.*, 23:143 – 187, 1974.
- [58] E. Onofri. A note on coherent state representations of lie groups. *J. Math. Phys.*, 16:1087 – 1089, 1975.
- [59] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, 1992.
- [60] S. G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd ed.* Academic Press, 1999.