

ÉDER TEIXEIRA MARQUES

**AUTOMAÇÃO DO PROCESSO DE MODELAGEM GEOIDAL
APLICANDO DIFERENTES MÉTODOS DE REDUÇÃO
GRAVIMÉTRICA EM ÁREAS GEOLOGICAMENTE DISTINTAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do programa de pós-graduação em Engenharia Civil, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS – BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da
Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

M357a Marques, Éder Teixeira, 1971-
2017 Automação do processo de modelagem geoidal
aplicando diferentes métodos de redução gravimétrica
em áreas geologicamente distintas / Éder Teixeira
Marques. - Viçosa, MG, 2017.
141f. : il. ; 29 cm.

Orientador: William Rodrigo Dal Poz.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 127-141.

1. Geodésia. 2. Gravimetria. 3. Geologia - Métodos
estatísticos. 4. Modelagem. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Engenharia Civil. Programa
de Pós-graduação em Engenharia Civil. II. Título.

CDD 22. ed. 526.1


ÉDER TEIXEIRA MARQUES


**AUTOMAÇÃO DO PROCESSO DE MODELAGEM GEOIDAL APLICANDO
DIFERENTES MÉTODOS DE REDUÇÃO GRAVIMÉTRICA EM ÁREAS
GEOLOGICAMENTE DISTINTAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ciência do Conhecimento, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

APROVADA: 13 de julho de 2017.


Antônio Santana Ferraz


Gerson Rodrigues dos Santos


Gabriel do Nascimento Guimarães
(Coorientador)


Giuliano Sant'Anna Marotta


William Rodrigo Dal Poz
(Orientador)

DEDICATÓRIA E AGRADECIMENTOS

À Deus pelas oportunidades que me foram dadas, entre elas, a de concluir essa etapa.

Aos meus filhos Arthur e Pietra, o tempero da minha vida.

À minha esposa pelo carinho, amor sem fraude e paciência durante esse período de cansaço e às vezes de desânimo, pela compreensão das dificuldades por que passamos e pela capacidade de me admirar até nos momentos que isso, sabidamente, era impossível.

Aos meus pais que optaram por excluir da minha vida a palavra impossível e me ensinaram a ser paciente.

Aos meus irmãos pela oportunidade ímpar que tive de conviver com todos eles e com isso aprender, com eles, sobre amizade e tolerância.

Ao Jhonata, grande companheiro nessa caminhada. Essa interação, engenharia de agrimensura e informática, é salutar e deve ser sempre estimulada.

À todos os estudantes do programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, que participaram comigo dessa caminhada.

Ao IBGE e a ANP pela disponibilização da base de dados gravimétricos.

Ao servidor do IBGE, Carlos Alberto Monteiro de Almeida, pelos ensinamentos relacionados à coleta de dados gravimétricos.

Ao professor William Rodrigo Dal Poz pelo incentivo e apoio ao trabalho e ajuda nos momentos mais difíceis.

Ao professor Gabriel Nascimento pela paciência e boa vontade em participar de forma integral na realização desse trabalho, e que representa mais uma contribuição às ciências geodésicas do Brasil.

Ao professor Gerson, pelo compartilhamento de informações importantes para a pesquisa.

Aos amigos da Universidade Federal de Ouro Preto, José Geraldo, Humberto, Clécio, Geraldo, José Humberto, Gilberto, Júlio César, Tito, Cláudia, Chico, Alfio, Issamu Endo e muitos outros.

Ao curso de Pós Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Viçosa pela oportunidade.

*“Não amem o mundo nem o que nele há. Se alguém amar o mundo, o amor do Pai não está nele. Pois tudo o que há no mundo, a cobiça da carne, a cobiça dos olhos e a ostentação dos bens, não provém do Pai, mas do mundo. O mundo e a sua cobiça passam, mas aquele que faz a vontade de Deus permanece para sempre.”
(João 2:15-17)*

RESUMO

MARQUES, Éder Teixeira, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017. **Automação do processo de modelagem geoidal aplicando diferentes métodos de redução gravimétrica em áreas geologicamente distintas**. Orientador: William Rodrigo Dal Poz. Coorientadores: Gabriel do Nascimento Guimarães e Dalto Domingos Rodrigues.

A determinação do geoide, superfície equipotencial do campo da gravidade da Terra que melhor se ajusta, no sentido do método dos mínimos quadrados, ao nível médio do mar é muito importante nas ciências geodésicas uma vez que é utilizada como superfície de referência para as medidas da altitude ortométrica. Objetivamente, determinar o geoide significa obter o afastamento, ao longo da normal, entre o modelo geométrico da Terra, usado no posicionamento por satélite, e a superfície equipotencial. Essa separação entre os dois modelos é denominada ondulação geoidal. Para obter o seu valor pode-se associar nivelamento geométrico e medidas da gravidade ou usar a técnica *Remover Restaurar* (RR). No âmbito desta metodologia o presente trabalho foi proposto com a finalidade de se elaborar um software, que foi denominado de *GeoFis 1.0*, para obter a superfície equipotencial para ser utilizada como referência vertical de nível. Para avaliar cada etapa do cálculo aplicado pela técnica RR foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos pelo *GeoFis 1.0* e os resultados obtidos pelos módulos do pacote GRAVSOFT e do programa TC2DFTPL, fornecidos pelo *International Service for the Geoid* (ISG). As áreas de teste foram definidas com base na disponibilidade de dados gravimétricos e de suas características físicas, geologia e relevo. Para a determinação das anomalias residuais foram aplicados o Segundo Método de Condensação de Helmert, a correção de Bouguer completa e Rudzki. A Integral de Stokes foi utilizada na sua forma plana, no entanto, o *GeoFis 1.0* permite aplicá-la usando o núcleo esférico. Ao final das aplicações foi possível verificar que, durante as etapas da aplicação da técnica RR, houve boa aderência entre os resultados obtidos pelo *GeoFis 1.0* e aqueles resultados obtidos pelos demais softwares. Na análise dos resultados foi possível verificar que aqueles obtidos pelo software desenvolvido possui significativa aderência com aqueles usados na comparação. Além disso, constatou-se que os diferentes métodos de redução gravimétrica associados às diferentes áreas merecem atenção no processo de modelagem e por isso devem ser considerados. Enfim, verificou-se que

o software desenvolvido, *GeoFis* 1.0, alcançou o objetivo desejado e que estudos no sentido de aprimorá-lo devem ser realizados tanto em relação à implementação de novos métodos de redução gravimétrica, quanto na implementação de outras soluções para a Integral de Stokes.

ABSTRACT

MARQUES, Éder Teixeira, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017. **Automation of the geoidal modeling process by applying different methods of gravimetric reduction in geologically distinct areas.** Advisor: William Rodrigo Dal Poz. Co-advisors: Gabriel do Nascimento Guimarães and Dalto Domingos Rodrigues.

The geoid is the equipotential surface of the Earth's gravity field that best fits the mean sea level in terms of the Ordinary Least Squares method. Its determination is very important in the geodesic sciences since it is used as a reference surface for the measurements of orthometric altitude. Determining the geoid objectively means getting the distance, along the normal, between the geometric model of the Earth used in the satellite positioning, and the equipotential surface. This separation between the two models is called geoidal undulation. To obtain its value, either the geometric leveling and the gravity measurements can be associated or the Remove Restore (RR) technique can be used. In the context of this methodology, the present research was aimed to develop the software, which was denominated *GeoFis 1.0*, to obtain the equipotential surface to be used as a vertical reference of level. In order to evaluate each step of the calculation applied by the RR technique, a comparison was made between the results obtained by *GeoFis 1.0* and those obtained by the modules of the GRAVSOFIT package and the TC2DFTPL program, provided by the International Service for the Geoid (ISG). The test areas were defined based on the gravimetric data availability and its physical characteristics, geology and relief. For the residual anomaly determination, the Helmert's Second Method of Condensation, the complete Bouguer correction, and Rudzki were applied. The Stokes' Theorem was used in its flat form; however, the *GeoFis 1.0* allows to apply it using the spherical core. At the end of the applications, it was possible to verify that while the the RR technique was applied there was good adherence between the results obtained by *GeoFis 1.0* and those obtained by other software. When analyzing the results, it was observed that those ones from the developed software have significant adherence with those used in the comparison. In addition, it was found that the different methods of gravimetric reduction associated to the different areas deserve attention in the modeling process, and thus, should be taken into consideration. Finally, it was verified that the developed software, *GeoFis 1.0*, reached the anticipated objective and that studies to improve it must be carried

out for the implementation of both new gravimetric reduction methods and other solutions for the Stokes' Theorem.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	10
1.1 Objetivo	13
1.1.1 Objetivo Geral.....	13
1.1.2 Objetivos específicos	13
1.2 Justificativa	14
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
2.1 Considerações iniciais	16
2.2 O campo de gravidade.....	16
2.3 O potencial gravitacional.....	17
2.4 O campo da gravidade terrestre.....	23
2.5 O campo da gravidade normal.....	26
2.6 O campo da gravidade anômalo	27
2.7 Reduções gravimétricas.....	31
2.8 Métodos de cálculo do geoide.....	42
2.8.1 Método combinado	42
2.8.1.1 Colocação por Mínimos Quadrados	44
2.8.1.2 Geoestatística aplicada à Geodesia Física.....	53
3. MATERIAS E MÉTODOS.....	57
3.1 Localização e descrição geológica das áreas de estudo.....	57
3.2 Dados de gravidade.....	58
3.2.1 Gravímetro CG5.....	60
3.2.2 Gravímetro Lacoste-Romberg.....	61
3.3 Coeficientes do modelo geopotencial global	62
3.4 Modelos Digitais de Elevação (MDEs)	62
3.5 Softwares.....	65
3.5.1 Módulos do pacote GRAVSOFT	65
3.5.2 ArcGIS	67
3.5.3 Linguagem C++	67
3.6 Metodologia	68
3.6.1. Etapas da técnica remover calcular restaurar	68

4. RESULTADOS E ANÁLISES	75
4.1 Desenvolvimento de um software para cálculo do geóide.....	75
4.2 Determinação do modelo geoidal para as áreas de estudo.....	76
4.2.1 Análise da consistência das observações disponíveis	79
4.2.1.1 Análise de pontos duplicados e sem altitude ortométrica	80
4.2.1.2 Análise gráfica dos dados altimétricos.....	80
4.2.1.3 Análise comparativa dos dados altimétricos	81
4.2.1.4 Definição do MDE utilizado.....	83
4.2.1.5 Análise matemática dos dados validados por distância e altitude.....	83
4.2.1.6 Resultados para as componentes do geóide residual para as áreas de estudo	84
4.2.1.6.1 Resultados para as componentes da anomalia ar livre	84
4.2.1.6.2 Resultados para a correção do terreno	85
4.2.1.6.3 Resultados anomalia de Faye.....	89
4.2.1.6.4 Resultados para as componentes da anomalia da gravidade Δg_{MGG} EIGEN-6C4 grau 200.....	91
4.2.1.6.5 Anomalias residuais de Faye	93
4.2.1.6.6 Anomalias residuais de Bouguer.....	94
4.2.1.6.7 Anomalias residuais de Rudzki	95
4.2.1.7 – Avaliação dos dados de anomalias residuais de Faye usando a colocação por mínimos quadrados.....	95
4.2.1.8 – Validação dos dados de anomalias residuais de Faye usando a geoestatística	100
4.2.1.9 – Cálculo do valor do N-residual usando as anomalias de Faye.....	105
4.2.1.10 – Cálculo do valor do N-residual usando as anomalias residuais de Bouguer e Rudzki.....	110
4.2.3 – Cálculo do valor do N usando os coeficientes do MGG EIGEN6C4 grau 200 .	112
4.2.4 – Resultados para as componentes do efeito indireto.....	114
4.2.5 – Ondulação geoidal para as áreas de estudo	116
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	124
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	127

1.INTRODUÇÃO

Os sistemas de posicionamento global (GLONASS, GALLILEO, GPS e Beidou) produziram um grande impacto nas Ciências Geodésicas. Possibilitaram a determinação da posição de qualquer usuário, portador de um receptor específico, de forma rápida e acurada. As altitudes obtidas pelo GPS estão referenciadas ao elipsoide adotado pelo sistema, ou seja, são tomadas ao longo da normal que é perpendicular à superfície do modelo matemático. No entanto, as altitudes utilizadas no dia a dia da engenharia são aquelas tomadas ao longo da linha do prumo, ou seja, são perpendiculares à superfície equipotencial do campo de gravidade e por isso são definidas como altitudes com significado físico, diferentemente das altitudes perpendiculares ao elipsoide cujo significado é puramente geométrico.

Para se determinar as altitudes com significado físico pode-se utilizar o nivelamento geométrico que, dependendo da distância horizontal nivelada e da ondulação do relevo, deve estar associado às medidas de gravidade (TALVIK, 2012) e pode-se utilizar também a ondulação geoidal (N), afastamento ao longo da normal entre o elipsoide e o geóide, em conjunto com medidas de altitude geométrica (h), como mostra a Figura 1. Nesta Figura estão representadas a altitude geométrica, distância entre o elipsoide e a superfície real medida ao longo da direção normal (n), a altitude ortométrica (H), distância entre o geóide e a superfície real medida ao longo da direção da vertical (v) e a ondulação geoidal (N), distância ao longo da normal entre o elipsoide e o geóide.

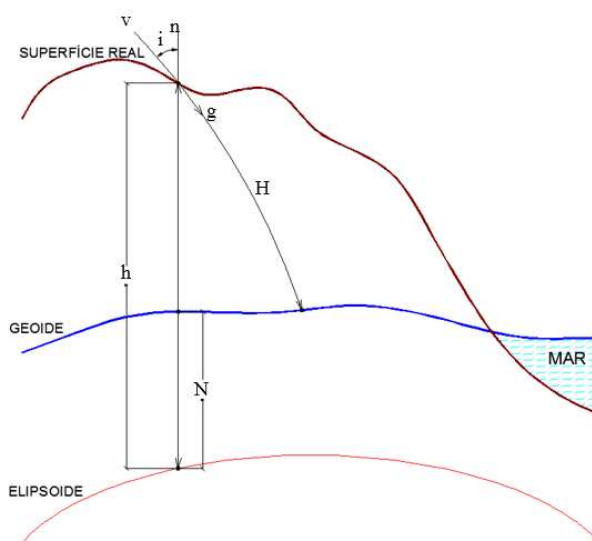


Figura 1. Elipsoide, quase-geóide, geóide e superfície real

Matematicamente o valor de H pode ser obtido pela relação matemática dada pela equação 1.

$$H \approx h - N \quad (1)$$

Onde:

H = Altitude ortométrica,

h = altitude geométrica, e

N = ondulação geoidal.

Da Figura 1 se verifica que, a partir dos valores de N e h derivam-se as altitudes com significado físico de interesse nas atividades práticas de engenharia.

Segundo Listing (1873) o geóide é uma superfície equipotencial do campo da gravidade da Terra que melhor se ajusta, no sentido do método dos mínimos quadrados, ao nível médio do mar. Na Geodesia esta superfície é tratada como referência para as medidas de altitudes ortométricas. Ao assumir o geóide como a superfície de referência vertical, tais medidas passam a ser observadas ao longo da vertical do lugar, como é o caso das medidas de altura no Sistema Astronômico Local (JEKELI, 2006).

Definida a superfície que será utilizada como referência de nível, de geopotencial W_0 , pode-se materializar o sistema vertical de referência usando, nivelamento geométrico associado com gravimetria ou ondulação geoidal associada com altitudes geométricas. Nesse caso, a utilização dos Modelos Globais do Geopotencial (MGGs) provenientes das missões espaciais de satélites artificiais de órbita baixa *Gravity Recovery And Climate Experiment* (GRACE), *CHALLENGING Minisatellite Payload* (CHAMP) e *Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer* (GOCE), tem recebido destaque.

Outro parâmetro de grande importância na modelagem do campo de gravidade externo são os Modelos Digitais de Elevação (MDEs). A acurácia desses modelos tem melhorado consideravelmente nos últimos anos. É o caso do *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) que, segundo Kiamehr e Sjöberg (2005), alcança acurácia horizontal de 20 metros e vertical de 16 metros.

A junção de informações mais acuradas, latitudes e longitudes geodésicas, altitude geométrica, MGGs, gravimetria terrestre e MDEs, fornecem subsídios para se determinar o geoide mais acurado que é uma das tarefas mais importantes da Geodesia Física. Este modelo está associado a uma série de aplicações da engenharia de agrimensura e cartográfica, tais como: levantamentos topográficos, nivelamento GNSS, navegação, levantamento hidrográfico, entre outros.

No Brasil são vários os estudos para a determinação do geoide, Yamamoto (1983), Santos e Escobar (2000), Lobianco (2005), Silva (2002), Guimarães (2013), IBGE (2015) e etc.

Na busca pela obtenção do geoide acurado, diferentes técnicas também têm sido utilizadas: Wong e Gore (1969), Meissl (1971), Vaniček e Kleusberg (1987), entre outros, propuseram a modificação do núcleo da Integral de Stokes; Fei & Sideris (1999) propuseram correções elipsoidais sobre valores das altitudes geoidais obtidas sobre modelos esféricos; Tocho *et. al.* (2003) utilizaram diferentes metodologias para aplicar as reduções gravimétricas. Além dessas propostas, diferentes métodos matemáticos também foram aplicados, como *Least Square Colocation* (LSC) e *Fast Fourier Transform* (FFT) (Guimarães, 2013), *Fast Colocation* (FC) (Alves, 2007); Wavelets aplicada por (Pereira, 2013), redes neurais (Maia, 2003), método dos elementos finitos (Yamamoto, 1983), etc.

O geoide pode ser obtido pela aplicação da técnica Remover Restaurar, RR. Neste procedimento tanto a topografia quanto os sinais de baixo grau dos MGGs devem ser removidos antes do cálculo e restaurados depois de se aplicar a integral de Stokes (Yildiz *et. al.* 2012).

Na aplicação da RR o modelo geoidal é determinado a partir da separação das componentes do campo de gravidade em diferentes comprimentos de onda. As componentes de longo comprimento de onda da gravidade são obtidas dos modelos geopotenciais, coeficientes provenientes da expansão em série das funções harmônicas esféricas, derivados das variações na órbita dos satélites sensíveis às alterações do campo gravitacional terrestre (LI e SIDERIS, 1994a). As anomalias, obtidas a partir da aceleração da gravidade medida na superfície terrestre, usadas por Stokes (1849) para a solução do Problema de Valor de Contorno da Geodésia (PVCG), constituem as componentes de médio comprimento de onda. Para melhorar

a solução deve-se utilizar componentes de alta frequência, o que pode ser feito a partir dos MDEs.

Para o processamento de toda essa massa de dados foram desenvolvidos softwares com a capacidade de manipular grande quantidade de informações. O pacote GRAFSOFT (Tscherning *et al.*, 1991) em sua versão Python (Nielsen *et al.*, 2012), disponibilizado pela *International Service for the Geoid* (ISG) é um dos programas mais utilizados em trabalhos dessa natureza. Além deste, o software Stokes-Helmert Geoid (software SHGeo) é um pacote de software científico para a determinação gravimétrica precisa do geoide com base na teoria Stokes-Helmert. Este software foi desenvolvido durante um período de mais de 10 anos sob a liderança do professor Petr Vaníček, no Departamento de Geodesia e Engenharia Geomática da Universidade de New Brunswick (ELLMANN, 2009).

Com a intenção de contribuir com o desenvolvimento da Geodésia, esse projeto teve como motivação o desenvolvimento de um programa, *GeoFis* 1.0, para cálculo do geoide usando a técnica Remover Restaurar-RR. Testes foram aplicados para diferentes áreas com diferentes geologias, com distintos modelos de redução gravimétrica, como Segundo Método de Condensação de Helmert, Bouguer e Rudzki. Além disso, foram aplicados diferentes métodos de interpolação do grid de anomalias residuais a fim de verificar o impacto desse importante parâmetro na determinação final do geoide.

1.1 Objetivo

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolvimento e validação de um software para cálculo do geoide local/regional com base na técnica remover restaurar aplicando diferentes métodos de redução gravimétrica em áreas cujas características físicas, geologia e relevo, são diferentes.

1.1.2 Objetivos específicos

São objetivos específicos:

- a) Desenvolver um software para calcular a ondulação geoidal usando a técnica RR.
- b) Usar dados de gravimetria coletados em áreas geologicamente distintas para validar o programa.
- c) Definir um MDE que melhor se ajusta às altitudes ortométricas disponíveis no Bando de Dados Gravimétricos (BDG) do IBGE e no Bando Nacional de Dados Gravimétricos (BNDG) da Agência Nacional do Petróleo (ANP).
- d) Testar o software para o cálculo da correção do terreno e das anomalias da gravidade comparando-o com outros programas relacionados.
- e) Verificar e analisar a existência de anomalias residuais inconsistentes usando a colocação por mínimos quadrados e a geoestatística e analisá-las.
- f) Calcular a ondulação geoidal usando diferentes métodos de redução gravimétrica para as áreas estudo.

1.2 Justificativa

À medida que novas tecnologias são incorporadas às ciências é inevitável que ocorra um aprimoramento nos produtos derivados desse processo. No caso da Geodésia isso não é diferente, essa ciência tem se amparado nos aperfeiçoamentos dos diferentes modelos, MGGs, MDTs e instrumentos, gravímetros, GNSS, softwares e hardwares, objetivando determinar uma superfície de nível mais acurada que possa ser tomada como referência para as altitudes com significado físico.

No intuito de obter um geoide acurado, outros autores, além dos já citados, apresentaram seus trabalhos de cálculo do geoide no Brasil. Em 2015 Marotta *et. al.* desenvolveu em MATLAB o software GRAVTool para o cálculo do geoide. Em 2012 Amarante desenvolveu o programa GRAVSUR usado para o processamento de dados coletados por diferentes modelos de gravímetros. Além desses autores, poucas são as experiências disponíveis no Brasil no que se refere ao desenvolvimento de softwares para o cálculo do geoide.

Com a ampliação e a divulgação das novas tecnologias, instituições que atuam diretamente nas áreas relacionadas com o sistema de referência vertical com significado físico, como a Agência Nacional das Águas e as concessionárias de

energia, demandarão metodologias e tecnologias para atender à implantação de sistemas de referência vertical que sejam compatíveis com o objeto de trabalho deles, a água.

Além da prática, a aplicação acadêmica do GeoFis 1.0 pode representar um bom auxílio aos estudantes e profissionais na área de ensino.

O GeoFis 1.0 permite ainda aplicar diferentes técnicas de redução gravimétrica para o cálculo do geóide o que permite avaliar diferentes possibilidades nessa determinação e fazer um contraponto com o método de redução usado pelo IBGE, Segundo Método de Condensação de Helmert, na elaboração do MAPGEO 2015.

Associando os resultados de anomalia residual a diferentes métodos de interpolação refina-se ainda mais o modelo e pode-se definir o procedimento que irá contribuir, suficientemente, para se obter uma superfície equipotencial do campo de gravidade acurada.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Considerações iniciais

Calcular o geoide consiste em determinar a superfície de referência para a obtenção das altitudes de interesse da engenharia.

Para isso é preciso considerar que a base teórica da Geodésia está fundamentada em um conjunto diverso de ciências e técnicas. Vaníček e Krakiwsky (1992), sugerem a Matemática como sendo a ciência que sustenta toda gama de estudos da Geodésia, assim como, a Física e a Ciência da Computação.

2.2 O campo de gravidade

Depois da determinação da magnitude da aceleração da gravidade por Galileu e das Leis de Kepler para a descrição das órbitas dos planetas, Isaac Newton, em 1687, publicou a lei de atração gravitacional. A gravidade sobre uma massa M pode ser definida como a força resultante dada pela combinação da força gravitacional, devido a massa M da Terra, e a da força centrífuga, devido à rotação da Terra.

A força gravitacional entre dois corpos, sendo um com massa M na posição r_0 , em relação à origem (O), e o outro com massa m na posição r , também em relação à origem, e separados entre si pela distância (l), é a atração ao longo da linha que une os corpos M e m (ver Figura 2).

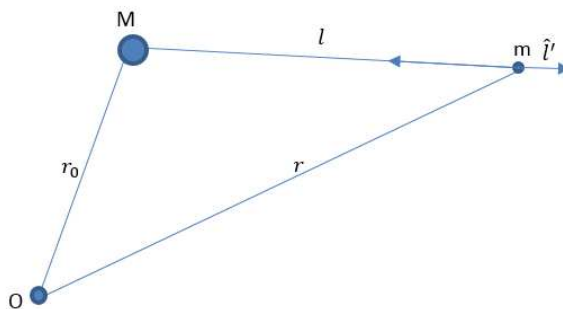


Figura 2. Geometria da atração gravitacional.

A equação 3, comum na Física, estabelece a relação algébrica entre os elementos apresentados na Figura 2:

$$F = G \frac{Mm}{l^2} \quad (2)$$

Ou na forma vetorial,

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{\|l\|^3} (l') \quad (3)$$

Onde, l' é um vetor unitário na direção l cujo sinal negativo se deve ao fato da força F apontar na direção contrária ao deslocamento. G é a constante gravitacional universal e, segundo as convenções do *International Earth Rotation and Reference System Service* 2010 (IERS 2010), seu valor é $6,67428 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$. A aceleração da gravidade, ou força de uma unidade de massa devido à gravidade, pode ser obtida com o auxílio da segunda Lei de Newton:

$$F = ma = mg = -G \frac{Mm}{l^3} l' \Rightarrow \|g\| = G \frac{M}{l^2} \quad (4)$$

A aceleração gravitacional aponta na direção do centro da Terra e seu vetor é definido como sendo o campo gravitacional.

2.3 O potencial gravitacional

Qualquer massa m posicionada no campo de gravidade g possui energia potencial gravitacional. Esta energia pode ser considerada como sendo o trabalho T , feito pela força gravitacional g por unidade de massa, para transportar m de uma posição de referência l_{ref} até l quando $l_{ref} = \infty$. O campo gravitacional é conservativo, logo, independente de como a massa m se move dentro dele o trabalho realizado será sempre o mesmo (DEHLINGER, 1978).

O potencial gravitacional V , conforme equação 5, pode ser definido comumente na Física, a qual considera a Terra como uma fonte de potencial, de tal forma que toda a massa atrativa M esteja concentrada no centro da esfera de raio R .

$$V(P) = \int_{l_{ref}}^l g \cdot dl = - \int_{l_{ref}}^l \frac{GM}{l^2} l' \cdot dl = GM \int_{\infty}^l \frac{1}{l^2} dl = -\frac{GM}{l} \quad (5)$$

sabe-se que $l' \cdot dl = -dl$ porque l' e dl apontam em direções opostas.

A relação entre o valor de l e o potencial V pode ser melhor entendido com o auxílio da Figura 3. Nela está representada a variação do potencial em função da variação de l , ou seja, o potencial será nulo quando l for infinito.

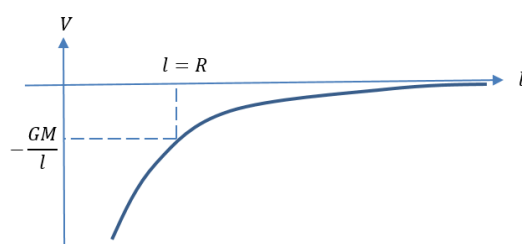


Figura 3. Relação entre a distância e o potencial.

Fonte: Adaptado de Lowrie (2007).

O potencial negativo evidencia que quando a massa m se aproxima da Terra sua energia potencial diminui enquanto que sua aceleração aumenta em função da atração do centro de massa da Terra. O valor de V dado pela inclinação da curva apresentada na Figura 3 é positivo e o sinal negativo garante que o gradiente V aponta na direção de decréscimo de l , ou seja, na direção do centro de massa (DEHLINGER, 1978).

Pode-se verificar que o gradiente de um campo escalar é um vetor que determina a taxa de variação e a mudança da direção de V . Por exemplo, se S for uma superfície equipotencial com V constante e sendo l_1 e l_2 posições sobre esta superfície, então a componente g ao longo de S é dada por $(V_2 - V_1)/(l_1 - l_2) = 0$. Logo $-\nabla V = 0$ e o campo é perpendicular à superfície equipotencial.

Para um corpo não rotante, o potencial V do corpo de massa $M = \int dM$ em um ponto P à distância l no exterior das massas fora da superfície de massa pode ser representado por $V(P)$, como mostra a Figura 4.

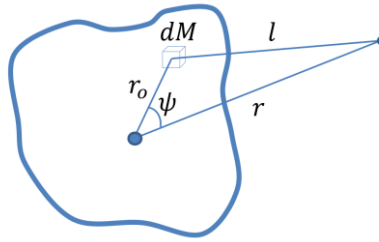


Figura 4. Elementos usados na determinação do potencial V(P)

Segundo Heiskanen e Moritz (1967) o potencial de um corpo sólido é resultante da integração sobre todo o volume, ou seja:

$$V = -G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv \quad (6)$$

Para determinar o potencial gravitacional conforme equação 6 é necessário conhecer os valores de densidade, ρ , dos elementos de volume, dv , do corpo atrativo. Essa necessidade inviabiliza a aplicação dessa equação. No entanto, o potencial é contínuo em todo o espaço assim como as suas primeiras derivadas, as componentes da força gravitacional. Em relação às segundas derivadas, existem duas situações:

- a) A densidade ρ é diferente de zero, interior, e nesse caso as segundas derivadas não são contínuas.
- b) A densidade ρ é nula, exterior, e as segundas derivadas são nulas.

Para o primeiro caso o Laplaciano do potencial ΔV satisfaz a equação de Poisson (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$\Delta V = -4G\pi\rho \quad (7)$$

Para o exterior das massas, segundo caso, o Laplaciano do potencial atenda a equação de Laplace:

$$\Delta V = 0 \quad (8)$$

Como a função potencial atende a equação de Laplace ela é uma harmônica e, conseqüentemente, pode ser determinada por uma expansão em harmônicos esféricos (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

Usando a Lei dos Cossenos, conforme elementos da Figura 4, pode-se escrever o potencial da seguinte forma:

$$V = - \frac{G\rho}{r \left[1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0}{r}\right) \cos(\psi) \right]^{1/2}} \quad (9)$$

Com o uso do Teorema Binomial para expandir a expressão 9 em uma série de potências de r_0/r , resulta em:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\psi) \quad (10)$$

Em análise espectral a expressão $P_n(\psi) \equiv P_n(\cos\psi)$ é conhecida como Polinômio de Legendre de grau n, e define os harmônicos esféricos de superfície. Segundo Gemael (1999) pode-se fazer $\cos\psi = t$, de modo que a sobreposição dos Polinômios de Legendre descrevem a variação do potencial com a latitude. A equação 11, determinada por RODRIGUES apud GEMAEL (1999), permite derivar esses polinômios:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (t^2 - 1)^n}{dt^n} \quad (11)$$

Substituindo 10 e 11 na equação 6 o potencial gravitacional resultará em:

$$V(P) = -G \int_M \frac{dm}{l} = -\frac{G}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\psi) \quad (12)$$

Relacionando, com o auxílio da fórmula dos quatro elementos da trigonometria esférica, o ângulo ψ com a posição em coordenadas esféricas (ϕ', λ') e (ϕ, λ) do

elemento de massa dm e da massa atrativa m , respectivamente, vão aparecer novos termos no desenvolvimento de $P_n(\psi)$ da forma:

$$\text{sen}\theta, \text{sen}\theta', \text{sen}\theta\cos\theta, \text{sen}\theta'\cos\theta', \dots \quad (13)$$

estes representam os polinômios associados de Legendre.

A partir dos termos apresentados na Equação 13 os polinômios de Legendre passam a ser denominados funções de Legendre e são usados com índices duplos, grau (n) e ordem (m), com a forma:

$$P_1(\psi) = P_1(\cos\psi) = P_{10}(\theta)P_{10}(\theta') + P_{11}(\theta)P_{11}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') \quad (14)$$

$$P_2(\psi) = P_{20}(\theta)P_{20}(\theta') + P_{21}(\theta)P_{21}(\theta')\cos(\lambda - \lambda') + P_{22}(\theta)P_{22}(\theta')\cos 2(\lambda - \lambda') \quad (15)$$

Assim, a função de Legendre fica definida conforme equação 16:

$$P_{nm}(\psi) = \sum_{m=0}^n [a_{nm}P_{nm}(\theta)\cos(m\lambda) + b_{nm}P_{nm}(\theta)\text{sen}(m\lambda)] \quad (16)$$

As constantes arbitrárias a_{nm} e b_{nm} referem-se aos elementos de massa relativos à posição (θ', λ') e aos coeficientes C_{nm} obtidos pelas equações 17 e 18. Os valores $P_{nm}(\theta)$ são denominados harmônicos especiais. Para $m=0$ tem-se harmônicos esféricos zonais, se $m=n$ os harmônicos esféricos são chamados setoriais e se $n \neq m$ tem-se os harmônicos esféricos tesserais (GEMAEL, 1999).

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow C_{nm} = 1 \quad (17)$$

$$\text{Para } m \neq 0 \Rightarrow C_{nm} = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \quad (18)$$

O potencial gravitacional no ponto P em harmônicos esféricos fica definido pela equação 19.

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} [A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \text{sen}(m\lambda)]. P_{nm}(\cos\theta) \quad (19)$$

Segundo Gemael (1999) as funções seno e cosseno na equação 19 são ortogonais entre si o que facilita a determinação dos coeficientes A_{nm} e B_{nm} e permitem que eles possam ser obtidos separadamente. Esses coeficientes estão relacionados com a distribuição de massas da Terra. A_{nm} e B_{nm} são os coeficientes harmônicos esféricos de grau n e ordem m dados por:

$$A_{nm} = G \int_T r'^n a_{nm} P_{nm}(\phi') \cos m\lambda' dm \quad (20)$$

$$B_{nm} = G \int_T r'^n b_{nm} P_{nm}(\phi') \text{sen} m\lambda' dm \quad (21)$$

As funções associadas de Legendre de grau n e ordem m , $P_{nm}(\cos\theta)$, para $\cos\theta = t$, na forma generalizada é:

$$P_{nm}(t) = \frac{\text{sen}^m(t)}{2^n} \sum_{k=0}^l \frac{(2n-2k)! (-1)^l \cos^{n-m-2k}(\theta)}{(n-m-2k)! (n-l)! k!} \quad (22)$$

O valor de l na equação 22 corresponde ao maior inteiro contido em $(n-m)/2$.

Geralmente se utilizam os coeficientes A_{nm} e B_{nm} nas suas formas adimensionais, J_{nm} e K_{nm} , respectivamente:

$$J_{nm} = -\frac{A_{nm}}{GMa^n} \quad (23)$$

$$K_{nm} = -\frac{B_{nm}}{GMa^n} \quad (24)$$

Para transformar os coeficientes J_{nm} e K_{nm} em coeficientes plenamente normalizados utilizam-se as equações:

$$\bar{C}_{nm} = -\frac{J_{nm}}{P_{nm}} \text{ e } \bar{S}_{nm} = -\frac{K_{nm}}{P_{nm}} \quad (25)$$

Para obtenção das funções Associadas de Legende totalmente normalizadas faz-se o emprego da relação:

$$\bar{P}_{nm}(\theta) = H_{nm}P_{nm}(\theta) \quad (26)$$

Para a equação 26 o valor de H_{nm} é obtido por:

$$H_{nm} = \sqrt{\frac{H(n-m)!(2n-1)}{(n+m)}} \text{ para } \begin{cases} m=0 \Rightarrow H=1 \\ m \neq 0 \Rightarrow H=2 \end{cases} \quad (27)$$

É importante evidenciar que os coeficientes \bar{C}_{nm} e \bar{S}_{nm} são dependentes da distribuição de massa da Terra. Isso pode ser comprovado pelas equações 23 e 24. Nessas equações, pode-se verificar que o limite das integrais é a superfície topográfica da Terra. Em função da sua alta frequência é impossível utilizá-la como limite das integrais. Então, para contornar esse problema foram utilizados valores conhecidos do geopotencial W , em diversas posições, r, φ e λ das órbitas dos satélites artificiais. Nota-se que os coeficientes normalizados são obtidos a partir do monitoramento das órbitas de satélites artificiais que fornecem consideráveis sistemas de equações lineares cujas incógnitas são esses coeficientes (CARDOSO, 2006).

2.4 O campo da gravidade terrestre

Os pontos na superfície terrestre, assim como a atmosfera estão sob a influência, da distribuição de massa no interior da Terra e da velocidade de rotação do planeta.

O potencial da gravidade W ou geopotencial em um ponto P é a resultante da soma do potencial gravitacional V , atração devido às massas, e do potencial centrífugo C , devido à rotação, que atuam neste mesmo ponto P , conforme equação 28.

$$W(P) = V(P) + C(P) \quad (28)$$

Segundo Heiskanen e Moritz (1967), a segunda parcela da equação 28 é obtida por:

$$C(P) = \frac{1}{2}p^2\omega^2 \quad (29)$$

Onde p é a distância perpendicular entre o ponto P e o eixo de rotação da Terra e ω é a velocidade angular de rotação da Terra.

Segundo Gemael (1999) a equação que define o geopotencial em harmônicos esféricos tem a forma:

$$W(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (A_{nm} \cos(m\lambda) + B_{nm} \text{sen}(m\lambda)) P_{nm}(\cos\theta) + C(P) \quad (30)$$

Considerando que a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa da Terra e que o eixo de rotação é o eixo principal de inercia, então anulam-se os termos de primeiro e segundo graus e também o tesseral de segundo grau (GEMAEL, 1999).

Usando os coeficientes adimensionais para obter o geopotencial em harmônicos esféricos aplica-se a equação 31:

$$W(P) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \text{sen} m\lambda) P_{nm}(\theta) + C(P) \quad (31)$$

Além do critério da ortogonalidade, a representação do potencial em harmônicos esféricos deve-se considerar que, para todo e qualquer grau e ordem, as funções tenham amplitudes semelhantes, para isso é necessário aplicar o processo de normalização da Função de Legendre. A figura 5 mostra o gráfico da função Associada de Legendre de grau 3 e ordem 1, 2 e 3. É fácil verificar a variação acentuada na amplitude do gráfico dessas funções. Noutra situação, aquela da figura 6, após a normalização verifica-se a semelhança gráfica entre as funções.

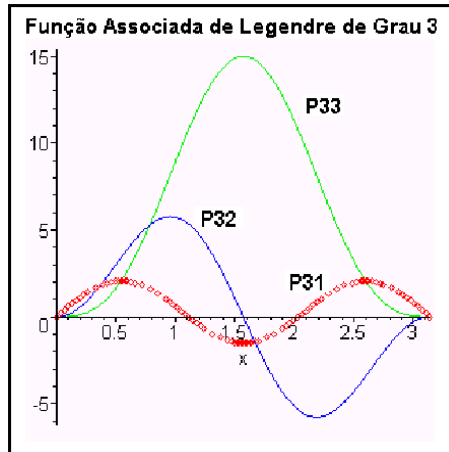


Figura 5. Gráfico da função de Legendre de grau 3 e ordens 1,2 e 3.
Fonte: Cardoso (2006).

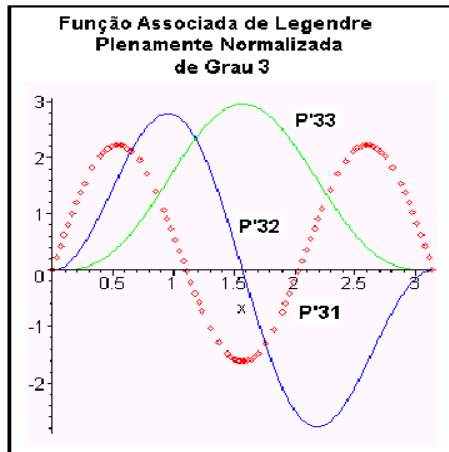


Figura 6. Gráfico da função de Legendre totalmente Normalizada de grau 3, e ordem 1, 2 e 3.
Fonte: Cardoso (2006).

A normalização consiste em definir uma função em que o valor médio quadrático correspondente à superfície harmônica da esfera, para quaisquer n e m , tenha valor unitário.

