

LEANDRO QUINTÃO MARTINS RAMALHO

SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE EM  $M^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

R165s  
2020 Ramalho, Leandro Quintão Martins, 1993-  
Superfícies com ângulo constante em  $M^2 \times R$  / Leandro  
Quintão Martins Ramalho. – Viçosa, MG, 2020.  
68 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Ady Cambraia Junior.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 65-66.

1. Geometria riemanniana. 2. Killing, Submersão de.  
3. Geometria espacial. 4. Variedades riemanianas. 5. Teorema de  
Classificação. 6. Frobenius, Teorema de . I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.373

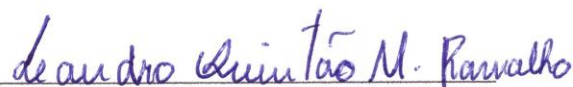
LEANDRO QUINTÃO MARTINS RAMALHO

SUPERFÍCIES COM ÂNGULO CONSTANTE EM  $M^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

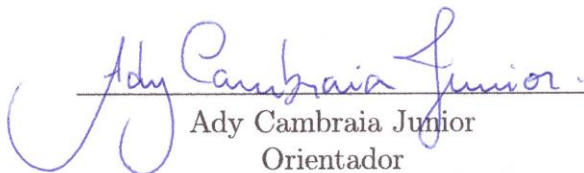
APROVADA: 27 de outubro de 2020.

Assentimento:



Leandro Quintão Martins Ramalho

Autor



Ady Cambraia Junior

Orientador

*Dedico este trabalho aos meus pais Dolvino e Helena*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por permitir chegar até aqui e em segundo, aos meus pais, Dolvino e Helena, pelo apoio incondicional e força durante toda a graduação e mestrado.

Aos meus colegas de curso e de alojamento pela amizade e companheirismo, pelos momentos de descontração, lazer e estudos.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelos conhecimentos compartilhados e serviços prestados. Em especial ao meu orientador Ady por todo o profissionalismo, além de disponibilidade e prontidão em sempre ajudar, tanto na graduação quanto no mestrado.

Agradeço a minha namorada Vanessa, por estar presente e poder compartilharmos todo esse período conturbado e cheio de emoção, estar ao meu lado me apoiando e incentivando sempre a prosseguir.

Por fim, agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, que possibilitou que esse trabalho ocorresse.

A Matemática apresenta invenções  
tão sutis que poderão servir não só  
para satisfazer os curiosos como,  
também para auxiliar as artes e  
poupar trabalho aos homens.

---

René Descartes

# Resumo

RAMALHO, Leandro Quintão Martins, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2020. **Superfícies com ângulo constante em  $M^2 \times \mathbb{R}$** . Orientador: Ady Cambraia Junior.

Um dos problemas interessantes na área de Geometria Diferencial de subvariedades é a análise, caracterização e obtenção de superfícies, que possuem uma propriedade geométrica pré-estabelecida em variedades homogêneas tridimensionais. Neste trabalho apresentamos o teorema de classificação das superfícies que fazem um ângulo constante com alguma direção pré-fixada no espaço produto  $M^2 \times \mathbb{R}$  (onde  $M^2$  denota uma variedade bidimensional de curvatura constante).

Palavras-chave: Geometria Riemanniana. Submersão de Killing. Formas espaciais. Variedades produto. Teorema de Classificação. Teorema de Frobenius.

# Abstract

RAMALHO, Leandro Quintão Martins, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October, 2020. **Constant angle surfaces in  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$** . Adviser: Ady Cambraia Junior.

One of the interesting problems in the area of Differential Geometry of sub-varieties is the analysis, characterization and obtaining of surfaces, which have a pre-established geometric property in homogeneous three-dimensional varieties. In this work we present the theorem of classification of surfaces that make a constant angle with some pre-fixed direction in the product space  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  (where  $\mathbb{M}^2$  denotes a two-dimensional variety of constant curvature)

Keywords: Riemannian geometry. Killing submersion, Space forms. Product manifolds. Theorem of Classification. Frobenius's Theorem.

# Lista de Figuras

1.1	Semiplano de Poincaré. . . . .	12
1.2	Inversão pelo círculo $C$ . . . . .	15
1.3	Geodésicas de $\mathbb{H}^2$ . . . . .	17
1.4	Exemplos de geodésicas completas . . . . .	18
1.5	Horociclos de $\mathbb{H}^2$ . . . . .	18
1.6	Geodésica completa $\gamma$ com extremos $x_1$ e $x_2$ . . . . .	20
1.7	Geodésica completa $\gamma$ com extremos $x_1$ e $\infty$ . . . . .	20
1.8	Isometria hiperbólica. . . . .	21
1.9	Isometria parabólica. . . . .	24
1.10	Isometria elíptica. . . . .	25
2.1	S.A.C em $\mathbb{R}^3$ : $\alpha(v) = 1$ e $\theta = \pi/3$ . . . . .	49
2.2	S.A.C em $\mathbb{R}^3$ : $\alpha(v) = v$ e $\theta = \pi/3$ . . . . .	49
2.3	S.A.C em $\mathbb{R}^3$ : $\alpha(v) = 2 \cos v$ e $\theta = \pi/3$ . . . . .	50
2.4	S.A.C. invariante por isometria hiperbólica. Consideramos $C = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ na parametrização 2.81. . . . .	56
2.5	S.A.C. invariante por isometria parabólica. Consideramos $C = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ na parametrização 2.84. . . . .	58

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Noções de Geometria Hiperbólica . . . . .	12
1.1.1 Isometrias Positivas de $\mathbb{H}^2$ . . . . .	18
1.2 Noções de Geometria Esférica . . . . .	25
1.3 Noções em Geometria Riemanniana . . . . .	26
1.3.1 Imersões Isométricas . . . . .	32
1.4 Teorema de Frobenius . . . . .	33
<b>2 Superfícies com ângulo constante em <math>\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}</math></b>	<b>34</b>
2.1 Aspectos de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	34
2.1.1 Isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	37
2.1.2 Imersões Isométricas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	38
2.1.3 Sistema de coordenadas . . . . .	40
2.1.4 Sistema de equações diferenciais . . . . .	43
2.2 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	45
2.3 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	50
2.4 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	58
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

# Introdução

O estudo da Geometria Diferencial das subvariedades, geralmente, se começa pelo caso de superfícies no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Em seguida, se estende o estudo, variando por um lado a dimensão ou a codimensão da subvariedade e, por outro lado, alterando o espaço ambiente. Assim, uma ampla classe de espaços que ganharam o interesse entre os geométricos é representada por espaços homogêneos e teve sua classificação completa por Thurston em [14]. Essa classificação pode ser feita em termos da dimensão do grupo de isometrias, ou seja,

- i. As formas espaciais canônicas  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  e  $\mathbb{S}^3$ , cujo grupo de isometrias é 6-dimensional.
- ii. Quando o grupo de isometrias da variedade tridimensional tem dimensão 4, chamaremos esses espaços de  $E^3(\kappa, \tau)$ . Assim, temos os seguintes casos:

$$E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \text{ se } \kappa < 0 \text{ e } \tau = 0$$

$$E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R} \text{ se } \kappa > 0 \text{ e } \tau = 0$$

$$E^3(\kappa, \tau) = Nil_3 \text{ se } \kappa = 0 \text{ e } \tau \neq 0$$

$$E^3(\kappa, \tau) = PSL_2(\mathbb{R}, \tau) \text{ se } \kappa < 0 \text{ e } \tau \neq 0.$$

Uma importante variedade que não aparece nesta lista é chamada esfera de Berger. As esferas de Berger  $E^3(\kappa, \tau) = \mathbb{S}_\tau^3$ , estão faltando, dado que seu grupo de isometrias está contido no grupo de isometria de  $\mathbb{S}^3$ .

- iii. Quando a dimensão do grupo de isometrias é 3, a variedade possui a geometria do grupo de Lie  $Sol_3$ .

Uma classe de superfícies, chamadas de Superfícies com Ângulo Constante(S.A.C.), foi intensivamente estudada na maioria desses espaços recentemente. Por definição, uma superfície cujo vetor normal unitário faz um ângulo constante com uma direção fixa é chamada superfície com ângulo constante. Esse problema foi resolvido primeiro em [5] para o espaço produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e depois para  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  em [7] e [8], onde usaram o modelo do meio plano superior e o modelo de Minkowski, respectivamente. Já uma abordagem, mais recente, no estudo de superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$  é incluída em [9]. O ângulo considerado nestes trabalhos foi o formado entre o normal unitário da superfície  $S^2 \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  e a direção tangente a  $\mathbb{R}$ .

A ideia de estudar superfícies com diferentes propriedades geométricas nos espaços produto foi iniciada por H. Rosenberg e W. Meeks em [13] e [12], onde eles consideraram

---

o caso geral de uma superfície  $S^2$  e procuraram superfícies mínimas no espaço produto  $M^2 \times \mathbb{R}$ .

Neste trabalho pretendemos apresentar, de forma detalhada, o Teorema de Classificação das superfícies com ângulo constante em  $M^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $M^2$  é  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo serão apresentados algumas noções básicas da Geometria Hiperbólica, Esférica e uma breve revisão da Geometria Riemanniana necessárias para compreensão do conteúdo tratado nos capítulos subsequentes. As principais referências utilizadas são [1], [2], [3] e [4].

### 1.1 Noções de Geometria Hiperbólica

Considere o conjunto  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$  onde,

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$$

dotado da seguinte métrica

$$g_{\mathbb{H}}(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\text{Im}^2(z_0)}, \text{ para } u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2.$$

O par  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$  é chamado de modelo do semiplano superior de Poincaré e constitui um dos modelos da geometria hiperbólica plana.

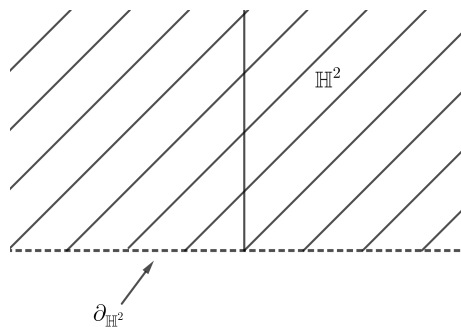


Figura 1.1: Semiplano de Poincaré.

**Definição 1.1.** Sejam  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  e  $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$ . Dessa forma, definimos o ângulo hiperbólico entre os vetores  $u$  e  $v$  como sendo o número  $\theta \in [0, \pi]$  onde

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}}\|v\|_{\mathbb{H}}}$$

e o ângulo orientado entre  $u$  e  $v$ , denotado por  $\angle(u, v) \in (-\pi, \pi)$  é dado por

$$\cos(\angle(u, v)) = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}}\|v\|_{\mathbb{H}}}.$$

**Definição 1.2.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\mathbb{H}^2$  e  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . A curva  $\gamma$  é chamada uma curva regular se, para cada  $t \in [a, b]$ , tem-se  $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ . O comprimento hiperbólico da curva  $\gamma$  é definido por

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}}{y(t)} dt. \end{aligned} \quad (1.1)$$

**Exemplo 1.3.** Considere o segmento de reta

$$\gamma(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_0), \quad t \in [0, 1] \text{ e } y_0 > 0.$$

Dessa forma,  $\gamma'(t) = (x_2 - x_1, 0)$ . Assim, seu comprimento é

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{y_0} dt \\ &= \frac{|x_2 - x_1|}{y_0}. \end{aligned}$$

**Obs 1.4.** Observe que a altura do segmento de reta horizontal influencia no comprimento hiperbólico do segmento. Quanto mais alto está o segmento, menor é o comprimento hiperbólico. Este exemplo é importante, pois nos dá uma indicação de que as translações verticais, diferentemente do caso euclidiano, não são isometrias do espaço ambiente.

**Definição 1.5.** Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  conjuntos abertos. Dizemos que uma aplicação complexa  $f : U \rightarrow V$  é uma aplicação conforme se ela preserva ângulos orientados, ou seja, para cada  $z_0 \in U$  e  $u, v \in T_{z_0}U$ , tem-se

$$\angle(u, v) = \angle(D_{z_0}f(u), D_{z_0}f(v)).$$

**Obs 1.6.** No caso particular de  $f : U \rightarrow U$  ser uma bijeção, nomeamos tal função de transformação conforme de  $U$ .

O resultado a seguir, estabelece uma relação direta entre aplicações holomorfas entre dois abertos de  $\mathbb{C}$  e aplicações conformes.

**Lema 1.7.** Sejam  $U, V \subset \mathbb{C}$  dois conjuntos abertos e  $f : U \rightarrow V$  uma aplicação. Dessa forma,  $f$  é uma aplicação conforme se, e somente se,  $f$  é holomorfa e além disso verifica a condição que  $f'(z) \neq 0$ , para todo  $z \in U$ .

*Demonstração.* Veja [3], pág 48. □

Enunciamos a seguir o conjunto de transformações conformes de  $\mathbb{H}^2$ , o qual denotamos por  $\mu_{\mathbb{H}}$ . Tal conjunto munido da operação de composição de funções é um grupo.

**Proposição 1.8.** *O grupo de transformações conformes de  $\mathbb{H}^2$  é*

$$\mu = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Veja [3], pág 49. □

A seguir definimos a distância entre dois pontos de  $\mathbb{H}^2$ . Dados dois pontos quaisquer de  $\mathbb{R}^2$ , a distância euclidiana entre eles é igual ao comprimento do segmento de reta ligando estes pontos, ou seja, ao mínimo dos comprimentos das curvas ligando aqueles pontos. Dessa forma, definimos a distância hiperbólica entre dois pontos  $x, y \in \mathbb{H}^2$ , denotado por  $d_{\mathbb{H}}(x, y)$ , como

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf \{ L_{\mathbb{H}}(\gamma), \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \gamma \in \mathcal{C}^1 \text{ por partes} \}.$$

**Definição 1.9.** *Dizemos que uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\mathcal{C}^1$  por partes e regular, é uma geodésica, se para cada par de pontos em  $\gamma([a, b])$  a curva  $\gamma$  é minimizante entre esses pontos, ou seja,*

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = L_{\mathbb{H}}(\gamma)[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}} dt, \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

**Definição 1.10.** *Dizemos que um difeomorfismo  $\varphi$  de  $\mathbb{H}^2$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$ , se  $\varphi$  preserva a métrica  $g_{\mathbb{H}}$ , ou seja,*

$$g_{\mathbb{H}}(u, v) = g_{\mathbb{H}}(D_z\varphi(u), D_z\varphi(v)), z \in \mathbb{H}^2, u, v \in T_z\mathbb{H}^2.$$

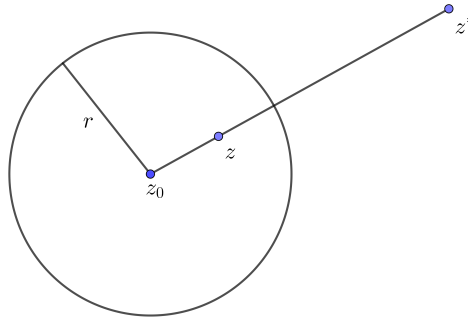
*Mais ainda,  $\varphi$  será positiva se preserva a orientação. Caso contrário, diremos que  $\varphi$  é uma isometria negativa.*

**Obs 1.11.** *Note que toda isometria de positiva de  $\mathbb{H}^2$  é uma transformação conforme, pois, preserva o ângulo orientado entre os vetores tangentes.*

**Definição 1.12.** *Seja  $C = C(z_0, r)$  um círculo com centro em  $z_0$  e raio  $r$ . A inversão com respeito ao círculo  $C$  é a aplicação  $I_C$  que leva um número complexo  $z \neq z_0$  no número complexo  $z^*$  que se encontra sobre a semirreta partindo de  $z_0$  e passando por  $z$  satisfazendo a seguinte relação*

$$|z - z_0||z^* - z_0| = r^2.$$

*No caso em que  $C$  é uma reta então a inversão por  $C$  é definida como sendo a reflexão por  $C$ .*

Figura 1.2: Inversão pelo círculo  $C$ .

