

YGOR AMARANTE RODRIGUES GOUVEA

**ALGUNS ASPECTOS DINÂMICOS DE POLINÔMIOS DE
CREMER**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

G719a
2016 Gouvêa, Ygor Amarante Rodrigues, 1988-
Alguns aspectos dinâmicos de Polinômios de Cremer / Ygor
Amarante Rodrigues Gouvêa. – Viçosa, MG, 2016.
vi, 52 f. ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 51-52.

1. Polinômios. 2. Dinâmica. I. Universidade Federal de
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

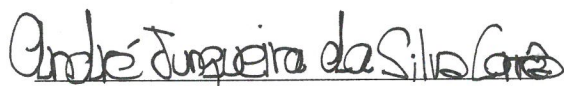
CDD 22 ed. 512.9422

YGOR AMARANTE RODRIGUES GOUVEA

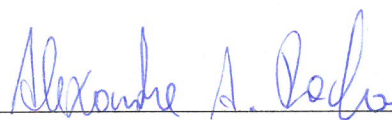
ALGUNS ASPECTOS DINÂMICOS DE POLINÔMIOS DE
CREMER

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das
exigências do Programa de Pós Gra-
duação em Matemática, para obtenção do
título de *Magister Scientiae*.

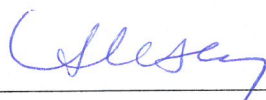
APROVADA: 20 de setembro de 2016.



André Junqueira da Silva Corrêa



Alexandre Alvarenga Rocha



Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

“Velho Tema

Só a leve esperança, em toda a vida,
Disfarça a pena de viver, mais nada;
Nem é mais a existência, resumida,
Que uma grande esperança malograda.

O eterno sonho da alma desterrada
Sonho que a traz ansiosa e embevecida,
É uma hora feliz, sempre adiada
E que não chega nunca em toda a vida.

Essa felicidade que supomos,
Árvore milagrosa que sonhamos
Toda arreada de dourados pomos,

Existe, sim: mas nós não a alcançamos
Porque está sempre apenas onde a pomos
E nunca a pomos onde nós estamos.”

Vicente de Carvalho

Resumo

GOUVEA, Ygor Amarante Rodrigues, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, setembro de 2016. **Alguns aspectos dinâmicos de polinômios de Cremer.** Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Neste trabalho buscaremos estudar alguns aspectos dinâmicos dos polinômios quadráticos de Cremer, cuja literatura ainda é bastante escassa.

Abstract

GOUVEA, Ygor Amarante Rodrigues, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2016. **Some dynamics aspects of Cremer polynomials.** Adviser: Alexandre Miranda Alves.

In this work we will seek to study some aspects of Cremer quadratics polynomials, whose literature still quite scarce.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 4 |
| 1.1 Noções de Análise Complexa | 4 |
| 1.2 Sistemas Dinâmicos | 9 |
| 1.3 Algumas questões topológicas | 10 |
| 1.4 Espaços de Recobrimento | 12 |
| 1.5 Superfícies de Riemann | 13 |
| 2 Conceitos Iniciais | 17 |
| 2.1 Normalidade | 17 |
| 2.2 Conjuntos de Fatou e Julia | 19 |
| 2.3 Teorema de Böttcher | 23 |
| 2.3.1 Aplicação em Dinâmica Polinomial | 24 |
| 2.4 Ciclos | 25 |
| 2.5 Prime Ends | 26 |
| 2.6 Conectividade Local | 28 |
| 2.7 Teorema de Carathéodory | 28 |
| 3 Alguns aspectos Dinâmicos de polinômios quadráticos de Cremer | 30 |
| 3.1 Pontos de Cremer e Discos de Siegel | 30 |
| 3.2 Raios Externais e Acessibilidade | 34 |
| 3.3 Lemas da Separação | 37 |

| | |
|--|-----------|
| 3.4 Conectividade Local | 40 |
| 3.5 Pequenos Ciclos | 44 |
| 3.6 Ponto Crítico | 45 |
| 3.7 Hedgehog | 47 |
| Considerações Finais | 50 |
| Referências Bibliográficas | 51 |

Introdução

Dinâmica complexa (discreta) discute o comportamento de funções complexas sob iterações. O campo se originou com o método de iteração de Newton-Raphson para aproximações de raízes e com a introdução dos métodos de conjugação complexa de Schröder, em 1871, para estudar tais esquemas de iteração.

As formas normais em pontos fixos foram obtidas e estudadas, mas foi o Teorema de Montel sobre famílias normais, o qual tornou-se disponível uns quarenta anos mais tarde, que possibilitou aos matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia desenvolver os fundamentos da teoria moderna.

Alguns dos precursores deste campo foram: Ernest Schröder (1841-1902), Henri Poincaré (1854-1912), Gabriel Koenigs (1858-1931), Lucjan Böttcher (1872-1937), Samuel Lattès (1873-1918), Constantin Carathéodory (1873-1950), Paul Montel (1876-1975), Pierre Fatou (1878-1929), Paul Koebe (1882-1945), Arnaud Denjoy (1884-1974), Gaston Julia (1893-1978), Carl L Siegel (1896-1981), Hubert Cremer (1897-1983), Lars Ahlfors (1907-1996), Michael R Herman (1942-2000), dentre outros.

Depois de alguns anos com pouco desenvolvimento, mais precisamente na década de 60, a pesquisa é retomada. Na década de 80, D. Sullivan provou a Conjectura dos domínios não-errantes de Fatou, o que foi fundamental depois para provar o Teorema da Classificação das Componentes do conjunto de Fatou.

Os avanços constantes na informática contribuíram também para este campo. Experimentos como cálculos em teoria numérica de Birch e os experimentos de Lorenz em teoria meteorológica se destacaram. Computadores e programas que permitem iterar um sistema dinâmico um número muito grande de vezes, foram e ainda são ferramentas importantes para o desenvolvimento da teoria.

Um sistema dinâmico complexo “popular” é dado pela família de polinômios quadráticos definidos na esfera de Riemann por

$$f_c(z) = z^2 + c$$

onde c é um parâmetro complexo. Observe que todo polinômio quadrático, $f(z) = az^2 + bz + k$, pode ser conjugado com um polinômio da forma $P(z) = z^2 + c$.

Quando J_{f_c} é conexo, a dinâmica é menos complicada (não significa que seja simples) que no caso oposto. O Connectedness Locus é o subconjunto do plano complexo consistindo dos parâmetros c tais que o respectivo conjunto de Julia

associado a f_c é conexo. No caso da família quadrática, o Connectedness Locus é chamado Conjunto de Mandelbrot.

Os pontos críticos desempenham um papel fundamental no estudo dos sistemas dinâmicos. No caso de famílias de polinômios complexos, os pontos críticos são os zeros da derivada e neste caso tem-se o seguinte resultado:

O conjunto de Julia é conexo se e somente se a órbita de cada ponto crítico é limitada.

Portanto, no caso família quadrática, o Connectedness Locus é o subconjunto do plano complexo, consistindo dos parâmetros c tais que a órbita do ponto crítico $z = 0$ por f_c é limitada.

A compreensão do comportamento dinâmico de um polinômio da família f_c depende principalmente da compreensão do Conjunto de Julia (conjunto instável) associado a f_c .

Seja z_0 um ponto periódico de uma função racional f . O número

$$\lambda = (f^n)'(z_0) = f'(z_0)f'(z_1) \cdots f'(z_n)$$

onde $z_j = f^j(z_0)$, é chamado de *multiplicador* de f em z_0 . Em relação ao valor absoluto de λ , temos que z_0 é classificado da seguinte forma:

- (i) *Atrator*: para $0 < |\lambda| < 1$.
- (ii) *Superatrator*: para $|\lambda| = 0$.
- (iii) *Racionalmente neutro*: para $|\lambda| = 1$ e com $\lambda^n = 1$ para algum inteiro positivo n .
- (iv) *Irracionalmente neutro*: para $|\lambda| = 1$ mas $\lambda^n \neq 1$ para qualquer inteiro positivo n .
- (v) *Repulsor*: para $|\lambda| > 1$.

Estamos interessados no item (iv). Neste caso, temos que $\lambda = e^{2\pi it}$, onde $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é irracional.

Dizemos que f é *localmente linearizável*, se existe uma mudança de coordenadas holomorfa local h , que conjuga f com a rotação irracional $w \mapsto \lambda w$, tal que

$$f(h(w)) = h(\lambda w)$$

Um ponto irracionalmente indiferente é dito ser um ponto de *Siegel* ou um ponto de *Cremer*, caso este seja localmente linearizável ou não.

Neste trabalho, estamos interessados no caso em que o ponto fixo de f_c é um ponto de Cremer. A literatura a este respeito está ainda bastante incompleta,

isto é, existem muitos problemas em aberto até o momento. O trabalho está organizado da seguinte forma:

No primeiro capítulo, reunimos alguns conceitos básicos de análise complexa, sistemas dinâmicos, espaços topológicos, espaços de recobrimento e superfícies de Riemann. Estes conceitos estruturam todo nosso estudo, não sendo possível o entendimento do mesmo sem eles.

Sob a luz do primeiro capítulo poderemos, no segundo, introduzir conceitos iniciais de dinâmica complexa, como a normalidade e os conjuntos de Julia e Fatou, assim como algumas de suas estruturas e propriedades dinâmicas e topológicas. Desenvolvido-os, os usaremos como base para, ainda neste capítulo, desenvolvermos alguns conceitos que nos serão necessários para nosso estudo em questão, que são o teorema de Böttcher, o estudo de ciclos, as ideias de prime ends, algumas noções de conectividade local e por fim o teorema de Carathéodory.

Agora iniciaremos o terceiro capítulo finalmente introduzindo os conceitos de pontos de Cremer e Discos de Siegel, assim como os conceitos de acessibilidade e separação. Tendo-os abordado de maneira geral, nos restringiremos ao nosso objeto de estudo, os polinômios quadráticos de Cremer, trazendo luz a alguns de seus aspectos dinâmicos, como a conectividade local, a estrutura de pequenos ciclos, a dinâmica em seu ponto crítico e a ideia de Hedgehogs.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Noções de Análise Complexa

Relacionada a muitos matemáticos de renome, tais como Euler, Cauchy, Gauss, Riemann e Weierstrass, a Análise Complexa se fundamenta desde o século XVIII. Esta teoria das funções de variáveis complexas é um assunto de grande utilidade tanto na Matemática Pura como na Aplicada. Sua utilização trás luz e facilita muito do caso real e abre caminhos para outras possibilidades.

Funções holomorfas são o objeto central do estudo de análise complexa. São funções complexas definidas em uma aberto de \mathbb{C} que são diferenciáveis em cada ponto:

Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com U aberto em \mathbb{C} , é dita ser derivável em $z_0 \in U$ se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Denotamos por $f'(z)$ a derivada de f .

Se f for derivável para todo $z \in U$, dizemos que f é **holomorfa**. \square

Esta diferenciabilidade é muito mais forte que a diferenciabilidade real, levando a função a ser infinitamente diferenciável e poder ser escrita na forma de Taylor, em séries de potências. Mas como pode ser visto, ela também comunga com muitas propriedades da diferenciabilidade real:

Proposição 1.1.1. *A função constante, $f(z) = \alpha$, é holomorfa em \mathbb{C} e $f'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\alpha - \alpha}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} 0 = 0$$

□

Proposição 1.1.2. A função identidade, $f(z) = z$, é holomorfa em \mathbb{C} e $f'(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} 1 = 1$$

□

Proposição 1.1.3. A função $f(z) = z^n$, é holomorfa em \mathbb{C} , $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f'(z) = nz^{n-1}, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ então

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ = & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ = & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}.z_0 + \dots + z.z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ = & \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}.z_0 + \dots + z.z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\ = & z_0^{n-1} + z_0^{n-2}.z_0 + \dots + z_0.z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \\ = & n.z_0^{n-1} \end{aligned}$$

□

Destas proposições vemos que funções constantes, a identidade e potências de números complexos são funções holomorfas. Podemos através do próximo teorema juntar essas ideias e expandir nossos conceitos:

Teorema 1.1.4. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $z_0 \in U$. Se $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ são deriváveis em z_0 e $\lambda \in \mathbb{C}$, então:

1. $f + g$ é derivável em z_0 e

$$(f + g)'(z_0) = (f' + g')(z_0);$$

2. $f - g$ é derivável em z_0 e

$$(f - g)'(z_0) = (f' - g')(z_0);$$

3. $\lambda.f$ é derivável em z_0 e

$$(\lambda.f)'(z_0) = \lambda.f'(z_0);$$

4. $f.g$ é derivável em z_0 e

$$(f.g)'(z_0) = (f'.g + g'.f)(z_0);$$

5. Se $g(z_0) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é derivável em z_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}(z_0).$$

Demonstração. Usando as propriedades de limites temos:

1.

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) + g(z) - f(z_0) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) \\ &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ &= (f' + g')(z_0) \end{aligned}$$

Logo $(f+g)'(z_0) = (f' + g')(z_0)$;

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f-g)(z) - (f-g)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - g(z) - f(z_0) + g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right) \\ &= f'(z_0) - g'(z_0) \\ &= (f' - g')(z_0) \end{aligned}$$

Logo $(f-g)'(z_0) = (f' - g')(z_0)$;

3.

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(\lambda.f)(z) - (\lambda.f)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\lambda.f(z) - \lambda.f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \lambda. \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lambda.f'(z_0); \end{aligned}$$

Logo $(\lambda.f)'(z_0) = \lambda.f'(z_0)$;

4.

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z) + f(z_0) \cdot g(z) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \cdot f(z_0) \right) \\
&= f'(z_0) \cdot g(z_0) + g'(z_0) \cdot f(z_0) \\
&= (f' \cdot g + g' \cdot f)(z_0)
\end{aligned}$$

Logo $(f \cdot g)'(z_0) = (f' \cdot g + g' \cdot f)(z_0)$;

5.

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f/g)(z) - (f/g)(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z)/g(z)) - (f(z_0)/g(z_0))}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \frac{(f(z)g(z_0) - (f(z_0)g(z)))}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \frac{(f(z)g(z_0) - f(z)g(z) + f(z)g(z) - (f(z_0)g(z)))}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left(\frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \cdot f(z) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) \right) \\
&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot g(z) - \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \cdot f(z) \right) \\
&= \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - g'(z_0) \cdot f(z_0)}{g^2(z_0)}
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}(z_0).$$

□

Pelo que vimos, a soma, a diferença, a multiplicação por um escalar, o produto e o quociente (quando existir) de funções holomorfas, é também uma função holomorfa. O que combinado com as proposições anteriores, resulta que polinômios complexos são funções holomorfas:

Proposição 1.1.5. *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, um polinômio de coeficientes complexos. p é holomorfo e*

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + 2 a_2 z + a_1$$

Demonstração. Segue diretamente das proposições e do teorema anterior. \square

Seguindo com algumas definições que ainda nos serão úteis, diremos que uma aplicação holomorfa $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, em um aberto U , é uma aplicação **conforme** quando sua derivada f' é não nula em U . Diremos ainda que uma aplicação é **univalente** quando for bijetiva. Agora, sobre subconjuntos de números complexos \mathbb{C} , diremos que são **domínios** os que forem abertos e conexos.

Trabalhar sobre domínios a importantes propriedades afinal, sobre domínios, funções holomorfas são contínuas:

Teorema 1.1.6. *Toda aplicação holomorfa definida em um aberto é contínua.*

Demonstração. Sejam f uma aplicação holomorfa definida num domínio D e $z_0 \in D$. Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Logo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

\square

Ainda sobre domínios temos uma importante definição, que pode ser encontrada em Ahlfors [1]:

Definição 1.1.7. *Um domínio U é **simplesmente conexo** se seu complementar, no plano estendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, é conexo.*

Para nós uma importante propriedade sobre conjuntos simplesmente conexos, é a de que eles possuem fronteiras conexas, o que pode ser encontrado em Milnor [12].

Teorema 1.1.8. *A fronteira de qualquer conjunto simplesmente conexo em $\overline{\mathbb{C}}$ é conexa.*

Outra coisa muito importante para nós serão as sequências de funções holomorfas. Denominemos por $\mathcal{H}(U)$ o conjunto das funções holomorfas definidas em um aberto U . Uma sequência de funções holomorfas é uma função

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{H}(U) \\ n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

Representaremos a sequência por (f_n) . Uma sequência como esta nada mais é do que uma lista de funções. Algo fundamental em análise é, ao estudar sequências, analisar sua convergência:

Definição 1.1.9. Diremos que uma sequência de funções holomorfas (f_n) **converge** se a sequência de números complexos $(f_n(z))$ converge para todo $z \in U$. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a função tal que $f_n(z) \rightarrow f(z)$, $\forall z \in U$. Denotamos por $\lim f_n = f$ ou $f_n \rightarrow f$.