Substituindo as equações 23, 24 e 25 na equação 30 pode-se utilizar a expressão 32 para obter o geopotencial em harmônicos esféricos:

$$W(P) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) + C(P) \quad (32)$$

2.5 O campo da gravidade normal

Como no caso do geopotencial, o campo da gravidade normal ou esferopotencial é resultante da adição de duas parcelas uma devido à atração das massas e a outra devido à rotação da Terra. A parcela gravitacional do esferopotencial é diferente daquela do geopotencial em função do limite de integração que passa a ser a superfície do elipsoide. Isto significa que o esferopotencial é o potencial produzido pela Terra Normal, ou seja, um elipsoide com a mesma velocidade de rotação da Terra real ω , e mesma massa incluindo a massa da atmosfera (GEMAEL, 1999).

Segundo Heiskanen e Moritz (1967) o potencial gravitacional para a Terra Normal é dado por:

$$U(P) = \frac{GM}{R} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n,0}^U \bar{P}_{2n,0}(\theta) \right] + \frac{1}{2} p^2 \omega^2 \quad (33)$$

Onde J_2 é o coeficiente dinâmico de forma, J_{2n} são os coeficientes do potencial gravitacional normal para o *Geodetic Reference System* 1980 (GRS 80), o índice $2n$ refere-se aos zonais pares.

Segundo Heiskanen & Moritz (1967) os coeficientes $J_{2n,0}^U$ podem ser obtidos a partir do coeficiente $J_{2,0}$:

$$J_{2n,0}^U = (-1)^{n+1} \frac{3(e^2)^n}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{J_{2,0}}{e^2} \right) \quad (34)$$

Substituindo a primeira excentricidade e^2 por $2f - f^2$ na equação 34, obtem-se:

$$J_{2,0}^U = \frac{2}{3} \left(f - \frac{m_1}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{9m_1 f}{14} \right) \quad (35)$$

Onde $m_1 = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$, e f é o achatamento.

A magnitude do campo de gravidade do modelo teórico Terra Normal é obtido calculando o gradiente da equação do esferopotencial em coordenadas esféricas, ou seja:

$$\gamma = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi}\right) \quad (36)$$

A expressão foi adotada pelo *Geodetic Reference System 1980* (GRS80) para o cálculo da gravidade teórica, (MORITZ, 2000) dados por:

$$\gamma = \gamma_e \left\{ \frac{1 + k \operatorname{sen}^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \right\} \quad (37)$$

As constantes geométricas, gravidade teórica no equador, γ_e , $k = (b\gamma_p/a\gamma_e) - 1$) e primeira excentricidade e^2 possuem os valores 9,7803267715 m/s², 0,00193185138639 e 0,00669437999013, respectivamente. Diferentes equações para a determinação do campo de gravidade para o modelo elipsoidal podem ser obtidas em Moritz (1980).

2.6 O campo da gravidade anômalo

Segundo Heiskanen e Moritz (1967) em um ponto P, na superfície de contorno, existe uma pequena diferença entre o geopotencial, W, e o esferopotencial U denominada de potencial perturbador ou potencial anômalo, T, que pode ser obtido pela equação:

$$T(P) = W(P) - U(P) \quad (38)$$

Pela expressão 38 pode-se verificar que a parcela referente ao potencial centrífugo se anula para potencial perturbador.

Aplicando o operador gradiente, ∇ , na equação do potencial perturbador obtém-se a equação 39.

$$\nabla T(P) = \nabla W(P) - \nabla U(P) \quad (39)$$

A diferença entre o valor da gravidade, g, sobre o geoide no ponto P e o valor da gravidade normal, γ , sobre esse mesmo ponto define o valor do distúrbio da gravidade δg conforme equação 40 (ver Figura 7).

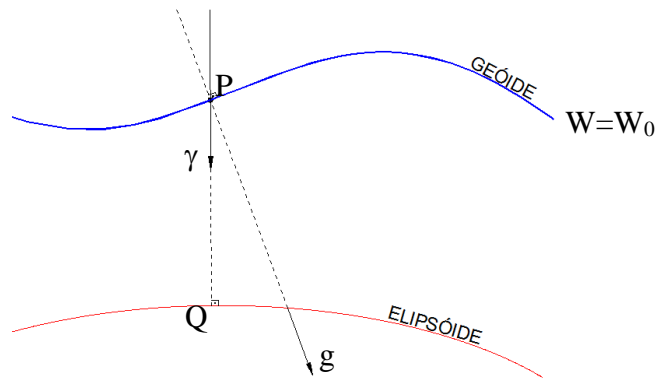


Figura 7. Vetores g e γ .

$$\delta g = g(P) - \gamma(P) \quad (40)$$

A comparação entre o valor de gravidade, g , no ponto P e a gravidade teórica, γ , no ponto Q , permite determinar uma relação denominada de anomalia da gravidade Δg conforme a equação 41 (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \quad (41)$$

Considerando uma taxa de variação constante da gravidade teórica ao longo da normal, pode-se obter (HEISKANEN e MORITZ, 1967):

$$\gamma(P) = \gamma(Q) + \frac{\delta \gamma}{\delta h} N \quad (42)$$

Fazendo:

$$\frac{\delta T_P}{\delta h_P} = -\delta g \quad (43)$$

Relacionando as equações 40, 41, 42 e 43 obtêm-se a Equação Fundamental da Geodésia Física (HEISKANEN e MORITZ, 1967).

$$\frac{\partial T_P}{\partial h_P} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma_P}{\partial h_P} \cdot T(P) = -\Delta_{gP} \quad (44)$$

Como a anomalia da gravidade não é conhecida de forma contínua sobre o contorno, geóide, mas apenas de forma discreta, então, na prática a equação 44 não pode ser usada na determinação de T . Ela é usada como uma condição de contorno. Além disso, segundo Stokes (1849) não pode haver massas fora do geóide o que é impossível uma vez que a gravidade é observada na superfície terrestre.

No PVCG clássico o objetivo é determinar o potencial perturbador T , o qual satisfaz a equação de Laplace, equação 45, sob uma condição contorno na superfície limitante.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \quad (45)$$

Considerando a superfície limitante em uma aproximação esférica, ou seja, negligenciando erros relativos ao achatamento do elipsoide de referência (MORITZ 1980) pode-se estabelecer a condição:

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{r}T + \Delta g = 0 \quad (46)$$

A solução da equação 45 sob as condições da equação 46 fornece o valor de T em função da anomalia de gravidade sobre o geóide e é dada pela Integral de Stokes (SANSÒ, 2013).

$$T = \frac{R}{4\pi} \int_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma \quad (47)$$

Na equação 47, R corresponde ao valor do raio médio da Terra, σ é o elemento de área e $S(\psi)$ é o núcleo esférico ou kernel de Stokes.

Relacionando a equação de Bruns $N(P) = T(P)/\gamma$ e equação 47 pode-se obter o valor da ondulação geoidal, N , com o auxílio da Integral de Stokes:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} G \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S(\psi) \Delta g \sin\psi d\psi d\alpha \quad (48)$$

Os elementos que compõem a equação de Bruns e a equação (48) são:

Δg = anomalia da gravidade;

ψ = distância, sobre a superfície esférica, entre o ponto de interesse e o ponto utilizado na integração;

α = Azimute em torno do ponto de interesse;

Na Figura 8 estão representados os valores descritos anteriormente.

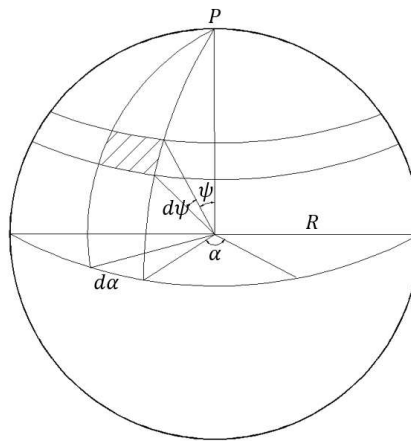


Figura 8. Elementos relacionados na equação 48.

Fonte: Gemael 1999.

Essa é a solução do PVCG para o caso de um modelo esférico. Nesse caso, o raio é constante e os valores da anomalia da gravidade são os valores obtidos sobre o contorno.

O núcleo nas equações 47 e 48, conforme Heiskanen e Moritz (1967) é definido pela equação 49.

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) \quad (49)$$

É importante lembrar que para aplicar da Integral de Stokes, equações 47 e 48, para solução do PVCG deve-se considerar que: o elipsoide de referência tenha

potencial de gravidade normal, U , igual ao potencial sobre o geóide, W_0 ; a massa e a velocidade de rotação do elipsoide de referência sejam iguais às da Terra (BLITZKOW *et. al.*, 2008).

Na aplicação da solução do PVCG por Stokes, além das restrições estabelecidas anteriormente, a principal crítica está na aplicação de reduções sobre o valor da gravidade medida à superfície da Terra, ou seja, a solução apresentada só tem validade quando inexistirem massas externas ao geóide.

2.7 Reduções gravimétricas

A ondulação geoidal N está diretamente relacionada com a anomalia de massa em relação à Terra Normal. No caso do excesso de massa a ondulação é positiva e a superfície equipotencial é deformada para o exterior do elipsoide de referência, sendo a ondulação negativa a equipotencial será deformada para o interior do elipsoide de referência, ou seja, o excesso ou a deficiência de massa leva à ondulação geoidal como mostrado na Figura 9.

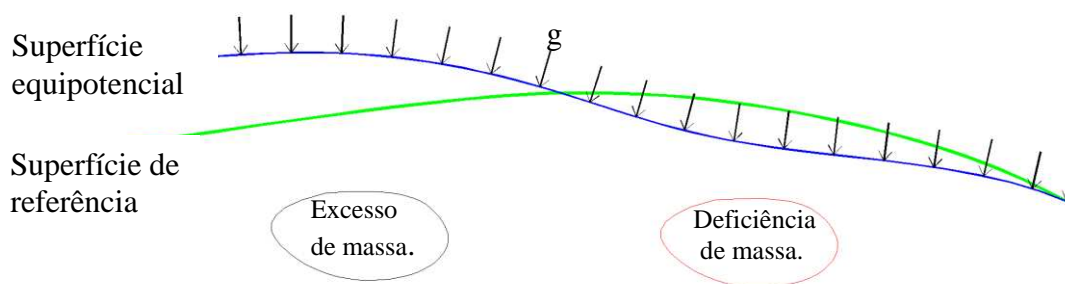


Figura 9. Relação entre a ondulação geoidal e a distribuição de massas.

Fonte: Lowrie, 2007.

Na solução do PVCG para a determinação precisa da ondulação do geóide ou quase geóide usando Stokes ou Molodensky as massas são levadas em consideração de diferentes formas e tem função particular na solução correspondente. Isto implica dizer que na presença da topografia nas observações gravimétricas não estão sobre uma superfície de nível e conseqüentemente as bases necessárias para a teoria de Stokes não é válida. No caso da solução de Stokes é fundamental a aplicação das reduções gravimétricas sobre os valores de g observados na superfície terrestre para

corrigir o não nivelamento da superfície. Ao resultado de cada redução obtêm-se a anomalia ou distúrbio da gravidade correspondente à redução aplicada (SANSÒ, 2013).

Com o intuito de remover a contribuição, no valor da gravidade observada pelas massas topográficas externas ao geóide, aplicam-se diversos tipos de reduções gravimétricas: Redução do Ar-Livre, redução Bouguer, Redução Isostática de Airy-Heiskanen ou de Pratt-Hayford, Modelo do Terreno Residual - *Residual Terrain Model* (RTM), Segundo Método de Condensação de Helmert e Método de inversão de Rudski.

De acordo com Guimarães (2010), as reduções mais utilizadas para a determinação das anomalias da gravidade são: Redução Ar-Livre, Redução de Bouguer, Redução Isostática e Segundo Método de Condensação de Helmert. Neste trabalho serão aplicadas as reduções: Segundo Método de Condensação de Helmert, Bouguer Completa, Rudzki e Redução Isostática Airy-Heiskanen. A intenção é estudar e comparar a aplicação deste diferentes métodos de redução na determinação do geóide preciso.

Para Wellenhof e Moritz (2005) a redução ou correção ar livre é obtida a partir da equação 50:

$$F = -\frac{\partial\gamma}{\partial h}H = 0,3086(mGal) \quad (50)$$

Fica evidenciado pela equação 50 que a aplicação dessa redução nada mais é do que a correção devido à altitude da estação em relação ao geóide, no caso, o nível médio dos mares não perturbado, não sendo aplicada em função do excesso ou da deficiência de massas.

Para Featherstone e Dentith (1997) a redução ar livre deve levar em consideração o achatamento e nesse caso recomendam:

$$F = \frac{2\gamma}{a}(1 + f + m - 2f\text{sen}^2\phi)H - \frac{3\gamma}{a^2}H^2 \quad (51)$$

As constantes física e geométrica para a equação 51 referente ao GRS80 são: f é o achatamento elipsoidal, igual a $1/298,25722210$;

m parâmetro geodésico da relação entre as forças gravitacional e centrífuga no equador cujo valor é de 0,00344978600308;

ϕ é a latitude da estação gravimétrica;

γ é a gravidade teórica para o modelo elipsoidal e pode ser obtido a pela fórmula Somigliana;

γ_e é a gravidade teórica no equador, 9,7803267715 m/s²;

a= semi eixo maior do elipsoide, 6378137 metros;

b=semi eixo menor, 6356752,3141 metros; e $k= 0,001931851353$.

A redução de Bouguer, segundo Wellenhof *et al.* (2005), é utilizada para remover completamente a componente gravitacional referente as massas topográficas, isto é, as massas existentes entre o geoide e o ponto de medida da gravidade.

Segundo Gemael (1999), a forma completa da correção de Bouguer para eliminar a componente vertical da atração devido as massas topográficas é:

$$C_B = -A - B + C \quad (52)$$

O valor C_B é a redução de Bouguer, a parcela A corresponde à componente vertical de atração devido ao platô de Bouguer. O segundo termo, B, é utilizado para transformar o platô numa calota de mesma espessura que o platô e estendida até 166,7 km do ponto de medição da gravidade. O último termo, C, refere-se à correção do terreno (GEMAEL, 1999).

Assumindo que entre o ponto P de tomada da gravidade e a superfície do geoide existe um platô cilíndrico, plano, de raio infinito com altura H e densidade ρ constante de valor médio igual a 2670 kgm⁻³. Então a atração exercida sobre P pelo platô de Bouguer pode ser obtida pela equação 53:

$$A = 2\pi G\rho H = 0,1119H[mGal] \quad (53)$$

Remover o platô significa remover sua atração sobre a componente vertical da gravidade observada. Isso é denominado de Redução incompleta de Bouguer.

Como verificado, para a correta determinação da redução é necessário conhecer a distribuição de variação da densidade entre o ponto de medição da gravidade e a superfície de referência de nível.

Quando o efeito da densidade na camada próxima à superfície é sub ou superestimado podem ocorrer anomalias positivas ou negativas que afetam as características de interesse. Deve ser lembrado que a seleção imprecisa do valor de densidade para a camada superficial afeta o cálculo das anomalias Bouguer (SINGH *et al.*, 2006).

Para determinar o valor da parcela B na equação 52, utilizam-se as tabelas de Bullard. Nessas tabelas estão relacionados os valores, entre, a diferença dos componentes verticais da atração exercida pela calota e pelo platô, com a altitude na estação gravimétrica.

Para refinar a redução Bouguer aplica-se a correção do terreno, C. Esse procedimento é utilizado para corrigir o desvio da topografia em relação ao platô. A determinação prática consiste em adicionar o efeito dos compartimentos individuais como mostrado na figura 10. Para o cálculo da correção do terreno é necessário utilizar informações altimétricas da área em estudo, com precisão compatível com a determinação que se deseja de C_B .

Conforme se pode verificar na figura 10, se $H > H_p$, então, tem-se um excesso de massa, Δ_{m+} , caso contrário uma deficiência, Δ_{m-} , assim o valor de C será:

$$C = \sum \Delta m \quad (54)$$

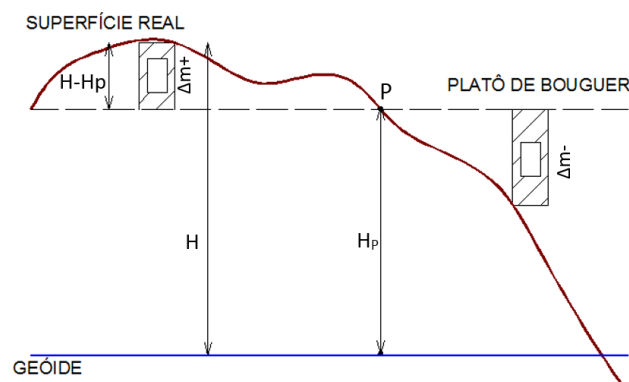


Figura 10. Correção do terreno.

Fonte: Wellenhof e Moritz (2005).

Kaban *et al.* (2004), considera que as reduções descritas anteriormente, ar livre e Bouguer, são de caráter clássico e para o conhecimento do modelo de ondulação geoidal com a maior acurácia possível, é essencial considerar a distribuição de densidade da litosfera.

Segundo Sansò (2013), o Segundo Método de Condensação de Helmert é um dos métodos mais comuns de redução usados no cálculo do geoide gravimétrico em aplicações locais e regionais. Neste esquema não há eliminação de massas topográficas elas são transferidas para uma camada condensada de densidade μ , sobre o geoide de modo que a massa total se mantenha inalterada. Embora a massa total da Terra seja mantida ocorre uma alteração do campo da gravidade e isso causa o denominado efeito indireto.

Segundo Gemael (1999) esse método comporta as seguintes etapas:

- a. remoção de platô de Bouguer $-2\pi G\rho H$,
- b. redução ao geoide $+F$,
- c. correção do terreno $+C$,
- d. condensação do platô e cálculo de sua atração sobre P, $+2\pi G(\mu)$, com $\mu=\rho H$.

Da aplicação dos itens, a, b, c e d apresentados anteriormente pode-se perceber que o Segundo Método da Condensação de Helmert difere da correção Ar Livre apenas pela correção do terreno C.

Devem-se considerar também outras reduções na medida observada da gravidade. Com base em estudos sobre grande quantidade de dados gravimétricos Heiskanem (1958 apud GEMAEL, 1999) acatou a isostasia como parte a ser considerada nas aplicações geodésicas. De acordo com Kaban *et al.* (2004), a primeira evidência de que ocorre a compensação entre massas topográficas, isostasia, foi feita por Pratt a partir de medidas de gravidade realizadas na Índia em 1858. O desvio da vertical obtido nas mensurações foi 1/3 menor que o calculado para as massas visíveis do Himalaia e Tibet. Isso sugere que algo no interior da Terra deve neutralizar o efeito da gravidade observada sobre a superfície terrestre. As anomalias isostáticas são obtidas a partir da subtração do valor de compensação crosta/litosfera daquele valor observado da gravidade. Como as massas topográficas estão mais próximas da estação gravimétrica do que as raízes de compensação o seu efeito combinado sobre o valor de g observado não é nulo, mesmo quando ocorre completo

balanço isostático. A anomalia isostática são resíduos de anomalia em função do que se assume para a distribuição da densidade no interior da litosfera.

Elas foram calculadas considerando a superfície topográfica e sua compensação segue o que foi idealizado por Airy ou Pratt. O ponto de partida da anomalia isostática é o perfeito equilíbrio de massas a partir do topo da topografia até o nível de compensação isostática (T+H), considerada como sendo o limite litosfera/atmosfera, que inclui crosta e manto superior.

Enfim, o objetivo da redução topoisostática é tornar a crosta a mais homogênea possível. No caso Pratt e Hayford as massas topográficas são distribuídas entre a profundidade de compensação (limite litosfera/atmosfera) e o nível do mar, fazendo com que a densidade original da crosta se torne a constante ρ_0 . No modelo Airy-Heiskanen as massas topográficas são usadas para preencher raízes dos continentes fazendo com que a densidade de $\rho_0=2670 \text{ kg/m}^3$ mude para $\rho_1=3270 \text{ kg/m}^3$.

Assim, a componente gravitacional devido às massas topográficas é removida na compensação e o resultado final é uma crosta ideal e homogênea de densidade ρ_0 e profundidade D(Pratt-Hayford) ou T(Airy-Heiskanen) (WELLENHOF *et al.*, 2005).

São três passos para essa redução:

1. Remoção do campo de gravidade devido à topografia,
2. Remoção da compensação na componente vertical da gravidade, e
3. Redução ar livre.

Os passos 1 e 3 são conhecidos, o passo 2 será discutido com base no sistema Airy-Heiskanen.

Para o sistema Airy-Heiskanen a Figura 11 ilustra o princípio.

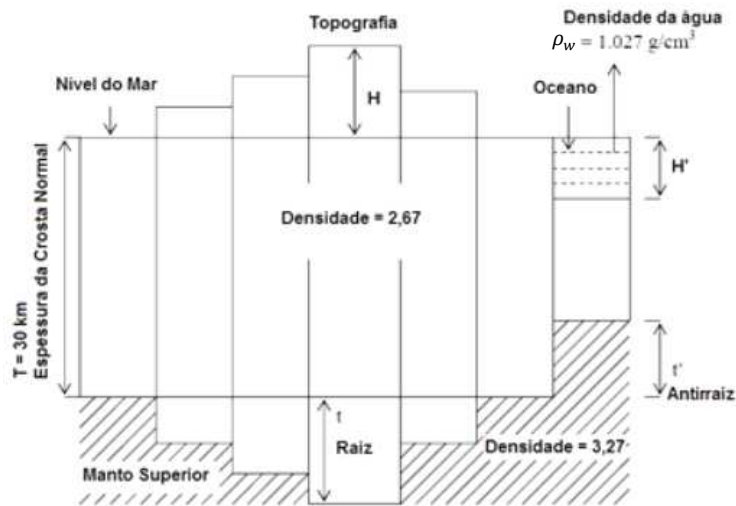


Figura 11. Modelo isostático segundo Airy-Heiskanen.
 Fonte: Bajracharya(2003).

Airy e Heiskanen propuseram que a litosfera, de densidade $\rho_0 = 2.67 \text{ g/cm}^3$, flutua sobre uma camada de densidade constante $\rho_1 = 3,27 \text{ g/cm}^3$. Quanto maior a altura da montanha mais ela afunda. Assim haverá, sob os continentes, raízes, t , e sob os oceanos anti-raízes, t' .

A equação 55 fornece a altura, t , da raiz de cada compartimento sob o continente.

$$t = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \cdot H \quad (55)$$

Para a anti-raiz, t' , compartimento oceânico, utiliza-se a equação 56.

$$t' = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_1 - \rho_0} H \quad (56)$$

Para a teoria apresentada o conceito de anomalia isostática é:

$$\text{Anomalia Isostática} = \text{Anomalia Bouguer} - \text{Anomalia Bouguer para a raiz} \quad (57)$$

Caso o resultado da equação 57 seja negativo significa dizer que se tem uma raiz muito grande, ou seja, uma deficiência de massa inesperada. Caso contrário, uma raiz insuficiente.

A compensação das massas para a correção isostática pode ser aplicada de forma local ou regional. Na compensação local assume-se que a massa de compensação está imediatamente abaixo da crosta carregada (HEYWOOD, 1992). Na compensação regional assume-se que a litosfera é rígida e a compensação isostática pode não ocorrer apenas abaixo do ponto de carregamento, ou seja, a litosfera poderá se flexionar e distribuir a carga lateralmente até áreas mais extensas. Além disso, como as placas tectônicas estão em constante movimento este é um processo dinâmico e a Terra está sempre mudando seu estado de equilíbrio. Como a ondulação do geóide está diretamente relacionada com a variação lateral da densidade e da topografia é importante, para a modelagem, conhecer de forma aprofundada e acurada estes dois parâmetros.

Segundo Setiawan (2003) a atração gravitacional vertical de um prisma retangular de seção transversal A é obtido pela equação:

$$g_v = G \frac{\Delta\rho A}{(x^2 + y^2)^{1/2}} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \quad (58)$$

ou pela equação:

$$g_v = G\Delta\rho A \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + h_1^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + h_2^2)^{1/2}} \right) \quad (59)$$

Nas equações 58 e 59, A é a área da seção transversal em m², x e y corresponde à distância horizontal entre o ponto P e o prisma em metros, h₁ é a profundidade do topo do prisma em metros e h₂ é a profundidade da base do prisma também em metros.

A Figura 12 ilustra os parâmetros que compõem a equação 58.

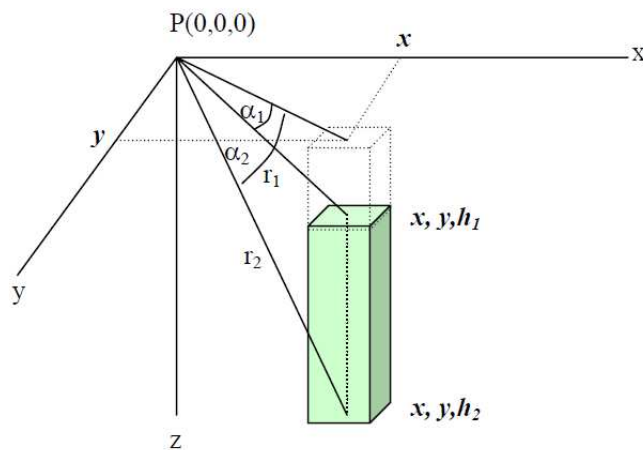


Figura 12. Elementos que compõem a equação para o cálculo do efeito gravitacional em um ponto P dado um prisma a determinada profundidade.

Fonte: Setiawan (2003).

Segundo Gö TTL e Rummel (2009), a seleção do modelo de isostasia tem como base quatro critérios. A redução isostática da gravidade deve:

1. ter significado geofísico,
2. facilitar os cálculos,
3. ter modelagem suave, ou seja, de fácil interpolação,
4. evitar a mudança do potencial de gravidade, ou seja, tornar o efeito indireto pequeno.

O fato de que os dados gravimétricos estarem cada vez mais densos e acurados e os modelos numéricos computacionais mais eficientes, então, é salutar revisar a isostasia geodésica com base nos critérios adotados. Ao longo dessa linha estão estudos de Claessens (2003); Engels *et al.* (1995); Wild e Heck (2004); Kaban *et al.* (2004); Kuhn (2003); Rummel *et al.* (1988); e Tsoulis (2001).

O método de redução gravimétrica proposto por Rudzki e que leva o seu nome consiste em um esquema puramente matemático sem significado físico associado, o que não é interessante para estudos geofísicos na determinação do geóide.

Segundo Rudzki o potencial das massas topográficas acima do geóide é igual ao potencial das massas topográficas invertidas para dentro do geóide.

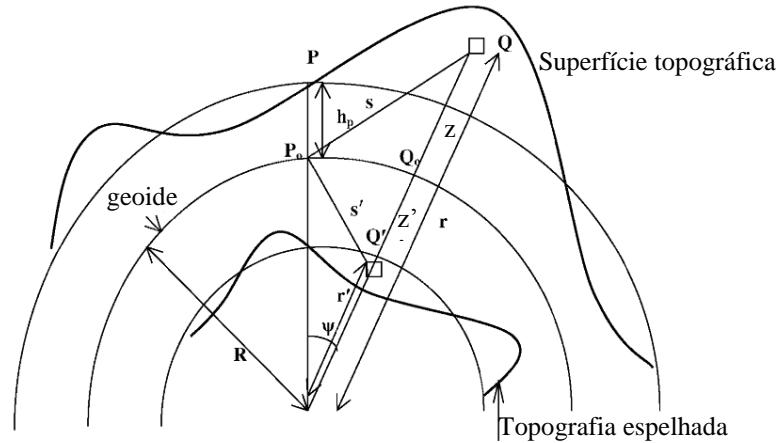


Figura 13. Método da Inversão de Rudzki

Fonte: S. Bajracharya (2003).

A Figura 13 ilustra a metodologia proposta por Rudzki. De acordo com a teoria do potencial o ponto Q' pode ser considerado como uma inversão de Q se esses dois pontos estão sobre a mesma radial em relação ao centro da esfera e se o raio da esfera é a média geométrica de r e r'. Nesse caso o geóide é considerado uma esfera de raio R. Para haver a inversão sobre a esfera a condição pode ser expressa por (MACMILLAN 1958 apud BAJRACHARYA 2003).

$$\frac{r}{R} = \frac{R}{r'}; dr = \frac{R^2}{r'^2} dr' \quad (60)$$

A principal condição nesse método é que o efeito indireto sobre o geóide seja nulo.

O potencial gravitacional, T, no ponto P₀ sobre o geóide devido ao elemento de massa d_m em Q é igual ao potencial, T', em função do elemento de massa dm' em Q', de tal forma que:

$$\Delta T = T - T' = 0 \quad (61)$$

O diferencial de potencial dT no ponto P₀ devido ao elemento de massa topográfica dm e o correspondente dT' devido à massa topográfica invertida dm' podem ser expressos por (BAJRACHARYA, 2003).

$$dT = G \frac{dm}{s} = \frac{Gpr^2 \cos\phi dr d\lambda d\phi}{\sqrt{(r^2 + R^2 - 2rR \cos\psi)}} \quad (62)$$

$$dT' = G \frac{dm'}{s'} = \frac{G\rho'r'^2 \cos\psi dr' d\lambda d\phi}{\sqrt{(r'^2 + R^2 - 2r'R \cos\psi)}} \quad (63)$$

Onde ρ refere-se à densidade do elemento de massa no ponto Q; ρ' é a densidade no ponto topográfico invertido Q'; (r, ϕ, λ) e (r', ϕ', λ') são as coordenadas esféricas de Q e Q' respectivamente; s e s' são as distâncias entre o ponto P_0 e o elemento de massa; e ψ é o ângulo formado entre o raio vetor de P_0 e o raio do elemento de massa.

Aplicando as equações 60 e 61 nas 62 e 63 chega-se a:

$$\rho' = \left(\frac{r}{R}\right)^5 \rho = \left(\frac{1}{1 - z'/R}\right)^5 \rho \quad (64)$$

$$\rho' = \left(\frac{R}{r'}\right)^5 \rho = \left(\frac{1}{1 - z'/R}\right)^5 \rho \quad (65)$$

onde $z = r - R$, e, $z' = R - r'$.

As equações 64 e 65 fornecem a relação fundamental entre a densidade da topografia na superfície física da Terra e a densidade da topografia espelhada abaixo do geóide.

A tabela 1 apresenta um resumo dos métodos de redução adotados e os consequentes efeitos sobre os critérios estabelecidos:

Tabela 1. Efeito da redução aplicada sobre os critérios de seleção.

Redução	Efeito Indireto	Suavidade	Significado geofísico
Ar Livre	Pequeno	não é muito ondulado	Não tem significado
Bouguer	Muito grande	suave	Tem significado
Helmert	Muito pequeno	ondulado	Não tem significado
Ary-Heiskanen	Pequeno, porém maior que a redução de Helmert	suave	Tem significado
Pratt-Hayford	Pequeno, porém maior que a redução de Helmert	suave	Tem significado
Rudski	Nulo	ondulado	Não tem significado

Fonte: Bajracharya, 2003.

A explicação para o grande efeito indireto que ocorre na aplicação da redução de Bouguer, está na negligência das massas de compensação. Nesse caso, a solução é introduzir um modelo de compensação isostática que pode ser local ou regional ou aplicando um filtro de passa baixa com base na redução ar livre.

2.8 Métodos de cálculo do geoide

Aplica-se para a determinação do modelo geoidal:

1. O método gravimétrico utilizando dados de gravidade da superfície ou aéreo;
2. O posicionamento por satélite sobre estações com altitudes ortométricas conhecidas;
3. Os coeficientes harmônicos esféricos dos modelos do geopotencial determinados a partir da análise das órbitas dos satélites;
4. O nivelamento geométrico associado com medidas da gravidade;
5. As medidas altimétricas transmitidas por satélites sobre o oceano;
6. Os métodos combinados, dados gravimétricos e coeficientes harmônicos esféricos.

Para os casos 1 e 6 a Integral de Stokes é fundamental para a determinação do modelo geoidal para qualquer PVCG adotado. Embora sua aplicação direta sobre a malha de anomalias não tenha convergência rápida, é um procedimento necessário para determinar o valor de N . Neste estudo será aplicado o método combinado o qual será enfatizado no item 2.8.1.

2.8.1 Método combinado

Este método é conhecido também como técnica remover restaurar. Consiste basicamente em separar as componentes do campo de gravidade em curtos, médios e longos comprimento de onda conforme Figura 14.

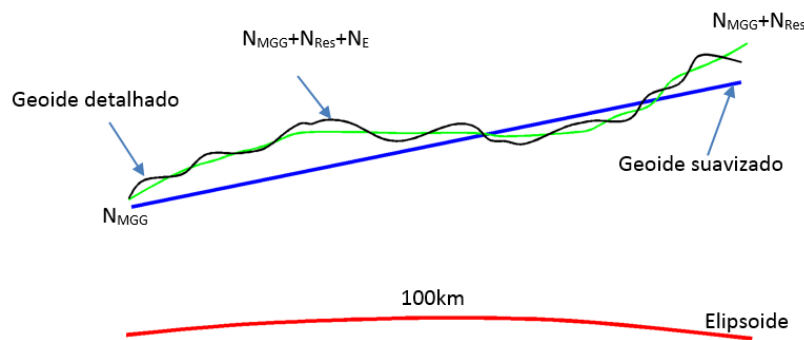


Figura 14. Decomposição espectral do campo de gravidade.

Fonte: Adaptado de SIDERIS (1997).

Os longos comprimentos do campo de gravidade, N_{MGG} , são obtidos a partir de um conjunto de coeficientes derivados das irregularidades nas órbitas dos satélites gravimétricos GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*), CHAMP (*CHAlleging Minisatellite Payload*), e GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*). Esses coeficientes permitem desenvolver os potenciais, gravitacional, de gravidade e anômalo em uma série de funções harmônicas esféricas (JAMUR *et. al.*, 2010) e são publicados no site do *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM).

Para determinar os coeficientes citados anteriormente deve-se igualar os elementos que descrevem as órbitas dos satélites com o potencial anômalo descrito em série de harmônicos esféricos. Então, para a obtenção dos coeficientes é necessário montar um sistema de equações de observação de tal forma que os coeficientes sejam as incógnitas, e assim solucionar o sistema (CARDOSO, 2006).

Por sua vez os médios comprimentos de onda, $N_{\Delta g}$, são obtidos a partir de observações da gravidade realizadas sobre a superfície da Terra (gravimetria terrestre) ou em suas proximidades (gravimetria aérea) e reduzidas ao geóide. É importante perceber que nestes valores estão incluídos a componente de longo comprimento de onda do campo, logo, é fundamental a remoção destas componentes para se obter apenas a influência dos médios comprimentos de onda no cálculo da segunda parcela da ondulação geoidal, cor verde na Figura 14.

Os curtos comprimentos de onda, cor preta na Figura 14, que compõem a terceira parcela, N_{EI} , da determinação da ondulação estão relacionados à variação da

topografia, logo, é fundamental se utilizar modelos digitais de elevação, MDEs, com acurácia compatível ao modelo geoidal proposto.

2.8.1.1 Colocação por Mínimos Quadrados

Na aplicação da Integral de Stokes para o cálculo da ondulação geoidal a partir das anomalias residuais é necessário que elas estejam distribuídas espacialmente na forma de uma malha regular (GOLDANI, 2006).

Por sua vez a colocação por mínimos quadrados tem como vantagem o emprego de dados heterogêneos com distribuição regular ou não, permite também a entrada das variâncias das medidas e fornece os erros associados aos resultados obtidos. É uma técnica utilizada para prever qualquer elemento do campo de gravidade e associa ajustamento por mínimos quadrados e a colocação (MORITZ, 1972).

Segundo Gemael (1994) a colocação é a teoria que congrega, no contexto dos mínimos quadrados, o ajustamento para estimar X_a , a filtragem para remover o ruído n e a interpolação para a determinação dos valores dos sinais preditos s nos pontos de cálculo. Permite ótima determinação do campo da gravidade a partir da combinação de diferentes tipos de dados, no caso da geodésia física, anomalias da gravidade, desvios da vertical, etc.

No ajustamento pelo método paramétrico utiliza-se o modelo matemático da equação 66 (MORITZ, 1972):

$$x = AX + n \quad (66)$$

Nele o vetor x é o vetor coluna das q observações; X é o vetor dos m parâmetros ajustados; n é o vetor coluna dos resíduos nas observações com a mesma dimensão do vetor x e A é a $q \times m$ matriz Jacobina.

Percebe-se pela fórmula 66 que o vetor x foi dividido em duas partes uma sistemática, AX , e outra aleatória n . Esse sistema será determinado se $m < q$.

O modelo básico da colocação acrescenta ao ajustamento apresentado uma segunda quantidade aleatória, s' , denominada sinal. Então a equação 66 tem nova forma:

$$x = AX + s' + n \quad (67)$$

Nesse caso os valores observados, x , são dependentes de duas grandes grandezas aleatórias, sendo uma simbolizada por n , associada aos erros nas medidas realizadas e outra, s' , referente ao vetor dos sinais nos pontos observados q . Esse sinal pode variar continuamente mesmo que as observações sejam discretas. Isso porque se utiliza de um modelo matemático para a interpolação. Se o vetor x são observações do mesmo tipo então se pode considerar o problema como um caso simples de interpolação. Mas isso não é necessário uma vez que as quantidades dos sinais correspondentes estão funcionalmente inter-relacionadas. Para a Geodesia Física isso é muito importante porque existe um sinal básico, o campo anômalo da gravidade da Terra, com o qual as demais quantidades, anomalias da gravidade, desvios da vertical, etc., estão funcionalmente inter-relacionadas (MORITZ, 1972).

A figura 15 ilustra as componentes da colocação: na cor vermelha é a parte sistemática mais o sinal, $AX_a + s'$; obtida a partir das observações; em azul a componente sistemática AX ; n_1, n_2 e n_3 representam os resíduos nas observações x_1, x_2 e x_3 ; os valores s'_1, s'_2 e s'_3 são os sinais nos pontos observados x_1, x_2 e x_3 ; e s_1 e s_2 são os sinais nos pontos interpolados. É importante considerar que os sinais, s e s' , representam entre outras coisas, a não adequabilidade do modelo matemático determinado.

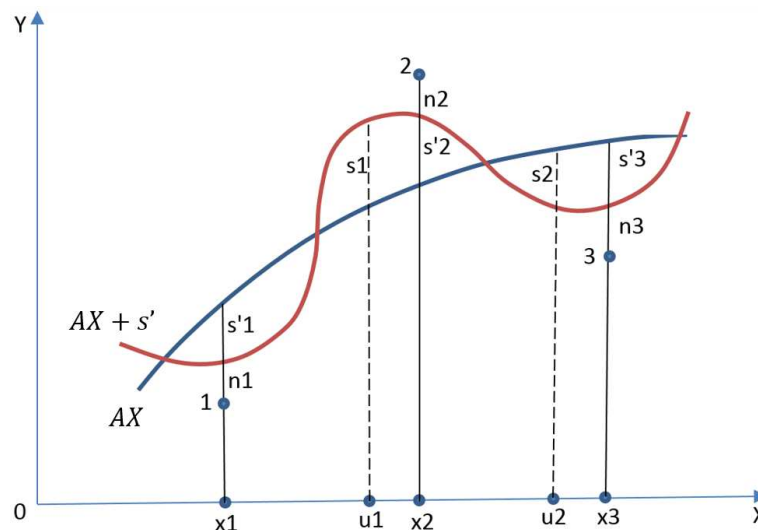


Figura 15. Representação dos elementos da colocação por mínimos quadrados.

Fonte: Gemael, 1994

No caso específico da Geodésia Física, Moritz (1972) faz a seguinte associação:

- x é a leitura do gravímetro,
- s é a anomalia da gravidade,
- n é o erro aleatório na variável observada e
- AX é a parte sistemática, cujos parâmetros, que podem ser a gravidade normal e constantes instrumentais e outros efeitos sistemáticos sobre as medidas tais como a deriva (drift).

Na aplicação da colocação deseja-se estimar ou predizer o sinal para um número arbitrário de pontos de cálculo que podem ser diferentes dos valores observados. No caso da Geodesia Física, com valores conhecidos de γ e Δg em posições discretas pode-se construir a curva $\gamma + \Delta g = AX + s'$ a partir da qual pode-se obter pontos de gravidade onde não foram realizadas observações (GEMAEL, 1994).