**Obs 1.13.** *Fórmula explícita de uma inversão por um círculo de centro  $z_0$  e raio  $r$ . Note que,  $z^* - z_0 = \lambda(z - z_0)$ ,  $\lambda > 0$ . Dessa forma,*

$$\begin{aligned} |z - z_0||z - z^*| &= r^2 \\ |z - z_0|\lambda|z - z_0| &= r^2 \\ \lambda|z - z_0|^2 &= r^2 \\ \lambda &= \frac{r^2}{|z - z_0|^2}. \end{aligned}$$

Consequentemente,  $z^* = z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}|z - z_0|$ . Assim,

$$\begin{aligned} I_C &= z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}|z - z_0| \\ &= z_0 + \frac{r^2}{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}|z - z_0| \\ &= z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}|z - z_0|. \end{aligned}$$

Vejamos algumas propriedades das inversões:

- (I)  $I_C \circ I_C = ID_{\mathbb{C}}$ , ou seja, é a aplicação identidade de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .
- (II) Todo elemento  $z \in C(z_0, r)$  são fixados por  $I_C$ . De fato,

$$\begin{aligned} I_C(z) &= z_0 + \frac{r^2}{|z - z_0|^2}|z - z_0| \\ &= z_0 + z - z_0 \\ &= z. \end{aligned}$$

(III)  $I_C$  leva círculos ou retas em círculos ou retas. De fato, observe o seguinte:

$$\begin{aligned} I_C(z) &= \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} - a \\ &= \frac{R^2 + a(\bar{z} - \bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}} \\ &= \frac{a\bar{z} + (R^2 - |a|)}{\bar{z} - \bar{a}}, \end{aligned}$$

onde  $-a\bar{a} - R^2 + |a| = -R^2 \neq 0$ . Consequentemente,  $I_C$  é uma transformação de Möebius. Assim, como toda transformação de Möebius leva círculos ou retas em círculos ou retas (veja [3] pág. 52) concluímos a prova da propriedade.

(IV)  $\overline{I_C}$  preserva ângulos orientados de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e assim  $\overline{I_C}$  é uma aplicação conforme.

**Teorema 1.14.** *Toda transformação conforme do modelo do semi-plano superior  $\mathbb{H}^2$  é uma isometria de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ . O grupo de isometrias positivas de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$  denotamos por  $Isom^+(\mathbb{H}^2)$  e consideraremos a isometria negativa de  $\mathbb{H}^2$  definida por  $h(z) = -\bar{z}$ , daí*

$$Isom^+(\mathbb{H}^2) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}; z \mapsto \frac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

*Demonstração.* Ver [3], pág 57. □

A seguir, apresentamos alguns lemas e teoremas, afim de apresentar as geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  e suas principais propriedades onde deixamos claro quais são todas as geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  e que por dois pontos quaisquer de  $\mathbb{H}^2$  passa uma única geodésica.

**Lema 1.15.** *As semirretas verticais,  $r(t) = x_0 + ti$ ,  $t \in [0, \infty)$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , são geodésicas de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ .*

*Demonstração.* Para se provar esse resultado, basta mostrar que para qualquer curva  $\gamma$  de  $\mathbb{H}^2$  ligando os pontos  $r(t_1)$  e  $r(t_2)$  tem comprimento maior que  $L_{\mathbb{H}}(r(t_1), r(t_2))$ . De fato, suponha que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  seja uma curva de classe  $\mathcal{C}^1$  por partes tal que  $\gamma(0) = r(t_1)$  e  $\gamma(1) = r(t_2)$ , então

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &= |\ln(y(1)) - \ln(y(0))|. \end{aligned}$$

Observe que, como por hipótese  $\gamma(0) = r(t_1)$  e  $\gamma(1) = r(t_2)$ , então

$$\begin{aligned} Im(r(t_1)) &= t_1 = y(0) \\ Im(r(t_2)) &= t_2 = y(1). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}(\gamma) &= |\ln(t_2) - \ln(t_1)| \\ &= L_{\mathbb{H}}(r)(r(t_1), r(t_2)). \end{aligned}$$

□

**Lema 1.16.** *Os semicírculos ortogonais ao bordo assintótico são geodésicas de  $(\mathbb{H}^2, g_{\mathbb{H}})$ .*

*Demonstração.* Considere dois semicírculos  $C = C(x_0, r)$  e  $C' = C(x_0 + r, 2r)$  tangentes ao bordo de  $\mathbb{H}^2$ . Note que,  $I_{C'}C = L$  é uma semirreta vertical. De fato,

$$\begin{aligned} I_{C'}(x_0 - r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 - r - (x_0 + r)} \\ &= x_0 - r. \\ I_{C'}(x_0 + r) &= x_0 + r + \frac{4r^2}{x_0 + r - (x_0 + r)} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como  $I_{C'}$ , por definição, leva círculos em círculos ou retas temos que  $I_{C'}(C) = L$ . Sendo assim, como  $I_{C'}$  é uma isometria e  $L$  é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ , então segue que  $I_{C'}^{-1}(L) = C$  também é uma geodésica de  $\mathbb{H}^2$ . □

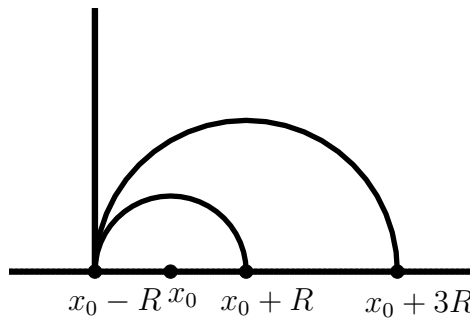


Figura 1.3: Geodésicas de  $\mathbb{H}^2$

**Teorema 1.17.** *Por dois pontos de  $\mathbb{H}^2$  passa uma única geodésica. Além disso as únicas geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  são as semirretas verticais e os semicírculos ortogonais ao eixo real.*

*Demonstração.* Ver [3], pág 62. □

**Obs 1.18.** *Esse fato de que por dois pontos quaisquer de  $\mathbb{H}^2$  passa uma única geodésica não é verdade em todas as superfícies. Por exemplo, em  $(\mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}})$ , sendo  $g_{\mathbb{S}}$  a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ , existe uma infinidade de grandes círculos, que são as geodésicas, passando pelo polo norte e pelo polo sul.*

**Definição 1.19.** *Diremos que uma geodésica  $\gamma$  é completa se suas extremidades estão no bordo assintótico de  $\mathbb{H}^2$ .*

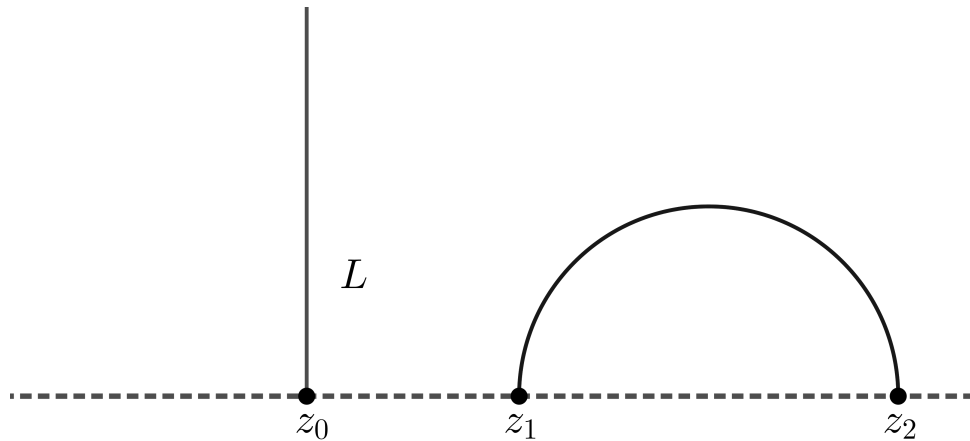


Figura 1.4: Exemplos de geodésicas completas

### 1.1.1 Isometrias Positivas de $\mathbb{H}^2$

Nesta seção descrevemos, geometricamente, todas as isometrias positivas de  $\mathbb{H}^2$ , as quais são classificadas em três tipos: isometrias parabólicas, isometrias elípticas e isometrias hiperbólicas.

**Definição 1.20.** *Os círculos tangentes ao bordo assintótico e as retas horizontais contidas em  $\mathbb{H}^2$  são chamados horociclos de  $\mathbb{H}^2$ .*



Figura 1.5: Horociclos de  $\mathbb{H}^2$ .

**Proposição 1.21.** *Os horociclos de  $\mathbb{H}^2$  são preservados por isometrias de  $\mathbb{H}^2$ , ou seja, a imagem de todo horociclo por uma isometria qualquer de  $\mathbb{H}^2$  é um horociclo.*

*Demonstração.* Seja  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  uma isometria e  $C$  um círculo tangente ao bordo assintótico. Como  $f$  é uma isometria, então  $f$  é uma transformação de Moebius, ou seja, leva círculos ou retas em círculos ou retas.

Se  $f(x_0) \in \mathbb{R}$ , então  $f(C)$  não pode ser uma reta de  $\mathbb{H}^2$  pois nenhuma reta é tangente ao ponto  $f(x_0)$ . Logo,  $f(C)$  tem de ser um círculo tangente ao  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ .

Se  $f(x_0) = \infty$  então  $f(C)$  não pode ser um círculo, pois, não existe círculo tangente ao  $\infty$ . Assim,  $f(C)$  tem de ser uma reta e deve ser horizontal tangente ao bordo assintótico.

O caso em que  $C$  é uma reta horizontal é análogo.  $\square$

As isometrias positivas de  $\mathbb{H}^2$  podem ser classificadas quanto ao número de pontos fixos. Vejamos a seguir esta classificação.

Seja  $T$  uma isometria positiva de  $\mathbb{H}^2$  diferente da identidade, isto é,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

(I) Suponha  $c \neq 0$ . Um ponto  $z \in \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$  é fixo por  $T$  se, e somente, se  $T(z) = z$ , ou seja,

$$\begin{aligned} z &= \frac{az + b}{cz + d} \\ cz^2 + dz - az - b &= 0 \\ cz^2 + (d - a)z - b &= 0 \\ z &= \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \end{aligned}$$

(II) Se  $c = 0$ , então  $T$  é da forma  $T(z) = az + b$ . O  $\infty$  é um ponto fixo de  $T$ , pois,  $T(\infty) = \infty$ .

Se  $a = 1$ ,  $T(z) = z + b$  então  $b = 0$ .

Se  $a \neq 1$ ,  $T(z) = az + b$  então  $z = \frac{b}{1 - a}$ .

**Definição 1.22.** *Seja  $T$  uma isometria positiva de  $\mathbb{H}^2$ .*

(I) *Dizemos que  $T$  é uma isometria hiperbólica ou uma transformação hiperbólica quando  $c \neq 0$  e  $\Delta > 0$ . A isometria possui dois pontos fixos no eixo real, ou se  $T(z) = az + b$ , com  $a \neq 1$ ,  $T$  possui um ponto fixo no eixo real e o  $\infty$ .*

(II) *Dizemos que  $T$  é uma isometria parabólica ou transformação parabólica quando  $c \neq 0$  e  $\Delta = 0$ . A isometria possui apenas um único ponto no eixo real. Se  $T(z) = z + b$ ,  $b \neq 0$  então o único ponto fixo é  $\infty$ .*

(III) *Dizemos que  $T$  é uma isometria elíptica ou transformação elíptica se  $c \neq 0$  e  $\Delta < 0$ , então  $T$  possui apenas um único ponto fixo em  $\mathbb{H}^2$ .*

A seguir, descrevemos geometricamente as isometrias positivas examinando como atua sobre as geodésicas e horociclos de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

### Isometrias hiperbólicas

Sejam  $f$  uma isometria hiperbólica de  $\mathbb{H}^2$ ,  $x_1$  e  $x_2$  os pontos fixos de  $f$  sobre o bordo de  $\mathbb{H}^2$ , ou seja,  $x_1, x_2 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ . Seja  $r$  a geodésica completa de  $\mathbb{H}^2$  de extremos  $x_1$  e  $x_2$ . Se  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , então  $r$  é um semicírculo ortogonal ao bordo assintótico.

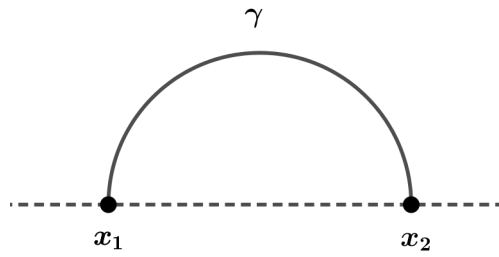


Figura 1.6: Geodésica completa  $\gamma$  com extremos  $x_1$  e  $x_2$ .

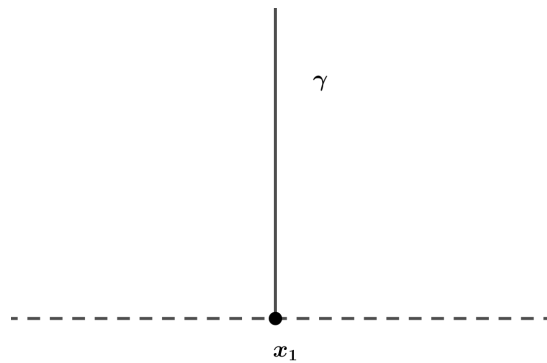


Figura 1.7: Geodésica completa  $\gamma$  com extremos  $x_1$  e  $\infty$ .

Se  $x_1 = \infty$  ou  $x_2 = \infty$  então  $r$  é a semirreta vertical que começa em  $x_1$  ou  $x_2$ .

Note que, a imagem de  $r$  por  $f$  é uma geodésica cujas extremidades são  $x_1$  e  $x_2$ , pois,  $x_1$  e  $x_2$  são pontos fixos e  $f$  é isometria. Então a única geodésica com tais extremidades é  $r$ . Logo,  $f$  é globalmente invariante, ou seja,  $f(r) = r$ .

Sendo  $p \in r$ , teremos que  $f(p) \in r$ . Supondo, sem perda de generalidade, que a orientação é de  $x_1$  para  $x_2$ , seja  $q \neq p \in r$ , onde  $q$  está entre  $p$  e  $f(p)$ . Então  $f(q)$  está entre  $f(p)$  e  $x_2$  pois  $f$  é injetiva.

**Proposição 1.23.** *Seja  $f$  é uma translação hiperbólica. A distância hiperbólica entre um ponto qualquer da geodésica completa  $r$  e sua imagem por  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = cte$ , sendo  $p \in r$ . Note que,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(p, f(q)) &= d_{\mathbb{H}}(p, q) + d_{\mathbb{H}}(q, f(q)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(p, f(p)) + d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q)). \end{aligned}$$

Como  $f$  é uma isometria, então  $d_{\mathbb{H}}(p, q) = d_{\mathbb{H}}(f(p), f(q))$ . Assim,

$$d_{\mathbb{H}}(q, f(q)) = d_{\mathbb{H}}(p, f(p)).$$

Logo,  $d_{\mathbb{H}}(p, f(p)) = cte$ . □

Portanto, a distância hiperbólica entre um ponto qualquer de  $r$  e sua imagem por  $f$  é constante, chamemos de  $\lambda$  esta constante,  $\lambda > 0$ . Concluimos que,  $f$  leva cada ponto de

$r$  sobre o ponto de  $r$  situado entre  $p$  e  $x_2$ , se encontrando a uma distância hiperbólica  $\lambda$  de  $p$ .

Seja  $z_0$  um ponto qualquer de  $\mathbb{H}^2$ . Seja  $\alpha$  a única geodésica completa de  $\mathbb{H}^2$  passando por  $z_0$  e ortogonal a  $r$ . Seja  $p$  a interseção de  $\alpha$  com  $r$ . Necessariamente,  $f(\alpha)$  é a geodésica passando por  $f(p)$  e ortogonal a  $r$ . Mas  $f(z_0)$  é um dos dois pontos de  $f(\alpha)$  situados a uma distância hiperbólica de  $f(p)$  igual a  $d_{\mathbb{H}}(z_0, p)$  porque  $d_{\mathbb{H}}(z_0, p) = d_{\mathbb{H}}(f(z_0), f(p))$ . Finalmente, como  $f$  preserva a orientação de  $\mathbb{H}^2$ ,  $f(z_0)$  se encontra na mesma componente conexa de  $\mathbb{H}^2 - \{r\}$  que  $z_0$ . Isto determina completamente a imagem de  $z_0$  e determina a descrição geométrica de uma isometria hiperbólica de  $\mathbb{H}^2$ .