Ainda sobre convergência, podemos falar sobre sua uniformidade:

Definição 1.1.10. Diremos que uma sequência convergente de funções holomorfas (f_n) de $\mathcal{H}(U)$, que possui $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ como limite, converge para f **uniformemente** em um compacto $K \subset \mathcal{C}$ se, para todo $\epsilon > 0$, tomado arbitrariamente, existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$, $\forall z \in K$ e $\forall n > N$.

Se (f_n) converge uniformemente para f em todo subconjunto compacto de U dizemos que (f_n) converge uniformemente nas partes compactas de U .

Segundo Weierstrass esta função limite f , de uma convergência uniforme de sequências holomorfas, é também uma função holomorfa.

Teorema 1.1.11 (Teorema da convergência uniforme de Weierstrass). *Se a sequência de funções holomorfas $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente para uma função limite f , então f é também holomorfa. Além disso, a sequência de derivadas f'_n converge, uniformemente em qualquer subconjunto compacto de U , para a derivada f' .*

A demonstração deste resultado por ser encontrada em Milnor [\[12\]](#).

1.2 Sistemas Dinâmicos

Sistemas dinâmicos estudam o comportamento no tempo de sistemas em evolução. A teoria moderna que o envolve se origina no século XIX, cujas questões fundamentais são a respeito da estabilidade e evolução do sistema solar. A busca desse entendimento gerou um campo muito vasto que se aplica na astronomia, biologia, economia, física, meteorologia e muitas outras áreas.

Por analogia a mecânica celeste, a evolução de um estado em sistemas dinâmicos é apresentada como uma *órbita*.

Um **Sistema Dinâmico Discreto** consiste de um conjunto não vazio X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$. Para $n \in \mathbb{N}$, a ***n-ésima iterada*** de f é a n -ésima composição $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$. Definimos $f^0 = Id$. Se f é inversível, então $f^{-n} = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$, f^{-1} se compõe n vezes consigo mesmo. Como $f^{m+n} = f^m \circ f^n$, o conjunto destas iteradas é um grupo quando f for inversível, e um semigrupo caso contrário.

Apesar de termos definido sistemas dinâmicos de forma arbitrária, tomando X um conjunto qualquer, normalmente X possui estruturas adicionais que são preservadas pela aplicação f . Estas estruturas serão suas propriedades dinâmicas.

Para $x \in X$, definimos sua semi-órbita positiva $\mathcal{O}^+(x)$ como o conjunto dos pontos $x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots$. Agora se f for inversível sua semi-órbita negativa $\mathcal{O}^-(x)$ será formada pelos pontos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots$. Assim definimos a **órbita** de x por $\mathcal{O}(x)$, sendo este a união das semi-órbitas positivas e negativas.

Um ponto fixo de f é um ponto x_0 satisfazendo $f(x_0) = x_0$, assim $f^n(x_0) = x_0$ para todo n . Sendo assim, a órbita de um ponto fixo é uma sequencia constante x_0, x_0, \dots .

Uma órbita é chamada **periódica ou ciclo**, de período n , se o ponto x_0 é periódico de período n , isto é, $f^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$ e $f^k(x_0) \neq x_0$ para todo $k < n$.

Se x_0 for um ponto periódico de período k , então x_0 é ponto fixo de f^k , ou seja, $f^k(x_0) = x_0$.

Diremos que a órbita de x_0 é **eventualmente periódica** se x_0 não é um ponto periódico mas algum ponto de sua órbita o é. De maneira análoga definimos **eventualmente fixo**.

Dados um subconjunto $A \subset X$ e $n > 0$, seja $f^n(A)$ a imagem de A por f^n , e seja $f^{-n}(A)$ sua pré-imagem por f^n , isto é, $f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A) = \{x \in A : f^n(x) \in A\}$. Observe que $f^{-n}(f^n(A)) \subset A$, mas não necessariamente é igual em sistemas não invertíveis. Um subconjunto $A \subset X$ é **f-invariante** se $f^t(A) \subset A$ para todo n .

Para classificar sistemas dinâmicos precisamos de uma noção de equivalência. Sejam (X, f) e (Y, g) sistemas dinâmicos. Uma **semi-conjugação** de (Y, g) para (X, f) , ou brevemente de g para f , é uma aplicação sobrejetiva $\pi : Y \rightarrow X$ satisfazendo $f^n \circ \pi = \pi \circ g^n$, para todo n .

Uma semi-conjugação invertível é chamada **conjugação**. Se existe uma conjugação entre sistemas dinâmicos eles são ditos **conjugados**; conjugação é uma relação de equivalência. Para classificar sistemas dinâmicos são estudadas classes de equivalências da conjugação que preservam certas estruturas. Em sistemas dinâmicos as vezes conjugações são chamadas de *isomorfismos*.

1.3 Algumas questões topológicas

Topologia é uma área da matemática que estuda certas propriedades de figuras que não variam quando suas formas geométricas são deformadas. Particularmente importantes no estudo dos espaços topológicos são as funções conhecidas como homeomorfismos.

Definição 1.3.1. *Sejam X e Y espaços topológicos; seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Se f e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ são contínuas, f é chamado um **homeomorfismo**.*

Equivalentemente, dizer que f é um homeomorfismo, é dizer que é uma correspondência bijetiva, onde $f(U)$ é aberto, se e só se, $U \subset X$ é aberto.

Nesse sentido, se propriedades geométricas de uma figura se mantêm invariantes, através de um homeomorfismo, então elas são chamadas propriedades topológicas da figura.

Dessa forma, intuitivamente, dizemos que duas superfícies são homeomorfas ou topologicamente equivalentes, se uma delas é uma contração, flexão ou torção da outra, através de um homeomorfismo, sem que hajam rupturas. E caso desejemos efetuar um corte, as extremidades de cada corte se reúnam com a outra da mesma forma que antes de efetuá-lo.

Estas relações topológicas podem acontecer apenas a níveis locais, isto é, em pequenas vizinhanças de uma figura. Neste caso, homeomorfismos locais são suficientes.

Definição 1.3.2. *Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$, entre espaços topológicos X e Y , é um **homeomorfismo local**, quando cada $x \in X$ está contido em um aberto $U \subset X$, tal que $V = f(U)$ é um aberto de Y e $f|_U$ é um homeomorfismo de U sobre V .*

Claramente o que é preservado globalmente se é localmente, embora a recíproca nem sempre seja verdadeira:

Todo homeomorfismo (global) é um homeomorfismo local. Homeomorfismos locais são aplicações contínuas abertas. Em particular, a imagem $f(X)$ é um subconjunto aberto de Y . Assim se X é compacto e Y um espaço de Hausdorff conexo, todo homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetivo.

A existência de um homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ faz com que X herde todas as propriedades topológicas de Y . Agora, se f for sobrejetivo, Y também herda todas as propriedades topológicas de X .

Dados um homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$ e um aberto A de X , a restrição $f|_A$ é um homeomorfismo local de A em $f(A)$.

Se $f : X \rightarrow Y$ homeomorfismo local, então f é localmente injetiva, ou seja, todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que $f|_U$ é injetiva. Já o contrário nem sempre acontece.

O Teorema da função inversa nos dá importantes informações de quando uma função é um homeomorfismo local. Ele diz basicamente que, se diferencial de uma função em um ponto é invertível, então f é invertível na vizinhança desse ponto.

Teorema 1.3.3 (Função Inversa). *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k e Df é invertível em um ponto x_0 então f é localmente um difeomorfismo de classe C^k , em alguma vizinhança de x_0 , onde Df é a diferencial de f .*

Este resultado apresenta diferentes definições equivalentes, algumas delas assim como algumas de suas demonstrações podem ser encontradas em [\[8\]](#) (Elon).

1.4 Espaços de Recobrimento

Sejam X e Y espaços topológicos. Pelo teorema da função inversa [1.3.3](#) podemos concluir que algumas funções $f : X \rightarrow Y$ são homeomorfismos locais, o que naturalmente nos leva à pergunta: Quando homeomorfismos locais são homeomorfismos globais? Homeomorfismos locais são aplicações abertas, afinal levam abertos em aberto. Desta forma é suficiente perguntar quando f é injetiva.

Segundo Elon [\[9\]](#), "o instrumento clássico mais adequado para estudar se homeomorfismos locais são globais e, mais geralmente, para obter regiões restritas às quais ele é injetivo, é o método de *prolongamento analítico*". Que é o seguinte:

Dado um homeomorfismo local $f : X \rightarrow Y$, tome $y \in f(X)$. Para cada $x \in X$ onde $f(x) = y$, existem vizinhanças $U \ni x$ e $V \ni y$ tais que $f : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo e $g = (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo local de f , conhecido como um *ramo de f^{-1}* . O interesse é estender este ramo g a uma região mais ampla do que V . Isso se dá por meio de levantamentos e a noção de *recobrimientos* nos dá novas condições de quando poderemos fazê-lo.

Um **levantamento** para um caminho γ , digamos entre $y = f(x), y' \in f(X)$, ocorre quando existe um caminho $\widehat{\gamma}$ em X começando em x , tal que $g(\widehat{\gamma}(s)) = \gamma(s)$ para todo $s \in I$.

Já uma aplicação $f : \widehat{X} \rightarrow X$ é uma **aplicação de recobrimento** ou simplesmente um **recobrimento** quando cada $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $f^{-1}(V) = \cup_{\alpha} \mathcal{U}_{\alpha}$ é uma reunião de abertos \mathcal{U}_{α} , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por f homeomorficamente sobre V . Cada aberto V desse tipo chama-se *vizinhança distinguida*. O espaço \widehat{X} chama-se **espaço de recobrimento** de X e, para cada $x \in X$, o conjunto $f^{-1}(x)$ chama-se a *fibra* de x . Às vezes, X chama-se *base*.

Uma aplicação de recobrimento $f : \widehat{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local de \widehat{X} sobre X .

Se X é um espaço localmente de Hausdorff localmente conexo, cada vizinhança distinguida V pode ser tomada conexa e de Hausdorff. Assim sendo, não precisaremos supor na decomposição que os abertos \mathcal{U}_{α} sejam dois a dois disjuntos. Neste caso, os conjuntos \mathcal{U}_{α} são componentes conexas da imagem inversa $f^{-1}(V)$.

Ainda segundo Elon [\[9\]](#), quando \widehat{X} é compacto e X é conexo de Hausdorff, toda aplicação de recobrimento $f : \widehat{X} \rightarrow X$ tem um número finito de folhas. Neste caso, $X = f(\widehat{X})$ é necessariamente compacto.

Um fato importante é saber identificar quando homeomorfismos locais são recobrimientos, para isto definimos:

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ diz-se **fechada** quando a imagem de todo subconjunto fechado de X é um fechado de Y .

Uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada **própria** quando é fechada e, para todo $y \in Y$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é compacta.

Com esses conceitos em mãos temos o seguinte critério:

Proposição 1.4.1. *Sejam X um espaço de Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local. Cada uma das afirmações abaixo implica a seguinte:*

1. *Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que cada imagem inversa $f^{-1}(y)$, com $y \in Y$, possui n elementos.*
 2. *f é própria e sobrejetiva*
 3. *f é uma aplicação de recobrimento cujas fibras $f^{-1}(y)$ são finitas.*
- Se Y for conexo, então as 3 afirmações são equivalentes.*

Como resultado disso temos que homeomorfismos locais sobrejetivos entre espaços de Hausdorff cujo domínio é compacto são recobrimentos.

Corolário 1.4.2. *Se X é compacto de Hausdorff e Y é de Hausdorff então todo homeomorfismo local sobrejetivo $f : X \rightarrow Y$ é um recobrimento.*

Para nós um importante recobrimento é o de polinômios complexos quadráticos, que o é ao se excluir do plano complexo seu ponto crítico no domínio e sua imagem no contradomínio.

Exemplo 1.4.3. *Sejam $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio complexo e $F \subset \mathbb{C}$ o conjunto finito formado pelas raízes de $f'(z)$. Pondo $X = \mathbb{C} - f^{-1}(f(F))$ e $Y = \mathbb{C} - f(F)$, vemos que a restrição $f|_X : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo local e uma aplicação própria; $f|_X$ é sobrejetivo porque Y é conexo. Logo $f|_X$ é um recobrimento com n folhas, onde n é o grau de f . Em particular, a aplicação $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{c\}$, $f(z) = z^2 + c$, é um recobrimento.*

1.5 Superfícies de Riemann

O estudo das Superfícies de Riemann é o estudo dos espaços que localmente se comportam como subconjuntos abertos do plano complexo.

Dado um espaço topológico X , para fazê-lo se parecer localmente como um subconjunto aberto do plano conexo, desejamos ter uma coordenada complexa local em todo ponto do espaço; assim esta coordenada poderia ser utilizada para definir todas as noções locais de funções complexas de uma variável. Esta coordenada em um espaço será uma função do espaço no espaço desejado, no caso o plano complexo. O que os leva a definição:

Definição 1.5.1 (Carta). *Uma **carta** ϕ de X é um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ de um subconjunto aberto U de X em um subconjunto aberto V de \mathbb{C} .*

Sejam $\phi : U \rightarrow V$ e $\psi : U' \rightarrow V'$ duas cartas de X . Considere as aplicações

$$\begin{aligned}\phi_o : U \cap U' &\rightarrow \phi(U \cap U') \\ \psi_o : U \cap U' &\rightarrow \psi(U \cap U')\end{aligned}$$

tais que $\phi_o(a) = \phi(a)$ e $\psi_o(a) = \psi(a)$.

Observe que a aplicação

$$\phi_o \circ \psi_o^{-1} : \phi(U \cap U') \rightarrow \psi(U \cap U'),$$

está bem definida, onde claramente $\phi(U \cap U')$ e $\psi(U \cap U')$ são abertos. Esta aplicação $\phi_o \circ \psi_o^{-1}$ é chamada **carta de transformação**.

Por definição, uma superfície é um espaço de Hausdorff onde cada um de seus pontos $a \in X$ admite uma carta, onde a está contido em seu domínio.

Definição 1.5.2. Um **Atlas** \mathcal{A} de um espaço topológico X é uma coleção de cartas $\phi : U_\phi \rightarrow V_\phi$ tais que seus domínios cobrem X .

Quando X possuir um atlas, X se comportará como o plano complexo $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Assim uma **superfície** será um espaço de Hausdorff que admite um atlas.

Definição 1.5.3. Duas cartas ϕ e ψ em uma superfície X são ditas **analiticamente compatíveis** se a carta de transformação $\phi \circ \psi^{-1}$ é biholomorfa (holomorfa com inversa holomorfa).

Definição 1.5.4. Um atlas \mathcal{A} de uma superfície X é chamado **analítico** se quaisquer duas cartas de \mathcal{A} são analiticamente compatíveis.

É claro que uma superfície pode admitir diversos atlas. Dados dois atlas analíticos de X , sua união pode vir a ser também analítica. Caso isto ocorra, cada carta de um dos atlas é analiticamente equivalente a qualquer carta do outro. Tais atlas exercem as mesmas funções e serão chamados essencialmente iguais.

Definição 1.5.5. Dois atlas analíticos \mathcal{A} e \mathcal{B} são ditos **essencialmente iguais** se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é também um atlas analítico.

Esta relação é de equivalência. Denotaremos por $[\mathcal{A}]$ a classe de equivalência dos atlas essencialmente iguais à \mathcal{A} .

Definição 1.5.6. Uma **Superfície de Riemann** é um par $(X, [\mathcal{A}])$ onde X é uma superfície e $[\mathcal{A}]$ uma classe de equivalência de atlas essencialmente iguais.

Portanto Superfícies de Riemann são superfícies topológicas com um distinto atlas analítico.

Como pode ser visto Superfícies de Riemann são Variedades Complexas de dimensão 1:

Definição 1.5.7. Uma **Variedade Complexa n-dimensional** é um par $(X, [\mathcal{A}])$ onde X é uma superfície e $[\mathcal{A}]$ uma classe de equivalência de atlas essencialmente iguais onde seus elementos são cartas cuja imagem são subconjuntos abertos de \mathbb{C}^n .