Seja p o número de pontos de cálculo, então o vetor sinal a ser calculado será:

$$s = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_p]^T \quad (68)$$

Fazendo $z = s' + n$ na equação 67 chega-se a:

$$x = AX + z \quad (69)$$

O vetor z , resultante da soma dos sinais, s' , correspondentes às q observações x com o respectivo resíduo, n , é dado por:

$$z = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p]^T \quad (70)$$

Então:

$$v = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_p \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_p]^T = [s^T \ z^T]^T \quad (71)$$

compreendem todas as $p+q$ variáveis aleatórias do problema.

A matriz covariância do vetor v pode ser escrita como uma matriz particionada Moritz (1972).

$$C_v = \begin{pmatrix} C_s & C_{sz} \\ C_{zs} & C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{ss} & C_{sx} \\ C_{xs} & C_{xx} \end{pmatrix} \quad (72)$$

Onde:

C_{ss} é a matriz variância covariância dos sinais nos pontos de cálculo; essa matriz tem que ser conhecida.

$C_{xx} = C_z$ é a matriz variância covariância das observações.

$C_{xs} = C_{sx}^T$ é a matriz covariância cruzada entre as observações e o sinal nos pontos de cálculo.

Na aplicação da equação 67 ainda é necessário considerar a matriz variância covariância do ruído o qual, a título de simplificação, assume o mesmo valor para todos os pontos amostrados conforme equação 73.

$$C_{nn} = cov(n, n) = M\{nn^T\} = \sigma_n^2 \cdot I = \sigma_n^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

onde I é a matriz identidade de ordem igual ao número de observações e σ_n^2 é a variância de n .

Para o sinal nos pontos observados utiliza-se do mesmo princípio na equação 68:

$$C_{s's'} = cov(s', s') = M\{s's'^T\} \quad (74)$$

Considerando que o sinal e o ruído não são correlacionados entre si. Esta hipótese é justificada se x é o resultado de uma observação direta, onde o tamanho do sinal s' não tem influência no tamanho da medida de n . Então:

$$\begin{aligned} C_{ns'} &= cov(n, s') = M\{ns'^T\} = 0 \\ C_{s'n} &= cov(s', n) = M\{s'n^T\} = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Para:

$$z = s' + n,$$

de modo que pelas equações 73, 74 e 75 chega-se a:

$$\begin{aligned} C_{xx} &= M\{zz^T\} = M\{(s' + n)(s'^T + z^T)\} \\ &= M\{s's'^T + ns'^T + s'n^T + nn^T\} \\ &= M\{s's'^T\} + M\{ns'^T\} + M\{s'n^T\} + M\{nn^T\} \\ &= C_{s's'} + C_{nn} \end{aligned}$$

Ainda com base no pressuposto de que n e s' serem não correlacionados, de acordo Gemael (1994), vale a relação:

$$C_{sx} = C_{ss'} \quad (76)$$

Esta relação envolve os sinais nos pontos de cálculo e nos pontos observados, portanto, não tem variâncias.

Para envolver o valor dos sinais dos pontos de cálculo na equação 69 se aplica uma matriz da forma:

$$B = [0 \quad I] \quad (77)$$

Assim a equação 67 passa ser escrita com a forma:

$$x = AX_a + [0 \quad I].v \quad (78)$$

Ao manipular a equação 78 e chega-se a:

$$x - AX - Bv = 0 \quad (79)$$

A soma dos resíduos dos quadrados dos resíduos ponderados é dado por:

$$\phi = v^T P v \quad (80)$$

Na equação 80 o valor da matriz v corresponde à equação 71 e a matriz peso pode ser obtida pela expressão:

$$P = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} C_{ss} & C_{sx} \\ C_{xs} & C_{xx} \end{pmatrix}^{-1} \quad (81)$$

Para minimizar a equação 80 utiliza-se do seguinte artifício:

$$\Phi = \frac{1}{2} v^T P v - k^T (AX + Bv - x) \quad (82)$$

Onde k é um multiplicador de Lagrange e as demais funções foram definidas anteriormente.

Então, para minimizar a equação 78 aplicam-se as derivadas $\partial\Phi/\partial v = 0$ e $\partial\Phi/\partial X = 0$.

Como resultado tem-se as equações 83 e 84. A primeira estima os valores dos parâmetros X ajustados e a segunda estima os valores (preditos e/ou filtrados) dos sinais s no pontos de cálculo (MORITZ, 1972).

$$X = (A^T C_{xx}^{-1} A)^{-1} A^T C_{xx}^{-1} x \quad (83)$$

$$s = C_{sx} C_{xx}^{-1} (x - A\hat{X}) \quad (84)$$

onde A é a matriz pxq e representa o efeito dos parâmetros sobre os erros nas medidas. C_{xx} é soma das matrizes de covariância cruzada do sinal e dos erros (n), respectivamente. X é a estimativa dos parâmetros.

A relação essencial entre as observações x e as quantidades desejadas s é dada pelas covariâncias as quais são assumidas conhecidas, ou seja, as matrizes C_{sx} e C_{xx} são obtidas a partir da função covariância conhecida.

Para a aplicação prática da 84, ou seja, para estimar s , sendo $s=N(P)$ a partir de um conjunto de anomalias da gravidade $x = [\Delta g_1, \Delta g_2, \Delta g_3, \dots, \Delta g_n]$ em vários pontos ($P_i, i = 1, 2, 3, \dots, f$) a estimativa por mínimos quadrados será:

$$s = C_{sx} C_{xx}^{-1} x \quad (85)$$

sendo que:

$$C_{sx} = (C_{P_1}^{Ng}, \dots, C_{P_f}^{Ng})$$

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} C_{xx}^{gg} & \dots & C_{xf}^{gg} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{fx}^{gg} & \dots & C_{ff}^{gg} \end{pmatrix}$$

Aplicando a lei de propagação de covariância na equação fundamental da geodésia física obtêm-se a função covariância:

$$cov(N(P), \Delta g(Q)) = \frac{1}{\gamma_0} \left(-\frac{\partial C}{\partial r'} - \frac{2}{r'} C(P, Q) \right) \quad (86)$$

$$cov(\Delta g(P), \Delta g(Q)) = \frac{\partial^2 K}{\partial r \partial r'} + \frac{2\partial C}{r' \partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r'} \frac{4}{r r'} C(P, Q) \quad (87)$$

Nas expressões 86 e 87, $C(P, Q)$ é a covariância de T e os pontos P e Q possuem coordenadas (r, θ, λ) e (r', θ', λ') respectivamente, assim:

Para compor as matrizes C_{xx} e C_{sx} tem-se os elementos:

$$C_{xx} = C_{ij}^{gg} = cov(\Delta g(P_i), \Delta g(P_j)) \quad (88)$$

$$C_{sx} = C_{P_i}^{Ng} = cov(N(P), \Delta g(P_i)) \quad (89)$$

Para pontos P_i em uma superfície de referência esférica: $r = r' = R$ e $\gamma = \gamma' = \gamma_0$.

Considerando dois pontos P e Q sobre a superfície de uma esfera de $r=R$, com potencial perturbador $T(P)$ e $T(Q)$, a covariância do potencial é definida da seguinte forma:

$$C(P, Q) = M\{T(P), T(Q)\} \quad (90)$$

onde M é um operador homogêneo e isótropo. Esse operador pode ser uma norma do espaço de Hilbert ou um operador escolhido para melhorar a aproximação. Definido o operador M a função covariância irá depender apenas da distância esférica entre $P(\theta, \lambda)$ e $Q(\theta', \lambda')$. Assim, a função covariância global toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(P, Q) &= C(\psi) = M\{T(P)T(Q)\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} T(\theta, \lambda)T(\theta', \lambda') \sin\theta d\alpha d\theta d\lambda \end{aligned} \quad (91)$$

Fazendo as considerações de que a massa do elipsoide é igual à massa da Terra e que os centros dessas formas são coincidentes pode-se expressar a função covariância em harmônicos esféricos:

$$C(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n \left(\frac{\bar{R}^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \quad (92)$$

Os coeficientes $\sigma_n^2 = \left(\frac{GM}{\bar{R}} \right)^2 \sum_{m=-n}^n (\bar{C}_{nm})^2 \left(\frac{\bar{R}}{a} \right)^{2n+2}$, são denominados variância por grau.

A função covariância contém toda a informação relativa ao campo gravitacional, variabilidade, distância de correlação, anisotropias e a relação entre as funções dos vários elementos do campo.

A fórmula 91 é uma função covariância global e é aplicada a dados sobre toda a superfície da Terra. A partir dela pode-se chegar a função covariância local que é proveniente da retirada da informação cujos comprimentos de onda são superiores à área em estudo.

Para determinar a covariância local é necessário definir zonas de dimensão ótima, ou seja, suficientemente pequenas para que seja considerada homogênea e isotrópica e suficientemente grande para abranger um número adequado de dados observados para cumprir a condição de média zero. Ainda, segundo Arabelos e

Tscherning (1997) é necessário que a distância esférica seja de uma vez e meia a distância de correlação.

Calcula-se função local com dados isentos da contribuição dada pelo modelo de referência T_0 de ordem N . A equação para a determinação da função covariância local proposta por Tscherning (2008) é dada por:

$$C(P, Q) = \alpha \sum_{n=2}^N e_n^2 \left(\frac{\bar{R}^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \quad (93)$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{A}{(n-a) \cdot (n-2) \cdot (n+4)} \left(\frac{R_B^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi)$$

Onde $e_n^2 = \alpha \cdot \left(\frac{GM}{\bar{R}} \right)^2 \cdot \sum_{m=0}^n (\sigma^2(eC_{nm}) + \sigma^2(eS_{nm}))$.

Os valores $\sigma^2(eC_{nm})$ e $\sigma^2(eS_{nm})$ são as variâncias por grau dos erros dos coeficientes dos modelos globais geopotenciais, $\sigma^2(eC_{nm})$ e $\sigma^2(eS_{nm})$, \bar{R} é o raio médio da esfera, R_B é o raio da esfera de Bjerhammar, r é o resultado da soma do raio médio e da altitude ortométrica, $r = \bar{R} + h$, α é um fator de escala e A uma constante.

Com valores da covariância de uma determinada quantidade do campo gravitacional, por exemplo, anomalias da gravidade associadas à altitudes da superfície do oceano provenientes da altimetria por satélites pode-se confirmar se a equação 93 é válida para a estimação. Dessa forma se tem um modelo da covariância que será utilizada como parâmetro de comparação para a variância empírica.

Para a função covariância 93, Moritz (1972) definiu três parâmetros:

- A variância C_0 ;
- A distância de correlação ϕ_1 , e
- O parâmetro de curvatura χ .

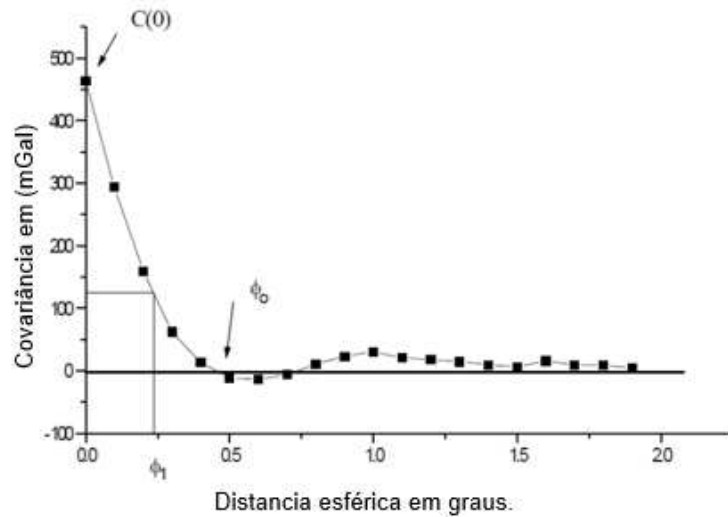


Figura 16 – Parâmetros da função covariância.

Fonte: Moritz (1972).

Os elementos que compõem o gráfico da Figura 16 são:

- C_0 que é o valor da função covariância para o argumento $\psi=0$, ou seja, $C_0 = C(0)$
- ϕ_1 é a distância de correlação e o argumento de tal forma que $C(\phi_1) = \frac{C_0}{2}$,
- χ se relaciona com a curvatura da função covariância para $\psi=0$ e pode ser obtido por $\chi = \frac{k\phi_1}{C_0}$. Nessa equação k é a curvatura.

Verifica-se pelo exposto que C_0 é um tipo de escala para os erros de interpolação, o valor χ caracteriza o comportamento da função para pequenos valores da distância esférica, por sua vez, ϕ_1 mostra o comportamento da função para distâncias próximas à própria distância de correlação. Para distâncias maiores que $1,5 \cdot \phi_1$ a forma da função não é determinante.

Outro aspecto relevante é a distância do primeiro zero ϕ_0 . Esse valor define para a equação 89 o valor de N .

2.8.1.2 Geoestatística aplicada à Geodesia Física

Segundo Landim (2002) a geoestatística estuda as denominadas variáveis regionalizadas, ou seja, variáveis que estão espacialmente distribuídas. Essas variáveis refletem características aleatórias e determinísticas em seu comportamento

espacial. Neste contexto a geoestatística aplicada à Geodesia Física pode responder perguntas do tipo:

- Qual é o número necessário de amostras de gravidade para estimar o valor da ondulação geoidal ou do desvio da vertical?
- Até que distância as amostras devem ser consideradas para uma estimativa acurada?
- Dado que as amostras se agrupam qual a influência desse agrupamento na estimativa de algum funcional do campo de gravidade?
- A posição da amostra em relação à área de estudo tem maior ou menor influência na estimativa?

As perguntas elencadas anteriormente tem forte correlação com a determinação dos funcionais do campo da gravidade uma vez que o valor da gravidade observada está diretamente relacionada com a geologia.

Seja uma variável x distribuída de forma aleatória em determinada região, o seu valor em uma dada posição se relaciona com os demais valores posicionados a certa distância, de tal modo que, quanto menor essa distância maior a relação entre as variáveis. O grau de relação entre as variáveis, segundo uma direção, é expresso pela covariância entre pontos que podem estar espaçados de forma regular ou não LANDIM (2002).

Segundo Landim (2000) a covariância entre as variáveis em pontos distantes entre si de um valor inteiro Δh numa direção h é obtida pela equação:

$$C(h) = C(\Delta h) = \frac{1}{n} \sum x_{(i)} \cdot x_{(i+h)} - \bar{x}_{(i)}^2 \quad (94)$$

Na equação 94, n é o número de pares de valores combinados, $x(i)$ representa uma variável em uma posição i , $x(i + h)$ representa uma variável numa posição distante h da variável anterior e $\bar{x}_{(i)}$ é a média de todas as variáveis regionalizadas em estudo.

Os dados do campo da gravidade, observações da gravidade e anomalias da gravidade, são variáveis que se distribuem de forma contínua no espaço. Para inferir sobre esses dados, a partir de dados amostrais disponíveis, uma abordagem estatística pode ser adotada. Como na teoria da colocação, adota-se que uma grandeza medida pode ser explicada parte por um modelo geométrico e parte por uma

variação aleatória. As análises estatísticas que têm como base a independência das observações vêm sendo substituídas por métodos que consideram a correlação entre observações vizinhas. Esses estudos estão vinculados à teoria das variáveis regionalizadas que é a base da geoestatística.

Verificada a dependência espacial das amostras pode-se, por interpolação destas, determinar valores do campo da gravidade.

Para modelar espacialmente uma variável com base na teoria das variáveis regionalizadas utiliza-se com instrumento principal o semivariograma, (Journel & Huijbregts, 1978):

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \quad (95)$$

onde N é o número de pares de valores medidos $Z(x_i), Z(x_i + h)$ separados por uma distância h.

A Figura 17 mostra o gráfico resultante da aplicação da equação 95. A partir dele pode-se estimar as semivariâncias ($\gamma(h)$) utilizando diferentes combinações de pares de pontos bem como verificar o grau de dependência espacial da variável em estudo, além disso, são obtidos elementos necessários para prever valores em locais não amostrados.

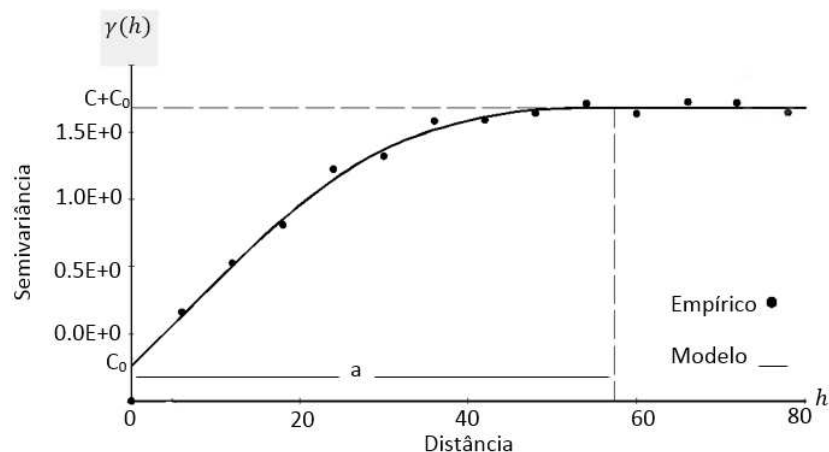


Figura 17. Semivariograma empírico e o modelo ajustado.

A partir do conjunto de amostras ajusta-se a função modelo à empírica predefinida para obter os parâmetros do semivariograma. Esses parâmetros são: o

efeito pepita (C_0), valor de γ para h nulo; alcance da dependência espacial (a), além deste valor os dados não possuem dependência espacial, ou seja, o alcance define o raio da krigagem. Outro elemento importante é o patamar ($C+C_0$), valor aproximadamente igual à variância dos dados, resultante das parcelas variância estrutural (C) e efeito pepita.

O ajuste do modelo teórico é a parte mais importante para a predição correta dos valores evitando erros de estimação quando se aplicar a krigagem. Segundo Vieira (2000) os modelos teóricos que se destacam são o gaussiano, exponencial e esférico, todos eles com patamar bem definido.

3. MATERIAS E MÉTODOS

Neste capítulo será realizada uma descrição das áreas e das fontes de dados utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho assim como da metodologia adotada para a determinação do geóide usando a técnica Remove Restaurar.

3.1 Localização e descrição geológica das áreas de estudo

As duas áreas de estudo estão ilustradas na Figura 18. Uma região, denominada área 1, situada a oeste do estado de São Paulo e ao norte de Paraná e outra, denominada área 2, abrange parte do Sul de Minas Gerais, norte de São Paulo e Sul do estado do Rio de Janeiro. A área 1 situada mais a oeste está entre os meridianos de $-52^{\circ}43'29''$ e $-47^{\circ}07'26''$ e entre os paralelos de $-25^{\circ}31'54''$ e $-19^{\circ}54'32''$, a área 2, situada ao Sul de Minas Gerais está entre os meridianos de $-48^{\circ}40'05''$ e $-42^{\circ}40'05''$ e entre os paralelos de $-24^{\circ}27'02''$ e $-18^{\circ}51'02''$. Os parâmetros utilizados para a escolha das áreas de estudo foram: a forma do relevo, a quantidade de informação gravimétrica disponível e a geologia da região. O geóide, regional/local, a ser determinado terá como limite o polígono de $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ assinalado pela cor verde na Figura 18.

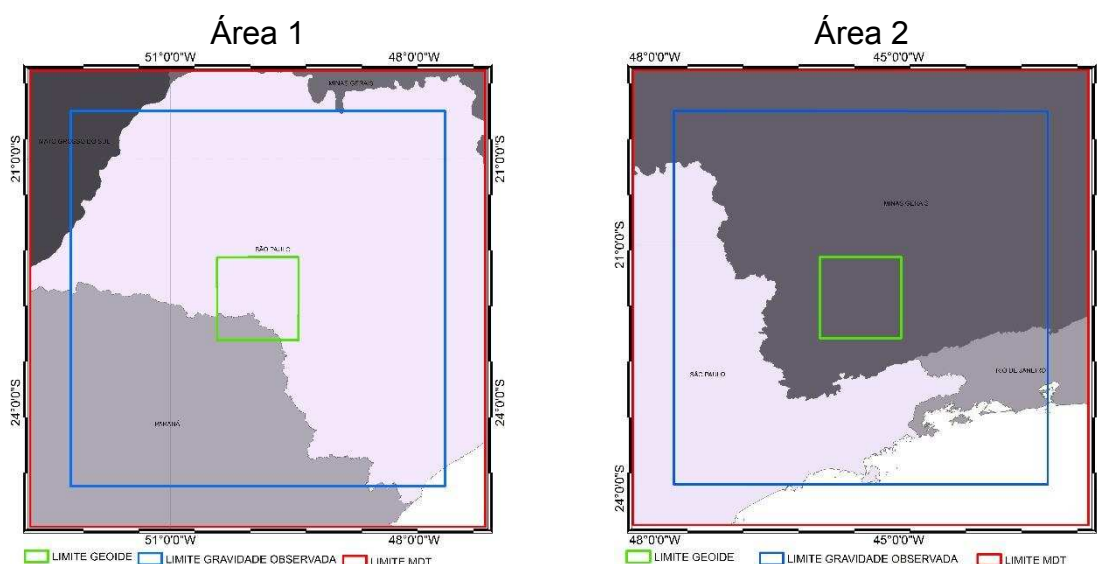


Figura 18. Localização das áreas de estudo

Na área 1 existe o predomínio de rochas sedimentares, Figura 19. Nessa área existem, basicamente, dois grandes grupos, Grupo Bauru com predomínio de siltitos, arenitos e argilito arenoso e o Grupo Caiuá também com o predomínio de Arenito. Na área 2, localizada predominantemente no sul de Minas Gerais, há o predomínio de rochas metamórficas. Nela há dois grandes grupos, Varginha-Gauxupé e Andrelândia. No primeiro são encontrados anfibólio, hornblenda e Ca-plagioclásio enquanto que no outro grupo há gnaisses e xistos. Ao norte da área MG também é possível verificar a presença de rochas ígneas do grupo Lavras com a presença de granitos, migmatitos e granitóides.

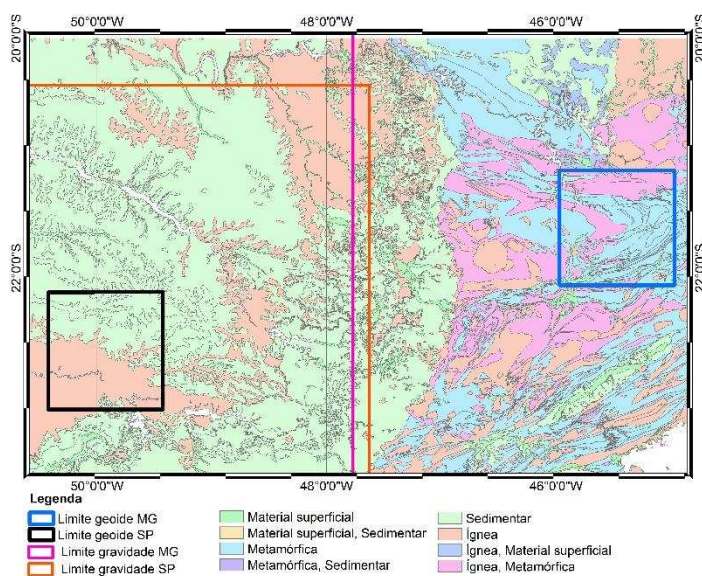


Figura 19 – Geologia das áreas de estudo

As informações sobre a geologia das áreas estudadas foram obtidas nos *sites* do visualizador da Infraestrutura Nacional de Dados Espaciais (INDE), da Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais (CPRM) e da Companhia para o Desenvolvimento Econômico de Minas Gerais (CODEMIG). Na Figura 19 verifica-se que há nítida diferença geológica entre as áreas estudadas o que motivou a escolha das mesmas para o presente estudo.

3.2 Dados de gravidade

Atualmente, os dados gravimétricos públicos existentes no Brasil são disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), no sítio

www.visualizador.inde.gov.br e pela Agência Nacional do Petróleo (ANP). Os dados obtidos nos locais indicados estão representados na Figura 20.

A ANP em parceria com a Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais (CPRM), Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Universidade de São Paulo (USP), Observatório Nacional (ON) e a Sociedade Brasileira de Geofísica (SBGf) são gestores do Banco Nacional de Dados Gravimétricos (BNDG) que tem por objetivo gerir os dados gravimétricos de forma compartilhada. Os dados são disponibilizados para todos os interessados, com algumas restrições em função da forma de coleta do dado. Se o coletor for uma empresa particular o dado ficará no BNDG mas terá uma carência de tempo para ser liberado para uso público.

Os dados gravimétricos estão vinculados direta ou indiretamente ao IGSN-71 (*International Gravity Standardization Net 1971*, IGSN 71). O IGSN-71 foi aprovado e adotado como o padrão internacional de gravidade em substituição ao datum *Potsdam*. É um datum gravimétrico mundial constituído por 1854 estações de gravidade cujo desvio padrão, depois do ajustamento, é de $\pm 0,1$ mGal (MORELLI *et al.*, 1972).

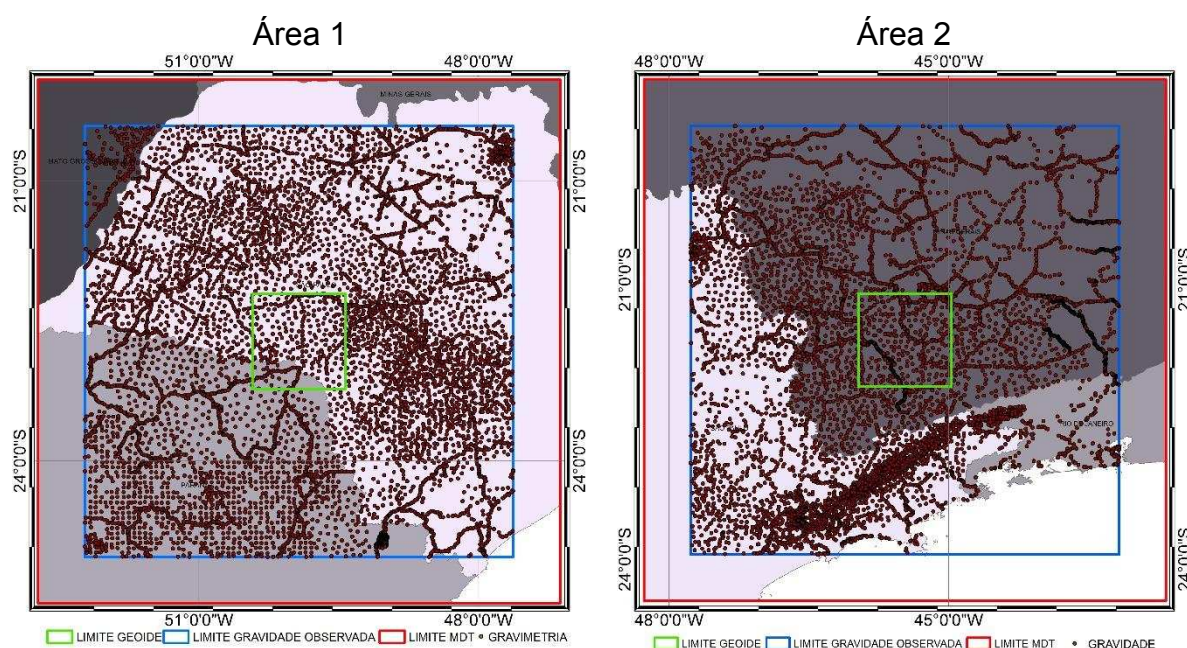


Figura 20. Dados de gravidade disponíveis para as áreas estudadas

Os dados de gravidade levantados pelo IBGE foram coletados com diferentes equipamentos. Entre eles estão os gravímetros relativos Romberg Lacoste e CG5-AutoGrav.

3.2.1 Gravímetro CG5

O funcionamento básico dos gravímetros se baseia no equilíbrio de um corpo com uma massa predefinida e sustentado por uma mola de constante conhecida. O deslocamento da mola devido a força gravitacional permite, a partir dos parâmetros deslocamento e massa, determinar o módulo da aceleração da gravidade, g .

O CG-5 AUTOGRAV, figura 21, é um medidor de gravidade automatizado baseado em microprocessador que pode ser usado para levantamentos geodésicos locais ou globais. É um equipamento que mede a gravidade de forma relativa, ou seja, mede a variação de um sistema elástico que pode ser transformada em escala de mGal. Assim, a determinação da gravidade em um ponto é função da gravidade conhecida em outro ponto (SCINTREX, 2006).



Figura 21-Gravímetro CG5.

O elemento sensível do gravímetro CG5 SCINTREX tem como base um sistema elástico de amálgama de quartzo. Devido à sua excelente propriedade elástica e força adequada, juntamente com elementos de parada em torno do corpo de prova permite ao instrumento operar sem travamento.

Um circuito de retorno automático aplica uma corrente contínua nas placas do capacitor que produz uma força eletrostática sobre a massa trazendo-a de volta para a posição de origem.

A voltagem de retorno é a medida do valor da gravidade no ponto de medição. Ela é convertida em um sinal digital e então transmitida para o sistema de aquisição de dados do instrumento para processamento, visualização e armazenamento.

Os circuitos eletrônicos e os parâmetros do sensor de gravidade permitem uma tensão de retorno para obter valores de até 8000 mGals, sem reinicialização. O sistema eletrônico de baixo ruído associado com a auto-calibração de alta precisão analógica para a conversão digital, fornece uma resolução de 0,001 mGal, assim, esse equipamento é apropriado tanto para investigações detalhadas de campo em escalas regionais quanto para levantamento geodesicos.

Esse equipamento faz leituras na frequência de 6 Hz, dependendo do tempo em uma estação o número de leituras/dados brutos pode ser muito grande, no entanto, o próprio equipamento processa as informações e fornece as médias em miligal das leituras realizadas para cada ponto.

3.2.2 Gravímetro Lacoste-Romberg

Os dados de observações gravimétricas disponíveis para o Brasil, em sua maioria, foram obtidos com o auxílio do gravímetro Lacoste/Romberg.

Segundo Amarante (2012) o valor relativo de g obtido com o auxílio desse gravímetro pode ser alcançado pela a equação 96:

$$g_n = g_{(n-1)} + l_{m(n)} - l_{m(n-1)} + Cg_{(n)} + D_{e(n)} + D_{d(n)} + v_{(n)} \quad (96)$$

Onde:

$g_{(n)}$ valor da gravidade da estação n ;

$g_{(n-1)}$ valor da gravidade da estação anterior;

$l_{m(n)}$ leitura da estação n já transformada em unidades de miligal;

$l_{m(n-1)}$ leitura da estação anterior já transformada em unidades de miligal;

$Cg_{(n)}$ correção gravimétrica da leitura da estação n ;

$D_{e(n)}$ deriva estática da leitura na estação n ;

$D_{d(n)}$ deriva dinâmica da leitura na estação n ; $v_{(n)}$ correção referente ao desnível entre a referência de nível e a medição gravimétrica.

3.3 Coeficientes do modelo geopotencial global

Neste estudo foram utilizados os coeficientes do modelo geopotencial global GOCE. A escolha desse modelo ocorreu devido ser esse o mesmo modelo adotado pelo IBGE na elaboração do MAPGEO 2015, que neste estudo, foi utilizado como parâmetro de comparação com os resultados alcançados.

A missão GOCE teve como objetivo principal determinar um modelo do campo da gravidade com alta acurácia, $\approx 1 - 2$ cm para a altura geoidal e $\approx 1 a 2$ mGal para o distúrbio da gravidade. A aplicação dos dados é muito grande, por exemplo, determinar estrutura e a densidade da litosfera e do manto superior da Terra, bacias sedimentares, movimentos verticais das geleiras e para o caso específico da geodésia física a aplicação está relacionada ao nivelamento por GNSS, unificação das redes altimétricas mundiais, sistema inercial de navegação e determinação das órbitas dos satélites. A órbita da satélite em questão varia entre 250-270 km com inclinação de $96,70^\circ$ com o plano equatorial com ciclo de 61 dias de duração e subciclos de 20 dias.

Embora o satélite GOCE já esteja fora de órbita todas as medidas obtidas durante seus quatro anos de vida útil resultou em uma série de modelos gravitacionais com precisões sempre melhores. Esses modelos são conjuntos de coeficientes do potencial anômalo e podem ser obtidos no seguinte endereço <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc/>.

3.4 Modelos Digitais de Elevação (MDEs)

Não sendo objetivo desde estudo definir qual é a melhor nomenclatura para a representação da superfície do terreno aqui será utilizado o termo Modelo Digital de Elevação (MDE).

Os modelos digitais de elevação e os modelos digitais batimétricos (MDEs e MDBs) respectivamente, tem função primordial no estudo do campo da gravidade uma vez que eles proporcionam, através dos métodos de redução de massa disponíveis, o conteúdo de alta frequência do espectro do campo da gravidade. Esta contribuição de alta frequência dos efeitos topográficos para diferentes constituintes do campo da gravidade ocorre devido à alta correlação das feições de curto comprimento de onda gravimétricos com a topografia/batimetria (SANSÒ, 2013).

A definição das altas frequências ou curtos comprimentos de onda na determinação do modelo geoidal ocorre em função das altitudes médias na área de estudo, ou seja, para obter as correções do terreno, correções isostáticas e efeito indireto é necessário um modelo digital do terreno e um modelo digital batimétrico.

As fontes de obtenção de dados para a geração MDT são várias, por exemplo, fotogrametria aérea, topografia, *Radio Detection And Ranging* (RADAR), *Light Detection And Ranging* (LIDAR), batimetria e *Sound Navigation and Ranging* (SONAR). Deve-se considerar que na modelagem do geoide o que interessa são dados que representem a superfície do terreno, então, elementos como árvores, lagos, construções devem ser desconsiderados.

Para representar a superfície do terreno pode-se utilizar dados estruturados na forma vetorial ou matricial. No primeiro caso são utilizadas grades triangulares ou retangulares em cujos vértices estão disponíveis a posição XY assim como a elevação do referido vértice em relação a uma superfície de referência. Trata-se de uma representação discreta da superfície terrestre. Geralmente, se utiliza a malha triangular, ou *Triangular Irregular Network* (TIN), quando os pontos estão dispostos de forma irregular sobre a superfície a ser modelada. Na Figura 22 pode-se verificar a diferença entre estas duas distribuições para os dados vetoriais.

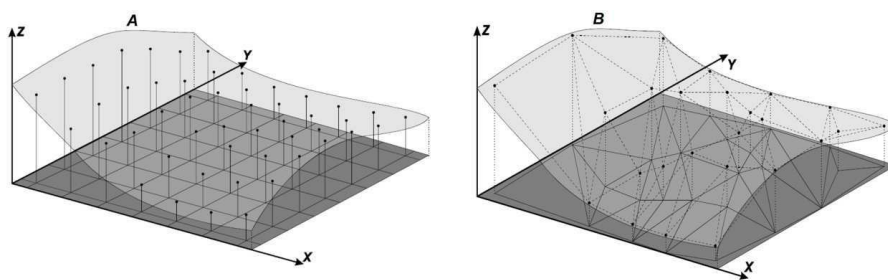


Figura 22. Superfícies vetoriais com malhas retangulares e triangulares.

Fonte: Namikawa (1995)

Na estrutura matricial, ou seja, considerando a representação contínua da superfície terrestre, a elevação é obtida a partir de quadrículas regulares denominadas de pixel. Quanto menor as dimensões em DX e DY destas células maior a resolução espacial e, conseqüentemente, melhor detalhada está a representação do relevo, conforme figura 23.

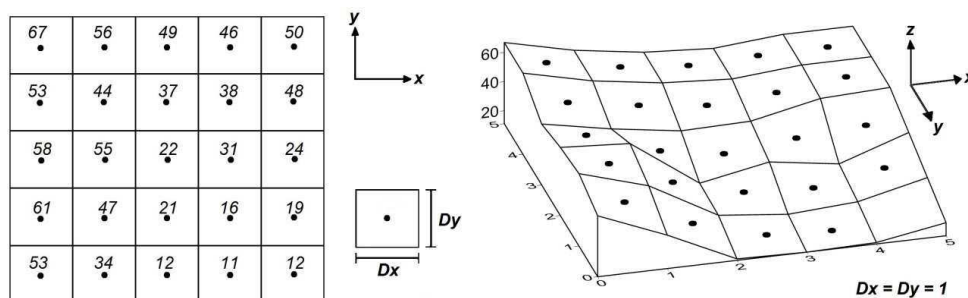


Figura 23. Representação da estrutura matricial do MDE.

Fonte: Valeriano (2004)

Para os MDEs vetoriais as altitudes em pontos não amostrados são determinadas a partir da interpolação dos dados de elevação existentes nos vértices dos triângulos ou retângulos conforme Figura 23. A posição e a distribuição em número de pontos amostrados devem ser compatíveis com a precisão que se deseja para o modelo resultante (MATOS, 2005).

Com relação às estruturas matriciais, a qualidade do MDE está inteiramente relacionada com a qualidade do sensor imageador à bordo do satélite, da espaçonave ou do módulo que o conduz.

É importante considerar que para obter o MDE as altitudes utilizadas devem estar associadas a um único sistema de referência, nesse caso vale ressaltar que às vezes as altitudes além de não estarem referidas a uma mesma superfície equipotencial, podem ter sido obtidas de diferentes sistemas de referência, por exemplo a *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) está referenciada ao EGM96 e os modelos DTM2002 e 2006 estão no EGM2008, PAVLIS (2013). No caso brasileiro algumas altitudes tem referência no marégrafo de Imbituba em Santa Catarina. Para resolver essa questão é imperativo a compatibilização entre os diferentes sistemas.

Lançado em fevereiro de 2000 à bordo da *Space Shuttle Endeavour* o sensor SRTM (*Shuttle Radar Topography Mission*) teve como objetivo, utilizando radar de abertura sintética interferométrica (*synthetic aperture radar interferometry* – SAR ou InSAR), obter dados sobre a superfície terrestre. A partir de dados de 1" x 1" (segundo de arco) ou 90m de resolução espacial, e 16 bits foi possível gerar topografia global. O sistema sensor opera nas bandas X e C do microondas, com comprimentos de onda em 3,1 cm e 5,6 cm respectivamente, o que tem como vantagem obter dados através de nuvens (SRTM, 2016).

No caso do ASTER-GDEM, o MDT é obtido a partir de duas imagens, uma 3n (*nadir looking*) e outra 3b (*backward looking*), que são usadas para gerar o par estereoscópico e assim obter o modelo digital de superfície. Neste caso, por ser um sensor ótico, a presença de nuvens interferem no resultado final. As imagens ASTER estão no sistema WGS84/EMG96 e contam com resolução espacial de 30m e 16 bits (<http://asterweb.jpl.nasa.gov/>).

Neste trabalho foram analisados dados altimétricos de diferentes fontes, SRTM e ASTER-GDEM (*Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer*) - (*Global Digital Elevation Model*).

3.5 Softwares

3.5.1 Módulos do pacote GRAVSOF

Em desenvolvimento desde os anos 70, primeiramente pelo *Geodetic Institute* e depois pelo Kort og Matrikelstyrelsen, (*National Survey and Cadastre of Denmark*, atual DTU-Sapce) e pelo *Geophysical Institute* (atual *Geophysics Dept. of the Niels Bohr Institute*), *University of Copenhagen*, o GRAVSOF é um software usado para modelagem do campo local da gravidade, determinação do geoide, do desvio da vertical e recuperação das anomalias da gravidade de satélites altimétricos.

É uma ferramenta criada em FORTRAN e pronta para lidar com diferentes problemas da geodésia física. São vários módulos criados ao longo do tempo, como por exemplo, o GEOCOL (1973) programa para colocação geral; GRAVIMETRIC *terrain effect programa*, TC, em 1980 e também nos anos 80 o *Fourier analysis e altimetry program*.

Os módulos GRAVSOF foram desenvolvidos por diferentes autores, C. C. Tscherning (Cph. Univ.) - *collocation program* GEOCOL; Rene Forsberg (KMS) – *terrain, grids, FFT, planar collocation etc*; D. Arabelos (University of Thessaloniki) - bases para simplificar o uso do programa de avaliação dos harmônicos esféricos.

A interface dos programas GRAVSOF em Python (Nielsen *at al.*, 2012) é mostrado na Figura 24.