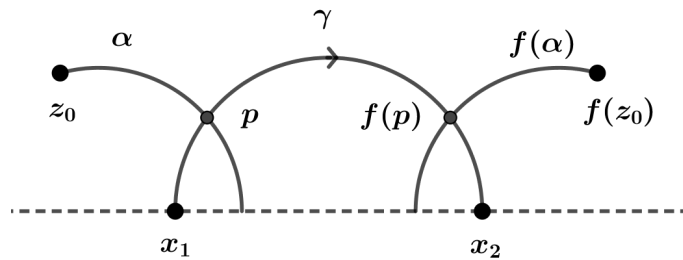


Figura 1.8: Isometria hiperbólica.

**Obs 1.24.** A aplicação  $f$ , definida anteriormente, é denominada *translação hiperbólica de largura  $\lambda$  ao longo de  $r$  no sentido de  $x_1$  para  $x_2$* .

### Isometrias parabólicas

Suponha  $f$  uma isometria parabólica e  $x_1$  o seu único ponto fixo,  $x_1 \in \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ . Se  $x_1 = \infty$  então  $f(z) = z + b$ ,  $b \neq 0$ . Portanto,  $f$  é uma translação horizontal euclidiana do vetor  $(b, 0)$ . Neste caso, a descrição geométrica de  $f$  se resume a uma translação euclidiana. Note que, os horociclos de  $\mathbb{H}^2$  que são tangentes ao  $\infty$  são as retas horizontais. Além disso,  $f$  fix globalmente cada uma dessas retas.

Considere agora, um ponto  $p = (x, y_0) > 0$  do horociclo  $C_{y_0} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Im(z) = y_0\}$  tal que  $f(p) = p + b = (x + b, y_0)$ . O comprimento hiperbólico do arco  $C_{y_0}$ , delimitado por  $p$  e  $f(p)$ , é  $|b|/y_0$ . De fato, o segmento que liga  $p$  e  $f(p)$  é

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (1 - t)p + tf(p), \quad t \in [0, 1] \\ &= (x + tb, y_0) \\ \alpha'(t) &= (b, 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 L_{\mathbb{H}}(\alpha) &= \int_0^1 \|\alpha'(t)\|_{\mathbb{H}} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\sqrt{b^2}}{y_0} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{|b|}{y_0} dt \\
 &= \frac{|b|}{y_0}.
 \end{aligned}$$

Concluimos assim, que  $f$  leva cada ponto  $p \in \mathbb{H}^2$  em um dos dois pontos do horociclo passando por  $p$ , o sinal de  $b$  determinará qual dos dois pontos será a imagem de  $p$  por  $f$ . Suponha que  $x_1 \neq \infty \in \mathbb{R}$ . Observe que, fazendo as relações  $ad - bc = 1$ ,  $|a + d| = 2$  e  $f(x_1) = x_1$ , temos

$$\begin{aligned}
 \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} &= x_1 \\
 ax_1 + b &= cx_1^2 + dx_1.
 \end{aligned}$$

Daí, se  $|a + d| \geq 0$ , então

$$\begin{aligned}
 cx_1^2 + (d - a)x_1 &= b \\
 a + d &= 2 \\
 ad - bc &= 1.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 b &= cx_1^2 + (d - a)x_1 \\
 &= cx_1^2 + 2(d - 1)x_1.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Então

$$\begin{aligned}
 (2 - d)d - (cx_1^2 + 2(d - 1)x_1)c &= 1 \\
 cd + c^2(x_1 - 1) &= 0 \\
 d &= 1 - cx_1.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Das equações (1.2), (1.3) e (1.4), temos  $a = 1 + cx_1$ ,  $b = -cx_1^2$ . Assim,

$$f(z) = \frac{(1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}, \quad c \neq 0.$$

Logo, se  $a + d = 2$ , então

$$f(z) = \frac{(1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz + 1 - cx_1}.$$

Se  $a + d = -2$ , então

$$f(z) = \frac{(-1 + cx_1)z - cx_1^2}{cz - 1 - cx_1}.$$

Considere a isometria positiva  $g(z) = \frac{1}{x_1 - z}$ , temos  $g(x_1) = \infty$  e  $g^{-1}(z) = -1/z + x_1$ .

Seja  $R = g \circ f \circ g^{-1}$ , observe que  $R$  é uma isometria positiva pois  $f^{-1}, f, g$  são isometrias positivas. Tome  $z$  um ponto fixo de  $R$  então  $R(z) = z$  se, e somente, se  $g(f(g^{-1}(z))) = z$  se, somente, se  $z = g(x_1) = \infty$ , então  $R$  é uma isometria parabólica cujo único ponto fixo é  $\infty$ , então  $R(z) = z + k$ ,  $k \neq 0 \forall z \in \mathbb{H}^2$ . Isto vai simplificar consideravelmente a descrição geométrica de  $f$ .

Seja  $C$  um horociclo tangente ao  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  em  $x_1 \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned} f &= g^{-1} \circ R \circ g \\ f(c) &= g^{-1}(R(g(c))). \end{aligned}$$

Logo,  $g(C)$  é uma reta horizontal então  $R(g(c)) = g(C)$ , pois,  $R$  deixa fixa cada uma dessas retas por se tratar de uma isometria parabólica. Assim,

$$\begin{aligned} f(c) &= g^{-1}(g(c)) \\ &= C. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  deixa globalmente fixo todo horociclo tangente ao  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$  no ponto  $x_1 \in \mathbb{R}$ .

Determinemos agora, a imagem de um ponto qualquer de  $\mathbb{H}^2$ . Seja  $p$  um ponto de  $\mathbb{H}^2$ , chamemos  $C_p$  o único horociclo passando por  $p$  e tangente a  $\mathbb{R}$  no ponto  $x_1$ . A imagem de  $p$  se encontra sobre  $C_p$  porque  $f$  preserva cada horociclo tangente ao ponto  $x_1$ . Note que, o comprimento hiperbólico do arco de  $C_p$  delimitado por  $p$  e  $f(p)$  é

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{H}}[p, f(p)] &= L_{\mathbb{H}}g(C_p)[g(p), R(g(p))] \\ &= \frac{|R(g(p)) - g(p)|}{\text{Im}(g(p))} \\ &= \frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{\text{Im}(p)}. \end{aligned}$$

Logo,  $f$  leva cada ponto  $p$  de  $\mathbb{H}^2$  em um dos dois pontos que se encontram sobre o mesmo horociclo  $C_p$  passando por  $p$  tangente ao ponto  $x_1 \in \mathbb{R}$  tal que, o comprimento hiperbólico do arco  $C_p$  delimitado por  $p$  e cada um de seus pontos seja  $\frac{|c| \cdot |x_1 - p|^2}{\text{Im}(p)}$ . A escolha deste ponto é determinada pelo sinal de  $c$ .

### Isometrias elípticas

Seja  $f$  uma isometria elíptica. Seja  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  o ponto fixo de  $f$ . Lembremos que, se  $u \in T_{z_0} \mathbb{H}^2$  é um vetor tangente ao ponto  $z_0$ , sua imagem pela  $D_{z_0} f$  é  $f'(z_0)u$ , isto é, o vetor

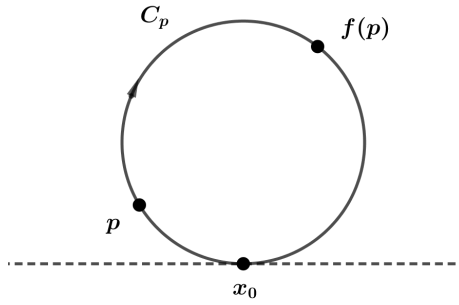


Figura 1.9: Isometria parabólica.

tangente a  $z_0$  é obtido fazendo uma rotação de ângulo igual ao  $\arg f'(z_0)$  e multiplicado por  $|f'(z_0)|$ . Assim, se  $r$  é a geodésica passando por  $z_0$  e tangente a  $u$ , sua imagem por  $f$  é a geodésica passando por  $z_0$  e tangente a  $e^{i\theta}u$ , onde  $\theta = \arg f'(z_0)$ . De fato, sabemos que  $\cos \theta = \frac{\langle f'(z_0)u, u \rangle}{\|f'(z_0)u\| \|u\|}$  e além disso,  $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\alpha}$ , onde  $\alpha = \arg(f'(z_0))$  e  $u = u_1 + iu_2$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} f'(z_0)u &= |f'(z_0)|e^{i\alpha}(u_1 + iu_2) \\ &= (|f'(z_0)|(\cos \alpha u_1 - \text{sen } \alpha u_2), |f'(z_0)|(\cos \alpha u_2 + \text{sen } \alpha u_1)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle f'(z_0)u, u \rangle &= |f'(z_0)|(u_1^2 + u_2^2) \cos \alpha \\ &= |f'(z_0)| \|u\|^2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\cos \theta = \frac{|f'(z_0)| \|u\|^2 \cos \alpha}{|f'(z_0)| \|u\|^2},$$

isto, implica que  $\theta = \alpha = \arg(f'(z_0))$ , pois, o ângulo orientado está entre  $(-\pi, \pi)$ .

Seja  $z \neq z_0 \in \mathbb{H}^2$ . Tome  $r$  a única geodésica passando pelos pontos  $z$  e  $z_0$ . Considere  $u \in T_{z_0}\mathbb{H}^2$  um vetor não nulo tangente a  $r$  no ponto  $z_0$ . Chamamos de  $r^+$  a componente conexa de  $r - \{z_0\}$  contendo  $z$ . Sem perda de generalidade, suponha que a orientação seja de  $z_0 \rightarrow z$ , então a imagem de  $r^+$  por  $f$  é a semi-geodésica que termina em  $z_0$  e começa em  $f(z)$ , onde o vetor  $D_{z_0}f(a)$  tangente unitário faz um ângulo orientado  $\theta = \arg f'(z_0)$  com  $u$ . Logo,  $f(z)$  é o único ponto de  $f(r^+)$  tal que  $d(f(z), z_0) = d(z, z_0)$ , pois,  $z_0$  é ponto fixo e  $f$  é uma isometria. Isto determina completamente  $f(z)$ . Note que,  $f$  se comporta como uma rotação hiperbólica de centro  $z_0$  e de argumento  $\theta = \arg f'(z_0)$ .

As isometrias do disco de Poincaré  $\mathbb{D}$  são analogamente classificadas como no caso do modelo do semi-plano superior, que podem ser explicitas mediante a isometria  $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ . Os três tipos de isometrias são:

- (I) As isometrias (translações) hiperbólicas, que admitem dois pontos fixos distintos

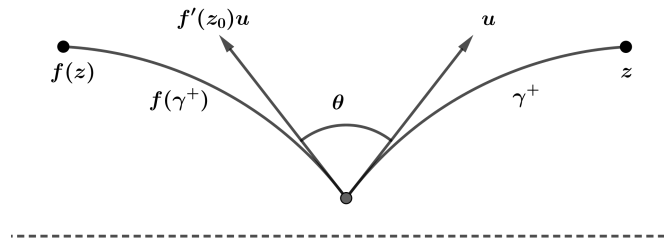


Figura 1.10: Isometria elíptica.

no bordo assintótico de  $\mathbb{D}$ , são translações sobre a mesma geodésica (se o ponto está na geodésica) ou translações sobre a equidistante que junta os dois pontos fixos (se o ponto não está sobre a geodésica).

- (II) As isometrias (translações parabólicas) que admitem um ponto fixo duplo no bordo assintótico de  $\mathbb{D}$ , são isometrias que deixam globalmente fixo cada horociclo tangente ao ponto fixo, isto é, dado um ponto  $p$  sua imagem  $f(p)$  mora no horociclo que passa por  $p$  e é tangente ao ponto fixo.
- (III) As isometrias elípticas que admitem um único ponto fixo em  $\mathbb{D}$ , são as rotações hiperbólicas.

## 1.2 Noções de Geometria Esférica

Nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos básicos da geometria esférica, mas úteis para este trabalho. A principal referência utilizada é [11].

Note que, a esfera euclidiana, se trata do conjunto,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

dotado da métrica induzida do espaço Euclidiano tridimensional. Porém, ao fazer uso da projeção estereográfica podemos escrever o espaço  $\mathbb{S}^2$  de forma intrínseca, isto é, sem menção do espaço ambiente. Dessa maneira,

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$$

e sua métrica

$$ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2), \text{ sendo } \lambda = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Sua base natural é dada por  $\{\partial_x, \partial_y\}$  e sua base ortonormal  $\{e_1 = \lambda^{-1}\partial_x, e_2 = \lambda^{-1}\partial_y\}$

**Proposição 1.25.** *O grupo das isometrias da esfera é formado por  $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = \mathcal{O}_3$ , sendo  $\mathcal{O}_3$  o grupo das matrizes ortogonais de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Veja [2], pág 36. □

**Proposição 1.26.** *As únicas geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  são os grandes círculos.*

*Demonstração.* Veja [1]. □

## 1.3 Noções em Geometria Riemanniana

Nesta seção estamos interessados em apresentar algumas definições e resultados da Geometria Riemanniana que serão importantes para compreensão deste trabalho. Tomamos como referência o livro de Geometria Riemanniana do Manfredo do Carmo [4].

**Definição 1.27.** *Um conjunto  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  se existe uma família de aplicações biunívocas  $\varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ , com  $U_i$  conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$ , tais que:*

$$(I) \bigcup_i \varphi_i(U_i) = M.$$

(II) *Para todo  $i, j$  onde  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , então  $\varphi_i^{-1}(W)$  e  $\varphi_j^{-1}(W)$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$  e  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  é uma aplicação diferenciável.*

(III)  *$\{(U_i, \varphi_i)\}$  é a maior família satisfazendo as condições anteriores.*

Sendo  $p \in \varphi_i(U_i)$ , a aplicação  $\varphi_i$  é chamada de *parametrização* de  $M$  em  $p$  e  $\varphi_i(U_i)$  é dita uma *vizinhança coordenada* de  $M$  em  $p$ .

**Exemplo 1.28.** 1.  $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$  e  $\mathbb{S}^n$  são variedades diferenciáveis  $n$ -dimensionais com curvatura de Gauss constante;

2. *Uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  é uma variedade diferenciável bidimensional.*

**Definição 1.29.** *Sejam  $M_1^m$  e  $M_2^n$  duas variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é diferenciável em  $p \in M_1$  se dada uma parametrização  $y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_2$  em  $\varphi(p)$  existe uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_1$  em  $p$  tal que  $\varphi(x(U)) \subset y(V)$  e*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

*é diferenciável em  $x^{-1}(p)$ . E  $\varphi$  será diferenciável em um aberto  $U \subset M_1$  quando for diferenciável em cada ponto de  $U$ .*

Observe que, da condição (II) da Definição 1.27, segue que esta definição de diferenciabilidade independe da escolha de  $x$  e  $y$ .

**Definição 1.30.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ . Uma curva diferenciável em  $M$  é uma aplicação  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  diferenciável. Assim, suponha que  $\alpha(0) = p \in M$ , e defina  $\mathcal{D}$  como sendo o conjunto das funções de  $M$  que são diferenciáveis no ponto  $p$ . O vetor tangente à  $\alpha$  em  $t = 0$  é  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  e dado por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

$E$ , um vetor tangente a  $M$  em  $p$  é o vetor tangente a alguma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , onde  $\alpha(0) = p$ . O conjunto de todos os vetores tangentes a  $M$  no ponto  $p$  será denotado por  $T_pM$ .

Observe que, ao tomarmos uma parametrização  $x : U \rightarrow M^n$  num ponto  $p = x(0)$ , obtemos as expressões de  $f$  e de  $\alpha$  em função desta parametrização como sendo

$$f(x_1, \dots, x_n) = f \circ x(q), q = (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ e } \alpha(t) = x(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Portanto, ao restringir  $f$  a  $\alpha$ , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{df(x_1, \dots, x_n)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f. \end{aligned}$$

Assim, o vetor  $\alpha'(0)$  é dado por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0.$$

Observe que  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  se trata do vetor tangente à curva coordenada da parametrização  $x$  em  $p$ . Da equação acima, é possível concluir que o vetor tangente a uma curva  $\alpha$  no ponto  $p$  apenas depende das derivadas coordenadas  $\left( \frac{dx_i}{dt} \right)$ . E ainda decorre que  $T_pM$ , segundo as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão  $n$  e uma base deste espaço é  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ .

**Definição 1.31.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é um difeomorfismo quando ela é diferenciável, bijetiva e sua inversa  $\varphi^{-1}$  também é diferenciável.  $\varphi$  é dita um difeomorfismo local em um ponto  $p \in M$  se existem vizinhanças  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $\varphi$  tais que  $\varphi : U \rightarrow V$  seja um difeomorfismo.*

**Teorema 1.32.** *Sejam  $M_1^m$  e  $M_2^n$  variedades diferenciáveis e  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  uma aplicação diferenciável. Se  $p \in M_1$  é tal que  $d\varphi : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$  é um isomorfismo, então  $\varphi$  é um difeomorfismo local em  $p$ .*

**Definição 1.33.** *Sejam  $M_1^m$  e  $M_2^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  é dita uma imersão quando sua diferencial  $d\varphi : T_pM_1 \rightarrow T_pM_2$  é injetiva para todo ponto  $p \in M$ . Agora se, além de ser uma imersão,  $\varphi$  ainda for um homeomorfismo sobre sua imagem  $\varphi(M_1) \subset M_2$  dizemos que  $\varphi$  é um mergulho. Quando  $M_1 \subset M_2$  e  $i : M_1 \hookrightarrow M_2$  é um mergulho, dizemos que  $M_1$  é uma subvariedade de  $M_2$ .*

**Obs 1.34.** Se tivermos  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  uma imersão, então  $m \leq n$  e a diferença  $n - m$  é definida como a codimensão de  $\varphi$ .

**Definição 1.35.** Seja  $M$  uma variedade regular. Um campo de vetores  $X$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $X(p) \in T_pM$ . Em termos de aplicações,  $X$  pode ser definido como sendo uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $M$ . O campo é diferenciável, sempre que a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  for diferenciável.

Ao tomar uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  podemos obter uma expressão para o campo  $X$  em função dessa parametrização dada por

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde  $a_i : U \rightarrow U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  é a base de  $T_pM$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Definição 1.36.** Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Definimos colchete como sendo o campo  $[X, Y] = XY - YX$ , que consequentemente também é diferenciável.

Vejamos agora algumas propriedades envolvendo campos diferenciáveis e colchetes.

**Proposição 1.37.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  campos diferenciáveis em uma variedade  $M$ ,  $a, b$  números reais e funções diferenciáveis  $f$  e  $g$ . Então, são válidas as seguintes propriedades:

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$  - anticomutatividade
2.  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  - linearidade
3.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  - identidade de Jacobi
4.  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

*Demonstração.* 1.  $[X, Y] = XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X]$

2.

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX - bY)Z - Z(aX - bY) \\ &= aXZ - bYZ - aZX + bZY \\ &= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\ &= a[X, Z] + [Y, Z] \end{aligned}$$

3. Note que,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \end{aligned}$$

Enquanto,

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] &= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X + Y(ZX - XZ) \\
&\quad - (ZX - XZ)Y \\
&= XYZ - XZY + YZX + ZYX + YZX - YXZ \\
&\quad - ZXY + XZY \\
&= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX
\end{aligned}$$

Assim, obtemos,

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \Leftrightarrow [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

4. Observe que:

$$\begin{aligned}
[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) &= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\
&= fg[X, Y] + fX(g)X - gY(f)X
\end{aligned}$$

□

**Definição 1.38.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Uma métrica riemanniana é uma correspondência que associa cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em  $T_pM$  que varia diferencialmente, isto é, para todo par  $X, Y$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança  $V \subset M$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $V$ .*

**Definição 1.39.** *Uma variedade diferenciável  $M$ , munida de uma métrica Riemanniana é denominada variedade Riemanniana.*

**Definição 1.40.** *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é dito uma isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)} \quad (1.5)$$

para todo  $p \in M; u, v \in T_pM$ .

**Definição 1.41.** *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades riemannianas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que  $f$  é uma isometria local em um ponto  $p \in M$  se existe uma vizinhança  $p \in U \subset M$  em que  $f : U \rightarrow f(U)$  é um difeomorfismo satisfazendo a equação (1.5).*

**Definição 1.42.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável. U aplicação diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , onde  $I$  é um intervalo aberto, é denominada uma curva em  $M$ .*

**Definição 1.43.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva em  $M$ . Um campo de vetores ao longo de  $\alpha$  é uma aplicação que em  $t \in I$  associa um vetor tangente  $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$ . E dizemos que esse campo  $V$  é diferenciável se para toda função diferenciável  $f$  em  $M$ , tivermos que  $t \rightarrow V(t)f$  é uma aplicação diferenciável em  $I$ .*

**Obs 1.44.** Chamamos o campo  $d\alpha(\frac{d}{dt})$  de campo tangente de  $\alpha$  e o representamos por  $\frac{d\alpha}{dt}$ . Observe ainda que, nem sempre um campo vetorial ao longo de uma curva  $\alpha$  pode ser estendido à um aberto  $V \subset M$ .

O conjunto dos campos de vetores  $C^\infty$  em  $M$  será denotado por  $\mathfrak{X}(M)$  e por  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  em  $M$ .

**Definição 1.45.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

sendo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

**Definição 1.46.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e conexão afim  $\nabla$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , quando

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

**Definição 1.47.** Uma conexão afim  $\nabla$  numa variedade diferenciável  $M$  é chamada simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

E agora, é possível enunciar um Teorema de grande importância.

**Teorema 1.48.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:

- (I)  $\nabla$  é simétrica,
- (II)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

Tal conexão é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de  $M$ .

*Demonstração.* Considere inicialmente que exista tal conexão  $\nabla$  satisfazendo as condições acima. Assim,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad (1.6)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \quad (1.7)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle Y, \nabla_Z Y \rangle \quad (1.8)$$

Ao somar (2.92),(2.93) e subtrair (2.94), fazendo uso da propriedade simétrica de  $\nabla$ , encontramos

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle = & \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ & - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned}$$

Conforme pode ser visto acima,  $\nabla$  está determinada, univocamente, pela métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Portanto, caso exista a conexão, ela será única.

Agora, para a implicação contrária, basta definir  $\nabla$  segundo a equação acima. Dessa forma, é fácil verificar que esta está bem definida e que satisfaz as duas propriedades desejadas.  $\square$

A partir daqui, considere  $M$  uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

**Definição 1.49.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é dita ser uma geodésica em  $t_0 \in I$  se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  em  $t_0$ . Caso  $\gamma$  seja uma geodésica para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.

**Definição 1.50.** A curvatura  $R$  de uma dada variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência em que a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  associa uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

sendo  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Proposição 1.51.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:

- $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , ou seja,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

- Para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é linear, ou seja,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z + W) &= R(X, Y)Z + R(X, Y)W, \\ R(X, Y)fZ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

para  $\mathcal{D}(M)$ , e  $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definição 1.52.** Um tensor  $T$  de ordem  $r$  em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Isto significa que, dados  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $T(X_1, \dots, X_r)$  é uma função diferenciável em  $M$  e  $T$  é linear em cada entrada, ou seja,

$$T(X_1, \dots, fX + gY, \dots, X_r) = fT(X_1, \dots, X_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, X_r),$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, g \in \mathcal{D}(M)$

**Exemplo 1.53.** Seja o Tensor Curvatura  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  dado por:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . É imediato verificar, por tudo visto anteriormente, que  $R$  é um tensor de ordem 4.

### 1.3.1 Imersões Isométricas

**Definição 1.54.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades riemannianas. Uma imersão  $f : M \rightarrow N$  é chamada imersão isométrica se  $\langle u, v \rangle \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$ , para todo  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_pM$ .

Considere a imersão isométrica  $f : M^m \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ . Em cada ponto  $p \in M$  temos a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

que varia diferencialmente com  $p$ . A partir daqui, usaremos  $X, Y, Z, \dots$  para indicar campos diferenciais de vetores tangentes e letras gregas  $\xi, \eta, \epsilon, \dots$  para indicar campos diferenciais de vetores normais. Dados  $X, \eta$  temos:

$$\overline{\nabla}_x \eta = \nabla_X^\perp \eta - A(X)\eta$$

onde  $A$  é o operador de forma associado a  $\eta$ . A componente perpendicular  $\nabla^\perp$  de  $\overline{\nabla}_X \eta$  é chamada de conexão normal da imersão. Verifica-se facilmente que a conexão normal  $\overline{\nabla}^\perp$  possui as propriedades usuais de uma conexão.

**Proposição 1.55.** Dados  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  temos a chamada, Equação de Codazzi

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = \kappa \cos(\theta) (g(Y, T)X - g(X, T)Y)$$

e a Equação de Gauss,

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & g(AX, Z)g(Ay, W) - g(Ay, Z)g(AX, W) \\ & - \kappa (g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) - g(Y, T)g(X, Z)g(T, W) \\ & - g(X, T)g(Z, T)g(Y, W) + g(X, T)g(Y, Z)g(T, W) \\ & + g(Y, T)g(Z, T)g(X, W)) \end{aligned}$$

onde  $g$  e  $\kappa$  são a métrica e a curvatura de  $M$ , respectivamente.

## 1.4 Teorema de Frobenius

Nesta seção exibimos o Teorema de Frobenius, o qual é parte fundamental na determinação da parametrização da superfície  $S$ . Entretanto, primeiramente se faz necessário apresentarmos algumas definições. Para estas definições, que antecedem o Teorema, considere  $M$  como sendo uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .

**Definição 1.56.** Uma distribuição diferenciável  $r$ -dimensional  $\mathfrak{D}$  em  $M$  é uma atribuição que associa cada ponto  $p \in M$  a um subespaço vetorial de  $T_pM$  de dimensão  $r$  tal que, para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  e campos de vetores diferenciáveis  $X_1, X_2, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$  tais que  $\{X_1(q), X_2(q), \dots, X_r(q)\}$  é base de  $\mathfrak{D}_q$  para todo  $q \in U$ .

**Definição 1.57.**  $S \subset M$  é dita ser uma variedade integral de  $\mathfrak{D}$  se  $S$  é uma subvariedade  $r$ -dimensional de  $M$  com  $T_pS = \mathfrak{D}_p, \forall p \in S$ .

**Definição 1.58.** Uma distribuição diferenciável  $\mathfrak{D}$  é completamente integral se,  $\forall p \in M$  existe uma variedade integral  $S$  que passa por  $p$ .

**Definição 1.59.** Uma distribuição  $\mathfrak{D}$  em  $M$  é involutiva se,

$$X, Y \in \mathfrak{D} \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{D}. \quad (1.9)$$

Então, vejamos o que diz o Teorema de Frobenius.

**Teorema 1.60** (Frobenius). *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

*Demonstração.* Ver [10]. □

## Capítulo 2

# Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo apresentamos os principais resultados da dissertação. Mais precisamente, apresentamos o teorema de classificação das superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  onde  $\mathbb{M}^2$  é uma forma espacial bidimensional. Na seção 2.1 apresentamos o espaço ambiente bem como alguns resultados comuns sobre imersões em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . Em seguida, apresentamos separadamente a classificação das superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , respectivamente. As principais referencias usadas neste capítulo são: [5], [6], [9].

### 2.1 Aspectos de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

$\mathbb{M}^2(\kappa)$  é uma forma espacial bidimensional, completa e simplesmente conexa de curvatura constante  $\kappa$ , com  $\kappa = -1, 0, 1$ . Logo,

- para  $\kappa = -1$ ,  $\mathbb{M}^2(-1) = \mathbb{H}^2$ , onde  $\mathbb{H}^2$  denota o espaço hiperbólico.
- para  $\kappa = 0$ ,  $\mathbb{M}^2(0) = \mathbb{R}^2$ , onde  $\mathbb{R}^2$  denota o plano euclideano.
- para  $\kappa = 1$ ,  $\mathbb{M}^2(1) = \mathbb{S}^2$ , onde  $\mathbb{S}^2$  denota a esfera unitária euclideana.

O espaço  $\mathbb{M}^2(\kappa)$  é munido com a métrica  $g_{\mathbb{M}^2} = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$  onde

- $\lambda(x, y) = \frac{-1}{y}$  quando  $\kappa = -1$ .
- $\lambda(x, y) = 1$  quando  $\kappa = 0$ .
- $\lambda(x, y) = \frac{2}{1 - x^2 - y^2}$  quando  $\kappa = 1$ .

Dessa forma, a métrica do espaço ambiente  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  é a métrica produto, dada por

$$g_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + dt^2.$$

Dada a variedade Riemanniana  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  munida da métrica produto  $g_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}$ , temos a conexão de Levi-Civita associada, que denominaremos por  $\bar{\nabla}$ .

**Lema 2.1.** *As conexões de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  são dadas por*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{E_1} E_1 &= -\frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_1 &= \frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_2 &= \frac{\lambda_y}{\lambda^2} E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_2 &= -\frac{\lambda_x}{\lambda^2} E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0 \\ \bar{\nabla}_{E_1} E_3 &= 0 \\ \bar{\nabla}_{E_2} E_3 &= 0 \\ \bar{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0 \end{aligned}$$

sendo  $\{E_1, E_2, E_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Considere  $\{E_1, E_2, E_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . Sendo  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$  e  $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$  então,  $X_i = \lambda E_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . A conexão de Levi Civita em termos dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  é dada por:

$$\bar{\nabla}_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k X_k. \quad (2.1)$$

Temos que a métrica de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  é  $g_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + dt^2$ . Assim, a matriz  $[g_{ij}]$ , onde  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ , é

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que, a matriz  $[g_{ij}]$  é invertível sendo

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

a sua inversa. Dessa forma, teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{X_i g_{jk} + X_j g_{ki} - X_k g_{ij}\} g^{km} \quad (2.3)$$

é a expressão dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos  $g_{ij}$  (dados pela métrica).

Assim, da equação (2.1), temos

$$\bar{\nabla}_{X_1} X_1 = \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + \Gamma_{11}^3 X_3.$$

Da equação (2.3), concluímos que:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{X_1 g_{1k} + X_1 g_{k1} - X_k g_{11}\} g^{k1} \\ &= \frac{1}{2} \{X_1 g_{11} + X_1 g_{11} - X_1 g_{11}\} g^{11} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \lambda^2 + \frac{\partial}{\partial x} \lambda^2 - \frac{\partial}{\partial x} \lambda^2 \right\} \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda_x}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{X_1 g_{1k} + X_1 g_{k1} - X_k g_{11}\} g^{k2} \\ &= \frac{1}{2} \{X_1 g_{12} + X_1 g_{21} - X_2 g_{11}\} g^{22} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial y} \lambda^2 \right\} \frac{1}{\lambda} \\ &= -\frac{\lambda_x}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \{X_1 g_{1k} + X_1 g_{k1} - X_k g_{11}\} g^{k3} \\ &= \frac{1}{2} \{X_1 g_{13} + X_1 g_{31} - X_3 g_{11}\} g^{33} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial t} \lambda^2 \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Consequentemente,

$$\bar{\nabla}_{X_1} X_1 = \frac{\lambda_x}{\lambda} X_1 - \frac{\lambda_y}{\lambda} X_2. \quad (2.7)$$

Por outro lado, usando que  $X_i = \lambda E_i$ , temos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_{X_1} X_1 &= \bar{\nabla}_{\lambda E_1} \lambda E_1 \\
 &= \lambda \bar{\nabla}_{E_1} \lambda E_1 \\
 &= \lambda E_1 (\lambda) E_1 + \bar{\nabla}_{E_1} E_1 \\
 &= \lambda_x E_1 + \bar{\nabla}_{E_1} E_1.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ao fazer  $X_i = \lambda E_i$  na equação (2.7) e igualando com (2.8), obtemos que

$$\bar{\nabla}_{E_1} E_1 = \frac{\lambda_y}{\lambda} E_2.$$

Procedendo de forma análoga, se obtém as demais conexões de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . □

### 2.1.1 Isometrias de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

**Lema 2.2.** *Seja  $f : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  definida por  $f(z, t) = (f_1(z), f_2(t))$ , então  $f$  é uma isometria em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  se,  $f_1$  é isometria de  $\mathbb{M}^2$  e  $f_2$  é isometria de  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Seja  $p = (p_h, p_v)$  e  $v = (v_h, v_v) \in T_p \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned}
 \|Df_p(v)\|^2 &= \left\| \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h + \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v \right\|^2 \\
 &= \left\langle \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h, \frac{\partial f_1}{\partial z} v_h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v, \frac{\partial f_2}{\partial t} v_v \right\rangle_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}} \\
 &= \|Df_{1p_h}(v_h)\|^2 + \|Df_{2p_v}(v_v)\|^2 \\
 &= \|v_h\|^2 + \|v_v\|^2 \\
 &= \|(v_h, v_v)\|^2 \\
 &= \|v\|^2.
 \end{aligned}$$

Daí,  $\|Df_p(v)\| = \|v\|$ . □

**Obs 2.3.** *A recíproca do Lema acima, em geral, não é verdadeira. Um contraexemplo é: a isometria linear em  $\mathbb{R}^3$ , com coordenadas  $((x, y), t)$  dada pela seguinte matriz ortogonal:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

*Em coordenadas, essa isometria é uma rotação em torno do eixo  $x$  dada por*

$$T(x, y, t) = (x, y \cos \theta - t \text{sen } \theta, y \text{sen } \theta + t \cos \theta) = (f_1, f_2).$$

*Observe que  $f_1 = (x, y \cos \theta - t \text{sen } \theta)$  e  $f_2 = (y \text{sen } \theta + t \cos \theta)$  claramente não são isometrias de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente.*

Porém, a recíproca do Lema anterior é verdadeira quando  $\mathbb{M}^2 = \mathbb{H}^2$ , como podemos ver no Lema a seguir.