Uma Variedade Complexa n-dimensional pode ser localmente identificada como o $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

Exemplo 1.5.8. O plano complexo \mathbb{C} , a esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, o toro \mathcal{T} e o disco complexo de raio 1 \mathbb{D} são Superfícies de Riemann.

Uma aplicação $f : S \rightarrow S'$ entre superfícies de Riemann é dita **biholomorfa** ou **conforme** se é um homeomorfismo onde f e f^{-1} são aplicações holomorfas.

Dua Superfícies de Riemann S e S' são ditas **conformemente equivalentes** ou **biholomorficamente equivalentes** se, e somente se, existe uma aplicação biholomorfa $f : S \rightarrow S'$. Elas são também topologicamente equivalentes. Em particular, quando $S = S'$, diremos que $f : S \rightarrow S$ é um **automorfismo conforme** de S .

Uma definição equivalente à definição 1.1.7, é a de que uma superfície S é dita **simplesmente conexa** se toda aplicação de uma circunferência para S pode ser continuamente deformada para uma aplicação constante, o que pode ser encontrado em Ahlfors [1].

Como pode ser visto em Milnor [12], existem infinitas superfícies de Riemann conformemente distintas. Agora no caso simplesmente conexo existem apenas três superfícies distintas, como pode ser verificado na generalização do *Teorema da Aplicação de Riemann*:

Teorema 1.5.9 (Teorema da Uniformização). *Toda superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente (biholomorfa):*

[i)] ou ao plano complexo \mathbb{C} ; ou disco unitário (aberto) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$; ou à Esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, usando $\zeta = 1/z$ como carta local em uma vizinhança do infinito.

Devido à riqueza que a Álgebra possui, obtida através de milênios, o que não acontece com a Topologia, que é muito mais ressentida, é sempre interessante associar, quando possível, questões topológicas como espaços e propriedades com estruturas e propriedades algébricas:

Para uma superfície de Riemann S , denotemos por $\mathcal{G}(S)$ o grupo dos automorfismos conformes de S . A aplicação identidade será denotada por $I = I_S \in \mathcal{G}(S)$.

Primeiramente consideraremos o caso da Esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}}$. O grupo $\mathcal{G}(\bar{\mathbb{C}})$ pode ser identificado por um conhecido grupo de Lie. Que não apenas é um grupo, mas também uma variedade complexa, e o produto e o quociente de elementos desse grupo também são aplicações holomorfas.

Proposição 1.5.10 (Transformações de Möbius). *O grupo $\mathcal{G}(\overline{\mathbb{C}})$ de todos os automorfismos conformes da Esfera de Riemann é igual ao grupo de frações de transformações lineares, também conhecido como Transformações de Möbius,*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

cujos coeficientes são números complexos, onde $ad - bc \neq 0$.

No caso do plano complexo \mathbb{C} e do disco unitário \mathbb{D} , $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ são subgrupos de Lie de $\mathcal{G}(\overline{\mathbb{C}})$.

Corolário 1.5.11 (O Grupo Afim). *O grupo $\mathcal{G}(\mathbb{C})$ de todos os automorfismos conformes do plano complexo consiste de todas as transformações afins*

$$f(z) = \lambda z + c$$

com coeficientes complexos $\lambda \neq 0$ e c .

Proposição 1.5.12 (Automorfismos de \mathbb{D}). *O grupo $\mathcal{G}(\mathbb{D})$ de todos os automorfismos conformes do disco unitário pode ser identificado como um subgrupo de $\mathcal{G}(\overline{\mathbb{C}})$ consistindo de todas as aplicações*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

com a no disco unitário e $e^{i\theta}$ em sua fronteira.

As demonstrações destes resultados também podem ser encontradas em Milnor [\[12\]](#).

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que nos auxiliarão a estudar alguns aspectos dinâmicos dos polinômios de Cremer.

2.1 Normalidade

Sejam S e T superfícies de Riemann. Nesta seção estudaremos a compacidade do espaço de funções $Hol(S, T)$, que consiste de todas as funções holomorfas de S em T . Este espaço é um subconjunto do espaço $Map(S, T)$, que é o espaço de todas as aplicações contínuas de S em T . Para isto definiremos sua topologia que é conhecida como **topologia da convergência uniforme em subconjuntos compactos**, ou simplesmente, **topologia da convergência uniforme local**.

Definição 2.1.1. *Seja X um espaço localmente compacto e Y um espaço métrico. Para todo f nos espaço de aplicações contínuas $Map(X, Y)$, definimos a família $N_{K, \varepsilon}(f)$ de vizinhanças básicas de f como se segue: Para qualquer subconjunto compacto $K \subset X$ e qualquer $\varepsilon > 0$, seja $N_{K, \varepsilon}(f)$ o conjunto de todas as aplicações $g \in Map(X, Y)$ satisfazendo a condição*

$$dist(f(x), g(x)) < \varepsilon \text{ para todo } x \in K.$$

Um subconjunto $U \in Map(X, Y)$ é definido como aberto se, e somente se, para toda aplicação f de U existirem K e ε como acima de forma que sua vizinhança básica $N_{K, \varepsilon}(f)$ esteja contida em U .

Definida a topologia temos que $Map(X, Y)$ é um bem definido espaço de Hausdorff e podemos trabalhar com a convergência destas aplicações.

Uma sequência de aplicações $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X em Y **converge localmente uniformemente** se

[a)] para todo compacto $K \subset X$, $\{f_n|_K\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g|_K$.

ou equivalentemente,

[b)] se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança N tal que $\{f_n|_N\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $g|_N$.

Esta topologia de $Map(X, Y)$ depende unicamente da topologia de X e Y e não da particular escolha da métrica de Y . Além disso, se X é σ -compacto, isto é, se X pode ser expresso como uma reunião enumerável de subconjuntos compactos, então $Map(X, Y)$ é um espaço métrico.

Estes resultados podem ser encontrados em Milnor [12]. Também de Milnor temos que superfícies de Riemann são espaços métricos σ -compactos. Desta forma podemos utilizar todos estes conceitos de convergência uniforme local para o espaço de aplicações $Hol(S, T)$, de funções holomorfas entre superfícies de Riemann S e T . Temos ainda que o espaço $Hol(S, T)$ é um subconjunto fechado do espaço $Map(S, T)$.

Similarmente, dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de S em T **diverge localmente uniformemente de \mathbf{T}** , se para todo compacto $K \subset S$ e $K' \subset T$, tivermos $f_n(K) \cap K' = \emptyset$ para n suficientemente grande (não tem como isso ocorrer se T é compacto).

Na dinâmica uma importante definição é a de normalidade. É ela que nos dá as diretrizes iniciais para se trabalhar em seus principais conjuntos, os de Fatou e de Julia, que em breve serão definidos.

Definição 2.1.2 (Normalidade). *Uma coleção \mathcal{F} de aplicações holomorfas de uma superfície de Riemann S à uma (possivelmente não-compacta) superfície de Riemann T é dita **normal** se toda sequência infinita de \mathcal{F} possui uma subsequência que converge localmente uniformemente, ou uma subsequência que diverge localmente uniformemente de T .*

Caso T seja compacto, uma definição equivalente, é a de que uma família \mathcal{F} é normal se $\overline{\mathcal{F}} \subset Hol(S, T)$ é um conjunto compacto.

Proposição 2.1.3. *Sejam S , U e T superfícies de Riemann onde $U \subset T$ e seja $f_n : S \rightarrow U$ uma sequência de aplicações holomorfas que diverge localmente uniformemente de U mas não de T . Então existe uma subsequência que converge localmente uniformemente à uma aplicação constante de S à um único ponto de $\partial U \subset T$.*

Corolário 2.1.4. *Sejam S , U e T superfícies de Riemann, com $U \subset T$. Uma família \mathcal{F} de aplicações de S à U é normal se, e somente se, ela é normal quando seus elementos são considerados de S em T .*

Teorema 2.1.5 (Montel). *Seja S uma superfície de Riemann e seja \mathcal{F} a família das aplicações holomorfas $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que omitem três valores, isto é, onde $f(S) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$, onde $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ são distintos. Então \mathcal{F} é uma família normal, ou seja, $\overline{\mathcal{F}} \subset Hol(S, T)$ é um conjunto compacto.*

2.2 Conjuntos de Fatou e Julia

Nas ultimas décadas, imagens computadoriais de conjuntos de Julia tem se tornado exemplos muito populares de matemática moderna. A complexidade de suas imagens se contrastam com os simples polinômios cujas iteradas as geram. Segundo Alexander [2], o estudo de iterações começou com o método de Newton, que de forma rudimentar eram conhecido como *babilônios*, mas foi apenas na década de 1870 que Schröder e Cayley estudaram independentemente o método de Newton sobre o plano complexo. Enquanto Cayley se focou no método em si, Schröder o estudou com o intuito de encontrar pontos fixos. Nas décadas seguintes outros matemáticos desenvolveram as ideias apresentadas por Schröder e Cayley, mas falharam em criar uma teoria global envolvendo iteradas, em criar uma teoria que descrevesse o comportamento de todas as funções racionais no plano complexo. Em 1915, a Academia Francesa de Ciências anunciou que iria premiar, em 1918, no *Grand Prix des Sciences Mathématiques*, tal teoria geral e global. Os dois matemáticos que conseguiram desenvolver a teoria moderna de dinâmica complexa foram Gaston Julia, que venceu o concurso, e Pierre Fatou que, apesar de ter retirado seu trabalho do concurso, ficou em segundo lugar. Ambos viram que a iteração de qualquer função particiona o plano complexo em uma região cuja família das iteradas é normal, que foi denominado conjunto de Fatou, e em uma outra onde não ocorre esta normalidade, denominado conjunto de Julia.

Definição 2.2.1 (Conjuntos de Fatou e Julia). *Sejam S uma superfície de Riemann compacta, $f : S \rightarrow S$ uma aplicação holomorfa não constante e $f^n : S \rightarrow S$ sua n -ésima iterada. O conjunto dos pontos de S onde a família de iteradas $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é normal é chamado **Conjunto de Fatou** (F) e seu complementar é chamado **Conjunto de Julia** (J).*

O conjunto de Fatou é um conjunto aberto por definição. É também ou vazio ou denso em \bar{C} . Afinal dado um ponto $p \in F$ sempre é possível encontrar uma vizinhança do mesmo onde a sequência f^n restrito a ela é normal. Assim, o conjunto de Julia é fechado.

Estes conjuntos não apenas particionam o espaço como também são invariantes por meio de iterações, ou seja, se conservam dinamicamente:

Lema 2.2.2 (Lema da Invariância). *O conjunto de Julia J da aplicação holomorfa $f : S \rightarrow S$ é invariante sobre f , isto é, $z \in J$ se, e somente se, $f(z) \in J$.*

- ‡. *Demonstração.* Uma afirmação equivalente é que o conjunto de Fatou é invariante. Seja $U \subset S$ qualquer. Uma sequência de iteradas (f^{n_j}) converge uniformemente em subconjuntos compactos de U se, e somente se, a sequência correspondente de iteradas $(f^{n_j+1}) = (f^{n_j}(f))$ converge uniformemente em subconjuntos compactos do aberto $f^{-1}(U)$. \square

Desta invariância podemos observar que o conjunto de Julia possui uma grande **auto-similaridade**: Sempre que $f(z_1) = z_2$ em J , com derivada $f'(z_1) \neq 0$,

existe um induzido isomorfismos conforme de uma vizinhança N_1 de z_1 para uma vizinhança N_2 de z_2 , que leva $N_1 \cap J$ precisamente em $N_2 \cap J$.

Lema 2.2.3 (Lema da Iteração). *Para qualquer $k > 0$, o conjunto de Julia $J(f^k)$ da k -ésima iterada de f coincide com o conjunto de Julia $J(f)$ de f .*

Demonstração. Esta afirmação é equivalente para o conjunto de Fatou. Seja $z \in F(f^2)$. Portanto para alguma vizinhança U de z , a família $\{f^{2n}|_U\}$ é normal, isto é, está contida em um subconjunto compacto $K \subset Hol(U, S)$. Segue que toda iterada de f restrita à U pertence ao conjunto compacto $K \cup f(K) \subset Hol(U, S)$, pois $f^{2n+1} = f \circ f^{2n}$, logo $z \in F(f)$. \square

Da análise complexa, como pode ser encontrado em Florentino [5] toda aplicação holomorfa $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ pode ser expressa como uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$, onde $p(z)$ e $q(z)$ são polinômios complexos, que consideraremos sem raízes em comum. O grau d de $f = p/q$ é o grau máximo entre os graus de p e q .

Um simples exemplo desses conjuntos pode ser obtido através da aplicação holomorfa $f(z) = z^2$, que possui como conjunto de Julia o círculo unitário e seu complemento como o conjunto de Fatou. Para isto considere $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, onde $f(z) = z^2$. Seja $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z|^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ o disco unitário centrado na origem. Observe que $f^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, em todo subconjunto compacto de \mathbb{D} . Portanto $\mathbb{D} \subseteq F$. Similarmente, o exterior $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ está em F pois em todo subconjunto compacto de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, f^n converge para a função constante $s \mapsto \infty$, fora de $\overline{\mathbb{D}}$. Agora para todo $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, em toda vizinhança de z_0 , o limite de f^n necessariamente teria uma descontinuidade do tipo salto ao atravessar o disco unitário, então o conjunto de Julia é o disco unitário, $J = \partial\mathbb{D}$.

Uma importante propriedade no estudo dinâmico dos conjuntos de Fatou e Julia são as órbitas periódicas:

Definição 2.2.4 (Órbitas). *Considere a órbita periódica ou ciclo $f : z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_{m-1} \rightarrow z_m = z_0$ da aplicação holomorfa $f : S \rightarrow S$ (S pode ser qualquer superfície de Riemann, compacta ou não-compacta).*

*[i)] Se os pontos z_1, \dots, z_m são distintos, então o inteiro $m \geq 1$ é chamado período. A primeira derivada da m -ésima iterada f^m em um ponto da órbita periódica é um bem definido número complexo chamado, **multiplicador** da órbita. Se a superfície de Riemann S é um subconjunto aberto de \mathbb{C} , então temos $\lambda = (f^m)'(z_i) = f'(z_1) \cdot f'(z_2) \cdot \dots \cdot f'(z_m)$. Em particular, $\lambda = 0$ se, e somente se, algum ponto z_j da órbita é **ponto crítico** de f , ou seja, um ponto onde a derivada se anula. Em geral, para superfícies de Riemann, determinamos o multiplicador usando cartas locais em vizinhanças de pontos da órbita. O produto λ independe da escolha da carta.*

Uma órbita periódica é **atratora**, **repulsora** ou **indiferente** de acordo com o seu multiplicador ser $|\lambda| < 1$, $|\lambda| > 1$ ou $|\lambda| = 1$, respectivamente. A órbita é **super-atratora** se $\lambda = 0$ e **geometricamente atratora** se $0 < |\lambda| < 1$.

Definição 2.2.5. Se \mathcal{O} é uma órbita periódica atratora de período m , definimos a **bacia de atração** de \mathcal{O} como um subconjunto aberto $\mathcal{A} \subset S$ consistindo de todos os pontos $z \in S$ no qual as iteradas sucessivas $f^m(z), f^{2m}(z), \dots$ convergem para algum ponto de \mathcal{O} .

Em superfícies compactas orbitas periódicas atradoras pertencem ao conjunto de Fatou e repulsoras ao conjunto de Julia:

Lema 2.2.6 (Bacias e pontos repulsores). *Em uma superfície compacta S toda órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou de f . Na verdade a bacia de atração \mathcal{A} de uma órbita periódica atratora está contida no conjunto de Fatou de f . Além disso, toda órbita periódica repulsora está contida no conjunto de Julia. ($\mathcal{O}_A \subset F$), $\mathcal{A} \subset F$ e $\mathcal{O}_R \subset J$).*

¶. Demonstração. Demonstraremos para um ponto fixo $z_0 = f(z_0)$, pois, pelo lema [2.2.3](#), podemos relacionar o que acontece com pontos fixos com pontos periódicos, uma vez que um ponto fixo de f é ponto periódico de f^m . Se $|\lambda| > 1$, ou seja, se z_0 é repulsor, então nenhuma sequência de iteradas consegue convergir uniformemente numa vizinhança de z_0 , pois a primeira derivada de f^n em z_0 é λ^n , que diverge para infinito quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, repulsores pertencem a Julia. Por outro lado, se z_0 é atrator, isto é, se $|\lambda| < 1$, podemos escolher um $|\lambda| < c < 1$ de forma que pelo teorema de Taylor temos $|f(z) - z_0| \leq c|z - z_0|$, para z suficientemente próximo de z_0 . Então, as sucessivas iteradas de f restritas a tal vizinhança, converge uniformemente para a função constante $z \mapsto z_0$. Ou seja, pontos atratores estão em Fatou. O resultado equivalente para qualquer subconjunto compacto da bacia de atração \mathcal{A} segue assim naturalmente. \square

O caso para pontos indiferentes é muito mais complicado e ainda neste trabalho desenvolveremos uma pouco de sua diversidade.