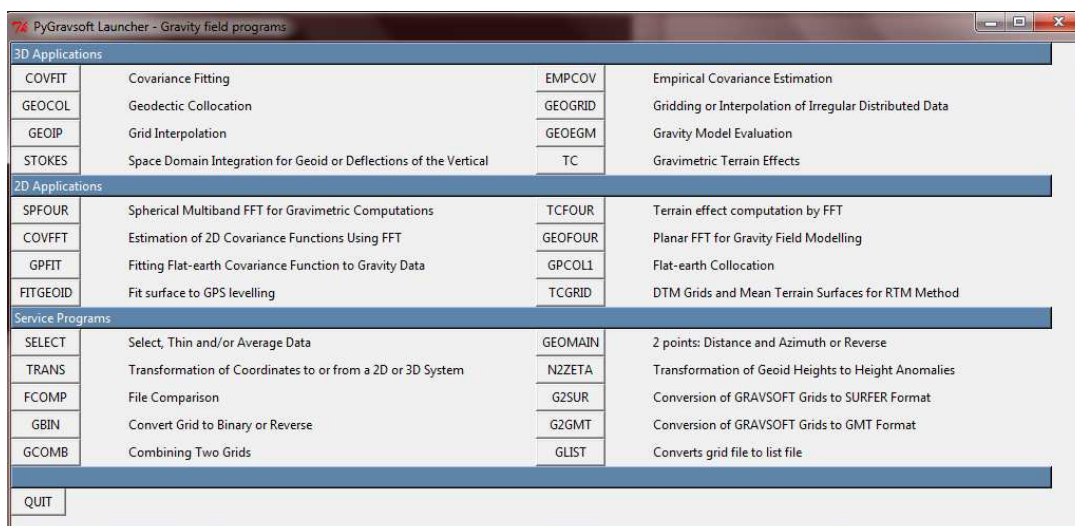


Figura 24. Programas do pacote GRAVSOFT.

Cada programa apresentado na Figura 24 é descrito em Forsberg e Tscherning (2008). Alguns módulos do programa GRAVSOFT estão descritos na Tabela 2.

Tabela 2. Nome do programa, função e autor de alguns módulos do GRAVSOFT.

Programa	Nome do programa	Função	Autor
Seleção e reformatação de dados.	SELECT	Selecionar, dados puros e / ou média em qualquer ponto ou formato de grade. Também pode adicionar ruído aos dados para fins de simulação e produzir gráficos de linha de impressoras bruto	RF
	FCOMP	Adicionar/subtrair, modificar linearmente ou juntar arquivos de pontos com estatísticas.	CCT RF
	GCOMB	Adicionar/subtrair/sobrescrever e recombinar grids inclusive correções especializadas como separação geode-cogeoide.	RF
Interpolação e gridding	GEOIP	Interpolação, linear ou splines, de grids para pontos ou de grid para grid. Também adiciona ou subtrai grid de interpolação 3D.	RF
	GEOID	Interpolação linear binária para o geode. Inclui transformação de coordenadas e de alturas.	RF
	GEOGRID	Colocação por mínimos quadrados (Krigagem) ou predição das médias ponderadas a partir de pontos para grids. Também pode interpolar valores desconhecidos em grids ou predeterminar pontos.	RF
Integração prism Terrain	TC	Integração prisma efeitos do terreno, (topografia, topoisostática, RTM, e a correção clássica do terreno).	RF
	TCGRID	Programa de apoio para obter grids médios e superfícies médias do terreno para o método RTM na TC.	RF

Integral Stokes	de	STOKES	Avaliar integrais de Stokes ou Vening Meinesz pela integração no domínio do espaço.	RF
Métodos Fourier	de	GEOFOUR	Programa FFT planar com vários módulos. Problema de Valor de Contorno de Molodensky.	RF
		SPFOUR	Determinação do geoide por multi-bandas esféricas.	RF
		SP1D	Determinação do geoide por FFT 1-D esférica.	
		TCFOUR	Calculo do efeito do terreno por convolução FFT com aproximação planar.	RF
		COVFFT	Estima a função covariância 2D pela FFT	RF

Fonte: Forsberg & Tscherning, 2008.

3.5.2 ArcGIS

Alguns procedimentos utilizados neste trabalho foram realizados com o auxílio do programa ArcGIS Desktop. Esse Sistema de Informação Geográfica (SIGs) é desenvolvido pela empresa americana ESRI (*Environmental Systems Research Institute*) fundada em 1969. Ele permite aos usuários elaborar representações cartográficas, gerenciar e analisar dados geográficos e também estabelecer relações espaciais entre os diferentes elementos, geométricos e alfanuméricos, que compõem o espaço geográfico. Devido à sua versatilidade e funcionalidade permite a aplicação de um conjunto considerável de ferramentas, para projeções cartográficas, interpolação, captura de coordenadas 3D, etc., que na sua maioria são eficazes e produzem resultados que facilitam a tomada de decisão.

3.5.3 Linguagem C++

Para a realização deste trabalho optou-se pela utilização da Linguagem C++. Desenvolvida na década de 1980 por Bjarne Stroustrup da Bell Labs tinha como objetivo implementar um núcleo distribuído do UNIX. A linguagem foi escolhida para implementação do software pois se mostrou muito qualificada para o uso em computação científica e pela eficiência da linguagem para manipular matrizes numéricas. É uma linguagem de programação que possui suporte aos paradigmas imperativo e orientado a objetos, é considerada de médio nível pois combina características de linguagem C que é uma linguagem de baixo nível com o paradigma de orientação a objetos que é de alto nível. Ao longo do tempo algumas características foram adicionadas, como sobrecarga de operadores, funções virtuais e tratamento de

exceções, características que a linguagem C não possui e que não é obrigatório ao paradigma de orientação a objetos (STRAUSTRUP 1997).

3.6 Metodologia

A maioria dos problemas de valor de contorno são solucionados em termos de integrais, Stokes e Vening Meisnesz, sobre toda a superfície de contorno. Na Geodesia Física a aplicação destas fórmulas tem como pressuposto o conhecimento de quantidades físicas, potencial perturbador, anomalias da gravidade, distúrbios da gravidade, ondulação geoidal, desvios da vertical e anomalia de altura, sobre toda a superfície terrestre. No entanto, as redes gravimétricas contam, geralmente, com poucos pontos o que provoca a necessidade de aplicar procedimentos de interpolação e extrapolação. Denominados como predição, estes métodos não retornam os valores verdadeiros por isso sugerem a necessidade de serem capazes de estimar os erros resultantes da interpolação e da extrapolação assim como os efeitos destes erros nas quantidades derivadas e os seus efeitos devido às regiões distantes negligenciadas.

A não existência de funcionais do campo de gravidade distribuídos de forma contínua sobre toda a superfície terrestre implicou na necessidade de utilizar a técnica remover-calcular-restaurar associada ao procedimento da predição. Usualmente a predição é feita aplicando-se a colocação por mínimos quadrados. O principal problema desta aproximação é realizar a correta modelagem da função covariância das observações, principalmente, quando se combinam diferentes funcionais do potencial perturbador.

3.6.1. Etapas da técnica remover calcular restaurar

A metodologia adotada pode ser resumida da seguinte forma:

1. Medir o valor da gravidade, g_{obs} , e a posição geodésica do ponto (ϕ, λ e h) na superfície física da Terra;
2. Ao utilizar a solução do problema de valor de contorno segundo Stokes, deve-se aplicar as reduções aos valores de gravidade observados. Se se deseja aplicar o Segundo Método de Condensação de Helmert deve-se, primeiramente, determinar a anomalia ar livre, depois fazer a correção atmosférica e por fim aplicar a correção do

terreno, CT. O resultado obtido pela sequência descrita é denominado de anomalia de Faye e é obtida pela equação 97:

$$\Delta g_{Faye} = \Delta g_{ArLivre} + C_{atm} + CT \quad (97)$$

O cálculo da redução ar livre, $\Delta g_{ArLivre}$, não implica na remoção das massas, apenas no deslocamento do ponto de observação da gravidade até o ponto do nível médio do mar.

3. O próximo passo é eliminar, do sinal do campo de gravidade, os efeitos dos longos comprimentos de onda no valor da anomalia obtida no item 2. A partir dos coeficientes provenientes das funções harmônicas esféricas dos modelos do geopotencial, truncado até determinado grau e ordem, calcula-se a anomalia ar livre, Δg_{MGG} . Nesse caso, o resultado é uma malha com valores de Δg_{MGG} com o mesmo número de linhas e de colunas da grade obtida no item 2. O truncamento deve ser realizado de tal forma que haja convergência para o valor de N calculado. Valor da anomalia de gravidade para os coeficientes de qualquer modelo global do geopotencial é dado pela equação 98:

$$\Delta g_{MGG} = \left(\frac{GM}{r\gamma} \right) \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \right] \quad (98)$$

4. Com os resultados dos itens 2 e 3 determinam-se os valores das anomalias residuais usando a equação 99.

$$\Delta g_{res} = \Delta g_{Faye} - \Delta g_{MGG} \quad (99)$$

5. Segundo Gemael (1999) aplicando a integral de Stokes, equação 96, a uma malha com dados de anomalias residuais regularmente espaçada, determina-se o valor do geoide residual. Antes de usar a equação 99 é preciso aplicar algum processo de interpolação para gerar a malha regular.

$$N_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g_{res} S(\psi) d\sigma \quad (100)$$

Na aplicação da Integral de Stokes é necessário que as anomalias residuais de gravidade, Δg_{res} , representem os valores do contorno sobre o geoide (TOCHO *et. al.*, 2003).

Segundo Santos e Escobar (2000) para utilizar a Integral de Stokes é necessário considerar as restrições impostas:

- a) O modelo utilizado por Stokes é esférico. Considerando que a substituição do modelo esférico pelo elipsoidal acarreta um erro de 0,003 no valor de N, então, sabendo que N poucas vezes ultrapassa 100 metros, a referida substituição não implicará em um erro maior do que 1 metro.
- b) A integração de Stokes abrange toda a superfície terrestre, o que enseja a necessidade de conhecer os valores de anomalias para toda a superfície terrestre continental ou não. Em áreas de grande extensão associadas a dados muito esparsos e distribuídos de forma aleatória prejudicam e podem limitar o uso dessa técnica.
- c) A harmonicidade da função potencial externa às massas é condição obrigatória.
- d) O efeito indireto deve ser considerado para regiões de topografia acidentada independentemente da precisão nessas regiões.
- e) Segundo hipóteses dinâmicas e geométricas Stokes considerou a necessidade de haver coincidência de massa e volume entre o modelo teórico elipsoidal e a Terra Real, além da interseção entre os centros e eixos dos dois modelos.

Na prática a integral definida na equação 100 é aplicada em sua forma planar por (SCHWARZ *et al*, 1990):

$$N_i = \frac{R\Delta\phi\Delta\lambda}{2\pi\gamma_P} \sum_{\phi=\phi_1}^{\phi_m} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} \frac{\Delta g^i_{res}}{d} \quad (101)$$

e

$$N_p = \frac{\sqrt{\Delta\phi\Delta\lambda}}{\sqrt{\pi\gamma_P}} \sum_{\phi=\phi_1}^{\phi_m} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} \Delta g_{res}^p \quad (102)$$

Onde ϕ, λ são as coordenadas do ponto de cálculo, $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$ é o espaçamento em latitude e longitude da malha de pontos, m e n correspondem ao número de paralelos e meridianos da malha, respectivamente, d corresponde à distância plana entre o ponto de cálculo e o de integração e Δg_{res} é a anomalia da gravidade resultante da remoção dos longos comprimentos de onda, preditos por um MGG, Δg_{MGG} .

O valor da ondulação residual, N_{res} , é então obtido pela equação 103:

$$N_{res} = N_i + N_p \quad (103)$$

Na prática, como mostrado pelas equações 101, 102 e 103, a integral é dividida em duas partes: uma integral para a região próxima ao ponto de interesse para o cálculo da ondulação geoidal, N_p , e outra para a região distante, além da área vizinha, N_i . A contribuição da região próxima, definida como uma calota esférica ocorre por meio das anomalias de gravidade regionais, já a contribuição das áreas distantes é estimada com o auxílio dos modelos geopotenciais. Dessa forma a equação 100, em sua forma esférica, pode ter a forma (MORITZ, 1980):

$$N_{res} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0} \Delta g_{res} S(\psi) d\sigma + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} Q_n(\psi_0) \Delta g_n \quad (104)$$

Onde

$$Q(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\psi} S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi \quad (105)$$

Os valores de $Q(\psi)$ são denominados erros de truncamento.

6. O valor da ondulação referente aos longos comprimentos de onda do campo de gravidade, N_{MGG} , segundo Souza (2008) é obtida a partir de um modelo geopotencial conforme equação 106:

$$N_{MGG} = N_0 + \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{360} \left(\frac{a}{n}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \quad (106)$$

Se a massa e o potencial do elipsoide de referência forem diferentes do potencial e da massa do geóide então deve-se utilizar o termo N_0 . Este é o termo denominado de constante zero e é utilizado na transformação entre o modelo empregado na determinação dos coeficientes do geopotencial e o modelo elipsoidal em que se definiu como a solução global GRS 80, $\Delta\bar{C}_{nm}$ é a diferença entre os coeficientes totalmente normalizados da expansão em harmônicos esféricos do geopotencial e do esferopotencial, \bar{S}_{nm} são os demais coeficientes normalizados (MORITZ, 1980).

7. A última parcela resultante da decomposição espectral do campo de gravidade a ser determinada é efeito indireto, N_{EI} . Este efeito se deve a alteração do potencial de gravidade decorrente da remoção ou deslocamento de massa durante a aplicação das reduções gravimétricas. Heiskanen e Moritz, (1967). Para o Segundo Método de Condensação de Helmert, a solução proposta por Wichiencharoen (1982) para o efeito indireto é dada pela equação 107:

$$N_{EI} = -\frac{\Delta g_B \cdot H_p}{\gamma_P} - \frac{G\rho}{6\gamma_P} \iint_{\sigma} \frac{H^3 - H_P^3}{d^3} d\sigma + \frac{3G\rho}{40\gamma_P} \iint_{\sigma} \frac{H^5 - H_P^5}{d^5} d\sigma \quad (107)$$

8. Por fim, na etapa restaurar, calcular o geóide gravimétrico pela equação 108:

$$N = N_{\Delta MGG} + N_{res} + N_{EI} \quad (108)$$

Existem variações para o cálculo do valor do valor N_{EI} que devem ser consideradas. Algumas reduções, para serem aplicadas, modificam a topografia e causam consideráveis efeitos indiretos afastando o geóide do elipsoide. É o caso da redução de Bouguer que por isso não é usada para determinação do geóide (Wellenhof *et al.*, 2005) apenas para a interpolação. No entanto, determinadas reduções causam efeito indireto pequeno como é o caso da topoisostática que removem os efeitos das massas considerando algum princípio isostático. Em outros

casos, como na inversão de Rudzki não há alteração do potencial perturbador e por isso se assume que o efeito indireto é nulo.

De forma geral o efeito indireto é uma relação entre a variação do potencial anômalo antes e após a remoção das massas, $\Delta T = T - T_{R,H,B,TI}$, e gravidade teórica, γ . Sideris (1997) sugere a expressão:

$$N_{EI} = \frac{\Delta T}{\gamma} \quad (109)$$

onde T refere-se ao potencial perturbador devido às massas topográficas e $T_{R,H,B,TI}$ é o potencial após a aplicação de cada método de redução, Rudzki, Helmert, Topoisostática e Bouguer.

Quando se aplica a correção de Bouguer para determinar a anomalia residual a equação 97 fica definida da seguinte forma:

$$\Delta g_{res} = \Delta g_{ArLivre} + C_{atm} - C_B - \Delta g_{MGG} \quad (110)$$

Os valores obtidos pela equação 110 são interpolados e se obtem, Δg_{res}^{int} . Para que o efeito indireto seja anulado é necessário restaurar a correção de Bouguer utilizando a parcela referente ao platô, A, conforme equação 111. Como se verifica é necessário adotar métodos de interpolação e/ou estimativa muito eficientes para a obtenção de valores onde não houve amostragem.

$$\Delta g = \Delta g_{res}^{grid} + 2\pi G\rho H^{grid} \quad (111)$$

Teoricamente, se aplicados consistentemente, todos os métodos de redução, Faye, Bouguer Completo, Topoisostático, etc., devem levar ao mesmo geoide, embora, cada redução tenha uma forma diferente de tratar a topografia (TOCHO *et. al.*, 2003).

De forma geral a metodologia descrita nas etapas 1 a 8 pode ser visualizada na Figura 25.

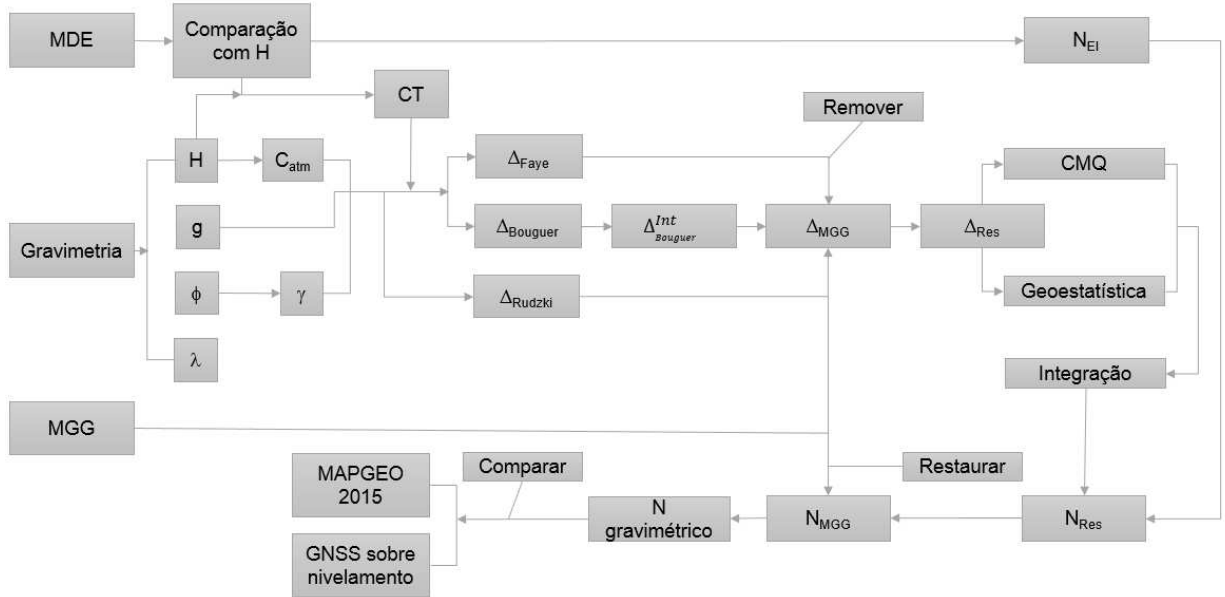


Figura 25. Fluxograma das etapas 1 a 8 da metodologia adotada.

É importante ressaltar que na Figura 25, além da aplicação do Segundo Método de Helmert, estão ilustradas as reduções de Bouguer e Rudzki que serão apresentadas posteriormente.

4. RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 Desenvolvimento de um software para cálculo do geóide

Para determinar o modelo geoidal para as áreas 1 e 2 foi necessário, primeiramente, desenvolver um software que atendesse às necessidades da pesquisa. Além de atender a este trabalho o software em questão tem como objetivo facilitar a prática do cálculo do geóide.

O software GeoFis 1.0, interface apresentada na Figura 26, em sua primeira versão, permitirá aos usuários a determinação da ondulação geoidal usando o Segundo Método de Condensação de Helmert e Bouguer completo.

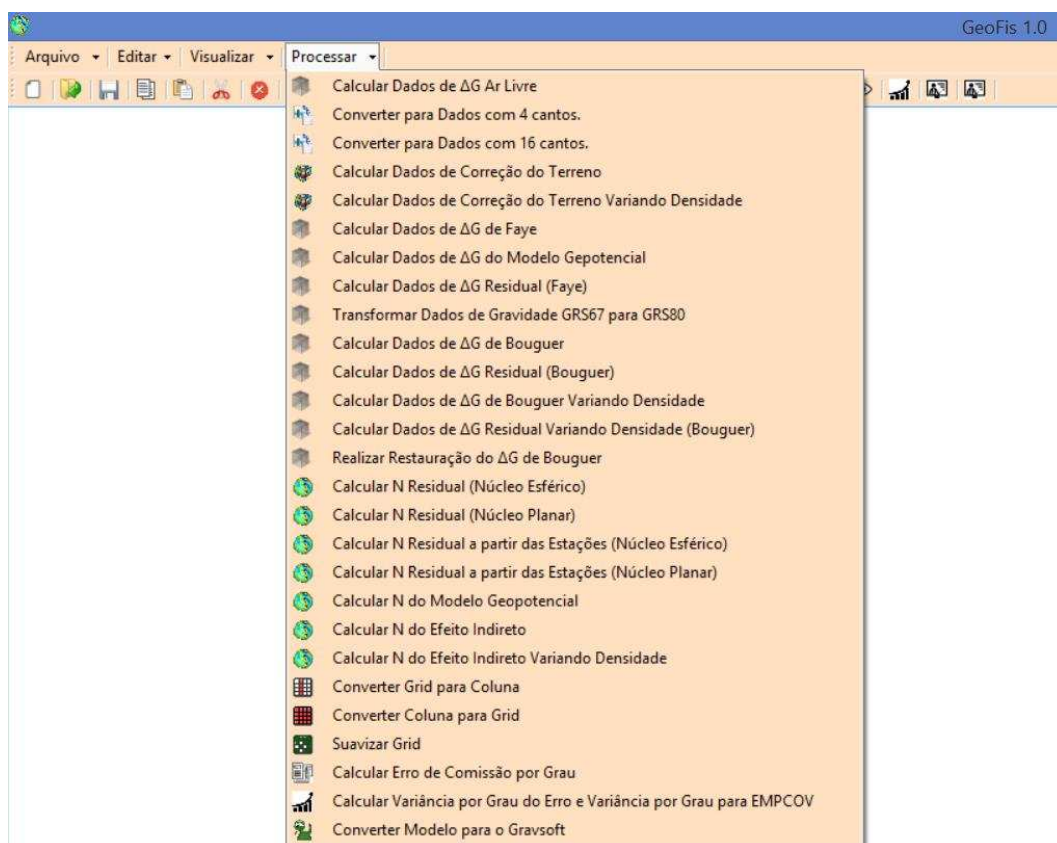


Figura 26. Área de trabalho do software GEOFIS 1.0.

O GeoFis1.0 permite que sejam atribuídos valores diversos para a densidade da geologia tanto no módulo da correção do terreno quanto no módulo referente à determinação da ondulação geoidal usando as anomalias da gravidade residuais. Para um melhor ajuste à superfície terrestre a correção do terreno é realizada usando

prismas com topo inclinado. Além disso, o programa permite calcular a ondulação residual aplicando a integração no módulo planar e esférico. Também é possível calcular o erro de comissão por grau a partir das variâncias por grau dos coeficientes dos MGGs. O esquema apresentado na Figura 27 ilustra o cálculo do geóide a partir de um conjunto de entradas, MGG, MDTs, e dados de gravidade terrestre.

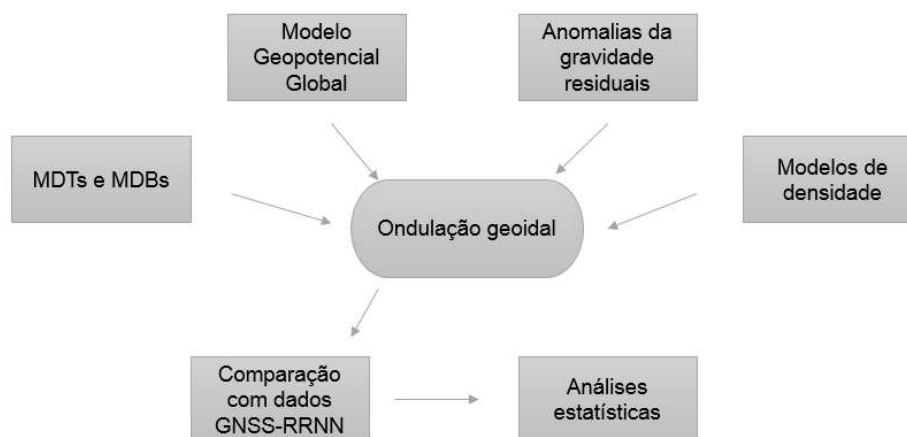


Figura 27. Esquema do programa GEOFIS 1.0

De acordo com FOSBERG (1984) o conhecimento da distribuição de densidade irá fornecer um campo residual mais suave. Como o conhecimento das anomalias de densidade ainda está relacionado às estruturas mais superficiais da crosta e do manto superior, sendo esta a principal contribuição dos curtos comprimentos de onda na avaliação do campo da gravidade, é necessário aplicar métodos de determinação da distribuição de densidade que fogem ao escopo deste trabalho e por isso será tratado em outro momento.

Na sequência serão apresentados os resultados para as áreas de teste

4.2 Determinação do modelo geoidal para as áreas de estudo

Como dados de entrada foram utilizados, valores de gravidade, modelos digitais de elevação e o conjunto de coeficientes do Modelo Geopotencial EIGEN 6C4 (Förste et al, 2014). Para validar os resultados do geóide gravimétrico foi realizado, em janeiro de 2017, uma campanha para obter dados do geóide geométrico usando GNSS sobre nivelamento. Todas as coordenadas das estações visitadas fazem parte do sistema de referência SIRGAS2000 e estão descritas na Tabela 3.

Tabela 3. Dados coletados com GNSS sobre nivelamento.

Estação RN	Latitude	Longitude	h (m)	Sigma Lat (m)	Sigma Long (m)	Sigma h (m)
3096T	-22° 17' 06,8624"	-49° 29' 29,4242"	620,95	0,009	0,025	0,034
3096C	-22° 13' 04,9191"	-49° 41' 31,8496"	644,14	0,009	0,019	0,047
3095U	-22° 13' 34,2253"	-49° 47' 31,0325"	613,93	0,014	0,028	0,06
3128J	-22° 12' 33,3608"	-49° 57' 48,5071"	644,04	0,009	0,023	0,059
3245V	-22° 17' 59,0552"	-50° 01' 33,0177"	437,75	0,008	0,036	0,034
3245G	-22° 25' 54,7183"	-50° 12' 35,9131"	673,64	0,018	0,09	0,094
3245B	-22° 31' 30,9426"	-50° 17' 19,3998"	530,53	0,01	0,027	0,042
3244V	-22° 35' 56,8570"	-50° 21' 51,4976"	528,34	0,01	0,017	0,058
3057C	-22° 41' 44,0904"	-50° 17' 33,8743"	486,61	0,024	0,065	0,056
3056U	-22° 44' 53,3647"	-50° 11' 12,3173"	526,11	0,009	0,031	0,044
3056M	-22° 48' 29,4808"	-50° 04' 23,1143"	478,58	0,007	0,021	0,05
3055F	-22° 59' 34,7257"	-49° 51' 55,0021"	469,95	0,01	0,052	0,061
1586A	-23° 02' 25,5088"	-50° 04' 27,9085"	437,6	0,013	0,03	0,044
1586X	-23° 06' 58,5487"	-50° 22' 24,7943'	408,18	0,014	0,031	0,06
1586L	-23° 03' 08,3291"	-50° 13' 47,0266"	473,99	0,009	0,054	0,056
1591U	-23° 09' 38,9686"	-49° 58' 30,6300"	484,02	0,008	0,059	0,065
3054N	-23° 02' 45,6934"	-49° 42' 12,5715"	547,44	0,074	0,242	0,299
3054H	-23° 03' 15,8385"	-49° 37' 34,6588"	569,93	0,009	0,016	0,033
3031Z	-23° 10' 25,6060"	-49° 32' 05,6018"	611,78	0,01	0,024	0,04
3032D	-23° 07' 53,1694"	-49° 29' 47,2396"	501,39	0,03	0,097	0,128
3077G	-22° 43' 54,0915"	-49° 27' 44,4088"	556,25	0,008	0,038	0,056
IAG_ASSIS	-22° 39' 43,549"	-50° 25' 14,9772"	563,876	-	-	-
IAG_SALTO	-22° 53' 34,6560"	-49° 59' 10,0896"	391,569	-	-	-
IAG_BERNC	-23° 05' 59,326"	-49° 29' 37,8888"	633,903	-	-	-
IAG_UBIRA	-22° 31' 27,4044"	-49° 39' 49,9140"	476,526	-	-	-
3097R	-22° 20' 06,7413"	-49° 11' 15,4358"	462,37	0,007	0,028	0,031
3097H	-22° 20' 12,9757"	-49° 17' 37,0824"	562,2	0,019	0,068	0,059
3097C	-22° 19' 44,4836"	-49° 23' 23,8738"	595,98	0,009	0,035	0,065
3300G	-21° 15' 56,6062"	-44° 57' 45,6127"	892,82	0,027	0,053	0,112
3049U	-21° 09' 29,0088"	-45° 00' 34,7016'	891,27	0,019	0,056	0,119
3042T	-21° 11' 28,5991"	-45° 03' 45,0600'	788,31	0,079	0,209	0,334
3042U	-21° 11' 15,5235"	-45° 03' 33,0228"	804,74	0,02	0,084	0,151
3045G	-21° 13' 05,4706"	-45° 07' 40,5252"	845,38	0,102	0,319	0,32
2386N	-21° 13' 47,3175"	-45° 15' 04,5335"	799,79	0,022	0,049	0,129
2386V	-21° 10' 40,9264"	-45° 16' 00,7401'	802,04	0,022	0,047	0,066
3045B	-21° 14' 22,6212"	-45° 13' 10,2225"	868,19	0,02	0,042	0,067
2386B	-21° 14' 35,5089"	-45° 24' 47,8164"	877,35	0,018	0,039	0,058
2389M	-21° 11' 23,3958"	-45° 26' 27,0204"	845,98	0,038	0,083	0,148
2386G	-21° 14' 30,2950"	-45° 19' 18,6559"	823,93	0,048	0,263	0,19
2385T	-21° 14' 59,5378"	-45° 30' 23,0088"	824,61	0,015	0,153	0,17
3257M	-21° 11' 23,4329"	-45° 31' 51,9330"	800,85	0,02	0,074	0,059
2385G	-21° 22' 16,7879"	-45° 29' 23,1210"	916,85	0,026	0,061	0,071
2384U	-21° 28' 41,6891"	-45° 30' 15,1442"	833,00	0,038	0,105	0,191
2384J	-21° 33' 54,4741"	-45° 26' 13,2892"	914,47	0,02	0,036	0,068
2384D	-21° 37' 48,3142"	-45° 24' 38,8937"	877,94	0,02	0,049	0,085

2383Z	-21° 39' 44,7160"	-45° 20' 50,7124"	841,7	0,038	0,058	0,139
3317A	-21° 25' 28,8862"	-45° 56' 51,8224"	877,06	0,032	0,102	0,061
3316S	-21° 32' 53,7256"	-45° 55' 46,9533"	883,51	0,031	0,048	0,204
3316M	-21° 37' 41,2812"	-45° 55' 12,7636"	804,42	0,019	0,032	0,047
3316H	-21° 41' 25,9043"	-45° 53' 56,2594"	819,02	0,022	0,048	0,082
2805E	-21° 48' 24,5099"	-45° 25' 29,0739"	873,13	0,027	0,087	0,082
2805F	-21° 49' 29,9194"	-45° 24' 53,6055"	868,13	0,017	0,077	0,065
111Z	-21° 51' 10,3484"	-45° 17' 44,2708"	947,87	0,037	0,139	0,114
2804E	-22° 02' 35,7827"	-45° 41' 59,0027"	808,33	0,029	0,032	0,076
IAG ALFEN	-21° 25' 42,8500"	-45° 56' 50,0900"	876,124	-	-	-
IAG TRSCO	-21° 41' 00,5300"	-45° 15' 53,7900"	881,009	-	-	-
IAG LAVRAS	-21° 13' 49,4900"	-45° 02' 34,6000"	902,709	-	-	-

Os dados das estações denominadas IAG foram obtidos junto ao Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da USP e não foram visitados. Há também estações que foram obtidas no *site* do IBGE. No entanto, a maior parte das estações disponíveis na Tabela 3 foram visitadas.

Durante a campanha alguns problemas foram verificados, como é o caso das estações 1591U e 3245G. Na Figura 28 está representada a estação 1591U e foi verificado que o marco da RN estava “solto” e, por isso, pode ser desconsiderado na análise.



Figura 28. Estação de referência de nível 1591U em Jacarezinho-PR

A estação 3245G também pode ter tido sua integridade comprometida devido ao crescimento de uma árvore ao seu lado cujas raízes podem ter alterado a posição da referência altimétrica, Figura 29.



Figura 29. Estação de referência de nível 3245GU em Echaporã-SP

Além da comparação entre o geóide gravimétrico e o geométrico também foram realizadas comparações entre os resultados obtidos pelo GeoFis 1.0 com os resultados obtidos pelos módulos do software GRAFSOFT (Tscherning *et al.*, 1991) em sua versão Python (Nielsen *et al.*, 2012) e com o software TC2DFTPL (Sideris, 1985) e (Li e Sideris, 1994) e IND (Li, 1993). Todos disponibilizados pela *International School of Geoid*.

4.2.1 Análise da consistência das observações disponíveis

Para a utilização correta dos dados gravimétricos é necessário garantir a sua homogeneidade. Para atingir tal objetivo é necessário verificar se os dados estão referenciados ao mesmo elipsoide e datum gravimétrico, retirar dados repetidos e eliminar erros grosseiros nas altitudes. Segundo Gemael e Rosier (1991), a rede gravimétrica brasileira, RENECA - Rede Nacional de Estações Gravimétricas absoluta, conta com sete estações absolutas, Brasília-DF, Curitiba-PR, Santa Maria-RS, Terezina-PI, Valinhos – SP, Vassouras –RJ e Viçosa-MG, todas coerentes com o IGSN-71, sendo por isso, homogênea em termos de datum gravimétrico. Quanto ao elipsoide, segundo o IBGE e a ANP, todas as coordenadas das estações gravimétricas estão referenciadas ao SIRGAS2000.

4.2.1.1 Análise de pontos duplicados e sem altitude ortométrica

As observações que não traziam altitudes ortométricas foram eliminadas e para a análise de dados repetidos foi aplicada a metodologia de Sevilla *et al.* (1997), ou seja, estações que distam entre si, ao longo dos paralelos ou dos meridianos, de até $0,0005^\circ$, aproximadamente 55 metros, foram consideradas duplicadas.

Do total de 10375 observações gravimétricas para a área 1, 27 estavam sem altitude ortométrica associada. Para a área 2, do total de 9520 observações de gravidade terrestre 47 estavam sem observações de altitude ortométrica.

Para a determinação dos pontos duplicados foi utilizado um programa de Sistema de Informação Geográfica (SIG). Neste caso foram detectados 1382 pontos distantes entre si de até 55 metros para a área 1 e 310 pontos distantes entre si de até 55 metros para a área 2.

4.2.1.2 Análise gráfica dos dados altimétricos

Para verificar as inconsistências altimétricas nas observações resultantes das aplicações realizadas no item 4.2.1.1, 8966 e 9163 observações para as áreas 1 e 2, respectivamente, foram aplicadas duas análises, uma gráfica e outra comparativa.

Na análise gráfica, os dados de anomalia ar livre foram relacionados com as altitudes ortométricas com o intuito de se detectar pontos discrepantes do grupo de observações. A Figura 30 mostra a dispersão da anomalia de gravidade em ordem crescente de altitude para a área 1. Nela se percebe três grupos de anomalia ar livre, um grupo com boa coesão e outros dois grupos, circulos, que estão separados do grupo mais coeso e precisam ser analisados de forma mais detalhada. Para a área 2, Figura 31, percebe-se uma dispersão ainda maior dos dados. Os círculos assinalados nas Figuras 30 e 31 sugere a necessidade de uma investigação pormenorizada dos valores aí contidos.

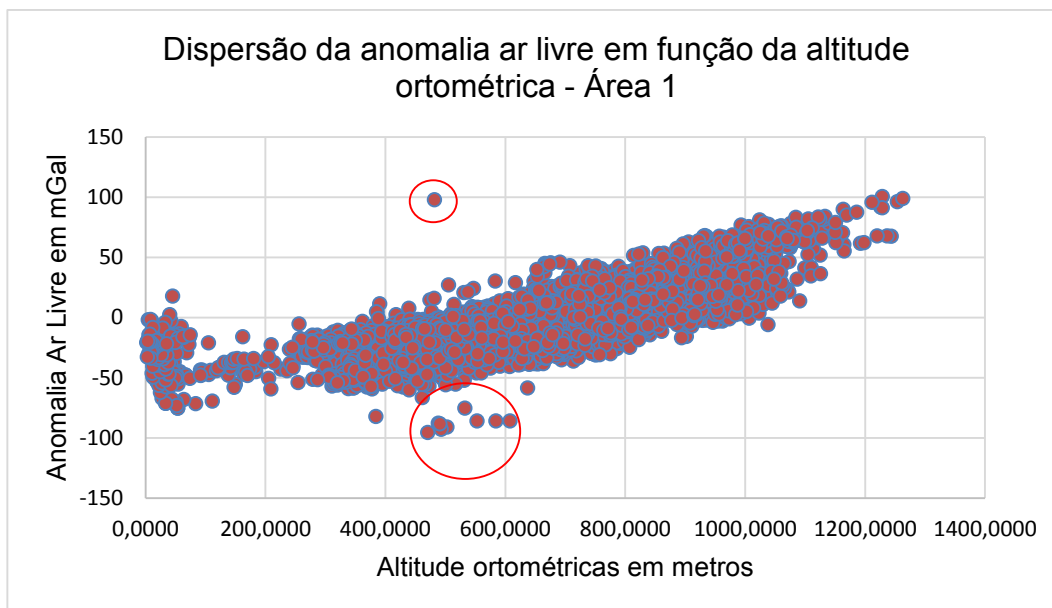


Figura 30. Dispersão da anomalia ar livre em relação à altitude área 1.

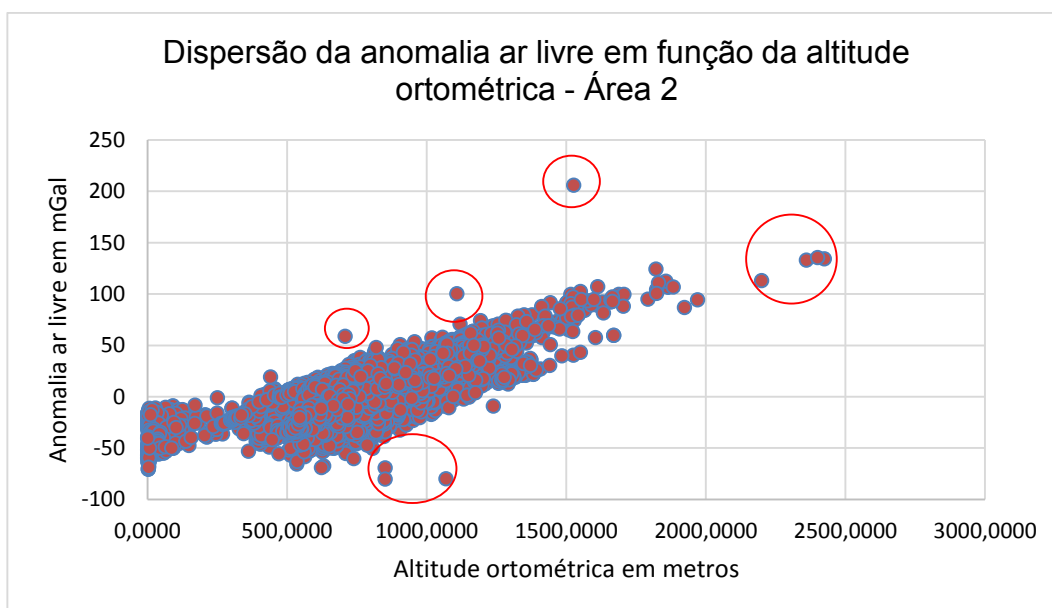


Figura 31. Dispersão da anomalia ar livre em relação à altitude área 2.