**Lema 2.4.** *Seja  $f : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  definida por  $f(z, t) = (f_1(z), f_2(t))$ , então  $f$  é uma isometria em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_1$  é isometria de  $\mathbb{H}^2$  e  $f_2$  é isometria de  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* A demonstração da volta é imediata, basta usar o Lema 2.2. Para a ida faremos o seguinte: Seja  $G = \{g \in Isom(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}) / g = (g_1, g_2)\}$  Como  $G$  age transitivamente sobre  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , então existe uma isometria  $g \in G$ ;  $g(f(0)) = 0$ . Note que  $d_0(g \circ f)(v) = w$ ,  $w \in T_0 \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Compondo com outra isometria de  $G$ , digamos  $\bar{g}$ , obtemos  $\bar{g} \circ g \circ f$  é a identidade. Logo,

$$f = g^{-1} \circ \bar{g}^{-1} \in G.$$

Portanto  $f_1$  é uma isometria de  $\mathbb{H}^2$  e  $f_2$  é uma isometria de  $\mathbb{R}$ . □

Na seção 2.3 apresentamos alguns exemplos de superfícies imersas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  invariantes por isometrias do ambiente.

### 2.1.2 Imersões Isométricas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  uma imersão de uma superfície completa e orientável na variedade produto  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . Por uma questão de simplicidade trataremos as propriedades da imersão  $\phi$  como as das superfície  $S$  e denotaremos a imagem de  $\phi(S)$  por  $S$ . Denotaremos por  $\langle, \rangle$  a métrica puxada do ambiente sobre  $S$  e por  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita associada a  $\langle, \rangle$ .

Seja  $N$  o campo normal unitário sobre  $S$ , que será fixado com sendo a orientação de  $S$ . Denotaremos por  $A$  o operador de forma. Assim, as fórmulas de Gauss e Weingarten são dadas respectivamente por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N, \quad \text{(Gauss)}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -AX, \quad \text{(Weingarten)}$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Dada a imersão  $S$  com orientação fixada pelo normal unitário  $N$ , denotaremos por  $\xi$  o campo vertical tangente à variedade  $\mathbb{R}$ . Vamos decompor o campo  $\xi$  nas componentes tangente e normal com relação a superfície  $S$ . Isto é,

$$\xi = T + \nu N, \quad (2.9)$$

onde  $T$  é a projeção tangente de  $\xi$  sobre  $S$  e  $\nu N$  é a projeção de  $\xi$  sobre o campo normal  $N$ . A função  $\nu = \cos \theta$  é chamada de *função ângulo*.

Como o campo  $T \in \mathfrak{X}(S)$  definimos um tensor  $\mathcal{T}$  de ordem quatro sobre  $S$

$$\mathcal{T} : \mathfrak{X}(S)^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$\mathcal{T}_X^Y = g(X, Y)g(Y, T)g(W, T) - g(X, W)g(Y, T)g(Z, T)$$

onde  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ .

**Proposição 2.5.** *Seja  $S$  uma superfície Riemanniana simplesmente conexa com métrica  $g$ , conexão  $\nabla$  e tensor de curvatura Riemanniana  $R$ . Então, para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(S)$ , temos*

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(SX, Z)G(SY, W) + g(SX, W)g(SY, Z). \quad (\text{Equação de Gauss})$$

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = \kappa \cos \theta (g(Y, T)X - g(X, T)Y). \quad (\text{Equação de Codazzi})$$

E também, as seguintes equações são satisfeitas pela imersão

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1 \quad (2.10)$$

$$\nabla_X T = \nu AX \quad (2.11)$$

$$X[\cos \theta] = g(AX, T). \quad (2.12)$$

onde

$$R(X, Y, Z, W) = -\kappa[g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)] - \kappa[\mathcal{T}_X^Y(Z, W) - \mathcal{T}_Y^X(Z, W)].$$

*Demonstração.* Veja [16]. □

Daqui para frente, iremos considerar  $\theta$  constante com  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . No caso  $\theta = 0$  temos que  $\xi$  é ortogonal a superfície e, portanto,  $S$  é localmente  $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$ , enquanto no caso  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\xi$  é sempre tangente a superfície. Isso corresponde ao produto Riemanniano entre uma curva em  $\mathbb{M}^2$  e  $\mathbb{R}$ .

Como  $\xi = T + \cos \theta N$ , segue que

$$1 = \|\xi\|^2 = \|T\|^2 + \cos^2 \theta \|N\|^2 = \|T\|^2 + \cos^2 \theta.$$

Assim,  $\|T\| = \sin \theta$ . Defina a seguinte base ortonormal sobre o plano tangente de  $S$ :

$$e_1 = \frac{T}{\|T\|}, \quad (2.13)$$

$$e_2 = \frac{JT}{\|T\|}, \quad (2.14)$$

onde  $J$  é a rotação de ângulo  $\pi/2$  no sentido anti-horário sobre o plano tangente a  $S$ .

**Proposição 2.6.** *Os vetores  $e_1$  e  $e_2$  são direções principais.*

*Demonstração.* Da equação (2.12), como  $\theta$  é constante, segue que

$$g(AX, T) = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(S).$$

Como  $A$  é um operador autoadjunto, temos

$$g(X, AT) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(S), \quad (2.15)$$

consequentemente,  $AT = 0T$ . Logo  $T$  é uma direção principal associada a 0.

Como  $JT = \gamma T + \sigma JT$ , segue que

$$\gamma = \frac{g(AJT, T)}{g(T, T)} = \frac{g(JT, AT)}{g(T, T)} = 0. \quad (2.16)$$

Logo,  $JT$  também é uma direção principal, associada a  $\sigma$ . □

**Proposição 2.7.** *Seja  $S$  uma superfície imersa em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  fazendo ângulo constante com a direção vertical  $\xi$ . Seja  $\{e_1, e_2\}$  a base ortonormal definida em 2.13. A conexão de Levi Civita  $\nabla$  de  $S$  é dada por*

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0 & \nabla_{e_1} e_2 &= 0 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \sigma \cotg(\theta) e_2 & \nabla_{e_2} e_2 &= -\sigma \cotg \theta e_1. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Da equação (2.11), decorre que

$$\nabla_T T = 0 \quad (2.17)$$

$$\nabla_{JT} T = \sigma \cos \theta JT. \quad (2.18)$$

E consequentemente,

$$\nabla_T JT = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla_{JT} JT = \sigma \cos \theta T. \quad (2.20)$$

Assim, obtemos

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{\frac{T}{\|T\|}} \frac{T}{\|T\|} = \frac{1}{\|T\|^2} \nabla_T T = 0.$$

Logo,  $\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = 0$ . Procedendo de forma semelhante encontramos as demais conexões. □

**Proposição 2.8.** *Se  $S$  é uma superfície com ângulo constante  $\theta \neq 0$  em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ , então  $M$  tem curvatura Gaussiana constante  $K = \kappa \cos \theta$ .*

*Demonstração.* Ao tomar  $X = e_1, Y = e_2, Z = X$  e  $Y = W$  na **Equação de Gauss** obtemos o resultado em questão. □

### 2.1.3 Sistema de coordenadas

Com a finalidade de simplificar os cálculos, introduziremos um sistema de coordenadas locais em torno de um ponto fixado sobre a superfícies  $S$ . Para tanto, usaremos uma

ferramenta clássica da geometria, a saber: o Teorema de Frobenius. Considerando as notações estabelecidas na seção anterior, provamos no próximo resultado que a distribuição  $e_1, e_2$  é involutiva.

**Proposição 2.9.** *A distribuição  $\mathfrak{D} = \{e_1, e_2\}$  é involutiva.*

*Demonstração.* Para provar que esta é uma distribuição involutiva mostramos que  $[e_1, e_2]$  é paralelo a  $e_2$ . Segue das equações **Gauss** e de **Weingarten** que

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \nabla_{e_1} e_2 \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \nabla_{e_2} e_1.$$

Assim, da Proposição 2.7, temos

$$[e_1, e_2] = \sigma \cotg \theta e_2.$$

Portanto a distribuição é involutiva. □

Logo, do Teorema de Frobenius segue que existe um sistema de coordenadas ortogonal  $(U, (u, v))$  suficientemente pequeno em torno de  $p \in S$ , ou seja, uma parametrização local  $\phi : U \rightarrow S$  tal que  $\phi_u = \alpha e_1$  e  $\phi_v = \beta e_2$  com  $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$ .

Como  $[\phi_u, \phi_v] = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = [\phi_u, \phi_v] &= [\alpha e_1, \beta e_2] \\ &= \bar{\nabla}_{\beta e_2} \alpha e_1 - \bar{\nabla}_{\alpha e_1} \beta e_2 \\ &= \beta_u e_2 + \alpha \beta \bar{\nabla}_{e_1} e_2 - \alpha_v e_1 - \alpha \beta \bar{\nabla}_{e_2} e_1 \\ &= \alpha_v e_1 - (\beta_u + \alpha \beta \sigma \cotg \theta) e_2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_v = 0 \tag{2.21}$$

$$\beta_u = \alpha \beta \sigma \cotg \theta. \tag{2.22}$$

A equação (2.21) nos dá que  $\alpha = \alpha(u)$ . Assim, através de uma mudança de coordenadas, podemos assumir que  $\alpha = 1$ . Logo, a métrica de  $S$  é dada por:

$$g_S = du^2 + \beta^2(u, v) dv^2.$$

O operador de forma referente a base  $\{\phi_u, \phi_v\}$  é dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

onde  $\sigma = \tg \theta \frac{\beta_u}{\beta}$ .

Note que ao substituir, na (**Equação de Codazzi**),  $X = \partial_u$  e  $Y = \partial_v$ , obtemos

$$\sigma_u + \kappa \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma^2 \operatorname{cotg} \theta = 0 \quad (2.23)$$

onde  $\kappa$  é a curvatura de Gauss da base  $\mathbb{M}^2$ . Dessa forma, temos a seguinte Proposição.

**Proposição 2.10.** *As equações*

$$\sigma_u + \kappa \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma^2 \operatorname{cotg} \theta = 0 \quad (2.24)$$

$$\beta_u - \beta \sigma \operatorname{cotg} \theta = 0 \quad (2.25)$$

sendo  $\kappa$  a curvatura Gaussiana de  $M$ , possuem as soluções:

para  $\kappa = 0$

$$\sigma(u, v) = \frac{\operatorname{tg} \theta}{u + \alpha(v)} \quad (2.26)$$

$$\beta(u, v) = \varphi(v)(u + \alpha(v)) \quad (2.27)$$

ou,

$$\sigma(u, v) = 0 \quad (2.28)$$

$$\beta(u, v) = \beta(v) \quad (2.29)$$

para  $\kappa = -1$

$$\sigma(u, v) = \operatorname{sen} \theta \tanh(u \cos \theta + C(v)) \quad (2.30)$$

$$\beta(u, v) = D(v) \cosh(u \cos \theta + C(v)) \quad (2.31)$$

ou,

$$\sigma(u, v) = \pm \operatorname{sen} \theta \quad (2.32)$$

$$\beta(u, v) = D(v)e^{\pm u \cos \theta} \quad (2.33)$$

para  $\kappa = 1$

$$\sigma(u, v) = -\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg}(u \cos \theta + C(v)) \quad (2.34)$$

$$\beta(u, v) = D(v) \cos(u \cos \theta + C(v)). \quad (2.35)$$

*Demonstração.* Basta resolver usando o método de variáveis separáveis. Vejamos o caso de  $\kappa = 1$ .

$$\begin{aligned}\sigma_u &= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta - \sigma^2 \cotg \theta \\ \frac{\sigma_u}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \sigma^2 \cotg \theta} &= -1 \\ \frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \frac{\sigma_u}{1 + \left(\frac{\sigma}{\operatorname{sen} \theta}\right)^2} &= -1.\end{aligned}$$

Integrando,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \int \frac{\sigma_u}{1 + \left(\frac{\sigma}{\operatorname{sen} \theta}\right)^2} du = -1.$$

Resolvendo a integral acima e isolando  $\sigma$ , obtemos

$$\sigma = -\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg}(u \cos \theta + C(v)). \quad (2.36)$$

Agora, vamos resolver a EDO de  $\beta$ . Substituindo a equação (2.36) em (2.25), temos

$$\begin{aligned}\beta_u &= -\beta \cos \theta \frac{\operatorname{sen}(u \cos \theta + C(v))}{\cos(u \cos \theta + C(v))} \\ \frac{\beta_u}{\beta} &= -\cos \theta \frac{\operatorname{sen}(u \cos \theta + C(v))}{\cos(u \cos \theta + C(v))}.\end{aligned}$$

Integrando a equação acima encontramos,

$$\ln(\beta) = \ln(\cos(u \cos \theta + C(v))) + \overline{D}(v) \quad (2.37)$$

$$\beta = D(v) \cos(u \cos \theta + C(v)). \quad (2.38)$$

E assim, concluímos a prova para o caso de  $\kappa = 1$ . Os demais casos não apresentaremos aqui, mas são feitos de forma semelhante a este.  $\square$

### 2.1.4 Sistema de equações diferenciais

Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície com ângulo constante imersa na variedade produto  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ , com orientação dada pelo vetor normal unitário  $N$  e com um sistema de coordenadas locais tais que as curvas coordenadas sejam linhas de curvatura, conforme apresentado na seção anterior. Isto é,  $\phi_u = e_1$  e  $\phi_v = \beta e_2$ . Assim, as funções coordenadas devem satisfazer.

**Lema 2.11.** *Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície com ângulo constante imersa em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . Seja  $(U, (u, v))$  um sistema de coordenadas locais em torno de  $p \in S$ . Nesta vizinhança coordenada  $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), t(u, v))$ . As funções coordenadas  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  e  $t(u, v)$  satisfazem:*

- para a função  $t$

$$t_u = \operatorname{sen} \theta \text{ e } t_v = 0 \quad (2.39)$$

- para as funções  $x$  e  $y$

$$\lambda^2(x_u^2 + y_u^2) = \cos^2 \theta \quad (2.40)$$

$$\lambda^2(x_v^2 + y_v^2) = \beta^2 \quad (2.41)$$

$$x_u x_v + y_u y_v = 0 \quad (2.42)$$

onde  $\lambda = 1, \frac{1}{y}$  ou  $\frac{2}{1-x^2-y^2}$  quando  $\mathbb{M}^2 = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ , respectivamente.

*Demonstração.* Note que,

$$\phi_u = (x_u(u, v), y_u(u, v), t_u(u, v))$$

$$\phi_v = (x_v(u, v), y_v(u, v), t_v(u, v)).$$

Usando a métrica  $g$  temos

$$t_u = g(\phi_u, \xi) = g(e_1, T + \cos \theta N) = g(e_1, T) = \text{sen } \theta$$

$$t_v = g(\phi_v, \xi) = g(\beta e_2, T) = 0.$$

Logo,  $t(u, v) = u \text{sen } \theta + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Como as translações verticais são isometrias do espaço ambiente, podemos, sem perda de generalidade, assumir que  $c = 0$ , ou seja,  $t(u, v) = \text{sen } \theta$ .

Por outro lado,

$$1 = g(\phi_u, \phi_u) = \lambda^2(x_u^2 + y_u^2) + t_u^2 = \lambda^2(x_u^2 + y_u^2) + \text{sen}^2 \theta$$

$$0 = g(\phi_u, \phi_v) = \lambda^2(x_u x_v + y_u y_v) + t_u t_v = \lambda^2(x_u x_v + y_u y_v)$$

$$\beta^2 = g(\phi_v, \phi_v) = \lambda^2(x_v^2 + y_v^2) + t_v^2 = \lambda^2(x_v^2 + y_v^2).$$

E assim concluímos a segunda parte do Lema.  $\square$

O próximo resultado será de suma importância para demonstração dos Teoremas de classificação nas seções subsequentes.