Chamamos um ponto periódico $z_0 = f^n(z_0)$ de **parabólico** se seu multiplicador $\lambda^n = 1$ em z_0 e $f^n \neq Id$. Ou mais geralmente, se λ é raiz da unidade e $f^n \neq Id, \forall n$.

Lema 2.2.7 (Pontos Parabólicos). *Todo ponto periódico parabólico pertence ao conjunto de Julia.*

Daqui pra frente nos ateremos a aplicações racionais $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ de grau $d \geq 2$. Neste caso o conjunto de Julia é sempre não-vazio.

Lema 2.2.8 ($J \neq \emptyset$). *Se f é de grau 2 ou mais então $J(f) \neq \emptyset$.*

Outros conceitos que também precisaremos são:

Por **grande órbita** de um ponto z sobre $f : S \rightarrow S$, denotamos o conjunto $GO(z, f)$, consistindo dos pontos $z' \in S$ cuja órbita em algum momento intercepta à órbita de z . Então z e z' tem a mesma grande órbita se, e somente se, $f^m(z) = f^n(z')$, para algum $m \geq 0$ e $n \geq 0$. Um ponto $z \in S$ é dito ter **grande órbita finita** se sua grande órbita $GO(z, f) \subset S$ é um conjunto finito.

Existe um número limitado de grandes órbitas finitas e elas pertencem ao conjunto de Fatou:

Lema 2.2.9 (Grande Órbitas Finitas). *Se $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ é uma aplicação racional de grau $d \geq 2$, então o conjunto $E(f)$ das grandes órbitas finitas pode ter no máximo dois elementos. Estas grandes órbitas finitas se existem, devem ser sempre de pontos periódicos super-atratores de f e então pertencer ao conjunto de Fatou.*

A união de todas as imagens futuras, de uma vizinhança de um ponto do conjunto de Julia, é o complemento do conjunto das grandes órbitas finitas:

Teorema 2.2.10 (Transitividade). *Seja $z_1 \in J(f) \subset \overline{\mathbb{C}}$ e N uma vizinhança qualquer de z_1 . Então a união U de todas as imagens futuras $f^n(N)$ contém todo o conjunto de Julia e contém todo \mathbb{C} , a menos de dois pontos. Mais precisamente, se N é suficientemente pequeno, então U é o complementar $\overline{\mathbb{C}} \setminus E(f)$ do conjunto de grandes órbitas finitas.*

Demonstração. Pelo lema 2.2.9, $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ contém no máximo dois pontos, pois caso contrário, como $f(U) \subset U$, temos, pelo Teorema de Montel, que U é família normal e portanto está contido no conjunto de Fatou F o que seria uma contradição uma vez que $z_1 \in U \cap J \subset U$.

Ainda de $f(U) \subset U$, temos para $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ que toda pré-imagem de z pertence à $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$. Disso, segue por um princípio de contagem, que alguma pré-imagem iterada é periódica. Então o próprio z é periódico e portanto tem grande órbita finita.

Como o conjunto $E(f)$ das grandes órbitas finitas é disjuntos de J , segue que $J \subset U$.

Agora se N é suficientemente pequeno, de forma que $N \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E(f)$, segue que $U = \overline{\mathbb{C}} \setminus E(f)$.

□

Corolário 2.2.11 (Conjunto de Julia com interior). *Se um conjunto de Julia possui um ponto interior, então deve ser igual a toda à esfera de Riemann.*

Demonstração. Sejam $z \in \text{int}(J(f))$ e $N \subset J$ uma vizinhança de z , logo a união $U \subset J$ das imagens futuras de N é densa em todo lugar, isto é, $\overline{U} = \overline{\mathbb{C}}$. Como J é fechado, $J = \overline{\mathbb{C}}$. □

A fronteira da bacia de atração de uma órbita periódica atratora é igual ao conjunto de Julia:

Corolário 2.2.12 (Fronteira da Bacia de Atração=Conjunto de Julia). *Se $\mathcal{A} \subset \overline{\mathbb{C}}$ é a bacia de atração de alguma órbita periódica atratora, então a fronteira topológica $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$ é igual à todo o conjunto de Julia. Toda componente conexa do conjunto de Fatou $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus J$ ou coincide com alguma componente conexa desta bacia \mathcal{A} ou então é disjunta de \mathcal{A} .*

O conjunto das pré-imagens das iteradas de um ponto do conjunto de Julia é denso.

Corolário 2.2.13 (Pré-imagens de iteradas são densos). *Se z_0 é um ponto qualquer do conjunto de Julia $J(f)$, então o conjunto $\{z \in \mathbb{C}/f^n(z) = z_0 \text{ para algum } n \geq 0\}$ é denso em J .*

Demonstração. Como z_0 não pertence à $E(f)$ pelo teorema da transitividade todo ponto $z_1 \in J$ pode ser aproximado arbitrariamente por pontos z cuja órbita contém z_0 . \square

Corolário 2.2.14 (Sem pontos Isolados). *Se f tem grau $d \geq 2$, então J não possui pontos isolados.*

Demonstração. Observe que J é um conjunto infinito, pois caso contrário ele consistiria de uma grande órbita finita, o que é uma contradição. Então J possui pelo menos um ponto limite z_0 . Logo as pré-imagens iteradas de z_0 formam um conjunto denso de pontos não isolados em J . \square

Corolário 2.2.15 (Componentes do conjunto de Julia). *Para toda aplicação racional de grau maior ou igual à 2, o conjunto de Julia J é ou conexo ou então possui infinitas componentes conexas.*

Para o seguinte corolário consideramos que um resultado é válido para uma escolha genérica de um ponto de J , se é válida para todos os pontos de uma interseção de enumeráveis subconjuntos abertos densos de J .

Corolário 2.2.16 (Transitividade Topológica). *Para uma escolha genérica de $z \in J = J(f)$, a órbita das imagens futuras $\{z, f(z), f^2(z), \dots\}$ é densa em J .*

2.3 Teorema de Böttcher

Seja f uma aplicação com um ponto fixo super-atrator, ou seja, com multiplicador $\lambda = 0$. Sem perda de generalidade podemos fazer uma mudança de parâmetro local de forma que este ponto fixo seja a origem $z = 0$, através da formula de Taylor, logo podemos tomar

$$f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

com $n \geq 2$ e $a_n \neq 0$ onde n é chamado o grau local.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Böttcher). *Para f como acima, existe uma mudança de coordenada holomorfa $w = \phi(z)$, com $\phi(0) = 0$, que conjugua f com a aplicação de n -ésima potencia $w \mapsto w^n$ em alguma vizinhança da origem. Além disso, ϕ é unicamente determinada a menos de uma multiplicação por uma $(n - 1)$ -ésima raiz da unidade.*

Então, próximo de qualquer ponto fixo, f é conjugada por uma aplicação da forma ϕ tal que

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} : w \mapsto w^n,$$

com $n \geq 2$. Este teorema tem importante aplicação na dinâmica polinomial pois, como será mostrado, toda aplicação polinomial $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grau $d \geq 2$ se estende para uma aplicação racional em $\overline{\mathbb{C}}$ de grau $n = d$ de ponto fixo super-atrator no infinito.

2.3.1 Aplicação em Dinâmica Polinomial

Seja

$$f = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

um polinômio de grau $d \geq 2$ e $a_d \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que f é mônico, isto é, $a_d = 1$.

Mostraremos que tais aplicações possuem pontos fixos no infinito de forma que poderemos utilizar o Teorema de Böttcher.

Para estudar o comportamento de f perto do infinito, façamos a substituição $\zeta = 1/z$ e consideremos a função:

$$F(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$$

Para f mônico, $f(z) \simeq z^d$ quando $z \rightarrow \infty$, de forma que $F(\zeta) \approx \zeta^d$ quando $\zeta \rightarrow 0$. Portanto, F tem um ponto super-atrator em $\zeta = 0$, inferindo que ∞ é ponto super-atrator de f .

Definição 2.3.2. *Definimos o conjunto de **Julia Cheio** K como sendo o conjunto de todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais sua órbita por f é limitada.*

O conjunto de Julia Cheio possui as seguintes propriedades:

Lema 2.3.3 (O Conjunto de Julia Cheio). *Para qualquer polinômio f de grau $d \geq 2$, o conjunto de Julia Cheio $K \subset \mathbb{C}$ é compacto, com complementar conexo, cuja fronteira ∂K é igual ao conjunto de Julia J e seu interior é a união de todas as componentes conexas limitadas U do conjunto de Fatou $F = \mathbb{C} \setminus J$. Então K é a união de tais componentes U com o conjunto de Julia J . Toda componente limitada U é necessariamente simplesmente conexa.*

Sabendo, pelo que acabamos de desenvolver, que ∞ é um ponto fixo super-atrator de f e observando pelo corolário [2.2.12](#) e pelo lema [2.3.3](#), que $\mathcal{A}(\infty) = \mathbb{C} \setminus K$. Temos a seguinte equivalência:

Teorema 2.3.4 (K conexo \Leftrightarrow órbitas críticas limitadas). *Seja f um polinômio de grau $d \geq 2$. Se seu conjunto de Julia Cheio K contém todos os pontos críticos de*

f , então K e $J = \partial K$ são conexos, e seu complemento é conformemente isomorfo ao exterior do disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$ pelo isomorfismo

$$\bar{\phi} : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

que conjuga f em $\mathbb{C} \setminus K$ com sua d -ésima potencia $w \mapsto w^n$. Por outro lado, se f tem pelo menos um ponto crítico pertencente à $\mathbb{C} \setminus K$, então ambos K e J tem finitas e enumeráveis componentes conexas.

2.4 Ciclos

Uma órbita periódica também pode ser denotada como **ciclo**. Fatou mostrou que uma aplicação racional de grau maior ou igual à dois, possui um número finito de ciclos atratores ou indiferentes:

Teorema 2.4.1. *Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ uma aplicação racional de grau $d \geq 2$. Então f possui no máximo um número finito de ciclos que são atratores ou indiferentes.*

Em 1987, Shishikura [17] mostrou, usando cirurgias-quasiconformes, que o número de ciclos atratores ou indiferentes é $2d - 2$:

Lema 2.4.2. *Para uma aplicação racional de grau $d \geq 2$, o número de ciclos indiferentes ou atratores é no máximo $2d - 2$.*

Sabemos, pelo lema [2.2.6] que todo ciclo repulsor está contido no conjunto de Julia. Ainda sobre ciclos repulsores temos um resultado mais forte, provado tanto por Fatou quanto por Julia:

Teorema 2.4.3. *O conjunto de Julia de qualquer aplicação racional de grau ≥ 2 é igual ao fecho do conjunto de seus pontos periódicos repulsores.*

A demonstração deste resultado foge ao escopo deste trabalho. Porém ao leitor mais assíduo esta se encontra em Milno [12].

Corolário 2.4.4. *Se U é um conjunto aberto que intersecta o conjunto de Julia J de f , então para n suficientemente grande a imagem $f^n(U \cap J)$ é igual ao conjunto de Julia J .*

Mais geralmente, se $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ é um compacto qualquer que não contém qualquer grande órbita de pontos finitos, U é um conjunto aberto que intersecta o conjunto de Julia, então $f^{on}(U) \supset K$, para n suficientemente grande. Em particular, se não existem grandes órbitas de pontos finitos, então $f^{on}(U) = \overline{\mathbb{C}}$.

Temos ainda um outro corolário:

Corolário 2.4.5. *Se $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ é um conjunto aberto que intercepta o conjunto de Julia $J(f)$, então nenhuma sequência de iteradas f^n pode convergir localmente uniformemente através de U .*

2.5 Prime Ends

Os Prime ends são ferramentas básicas para relacionar conjuntos abertos de números complexos com seu complementar. Seja U um subconjunto simplesmente conexo de \mathbb{C} cujo complementar $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ é infinito. Pelo teorema [1.5.9](#), existe um isomorfismo conforme

$$\psi : \mathbb{D} \longrightarrow U$$

Em 1913, Carathéodory fez uma análise concisa sobre a relação entre o conjunto compacto ∂U e a fronteira do disco $\partial \mathbb{D}$.

Teorema 2.5.1 (Fatou; Riesz e Riesz). *Para quase todo ponto $e^{i\theta}$ de $\partial \mathbb{D}$ as retas radiais $r \mapsto re^{i\theta}$ são aplicadas sobrejetivamente, por ψ , à curvas de comprimento de arco finito em U . Em particular, o limite radial*

$$\lim_{r \nearrow 1} \psi(re^{i\theta}) \in \partial U$$

existe, para quase todo θ . Contudo, se fixarmos qualquer ponto $u_0 \in \partial U$, então o conjunto de θ 's cujo limite radial é igual à u_0 tem medida de Lebesgue igual à zero.

Diremos que quase toda curva imagem $r \mapsto \psi(re^{i\theta})$ de U termina em um único ponto de ∂U e que diferentes valores de θ quase sempre correspondem a pontos de chegada distintos.

Como sabemos a fronteira ∂U é um conjunto conexo (Teorema [1.1.8](#)).

Lema 2.5.2. *Se duas curvas diferentes $r \mapsto \psi(re^{i\theta_1})$ e $r \mapsto \psi(re^{i\theta_2})$ terminam em um mesmo ponto u_0 em ∂U , então este ponto desconecta a fronteira de U .*

Como fronteira de U é conexa, temos por este resultado que ela possui mais de um elemento.

Denotaremos por **crosscut** para o par $(\overline{U}, \partial U)$, um subconjunto $A \subset U$ que é homeomorfo ao intervalo $(0, 1)$, cujo fecho \overline{A} é homeomorfo ao intervalo fechado com apenas dois pontos de termino em ∂U .

Lema 2.5.3. *Todo crosscut A divide U em duas componentes conexas.*

Qualquer uma das duas componente conexas de $U \setminus A$ será chamada **vizinhança crosscut** $N \subset U$. Observe que de sua vizinhança crosscut sempre podemos obter o crosscut A , pois $A = U \cap \partial N$.

Por uma **cadeia fundamental** $\mathcal{N} = \{N_j\}$ em U , chamaremos a sequência encaixante

$$N_1 \supset N_2 \supset \dots$$

de vizinhanças crosscuts $N_j \subset U$ tais que os fechos $\overline{A_j}$, do correspondentes crosscuts $A_j = U \cap \partial N_j$, são disjuntos e seus diâmetros tendem à zero quando $j \mapsto \infty$,

usando a métrica esférica (Como \overline{U} é conexo isso depende apenas da topologia e não da métrica).

Definição 2.5.4 (Prime Ends). *Duas cadeias fundamentais $\{N_j\}$ e $\{N'_j\}$ são equivalentes se todo N_j contém algum N'_k , e reciprocamente todo N'_k contém algum N_j . Designamos por **Prime End**, para o par $(\overline{U}, \partial U)$, uma classe de equivalência ε de uma cadeia fundamental.*

Existem variações desta definição, aqui nos atemos a uma construção próxima à original de Carathéodory.

A interseção dos fechos $\overline{N_j} \subset \overline{U}$ é intitulada **impressão** da cadeia fundamental $\{N_j\}$ ou do correspondente prime end ε .

Lema 2.5.5. *Para qualquer cadeia fundamental $\{N_j\}$, a interseção dos conjuntos abertos N_j é vazia. Entretanto, a impressão $\cap \overline{N_j}$ é um subconjunto compacto, conexo e não-vazio de ∂U .*

A impressão pode ser um único ponto, para isto é necessário e suficiente que os diâmetros dos N_j tendam à zero quando $j \rightarrow \infty$.

Duas cadeias fundamentais $\{N_j\}$ e $\{N'_k\}$ são **eventualmente disjuntas** se $N_j \cap N'_k = \emptyset$, sempre que j e k forem suficientemente grandes.