4.2.1.3 Análise comparativa dos dados altimétricos

Para a análise comparativa entre as altitudes ortométricas disponíveis no BDG e aquelas fornecidas pelos MDTs foi realizada uma sobreposição dos dados de gravimetria sobre os MDTs: SRTM 3 e ASTERGEM V2. Segundo Sevilla *et al.* (1997) pode-se usar uma diferença de 10 metros como a tolerância na diferença entre as duas altitudes, do IBGE e a do MDE. No entanto, depois de uma análise visual mais

detalhada dos dados de gravimetria, considerando a fonte de obtenção da altitude ortométrica, a situação da estação e a diferença de altitude entre o pontos do MDE e do banco de dados de gravimetria, optou-se por eliminar as observações cuja diferença absoluta entre a altitude do MDE e a altitude ortométrica fosse superior a 20 metros. Deve-se considerar também que a tolerância de ± 20 metros está referenciada na acurácia vertical dos dados de altitude do SRTM que é de 16 metros (Kiamehr e Sjörbeg, 2005).

Os resultados obtidos para a diferença absoluta de altitude entre o MDE e o banco de dados de gravidade estão apresentados nas tabelas 4 e 5.

Tabela 4. Resultado da diferença absoluta entre $h(\text{MDT}) - H(\text{ortométrica})$ Área1

	SRTM - H (m)	ASTER - H (m)
Mínimo	20,000	20,000
Máximo	518,370	514,370
Média	51,380	47,493
Desvio Padrão	52,828	49,033
Variância	2790,783	2404,262
Maiores do que 20 metros	709	844

Como se verifica na Tabela 4, as discrepâncias entre os valores absolutos de altitude entre o MDE, SRTM ou ASTER, e as altitude fornecidas pelo BDG/BNDG para a área 1 são similares. Apesar dessa condição, após análise foram encontrados 709 observações cuja diferença absoluta de altitude entre o SRTM e as ortométricas superaram os 20 metros, totalizando 7,90% dos dados e foram identificadas 844 observações cuja diferença absoluta de altitude entre o ASTER e as ortométricas superaram os 20 metros, ou seja, 9,41%.

Na análise dos dados altimétricos para a área 2, Tabela 5, identificaram-se 1347 observações cuja diferença absoluta entre as altitudes SRTM-ortométrica ultrapassaram 20 metros, ou seja, um total de 14,70% das observações validadas anteriormente. Para essa mesma área foram identificadas, para a diferença absoluta de altitude ASTER-ortométrica, um total de 1415 estações, ou seja, um total de 15,44% das observações acima do limite de 20 metros estabelecido.

Tabela 5. Resultado da diferença absoluta entre h(MDT) – H(ortométrica) Área2

	SRTM - H (m)	ASTER - H (m)
Mínimo	20,000	20,000
Máximo	1206,290	1189,290
Média	64,453	62,369
Desvio Padrão	87,258	85,338
Variância	7614,043	7282,613
Maiores do que 20 metros	1347	1415

4.2.1.4 Definição do MDE utilizado

Para realizar um sistema vertical de referência altimétrico é fundamental que na combinação, GNSS, gravimetria e MGGs haja consistência entre os dados. No caso do método remover-restaurar, no qual os MDEs e MDBs são essenciais, é necessário detectar aquele que é mais consistente com os dados altimétricos disponíveis na base de dados gravimétricos, BDG/BNDG. Neste estudo foram avaliados os MDTs SRTM 3 e ASTERGDEM V2. O MDE que resultou em menor quantidade de dados retirados foi SRTM conforme resultados apresentados nas tabelas 3 e 4 foi SRTM e com base nesse critério ele foi adotado.

4.2.1.5 Análise matemática dos dados validados por distância e altitude

Para verificar se as observações resultantes das validações anteriores, 8257 e 7816 para as áreas 1 e 2, respectivamente, atendem a requisitos mínimos de qualidade é necessário aplicar métodos matemáticos que garantam tal condição. Neste estudo foram aplicados dois modelos matemáticos, a colocação por mínimos quadrados e a Geoestatística. Nos dois casos deseja-se prever valores em posições onde esses valores já são conhecidos, caso as diferenças entre valor predito e o conhecido estejam dentro de um limiar pré-estabelecido, então, pode-se comprovar a qualidade dessas observações.

Para aplicar este procedimento é necessário aplicar as reduções gravimétricas e utilizar as anomalias residuais, ou seja, deve-se somar a correção do terreno às anomalias ar livre e deste resultado subtrair as anomalias de gravidade obtidas segundo um modelo geopotencial.

4.2.1.6 Resultados para as componentes do geóide residual para as áreas de estudo

Os valores do geóide residual dependem do método de redução adotado. Para o Segundo Método de Condensação de Helmert, o mesmo adotado para o MAPGEO2015 IBGE (2016), é necessário obter a anomalia de Faye. Neste caso, as componentes necessárias são a anomalia ar livre e a correção do terreno.

4.2.1.6.1 Resultados para as componentes da anomalia ar livre

Os funcionais do campo da gravidade utilizados nesta pesquisa foram obtidos junto às instituições: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Agência Nacional do Petróleo (ANP) e *Technical University of Denmark* (DTU). Os valores de anomalia ar livre foram calculados a partir dos dados de gravidade e de altitude ortométrica fornecidos pelo IBGE e pelo Banco Nacional de Dados Gravimétricos (BNDG) da ANP. Por sua vez, os dados do modelo DTU se referem a anomalia ar livre, tanto para a área continental quanto para a oceânica. A Figura 32 ilustra a distribuição das anomalias ar livre para as áreas de estudo. Como esta anomalia tem alta correlação com a altimetria a rugosidade desta última irá refletir na rugosidade do modelo ar livre.

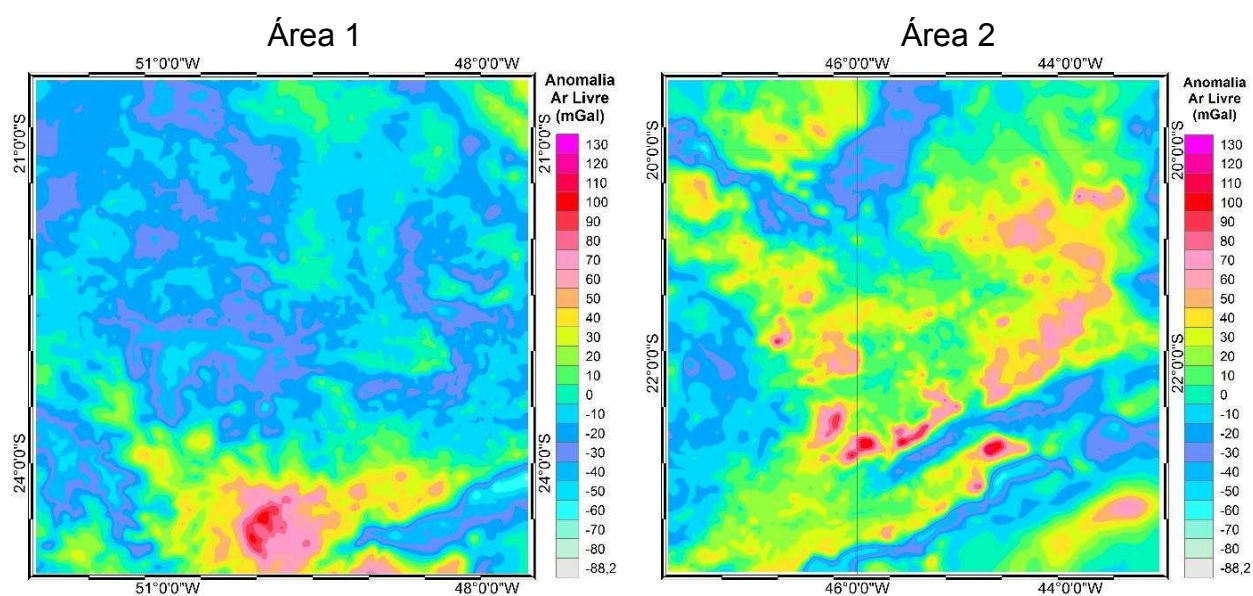


Figura 32. Anomalias Ar Livre em mGal.

4.2.1.6.2 Resultados para a correção do terreno

No GeoFis a correção do terreno é determinada pelo método dos prismas. Dessa forma, a título de comparação, foram utilizados softwares que também aplicam essa metodologia. Foram utilizados o módulo TC-GRASOFT e o programa TC2DFTPL. Na sequência, Figuras 33, 34, 35, 36, 37 e 38, detalham a distribuição de frequência da correção do terreno obtida pelo GeoFis 1.0, TC-GRAVSOFT e, TC2DFTPL para as duas áreas estudadas. Para todos os cálculos foi utilizada a densidade de 2,67g/cm.

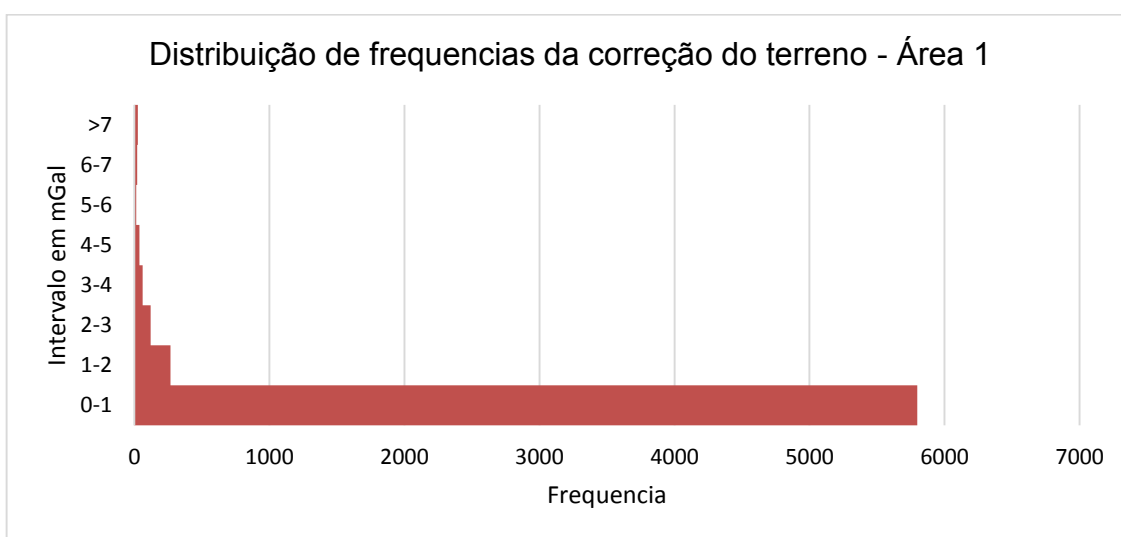


Figura 33. Distribuição da correção do terreno para Área 1 - GeoFis 1.0

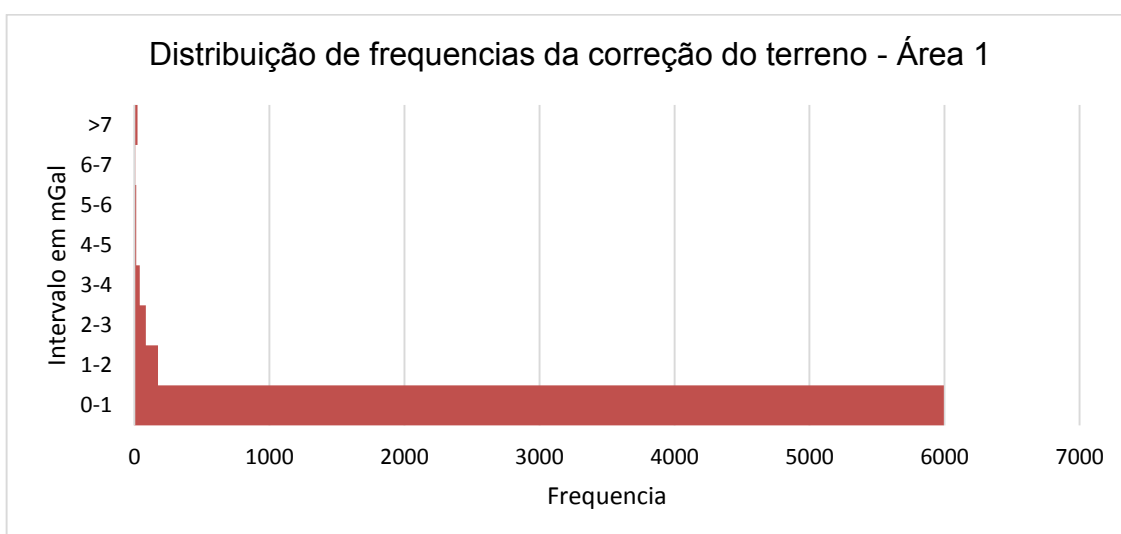


Figura 34. Distribuição da correção do terreno para Área 1 - TC-GRAVSOFT

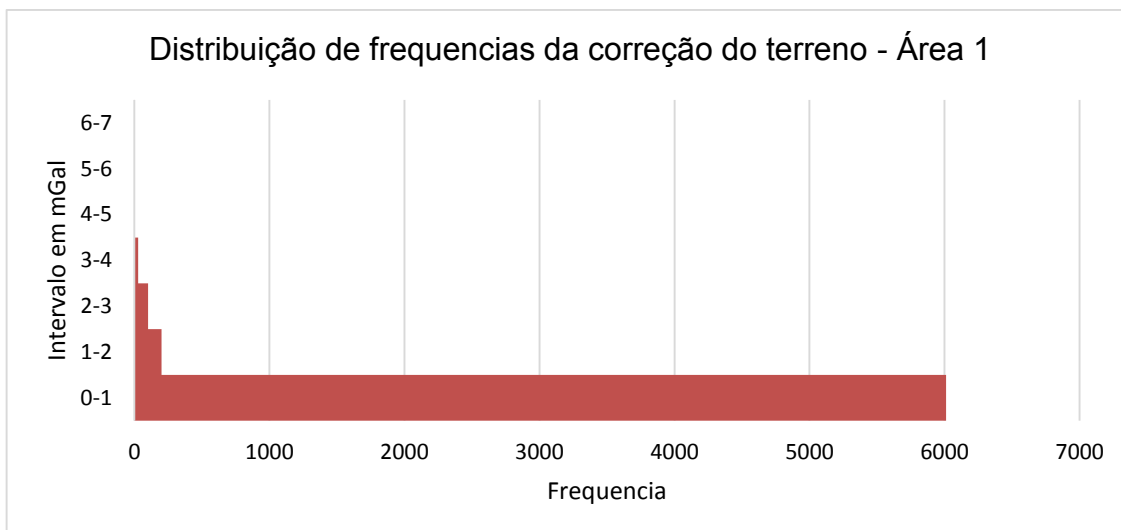


Figura 35. Distribuição da correção do terreno para Área 1 - TC2DFTPL

Pelos resultados apresentados nas Figuras 33, 34 e 35 para a área 1, verifica-se que independente do software utilizado a maior frequência de valores para a correção do terreno estão entre os valores de 0 a 4 mGal.

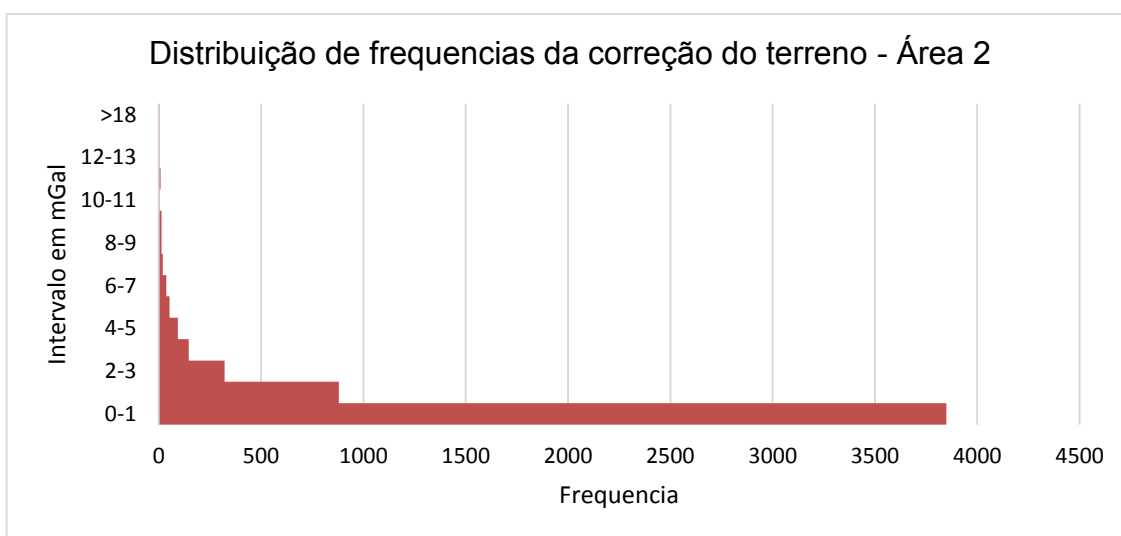


Figura 36. Distribuição da correção do terreno para Área 2 - GeoFis 1.0

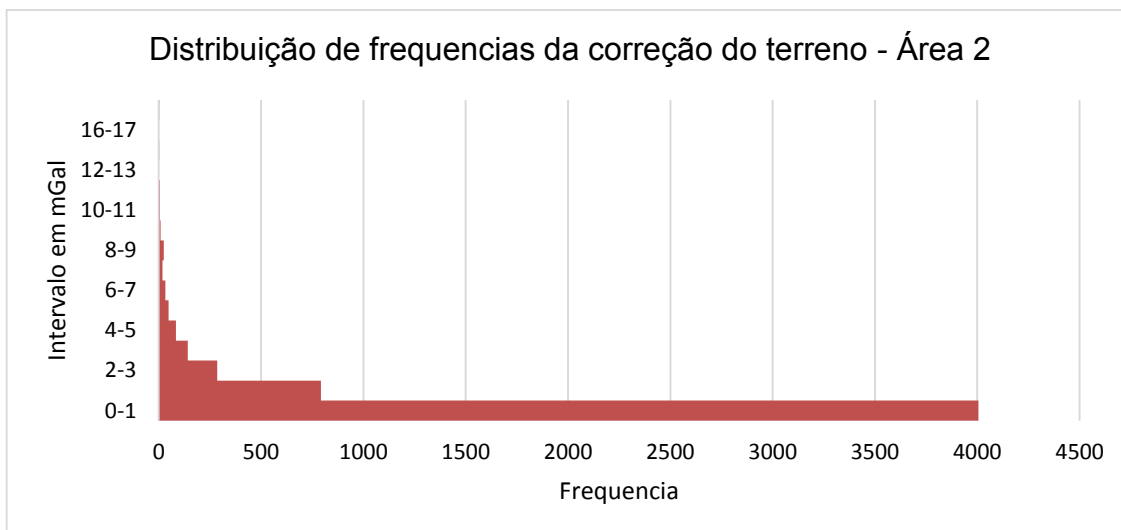


Figura 37. Distribuição da correção do terreno para Área 2 - TC-GRAVSOFT

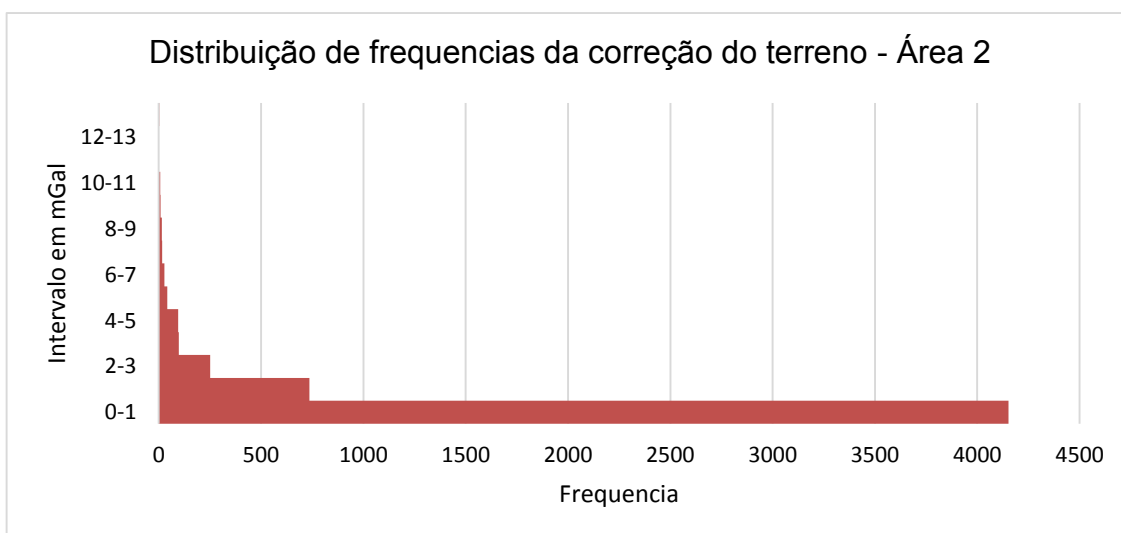


Figura 38. Distribuição da correção do terreno para Área 2 - TC2DFTPL

Verifica-se pelos resultados apresentados nas Figuras 33, 34 e 35 referentes à área 2 que para todos os softwares utilizados a maior frequência de valores para a correção do terreno está no intervalo de 0 a 5 mGal.

No programa GeoFis 1.0 a determinação da correção do terreno fornece resultados mais representativos da influência da variação do relevo na correção uma vez que usa a superfície inclinada do terreno como sendo o topo do prisma.

Como se pode notar os resultados alcançados para o programa GeoFis são promissores e as diferenças mais significativas se concentram onde há maior variação de altitude. As diferenças obtidas para a correção do terreno estão diretamente

relacionadas à modelagem adotada para este cálculo. A equação aplicada por Forbersg e Tscherning, 2008 para o software TC tem como referência (MORITZ, 1968 apud KIRBY & FEATHERSTONE, 1999), no seu núcleo planar. Para o programa TC2DFTL, Li e Sideris (1994), usam a expressão para a correção do terreno que considera a massa do prisma concentrada ao longo da sua vertical dada por:

$$C(x_p, y_p) = G\rho\Delta x\Delta y \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \left[\left(\frac{1}{r(x_p - x_n, y_p - y_n, 0)} - \frac{1}{r(x_p - x_n, y_p - y_n, H_p - H_{nm})} \right) \right] \quad (112)$$

Onde Δx e Δy são os lados da seção transversal do prisma, H_p e H_{nm} as altitudes dos pontos de cálculo e de integração, respectivamente.

Os resultados alcançados pelo programa GeoFis são mais significativos onde há maior variação de altitude, ou seja, quanto maior o detalhamento do relevo pelo MDE adotado melhor será a capacidade do programa em modelar a correção do terreno.

Para o GeoFis 1.0 foi aplicada a metodologia proposta por Ma e Watts (1994). Nela, a área é dividida em regiões de acordo com a proximidade do ponto de cálculo, interna, próxima e intermediária com alcance de até 50km. A área interna, aquela na qual a estação gravimétrica está inserida, é dividida em quatro prismas, sendo que cada prisma contribui vertical e positivamente para o valor da gravidade observada. Assim, as equações utilizadas são, para a área interna:

$$C_1(x_p, y_p) = G\rho \int_0^{x_1} dx \int_{k_1x}^{k_2x} dy \int_0^{a_1x+b_1y} \frac{zdz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \quad (113)$$

Onde, a_i e b_i representam a inclinação da face superior do prisma, e os coeficientes k_i são as retas das bases do prisma em um sistema plano de coordenadas.

Para a área próxima tem-se a equação:

$$C_2(x_p, y_p) = G\rho D^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \quad (114)$$

Onde r é o raio de integração, D o espaçamento da malha do MDE e h é a diferença de altura entre o ponto de cálculo e o de integração.

Para a área intermediária tem-se a seguinte equação:

$$C_3(x_p, y_p) = G\rho D^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \quad (115)$$

O resultado final para a correção do terreno usando o GeoFis1.0 é a soma das parcelas $C_1+C_2+C_3$.

4.2.1.6.3 Resultados anomalia de Faye

A anomalia de Faye é a Anomalia Ar Livre com a correção do terreno, são obtidas conforme equação 93.

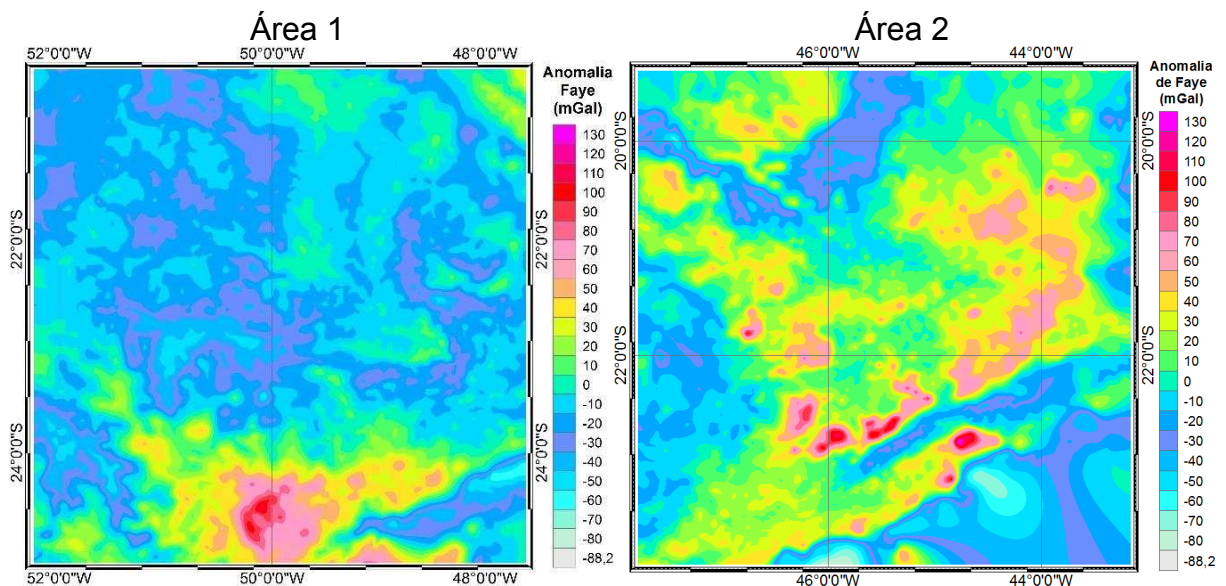


Figura 39. Anomalia de Faye calculadas pelo GeoFis para as áreas de estudo

A Figura 39 apresenta o resultado da aplicação do Segundo Método de Condensação de Helmert. Os valores da anomalia de Faye são mais suaves do que aqueles da anomalia ar livre, mas ainda tem forte influência da variação do relevo. O

co-geoide para a anomalia de Faye é muito pequeno e conseqüentemente essa anomalia pode ser utilizada para calcular o geoide.

As anomalias de Faye foram determinadas para a parte continental e elas serão empregadas no cálculo da anomalia residual que é a entrada na Integral de Stokes. Por sua vez, a anomalia residual é determinada usando os valores da anomalia de Faye, parte continental, e a anomalia ar livre, região oceânica, aplicando-se um Modelo Geopotencial Global (MGG). No caso das anomalias oceânicas foi necessário utilizar os dados de anomalia ar livre do modelo DTU10. A Figura 40 ilustra a distribuição dos dados conforme sua fonte, IBGE, ANP e DTU.

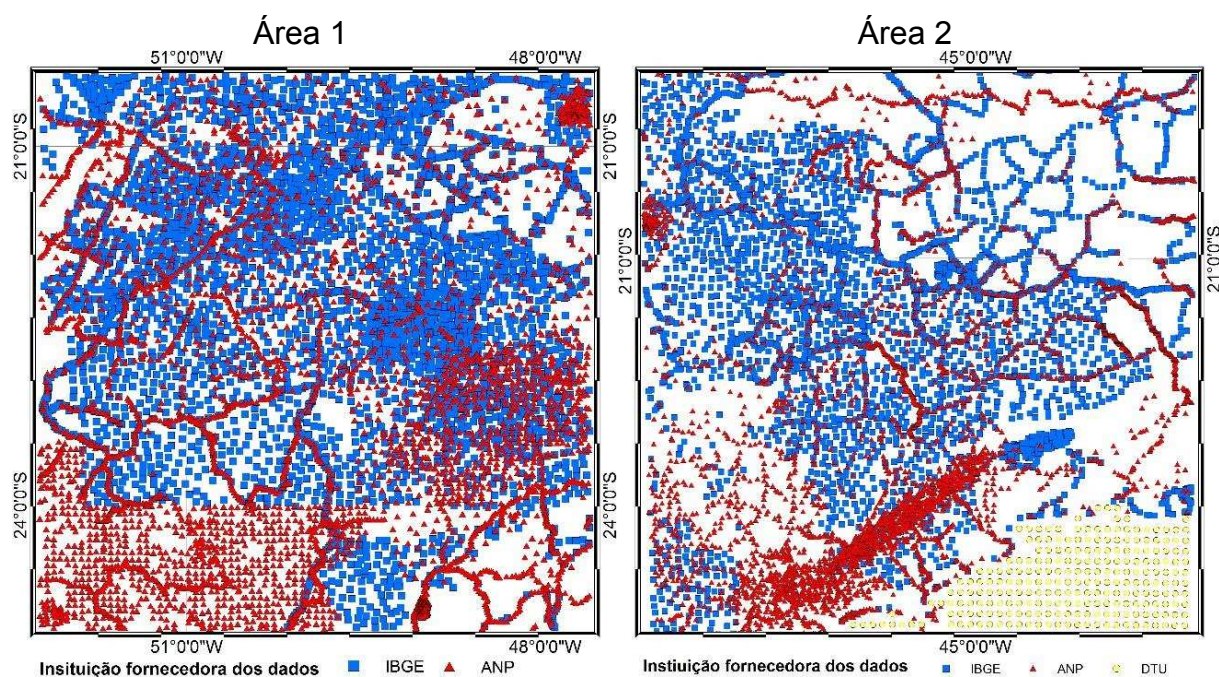


Figura 40. Malha de dados por instituição geradora

Na área 2 foi necessário completar a malha de anomalias ar livre terrestre já que parte da área de influência no cálculo do geoide encontra-se em região marinha. Para a área oceânica recorreu-se ao *site* do modelo do campo de gravidade global onde a *Technical University of Denmark* disponibiliza os dados de anomalias ar livre marítimas.

4.2.1.6.4 Resultados para as componentes da anomalia da gravidade Δg_{MGG} EIGEN-6C4 grau 200

Para o cálculo da anomalia ar livre do MGG, Δg_{MGG} , foram utilizados o conjunto dos coeficientes do modelo geopotencial EIGEN- 6C4 (*European Improved Gravity model of the Earth by New techniques*) até o grau e ordem 200. Esse modelo foi determinado a partir de informações dos satélites gravimétricos GOCE, GRACE, LAGEOS e também de dados dos modelos DTU12 e EGM2008, sendo considerado completo com grau e ordem até 2190 (Förste et al., 2014). Na sequência, as Figuras de 41 a 42 apresentam os resultados obtidos pelo GeoFis e também aqueles obtidos pelo GEOEGM-GRAVSOFT para a área de estudo.

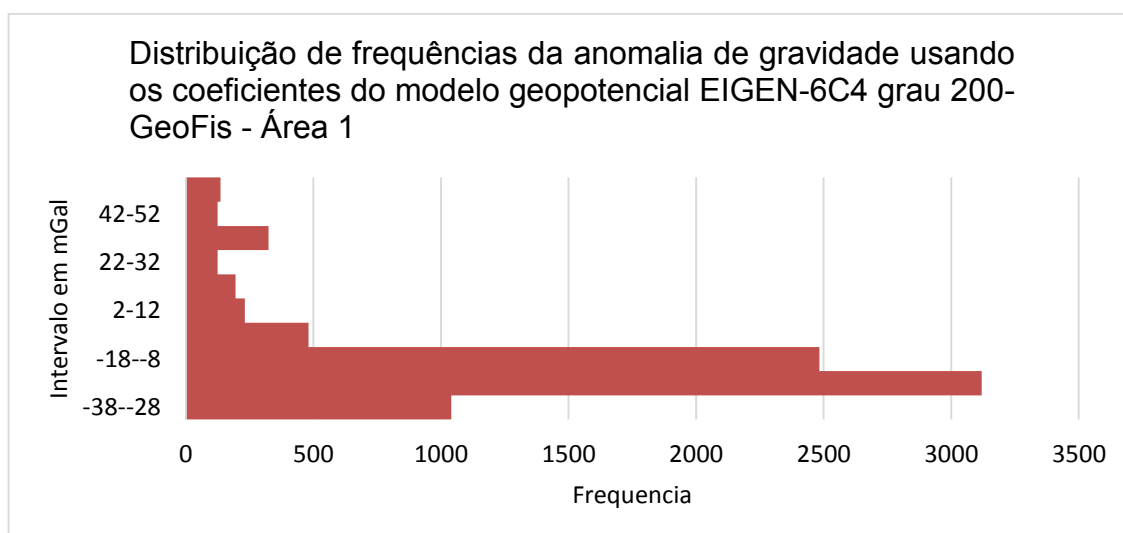


Figura 41. Distribuição de frequências para a anomalia ar livre Δg_{MGG} GeoFis

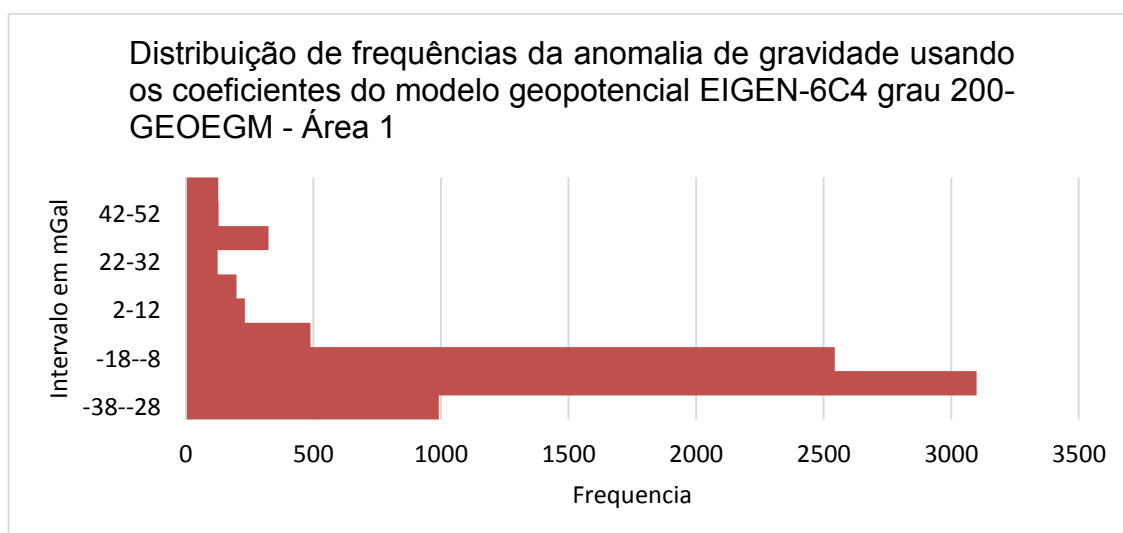


Figura 42. Distribuição de frequências para a anomalia ar livre Δg_{MGG} GEOEGM

Comparando-se as Figuras 41 e 42, ambas referentes a área 1, fica evidente a similaridade entre os valores obtidos pelo GeoFis 1.0 e pelo programa GEOEGM do pacote GRAVSOFT.

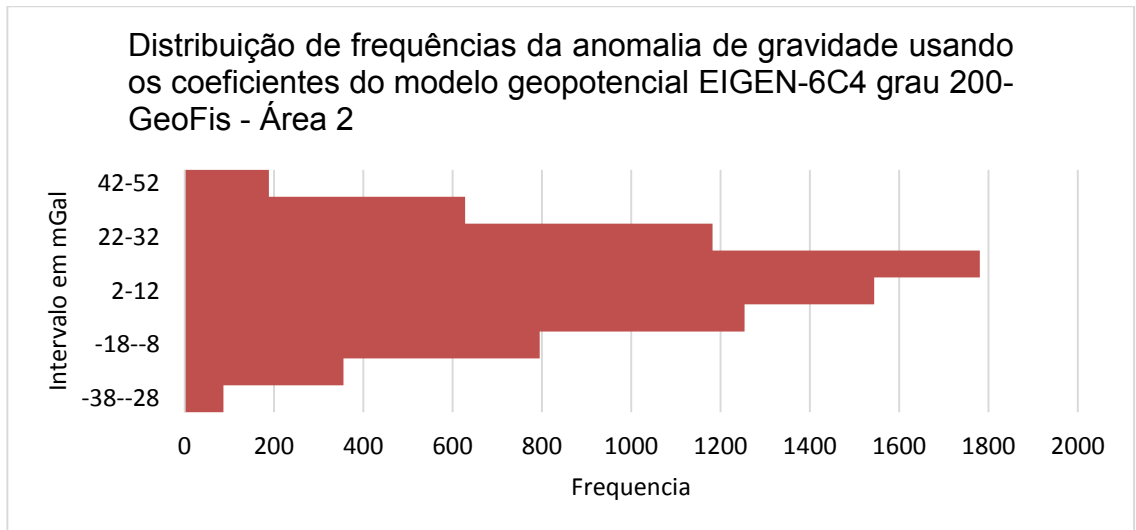


Figura 43. Distribuição de frequências para a anomalia ar livre Δg_{MGG} GeoFis

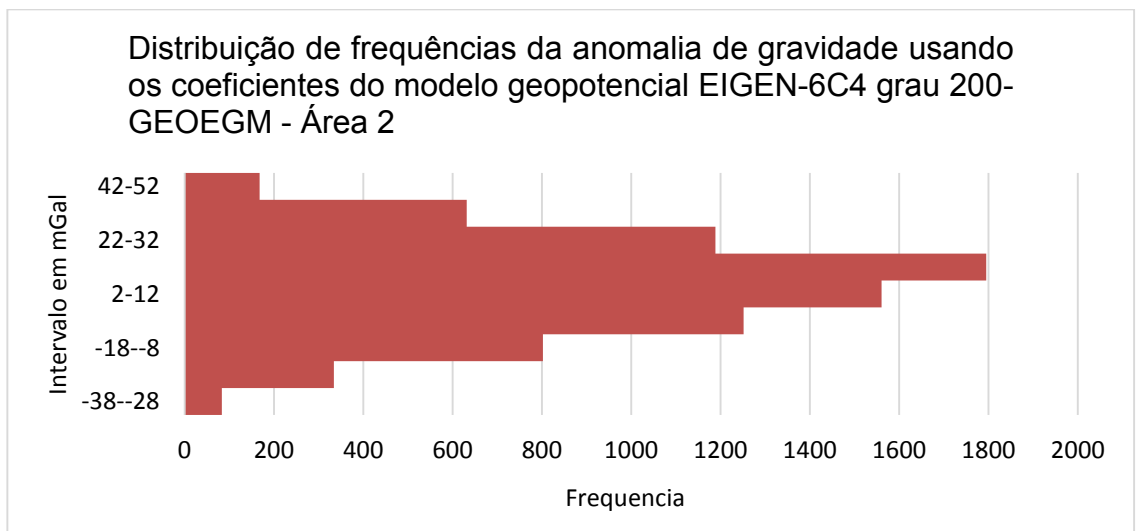


Figura 44. Distribuição de frequências para a anomalia ar livre Δg_{MGG} GEOEGM

Os resultados apresentados pelas Figuras 43 e 44 evidenciam a semelhança entre os valores de anomalia ar livre obtidos pelo GeoFis 1.0 e pelo GEOEGM-GRAVSOFT a partir dos coeficientes do modelo EIGEN-6C4 grau 200 para a área 2.

Com os valores de anomalia da gravidade obtidos a partir do MGG pode-se determinar as anomalias residuais.

4.2.1.6.5 Anomalias residuais de Faye

Na Figura 45 estão representadas as anomalias residuais para as duas áreas estudadas. Na região continental é necessário aplicar as reduções gravimétricas conforme comentado anteriormente, no entanto, na região oceânica não é necessário aplicar a correção do terreno nem a redução ao geóide uma vez que a anomalia ar livre utilizada, DTU, já está sobre a superfície de interesse, Nível Médio do Mar (NMM). Neste caso foi realizada a subtração da anomalia ar livre para o MGG EIGEN-6C4 grau 2190 dos valores de anomalia ar livre obtido do DTU.