**Proposição 2.12.** *A imersão  $\phi$  satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais (EDP's)*

$$0 = \phi_{uu} + \frac{\lambda_u}{\lambda} \phi_u - \frac{\lambda_v}{\lambda \beta^2} \cos^2 \theta \phi_v - \frac{\lambda_u}{\lambda} \text{sen } \theta \xi \quad (2.43)$$

$$0 = \phi_{uv} + \frac{\lambda_v}{\lambda} \phi_u + \left( \frac{\lambda_u}{\lambda} - \frac{\beta_u}{\beta} \right) \phi_v - \frac{\lambda_v}{\lambda} \text{sen } \theta \xi \quad (2.44)$$

$$0 = \phi_{vv} + \frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\beta_u}{\beta} - \frac{\lambda_u}{\lambda} \right) \phi_u + \left( \frac{\lambda_v}{\lambda} - \frac{\beta_v}{\beta} \right) \phi_v + \frac{\text{sen } \theta}{\cos^2 \theta} \beta^2 \left( \frac{\lambda_u}{\lambda} - \frac{\beta_u}{\beta} \right) \xi. \quad (2.45)$$

*Demonstração.* Usando as propriedades da conexão, juntamente com o Lema 2.11,

obtemos:

$$\bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_u = \phi_{uu} + \cos^2\theta \frac{\lambda_u}{\lambda}\phi_u - \cos^2\theta \frac{\lambda_v}{\lambda\beta^2}\phi_v - \text{sen}\theta \cos\theta \frac{\lambda_u}{\lambda}N \quad (2.46)$$

$$\bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_v = \phi_{uv} + \frac{\lambda_v}{\lambda}\cos^2\theta\phi_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}\phi_v - \frac{\lambda_v}{\lambda}\text{sen}\theta \cos\theta N \quad (2.47)$$

$$\bar{\nabla}_{\phi_v}\phi_v = \phi_{vv} - \beta^2 \frac{\lambda_u}{\lambda}\phi_u + \frac{\lambda_v}{\lambda}\phi_v + \beta^2 \text{tg}\theta \frac{\lambda_u}{\lambda}N. \quad (2.48)$$

Por outro lado, da Equação de Gauss temos

$$\bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_u = \bar{\nabla}_{\phi_u}\phi + \langle \bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_u, N \rangle N = \nabla_{e_1}e_1 + \langle \phi_u, S(e_1) \rangle = 0 \quad (2.49)$$

$$\bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_v = \nabla_{\phi_v}\phi_u + \langle \bar{\nabla}_{\phi_u}\phi_v, N \rangle N = \nabla_{\beta e_2}e_1 + \langle \phi_u, S(\phi_v)N \rangle = \frac{\beta_u}{\beta}\phi_v \quad (2.50)$$

$$\bar{\nabla}_{\phi_v}\phi_v = \nabla_{\phi_v}\phi_v + \langle \bar{\nabla}_{\phi_v}\phi_v, N \rangle N = \frac{\beta_v}{\beta}\phi_v - \beta\beta_u\phi_u + \beta\beta_u \text{tg}\theta N. \quad (2.51)$$

Assim, igualando as equações (2.46), (2.47) e (2.48) com (2.49), (2.50) e (2.51), respectivamente, juntamente com o fato de  $N = (\xi - T)/\cos\theta$  segue o resultado.  $\square$

Agora, usando os resultados provados até o momento, iremos provar o Teorema de Classificação das superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ . Apresentamos, nas próximas seções, cada caso separadamente, uma vez que cada espaço tem suas peculiaridades.

## 2.2 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{R}^3$

**Teorema 2.13** (Teorema de Classificação em  $\mathbb{R}^3$ ). *Uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície com ângulo constante se, e somente se, é localmente isométrica a uma das seguintes superfícies:*

a) ou a superfície dada por

$$\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u \cos\theta(\cos v, \text{sen } v) + \gamma(v), u \text{sen}\theta)$$

com

$$\gamma(v) = \cos\theta \left( - \int_0^v \alpha(\tau) \text{sen } \tau d\tau, \int_0^v \alpha(\tau) \cos \tau d\tau \right).$$

b) ou uma parte aberta do plano  $x \text{sen}\theta - z \cos\theta = 0$ .

c) ou uma parte aberta do cilindro  $\gamma \times \mathbb{R}$  onde  $\gamma$  é uma curva suave em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Primeiramente, iremos mostrar que as superfícies acima são de fato superfícies com ângulo constante. Para o item (a):

$$\begin{aligned}\phi &= (u \cos \theta (\cos v, \sin v) + \gamma(v), u \sin \theta) \\ \phi_u &= (\cos \theta \cos v, \cos \theta \sin v, \sin \theta) \\ \phi_v &= (\cos \theta (u + \alpha(v))(-\sin v, \cos v), 0).\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_u \times \phi_v = ((u + \alpha(v))(\cos \theta \sin \theta \cos v), \cos \theta \sin \theta \sin v, \cos^2 \theta).$$

E,

$$\|\phi_u \times \phi_v\|^2 = (u + \alpha(v))^2 \cos^2 \theta \Rightarrow \|\phi_u \times \phi_v\| = (u + \alpha(v)) \cos \theta.$$

Consequentemente, o normal unitário de  $S$  é dado por

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = (-\sin \theta \cos v, -\sin \theta \sin v, \cos \theta).$$

Dessa forma, sendo  $\Phi$  o ângulo entre os vetores  $N$  e  $\xi$ , temos

$$\begin{aligned}\cos(\Phi) = \langle \xi, N \rangle &= \langle \sin \theta e_1 + \cos \theta N, N \rangle \\ &= \sin \theta \langle e_1, N \rangle + \cos \theta \langle N, N \rangle \\ &= \cos \theta.\end{aligned}$$

Logo o ângulo entre  $\xi$  e  $N$  é constante e portanto, esta é uma superfície com ângulo constante.

De modo análogo, se conclui que as superfícies dos itens (b) e (c), também são superfícies com ângulo constante.

Reciprocamente, vamos provar que todas as superfícies com ângulo constante são isomorfas às superfícies dadas pelo Teorema 2.13. De fato, segue da Proposição 2.39 que a terceira componente de  $\phi(u, v)$  é dada por

$$t(u, v) = u \sin \theta.$$

E assim,

$$\phi = (h(u, v), u \sin \theta)$$

onde  $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in \mathbb{R}^2$ .

Ao considerar  $\lambda = 1$  na Proposição 2.12, obtemos que o sistema de equações diferenciais para  $\mathbb{R}^3$  é dado por

$$\begin{cases} \phi_{uu} = 0 \\ \phi_{uv} = -\frac{\beta_u}{\beta} \phi_v \\ \phi_{vv} = \beta \beta_u - \frac{\beta_v}{\beta} \phi_v - \beta \beta_u \operatorname{tg} \theta N \end{cases}$$

A Proposição 2.10 nos diz quais são as possibilidades para a função  $\beta$  e para o autovalor

associado a direção principal  $\phi_v$ . Estudaremos cada caso separadamente:

$$\underline{\text{Caso (1)}}: \sigma = \frac{\operatorname{tg} \theta}{u + \alpha(v)} \text{ e } \beta = \varphi(v)(u + \alpha(v))$$

Como  $\phi_{uu} = 0$ , temos  $h_{uu} = 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} e_1 = \phi_u &= (h_u, \operatorname{sen} \theta) \\ \|\phi_u\| = 1 &\Rightarrow |h_u| = \cos \theta \end{aligned}$$

consequentemente,

$$h_u = \cos \theta f(v)$$

onde  $f(v) \in \mathbb{R}^2$  e  $|f(v)| = 1$  para algum  $v$ . Dessa forma, podemos considerar  $f$  como sendo uma parametrização de  $S^1$ . Integrando com relação a  $u$ ,

$$h(u, v) = u \cos \theta f(v) + \gamma(v)$$

onde  $\gamma \in \mathbb{R}^2$  é uma curva suave. E, ao derivar  $h$  com relação a  $v$ , temos

$$\phi_v = (u \cos \theta f'(v) + \gamma'(v), 0).$$

Como  $\phi_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} \phi_v$ , segue que

$$\phi_{uv} = \frac{\beta_u}{\beta} \phi_v = \frac{1}{u + \alpha(v)} (u \cos \theta f'(v) + \gamma'(v), 0).$$

Por outro lado,  $\phi_{uv} = \phi_{vu} = (\cos \theta f'(v), 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \cos \theta f'(v) &= \frac{1}{u + \alpha(v)} [u \cos \theta f'(v) + \gamma'(v)] \\ &\Downarrow \\ (u + \alpha(v)) \cos \theta f'(v) &= u \cos \theta f'(v) + \gamma'(v) \\ &\Downarrow \\ \gamma'(v) &= \cos \theta \alpha(v) f'(v) \\ &\Downarrow \\ \gamma(v) &= \cos \theta \int_0^v \alpha(\tau) f'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, vamos tomar  $f(v) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ . Daí,

$$\phi(u, v) = (u \cos \theta (\cos(v), \operatorname{sen}(v)) + \gamma(v), u \operatorname{sen} \theta)$$

onde  $\gamma = \cos \theta \left( - \int_0^v \alpha(\tau) \operatorname{sen}(\tau) d\tau, \int_0^v \alpha(\tau) \cos(\tau) d\tau \right)$ .

Caso (2):  $\sigma(u, v) = 0$  e  $\beta(u, v) = \beta(v)$ .

Procedendo de forma semelhante ao *Caso (1)*, encontramos:

$$\phi(u, v) = (u \cos \theta (\cos(\mu), \sin(\mu)) + \gamma, u \sin \theta)$$

onde  $\gamma(v) = \alpha(v)(-\sin(\mu), \cos(\mu))$ ,  $\alpha \in C^\infty(I)$ .

Ao aplicarmos uma rotação de ângulo  $\mu$  no plano  $-xy$  em  $\phi$ , obtemos:

$$\begin{pmatrix} \cos(\mu) & \sin(\mu) \\ -\sin(\mu) & \cos(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \cos \theta \cos(\mu) - \alpha(v) \sin(\mu) \\ u \cos \theta \sin(\mu) + \alpha(v) \cos(\mu) \end{pmatrix} = (u \cos \theta, \alpha(v)).$$

Logo,

$$\phi(u, v) = (u \cos \theta, \alpha(v), u \sin \theta)$$

que parametriza o plano  $x \sin \theta - z \cos \theta = 0$ .

#### Casos particulares de ângulo constante

- $\theta = 0$

Neste caso, o vetor normal coincide com a direção  $\xi$ . Assim  $\phi_u$  e  $\phi_v$  são tangentes a  $M$  e segue  $\langle \phi_u, \xi \rangle = 0 = \langle \phi_v, \xi \rangle$ . Então  $\langle \phi, \xi \rangle = cte$ . Logo  $\phi$  é um plano paralelo ao plano  $-xy$  e sua parametrização é, a menos de isometria,  $\phi(u, v) = (u, v, 0)$ .

- $\theta = \frac{\pi}{2}$

Neste caso,  $\xi$  é tangente a superfície  $M$ . Assim,  $M$  é o produto de uma curva em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}$  que pode ser parametrizada, a menos de isometria, por  $\phi(u, v) = (\gamma(v), u)$  onde  $\gamma(v) \in \mathbb{R}^2$ .

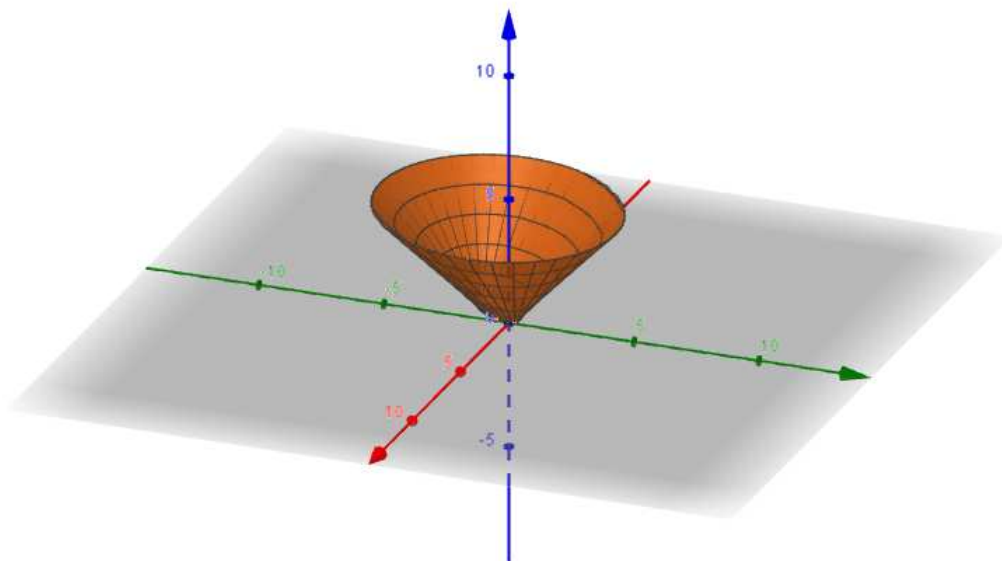
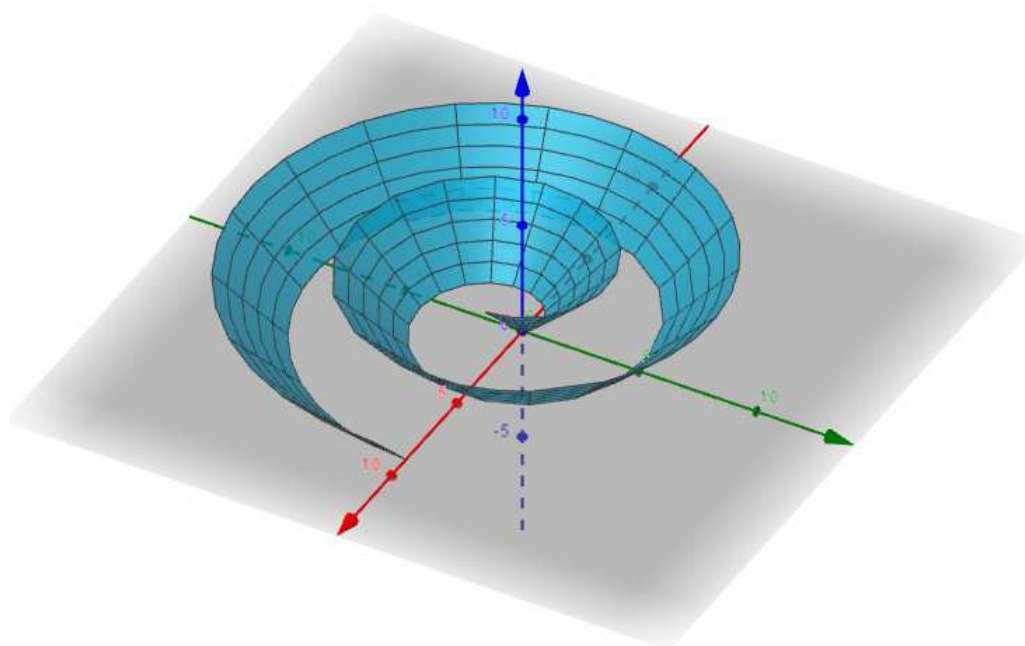
□

A seguir, apresentamos alguns exemplos não triviais de superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 2.14.** Seja  $\theta = \frac{\pi}{3}$ . Para cada função  $\alpha$  dada abaixo,

1.  $\alpha(v) = 1$
2.  $\alpha(v) = v$
3.  $\alpha(v) = 2 \cos v$

obtemos uma S.A.C ao usar o item a) do Teorema 2.13. Veja os gráficos destas superfícies nas figuras abaixo.

Figura 2.1: S.A.C em  $\mathbb{R}^3$ :  $\alpha(v) = 1$  e  $\theta = \pi/3$ .Figura 2.2: S.A.C em  $\mathbb{R}^3$ :  $\alpha(v) = v$  e  $\theta = \pi/3$ .