Lema 2.5.6. *Quaisquer duas cadeias fundamentais $\{N_j\}$ e $\{N'_k\}$ em U são ou equivalentes ou eventualmente disjuntas.*

Lema 2.5.7. *Dado um ponto qualquer $e^{i\theta} \in \partial \mathbb{D}$, existe uma cadeia fundamental $\{N_j\}$ em \mathbb{D} que converge para $e^{i\theta}$ e que se aplica sob ψ à cadeia fundamental $\{\psi(N_j)\}$ em U .*

O isomorfismo inverso $\psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{D}$ é mais bem comportado:

Corolário 2.5.8. *Qualquer caminho $p : [0, 1] \rightarrow U$ que termina em um ponto bem definido de ∂U é aplicado por ψ^{-1} em um caminho em \mathbb{D} que termina em um ponto bem definido de $\partial \mathbb{D}$. E ainda, caminhos que terminam em pontos distintos de ∂U vão em caminhos com distintos pontos de termino em $\partial \mathbb{D}$.*

Cadeias fundamentais de U são levadas em cadeias fundamentais de \mathbb{D} :

Corolário 2.5.9. *Toda cadeia fundamental $\{N'_k\}$ em U é aplicada através de $\psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{D}$ à uma cadeia fundamental $\{\psi^{-1}(N'_k)\}$ em \mathbb{D} .*

Pelo Lema 2.5.7 e pelo Corolário 2.5.9 concluímos que ψ induz uma correspondência bijetiva entre prime ends de \mathbb{D} com prime ends de U . Ademais, a impressão de todo prime end de \mathbb{D} é um único ponto de $\partial \mathbb{D}$, e todo ponto de $\partial \mathbb{D}$ é a impressão de um, e apenas um, prime end.

2.6 Conectividade Local

Definição 2.6.1. Um espaço de Hausdorff X é dito ser **localmente conexo** se a seguinte condição é satisfeita:

[a)]

1. Todo ponto $x \in X$ tem vizinhanças conexas arbitrariamente pequenas (não necessariamente abertas).

Ser localmente conexo também equivale à:

Lema 2.6.2. X é localmente conexo se, e somente se:

[b)] todos $x \in X$ tem vizinhanças conexas abertas arbitrariamente pequenas, ou

[c)] todo subconjunto aberto de X é união de subconjuntos abertos conexos.

Se X é um espaço métrico compacto, então uma condição equivalente é a seguinte:

[d)] para todo $\xi > 0$ existe $\delta > 0$ tal que quaisquer dois pontos cuja distância é menor que δ estão contidos em um subconjunto conexo de X de diâmetro menor que ξ .

Lema 2.6.3. Se f é uma aplicação contínua de um espaço compacto simplesmente conexo X sobre um espaço de Hausdorff Y , então Y é também compacto e simplesmente conexo.

1. *Demonstração.* Como X é compacto e f contínua, temos que $Y = f(X)$ (f é sobrejetiva) é compacto. Dados $y \in Y$ e $N \subset Y$ uma vizinhança aberta de y , podemos considerar o compacto $f^{-1}(y) \subset X$ e a vizinhança $f^{-1}(N) \subset X$.

Seja V_α um conjunto de todas as componentes abertas de $f^{-1}(N)$ que intersectam $f^{-1}(y)$. Então a união $\cup f(V_\alpha)$ é também um subconjunto conexo de N . E mais, é também uma vizinhança de y , pois contém a vizinhança aberta $Y \setminus f(X \setminus \cup V_\alpha)$ de y . \square

2.7 Teorema de Carathéodory

Seja U um subconjunto simplesmente conexo de $\overline{\mathbb{C}}$ cujo complementar $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ é infinito.

Uma **compactificação de Carathéodory** \widehat{U} de U é a união disjunta de U com o conjunto de todos os prime ends de U , sob a topologia: Para qualquer vizinhança crosscut $N \subset U$ seja $\widehat{N} \subset \widehat{U}$ a união de N com a coleção de todos os prime ends ε representados pra cadeia fundamental $\{N_j\}$ onde $N_j \subset N$. Tais vizinhanças \widehat{N} com o aberto U formam a base dessa topologia.

Teorema 2.7.1. *A compactificação de Carathéodory $\widehat{\mathbb{D}}$ do disco aberto é canonicamente homeomorfa à $\overline{\mathbb{D}}$. Fora que, qualquer isomorfismo conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow U \subset \overline{\mathbb{C}}$ estende-se unicamente à um homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{D}} \cong \overline{\mathbb{D}}$ sobre \widehat{U} .*

Teorema 2.7.2 (Carathéodory). *Um isomorfismo conforme $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U \subset \overline{\mathbb{C}}$ estende-se para uma aplicação contínua sobrejetiva do disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$ em \overline{U} se, e somente se, ∂U é localmente conexo, ou se, e só se, seu complemento $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ é localmente conexo.*

Teorema 2.7.3 (Carathéodory). *Se a fronteira de U é uma curva de Jordan, então $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$ estende-se para um homeomorfismo do disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$ para o fecho \overline{U} .*

Demonstração. Se a fronteira de U é uma curva de Jordan, isto é, uma imagem homeomorfa do círculo, então, pelo teorema [2.7.2](#), certamente temos uma extensão contínua $\overline{\psi} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U}$. Como uma curva de Jordan não pode ser separada por um único ponto, segue do lema [2.6.3](#) que esta extensão é bijetiva e portanto um homeomorfismo. \square

Capítulo 3

Alguns aspectos Dinâmicos de polinômios quadráticos de Cremer

3.1 Pontos de Cremer e Discos de Siegel

Nesta seção usaremos principalmente os conceitos apresentados no décimo primeiro capítulo de Milnor [12].

Considere uma aplicação da forma

$$f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Que é definida e holomorfa em alguma vizinhança da origem, com $|\lambda|=1$, mas λ não sendo uma raiz da unidade. Disso $\lambda = e^{2\pi i \xi}$, com ξ irracional. Diremos que a origem é um ponto fixo *irracionalmente indiferente*. Já o número $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, é chamado *número de rotação* para o espaço tangente ao ponto fixo.

Nossa preocupação agora é quando ou não este ponto fixo é localmente linearizável:

Definição 3.1.1. *Quando existe uma mudança de coordenada local holomorfa $z = h(w)$, que conjuga f à rotação irracional $w \mapsto \lambda w$, tal que:*

$$f(h(w)) = h(\lambda w)$$

Dizemos que f é localmente linearizável.

No caso onde f é uma aplicação racional temos o resultado:

Lema 3.1.2. *Seja f é uma aplicação racional de grau maior ou igual à 2 com ponto fixo z_0 indiferente. Então são equivalentes:*

[a)] f é localmente linearizável em uma vizinhança de z_0 , z_0 pertence ao conjunto de Fatou $\overline{\mathbb{C}} \setminus J(f)$, A componente conexa U do conjunto de Fatou que

contém z_0 é conformemente isomorfa ao disco unitário sobre um isomorfismo que conjuga f em U por uma multiplicação por λ no disco.

Da dicotomia de pontos fixos irracionalmente indiferentes serem ou não localmente linearizáveis temos as denominações:

Definição 3.1.3. Dizemos que um ponto fixo irracionalmente indiferente é ou um **ponto de Siegel** ou um **ponto de Cremer** caso ele seja ou não localmente linearizável. A componente de Fatou onde f é conformemente conjugada ao disco unitário, provinda do lema anterior, é chamada **Disco de Siegel**, sendo o ponto fixo z_0 seu centro.

Observação 3.1.4. Temos, do lema [3.1.2](#), que pontos de Cremer pertencem ao conjunto de Julia, pois caso contrário, deveriam ser localmente linearizáveis.

Inicialmente Edward Kasner, em 1912, conjecturou que tal linearização era sempre possível. Mas em 1917, George Pfeiffer, a derrubou apresentando uma complicada descrição de certas funções holomorfas para as quais nenhuma linearização é possível. Logo após, em 1919, Julia acreditou ter provado que esta linearização nunca seria possível para funções racionais de grau 2 ou maior, mas sua prova estava errada. Na verdade, este problema está relacionado com um estudo cuidadoso, que se estende a que ξ pode ser aproximado por números racionais. Em 1927, Cremer elucidou isto com o seguinte resultado:

Teorema 3.1.5. Dados λ no círculo unitário e $d \geq 2$, se a sequência de números $\sqrt[q]{1/|\lambda^q - 1|}$ não é limitada quando $q \rightarrow \infty$, então nenhum ponto fixo de multiplicador λ , para uma função racional de grau d , pode ser localmente linearizável.

Como pode ser visto esta questão está intimamente relacionada ao multiplicador λ e portanto ao número de rotação ξ . Portanto, passou a ser estudado quais destes ξ levam o ponto fixo irracionalmente indiferente ser ou não localmente linearizável.

Diremos que uma propriedade para um ângulo ξ é verdadeira para uma **genérica** escolha de ξ , se o conjunto de ξ para os quais ela é verdadeira, contém uma interseção enumerável de subconjuntos abertos densos de \mathbb{R}/\mathbb{Z} . De acordo com um resultado de Baire, tal interseção de enumeráveis conjuntos abertos densos é densa e não enumerável.

Corolário 3.1.6. Para um escolha genérica de $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se z_0 é um ponto fixo de multiplicador $e^{2\pi i \xi}$ de uma aplicação racional qualquer de grau maior ou igual à 2, então z_0 não é localmente linearizável.

Portanto, para um escolha genérica de ξ , z_0 é um ponto de Cremer.

A questão sobre os outros pontos ξ ficou em aberto até que em 1942, Carl Ludwig Siegel provou que:

Teorema 3.1.7. Se $1/|\lambda^q - 1|$ é menor que alguma função polinomial de grau q , então todo germe de aplicações holomorfas com ponto fixo de multiplicador λ é localmente linearizável.

Com isto foi verificada a existência de discos de Siegel para funções racionais de grau maior ou igual à 2. E mais ainda, se seguiu um corolário onde foi verificada grande predominância de pontos de Siegel:

Corolário 3.1.8. *Para todo ξ fora de um conjunto de medida nula, todo germe holomorfo com um ponto fixo de multiplicador $e^{2\pi i\xi}$ é localmente linearizável.*

Apesar de, em dinâmica aplicada, ser usualmente entendido que comportamentos advindos de conjuntos de medida nula são desprezíveis, também se sabe que o estudo de escolhas genéricas é uma valiosa ferramenta. Tornando importante o estudo de pontos de Cremer.

A fim de entender melhor essas afirmações e descobertas recentes, devemos conhecer um pouco mais aprofundadamente os números irracionais.

Seja κ um número real positivo. Por definição, um número irracional ξ é dito ser **Diofantino de ordem** $\leq \kappa$ se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{\epsilon}{q^\kappa}$$

para todo p/q . A classe de tais números é denotada por $\mathcal{D}(\kappa)$.

Evidentemente $\mathcal{D}(\kappa) \subset \mathcal{D}(\eta)$ sempre que $\kappa < \eta$.

Lema 3.1.9. *Se o ângulo $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é diofantino (qualquer ordem), então todo germe holomorfo com multiplicador $\lambda = e^{2\pi i\xi}$ é localmente linearizável.*

Desta forma temos que sempre que o ângulo for um número diofantino, teremos um disco de Siegel. E ainda, como veremos no resultado a seguir, todo número algébrico é diofantino.

Teorema 3.1.10. *Se o número irracional ξ satisfaz a relação $f(\xi) = 0$, sendo f uma função polinomial de grau d com coeficientes inteiros, então $\xi \in \mathcal{D}(d)$.*

O conjunto $\mathcal{D}\kappa$ com $\kappa < 2$ é vazio. E ainda:

Lema 3.1.11. *O conjunto*

$$\mathcal{D}(2+) = \bigcap_{\kappa > 2} \mathcal{D}(\kappa),$$

*consistindo de todos os números diofantinos de ordem $\leq \kappa$ para todo $\kappa > 2$, tem medida cheia no círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Por outro lado, o subconjunto $\mathcal{D}(2)$ tem medida nula e são chamados **tipo fronteira**.*

Sabemos que além dos número algébricos, temos os transcendentos, isso para polinômios de coeficientes inteiros. Logo, ainda existe muito a ser estudado. Para isto, trabalharemos com aproximações de números irracionais por números racionais por meio de **expansões por frações contínuas**:

Seja $\xi \in (0, 1)$ um número irracional. Consideremos a **expansão por frações contínuas**:

$$\xi = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

onde a_i são inteiros estritamente positivos definidos de maneira única. O número racional:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}}}$$

é chamado o n -ésimo **convergente** para ξ .

Teorema 3.1.12 (Bryuno 1965, Rüssmann 1967). *Com λ e $\{q_n\}$ como acima, se*

$$\sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

então todo germe holomorfo com um multiplicador fixo λ é localmente linearizável.

Teorema 3.1.13 (Yoccoz 1988). *Reciprocamente, se esta soma diverge, então a aplicação quadrática $f(z) = z^2 + \lambda z$ tem um ponto fixo na origem que não é localmente linearizável. Além disso, este ponto fixo tem a propriedade dos pequenos ciclos: toda vizinhança da origem contém infinitas e enumeráveis órbitas periódicas.*

O teorema de Yoccoz nos leva a pensar quando pontos de Cremer tem pequenos ciclos. O que foi respondido por Perez-Marco. Suponha que $\sum_n \log(q_{n+1})/q_n = \infty$, de forma que possa existir ponto de Cremer.

Teorema 3.1.14 (Perez-Marco 1990). *Se*

$$\sum_n \frac{\log \log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

então todo germe de funções holomorfas que possui ponto de Cremer na origem possui a propriedade dos pequenos ciclos. Mas se esta soma diverge, existe um germe com multiplicador λ tal que toda órbita futura contida em alguma vizinhança da origem tem 0 como ponto de acumulação. Tal germe não possui pequenos ciclos mas também não é linearizável.

Embora os resultados de Bryno, Yoccoz e Perez-Marco sejam fortes, não respondem todas as questões em vizinhanças de pontos fixos irracionalmente indiferentes. Existe uma estrutura muito complicada ao redor de todo ponto de Cremer, ainda não existe nenhum exemplo que é bem entendido.

A fim de relacionar órbitas de Cremer ou Siegel com pontos críticos definimos:

Definição 3.1.15. *Por **Conjunto Pós-crítico** $P = P(f)$ de uma aplicação f entenderemos como a união de todas as imagens futuras $f^k(c)$ com $k > 0$, onde c é um ponto crítico. Nosso maior interesse é seu fecho $\overline{P}(f)$.*

Teorema 3.1.16. *Todo ponto fixo de Cremer ou ponto periódico de uma aplicação racional está contido no fecho do pós-crítico $\overline{P}(f)$. Similarmente, a fronteira de qualquer disco de Siegel ou ciclo de disco de Siegel está contida em $\overline{P}(f)$.*

Temos um resultado mais forte que este, que é um corolário do Corolário [2.4.4](#):

Como órbita crítica entenda a órbita futura de um ponto crítico.

Corolário 3.1.17. *Se z_0 é um ponto de Cremer ou um ponto da fronteira do disco de Siegel, então toda vizinhança de z_0 contém infinitamente enumeráveis pontos distintos de órbitas críticas.*

3.2 Raios Externais e Acessibilidade

Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ um polinômio mônico

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

com $n \geq 2$.

Como vimos na seção [2.3.1](#), o infinito é um ponto super-atrator de f , o conjunto de Julia Cheio K é um subconjunto compacto do plano constituído da união das componentes conexas limitadas de Fatou F com o conjunto de Julia J , sendo este sua fronteira, cujo complementar é $\mathcal{A}(\infty)$.

Nesta seção supomos J conexo ou equivalentemente com Julia Cheio K conexo.

Do Teorema [2.3.4](#) temos, sobre a aplicação de Böttcher, o isomorfismo:

$$\phi : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

que conjugua f , fora de K , com à n -ésima potencia $w \rightarrow w^n$, fora do disco unitário, com $\phi(z)$ assintótico com a identidade no infinito, ou seja, $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = z^n$, com $z \in \mathbb{C} \setminus K$ e $\phi(z) \rightarrow \infty$ quando $z \rightarrow \infty$.

Chamamos de **função de Green** para K à aplicação $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$G(z) = \begin{cases} \log|\phi(z)| > 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus K \\ 0 & \text{se } z \in K \end{cases}$$

Como visto nas páginas 96 à 100 de [\[12\]](#), $G(f(z)) = nG(z)$.