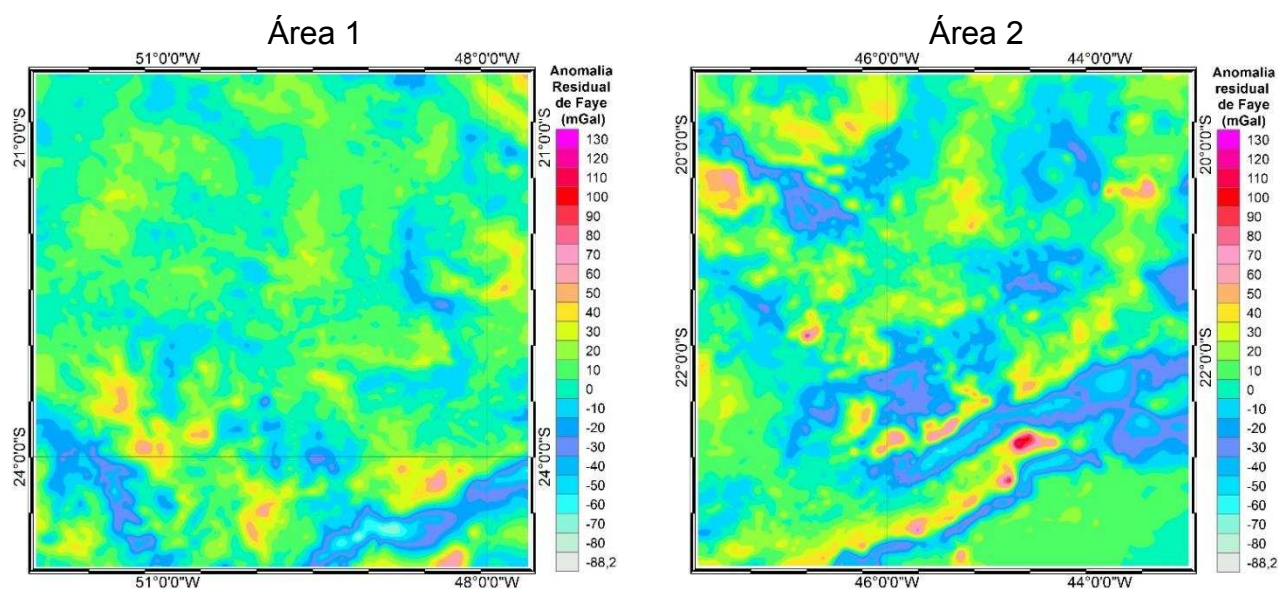


Figura 45. Anomalia residual Faye

Subtraindo a componente do longo comprimento de onda do campo de gravidade, para um determinado MGG, se obtém as anomalias residuais. Isso significa que os resultados provenientes destes valores estão relacionados apenas com a geologia local/regional como mostra a Figura 45. No caso da utilização do MGG até grau 200 tem-se uma resolução de 0,9 graus. Esse valor é utilizado como raio de integração no processo de cálculo da ondulação geoidal.

4.2.1.6.6 Anomalias residuais de Bouguer

Para calcular a anomalias residuais de Bouguer é necessário, segundo Sansò (2013), subtrair as componentes gravitacionais relacionadas ao platô de Bouguer dos valores de gravidade observados nas estações gravimétricas, interpolar os dados reduzidos e ao final, para o grid interpolado, deve-se restituir os valores relativos ao platô. A adoção deste procedimento se deve ao fato da redução de Bouguer causar grande alteração no campo gravitacional e conseqüentemente acarretar grande efeito indireto.

Conforme metodologia proposta foram calculadas as anomalias residuais de Bouguer nas estações gravimétricas e depois foi necessário restaurar o platô de Bouguer no grid interpolado.

A Figura 46 ilustra a distribuição da anomalias residuais de Bouguer para as áreas estudadas.

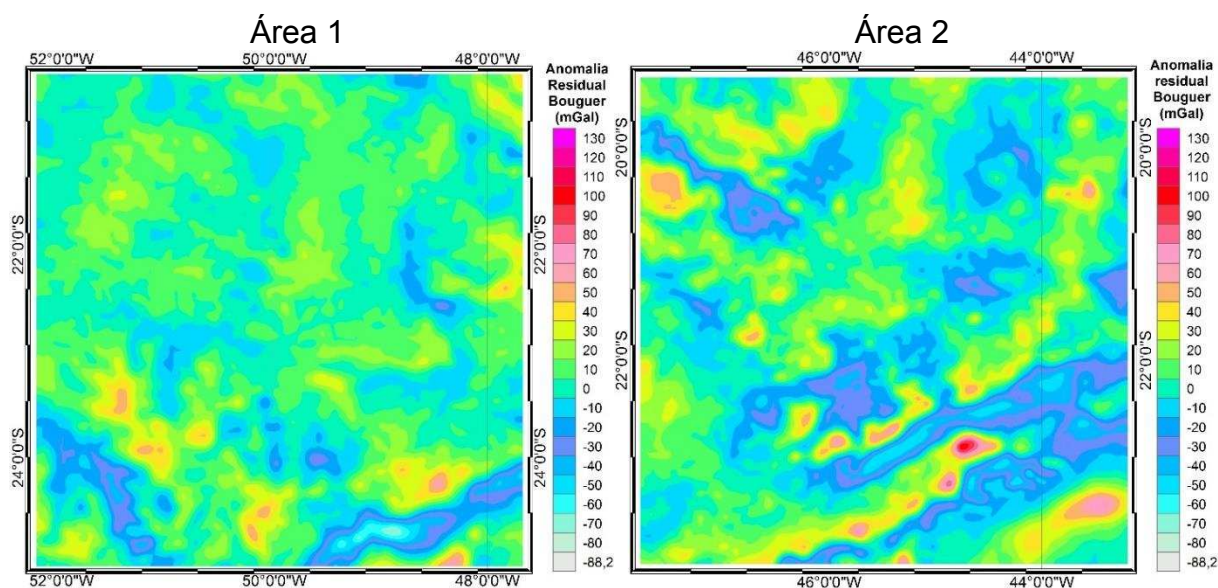


Figura 46. Anomalias Residual Bouguer

Como se verifica, pela comparação com a Figura 45, as anomalias residuais de Bouguer são mais suaves do que as anomalias residuais de Faye.

4.2.1.6.7 Anomalias residuais de Rudzki

No cálculo da correção de Rudzki substitui-se a correção de Bouguer pela de Rudzki e, segundo Bajracharya (2003), a equação 110 toma a forma:

$$\Delta g_{res} = \Delta g_{ArLivres} - C_R - \Delta g_{MGG} \quad (116)$$

A determinação da correção de Rudzki, C_R , foi realizada com o auxílio do programa “Rudzki” disponibilizado pelo *International Service for the Geoid* (ISG).

As anomalias residuais de Rudzki estão ilustradas na Figura 47.

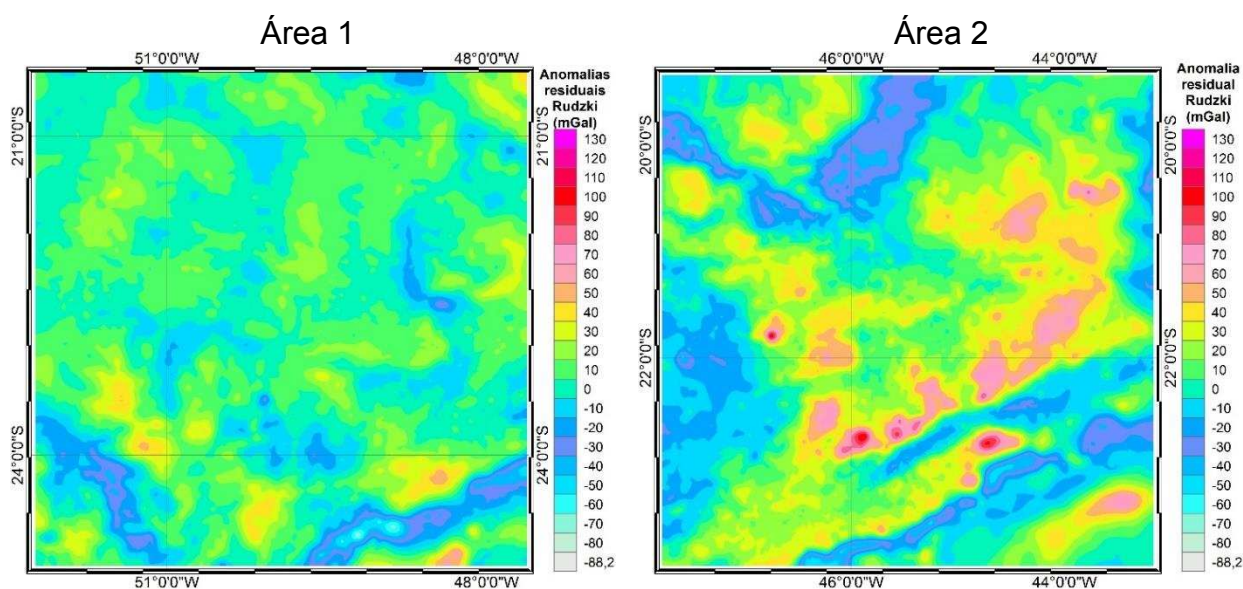


Figura 47. Anomalias Residuais Rudzki

Como se pode notar, comparando as Figuras 46 e 47, os valores das anomalias residuais de Rudzki e de Bouguer para a área 1 são muito semelhantes, no entanto, para a área 2 existem diferenças significativas. Provavelmente isso ocorre devido a maior variação do relevo e da geologia.

4.2.1.7 – Avaliação dos dados de anomalias residuais de Faye usando a colocação por mínimos quadrados

Antes de se aplicar uma análise matemática para a análise dos dados de anomalias residuais é importante que se faça uma avaliação visual. Como a suavidade

do campo de gravidade é maior depois da remoção da alta e da baixa frequência, grandes discrepâncias podem ser consideradas como erros. Pontos de uma mapa de anomalia residual como depressões ou elevações abruptas devem ser considerados como suspeitos. A Figura 48 foi utilizada para verificar as duas situações mais discrepantes, ou seja, quando as observações do primeiro quantil se encontravam misturados com valores do quarto quantil. Para a Área 1 verifica-se uma separação bem definida entre os diferentes quantiles com exceção para uma pequena concentração de valores ao sul da referida área. Já para a Área 2 verifica-se uma maior mistura de valores na região sudoeste da área estudada o que sugere avaliá-la matematicamente. Depois da verificação visual, Figura 48, foi aplicada duas avaliações matemáticas. Neste caso, priorizou-se modelos mais robustos que empregam funções de variância ou covariância, como por exemplo, a colocação por mínimos quadrados e a geoestatística.

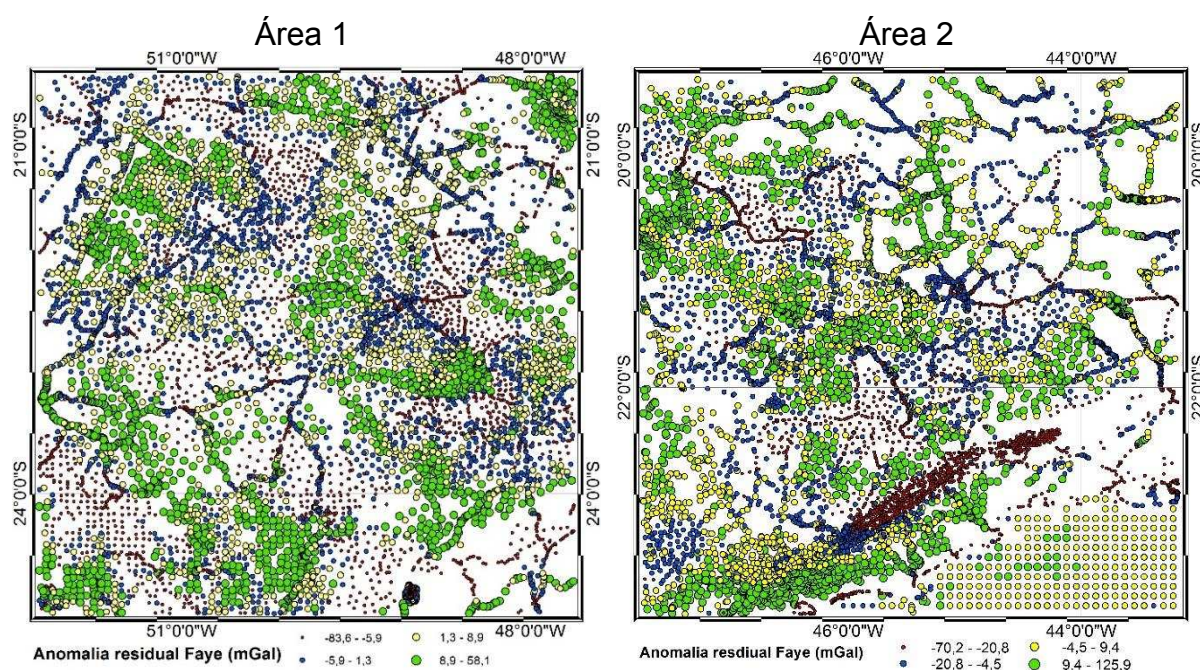


Figura 48. Ordenamento da anomalia de Faye residual em quantis para as Áreas 1 e 2

Segundo Tziavos *et al.* (2005), a detecção de erros grosseiros com a CMQ segue as seguintes etapas:

1. Dividir da área em grids retangulares com tamanhos compatíveis com o modelo matemático adotado;
2. Para cada grid verificar se os dados se distribuem de forma homogênea;

3. Usar a CMQ tendo como entrada os valores “observados” de anomalia residual e prever os valores das anomalias nos pontos de observação;
4. Estimar o módulo da diferença entre os valores originais e os preditos;
5. Se o módulo da diferença entre o valor observado e predito, $|\Delta g_{obs} - \Delta g_{pred}|$, for maior que um limiar, $k \sqrt{\sigma^2(\Delta g_{obs} - \Delta g_{pred}) + \sigma^2 \Delta g_{obs}}$, então, a observação em questão é considerada suspeita de conter erro grosseiro e pode ser eliminada. Onde, Δg_{obs} é o valor da anomalia residual, Δg_{pred} é o valor da anomalia residual predita, $\sigma^2(\Delta g_{obs} - \Delta g_{pred})$ é a estimativa do erro quadrado médio da diferença entre a anomalia reduzida observada e a predita, $\sigma^2 \Delta g$ é a variância da observação Δg_{obs} e k é uma constante que varia de 2 a 5 dependendo do rigor aplicado na análise.

Para este trabalho seguiu-se a metodologia proposta por Tziavos *et al.*, 2005. Adotou-se para o conjunto de observações o desvio padrão de +5mGal e para k o valor de 2.

Para a realização das etapas delineadas anteriormente foram utilizados os módulos EMPCOV, COVFIT, GEOGRID e GEOIP do pacote GRAVSOFT.

Com a aplicação do módulo (EMPCOV) obteve-se a função covariância empírica, dada pela equação 117:

$$COV(\psi, r_m, r_m) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \Delta g(P) \Delta g(Q) \quad (117)$$

Onde M é o número de produtos de um intervalo de amostragem, r_m é a altitude média e ψ é a distância esférica entre os pontos P e Q. Os resultados são: o limite da área, latitudes e longitudes máximas e mínimas, o espaçamento médio, a altitude média, a variância à altitude média e a distância de correlação, ou seja, aquela correspondente à 50% da variância. Todos esses parâmetros são usados no ajuste do modelo analítico, com exceção da distância de correlação usada no GEOGRID.

Com o módulo COVFIT foi realizado o ajuste de um modelo local de covariância analítico. Na aplicação deste programa se usa um modelo de variância por grau do tipo 2 (TSCHERNING e RAPP1974), dada por:

$$\sigma_n^2 = \frac{A}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+4)} \cdot \left(\frac{R_B}{\bar{R}}\right)^{2n+2} \quad (118)$$

Onde n é o grau, A é uma constante, R_B é o raio da esfera de Bjerhammar e \bar{R} é o raio médio da esfera. O resultado do COVFIT são: o fator de escala (α), a profundidade da esfera de Bjerhammar ($\bar{R} - R_B$) e a variância da anomalia da gravidade à altitude zero, denominada de VARG. Estes fatores são utilizados no programa GEOCOL para realizar a colocação. O resultado final da aplicação dos módulos EMPCOV e COVFIT para as anomalias residuais EIGEN6C4 grau 200 estão representados nas Figuras 49 e 50.

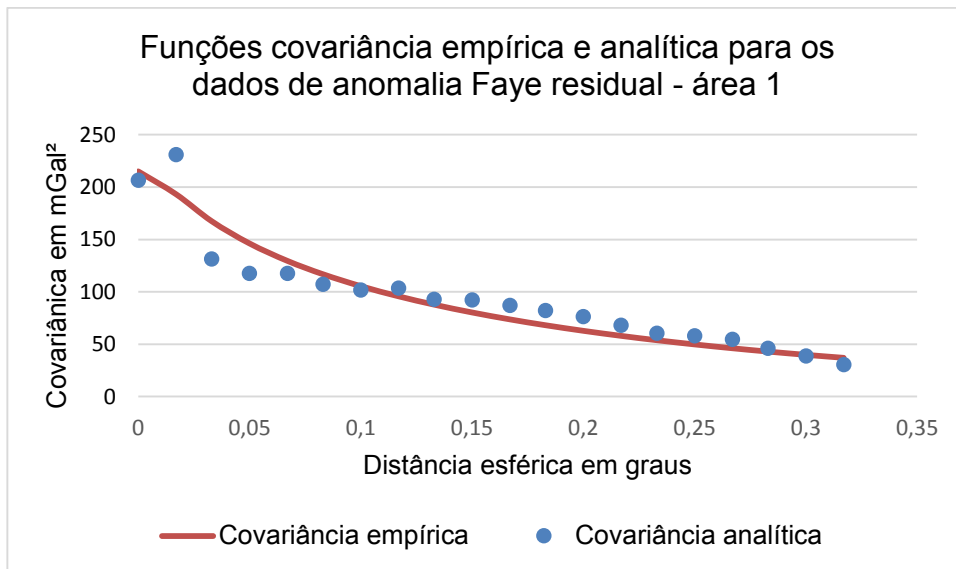


Figura 49. Funções covariâncias empírica e analítica ajustada para a área 1

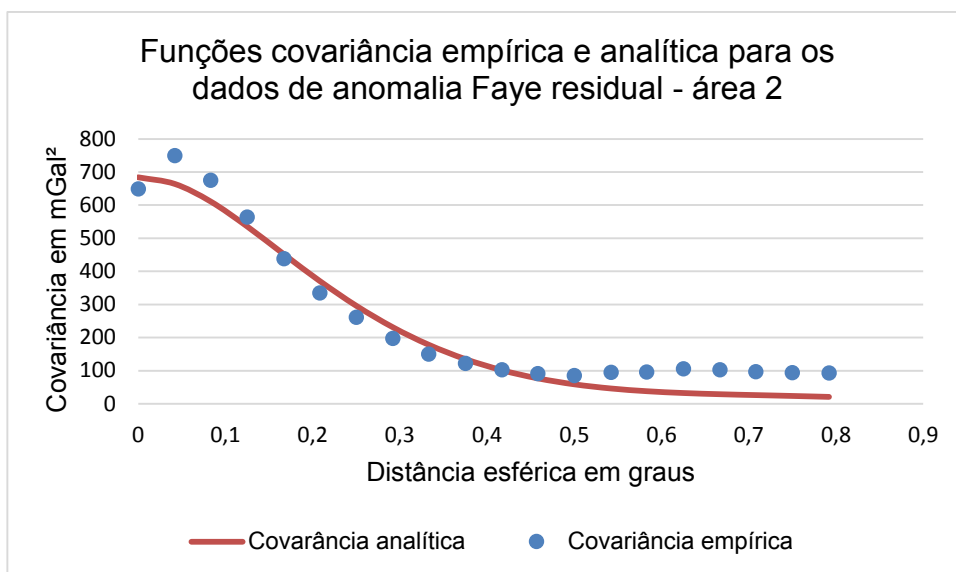


Figura 50. Funções covariâncias empírica e analítica ajustada para a área 2

Com o módulo GEOGRID gera-se uma malha regular usando a colocação por mínimos quadrados. Cada ponto da malha tem seu valor predito a partir de um determinado número de observações vizinhas a ele. Se os valores vizinhos são menores do que aquele no ponto de cálculo o programa funciona como um filtro de passa baixa caso contrário, de passa alta. Neste programa, se for necessário, é possível remover a tendência média, linear em x e y, polinomial de segundo e terceiro grau e ainda remover os quatro parâmetros de deslocamento do datum. Depois de executado o GEOGRID, aplicando a distância de correlação de 7,7', aproximadamente 15,4 km para área 1 e 14,70', aproximadamente 27,3 km, para a área 2 e fixando o RMS em 0,5 mGal para os resíduos da área 1 e 0,45 mGal para os resíduos da área 2, foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 6:

Tabela 6. Resultado da predição por CMQ usando o GEOGRID

Área		Mínimo (mGal)	Máximo (mGal)	Média (mGal)	Desvio Padrão (mGal)
1	Observações	-83,636	58,137	1,148	13,849
	Predição	-82,430	58,100	0,230	14,480
2	Observações	-70,206	125,976	-5,890	23,212
	Predição	-70,510	126,020	-1,780	19,400

Para verificar a qualidade da malha obtida usa-se o GEOIP. Este programa fornece a diferença entre o valor predito e o observado para cada ponto de anomalia residual.

Ao final deste processo, foram detectados 144 observações suspeitas de conter erros grosseiros para a área 1 e 250 observações com erros grosseiros para a área 2, conforme condição estabelecida pela equação 119. Os resultados apresentados na Tabela 7 foram obtidos depois da retirada dos erros grosseiros.

$$|\Delta g_{obs} - \Delta g_{pred}| > k \sqrt{\sigma^2(\Delta g_{obs} - \Delta g_{pred}) + \sigma^2 \Delta g_{obs}} \quad (119)$$

Tabela 7. Resultado da predição por CMQ usando o GEOGRID depois da retirada dos erros grosseiros

Área		Mínimo (mGal)	Máximo (mGal)	Média (mGal)	Desvio Padrão (mGal)
1	Observações	-82,636	58,137	1,100	13,270
	Predição	-82,060	57,740	0,350	13,900
2	Observações	-64,180	125,976	-6,631	22,978
	Predição	-62,180	126,320	-2,240	19,290

Ao analisar as tabelas 6 e 7 verifica-se que não ocorreu alteração significativa nos valores preditos após a retirada dos erros grosseiros para as área 1 e 2.

4.2.1.8 – Validação dos dados de anomalias residuais de Faye usando a geoestatística

A partir do conjunto de anomalias residuais, Figura 48, foram realizadas: a análise exploratória básica e espacial, a análise variográfica, o semivariograma onmidirecional e o ajuste do modelo teórico.

Os resultados apresentados na primeira linha da tabela 8 são referentes às anomalias residuais da Área 1. A média para os dados é de 1,147 mGal, valor mínimo de -83,636 mGal e máximo de 58,137 mGal, resultando numa amplitude de variação de 141,773 (Max-Min) e dispersão entorno da média, Coeficiente de Variação (CV) de 1206,784%, indicando alta dispersão dos dados (PIMENTEL e GOMES, 1985). O valor de curtose e de assimetria evidenciam o formato leptocúrtico e assimétrico

negativo do histograma, Figura 51. O gráfico Quantil-Quantil (QQ), dessa mesma figura, comprova a não normalidade dos dados.

Na análise exploratória básica dos dados de anomalia residual para a Área 2, segunda linha da tabela 8, verifica-se média de -5,890 mGal para a anomalia residual, valor mínimo de -70,206 mGal e máximo de 125,976 mGal, resultando numa amplitude de variação de 196,182 (Max-Min) e dispersão entorno da média, Coeficiente de Variação (CV) de -394,080%. O valor de curtose, 3,224, ilustra bem o histograma da Figura 52, ou seja, representa uma curva leptocúrtica. Já a curva é assimétrica positiva fraca, conforme coeficiente de assimetria de 0,026. Na Figura 55 o gráfico QQ evidencia a não normalidade dos dados.

Tabela 8. Estatística descritiva das anomalias residuais (EIGEN6C4 grau200)

Anomalias Residuais	Média (mGal)	Mínimo (mGal)	Máximo (mGal)	Variância (mGal) ²	Desvio Padrão	CV	Curt	Ass
Área 1	1,147	-83,636	58,137	191,792	13,849	1206,784	5,720	-0,370
Área 2	-5,890	-70,206	125,976	538,800	23,212	-394,080	3,224	0,026

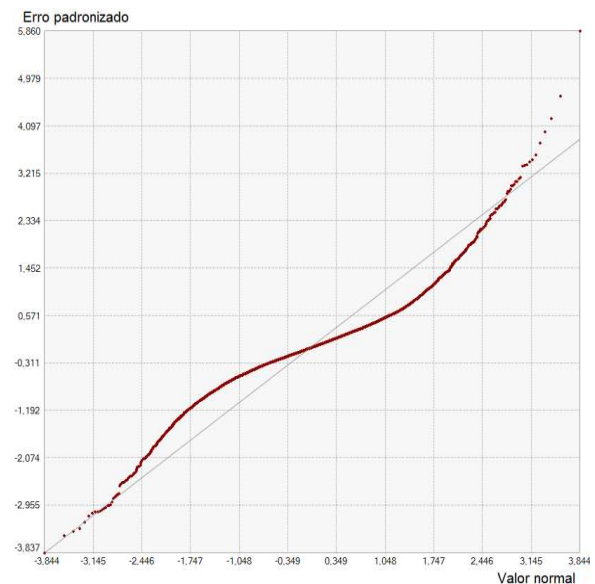
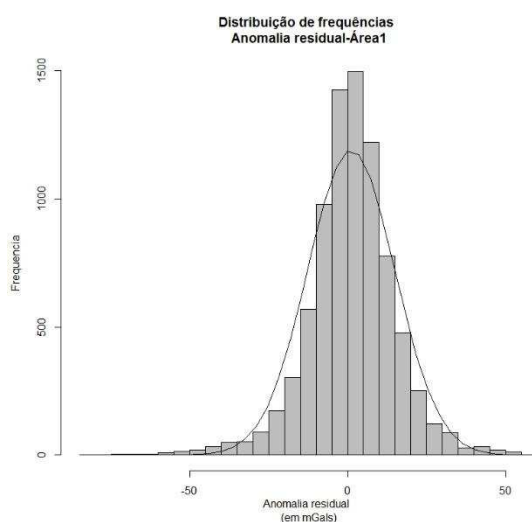


Figura 51. Histograma e gráfico QQ para os dados de anomalia residual – Área 1

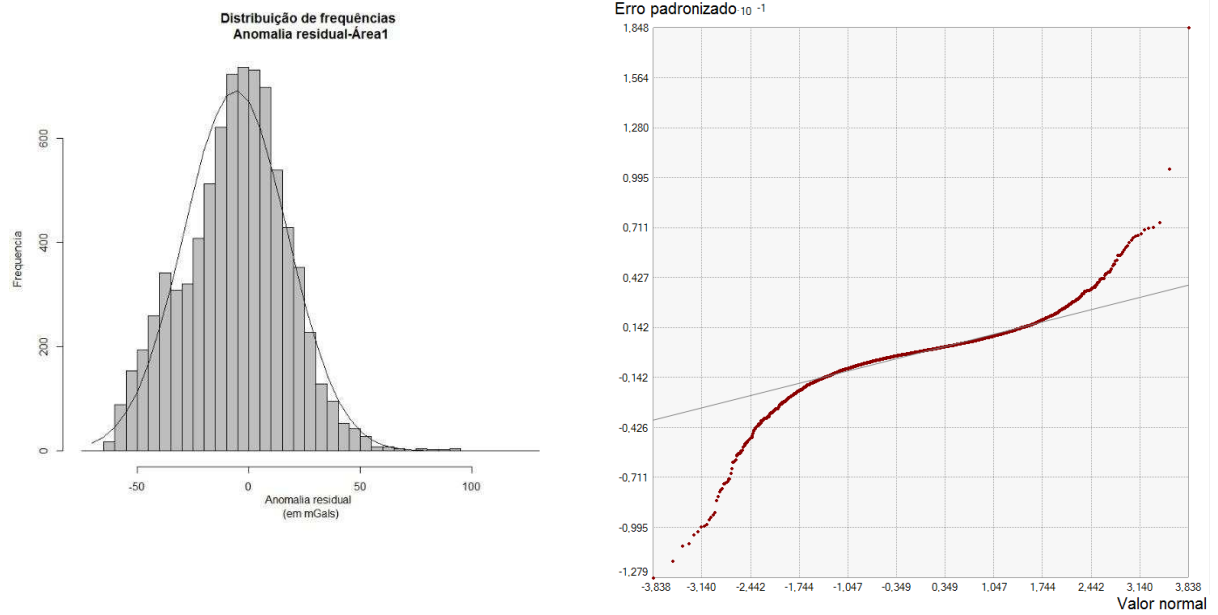


Figura 52. Histograma e gráfico QQ para os dados de anomalia residual – Área 2

Para as duas áreas estudadas verifica-se a não presença de tendência nos dados de anomalia residual, nem para a direção Leste-Oeste nem para a direção Norte-Sul, como mostra a Figura 53.

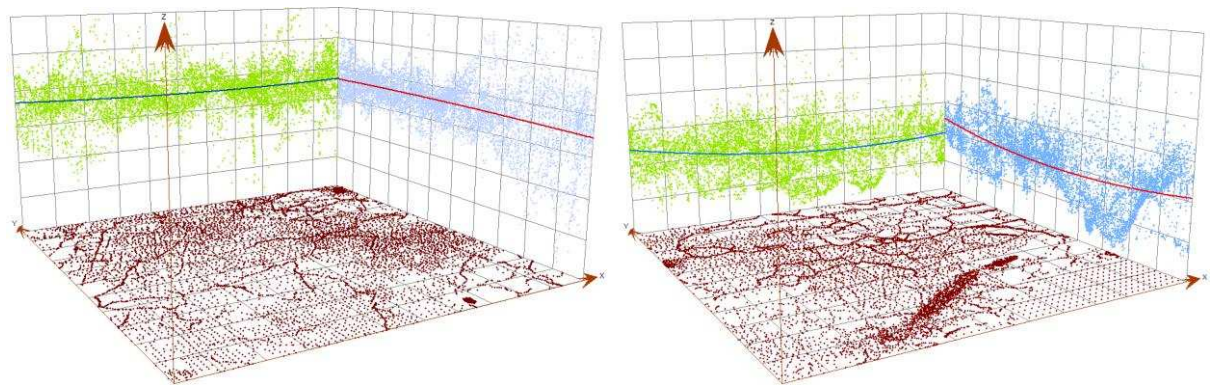


Figura 53. Linhas de tendência para as anomalias residuais das áreas 1 e 2

Os semivariogramas omnidirecionais para as áreas 1 e 2, análise variográfica, estão apresentados nas figuras 54 e 55. A utilização deste recurso permite verificar se há ou não dependência espacial, hipótese intrínseca da teoria das variáveis regionalizadas, ou ainda, examinar se as variáveis em estudo são dependentes ou independentes entre si (LANDIM *et al.*, 2002).

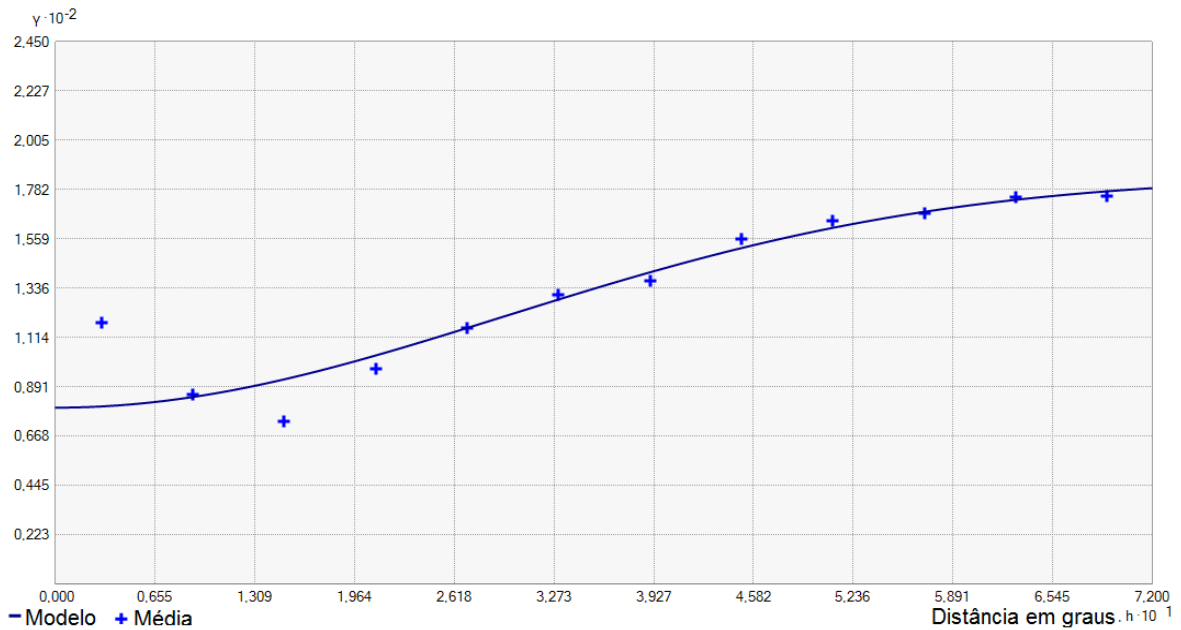


Figura 54. Semivariograma omnidirecional para as amostras de anomalia residual

O semivariograma omnidirecional da Figura 54 foi elaborado aplicando-se a krigagem ordinária. O modelo teórico adotado foi o Gaussiano com os seguintes características: 79,607 mGal² para o efeito pepita, variância estrutural de 104,28 mGal² e alcance de aproximadamente 80060,3 metros. A soma do efeito pepita e da variância estrutural está muito próximo da variância dos dados para a área 1, de 191,792 mGal², conforme Tabela 8. Isso mostra que há consistência no modelo adotado.

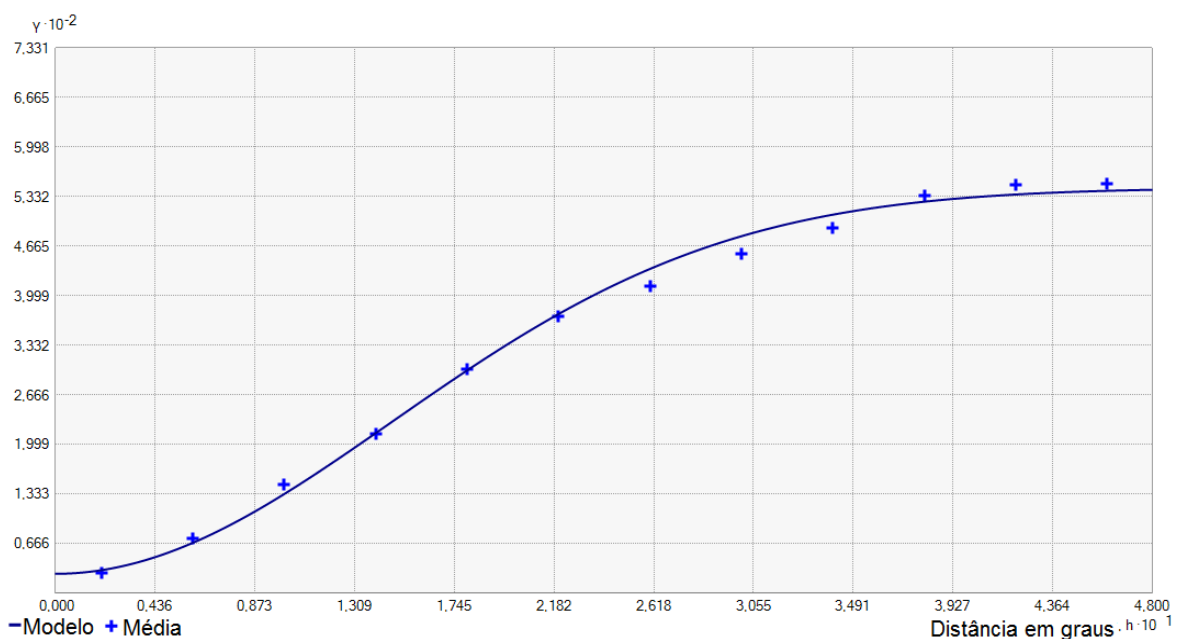


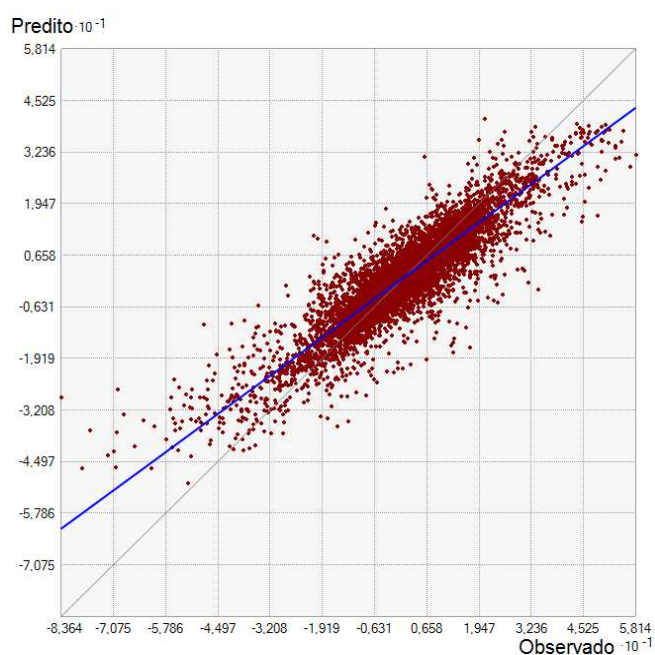
Figura 55. Semivariograma omnidirecional para as amostras de anomalia residual

O semivariograma omnidirecional da Figura 55 também foi elaborado a partir da krigagem ordinária. O modelo teórico adotado foi o gaussiano resultando em um efeito pepita de 25,812 mGal², alcance de 40110,2 metros e variância estrutural de 518,60 mGal². Verifica-se que o resultado da soma de 25,812mGal² e 518,60 mGal² é um valor muito próximo da variância de 538,80mGal² para os dados da área 2, como mostra a Tabela 8.

Para quantificar as incertezas no processo de predição foi utilizada a validação cruzada. Assim, foram obtidas para cada valor de anomalia residual “observada” um valor predito que leva em consideração a variabilidade espacial em função das distancias entre os pontos amostrados conforme o variograma correspondente. A partir do conhecimento dos valores observados e preditos pode-se determinar: o erro médio (EM), raiz quadrada do erro médio (RMS), raiz quadrada do erro médio padronizado (RMSS), o coeficientes “a” e o intercepto “b” da reta resultante da regressão linear entre os valores observados e preditos, Figura 56. Esses resultados estatísticos avaliam a qualidade da predição para as duas amostras de anomalia residual e estão apresentados na Tabela 9.