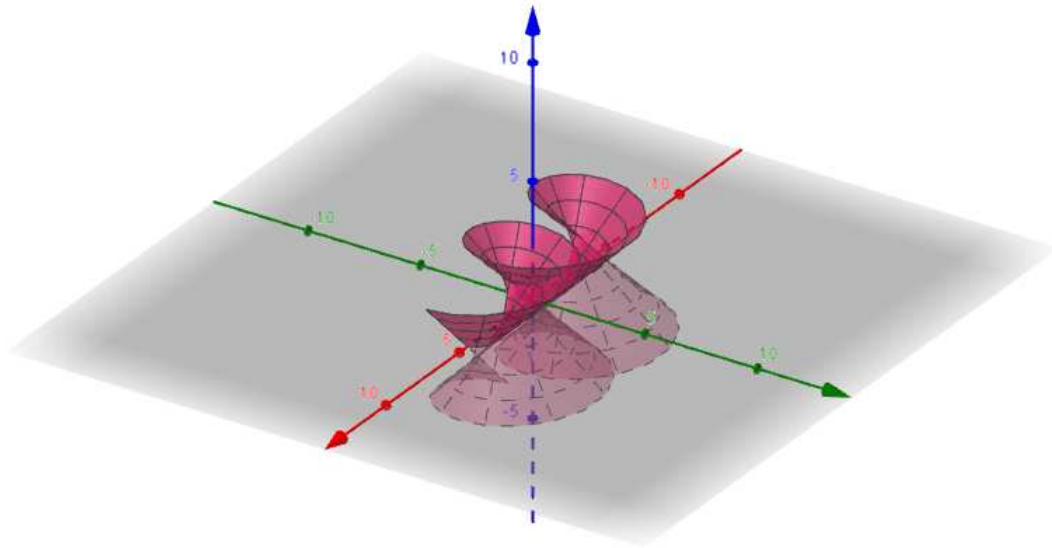


Figura 2.3: S.A.C em  $\mathbb{R}^3$ :  $\alpha(v) = 2 \cos v$  e  $\theta = \pi/3$ .

## 2.3 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Nesta seção, vamos apresentar o Teorema de classificação das superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . As principais referências para esta seção são [6] e [7].

Seja  $\phi : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície completa, orientada pelo vetor normal unitário  $N$ , com ângulo constante, imersa no espaço produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . Da Proposição 2.9 juntamente com o Teorema de Frobenius podemos escolher um sistema de coordenadas locais  $(U, (u, v))$  tal que  $\phi_u = e_1 = T/||T||$  e  $\phi_v = \beta e_2$  onde  $T$  é a projeção do campo vertical  $\xi$  sobre a superfície e  $e_2 = J e_1$  com  $J$  a rotação de  $\pi/2$  no sentido anti-horário sobre o plano tangente de  $S$ .

Seja  $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), t(u, v))$  a parametrização local em torno de um ponto  $p \in S$ . Segue do Lema 2.11 que  $t(u, v) = u \sin \theta$ . Portanto, para explicitar a parametrização local temos que determinar as funções  $x(u, v)$  e  $y(u, v)$ . Aqui, iremos considerar o modelo do semi-plano superior para  $\mathbb{H}^2$ . Assim, o fator conforme da métrica de  $\mathbb{H}^2$  é dado por  $\lambda(x, y) = 1/y$ . Daí, o sistema de equações diferenciais parciais dado na Proposição 2.12 tem a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= \frac{y_u}{y} x_u - \frac{y_v}{y\beta^2} \cos^2 \theta x_v \\
y_{uu} &= \frac{y_u}{y} y_u - \frac{y_v}{y\beta^2} \cos^2 \theta y_v \\
x_{uv} &= \frac{y_v}{y} x_u + \left( \frac{y_u}{y} - \frac{\beta_u}{\beta} \right) x_v \\
y_{uv} &= \frac{y_v}{y} y_u + \left( \frac{y_u}{y} - \frac{\beta_u}{\beta} \right) y_v \\
x_{vv} &= \frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\beta_u}{\beta} - \frac{y_u}{y} \right) x_u + \left( \frac{y_v}{y} - \frac{\beta_v}{\beta} \right) x_v \\
y_{vv} &= \frac{\beta^2}{\cos^2 \theta} \left( \frac{\beta_u}{\beta} - \frac{y_u}{y} \right) y_u + \left( \frac{y_v}{y} - \frac{\beta_v}{\beta} \right) y_v.
\end{aligned}$$

Entretanto, ao fazer uso das equações (2.40) - (2.42) é possível reescrever o sistema acima como

$$x_{uu} = \frac{2}{y} x_u y_u \quad (2.52)$$

$$y_{uu} = \frac{1}{y} (y_u^2 - x_u^2) \quad (2.53)$$

$$x_{uv} = \frac{1}{y} (x_u y_v + y_u x_v) + \frac{\beta_u}{\beta} x_v \quad (2.54)$$

$$y_{uv} = \frac{1}{y} (y_u y_v - x_u x_v) + \frac{\beta_u}{\beta} y_v \quad (2.55)$$

$$x_{vv} = \frac{2}{y} x_v y_v - \frac{1}{\cos^2 \theta} \beta \beta_u x_u + \frac{\beta_v}{\beta} x_v \quad (2.56)$$

$$y_{vv} = \frac{1}{y} (y_v^2 - x_v^2) - \frac{1}{\cos^2 \theta} \beta \beta_u y_u + \frac{\beta_v}{\beta} y_v. \quad (2.57)$$

Vamos agora resolver este sistema. Integrando (2.52),

$$\begin{aligned}
x_{uu} = \frac{2}{y} x_u y_u &\Rightarrow \frac{x_{uu}}{x_u} = 2 \frac{y_u}{y} \\
&\Rightarrow \int \frac{x_{uu}}{x_u} du = 2 \int \frac{y_u}{y} du \\
&\Rightarrow \ln(x_u) = 2 \ln(y) + r_1(v) \\
&\Rightarrow x_u = y^2 r(v); r(v) > 0, \forall v.
\end{aligned} \quad (2.58)$$

Substituindo a equação (2.58) em (2.53), obtemos:

$$\begin{aligned}
y_{uu} &= \frac{1}{y} (y_u^2 - r^2(v) y^4) \\
y_{uu} y - y_u^2 + r^2(v) y^2 e^{\ln(y^2)} &= 0 \\
\frac{y_{uu} y - y_u^2}{y^2} + r^2(v) e^{2 \ln(y)} &= 0.
\end{aligned} \quad (2.59)$$

Fazendo  $\rho := \ln y$  na equação (2.59) encontramos:

$$\rho_{uu} + r^2(v)e^{2\rho} = 0. \quad (2.60)$$

Dessa forma, temos 2 casos a considerar:  $x_u \neq 0$  e  $x_u = 0$ . Isto é equivalente a considerar na equação (2.60)  $r(v) > 0$  para todo  $v$  e  $r(v) = 0$  respectivamente.

**Caso 1:** Se  $r(v) \neq 0$  para todo  $v$ , segue da equação (2.60) que

$$\rho_{uu} + r^2(v)e^{2\rho} = 0 \Rightarrow 2\rho_u\rho_{uu} = -r^2(v)e^{2\rho}2\rho_u \Rightarrow \partial_u(\rho_u^2) = -r^2(v)\partial_u(e^{2\rho}).$$

E integrando,

$$\begin{aligned} \int \partial_u(\rho_u^2) du &= - \int r^2(v)\partial_u(e^{2\rho}) du \\ \rho_u^2 &= -r^2(v)e^{2\rho} + \eta^2(v) \\ &\Rightarrow \frac{\rho_u}{\sqrt{\eta^2(v) - r^2(v)e^{2\rho}}} = \pm 1. \end{aligned}$$

Integrando novamente com respeito a  $u$ ,

$$\int \frac{\rho_u}{\sqrt{\eta^2 - r^2(v)e^{2\rho}}} du = \pm \int 1 du.$$

Ao resolver esta integral, encontramos:

$$-1 \frac{1}{\eta(v)} \ln \left( \sqrt{\eta^2(v) - r^2(v)e^{2\rho}} + \eta(v) \right) + \frac{1}{\eta(v)} \ln(r(v)e^\rho) = \pm u + \frac{\overline{C(v)}}{\eta(v)} \quad (2.61)$$

onde  $\overline{C(v)} = C(v)\eta(v)$ . Daí,

$$\begin{aligned} -1 \frac{1}{\eta(v)} \ln \left( \sqrt{\eta^2(v) - r^2(v)e^{2\rho}} + \eta(v) \right) + \frac{1}{\eta(v)} \ln(r(v)e^\rho) &= \pm u + \frac{\overline{C(v)}}{\eta(v)} \\ \ln \left( \sqrt{\eta^2(v) - r^2(v)e^{2\rho}} + \eta(v) \right) - \ln(r(v)e^\rho) &= \mp u\eta(v) - \overline{C(v)} \\ \ln \left( \frac{\sqrt{\eta^2(v) - r^2(v)e^{2\rho}} + \eta(v)}{r(v)e^\rho} \right) &= \mp u\eta(v) - \overline{C(v)}. \end{aligned}$$

Note que, se fizermos  $x = \mp u\eta(v) - \overline{C(v)}$  e  $A = r(v)e^\rho/\eta(v)$ , obtemos

$$\frac{1 + \sqrt{1 - A^2}}{A} = e^x.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - A^2}}{A} + \frac{A}{1 + \sqrt{1 - A^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{A^2 + 1 + 2\sqrt{1 - A^2} + 1 - A^2}{A(1 + \sqrt{1 - A^2})} \right] \\ &= \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

Logo  $A = \operatorname{sech}(x)$  e portanto

$$r(v)e^\rho = \frac{\eta(v)}{\cosh(\mp\eta(v)u - \bar{C}(v))}.$$

Como  $e^\rho = y$ , resulta que

$$y(u, v) = \frac{\eta(v)}{r(v) \cosh(\eta(v)u + p(v))}. \quad (2.62)$$

Ao substituírmos a expressão de  $y$  na equação (2.58) obtemos:

$$x_u(u, v) = \frac{\eta^2(v)}{r(v) \cosh^2(u\eta(v) + p(v))}. \quad (2.63)$$

Assim, ao integrarmos esta expressão com respeito a  $u$ , encontramos

$$x(u, v) = \eta(v) \frac{\operatorname{tgh}(u \cos \theta + p(v))}{r(v)} + q(v). \quad (2.64)$$

Substituindo as equações (2.62) e (2.64) em (2.40), encontramos  $\eta^2(v) = \cos^2 \theta$ . Daí,  $y(u, v) > 0$ . Usando que  $r(v) > 0$  e  $\eta(v) = \cos \theta$  nas equações (2.62) e (2.64), encontramos

$$x(u, v) = \cos \theta \frac{\operatorname{tgh}(u \cos \theta + p(v))}{r(v)} + q(v), \quad (2.65)$$

e

$$y(u, v) = \frac{\cos \theta}{r(v) \cosh(u \cos(\theta) + p(v))}. \quad (2.66)$$

Agora, substituindo as equações (2.65) e (2.66) em (2.41) e (2.42) encontramos, respectivamente,

$$\cos \theta \frac{p'(v)}{r(v)} + q'(v) = 0 \quad (2.67)$$

e

$$(\ln(r))' \cosh(u \cos \theta + p) + p'(v) \operatorname{senh}(u \cos \theta + p) = \pm \beta. \quad (2.68)$$

Temos que, as equações (2.52)-(2.55) são satisfeitas para as equações de  $x$  e  $y$ , dadas em (2.65) e (2.66). Ao derivar a equação (2.65) com relação a  $u$  e depois a  $v$  obtemos  $x_{uv}$ .

Por outro lado, substituindo as equações (2.65) e (2.66) em (2.54) obtemos uma segunda expressão para  $x_{uv}$ . Igualando essas expressões encontramos

$$\pm \cos \theta \sinh(u \cos \theta + p(v))\beta \mp \cosh(u \cos \theta + p(v))\beta_u - p' \cos \theta = 0 \quad (2.69)$$

De forma semelhante, derivando a equação (2.66) com relação a  $u$  e depois a  $v$  obtemos  $y_{uv}$ . Por outro lado, substituindo as equações (2.65) e (2.66) em (2.55) obtemos uma segunda expressão para  $y_{uv}$ . Igualando essas expressões encontramos a mesma condição (2.69) E levando em consideração a condição (2.69), juntamente com as equações (2.65) e (2.66), concluímos que as equações (2.56) e (2.57) também são satisfeitas.

Usando (2.68) e a expressão de  $\beta$  encontramos que as funções integrais  $p$  e  $r$  satisfazem:

$$\text{se } \beta = \cosh(u \cos \theta + C(v))$$

$$\begin{cases} p'(v) & = \pm \sinh(p(v) - C(v)) \\ (\ln(r(v)))' & = \mp \cosh(p(v) - C(v)) \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\text{se } \beta = e^{\pm u \cos \theta}$$

$$p'(v) = \pm (\ln r(v))' \quad (2.71)$$

**Obs 2.15.** *A menos de uma mudança na variável  $v$ , podemos considerar as expressões de  $\beta$  das equações (2.31) e (2.33) com sendo, respectivamente,  $\beta = \cosh(u \cos \theta + C(v))$  e  $\beta = e^{\pm u \cos \theta}$ .*

**Caso 2:** Se  $r(v) = 0$ , para todo  $v$  real, então obtemos das equações (2.58) e (2.60) que:

$$x(u, v) = x(v) \quad (2.72)$$

e

$$y(u, v) = q(v)e^{p(v)u} \quad (2.73)$$

onde  $q(v) > 0$  para todo  $v$ . Assim, podemos reescrever as equações (2.54) - (2.56) como sendo

$$0 = \left( \frac{y_u}{y} + \frac{\beta_u}{\beta} \right) x_v \quad (2.74)$$

$$y_{uv} = \left( \frac{y_u}{y} + \frac{\beta_u}{\beta} \right) y_v \quad (2.75)$$

$$x_{vv} = \left( 2 \frac{y_v}{y} + \frac{\beta_v}{\beta} \right) x_v \quad (2.76)$$

e a equação (2.57) permanece inalterada. Ao substituir (2.72) e (2.73) em (2.40), (2.41) e (2.42) encontramos, respectivamente,  $p(v) = \mp \cos \theta$ ,  $x^2(v) = (\beta y)^2$  e  $q'(v)q(v) = 0$ . Já que  $y(u, v) > 0$  e se impormos a condição que  $\phi(0, 0) = (0, 1, 0)$  segue que,  $y(0, 0) = qe^0 = q = 1$ . Daí,  $y(u, v) = qe^{\mp u \cos \theta}$ ,  $q \in \mathbb{R}_+^*$ , é uma função de  $u$ , portanto a equação (2.75) é automaticamente satisfeita. Como  $x_v = \pm \beta y$  e,  $\beta = \cosh(u \cos \theta + C(v))$  ou  $\beta = e^{u \cos \theta}$ , temos que  $\beta y$  só pode ser uma função de  $v$  se  $\beta = e^{u \cos \theta}$ . Neste caso,  $x_v = 1$  e, portanto,

$x = v$ , pois  $x(0, 0) = 0$ . Assim, a parametrização da superfície é dada por:

$$\phi(u, v) = (v, e^{\mp u \cos \theta}, u \sin \theta).$$

*Caso Particular*:  $p(v)$  e  $q(v)$  constantes, ou seja,  $p(v) = p$  e  $q(v) = q$ , com  $p, q \in \mathbb{R}$ . Sem perda de generalidade, vamos tomar  $q = 0$  pois as translações ao longo do eixo- $x$  são isometrias do espaço ambiente. Assim,

$$x(u, v) = \frac{\operatorname{tgh}(u \cos \theta + p)}{r(v)}, \quad y(u, v) = \frac{1}{r(v) \cosh(u \cos \theta + p)}. \quad (2.77)$$

Da condição inicial  $\phi(0, 0) = (0, 1, 0)$ , segue que  $p = 0$  e  $r(0) = 1$ . E como  $r(v) > 0$  para todo  $v$ , segue que esta função pode ser escrita na forma  $r(v) = e^{-\zeta(v)}$  com  $\zeta(0) = 0$ .

Dessa forma, podemos enunciar o seguinte Teorema de Classificação.