Cada $G^{-1}(c) = \{z \in \mathbb{C}; G(z) = c\}$, com $c > 0$, é chamado **curva equipotencial** ao redor de K . Como $G(f(z)) = nG(z)$, temos que f aplica equipotenciais $G^{-1}(c)$ em equipotenciais $G^{-1}(nc)$

As trajetórias ortogonais

$$\{z; \arg(\phi(z)) = \text{constante}\}$$

da família de curvas equipotenciais são chamados **raios externos** para K . Usaremos a notação $R_t \subset \mathbb{C} \setminus K$ para denotar o raio externo de ângulo t , que podemos ver como uma fração de uma volta completa, de forma que $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Por definição, R_t é a imagem, pela aplicação inversa de Böttcher ϕ^{-1} , da semi-reta $re^{2\pi it} \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, com $r > 1$. Como $f(G^{-1}(c)) = G^{-1}(nc)$ temos a identidade

$$f(R_t) = R_{nt}.$$

Em particular, um raio externo R_t é um *raio periódico* se $f^n(R_t) = R_t$.

Sobre estas condições, considere o limite:

$$\gamma(t) = \lim_{r \searrow 1} \phi^{-1}(re^{2\pi it}),$$

sempre que este limite existir, diremos que o raio R_t *termina* no ponto $\gamma(t)$, que necessariamente pertence ao conjunto de Julia $J = \partial K$.

Um ponto $p \in \partial K$ é dito ser **acessível** se existe uma curva simples em $\mathbb{C} \setminus K$ que começa no infinito e termina em p .

De acordo com um teorema de Lindelöf (ver página 259 de [?]), p ser acessível equivale à existir um raio externo terminando em p .

Agora, p é **biacessível** se existem pelo menos dois raios externos distintos terminando nele.

Naturalmente surgem perguntas: Todo o Julia é acessível? Se não, quando o é? O que a não-acessibilidade, acessibilidade e/ou biacessibilidade geram? Qual sua relevância? A fim de responder indagações desse teor surgiram os seguintes resultados.

Acessibilidade é invariante:

Lema 3.2.1. *Se o raio R_t termina em um único ponto $\gamma(t)$ do conjunto de Julia, então o raio R_{nt} termina no ponto $\gamma(nt) = f(\gamma(t))$. Ademais, cada um dos n raios da forma $R_{(t+j)/n}$ terminam em um dos pontos de $f^{-1}(\gamma(t))$, e todo ponto de $f^{-1}(\gamma(t))$ é ponto de chegada de pelo menos um desses raios.*

Em particular, se um raio R_t é periódico de período $p \geq 1$, e se R_t termina em $\gamma(t)$, então $\gamma(t)$ é um ponto periódico de f com período dividindo p .

Fatou mostrou que a maioria dos raios terminam e os irmãos Riez mostraram que ângulos distintos normalmente correspondem a pontos de chegada distintos. Mais precisamente:

Teorema 3.2.2. *Para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fora de um conjunto de medida nula, o raio R_t tem um ponto de chegada bem definido $\gamma(t) \in J(f)$. Além disso, para cada ponto fixo $z_0 \in J$, o conjunto dos t 's onde $\gamma(t) = z_0$, tem medida nula.*

Mas isto nem sempre acontece para todo os raios. Pelo que Carathéodory desenvolveu, temos o seguinte critério de chegada:

Teorema 3.2.3. *Para qualquer f dado, com Julia conexo, são equivalentes:*

[i)] Todo raio externo R_t termina em um ponto $\gamma(t)$ que depende continuamente do ângulo t ; O conjunto de Julia J é localmente conexo; O conjunto de Julia Cheio K é localmente conexo; A aplicação inversa de Böttcher $\phi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ estende-se continuamente sobre a fronteira $\partial\mathbb{D}$, e esta extensão leva cada $e^{2\pi it} \in \partial\mathbb{D}$ em $\gamma(t) \in J(f)$. Ainda, sempre que estas condições forem satisfeitas, a aplicação resultante $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f)$ satisfaz a identidade conjugada

$$\gamma(nt) = f(\gamma(t))$$

e aplica o círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} sobre o conjunto de Julia J .

4. *Demonstração.* Primeiramente suponha que $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J$ é contínua e definida. Então a imagem $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é um conjunto compacto não vazio de J . Começando por um ponto arbitrário, digamos $\gamma(0)$, nesta imagem, vemos indutivamente pelo lema 3.2.1, que toda pré-imagem iterada também pertence à $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Além disso, pelo Corolário 2.2.13, a imagem $\gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ é todo o conjunto de Julia J e pelo lema 2.6.3, J é localmente conexo.

Considere o isomorfismo conforme $\phi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, que pelo teorema 2.7.2 se estende continuamente sobre a fronteira $\partial\mathbb{D}$ e esta extensão leva $e^{2\pi it} \in \partial\mathbb{D}$ à $\gamma(t) \in J$. \square

Definição 3.2.4. *Esta aplicação γ de \mathbb{R}/\mathbb{Z} sobre o conjunto de Julia J localmente conexo de uma aplicação f , será chamada **semi-conjugação de Carathéodory** de J .*

Corolário 3.2.5. *O conjunto de Julia J é uma curva simplesmente fechada se, e somente se, γ aplica \mathbb{R}/\mathbb{Z} homeomorficamente sobre J .*

Um raio externo R_t é chamado *racional* se $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é racional.

Observe que R_t é pré-periódico por uma multiplicação por n se, e somente se, t é racional, e é periódico se, e só se, t é racional com denominador relativamente primo com n . De fato, se t é racional com denominador d , as sucessivas imagens de R_t sobre f tem ângulos $nt, n^2t, \dots \pmod{\mathbb{Z}}$. Como existe um número finito de tais frações módulo \mathbb{Z} , esta sequência deve eventualmente se repetir. Agora quando d é pré-primo à n , estas frações devem permutar através de multiplicações por n módulo \mathbb{Z} , logo t é periódico.

Teorema 3.2.6 (Raios racionais terminam). *Todo raio externo periódico termina em um ponto periódico que é ou repulsor ou parabólico. Se t é racional mas não periódico, então os raios R_t terminam em um ponto que é eventualmente periódico mas não periódico.*

Portanto, todo raio periódico termina e mais, pontos periódicos atratores ou repulsores são acessíveis:

Teorema 3.2.7 (Pontos periódicos atratores e repulsores são acessíveis). *Todo ponto periódico parabólico ou repulsor é acessível por pelo menos um raio periódico.*

Como um complemento temos:

Lema 3.2.8. *Se um raio periódico termina em z_0 , então um número finito e enumerável de raios terminam em z_0 , e todos estes raios são periódicos de mesmo período (que pode ser maior que o período de z_0).*

3.3 Lemas da Separação

Usaremos para este tópico principalmente o artigo do Kiwi [7].

Poirier mostrou que, para polinômios com Julia conexo, a união de todos os raios externos fixos *separa* componentes limitadas de Fatou e pontos fixos de Cremer.

Lema 3.3.1. *Seja f um polinômio com Julia conexo. Então existe uma união finita \mathcal{C} de raios periódicos fechados tais que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Cada componente de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ contém no máximo um ponto periódico de Cremer ou uma componente periódica de Fatou.*

Demonstração. Se f não possui pontos periódicos de Cremer e não possui componentes periódicas limitadas de Fatou, não há nada a ser feito. Caso contrário, seja m o mínimo múltiplo comum dos inteiros: períodos de componentes periódicas de Fatou; períodos de pontos periódicos de Cremer. Como existem finitos ciclos não-repulsos, m é finito e bem definido. Componentes periódicas de Fatou e pontos periódicos de Cremer de f e f^m são os mesmos, apenas seus períodos mudam. De fato, escolhemos m de tal forma que componentes periódicas de Fatou são invariantes sobre f^m e pontos periódicos de Cremer são pontos fixos do seu conjunto de Julia. Considere \mathcal{C} a união dos raios fixos fechados por f^m :

$$\mathcal{C} = \overline{R_0} \cup \dots \cup \overline{R_{\frac{d^m-2}{d^m-1}}}$$

Como raios fixos terminam em pontos parabólicos ou repulsos, este conjunto \mathcal{C} é disjunto das componentes limitadas de Fatou e dos pontos de Cremer. Aplicando o Teorema [3.3.2], de Goldberg e Milnor, para f^m , temos \mathcal{C} como desejado. \square

Este resultado pode ser visto como uma consequência do teorema de Goldberg e Milnor:

Teorema 3.3.2 (Goldberg e Milnor). *Considere um polinômio f com conjunto de Julia conexo. Denote por \mathcal{C} a união de todos os raios fixos fechados:*

$$\mathcal{C} = \overline{R_0} \cup \overline{R_{\frac{1}{d-1}}} \cup \dots \cup \overline{R_{\frac{d-2}{d-1}}}.$$

Se U é uma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, então uma e apenas uma das afirmações é válida:

[i)] U contém exatamente uma componente invariante de Fatou; U contém exatamente um ponto fixo que pertence ao conjunto de Julia.

Como sabemos raios periódicos sempre terminam. Seu correspondente raio fechado é a união dos raios periódicos e seus pontos de chegada. Nesta seção sempre trabalharemos com raios fechados dessa forma, ou seja, com raios externos que terminam união com seu ponto de chegada.

Se \mathcal{C} é a união finita de raios externos fechados e z é um ponto no complementar de \mathcal{C} , denote por $U_{\mathcal{C}}(z)$ a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ que contém z . De forma similar, se V é um conjunto conexo contido no complementar de \mathcal{C} , denote por $U_{\mathcal{C}}(V)$ a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ que contém V .

Um refinamento do Lema [3.3.1](#) mostra que cortando através de uma grande coleção de raios externos, pontos críticos e pontos de Cremer que ficam juntos, continuam juntos sobre iterações. A afirmação também é válida para componentes periódicas de Fatou.

Lema 3.3.3. *Seja f um polinômio com Julia conexo. Então existe uma união finita \mathcal{C} de raios fechados tais que:*

1. $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$
2. Cada componente de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ contém no máximo um ponto periódico de Cremer ou uma componente periódica de Fatou.
3. Se \hat{z} é um ponto fixo de Cremer e c um ponto crítico tal que $U_{\mathcal{C}}(c) = U_{\mathcal{C}}(\hat{z})$, então $U_{\mathcal{C}}(f^n(c)) = U_{\mathcal{C}}(f^n(\hat{z}))$, $\forall n \geq 1$. Além disso, $c \in J(f)$ e não pertence ao fecho de nenhuma componente limitada de Fatou.
4. Se V é uma componente limitada de Fatou e c é um ponto crítico tal que $U_{\mathcal{C}}(c) = U_{\mathcal{C}}(V)$, então $U_{\mathcal{C}}(f^n(c)) = U_{\mathcal{C}}(f^n(V))$, $\forall n \geq 1$.

Demonstração. Seja f um polinômio com Julia conexo. Pelo Lema [3.3.1](#), podemos tomar a união de raios periódicos fechados \mathcal{C}_0 . Para $k \geq 1$ defina indutivamente $\mathcal{C}_k = f^{-1}(\mathcal{C}_{k-1})$.

Mostremos que as condições (1) à (4) se verificam para \mathcal{C}_k quando k é suficientemente grande. Mas antes vejamos algumas propriedades dos conjuntos \mathcal{C}_k e suas regiões complementares:

[a)] $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}$, para $k \geq 0$. Observe que $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{C}_1 = f^{-1}(\mathcal{C}_0)$, temos $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$. Suponhamos indutivamente que $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}$, para $k \geq 0$. Seja $x \in \mathcal{C}_{k+1}$, logo $f(x) \in f(\mathcal{C}_{k+1})$. Como $\mathcal{C}_{k+1} = f^{-1}(\mathcal{C}_k)$, temos $f(\mathcal{C}_{k+1}) \subset \mathcal{C}_k$. Por indução $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}$, de forma que $f(x) \in \mathcal{C}_{k+1}$. Portanto $x \in f^{-1}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+2}$, ou seja, $\mathcal{C}_{k+1} \subset \mathcal{C}_{k+2}$, concluindo assim a indução. $f(\mathcal{C}_k) \subset \mathcal{C}_k$, para $k \geq 0$. Sabemos que $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0$. Suponha indutivamente que $f(\mathcal{C}_k) \subset \mathcal{C}_k$, para $k \geq 0$. Assim, $\mathcal{C}_{k+1} = f^{-1}(\mathcal{C}_k) \Rightarrow f(\mathcal{C}_{k+1}) \subset \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k+1}$. $U_{\mathcal{C}_{k+1}}(z) \subset U_{\mathcal{C}_k}(z)$, para $k \geq 0$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_{k+1}$. Observe que $f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{C}_0$ e que por (a), $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$. Portanto, $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_1 \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_0$. Seja $U_{\mathcal{C}_1}(z)$ a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_1$ que contém z e $U_{\mathcal{C}_0}(z)$ a componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_0$ que contém z . Claramente $U_{\mathcal{C}_1}(z) \subset U_{\mathcal{C}_0}(z)$, uma vez que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_1 \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_0$ e z é ponto em comum. Indutivamente, pelos mesmos raciocínios, temos o resultado. $f^n(U_{\mathcal{C}_{k+n}}(z)) = U_{\mathcal{C}_k}(f^n(z))$, para $k \geq 0$, $n \geq 1$

e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_{k+n}$. Observe que $f(U_{\mathcal{C}_{k+1}}(z)) \subset f(U_{\mathcal{C}_k}(z)) \subset U_{\mathcal{C}_{k+1}}(f(z))$. Temos ainda que $U_{\mathcal{C}_{k+1}}(f(z)) \subset f(U_{\mathcal{C}_{k+1}}(z))$, uma vez que possuem pontos em comum e são variedades conexas de complementares que dividem o espaço.

Pelo Lema [3.3.1](#) e pelas propriedades (b) e (c) temos as propriedades (1) e (2), para todo \mathcal{C}_k .

Afirmção 1: Dado um ponto crítico c e um ponto periódico de Cremer \hat{z} existe $k(c, \hat{z}) \geq 0$ tal que:

$$* \text{ se } U_{\mathcal{C}_l}(c) = U_{\mathcal{C}_l}(\hat{z}) \text{ então } U_{\mathcal{C}_l}(f^n(c)) = U_{\mathcal{C}_l}(f^n(\hat{z})), \forall n \geq 1$$

o que se verifica para todo $l \geq k(c, \hat{z})$.

De fato: No caso de * se manter para todo $l \geq 0$, não há nada a se fazer. De outra forma, se para algum $l_0 \geq 0$, $U_{\mathcal{C}_{l_0}}(c) = U_{\mathcal{C}_{l_0}}(\hat{z})$ e $U_{\mathcal{C}_{l_0}}(f^n(c)) \neq U_{\mathcal{C}_{l_0}}(f^n(\hat{z}))$, para algum $n \geq 1$. Considere $k(c, \hat{z}) = l_0 + n$. Observe que por (d)

$$U_{\mathcal{C}_{l_0}}(f^n(c)) = f^n(U_{\mathcal{C}_{l_0+n}}(c)) = f^n(U_{\mathcal{C}_k}(c))$$

e

$$U_{\mathcal{C}_{l_0}}(f^n(\hat{z})) = f^n(U_{\mathcal{C}_{l_0+n}}(\hat{z})) = f^n(U_{\mathcal{C}_k}(\hat{z}))$$

de forma que

$$f^n(U_{\mathcal{C}_k}(c)) \neq f^n(U_{\mathcal{C}_k}(\hat{z}))$$

ou seja, para algum $n \geq 1$, a n -ésima imagem futura de uma componente conexa do complementar de \mathcal{C}_k que contém c é diferente da n -ésima imagem futura da componente que contém \hat{z} . Observe que estas imagens são componentes conexas.

A próxima afirmação se verifica similarmente.

Afirmção 2: Dado um ponto crítico c e uma componente conexa de Fatou V , existe $k(c, V) \geq 0$ tal que:

$$* \text{ se } U_{\mathcal{C}_l}(c) = U_{\mathcal{C}_l}(V) \text{ então } U_{\mathcal{C}_l}(f^n(c)) = U_{\mathcal{C}_l}(f^n(V)), \forall n \geq 1$$

se verifica para todo $l \geq k(c, V)$.