Tabela 9. Resultados da validação cruzada para krigagem ordinária

Anomalias Residuais	RMS (mGal)	EM (mGal)	RMSS	“a”	“b”(mGal)
Área 1	6,269	-0,049	0,675	0,741	0,285
Área 2	7,659	0,142	1,300	0,924	-0,164



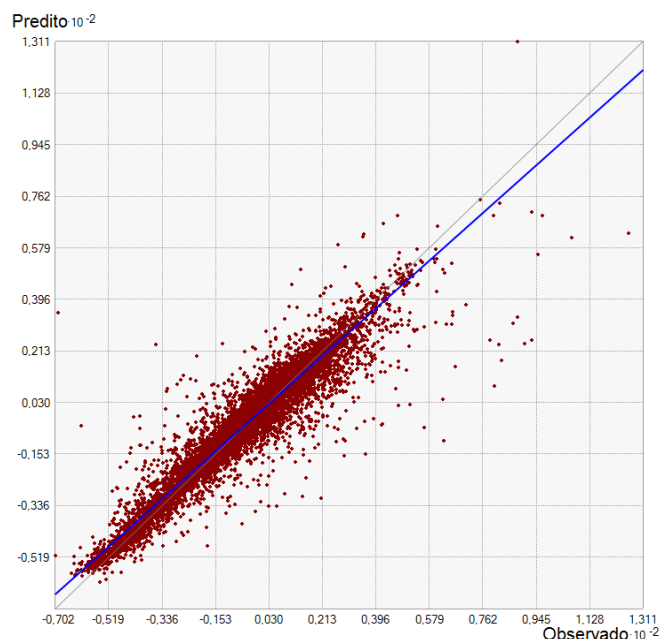


Figura 56. Resultado da validação cruzada para as anomalias residuais para as duas áreas

Na análise dos resultados apresentados na tabela 9 verifica-se que os valores do RMS são semelhantes para as duas áreas estudadas e nos dois casos o valor do coeficiente “a” ficou próximo da unidade mostrando que o modelo foi bem ajustado e é um bom estimador. Outro parâmetro importante é o RMSS. No caso da área 1 se está superestimando a variabilidade da predição, $RMSS < 1$, enquanto para a área 2 se está subestimando a variabilidade da predição, $RMSS > 1$.

A partir da aplicação dos métodos de predição foi determinado o erro absoluto entre o valor predito e o observado e também sua variância. Com o uso destes valores pode-se detectar valores suspeitos de conter erros grosseiros conforme equação 119. Assim, do total de 8257 observações da área 1, 395 amostras foram consideradas suspeitas de possuírem erros grosseiro e para a área 2, do total de 8049 observações, 346 foram consideradas amostras suspeitas de conterem erros grosseiros. Esses valores foram retirados para ser aplicada nova estimação com a CMQ e com a geoestatística.

4.2.1.9 – Cálculo do valor do N-residual usando as anomalias de Faye

Para calcular o valor da ondulação geoidal residual, N_{res} utiliza-se a integral de Stokes aplicada sobre uma malha regular com valores das anomalias residuais

interpoladas. Na Tabela 10 estão os resultados para N_{res} usando o total de 8257 observações.

Tabela 10. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto completo de anomalias Faye residuais interpoladas com a CMQ e com a geoestatística para a Área 1.

Estacao	Latitude	Longitude	$N_{residual}$ (m) krigagem	$N_{residual}$ (m) CMQ
3096T	-22,28523956	-49,49150672	0,352	0,353
3096C	-22,21803308	-49,69218044	0,505	0,501
3095U	-22,22617369	-49,79195347	0,471	0,470
3128J	-22,20926689	-49,96347419	0,282	0,278
3245V	-22,29973756	-50,02583825	0,133	0,130
3245G	-22,43186619	-50,20997586	-0,045	-0,046
3245B	-22,52526183	-50,28872217	-0,140	-0,143
3244V	-22,59912694	-50,36430489	-0,139	-0,139
3057C	-22,69558067	-50,29274286	-0,117	-0,117
3056U	-22,74815686	-50,18675481	-0,015	-0,016
3056M	-22,80818911	-50,07308731	0,071	0,072
3055F	-22,99297936	-49,86527836	0,097	0,099
1586A	-23,04041731	-50,07441939	-0,082	-0,079
1586X	-23,11626353	-50,37355397	-0,083	-0,095
1586L	-23,05231364	-50,22972961	-0,181	-0,182
1591U	-23,16082461	-49,97517500	-0,011	-0,005
3054N	-23,04602594	-49,70349208	0,240	0,241
3054H	-23,05439958	-49,62629411	0,294	0,297
3031Z	-23,17377944	-49,53488939	0,331	0,337
3032D	-23,13143594	-49,49645544	0,310	0,314
3077G	-22,73169208	-49,46233578	0,238	0,241
IAG_ASSIS	-22,66209700	-50,42082700	-0,159	-0,159
IAG_SALTGRAN	-22,89296000	-49,98613600	0,059	0,060
IAG_BERNC	-23,09981300	-49,49385800	0,328	0,331
IAG_UBIRA	-22,52427900	-49,66386500	0,261	0,261
3097R	-22,33520592	-49,18762106	-0,013	-0,015
3097H	-22,33693947	-49,29363361	0,107	0,107
3097C	-22,32902322	-49,38996494	0,241	0,241

Comparando-se os resultados da ondulação residual apresentados na Tabela 10 verifica-se que, independentemente do método de predição adotado, os valores residuais da ondulação geoidal são muito semelhantes. Para os dois conjuntos de dados, 8257 observações, obteve-se valor mínimo de -0,180 m, máximo de 0,500 m e média de 0,100 metros para N_{res} .

Tabela 11. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto suavizado de anomalias Faye residuais interpoladas com a CMQ e com a geoestatística para a Área 1.

Estacao	Latitude	Longitude	N_residual (m) Krigagem	N_residual (m) CMQ
3096T	-22,28523956	-49,49150672	0,397	0,352
3096C	-22,21803308	-49,69218044	0,513	0,504
3095U	-22,22617369	-49,79195347	0,460	0,471
3128J	-22,20926689	-49,96347419	0,321	0,280
3245V	-22,29973756	-50,02583825	0,170	0,132
3245G	-22,43186619	-50,20997586	-0,072	-0,045
3245B	-22,52526183	-50,28872217	-0,124	-0,141
3244V	-22,59912694	-50,36430489	-0,150	-0,138
3057C	-22,69558067	-50,29274286	-0,142	-0,117
3056U	-22,74815686	-50,18675481	-0,058	-0,016
3056M	-22,80818911	-50,07308731	0,018	0,071
3055F	-22,99297936	-49,86527836	0,108	0,095
1586A	-23,04041731	-50,07441939	-0,055	-0,084
1586X	-23,11626353	-50,37355397	-0,124	-0,087
1586L	-23,05231364	-50,22972961	-0,182	-0,186
1591U	-23,16082461	-49,97517500	0,023	-0,012
3054N	-23,04602594	-49,70349208	0,254	0,236
3054H	-23,05439958	-49,62629411	0,296	0,293
3031Z	-23,17377944	-49,53488939	0,356	0,328
3032D	-23,13143594	-49,49645544	0,369	0,309
3077G	-22,73169208	-49,46233578	0,294	0,239
IAG_ASSIS	-22,66209700	-50,42082700	-0,176	-0,158
IAG_SALTGRAN	-22,89296000	-49,98613600	0,049	0,057
IAG_BERNC	-23,09981300	-49,49385800	0,376	0,327
IAG_UBIRA	-22,52427900	-49,66386500	0,309	0,260
3097R	-22,33520592	-49,18762106	-0,017	-0,013
3097H	-22,33693947	-49,29363361	0,125	0,106
3097C	-22,32902322	-49,38996494	0,266	0,240

Da Tabela 11 verifica-se que para as anomalias residuais de Faye, retirados os valores considerados suspeitos de conter erros grosseiros, foi obtida ondulação geoidal residual mínima de -0,182 m e - 0,186 m, valores máximos de 0,513 m e 0,504 m e média de 0,128 m e 0,117 m para os dois métodos Krigagem e CMQ, respectivamente

Na comparação entre os resultados apresentados nas Tabelas 10 e 11 verifica-se que a maior variação de N_{res} , depois da retirada dos valores considerados como

suspeitos de erros grosseiros para a área 1, ocorreu entre os valores obtidos pela krigagem.

Os resultados para a área 2 estão apresentados nas tabelas 12 e 13.

Tabela 11. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto completo de anomalias Faye residuais interpoladas com a CMQ e com a geostatística para a Área 2.

Estacao	Latitude	Longitude	N_residual (m) krigagem	N_residual (m) CMQ
3300G	-21,26572380	-44,96267044	-0,639	-0,620
3049U	-21,15805800	-45,00963933	-0,567	-0,546
3042T	-21,19127752	-45,06251666	-0,486	-0,527
3042U	-21,18764541	-45,05917300	-0,473	-0,491
3045G	-21,21818775	-45,12792083	-0,369	-0,388
2386N	-21,22981036	-45,25125952	-0,090	-0,105
2386V	-21,17803511	-45,26687225	-0,063	-0,099
3045B	-21,23961700	-45,21950625	-0,167	-0,170
2386B	-21,24319708	-45,41328236	0,238	0,180
2389M	-21,18983286	-45,44084191	0,214	0,197
2386G	-21,24174861	-45,32184886	0,070	0,042
2385T	-21,24987161	-45,50639133	0,314	0,256
3257M	-21,18984247	-45,53109250	0,274	0,237
2385G	-21,37132997	-45,48975583	0,340	0,300
2384U	-21,47824697	-45,50420672	0,338	0,320
2384J	-21,56513169	-45,43702477	0,233	0,223
2384D	-21,63008727	-45,41080380	0,033	0,049
2383Z	-21,66242111	-45,34742011	-0,181	-0,181
3317A	-21,42469061	-45,94772844	0,381	0,371
3316S	-21,54825711	-45,92970925	0,418	0,425
3316M	-21,62813372	-45,92021216	0,227	0,229
3316H	-21,69052897	-45,89896094	0,043	0,050
2805E	-21,80680830	-45,42474275	-0,469	-0,541
2805F	-21,82497761	-45,41489041	-0,550	-0,527
111Z	-21,85287455	-45,29563077	-0,612	-0,592
2804E	-22,04327297	-45,69972297	-1,101	-1,096
IAG	-21,42856900	-45,94724800	0,388	0,380
IAG	-21,68348000	-45,26494100	-0,358	-0,357
IAG	-21,23041300	-45,04294500	-0,488	-0,485

Nos resultados da Tabela 12 verificam-se valores mínimos de N_{res} de -1,101 m e -1,096 m, máximos de 0,418 m e 0,425 m e desvio da média de -0,107 m e -0,119 m para a Krigagem e a CMQ, respectivamente. Entre os dois métodos verifica-se que

a diferença máxima de ondulação residual, em termos absolutos, foi de 0,070 metros com valor média da diferença absoluta de 0,046 metros.

Tabela 13. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto suavizado de anomalias Faye residuais interpoladas com a CMQ e com a geoestatística para a Área 2.

Estacao	Latitude	Longitude	N_residual (m)	N_residual (m)
			GeoFis	CMQ
3300G	-21,26572380	-44,96267044	-0,657	-0,640
3049U	-21,15805800	-45,00963933	-0,574	-0,556
3042T	-21,19127752	-45,06251666	-0,492	-0,541
3042U	-21,18764541	-45,05917300	-0,479	-0,503
3045G	-21,21818775	-45,12792083	-0,376	-0,391
2386N	-21,22981036	-45,25125952	-0,098	-0,106
2386V	-21,17803511	-45,26687225	-0,070	-0,102
3045B	-21,23961700	-45,21950625	-0,174	-0,170
2386B	-21,24319708	-45,41328236	0,221	0,197
2389M	-21,18983286	-45,44084191	0,202	0,220
2386G	-21,24174861	-45,32184886	0,057	0,049
2385T	-21,24987161	-45,50639133	0,296	0,294
3257M	-21,18984247	-45,53109250	0,260	0,276
2385G	-21,37132997	-45,48975583	0,311	0,306
2384U	-21,47824697	-45,50420672	0,303	0,325
2384J	-21,56513169	-45,43702477	0,184	0,247
2384D	-21,63008727	-45,41080380	-0,025	0,059
2383Z	-21,66242111	-45,34742011	-0,229	-0,180
3317A	-21,42469061	-45,94772844	0,382	0,390
3316S	-21,54825711	-45,92970925	0,409	0,433
3316M	-21,62813372	-45,92021216	0,215	0,224
3316H	-21,69052897	-45,89896094	0,027	0,052
2805E	-21,80680830	-45,42474275	-0,523	-0,541
2805F	-21,82497761	-45,41489041	-0,604	-0,533
111Z	-21,85287455	-45,29563077	-0,664	-0,598
2804E	-22,04327297	-45,69972297	-1,164	-1,100
IAG	-21,42856900	-45,94724800	0,389	0,397
IAG	-21,68348000	-45,26494100	-0,397	-0,359
IAG	-21,23041300	-45,04294500	-0,499	-0,487

Os dados da Tabela 13 mostram valores mínimos de -1,164 m e -1,100 m, máximos de 0,409 m e 0,433 m e média de -0,130 m e -0,115 m para a Krigagem e a CMQ, respectivamente. Verifica-se ainda que a maior discrepância entre o valor

obtido pela CMQ e pela geoestatística é de 0,084 metros e que a média das diferenças absolutas entre os resultados obtidos pelos dois métodos é de 0,058 metros.

Conforme se verifica nos resultados apresentados nas tabelas 10, 11, 12 e 13 os dois métodos de predição, a CMQ e a geoestatística, são ferramentas que apresentam resultados semelhantes na preparação da malha regular de anomalias residuais de Faye estimadas para a determinação da ondulação residual.

4.2.1.10 – Cálculo do valor do N-residual usando as anomalias residuais de Bouguer e Rudzki

Diante dos resultados obtidos nos itens 4.2.1. 7, 4.2.1.8 e 4.2.19 constatou-se que a geoestatística é capaz de detectar com maior rigor as observações consideradas suspeitas. Verificou-se também que, tanto para os dados completos quanto para aqueles sem observações suspeitas de erros grosseiros, todos os pressupostos importantes para este método são atendidos, não normalidade dos dados, a inexistência de tendência e, de forma clara, a dependência espacial conforme se percebe nos semivariogramas omnidirecionais às Figuras 54 e 55. Diante do exposto, para as anomalias residuais de Bouguer e Rudzki, optou-se por adotar a estimação por geoestatística e de se usar todos os dados.

Na Tabela 14 estão os resultados de N_{res} da área 1 para o total de 8257 observações e aplicação da geoestatística como método de predição.

Tabela 14. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto de anomalias de Bouguer e Rudzki residuais preditas com a geoestatística para a Área 1.

Estacao	Latitude	Longitude	N_residual (m)	
			Bouguer	Rudzki
3096T	-22,28523956	-49,49150672	0,251	0,224
3096C	-22,21803308	-49,69218044	0,376	0,336
3095U	-22,22617369	-49,79195347	0,333	0,291
3128J	-22,20926689	-49,96347419	0,199	0,128
3245V	-22,29973756	-50,02583825	0,056	0,010
3245G	-22,43186619	-50,20997586	-0,137	-0,160
3245B	-22,52526183	-50,28872217	-0,221	-0,193
3244V	-22,59912694	-50,36430489	-0,240	-0,212
3057C	-22,69558067	-50,29274286	-0,215	-0,175
3056U	-22,74815686	-50,18675481	-0,109	-0,086
3056M	-22,80818911	-50,07308731	-0,057	-0,016

3055F	-22,99297936	-49,86527836	-0,043	0,049
1586A	-23,04041731	-50,07441939	-0,161	-0,110
1586X	-23,11626353	-50,37355397	-0,040	-0,125
1586L	-23,05231364	-50,22972961	-0,232	-0,221
1591U	-23,16082461	-49,97517500	-0,116	-0,059
3054N	-23,04602594	-49,70349208	0,094	0,179
3054H	-23,05439958	-49,62629411	0,117	0,212
3031Z	-23,17377944	-49,53488939	0,178	0,256
3032D	-23,13143594	-49,49645544	0,141	0,255
3077G	-22,73169208	-49,46233578	0,083	0,168
IAG_ASSIS	-22,66209700	-50,42082700	-0,231	-0,224
IAG_SALTGRAN	-22,89296000	-49,98613600	-0,065	0,006
IAG_BERNC	-23,09981300	-49,49385800	0,142	0,264
IAG_UBIRA	-22,52427900	-49,66386500	0,135	0,189
3097R	-22,33520592	-49,18762106	-0,101	-0,066
3097H	-22,33693947	-49,29363361	0,012	0,028
3097C	-22,32902322	-49,38996494	0,129	0,126

Na análise dos resultados da Tabela 14 foram obtidas para a diferença absoluta entre o N_residual de Bouguer e o de Rudzki o valor mínimo de 0,003 m, máximo de 0,122 m e média de 0,053 m. Embora a discrepância máxima seja de 12 cm a média mostra boa aderência entre as duas reduções aplicadas para a área 1. Ainda pela Tabela 14 verifica-se valores de N_residual máximos de 0,510 m e 0,520 m e média de 0,183 m e 0,159 m para Bouguer e Rudzki, respectivamente.

Tabela 15. Ondulação residual calculada pelo programa GeoFis 1.0 usando o conjunto de anomalias de Bouguer e Rudzki residuais previstas com a geoestatística para a Área 2.

Estacao	Latitude	Longitude	N_residual (m)	
			Bouguer	Rudzki
3300G	-21,26572380	-44,96267044	-0,414	0,173
3049U	-21,15805800	-45,00963933	-0,403	0,141
3042T	-21,19127752	-45,06251666	-0,365	0,072
3042U	-21,18764541	-45,05917300	-0,354	0,078
3045G	-21,21818775	-45,12792083	-0,283	0,058
2386N	-21,22981036	-45,25125952	-0,117	0,088
2386V	-21,17803511	-45,26687225	-0,154	0,020
3045B	-21,23961700	-45,21950625	-0,145	0,110
2386B	-21,24319708	-45,41328236	0,144	0,164
2389M	-21,18983286	-45,44084191	0,095	0,071
2386G	-21,24174861	-45,32184886	-0,004	0,138
2385T	-21,24987161	-45,50639133	0,189	0,169

3257M	-21,18984247	-45,53109250	0,128	0,055
2385G	-21,37132997	-45,48975583	0,285	0,342
2384U	-21,47824697	-45,50420672	0,310	0,492
2384J	-21,56513169	-45,43702477	0,284	0,570
2384D	-21,63008727	-45,41080380	0,115	0,479
2383Z	-21,66242111	-45,34742011	-0,094	0,362
3317A	-21,42469061	-45,94772844	0,261	0,453
3316S	-21,54825711	-45,92970925	0,325	0,692
3316M	-21,62813372	-45,92021216	0,112	0,576
3316H	-21,69052897	-45,89896094	-0,095	0,460
2805E	-21,80680830	-45,42474275	-0,289	0,267
2805F	-21,82497761	-45,41489041	-0,360	0,270
111Z	-21,85287455	-45,29563077	-0,484	0,227
2804E	-22,04327297	-45,69972297	-0,762	0,220
IAG	-21,42856900	-45,94724800	0,269	0,472
IAG	-21,68348000	-45,26494100	-0,274	0,227
IAG	-21,23041300	-45,04294500	-0,337	0,129

Da Tabela 15 derivam os resultados da anomalia residual de Bouguer e Rudzki para a área 2. Foram obtidos valores absolutos mínimos de 0,762 m e 0,020 m, máximos de 0,325 m e 0,692 m e média de 0,083 m e 0,261 m para os respectivos métodos. Diferentemente dos resultados para a área 1, aqui ocorreu significativa diferença na aplicação dos dois métodos de redução.

4.2.3 – Cálculo do valor do N usando os coeficientes do MGG EIGEN6C4 grau 200

Os valores da ondulação geoidal, derivados dos coeficientes do modelo geopotencial global EIGEN6C4 grau 200, estão discriminados na Tabela 16, área 1, e Tabela 17, área 2.

Tabela 16. Valores da ondulação geoidal na área 1 para o modelo geopotencial

Estações	Latitude (graus)	Longitude (graus)	Altitude (metros)	N _{MGG} (metros)
3096T	-22,285239560	-49,491506720	626,8638	-6,160
3096C	-22,218033080	-49,692180440	649,836	-6,244
3095U	-22,226173690	-49,791953470	619,4512	-6,225
3128J	-22,209266890	-49,963474190	650,0697	-6,202
3245V	-22,299737560	-50,025838250	443,8416	-6,099
3245G	-22,431866190	-50,209975860	679,186	-5,913
3245B	-22,525261830	-50,288722170	536,4583	-5,792
3244V	-22,599126940	-50,364304890	534,2072	-5,678

3057C	-22,695580670	-50,292742860	492,3694	-5,613
3056U	-22,748156860	-50,186754810	531,6773	-5,596
3056M	-22,808189110	-50,073087310	484,002	-5,545
3055F	-22,992979360	-49,865278360	474,8591	-5,200
1586A	-23,040417310	-50,074419390	442,5542	-5,053
1586X	-23,116263530	-50,373553970	412,8897	-4,727
1586L	-23,052313640	-50,229729610	478,9768	-4,975
1591U	-23,160824610	-49,975175000	488,3228	-4,698
3054N	-23,046025940	-49,703492080	552,5101	-5,055
3054H	-23,054399580	-49,626294110	574,4615	-5,023
3031Z	-23,173779440	-49,534889390	616,0661	-4,658
3032D	-23,131435940	-49,496455440	505,8987	-4,788
3077G	-22,731692080	-49,462335780	561,5759	-5,615
IAG_ASSIS	-22,662097000	-50,420827000	569,725	-5,575
IAG_SALTGRAND	-22,892960000	-49,986136000	396,857	-5,412
IAG_BERNC	-23,099813000	-49,493858000	638,334	-4,879
IAG_UBIRAJARA	-22,524279000	-49,663865000	482,587	-5,921
3097R_FORA	-22,335205920	-49,187621060	468,4059	-6,041
3097H_FORA	-22,336939470	-49,293633610	568,1735	-6,060
3097C_FORA	-22,329023220	-49,389964940	601,8702	-6,091

Tabela 17. Valores da ondulação geoidal na área 2 para o modelo geopotencial

Estações	Latitude (graus)	Longitude (graus)	Altitude (metros)	N _{MGG} (metros)	
3300G	-21,26572380560	-44,96267044440	896,30670	892,800	-3,492
3049U	-21,15805800000	-45,00963933330	895,27490	891,270	-3,779
3042T	-21,19127752780	-45,06251666670	792,47050	788,310	-3,86
3042U	-21,18764541670	-45,05917300000	808,50850	804,740	-3,858
3045G	-21,21818775000	-45,12792083330	849,23180	845,090	-3,975
2386N	-21,22981036110	-45,25125952780	803,95910	799,850	-4,241
2386V	-21,17803511110	-45,26687225000	806,26020	802,040	-4,398
3045B	-21,23961700000	-45,21950625000	872,22660	868,190	-4,148
2386B	-21,24319708330	-45,41328236110	881,38170	877,200	-4,527
2389M	-21,18983286110	-45,44084191670	850,17830	845,800	-4,721
2386G	-21,24174861110	-45,32184886110	827,88240	823,930	-4,362
2385T	-21,24987161110	-45,50639133330	828,78450	824,610	-4,649
3257M	-21,18984247220	-45,53109250000	805,17720	800,850	-4,858
2385G	-21,37132997220	-45,48975583330	920,60660	916,850	-4,271
2384U	-21,47824697220	-45,50420672220	836,11140	833,000	-3,969
2384J	-21,56513169440	-45,43702477780	917,72320	914,470	-3,662
2384D	-21,63008727780	-45,41080380560	881,21200	877,940	-3,464
2383Z	-21,66242111110	-45,34742011110	844,99450	841,700	-3,336
3317A	-21,42469061110	-45,94772844440	880,76770	877,060	-4,291
3316S	-21,54825711110	-45,92970925000	887,40900	883,510	-3,892
3316M	-21,62813372220	-45,92021216670	807,54890	804,420	-3,637
3316H	-21,69052897220	-45,89896094440	822,13270	819,020	-3,438
2805E	-21,80680830560	-45,42474275000	876,03680	873,130	-3,015

2805F	-21,82497761110	-45,41489041670	871,06100	868,130	-2,969
111Z	-21,85287455560	-45,29563077780	950,93380	947,870	-2,885
2804E	-22,04327297220	-45,69972297220	811,28210	808,330	-2,438
IAG	-21,42856900000	-45,94724800000	879,72500	876,120	-4,279
IAG	-21,68348000000	-45,26494100000	884,23500	881,010	-3,225
IAG	-21,23041300000	-45,04294500000	906,68300	902,710	-3,742

Os valores das tabelas 16 e 17 foram obtidos com base na equação 106. Nesta equação o termo N_0 foi calculado segundo Heiskanen and Moritz (1967):

$$N_0 = \Delta a - \frac{1}{3} a \Delta f \quad (120)$$

Onde Δa é a diferença entre o semi eixo do elipsoide usado na determinação do MGG e o semi eixo do elipsoide do modelo de referência, GRS80, e Δf é a diferença entre o achatamento dos dois modelos já citados.

4.2.4 – Resultados para as componentes do efeito indireto

A distorção no potencial que ocorre devido a remoção das massas faz surgir o denominado efeito indireto. A partir do cogeóide, superfície obtida ao término das reduções gravimétricas e da ondulação geoidal devido ao efeito indireto, pode-se obter o geóide. Esse efeito é determinado pela aplicação da equação de Bruns à variação do geopotencial (MARTINEC, VANICEK, 1994): $N_{EI} = \partial W / \gamma$

O cálculo do efeito indireto, para os pontos de referência, foi realizado usando o GeoFis1.0. Nas Tabelas 18 e 19 estão os resultados da ondulação geoidal referente à alteração do potencial devido à remoção ou deslocamento das massas.

Tabela 18. Valores da ondulação geoidal na área 1 para o efeito indireto

Estações	Latitude (graus)	Longitude (graus)	Altitude (metros)	N_{EI} (metros)
3096T	-22,285239560	-49,491506720	626,8638	-0,0155
3096C	-22,218033080	-49,692180440	649,836	-0,0150
3095U	-22,226173690	-49,791953470	619,4512	-0,0149
3128J	-22,209266890	-49,963474190	650,0697	-0,0147
3245V	-22,299737560	-50,025838250	443,8416	-0,0151
3245G	-22,431866190	-50,209975860	679,186	-0,0157
3245B	-22,525261830	-50,288722170	536,4583	-0,0161
3244V	-22,599126940	-50,364304890	534,2072	-0,0164
3057C	-22,695580670	-50,292742860	492,3694	-0,0171

3056U	-22,748156860	-50,186754810	531,6773	-0,0176
3056M	-22,808189110	-50,073087310	484,002	-0,0181
3055F	-22,992979360	-49,865278360	474,8591	-0,0196
1586A	-23,040417310	-50,074419390	442,5542	-0,0197
1586X	-23,116263530	-50,373553970	412,8897	-0,0198
1586L	-23,052313640	-50,229729610	478,9768	-0,0196
1591U	-23,160824610	-49,975175000	488,3228	-0,0207
3054N	-23,046025940	-49,703492080	552,5101	-0,0201
3054H	-23,054399580	-49,626294110	574,4615	-0,0202
3031Z	-23,173779440	-49,534889390	616,0661	-0,0210
3032D	-23,131435940	-49,496455440	505,8987	-0,0207
3077G	-22,731692080	-49,462335780	561,5759	-0,0180
IAG_ASSIS	-22,662097000	-50,420827000	569,725	-0,0167
IAG_SALTGRAN	-22,892960000	-49,986136000	396,857	-0,0188
IAG_BERNC	-23,099813000	-49,493858000	638,334	-0,0205
IAG_UBIRAJARA	-22,524279000	-49,663865000	482,587	-0,0167
3097R_FORA	-22,335205920	-49,187621060	468,4059	-0,0158
3097H_FORA	-22,336939470	-49,293633610	568,1735	-0,0159
3097C_FORA	-22,329023220	-49,389964940	601,8702	-0,0158

Como se verifica na Tabela 18 os valores obtidos para o efeito indireto na área 1 não ultrapassam, em termos absolutos, 2,1 cm com média de 1,7 cm.

Tabela 18. Valores da ondulação geoidal na área 2 para o efeito indireto

Estações	Latitude (graus)	Longitude (graus)	Altitude (metros)	N _{MGG} (metros)	
3300G	-21,26572380560	-44,96267044440	896,30670	892,800	-0,056
3049U	-21,15805800000	-45,00963933330	895,27490	891,270	-0,055
3042T	-21,19127752780	-45,06251666670	792,47050	788,310	-0,055
3042U	-21,18764541670	-45,05917300000	808,50850	804,740	-0,055
3045G	-21,21818775000	-45,12792083330	849,23180	845,090	-0,056
2386N	-21,22981036110	-45,25125952780	803,95910	799,850	-0,056
2386V	-21,17803511110	-45,26687225000	806,26020	802,040	-0,055
3045B	-21,23961700000	-45,21950625000	872,22660	868,190	-0,056
2386B	-21,24319708330	-45,41328236110	881,38170	877,200	-0,055
2389M	-21,18983286110	-45,44084191670	850,17830	845,800	-0,055
2386G	-21,24174861110	-45,32184886110	827,88240	823,930	-0,055
2385T	-21,24987161110	-45,50639133330	828,78450	824,610	-0,055
3257M	-21,18984247220	-45,53109250000	805,17720	800,850	-0,054
2385G	-21,37132997220	-45,48975583330	920,60660	916,850	-0,057
2384U	-21,47824697220	-45,50420672220	836,11140	833,000	-0,058
2384J	-21,56513169440	-45,43702477780	917,72320	914,470	-0,059
2384D	-21,63008727780	-45,41080380560	881,21200	877,940	-0,060
2383Z	-21,66242111110	-45,34742011110	844,99450	841,700	-0,061
3317A	-21,42469061110	-45,94772844440	880,76770	877,060	-0,056
3316S	-21,54825711110	-45,92970925000	887,40900	883,510	-0,057

3316M	-21,62813372220	-45,92021216670	807,54890	804,420	-0,057
3316H	-21,69052897220	-45,89896094440	822,13270	819,020	-0,058
2805E	-21,80680830560	-45,42474275000	876,03680	873,130	-0,063
2805F	-21,82497761110	-45,41489041670	871,06100	868,130	-0,063
111Z	-21,85287455560	-45,29563077780	950,93380	947,870	-0,064
2804E	-22,04327297220	-45,69972297220	811,28210	808,330	-0,063
IAG	-21,42856900000	-45,94724800000	879,72500	876,120	-0,056
IAG	-21,68348000000	-45,26494100000	884,23500	881,010	-0,062
IAG	-21,23041300000	-45,04294500000	906,68300	902,710	-0,056

Para a área 2, Tabela 19, o maior valor absoluto encontrado para o efeito indireto foi de 6,4 centímetros e média alcançada foi de 5,8 cm.

Na análise conjunta dos resultados apresentados nas Tabelas 18 e 19 verifica-se forte impacto, mais do que 50% de influência, no co-geóide da área 2 em relação a área 1.

4.2.5 – Ondulação geoidal para as áreas de estudo

A ondulação geoidal gravimétrica é obtida pela soma das três parcelas, N_{res} , N_{MGG} e N_{EI} . Para avaliar a acurácia da ondulação geoidal gravimétrica pode-se fazer uma comparação externa com ondulações geoidais obtidas com GNSS e nivelamento geométrico. Em relação a este método a ondulação geométrica do geóide é obtida pela diferença entre a altitude geométrica, GNSS, e ortométrica obtida com nivelamento geométrico. Vale ressaltar que estas ondulações, diferentemente daquelas obtidas a partir de modelos globais, referem-se a um datum vertical local.

Foram coletados durante campanha de campo 28 posições de controle, GNSS sobre RRNN, para a área 1 e 29 para a área 2, distribuídas conforme a rede de referência altimétrica brasileira materializada. A distribuição dos pontos de controle, GNSS/RRNN, estão apresentadas na Figura 57.

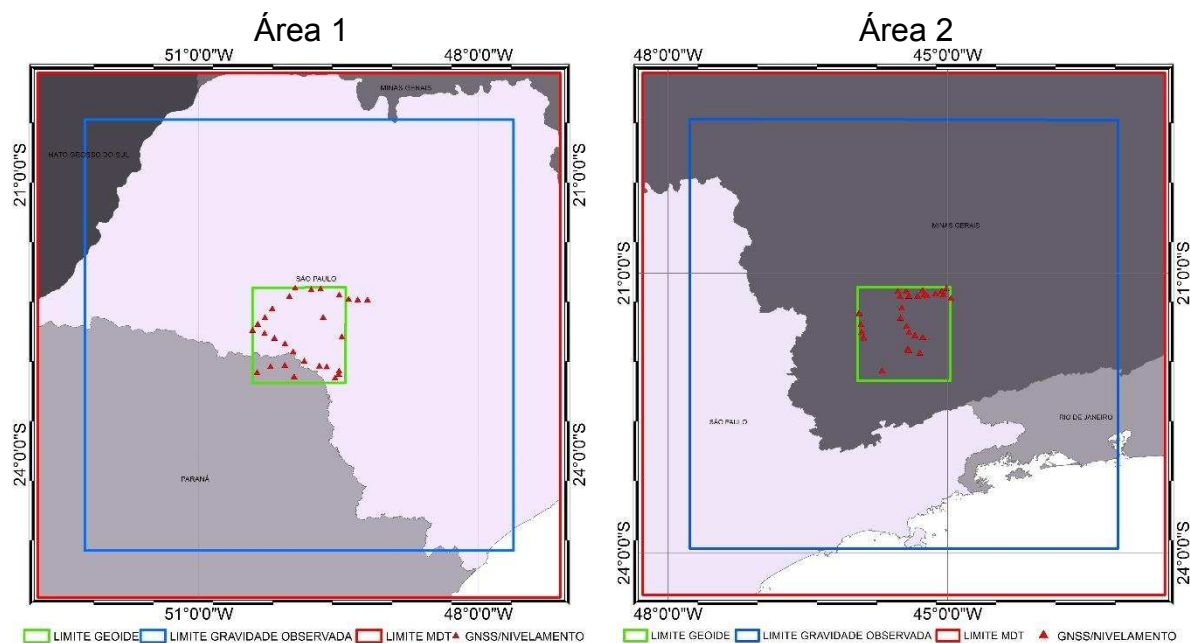


Figura 57. Distribuição de pontos de controle, GNSS/NIVELAMENTO

O programa GeoFis 1.0 permite calcular as parcelas da ondulação geoidal diretamente sobre as estações de controle, com exceção da parcela referente ao efeito indireto que precisa ser interpolada. Somando-se os valores obtidos para as parcelas componentes da ondulação: N_{res} , N_{MGG} e N_{EI} , pode-se comparar a ondulação geoidal total, N , com os valores de referência, $N_{GNSS/NIVEL}$ e $N_{MAPGEO2015}$. As Tabelas 20 e 21 mostram as ondulações obtidas para área 1.

Tabela 20. Resultado para a ondulação geoidal para a área 1 e o correspondente resíduo.

Estação	MAPGEO 2015 (m)	GNSS/ NIV (m)	N total (metros)			Resíduo (metros) Módulo (GNSS/NIVEL-N)			Resíduo (metros) Módulo (MAPGEO-N)		
			Faye	Bouguer	Rudzki	Faye- Ref	Bouguer- Ref	Rudzki-ref	Faye- MAPGEO	Bouguer- MAPGEO	Rudzki- MAPGEO
3096T	-5,87	-5,914	-5,824	-5,909	-5,936	0,090	0,005	0,022	0,046	0,039	0,066
3096C	-5,89	-5,696	-5,754	-5,868	-5,908	0,058	0,172	0,212	0,136	0,022	0,018
3095U	-5,88	-5,521	-5,769	-5,892	-5,934	0,248	0,371	0,413	0,111	0,012	0,054
3128J	-5,95	-6,030	-5,935	-6,003	-6,074	0,095	0,027	0,044	0,015	0,053	0,124
3245V	-5,93	-6,092	-5,981	-6,043	-6,089	0,110	0,049	0,003	0,051	0,113	0,159
3245G	-5,84	-5,546	-5,974	-6,050	-6,073	0,428	0,504	0,527	0,134	0,210	0,233
3245B	-5,72	-5,928	-5,948	-6,013	-5,985	0,020	0,085	0,057	0,228	0,293	0,265
3244V	-5,53	-5,867	-5,833	-5,918	-5,890	0,034	0,051	0,023	0,303	0,388	0,36
3057C	-5,52	-5,759	-5,747	-5,828	-5,788	0,012	0,069	0,029	0,227	0,308	0,268
3056U	-5,39	-5,567	-5,629	-5,705	-5,682	0,061	0,138	0,115	0,239	0,315	0,292
3056M	-5,34	-5,422	-5,492	-5,602	-5,561	0,070	0,180	0,139	0,152	0,262	0,221
3055F	-4,99	-4,909	-5,123	-5,243	-5,151	0,214	0,334	0,242	0,133	0,253	0,161
1586A	-4,88	-4,954	-5,155	-5,214	-5,163	0,201	0,260	0,209	0,275	0,334	0,283
1586X	-4,51	-4,710	-4,830	-4,767	-4,852	0,120	0,057	0,142	0,32	0,257	0,342
1586L	-4,86	-4,987	-5,176	-5,207	-5,196	0,189	0,220	0,209	0,316	0,347	0,336
1591U	-4,49	-4,303	-4,730	-4,814	-4,757	0,427	0,511	0,454	0,240	0,324	0,267
3054N	-4,65	-5,070	-4,835	-4,961	-4,876	0,235	0,109	0,194	0,185	0,311	0,226
3054H	-4,63	-4,532	-4,749	-4,906	-4,811	0,218	0,374	0,280	0,119	0,276	0,181
3031Z	-4,23	-4,286	-4,348	-4,480	-4,402	0,062	0,194	0,116	0,118	0,25	0,172
3032D	-4,39	-4,509	-4,499	-4,647	-4,533	0,010	0,138	0,024	0,109	0,257	0,143
3077G	-5,43	-5,326	-5,395	-5,532	-5,447	0,069	0,206	0,121	0,035	0,102	0,017
IAG_ASSIS	-5,44	-5,849	-5,751	-5,806	-5,799	0,098	0,043	0,050	0,311	0,366	0,359
IAG_SALTGRAN	-5,21	-5,288	-5,372	-5,477	-5,406	0,084	0,189	0,118	0,162	0,267	0,196
IAG_BERNC	-4,50	-4,431	-4,572	-4,737	-4,615	0,140	0,306	0,184	0,072	0,237	0,115
IAG_UBIRAJARA	-5,74	-6,061	-5,677	-5,786	-5,732	0,384	0,275	0,329	0,063	0,046	0,008
3097R	-5,90	-6,036	-6,070	-6,142	-6,107	0,034	0,106	0,071	0,170	0,242	0,207
3097H	-5,91	-5,974	-5,969	-6,048	-6,032	0,005	0,075	0,059	0,059	0,138	0,122
3097C	-5,88	-5,890	-5,866	-5,962	-5,965	0,024	0,072	0,075	0,014	0,082	0,085

Na Tabela 21 está o resumo estatístico dos resíduos resultantes da comparação entre o geóide gravimétrico calculado com as duas referências GNSS/NIVELAMENTO e MAPGEO2015 para a área 1.

Tabela 21. Resumo estatístico para os resíduos da ondulação geoidal para a área 1.

	Resíduo (metros)			Resíduo (metros)			MAPGEO -NSS/NIV
	Módulo (GNSS/NIV – N)			Módulo (MAPGEO– N)			
	Faye- Ref	Bouguer- Ref	Rudzki- ref	Faye- MAPGEO	Bouguer- MAPGEO	Rudzki- MAPGEO	
Máximo	0,428	0,511	0,527	0,320	0,388	0,360	0,420
Mínimo	0,005	0,005	0,003	0,014	0,012	0,008	0,010
Média	0,134	0,183	0,159	0,155	0,218	0,189	0,169
Desvio	0,122	0,140	0,138	0,096	0,115	0,105	0,116
Variância	0,015	0,019	0,019	0,009	0,013	0,011	0,013
RMS	0,180	0,229	0,209	0,182	0,246	0,215	0,204

Os resultados apresentados na Tabela 21 referem-se os resíduos absolutos obtidos pela diferença entre o geóide gravimétrico calculado, o geóide geométrico GNSS/NIVELAMENTO e o modelo MAPGEO 2015. No caso dos resíduos absolutos obtidos pela diferença entre o geóide gravimétrico calculado e a referência GNSS/NIVELAMENTO foram obtidos, para o Segundo Método de Condensação de Helmert, resíduo máximo de 0,428 m na estação 3245G e mínimo de 0,005 m na estação 3097H, média de 0,134 metros com desvio padrão de 0,122 m e resíduo médio quadrático, RMS, de 0,180 m. Para a Redução de Bouguer completa foram obtidos: valor máximo de 0,511 m na estação 1591U e mínimo de 0,005 m na estação 3096T, média foi de 0,183 m com desvio de 0,140 m e RMS de 0,229 m. Na aplicação de Rudzki o valor máximo foi 0,527 m na estação, o mínimo foi de 0,003 m na estação 3245V, média de 0,159 com desvio padrão de 0,138 m e RMS de 0,209 metros.

No caso dos resíduos absolutos obtidos pela diferença entre o geóide gravimétrico calculado e a referência MAPGEO 2015 foram obtidos, para o Segundo Método de Condensação de Helmert, valor máximo de 0,320 m na estação 1586X, mínimo de 0,014 m na estação 3097C, média de 0,182 m com desvio padrão de 0,115 m e RMS de 0,182 metros. Para a redução Bouguer foram alcançados valor máximo de 0,388 m para a estação 3244V, mínimo de 0,012 m para a estação 3128J, média de 0,218 com desvio padrão de 0,115 m e RMS de 0,246 m. Na aplicação da redução de Rudzki foram obtidos, máximo de 0,360 m na estação 3244V, mínimo de 0,008 m

na estação IAGUBIRAJARA, média de 0,218 m com desvio padrão de 0,105 e RMS de 0,215.

Além das análises realizadas anteriormente foram comparadas as duas referências entre si, GNSS/NIVELAMENTO com MAPGEO2015. Os resultados alcançados para os resíduos foram valor máximo de 0,420 m na estação 3054N, mínimo de 0,010 m na estação 3097C, média de 0,169 m com desvio padrão de 0,116 m e RMS de 0,204 metros.

Os resultados obtidos para a ondulação geoidal referentes a área 2 estão disponíveis na Tabela 22.

Tabela 22. Resultado para a ondulação geoidal para a área 2 e o correspondente resíduo.

Estação	MAPGEO 2015 (m)	GNSS/ NIV (m)	N total (metros)			Resíduo (metros) Módulo (GNSS/NIV – Nt)			Resíduo (metros) Módulo (MAPGEO– Nt)		
			Faye	Bouguer	Rudzki	Faye- Ref	Bouguer- Ref	Rudzki-ref	Faye- MAPGEO	Bouguer- MAPGEO	Rudzki- MAPGEO
			3300G	-3,90	-3,5067	-4,187	-3,906	-3,319	0,680	0,399	0,188
3049U	-4,05	-4,0049	-4,401	-4,182	-3,638	0,396	0,177	0,367	0,351	0,132	0,412
3042T	-4,10	-4,1605	-4,401	-4,225	-3,788	0,240	0,064	0,373	0,301	0,125	0,312
3042U	-4,10	-3,7685	-4,386	-4,212	-3,780	0,617	0,443	0,011	0,286	0,112	0,320
3045G	-4,14	-4,1418	-4,400	-4,258	-3,917	0,258	0,116	0,225	0,260	0,118	0,223
2386N	-4,23	-4,1091	-4,387	-4,358	-4,153	0,278	0,249	0,044	0,157	0,128	0,077
2386V	-4,38	-4,2202	-4,516	-4,552	-4,378	0,296	0,332	0,158	0,136	0,172	0,002
3045B	-4,17	-4,0366	-4,371	-4,293	-4,038	0,334	0,256	0,001	0,201	0,123	0,132
2386B	-4,34	-4,1817	-4,344	-4,383	-4,363	0,162	0,201	0,181	0,004	0,043	0,023
2389M	-4,56	-4,3783	-4,562	-4,626	-4,650	0,184	0,248	0,272	0,002	0,066	0,090
2386G	-4,27	-3,9524	-4,347	-4,366	-4,224	0,395	0,414	0,272	0,077	0,096	0,046
2385T	-4,42	-4,1745	-4,390	-4,460	-4,480	0,216	0,286	0,306	0,030	0,040	0,060
3257M	-4,68	-4,3272	-4,638	-4,730	-4,803	0,311	0,403	0,476	0,042	0,050	0,123
2385G	-4,01	-3,7566	-3,988	-3,986	-3,929	0,231	0,229	0,172	0,022	0,024	0,081
2384U	-3,71	-3,1114	-3,689	-3,659	-3,477	0,578	0,548	0,366	0,021	0,051	0,233
2384J	-3,48	-3,2532	-3,488	-3,378	-3,092	0,235	0,125	0,161	0,008	0,102	0,388
2384D	-3,41	-3,272	-3,491	-3,349	-2,985	0,219	0,077	0,287	0,081	0,061	0,425
2383Z	-3,39	-3,2945	-3,578	-3,430	-2,974	0,284	0,136	0,320	0,188	0,040	0,416
3317A	-3,98	-3,7077	-3,966	-4,030	-3,838	0,258	0,322	0,130	0,014	0,050	0,142
3316S	-3,58	-3,899	-3,531	-3,567	-3,200	0,368	0,332	0,699	0,049	0,013	0,380
3316M	-3,48	-3,1289	-3,467	-3,525	-3,061	0,338	0,396	0,068	0,013	0,045	0,419
3316H	-3,39	-3,1127	-3,453	-3,533	-2,978	0,340	0,420	0,135	0,063	0,143	0,412
2805E	-3,22	-2,9068	-3,547	-3,304	-2,748	0,640	0,397	0,159	0,327	0,084	0,472
2805F	-3,18	-2,931	-3,582	-3,329	-2,699	0,651	0,398	0,232	0,402	0,149	0,481
111Z	-3,20	-3,0638	-3,561	-3,369	-2,658	0,497	0,305	0,406	0,361	0,169	0,542
2804E	-2,98	-2,9521	-3,602	-3,200	-2,218	0,650	0,248	0,734	0,622	0,220	0,762
IAG	-3,96	-3,605	-3,947	-4,010	-3,807	0,342	0,405	0,202	0,013	0,050	0,153
IAG	-3,41	-3,225	-3,645	-3,499	-2,998	0,420	0,274	0,227	0,235	0,089	0,412
IAG	-4,03	-3,973	-4,286	-4,079	-3,613	0,313	0,106	0,360	0,256	0,049	0,417

Na Tabela 23 está o resumo estatístico dos resíduos resultantes da comparação entre o geóide gravimétrico calculado com as duas referências GNSS/NIVELAMENTO e MAPGEO2015 para a área 2.

Tabela 23. Resumo estatístico para os resíduos da ondulação geoidal para a área 2.

	Resíduo (metros)			Resíduo (metros)			MAPGEO- GNSS/NIV
	Módulo (GNSS/NIV – N)			Módulo (MAPGEO– N)			
	Faye- Ref	Bouguer- Ref	Rudzki- Rref	Faye- MAPGEO	Bouguer- MAPGEO	Rudzki- MAPGEO	
Mínimo	0,162	0,064	0,001	0,002	0,006	0,002	0,002
Máximo	0,680	0,548	0,734	0,622	0,220	0,762	0,599
Média	0,370	0,286	0,260	0,166	0,088	0,294	0,219
Desvio	0,157	0,126	0,173	0,158	0,053	0,195	0,134
Var	0,025	0,016	0,030	0,025	0,003	0,038	0,018
RMS	0,401	0,312	0,310	0,227	0,102	0,351	0,255

No resumo estatístico apresentado na Tabela 23 verifica-se para a diferença absoluta entre o geóide gravimétrico calculado e o geóide geométrico, para o Segundo Método de Condensação de Helmert o valor máximo de 0,680 m na estação 3300G e mínimo de 0,162 m na estação 2386B, média de 0,370 m com desvio de 0,157 m e RMS de 0,401 m. Para a redução de Bouguer foi encontrado valor máximo de 0,548 m na estação 2384U e mínimo de 0,064 m na estação 3042T, média de 0,286 m com desvio padrão de 0,126 m e RMS de 0,312 metros. No caso da aplicação de Rudzki foram obtidos valor máximo de 0,734 m na estação 2804E, mínimo de 0,001 m na estação 3045B, média de 0,166 m com desvio padrão de 0,158 m e RMS de 0,227 metros.

Para a diferença absoluta entre o geóide gravimétrico calculado e geóide MAPGEO 2015 foram obtidas as diferenças absolutas, para o Segundo Método de Condensação de Helmert, valor máximo de 0,622 m na estação 2804E, mínimo de 0,002 m na estação 2386G, média de 0,166 m com desvio padrão de 0,158 m e RMS de 0,227 metros. Os resultados obtidos para a redução de Bouguer foram, valor máximo de 0,220 metros na estação 2804E, mínimo de 0,006 na estação 3300G, média de 0,088 m com desvio padrão de 0,053 m e RMS de 0,102 metros. Para Rudzki os valores alcançados foram, máximo de 0,762 m na estação 2804E, mínimo de 0,002 m na estação 2386V, média de 0,294 m com desvio de 0,195 m e RMS de 0,351 metros.

Na análise comparativa entre os valores dos resíduos de referência, GNNS/NIVELAMENTO e MAPGEO2015, para a área 2, foram encontrados valores máximo de 0,599 m na estação 2384U, mínimo de 0,002 m na estação 3045G, média de 0,219 m com desvio padrão de 0,134 m e RMS de 0,255 metros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Um dos principais objetivos deste trabalho era desenvolver um sistema automático para o cálculo do geóide e aplicá-lo utilizando diferentes métodos de redução gravimétrica em áreas com características geológicas distintas a título de avaliação.

A análise foi realizada em duas etapas, num primeiro momento comparando-se, para cada fase da técnica RR, os resultados obtidos pelo sistema desenvolvido, GeoFis 1.0, com outro já em aplicação GRAVSOFT. Depois foram analisados os resíduos da diferença absoluta entre os valores da ondulação geoidal gravimétrica e os da ondulação geoidal geométrica, GNSS sobre nivelamento e MAPGEO2015.

Durante a verificação “etapa por etapa” constatou-se que tanto no cálculo da correção do terreno quanto no cálculo das anomalias residuais da gravidade os resultados para todos os softwares utilizados foram muito similares o que sugere a boa performance do GeoFis 1.0 nesta fase.

Para a análise dos resíduos foi necessário calcular a ondulação geoidal gravimétrica. Isso foi feito usando-se diferentes métodos de redução para as duas áreas estudadas. Foram obtidas as anomalias residuais de Faye, Bouguer e Rudzki as quais foram estimadas, utilizando-se de diferentes procedimentos, CMQ e geoestatística, para elaborar a malha regular empregada como entrada na Integral de Stokes.

Em relação aos métodos de predição adotados, Colocação por Mínimos Quadrados e a Geoestatística, verificou-se que ambas são técnicas importantes para estimar valores dos funcionais do campo de gravidade, no entanto, a geoestatística mostrou ser mais rigorosa na determinação de observações suspeitas de conter erros grosseiros. Como na estimativa usando a CMQ há a necessidade de se modelar a função covariância, atividade extremamente complexa, aplicar a Krigagem pode ser uma boa alternativa.

Foi verificado que a distância de correlação na colocação por mínimos quadrados assim como o alcance na Krigagem possuem diferença de aproximadamente 50% para as áreas estudadas. Isso reforça a ideia de que a determinação do modelo geoidal é fortemente influenciada pelo tipo de relevo e da geologia o que valida a necessidade de particionar, em termos geológicos, a

plataforma continental e só depois disso confeccionar o modelo geoidal gravimétrico local/regional.

Outro aspecto importante está no fato dos valores de ondulação residual para as anomalias residuais Faye, Bouguer e Rudzki, serem muito semelhantes para a área 1 e bastante discrepantes para a área 2. Isso fortifica a ideia de que, na obtenção de um geóide acurado, seja necessário evitar aplicação de forma generalizada do mesmo método de redução gravimétrica.

Para a área 2 houve maior diferença absoluta entre o valor do geóide gravimétrico e o valor do geóide geométrico. Segundo Sjöberg (2005) o Segundo Método de Condensação de Helmert não é adequado para estimar o geóide centímetro em áreas com relevo fortemente ondulado sendo necessário algumas alterações no cálculo da ondulação residual, por exemplo, realizar a correção do terreno para os termos de grau zero e um na Integral de Stokes. Isto acarretaria uma correção na ordem de 10 cm na ondulação residual.

Analisando os resultados da aplicação das três reduções para a área 2 verifica-se maior diferença entre os valores obtidos na redução de Rudzki em relação às outras duas reduções. É importante lembrar que, neste método, o deslocamento das massas ao longo da direção axial para o interior do geóide é puramente geométrico e tem como objetivo determinar uma posição interna cujo potencial seja o mesmo daquele fornecido por essa massa na posição externa ao geóide. Neste caso é notório que uma variação muito grande do relevo irá provocar uma grande variação no deslocamento de massa mantendo o potencial inalterado.

Como se percebe pelas aplicações na área 1, onde o relevo tem variação mais suave e geologia mais uniforme, há boa aderência entre os valores residuais obtidos para as diferentes reduções gravimétricas. Para a área 2, no entanto, cujo relevo é mais ondulado e cuja geologia é mais diversificada houve maior diferença entre os valores obtidos para a ondulação residual e conseqüentemente para o geóide gravimétrico. Outro aspecto que deve ser considerado é a distribuição de dados gravimétricos, para a área 1, esses dados são distribuídos de forma bem mais homogênea do que para a área 2.

Embora para a área 2 os valores obtidos para a ondulação geoidal estejam fora do limite estabelecido como referência é importante ressaltar que os resultados tiverem sempre boa aderência àqueles resultados obtidos a partir de outros

métodos/software. Nesse aspecto pode-se evidenciar que tanto o programa GeoFis 1.0 quanto à metodologia adotada atendeu satisfatoriamente aos objetivos propostos para a pesquisa.

A dificuldade de se avaliar a qualidade final do modelo geoidal gravimétrico reside no fato de não se saber quais os erros estão presentes nas altitudes das RRNN nos pontos de controle. Como se verifica não há informações de qualidade das altitudes destas referências o que impede um ajustamento adequado.

Vale ressaltar que as RRNN utilizadas como controle não estão bem distribuídas por toda a área, logo, é necessária precaução na análise dos resultados obtidos até aqui.

É importante considerar também que a partir do desenvolvimento de softwares com interfaces mais amigáveis para a determinação do modelo de referência vertical, geoide, este procedimento torna-se mais simples e isso amplia a aplicação da Geodesia nas atividades de ensino e nas práticas da engenharia.

Para futuras pesquisas associadas ao tema sugere-se continuar o desenvolvimento do programa incluindo fatores de correção na integral de Stokes para as áreas de relevo acidentado e com geologia diversificada e aplicar métodos de inversão para detectar valores de densidade geológica mais realista ao contrário de se usar $2,67\text{g/cm}^3$ como padrão. Deve-se também continuar com o desenvolvimento de outros métodos de reduções gravimétricas, como por exemplo, a isostática. Além disso, usar MDTs e MDBs melhorados e atualizados podem, com certeza, melhorar a qualidade do resultado final.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, A. de P. (2007). **Sobre a técnica fast collocation (colocação rápida) na determinação do geoide do estado de São Paulo utilizando dados das missões CHAMP e GRACE**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul 2007.

AMARANTE, R. R. (2012). **Sistematização do processamento de dados gravimétricos aplicados a determinação do modelo geoidal**. Tese de doutorado. Campinas. SP.

ARABELOS, D., and TSCHERNING, C.C. (1997). **The use of the Least Square Collocation method in global gravity field modeling**. XXII EGS General Assembly, Viena.

ARABELOS, D. and TSCHERNING, C.C. (1988). **Gravity field mapping from satellite altimetry, sea-gravity and bathymetry in the Eastern Mediterranean**. Geophysical Journal, Vol. 92, pp. 195-206.

ASTER. **Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer**. Nasa: Jet Propulsion Laboratory. Site. Disponível em <<http://ASTERweb.jpl.nasa.gov/>>. Acesso: 05 janeiro 2016.

BAJRACHARYA, S (2003). **Terrain effects on geoid determination**. MSc thesis, rep 20181, Department of Geomatics Engineering, University of Calgary.

BECKER, J.J.; SANDWELL, D. T.; SMITH, W. H. F.; BRAUD, J.; BINDER, B.; DEPNER, J.; FABRE, D.; FACTOR, J.; INGALLS, S.; KIM, S. H.; LADNER, R.; MARKS, K.; NELSON, S.; PHARAOH, A.; TRIMMER, R.; VON ROSENBERG, J.; WALLACE, G. & WEATHERALL, P. (2009). **Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30 PLUS**. Marine Geodesy, 32(4): 355–371.

BLITZKOW, D.; ALMEIDA, F. G. V. de; MATOS, A. C. O. C. de, (2008). **A forma da Terra-a evolução do seu conhecimento**. Série em Geomática, v.2, p.101-109, Porto Alegre, UFRS/IG/LPG.

BLITZKOW, D. & FREITAS, S. R. C (1999). **Altitudes e Geopotencial**. Trabalho publicado no "IGeS Bulletin N.9 – International Geoid Service, pp. 47 – 62, Milan.

CARDOSO, R. R. (2006). **Representação Analítica do Campo Geotérmico Global pelo Método dos Harmônicos Esféricos**. Dissertação de mestrado. Pós graduação do Observatório Nacional. Rio de Janeiro.

CLAESSENS S.J., (2003). **A Synthetic Earth Model; analysis, implementation, validation and application**, Delft University Press, Delft.

CUNDERLÍK R., MIKULA K., MOJZEŠ, M (2007). **Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem**. Received: 4 May 2006 / Accepted: 19 March 2007 / Published online: 1 May 2007 © Springer-Verlag.

DEHLINGER, P. (1978). **Marine gravity**. New York and Amsterdam, Elsevier, Oceanography Series, v. 22, 322 p.

ELLMANN A. **SHGEO software package-An UNB Application to Stokes-Helmert Approach for Precise Geoid Computation**, Reference Manual II. Software User's Guide Fredericton, New Brunswick, Canada, 2009. Disponível em: http://www2.unb.ca/gge/Research/GRL/GeodesyGroup/SHGeo/Manual/SHGeo_manual_II_2009.pdf. Acesso em 2017.

ENGELS J., E. GRAFAREND, W. KELLER, Z. MARTINEC, F. SANSÒ AND P.VANÍEK (1993). **The geoid as an inverse problem to be regularized**. In: Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics. Technology and Medicine, eds. G.Anger, R.Gorenflo, H.Jochmann, H.Moritz and W.Webers, Akademie-Verlag, Berlin, 122-167.

EROL, B.; ÇELİK, R. N. (2014). **Precise Local Geoid Determination to Make GPS Technique More Effective in Practical Applications of Geodesy**. FIG Working Week 2004, Athens, Greece, May 22-27, 2004. Disponível em <https://www.fig.net/pub/athens/papers/ts07/ts07_3_erol_celik.pdf> Acesso em: 05 jan.

FEATHERSTONE, W.E. & DENTITH, M.C (1997). **A geodetic approach to gravity reductions for geophysics**, *Comp. Geosci.*, 23, 1063-1070.

FEATHERSTONE, W.E.; SIDERIS, M.G (1998). **Modified kernels in spectral geoid determination: first results from Western Australia**. In: R. Forsberg and M. Feissl and R. Dietrich (Ed.). *Geodesy on the move: gravity, geoids, geodynamics, and Antarctica*, Berlin: Springer-Verlag. International Association of Geodesy Symposia , 119:188-193.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Teoria Clássica do Potencial**. UNB. IMPA. Brasília. Editora Universidade de Brasília. 1963. http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/04CBM/4_CBM_63_04.pdf Acessado em 15/01/2014 às 15:00 horas.

FORSBERG, R.; TSCHERNING, C. C. (2008). **An overview manual for the GRAVSOFT. Geodetic Gravity Field Modelling Programs**. Dinamarca, 2ed. 75p.

FÖRSTE, C.; BRUINSMA, S. L.; ABRIKOSOV, O.; LEMOINE, JEAN-MICHEL; MARTY, J. C.; FLECHTNER, F.; BALMINO, G.; BARTHELMES, F.; BIANCALE, R.:(2014) **EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse**. GFZ Data Services. <http://doi.org/10.5880/icgem.2015.1>.

GEMAEL, C. 1994. **Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas**. Curitiba: Editora UFPR.

GEMAEL, C. **Introdução Geodésia Física** (1999). Editora da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 304 p.

GEMAEL, C. & ROSIER, F (1991). **Calibração de gravímetros usando a RENEGA**. 2º Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica. Salvador, Anais, pp. 120-124.

GENRO, R. SANTOS (2006). **Determinação de um Geoide Gravimétrico para o Estado do Paraná utilizando Colocação por Mínimos Quadrados**. Dissertação de mestrado. UFPR.

GÖ TTL, F. E; RUMMEL, R. (2009). **A Geodetic View on Isostatic Models. Pure and Applied Geophysics**. Birkhäuser Verlag, pp. 1247–1260, Basel.

GOLDANI, D. (2006). **Modelo Geoidal de Alta Resolução para o estado do Paraná: Aplicação da Transformada Rápida de Fourier – Stokes e do valor do potencial do geoide na definição da Superfície de Referência Vertical**. Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba.

GUIMARÃES, G. do N.; BLITZKOW, D. (2011). **Problema de valor de contorno da geodésia: uma abordagem conceitual**. Boletim de Ciências Geodésicas. Trabalhos técnicos, Curitiba, v. 17, no 4, pp.607-624.

GUIMARÃES, G. do N. (2013). **A geoid model in the state of São Paulo: na attempt for the evaluation of different methodologies**. Tese de doutorado. Escola Politécnica da USP. Departamento de Transportes. São Paulo. Pp. 144.

HECK, B. (2011). **A Brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem**. Geodetic Institute, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Englerstr. 7, Karlsruhe, D-76128.

HECK, B (1989). **On the non-linear Geodetic Boundary Value Problem for a Fixed Boundary Surface**. Bull. Géod. 63, pp. 57-67.

HEISKANEN W.A. & MORITZ H. (1967). **Physical Geodesy**. W.H. Freeman, San Francisco. 364 p.

HEYWOOD, C. E. (1992). Isostatic residual gravity anomalies of Ne Mexico: U. S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 91 – 4065, 27 p.

HIRT, C. AND FILMER, M.S. AND FEATHERSTONE, W.E. 2010. **Comparison and validation of recent freely-available ASTER-GDEM ver1, SRTM ver4.1 and GEODATA DEM-9S ver3 digital elevation models over Australia**. Australian Journal of Earth Sciences. 57 (3): pp. 337-347.

HIRT C (2011). **Mean kernels to improve gravimetric geoid determination based on modified Stokes's integration**. Computers & Geosciences, 37(11):1836-1842, do:10.1016/j.cageo.2011.01.005.

IERS Conventions (2010). Gérard Petit and Brian Luzum (eds.). IERS Technical Note; 36. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp., ISBN 3-89888-989-6

JAMUR, K. P.; MELO, L.; FREITAS, S. R. C. de. **Avaliação dos modelos do campo da gravidade terrestre advindos da missão GOCE - gravity field and Steady-State ocean circulation explorer**. Boletim informativo n.15. <http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/boletines/bol15/46a_jamur_et_al_evaluacion_modelos_goce.pdf. 2010> acessado em 18/06/2013 às 18:00 horas.

JEFFREY D. PHILLIPS, JOSEPH S. DUVAL AND RUSSEL A. AMBROZIAK (1993). **Isostatic Residual Gravity Anomaly Data Grid** U.S.G.S. Digital Data Series DDS-9 National Geophysical Data Grid: Gamma-Ray, Gravity, Magnetic, and Topographic Data for the Conterminous United States by U.S. Department of the Interior Bruce Babbitt, Secretary U.S. Geological Survey Dallas L. Peck, Director.

JEKELI, C (2006). **Geometric Reference Systems. Division of Geodesy and Geospacial Science**. School of Earth Sciences. Ohio State University. 195 pp.

JOURNAL, A.G.AND HUIJBREGTS, C (1978). **Mining geostatistics**. Academic Press. Universidade da Califórnia. 600 pp.

KIAMEHR, R & SJÖBERG, L.E. (2005). **Effect of the SRTM global DEM on the determination of a high-resolution geoid model: a case study in Iran**. Journal of Geodesy, 79: 540–551.

KUHN M. AND FEATHERSTONE WE (2003). **On the construction of a synthetic Earth gravity model (SEGM)**. In: Tziavos IN (ed) Gravity and geoid 2002, Proc 3rd Meeting International Gravity and Geoid Commission, pp 189–194.

LANDIM, P.M.B. e STURARO, J.R (2002). **Krigagem indicativa aplicada à elaboração de mapas probabilísticos de riscos**. DGA, IGCE, UNESP/ Rio Claro, Lab. Geomatémática, Texto Didático 06, 19 pp.

LEMOINE, F.G.; PAVLIS, N.K.; KENYON, S.C., RAPP, R.H.;PAVLIS, E.C.; CHAO, B.F. (1998a). *New high-resolution model developed for Earth' gravitational field*, EOS, Transactions, AGU, 79, 9, March 3, No 113, 117- 118.

LEMOINE, F.G.; KENYON, S.C.; FACTOR, J.K; TRIMMER, R.G.; PAVLIS, N.K.; CHINN, D.S.; COX, C.M.; KLOSKO, S.M.; LUTHCKE, S.B.; TORRENCE, M.H.; WANG, Y.M.; WILLIAMSON, R.G;. PAVLIS, E.C.; RAPP R.H.; OLSON, T.R. (1998b). **The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96**, NASA/TP-1998-206861. National Aeronautics and Space.

LI, Y. (1993). **HFTGVBP Software package for the solution of GVBP by means of fast Hartley/Fourier Transform. TOPOGEOP Software packages to evaluate the TOPOgraphic effects on GEOdetic /GEOPhysical Observation**. Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary

LI, YECAL (1993). **Optimized spectral geoid determination**, chapter 4, UCGE Report No 50, Department of Geomatics Engg. The University of Calgary.

LI, Y. C. e SIDERIS, M. G. (1994a) **Minization and estimation of geoid undulation errors**. Bulletin Géodésique. Springer – Verlag. v. 68

LI, Y. C.; SIDERIS, M. G (1994b). **Improved gravimetric terrain corrections**. Geophysical Journal International, v. 119, p. 740-752.

LISTING, J.B. **Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grosse der Erde**, *Nachr. d. Kgl.*, Gesellsch. d. Wiss. und der Georg-August-Univ., 33-98, Gottingen. 1873.

LOBIANCO, M. C. B. (2005). **Determinação das alturas do geoide no Brasil**. Tese de doutorado. Escola Politécnica da USP. São Paulo.

LOWRIE, W (2007). **Fundamentals of Geophysics**. Second Edition. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York.

KABAN, M. K.; SCHWINTZER, P.; REIGBER, CH. (2004). **A new isostatic model of the lithosphere and gravity field**. GeoForschungsZentrum Potsdam, Dept. 1, Telegrafenberg A 17, 14473 Potsdam, Germany. Journal of Geodesy. November.

MAIA, T. C. B (2003). **Utilização de redes neurais na obtenção de modelos geoidais**. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

MARTINEC, Z.; VANÍČEK, P. (1994). **Direct topographical effect of Helmert's condensation for a spherical approximation of the geoid**. Manuscripta Geodaetica, No. 19, pp. 257-268.

MARTINEC, Z. (1998). **Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid**. Lecture notes in earth sciences, 73, Springer.

MATOS, A.C.O.C. (2005). **Implementação de modelos digitais de terreno para aplicações na área de Geodésia e Geofísica na América do Sul**. Tese de doutorado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 355 p.

Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/3/3138/tde-10102005-104155>. Acessado em 2016.

MEISSL P. (1971). **Preparations for the numerical evaluation of second-order Molodensky-type formulas**. Report 163, Dept Geod Sci & Surv, Ohio State University, Columbus.

MORELLI C., GANTAR C., HONASALO R. K., McCONNELL R. K., TANNER J. G., SZABO B., UOTILA U., WHALEN C. T. (1972). **The International Gravity Standardization Net 1971 (I. G. S. N. 71)**. Air Force Cambridge Research Laboratories. European Office of Aerospace Research and Development Distributed by: National Technical Information on Service (NTIS). U.S. Department of Commerce. Bureau Central de L'association Internationale de Geodesie. Paris.

MA and WATTS (1994). **Terrain correction program for regional gravity surveys**. Computers and Geosciences, v. 20, no. 10, p. 961-972.

MAROTTA, G. S. ; VIDOTTI, R. M. ; Blitzkow, D. (2015) . **GRAVTool, a Package to Compute Geoid Model by Remove-Compute-Restore Technique**. In: AGU Fall Meeting 2015, 2015, San Francisco. AGU Fall Meeting 2015.

MATHERON, G. **Principles of geostatistics**. Economic Geology (1963). v.58, p.1246-1266.

MORITZ, H. (1972) **Advanced least squares method**. Report No. 75, Dept. of Geodetic Science, OSU

MORITZ, H. (1976). **Covariance functions in least square collocation**. Report of the Department of Geodetic Science. Report nº 240. The Ohio State University. Columbus. Ohio.

MORITZ, H., (1980). **Advanced Physical Geodesy**. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent.

MORITZ, H (2000). **Geodetic Reference System 1980**. Journal of Geodesy, v. 74, Issue 1, p. 128- 133.

NAGY, D (1966). **The prism method for terrain corrections using digital computers**. Pure and Applied Geophysics. v. 63, Issue 1, p. 31-39.

NAMIKAWA, L.M (1995). **Um método de ajuste de superfície para grades triangulares considerando linhas características**. Dissertação (Mestrado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 136p.

NIELSEN, J., TSCHERNING, C. C., JANSSON, T.R.N., FOSBERG, R (2012). **Development and User Testing of a Python Interface to the GRAVSOFTE Gravity Field Programs**. In: Geodesy for Planet Earth. Springer pp. 443-449.

PAVLIS, N.K (2013). **Global Geopotential Models**. In Geoid Determination: Theory and Methods. ed. / Fernando Sansò; Michael G. Sideris. Lecture notes in Earth system sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Doi:10.1007/978-3-540-74700-0

PAVLIS, N.K; HOLMES, S.A.; KENYON, S.C.; FACTOR, J.K. (2014). **An earth gravitational model to degree 2160**. Geophys Res (Abstract 10, E, GU2008-A-01891, 2008, Ref ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-01891, EGU General Assembly). 2008. Disponível em: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84>. Acessado em 2014.

PEREIRA, R. A. D. (2013). **Modelagem do potencial perturbador com base em wavelets aplicada à conexão de redes verticais**. Curitiba.

PRATT J. H. (1855). **On the attraction of the Himalaya Mountains, and of the elevated regions beyond them upon the plumb-line in India**. *Phil. Trans. Roy. Soc.London* 145, 53—100.

RUMMEL, R.; TEUNISSEN, P (1986). **Geodetic Boundary Value Problem and Linear Inference**. Porc. Int. Symp. Figure and Dynamics of the Earth, Moon, and Planets. Praga.

RUMMEL R, RAPP RH, SÜNKEL H, TSCHERNING CC (1988): **Comparisons of global topographic-isostatic models to the Earth's observed gravity field**. Reports of the Department of Geodetic Science and Surveying No. 388, Ohio State University, Columbus, Ohio.

SÁ, NELSI. C. de (2000). **Elementos de Geodésia**. Texto de aulas. IAG/USP, São Paulo, 98 pp.

SANDWELL, D. T.; SMITH, W. H. F (2005). **Retracking ERS-1 altimeter waveforms for optimal gravity field recovery**. *Geophysical Journal International*, 163: 79–89. doi: 10.1111/j.1365-246X.2005.02724.x.

SANDWELL, D. T.; SMITH, W. H. F (2009). **Global marine gravity from retracked Geosat and ERS-1 altimetry: Ridge segmentation versus spreading rate**, *J. Geophys. Res.*, 114, B01411, doi:10.1029/2008JB006008.

SANSÒ, F. (2013). **Geoid Determination: Theory and Methods**. ed. / Fernando Sansò; Michael G. Sideris. Lecture notes in Earth system sciences. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Doi:10.1007/978-3-540-74700-0

SANTOS N. P. & ESCOBAR I. P. (2000). **Determinação gravimétrica do geoide na região do município do rio de janeiro**. *Revista Brasileira de Geofísica*, Vol. 18 (1).

SCHWARZ, K. P.; SIDERIS, M. G. AND FORSBERG R. (1990). **The use fo FFT techniques in physical geodesy**. *Geophysical Journal International* (ISSN 0955-419X), vol. 100, p. 485-514.

SCHWARZ C. R., WADE E. B. (1990). **The North American Datum of 1983: Project methodology and execution**. *Journal of Geodesy* 64 (1), 28-62.

SEITZ, KURT (2003). **Ellipsoidal and topographical effects in the scalar free geodetic boundary value problem**. Geodesy - the Challenge of the 3rd Millennium/ Erik W. Grafarend, Friedrich W. Krumm, Volker S. Schwarze (eds.). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

SETIAWAN, ARI (2003). **Modeling of Gravity Changes on Merapi Volcano observed between 1997-2000**, Technischen Universität Darmstadt, Darmstadt.

SEVILLA, M.J.; RAMÍREZ HUERTA, D.; SÁNCHEZ MENÉNDEZ, F.J. (1997). **Metodología para la creación de bases de datos gravimétricos fiables: Métodos clásicos, gráficos y digitales (I)**. Revista Topografía y cartografía 1997, ISSN: 0212-9280 14 (79): 2-19.

SCHWARZ K. P., SIDERIS M. G., FOSBERG R. (1990) **The use of FFT techniques in physical geodesy**. *Geophysical Journal International* 100 (3). 485-514.

SCHWARZ C. R., WADE E. B. (1990). **The North American Datum of 1983: Project methodology and execution**. *Journal of Geodesy* 64 (1), 28-62.

SCINTREX. **Operation** **Manual**.
<http://www.scintrexltd.com/documents/CG5.v2.manual.pdf> <acessado em 08/05/2014> às 13:30 horas. Concord, Ontário, Canadá. 2006.

SIDERIS, M.G. & SHE, B.B (1995). **A New High-Solution Geoid for Canada and part of the US by 1D-FFT Method**. *Bulletin Géodésique*, 69 (2): 92-108. 1995.

SIDERIS, M. G. (1985). **A fast fourier transform method of computing terrain corrections**. *Manuscripta Geodaetica*, v. 10, p. 66-73.

SIDERIS, M. G. (1997): **Geoid Determination by FFT Technique**, In Lecture Notes of IAG's Geoid School, Rio de Janeiro, Brazil.

SILVA, M. A. (2002). **Obtenção de um modelo geoidal para o Estado de São Paulo**. Dissertação de mestrado. SP. São Paulo.

SIMPSON, R.W.; JACHENS, R.C.; BLAKELY, R.J (1983). **AIRYROOT a Fortran program for calculating the gravitational attraction of an Airy isostatic root out to 166.7 km**. Number 83-883, U.S. Geological Survey

SINGH, PARAMJIT; PANDEY, R.S.; GUPTA, S.K.; NAINWAL, N.C; MANOJ ASTHANA (2006). **Bouguer Reduction with Lateral Variable Surface Densities- A Model Based Case Study in Geologically Complex Frontier Area**. 6th International Conference & Exposition on Petroleum Geophysics "Kolkata 2006". Oil and Natural Gas Corpn. Ltd., India. GNB Garhwal University, Srinagar, India

SÖBERG, L. R. (2005). **A discussion on the approximations made in the practical implementation of the remove-compute-restore technique in regional geoid modelling**. Unit of Geodesy, Royal Institute of Technology. J Geoid.

SOUZA, S. F. de; MATSUOKA, M. T.; GÖTZ, J. J.; SEVERO, T. C. (2008). **Sobre o novo modelo geopotencial EGM2008**. Série em Geomática, v.2, p.067-073, Porto Alegre, UFRS/IG/LPG.

SRTM. **Shuttle Radar Topograph Mission**. Site. Nasa: Jet Propulsion Laboratory. Disponível em < <http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/> />. Acesso: 01 novembro 2016.

STOKES, G.G., (1849). **On the variation of gravity at the surface of the Earth**, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, V. 8, p. 672.

STRAUSTRUP, B. (1997). **The C++ programming language**. 3.ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1997. 911 p. ISBN 0-201-88954-4.

TALVIK, SILJA (2012). **Influence of the gravitational attraction of terraced landforms to precise levelling results**. In: The Council of European Geodetic Surveyors, Comité de Liasion des Géomètres Européens. Bruxelles-Bélgica.

TOCHO C., G. FONT G., SIDERIS M.G (2003). **Gravimetric Geoid Determination in the Andes. A Window on the Future of Geodesy.** Proceedings of the International Association of Geodesy IAG General Assembly Sapporo, Japan June 30 – July 11, pp 398-402.

TSCHERNING C.C., RAPP R.H. (1974). **Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variances.** Rep No 208, Department of Geodetic Sciences and Surveying, The Ohio State University, Columbus.

TSCHERNING, C. C (2008). **Geoid determination by 3D least squares collocation.** In International School of the Determination and Use of the Geoid Lecture Notes, Milano: IGeS,193-210.

TACHIKAWA, T.; HATO, M.; KAKU, M.; & IWASAKI A. (2011). **The characteristics of ASTER GDEM version 2, IGARSS.**

TSCHERNING CC, FOSBERG R, KNUDSEN P (1991). **Description of the GRAVSOFT.** Geophysical Institute, University of Copenhagen, Technical Report.

TSOULIS D (2001): **A comparison between the Airy-Heiskanen and the Pratt-Hayford isostatic models for the computation of potential harmonic coefficients.** Journal of Geodesy 74(9): 637-643.

VERGOS G., TZIAVOS I., ANDRITSANOS V (2005). **Gravity Data Base Generation and Geoid Model Estimation Using Heterogeneous Data.** In: Jekeli C., Bastos L., Fernandes J. (eds) Gravity, Geoid and Space Missions. International Association of Geodesy Symposia, vol 129. Springer, Berlin, Heidelberg.

VIEIRA, S. R (2000). Geoestatística em estudos de variabilidade espacial do solo. In. NOVAES, R. F.; ALVAREZ V., V. H.; SCHAEFER, C. E G. R. **Tópicos em ciências do solo.** Viçosa, G: Sociedade Brasileira de Ciência do Solo. v.1. p.2-54.

WELLENHOF, BERNHARD-HOFMANN; MORITZ, HELMUT (2005). **Physical Geodesy**. Editora Springer-Verlag Wien, Austria.

YAMAMOTO, T. M. (1983). **Métodos de Determinação do Geoide**. Dissertação. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

YILMAZ M., ACAR M., AYAN T., ARSLAN E (2006). **Application of Fuzzy Logic Theory to Geoid Height Determination**. In: Kłopotek M.A., Wierzchoń S.T., Trojanowski K. (eds) Intelligent Information Processing and Web Mining. Advances in Soft Computing, vol 35. Springer, Berlin, Heidelberg.

YILDIZ, H., FORSBERG, R., ÅGREN, J., TSCHERNING, C., & SJÖBERG, L. (2012). **Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of Stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the Auvergne test area**. Journal of Geodetic Science, 2(1), 53-64. DOI: 10.2478/v10156-011-0024-9.

WICHIENCHAROEN, C. (1982). **The indirect effects on the computation of geoids undulations**. OSU Rept. 336, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Ohio, USA.

WILD F. AND HECK B. (2004a), **A comparison of different isostatic models applied to satellite gravity gradiometry, Gravity, Geoid and Space Missions GGSM 2004 IAG International Symposium Porto, Portugal August 30 – September 3, 2004**.

WILD F. AND HECK, B. (2004b), **Effects of topographic and isostatic masses in satellite gravity gradiometry**. In Proc. Second International GOCE User Workshop GOCE. The Geoid and Oceanography, ESA-ESRIN, Frascati/Italy, March 8-10, 2004 (ESA SP – 569, June 2004), CDROM.

WONG L, GORE R (1969) **Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels**, Geophys J R astr Soc, 18: 81-91.

VALERIANO, M. M (2004). **Modelo digital de elevação com dados SRTM disponíveis para a América do Sul**. São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. 72 p.

VANÍČEK, P. AND E. KRAKIWSKY (1992). **Geodesy: The Concepts**, 2nd ed., Amsterdam, Elsevier.

VANÍČEK P, KLEUSBERG A. (1987) **The Canadian geoid - Stokesian approach**, manuscr geod, 12: 86-98.

Z. L. FEI, M. G. SIDERIS (1999). **A new method for computing the ellipsoidal correction for Stokes's formula**. Journal of Geodesy. pp. 223-231.