Seja N o máximo entre $k(c, \hat{z})$ e $k(c, V)$, onde todo par (c, \hat{z}) e (c, V) é levado em consideração. Como o número de pontos críticos e de ciclos não-repulsivos é finito, o número de pontos críticos e de ciclos não-repulsivos é finito, números destes pares também é finito. De forma que N está bem definido.

Pelas condições antes da afirmação 1, \mathcal{C}_N satisfaz (1) e (2). Agora, pela afirmação 2, (4) também se verifica para \mathcal{C}_N . Resta provar (3) para \mathcal{C}_N .

Se c é um ponto crítico e \hat{z} é um ponto de Cremer tal que $U_{\mathcal{C}_N}(c) = U_{\mathcal{C}_N}(\hat{z})$, então

$$U_{\mathcal{C}_N}(f^n(c)) = U_{\mathcal{C}_N}(f^n(\hat{z})) \neq U_{\mathcal{C}_N}(V)$$

para todo $n \geq 1$ e para toda componente periódica limitada de Fatou V .

De acordo com Sullivan [18], todo ponto no fecho de uma componente limitada de Fatou é aplicado, depois de um número finito de iteradas, ao fecho de uma componente periódica limitada de Fatou. Assim, $c \in J_f$ e não pertence ao fecho de uma componente limitada de Fatou. \square

Depois do que Fatou desenvolveu, vimos que cada ciclo irracionalmente neutro tem um ponto crítico "associado". De fato, cada ciclo de Cremer está contido no conjunto omega limite do ponto crítico. Similarmente, cada ponto de fronteira. O lema anterior nos permite um pouco mais. Nos possibilita mostrar que um ciclo irracionalmente neutro tem um ponto crítico "associado" que não é associado a outro ciclo irracionalmente neutro.

Corolário 3.3.4. *Seja f um polinômio com Julia conexo J . Dado um ciclo de Cremer $\{z_1, \dots, z_p\}$, existe um ponto crítico $c \in J$ tal que o conjunto omega limite $\omega(c)$ contém o ciclo de Cremer $\{z_1, \dots, z_p\}$ e $\omega(c)$ não contém ou nenhum outro ponto de Cremer ou nenhum ponto não periódico da fronteira do disco de Siegel.*

De acordo com Douady e Shishikura, o número de ciclos de Cremer e de ciclos de componentes limitadas de Fatou de f é estritamente menor que $d = \text{grau}(f)$. Para polinômios com Julia conexo temos, pelo corolário anterior:

Corolário 3.3.5. *Seja f um polinômio com Julia conexo. Então o número total de ciclos de Cremer e de ciclos de componentes limitadas de Fatou é menor ou igual ao número de pontos críticos distintos.*

3. *Demonstração.* Pelo corolário anterior ciclos irracionalmente neutros distintos tem pontos críticos "associados" distintos que pertencem à Julia. E ainda, cada ciclo parabólico ou atrator contém um ponto crítico. \square

O próximo resultado mostra como a existência de raios externos que se acumulam em um ponto fixo de Cremer e em uma de suas pré-imagens implica na existência de um valor crítico não acessível. Além disso, o valor crítico não acessível tem a propriedade de que, se um raio externo se acumula nele, este raio externo também se acumula no ponto fixo de Cremer.

Corolário 3.3.6. *Seja f um polinômio com Julia cheio K conexo e com um ponto fixo de Cremer \hat{z} . Se existe um raio externo R_0 tal que $\{\hat{z}, z\} \subset \overline{R_0}$, para algum $z \in f^{-1}(\hat{z}) \setminus \{\hat{z}\}$, então existe um valor crítico não acessível v com a seguinte propriedade: Todo raio externo R que se acumula em v também se acumula em \hat{z} .*

3.4 Conectividade Local

A partir de agora trabalharemos com polinômios quadráticos na esfera de Riemann que possui um ponto de Cremer. Todo polinômio quadrático pode

ser escrito na forma $f : z \rightarrow z^2 + c$, com c complexo. Pois todo polinômio $P(z) = az^2 + 2bz + d$ é equivalente à f , bastando para isso tomar a conjugação $\phi(z) = az + b$ e $c = ad + b - b^2$:

$$\begin{aligned} f \circ \phi(z) &= (az + b)^2 + c = a^2z^2 + 2abz + b^2 + c = a^2z^2 + 2abz + b^2 + ad + b - b^2 \\ &= a^2z^2 + 2abz + ad + b = a(az + 2bz + d) + b = \phi \circ P(z) \end{aligned}$$

Como f é um polinômio de grau 2 sabemos que f possui um ponto fixo superatrator no infinito.

Observe que os pontos fixo de f são da forma: $z = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$, pois

$$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 - z + c = 0 \Leftrightarrow z = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2.$$

Que são distintos quando $c \neq 1/4$, pois $\Delta = 1 - 4c \neq 0$. Temos ainda que possuem partes reais distintas quando $c \notin [1/4, \infty]$.

De fato, quando $c \notin [1/4, \infty]$, temos $c \in (-\infty, 1/4)$ ou $c \notin \mathbb{R}$. Quando $c \in (-\infty, 1/4)$, temos que $1 - 4c > 0$ de forma que temos duas raízes reais distintas. Agora se $c \notin \mathbb{R}$, temos que $c = \alpha + \beta i$, com $\beta \neq 0$. Logo $\Delta = 1 - \alpha + \beta i$, de forma que $z' = \sqrt{\Delta} = \sqrt{1 - \alpha + \beta i}$. Portanto, $z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e não é um imaginário puro. Disso $z'/2 = a + bi$, com $a, b \neq 0$. Logo $z = (1/2 \pm a) \pm bi$, com $a, b \neq 0$. Tendo assim duas partes reais distintas.

Caso $c \notin [1/4, \infty]$, tome o ponto fixo mais à esquerda como α e o outro como β , logo $\beta = 1 - \alpha$ e seus multiplicadores são respectivamente $\lambda = 2\alpha$ e $2 - \lambda = 2 - 2\alpha = 2\beta$.

Observe que $\text{Re}(\alpha) < 1/2$, pois $a \neq 0$, $\text{Re}(\alpha) = 1/2 \pm a$ e o fato de α estar mais à esquerda depende de sua parte real, uma vez que os pontos fixos tem, em módulo, a mesma parte imaginária.

Temos também que $|\lambda| < |2 - \lambda|$, ou seja, que a norma do multiplicador de α é menor que a do de $\beta = 1 - \alpha$. De fato, como $\text{Re}(\alpha) < 1/2$, temos

$$\begin{aligned} 2\text{Re}(\alpha) < 1 &\Leftrightarrow 0 < 1 - 2\text{Re}(\alpha) \\ \Leftrightarrow \text{Re}(\alpha)^2 + \text{Im}(\alpha)^2 < \text{Re}(\alpha)^2 + \text{Im}(\alpha)^2 + 1 - 2\text{Re}(\alpha) &= (1 - \text{Re}(\alpha))^2 + \text{Im}(\alpha)^2 \\ \Leftrightarrow |\alpha| < |1 - \alpha| &\Leftrightarrow |2\alpha| < |2 - 2\alpha| \Leftrightarrow |\lambda| < |2 - \lambda| \end{aligned}$$

.

Observe que se $|2 - \lambda| = 1$ temos

$$\begin{aligned} |2| - |\lambda| &\leq ||2| - |\lambda|| \leq |2 - \lambda| = 1 \\ \Leftrightarrow -|\lambda| &\leq -1 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 1 \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $|\lambda| < |2 - \lambda|$. Assim α é o único ponto fixo que pode ser indiferente.

Agora quando $c \in [1/4, \infty]$, temos $\Delta = 1 - 4c < 0$, e portando um imaginário puro. Logo os pontos fixos são simétricos em relação ao eixo x , e seus multiplicadores possuem a mesma norma.

Seja $\theta = z^2 : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$, existe um isomorfismo conforme $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus J = \mathcal{A}(\infty)$, tal que $\psi \circ \theta = f \circ \psi$.

Afirmção: Se o conjunto de Julia for localmente conexo, sua topologia e dinâmica são bem descritas.

Demonstração. De fato, se J é localmente conexo, então ψ se estende a uma função contínua $\bar{\psi} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus J$ e $\bar{\psi} \circ \theta = f \circ \bar{\psi}$. Seja $S^1 = \partial\mathbb{D}$, $\sigma_2 = \theta|_{S^1}$, $\Phi = \bar{\psi}|_{S^1}$.

Defina a relação de equivalência \sim_f em S^1 por $x \sim_f y \Leftrightarrow \Phi(x) = \Phi(y)$. O espaço quociente $\frac{S^1}{\sim_f}$ é isomorfo a J e a aplicação $f_{\sim_f} : J_{\sim_f} \rightarrow J_{\sim_f}$ induzida por σ_2 é topologicamente conjugada a f . O conjunto J , com a aplicação f_{\sim_f} , é um modelo topológico de $f|_J$. \square

Observe que no nosso caso em particular, existe uma maior restrição, pois o conjunto de Julia não pode ser localmente conexo, como pode ser visto abaixo:

Teorema 3.4.1. *Se o conjunto de Julia J de uma aplicação polinomial for localmente conexo, então todo ponto periódico em J é ou repulsor ou parabólico.*

Demonstração. Seja $z_0 \in J$ é um ponto fixo. Como J é localmente conexo, temos que $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J$ é, pelo teorema [3.2.3](#), contínua e sobrejetora, de forma que $X = \gamma^{-1}(z_0) = \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}; R_t \rightarrow z_0\} \neq \emptyset$. Observe ainda que $X = \gamma^{-1}(z_0)$ é compacto por ser imagem inversa de um compacto por uma aplicação contínua.

Afirmamos que a aplicação $t \mapsto nt$ leva X homeomorficamente em si mesmo. De fato, o ponto fixo z_0 não pode ser ponto crítico de f uma vez que está em Julia, então, pelo teorema da aplicação inversa, f aplica uma pequena vizinhança de z_0 difeomorficamente em uma pequena vizinhança de z_0 , levando assim raios externos chegando em z_0 bijetivamente em raios externos chegando em z_0 . Como representamos os raios externos R_t por seus ângulos $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ temos a afirmação.

Portanto, pelo Lema 3.1.3, X é finito.

Como o conjunto de raios externos chegando em z_0 é finito e se aplica bijetivamente sobre si mesmo por f , temos que os ângulos desses raios devem ser periódicos sobre a multiplicação do grau n . Substituindo f , se necessário, por alguma iterada, podemos assumir que os ângulos são fixos, isto é, $nt \equiv t \pmod{\mathbb{Z}}$, de forma que $f(R_t) = R_t$.

Disso, pelo Lema 3.1.4, z_0 é ou um ponto fixo atrator, ou um ponto fixo repulsor.

\square

Lembremos que pontos de Cremer são pontos periódicos irracionalmente indiferentes pertencentes ao conjunto de Julia. Disso temos a equivalência.

Corolário 3.4.2. *Se f é um polinômio com um ponto de Cremer, então seu conjunto de Julia $J = J(f)$ não é localmente conexo.*

Lema 3.4.3. *Seja $n \geq 2$ um inteiro e seja $X \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um conjunto compacto que é levado homeomorficamente em si mesmo pela aplicação $t \mapsto nt(\text{mod } \mathbb{Z})$. Então X é finito.*

Demonstração. Provaremos um resultado mais geral: Se X é um espaço métrico compacto com a função distância $\text{dist}(x, y)$, e $h : X \rightarrow h(X) \subset X$ um homeomorfismo que expansor, isto é, existem $\xi > 0$ e $k > 1$ tais que

$$\text{dist}(h(x), h(y)) \geq k \text{dist}(x, y)$$

(*)

sempre que $\text{dist}(x, y) < \xi$. Então X é finito. Claramente as hipóteses são satisfeitas no Lema 3.1.3, disso teremos o resultado.

Como X é compacto e h um homeomorfismo temos que $h^{-1} : h(X) \rightarrow X$ é uniformemente contínua, logo podemos tomar $\delta > 0$ de forma que $\text{dist}(x, y) < \xi$ sempre que $\text{dist}(h(x), h(y)) < \delta$. Logo por (*) temos que

$$\text{dist}(x, y) \leq \frac{\text{dist}(h(x), h(y))}{k} < \frac{\delta}{k}.$$

Como X é compacto, podemos escolher um número finito m , do conjunto de diâmetros δ que cobre X e então cobrir $h^{op}(X)$. Aplicando h^{-p} , obtemos m subconjuntos de diâmetro δ/k^p que cobrem X . Como p é arbitrariamente grande, isto prova que X pode ter no máximo m pontos.

□

Lema 3.4.4. *Se um raio fixo $R_t = f(R_t)$ termina em z_0 , então z_0 é ou um ponto fixo repulsor ou atrator.*

Demonstração. Observe que cada equipotencial $\{z \in \mathbb{C}/G(z) = \text{const.} > 0\}$ intercepta o raio R_t em um único ponto. Então podemos parametrizar R_t como a imagem do mergulho topológico $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}/K$, que aplica cada $s \in \mathbb{R}$ a um único ponto $z \in R_t$, onde $\log G(s) = s$. Como $G(f(z)) = nG(z)$, temos que

$$f(p(s)) = f(z) = G^{-1}(nG(z)) = p(s + \log n)$$

tendo assim pelo corolário 3.1.5 que o ponto de chegada

$$z_0 = \gamma(t) = \lim_{s \rightarrow -\infty} p(s)$$

é de fato um ponto fixo repulsor ou parabólico.

□

Segue o corolário:

Corolário 3.4.5. *Se $p : [0, \infty] \rightarrow V \setminus \{0\}$ é um caminho que converge para a origem, com $f(p(t)) = p(t - 1)$ para $t \geq 1$ (de forma que os pontos são levados para fora da origem). Então o multiplicador λ deve satisfazer $|\lambda| > 1$ ou $\lambda = 1$.*

3.5 Pequenos Cícos

Um questionamento natural é quando um polinômio possui a propriedade de pequenos ciclos e o que isto acarreta. No nosso caso, de um polinômio com um ponto fixo de Cremer, esta propriedade sempre está presente:

Definição 3.5.1. *Quando a vizinhança de um ponto contém infinitas e não enumeráveis órbitas periódicas diremos que ele tem a **propriedade dos pequenos ciclos**.*

Lema 3.5.2. *Toda vizinhança de um ponto fixo de Cremer α contém infinitas e não enumeráveis órbitas periódicas de f , ou seja, a propriedade dos pequenos ciclos.*

Demonstração. O polinômio $f(z) = z^2 + c$ é equivalente à $g(z) = z^2 + \lambda z$, com $\lambda = 2\alpha$. De fato, tomando a conjugação $\phi(z) = z + \alpha$ temos:

$$\begin{aligned} & \phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) \\ &= \phi^{-1} \circ f(z + \alpha) \\ &= \phi^{-1}((z + \alpha)^2 + c) \\ &= z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + c - \alpha \end{aligned}$$

Como α é ponto fixo de f temos que $\alpha^2 + c = \alpha$, logo

$$\begin{aligned} & \phi^{-1} \circ f \circ \phi(z) \\ &= z^2 + 2\alpha z \\ &= z^2 + \lambda z = g(z) \end{aligned}$$

Como α é ponto fixo de Cremer de f , e f é equivalente à g , g também possui um ponto fixo de Cremer, a saber a origem 0, pois:

$$f'(\alpha) = 2\alpha = \lambda \text{ e } g'(0) = \lambda.$$

Desta forma, a origem 0 é não é localmente linearizável, tendo assim, pela contra-positiva do Teorema [3.1.12](#), a soma

$$\sum_n \frac{\log(q_{n+1})}{q_n}$$

diverge. E, conseqüentemente, pelo Teorema [3.1.13](#), a origem tem a propriedade dos pequenos ciclos, isto é, toda vizinhança da origem contém infinitas e não enumeráveis órbitas periódicas. Tendo assim, pela equivalência, o resultado para α . \square

3.6 Ponto Crítico

A origem é o único ponto crítico de $f : z \rightarrow z^2 + c$.

Mostremos que este ponto crítico pertence ao fecho de sua órbita futura, para isto usaremos o seguinte resultado de Mañé [10](#):

Teorema 3.6.1. *Seja $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ uma aplicação racional e $\Lambda \subset J$ um conjunto compacto não invariante que não contém pontos críticos nem pontos parabólicos. Então ou Λ é expansor ou $\Lambda \cap \omega(c) \neq \emptyset$ para algum ponto crítico recorrente c de f .*

Teorema 3.6.2. *O ponto crítico 0 é recorrente, isto é, pertence ao fecho de sua órbita $\{f^{on}\}_{n>0}$.*

Demonstração. Como f não é hiperbólico, f não é expansor. Assim, pela densidade das órbitas repulsoras existe alguma órbita repulsora em J onde f restrita a ela não é expansora. Esta órbita é compacta e invariante e pelo Teorema [3.6.1](#), segue que c deve ser um ponto crítico recorrente. \square

Kiwi mostrou em [7](#) que este ponto crítico não é acessível:

Teorema 3.6.3. *O ponto crítico 0 não é acessível por $\mathbb{C} \setminus J(f)$.*

Demonstração. Como sabemos, o conjunto de Julia J de $f : z \rightarrow z^2 + c$ é conexo e seu ponto fixo de Cremer \bar{z} é aproximado por pequenos ciclos.

Mostremos que não existe um valor crítico v que não é acessível por $\mathbb{C} \setminus J(f)$ tal que: se $\bar{v} \in \bar{R}$ para algum raio external R , então $\bar{z} \in \bar{R}$.

Como o ponto crítico 0 está em J , temos pelo Lema [2.2.2](#) que $v = f(0) \in J$. Sabemos também que 0 não está na fronteira de nenhuma componente limitada de Fatou.

Demonstremos por contradição. Assuma que exista um raio external R tal que $\bar{v} \in \bar{R}$ e $\bar{z} \notin \bar{R}$.

Pelo lema [3.3.1](#) existe uma união finita \mathcal{C} de raios fechados. Tomando $\mathcal{C}_l = \mathcal{C} \cup \bar{R}$, e $\mathcal{C}_\infty = f^{-1}(\mathcal{C}_l)$ temos os respectivos domínios contendo o ponto fixo de Cremer \bar{z} : $U_0 = U_{\mathcal{C}_l}(\bar{z})$ e $U_1 = U_{\mathcal{C}_\infty}(\bar{z})$.

A contradição virá ao concluirmos que U_1 contém um número finito de pequenos ciclos. Com esse intuito mostraremos que para cada ciclo repulsor em U_1 existe pelo menos um ciclo de raios externos contido em U_1 . Restando assim mostrar que U_1 contém no máximo um número finito de pequenos raios externos.

Primeiramente observe que U_0 e U_1 são domínios simplesmente conexos. De fato, cada componente conexa do complemento de um subconjunto conexo e fechado da Esfera de Riemann é um conjunto simplesmente conexo. No nosso caso $\mathcal{C}_l \cap \{\infty\}$ e $\mathcal{C}_\infty \cap \{\infty\}$ são subconjuntos fechados e conexos na esfera de Riemann. Como U_0 e U_1 são uma de suas respectivas componentes, segue que U_0 e U_1 são localmente conexos.

Agora observe que a aplicação holomorfa própria

$$f|_{U_1} : U_1 \setminus U_0$$

não possui pontos críticos, pois $\mathcal{C}_l = \mathcal{C} \cup \bar{R}$, $v = f(0) \in \bar{R}$ e $\mathcal{C}_\infty = f^{-1}(\mathcal{C}_l)$, de forma que $0 \in \mathcal{C}_\infty$. Como U_1 é componente de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}_\infty$, temos $0 \notin U_1$. Portanto $f|_{U_1}$ não possui pontos críticos uma vez que 0 é seu único ponto crítico.

Aplicações de recobrimento de domínios simplesmente conexos são homeomorfismos, levando $f|_{U_1}$ a ser um isomorfismo conforme.

O polinômio f age sobre os ângulos dos raios externos como uma multiplicação por 2 = grau :

$$m_2 : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, m_2(t) = 2t$$

Estamos interessados nos raios externos contidos em U_1 e sua imagem, que são os raios externos contidos em U_0 .

Denote por B_1 e B_0 os correspondentes conjuntos formados pelos ângulos de tais raios:

$$B_0 = \{t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} / R_t \in U_0\}, B_1 = \{t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} / R_t \in U_1\}$$

Como vimos, $f|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_0$ é um isomorfismo conforme, logo $m_2|_{B_1} : B_1 \longrightarrow B_0$ é um homeomorfismo que preserva a ordem cíclica. Então, $m_2|_{B_1}$ admite uma extensão contínua $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, que é uma aplicação cíclica não decrescente de grau 1.

Uma aplicação cíclica não decrescente g de grau 1 ou não possui órbitas periódicas ou todas as órbitas periódicas tem mesmo período. A aplicação $m_2 : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ tem finitos e enumeráveis ciclos de mesmo período. Concluimos que m_2 tem no máximo finitos e enumeráveis ciclos contidos em B_1 . Uma afirmação

equivalente é que existem no máximo finitos e enumeráveis ciclos de raios externos contidos em U_1 , o que contradiz a hipótese de que \hat{z} é aproximado por pequenos ciclos. \square

3.7 Hedgehog

Seja $P(z) = z^2 + \lambda z$ um polinômio quadrático de Cremer. Seja U um domínio simplesmente conexo, cujo fecho contém o ponto fixo indiferente, $0 \in \overline{U}$. Suponha que P seja univalente em uma vizinhança do fecho \overline{U} . Então, segundo Perez-Marco, existe um conjunto $H = H_I = U$ onde:

[i)] $0 \in H \subset \overline{U} \cap J(P)$; H é compacto, conexo e cheio; $H \cap \partial U \neq \emptyset$;
 $P(H) = H$ (totalmente invariante).

H é chamado Hedgehog para a restrição $P|_U : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Hedgehogs são úteis pois nos permitem, através da seguinte construção, transferir resultados da teoria dos difeomorfismos do círculo para uma teoria menos explorada que é a dos pontos fixos indiferentes de aplicações holomorfas.

Uniformize o complemento $\mathbb{C} \setminus H$ pela aplicação de Riemann $\psi : \mathbb{C} \setminus H \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ e considere a aplicação induzida $g = \psi \circ P \circ \psi^{-1}$, que é definida (pela quarta propriedade) e holomorfa no anullus aberto $\{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < r\}$. Use o princípio da reflexão de Schwarz para estender g ao anullus $\{z \in \mathbb{C} / r^{-1} < |z| < r\}$. A restrição de g ao disco unitário \mathbb{D} será então um difeomorfismo analítico real cujo número de rotação é $\frac{1}{2\pi i} \log P'(0) = \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Proposição 3.7.1. *O único ponto em um Hedgehog que pode ser biacessível pelo exterior do Hedgehog é um ponto fixo indiferente.*

- 3.** *Demonstração.* Seja $p \neq 0$ um ponto biacessível em H . Então existe um arco simples γ em $\mathbb{C} \setminus H$, que começa e termina em p , que não contém o ponto fixo indiferente 0 em seu interior.

Seja D uma componente conexa limitada de $\mathbb{C} \setminus (H \cup \gamma)$ e seja $D' = \psi(D) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. D' é limitada pelo arco simples $\psi(\gamma)$ e um intervalo I do círculo unitário.

Como g possui um número de rotação irracional no disco unitário \mathbb{D} , para algum inteiro N temos:

$$\cup_{i=0}^N f^i(I) = \mathbb{D}$$

Escolhendo γ perto o suficiente de H , podemos assumir que g, g^2, \dots, g^N são todos definidos em D' e $\cup_{i=0}^N f^i(D')$ contém uma vizinhança inteira exterior de \mathbb{D} .

Segue que $\cup_{i=0}^N f^i(D)$ cobre inteiramente uma vizinhança apagada de H . Isto só é possível se $0 \in \overline{D}$, o que contradiz nossa afirmação pois, para algum i teríamos que $0 \in f^i(\overline{D})$ e como zero é ponto fixo

$$\begin{aligned} \exists (z_n)_{n \geq 1} \in f^i(D)/z_n \rightarrow 0 \text{ em } f^i(D) \Rightarrow \\ f(z_{n^i}) \rightarrow f(0) = 0, \dots, z_n \rightarrow 0 \text{ em } D \end{aligned}$$

□

Trabalhemos com a equivalência $f(z) = z^2 + c \equiv P(z)$, cuja origem é ponto crítico, $c = f(0)$ é seu valor crítico e o ponto fixo indiferente 0 é agora dado por α , como visto.

Como $f(z) = f(-z)$, seu conjunto de Julia é invariante sob a rotação de 180° $\tau : z \rightarrow -z$. Se U é um domínio aberto de Jordan no plano onde $\overline{U} \cap \tau(\overline{U}) = \emptyset$, segue que f é univalente em algum domínio de Jordan V , contido no fecho \overline{U} .

Teorema 3.7.2. *Seja $f(z) = z^2 + c$ polinômio quadrático de Cremer com ponto fixo indiferente α . Se $z \in J(f)$ é biacessível, então existe um número não negativo k tal que $f^k(z) = \alpha$.*

Demonstração. Assuma, por contradição que $f^k(z) \neq \alpha, \forall k \geq 1$.

Sejam R e R' dois raios distintos que terminam em z .

Considere a componente conexa W em $\mathbb{C} \setminus (R \cup R' \cup \{z\})$ que não contém α .

Como o conjunto de pré-imagens de iteradas

$$\cup_{n \geq 0} f^{-1}(\alpha) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} / f^n(z) = \alpha \text{ para algum } n \geq 0\}$$

é denso em J e W intersecta J , existe um menor inteiro positivo n tal que $f^{-n}(\alpha) \cap W \neq \emptyset$.

Seja $\alpha_{-n} \in f^{-n}(\alpha) \cap W$ e defina:

$$R_{n-1} = f^{n-1}(R), R'_{n-1} = f^{n-1}(R')$$

que são distintos, pois caso contrário terminariam em 0, uma vez que 0 é o único ponto crítico de f e que para $z \neq 0$ existiria, pelo teorema da função inversa, uma vizinhança V_z de z , onde $f|_{V_z}$ é univalente. Desta forma 0 seria acessível, o que contradiz o Teorema [3.6.3](#). Claramente ambos chegam no ponto $z_{n-1} = f^{n-1}(z)$.

Afirmamos que este par (R_{n-1}, R'_{n-1}) separa o ponto fixo α de sua pré-imagem $-\alpha$. De fato, para isto assumamos que isto não ocorra, então a componente conexa W_{n-1} de $\mathbb{C} \setminus (R_{n-1} \cup R'_{n-1} \cup \{z_{n-1}\})$ que contém α também contém $-\alpha$. Podemos considerar f_{n-1} com um ramo de cobertura infinito de $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ e seja $\{O_1, \dots, O_m\}$ uma coleção de componentes conexas de $f^{-(n-1)}(W_{n-1})$. Cada O_i é um domínio simplesmente conexo não-limitado cuja fronteira é formada por dois ou mais raios externos em $f^{-(n-1)}(R_{n-1} \cup R'_{n-1})$, e a aplicação $f^{n-1} : O_i \rightarrow W_{n-1}$ é um holomorfismo próprio. Em particular, como W_{n-1} contém α , segue que cada O_i intersecta $f^{-(n-1)}(\alpha)$. Por outro lado, $f^{n-1}(\alpha_{-n}) = -\alpha \in W_{n-1}$, ou seja, α_{-n} pertence a O_i , para algum $1 \leq i \leq m$. Como raios externos não se intersectam,

segue que $O_i \subset W$. Portanto W intersecta $f_{-(n-1)}(\alpha)$, contradizendo a minimalidade de n . Sendo assim, o par (R_{n-1}, R'_{n-1}) separa o ponto fixo α de sua pré-imagem $-\alpha$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que estes dois raios separam o ponto fixo α do ponto crítico 0 . De outra forma podemos separá-los pelo par simétrico $(\tau(R_{n-1}), \tau(R'_{n-1}))$. Seja $U = W_{n-1}$ componente conexa de $\mathbb{C} \setminus (R_{n-1} \cup R'_{n-1} \cup \{z_{n-1}\})$ que contém α . Para fazer U ter fecho compacto, podemos limitá-lo por curvas equipotenciais.

Primeiramente observe que $f|_{\bar{U}}$ é univalente. De fato, caso isto não seja verdade, \bar{U} deveria intersectar $\tau(\bar{U})$. Como \bar{U} e $\tau(\bar{U})$ são homeomorfos ao disco fechado, o que levaria os pares de raios de fronteira (R_{n-1}, R'_{n-1}) e $(\tau(R_{n-1}), \tau(R'_{n-1}))$ a se intersectar, o que é impossível uma vez que raios distintos são disjuntos (No caso de $R'_{n-1} = \tau(R_{n-1})$, o ponto de chegada novamente deveria ser o ponto crítico, o que contradiz sua acessibilidade).

Como visto, podemos encontrar um domínio de Jordan ligeiramente menor $V \supset \bar{U}$ onde $f|_{\bar{V}}$ permanece univalente. Consideremos o hedgehog H_V para a restrição $f_V : V \rightarrow \mathbb{C}$. Pela terceira propriedade da definição de hedgehogs, H_V chega a tocar a fronteira de V . Como H_V é conexo e intersecta U , ele também deverá intersectar sua fronteira. Mas $H_V \subset J(P)$ e $\partial U \cap J(P) = \{z_{n-1}\}$. Então $z_{n-1} \in H_V$. Como z_{n-1} é biacessível pelo exterior de J , temos que $H_V \setminus \{z_{n-1}\}$ é desconexo. Além disso, z_{n-1} é acessível pelo exterior de H_V . O que contradiz a Proposição [3.7.1](#).

□

Considerações Finais

Como já observado na introdução, ainda há muito a se desenvolver sobre a dinâmica de polinômios quadráticos de Cremer. Algumas questões a serem levantadas poderiam ser:

1. Existem conjuntos de Julia com pontos biacessíveis de polinômios quadráticos de Cremer?
2. Pode um conjunto de Julia de tais polinômios ter medida de Lebesgue positiva?

Para um estudo sobre impressões de cadeias universais em continnums pode ser estudado o artigo **The Julia sets of quadratic Cremer polynomials**, de A. Blokh, L. Oversteegen (2006).

Agora para falar sobre medida de Lebesgue e conjuntos solares, pode ser estudado o artigo **The solar Julia sets of basic quadratic cremer polynomials**, de A. Block, X. Buff, A. Chéritat e L. Oversteegen (2010).

Referências Bibliográficas

- [1] Ahlfors, Lars; **Complex Analysis - Third Edition** McGraw-Hill. (1979)
- [2] Alexander, Daniel S.; **History of Complex Dynamics**. Vieweg, Wiesbaden, Germany. (1994)
- [3] Blokh, A.; Oversteegen, L.; **The Julia sets of quadratic Cremer polynomials**. (2006)
- [4] Conway, John B.; **Functions of One Complex Variable I**. Springer. (1995)
- [5] Florentino, Carlos A. A.; **Introdução á Teoria das Funções Complexas** (2015).
- [6] Freitag, Eberhard; **Complex Analysis 2**. Springer , (2011).
- [7] Kiwi, Jan; **Non-accessible critical points of Cremer polynomials** A Ergodic Theory and Dynamical Systems, 20, pp 1391-1403. (2000)
- [8] Lima, Elon L.(2); ; **Curso de Análise- Vol 2** IMPA. (2010)
- [9] Lima, Elon L.; **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento** IMPA. (2006)
- [10] Mañé, Ricardo; **On a Theorem of Fatou** Bol. Soc. Bras. Mat, Vol. 24, N1,1-11. (1993)
- [11] Melo, W. de; **Ferramentas Matematicas para dinamica unidimensional, (2000)**
- [12] Milnor, John; **Dynamics in One Complex Variable**. Annals of Mathematics Studies. (2006).M
- [13] Perez-Marco, R.; **Fixed points and circle maps. (1997) Acta Math. 179, 243â294..**
- [14] Miranda, Rick; **Algebraic Curves and Riemann Surfaces**. American Mathematical Society. (1995)
- [15] Munkers, James R.; **Topology - Second Edition**. Pearson. (2000)

- [16] Rudin, W.; **Real and Complex Analysis - Third Edition** McGraw Hill. (1987)
- [17] Shishikura, M.; **On the quasiconformal surgery of rational functions.** Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Paris (1987)
- [18] Sullivan, D.; **Quasiconformal homeomorphism and dynamics I, solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains.** Ann. Math. (1985), 401-418.
- [19] Schleicher, D; Zakeri, S.; **On biaccessible points in the Julia set** AMS (1999) 128, n3, 933-937
- [20] Zakeri, S.; **Biaccessibility in quadratic Julia sets.** Ergodic Theory and Dynamical Systems (2000) 20, pp 1859-1883