**Teorema 2.16** (Teorema de Classificação em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ). *Uma superfície  $S \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  é uma superfície com ângulo constante se, e somente se, é localmente isométrica a uma das seguinte superfícies:*

(i) ou  $\phi_1 : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  com

$$\phi_1(u, v) \left( \cos \theta \frac{\operatorname{tgh}(u \cos \theta + p(v))}{r(v)} + q(v), \frac{\cos \theta}{r(v) \cosh(u \cos \theta + p(v))}, u \sin \theta \right)$$

onde  $p, q$  e  $r$  são funções integrais satisfazendo (2.3), (2.70), (2.71) e  $r \neq 0$ ,

(ii) ou  $\phi_2 : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  com

$$\phi_2 = (v, e^{\mp u \cos \theta}, u \sin \theta).$$

A seguir apresentamos alguns exemplos de superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.17** (S.C.A. invariantes por isometrias hiperbólicas). *Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no semi-cilindro de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  dado pelo produto da geodésica  $x^2 + y^2 = 1$  pela reta  $\mathbb{R}$ , ou seja, a parametrização de  $\alpha$  é dada por  $\alpha(s) = (\cos \rho(s), \sin \rho(s), t(s))$ . Assim, a superfície invariante por isometrias hiperbólicas tem a seguinte parametrização:*

$$\psi(s, \omega) = (\omega \cos(\rho(s)), \omega \sin(\rho(s)), t(s)). \quad (2.78)$$

O vetor normal unitário  $N$  desta superfície é dado por:

$$\begin{aligned} N &= \begin{vmatrix} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \\ \psi_s^1 & \psi_s^2 & \psi_s^3 \\ \psi_\omega^1 & \psi_\omega^2 & \psi_\omega^3 \end{vmatrix} \\ &= (\psi_s^2 \psi_\omega^3 - \psi_s^3 \psi_\omega^2) E_1 + (\psi_s^3 \psi_\omega^1 - \psi_s^1 \psi_\omega^3) E_2 + (\psi_s^1 \psi_\omega^2 - \psi_s^2 \psi_\omega^1) E_3 \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde  $E_i$  com  $i = 1, 2, 3$  são os campos ortonormais de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\psi_s = (\psi_s^1, \psi_s^2, \psi_s^3)$  e  $\psi_\omega = (\psi_\omega^1, \psi_\omega^2, \psi_\omega^3)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} N &= \begin{vmatrix} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \\ -\rho_s & \cot(\rho)\rho_s & t_s \\ \frac{\cot(\rho)}{\omega} & \frac{1}{\omega} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -t_s(\sin \rho(s))E_1 + t_s \cos(\rho(s))E_2 - \rho_s \csc(\rho(s))E_3. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Assim, para que uma superfície invariante por isometrias hiperbólicas faça um ângulo  $\theta$  constante com a direção vertical  $\xi = (0, 0, 1)$ , a seguinte equação diferencial deve ser satisfeita

$$\cos \theta = \langle N, \xi \rangle \implies \cos \theta = -\rho_s \csc(\rho(s)).$$

Portanto  $\rho(s) = 2 \arctan(e^{-\frac{s}{2}+C})$ . Daí, ao usarmos o fato de  $\alpha$  estar parametrizada pelo comprimento de arco obtemos, a menos de uma translação vertical, que  $t(s) = s \sin \theta$ . Portanto, a parametrização da superfície com ângulo constante que é invariante por isometrias hiperbólicas é dada por

$$\psi(s, \omega) = \left( \omega \tanh\left(\frac{s}{2} - C\right), \omega \operatorname{sech}\left(\frac{s}{2} - C\right), s \sin \theta \right). \quad (2.81)$$

Na figura abaixo apresentamos um caso particular de superfície invariante por isometria hiperbólica com ângulo constante em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

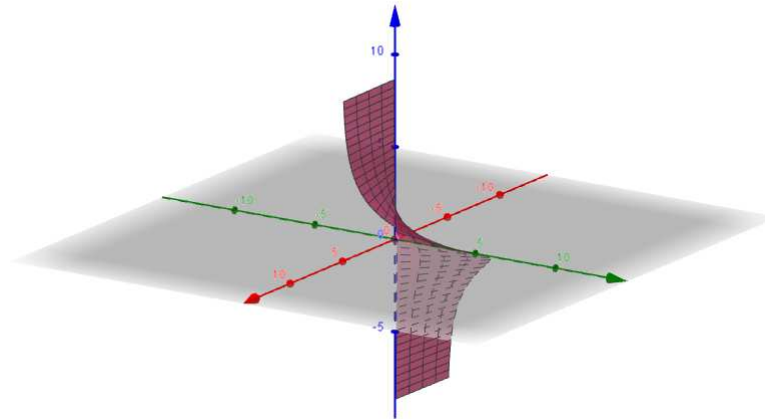


Figura 2.4: S.A.C. invariante por isometria hiperbólica. Consideramos  $C = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{3}$  na parametrização 2.81.

**Obs 2.18.** Note que uma S.A.C. invariante por isometria hiperbólica é um caso particular do Teorema 2.16 item (i).

**Exemplo 2.19** (S.C.A. invariantes por isometrias parabólicas). Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no plano- $yt$ , ou seja, a parametrização de  $\alpha$  é

dada por  $\alpha(s) = (0, \rho(s), t(s))$ . Assim, a superfície invariante por isometrias parabólicas tem a seguinte parametrização:

$$\psi(s, \omega) = (\omega, \rho(s), t(s)). \quad (2.82)$$

O vetor normal unitário desta superfície é dado por

$$\begin{aligned} N &= \begin{vmatrix} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \\ 0 & \frac{\rho_s}{\rho} & \sqrt{1 - \frac{\rho_s^2}{\rho^2}} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\rho_s^2}{\rho^2}} E_2 - \frac{\rho_s}{\rho} E_3. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Assim, para que uma superfície invariante por isometrias parabólicas faça um ângulo  $\theta$  constante com a direção vertical  $\xi = (0, 0, 1)$ , a seguinte equação diferencial deve ser satisfeita

$$\cos \theta = \langle N, \xi \rangle \implies \cos \theta = -\frac{\rho_s}{\rho}.$$

Portanto  $\rho(s) = Ce^{-s \cos \theta}$ . Daí, ao usarmos o fato de  $\alpha$  estar parametrizada pelo comprimento de arco obtemos, a menos de uma translação vertical, que  $t(s) = s \sin \theta$ . Portanto, a parametrização da superfície com ângulo constante que é invariante por isometrias parabólicas é dada por

$$\psi(s, \omega) = (\omega, Ce^{-s \cos \theta}, s \sin \theta). \quad (2.84)$$

Veja Figura 2.5.

**Obs 2.20.** Note que uma S.A.C. invariante por isometria parabólica é um caso particular do Teorema 2.16 item (ii).

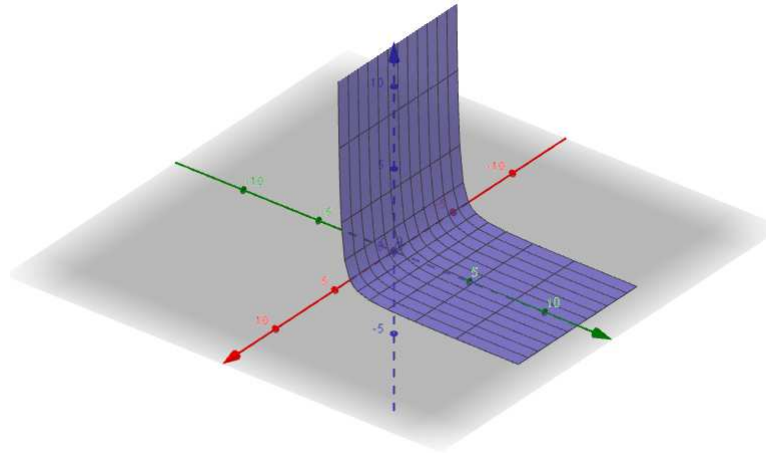


Figura 2.5: S.A.C. invariante por isometria parabólica. Consideramos  $C = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{3}$  na parametrização 2.84.

## 2.4 Superfícies com ângulo constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Vamos considerar  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  como uma hipersuperfície do  $\mathbb{R}^4$  e denotaremos  $\partial_t = (0, 0, 0, 1)$ . A principal referência para esta seção é [5].

Seja  $\phi : S \looparrowright \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  uma superfície completa, orientada pelo vetor normal unitário  $N$ , com ângulo constante, imersa no espaço produto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Da Proposição 2.9 juntamente com o Teorema de Frobenius podemos escolher um sistema de coordenadas locais  $(U, (u, v))$  tal que  $\phi_u = e_1 = T/\|T\|$  e  $\phi_v = \beta e_2$  onde  $T$  é a projeção do campo vertical  $\xi$  sobre a superfície e  $e_2 = J e_1$  com  $J$  a rotação de  $\pi/2$  no sentido anti-horário sobre o plano tangente de  $S$ . Assim, a métrica de  $S$  é  $g_S = \lambda^2(dx^2 + dy^2) + dt^2$  e a matriz do operador de forma, na base  $\{\phi_u, \phi_v\}$ , é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Da Proposição 2.7 obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0 & \nabla_{e_1} e_2 &= 0 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= \sigma \cotg(\theta) e_2 & \nabla_{e_2} e_2 &= -\sigma \cotg(\theta) e_1. \end{aligned}$$

Na Proposição 2.10, encontramos que as funções  $\lambda$  e  $\beta$  são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= -\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg}(u \cos \theta + C(v)) \\ \beta(u, v) &= D(v) \cos(u \cos \theta + C(v)), \end{aligned}$$

para  $\kappa = 1$ . E a seguir, enunciaremos o Teorema de Classificação das superfícies com ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.21** (Teorema de Classificação em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ). *Uma superfície  $S$  imersa em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é uma superfície com ângulo constante se, e somente se, a imersão  $\phi$  é localmente dada*

por  $\phi : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $(u, v) \mapsto F(u, v)$  sendo

$$\phi(u, v) = (\cos(u \cos \theta)f(v) + \operatorname{sen}(u \cos \theta)f(v) \times f'(v), u \operatorname{sen} \theta), \quad (2.85)$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^2$  é uma curva unitária e  $\theta \in [0, \pi]$  é um ângulo constante.

*Demonstração.* Primeiramente vamos mostrar que a imersão (2.85) é uma superfície com ângulo constante em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . De fato,

$$\phi_u = (\cos \theta(-\operatorname{sen}(u \cos \theta)f(v) + \cos(u \cos \theta)f(v) \times f'(v)), \operatorname{sen} \theta) \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \phi_v &= (\cos(u \cos \theta)f'(v) + \operatorname{sen}(u \cos \theta)f(v) \times f''(v), 0) \\ &= ((\cos(u \cos \theta) + \operatorname{sen}(u \cos \theta)\tau(v))f'(v), 0) \end{aligned} \quad (2.87)$$

sendo  $\tau$  alguma função sobre  $S$ . Note que,  $f(v) \times f''(v)$  é um múltiplo escalar de  $f'(v)$  já que  $f$  é uma curva unitária em  $\mathbb{S}^2$ .

O vetor  $\bar{N}$  normal a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{E}^4$  é obtido pelo vetor posição de  $\phi$  colocando a última componente como sendo 0, assim

$$\bar{N} = (\cos(u \cos \theta)f(v) + \operatorname{sen}(u \cos \theta)f(v) \times f'(v), 0).$$

Agora, o vetor  $N$  normal a  $S$  em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$  é obtido da seguinte forma, temos  $N = (P, \cos \theta)$ , com  $P \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . De fato, do Lema 2.11,  $\phi_4 = u \cos \theta$ . Como  $\phi_u = T/\|T\|$ , segue que  $T = \operatorname{sen} \theta F_u$  e

$$\begin{aligned} N &= \frac{\xi - T}{\cos \theta} \\ &= \left( -\operatorname{tg} \theta \phi_{1u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{2u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{3u}, \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta \phi_{4u}}{\cos \theta} \right) \\ &= \left( -\operatorname{tg} \theta \phi_{1u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{2u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{3u}, \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= (-\operatorname{tg} \theta \phi_{1u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{2u}, -\operatorname{tg} \theta \phi_{3u}, \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.88)$$

e conseqüentemente, para obter o vetor  $N$  precisamos identificar  $P$ . Temos que,

$$\langle N, \phi_u \rangle = 0 \quad (2.89)$$

$$\langle N, \phi_v \rangle = 0 \quad (2.90)$$

$$\langle N, \bar{N} \rangle = 0 \quad (2.91)$$

e conseqüentemente obtemos, respectivamente, que

$$\cos \theta(-\operatorname{sen}(u \cos \theta) \langle P, f(v) \rangle + \cos(u \cos \theta) \langle P, f(v) \times f'(v) \rangle) + \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad (2.92)$$

$$(\cos(u \cos \theta) + \operatorname{sen}(u \cos \theta)\tau(v)) \langle P, f'(v) \rangle = 0 \Rightarrow \langle P, f'(v) \rangle = 0 \quad (2.93)$$

$$\cos(u \cos \theta) \langle P, f(v) \rangle + \operatorname{sen}(u \cos \theta) \langle P, f(v) \times f'(v) \rangle = 0. \quad (2.94)$$

Isolando  $\langle P, f(v) \rangle$  na equação (2.94) e substituindo em (2.92) encontramos

$$\langle P, f(v) \times f'(v) \rangle = -\operatorname{sen} \theta \cos(u \cos \theta) \quad (2.95)$$

e substituindo (2.95) em (2.92) encontramos

$$\langle P, f(v) \rangle = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(u \cos \theta) \quad (2.96)$$

e assim,

$$N = (-\operatorname{sen} \theta (-\operatorname{sen}(u \cos \theta) f(v) + \cos(u \cos \theta) f(v) \times f'(v)), \cos \theta).$$

Logo,  $\langle N, \xi \rangle = \cos \theta$  é constante.

Agora, precisamos mostrar que a parametrização das superfícies com ângulo constante é localmente isométrica a imersão (2.85). Para tal, conforme já mencionado anteriormente, iremos considerar a superfície  $S$  como sendo uma superfície de codimensão dois imersa em  $\mathbb{R}^4$ , denotaremos por  $D$  a conexão Euclidiana e por  $\nabla^\perp$  a conexão normal de  $R^4$ . Assim,  $S$  possui dois vetores normais unitários, um que é tangente a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , sendo ele  $N = (N_1, N_2, N_3, \cos \theta)$ , e outro que é ortogonal a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , sendo ele  $\bar{N} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, 0)$  com dois operadores de forma  $A$  e  $\bar{A}$ , respectivamente.

Para todo vetor  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) \in T_p S$  temos

$$\nabla_{\bar{N}}^\perp = \{D_X \bar{N}\}^N = aN + b\bar{N}$$

ou seja, a parte normal de  $\{D_X \bar{N}\}^N$ . Segue que

$$\begin{aligned} a &= \langle D_X \bar{N}, N \rangle N \\ &= \langle (X_1, X_2, X_3, 0), N \rangle N \\ &= \langle X - (0, 0, 0, X_4), N \rangle N \\ &= \langle X - \langle X, T \rangle \partial_t \rangle N \\ &= \langle X, N \rangle - \langle X, T \rangle \langle \partial_t, N \rangle N \\ &= -\cos \theta \langle X, T \rangle N. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Agora,  $b = \langle D_X \bar{N}, \bar{N} \rangle = 0$ . De modo semelhante, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X^\perp N &= \{D_X N\}^N = \langle D_X N, \bar{N} \rangle \bar{N} \\ &= X \langle N, \bar{N} \rangle \bar{N} - \langle N, D_X \bar{N} \rangle \bar{N} \\ &= \cos \theta \langle X, T \rangle \bar{N}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Como já temos o operador de forma  $A$  associado ao vetor  $N$ , precisamos agora determinar o operador  $\bar{A}$  associado ao vetor  $\bar{N}$ . Da equação (**Weingarten**),  $D_X \bar{N} =$

$-\bar{A}(X) + \nabla_X^\perp \bar{N}$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned} D_{\partial_u} \bar{N} &= -\bar{A}(\partial_u) + \nabla_{\partial_u}^\perp \bar{N} \\ (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}, 0) &= -\bar{A}(\partial_u) - \cos \theta \langle \phi_u, T \rangle N \\ \bar{A}(\partial_u) &= -(\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}, 0) - \cos \theta \operatorname{sen} \theta (N_1, N_2, N_3, \cos \theta). \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} D_{\partial_v} \bar{N} &= -\bar{A}(\partial_v) + \nabla_{\partial_v}^\perp \bar{N} \\ (\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0) &= -\bar{A}(\partial_v) - \cos \theta \langle \phi_v, T \rangle N \\ \bar{A}(\partial_v) &= -(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0) - \cos \theta \langle \phi_v, T \rangle N \\ \bar{A}(\partial_v) &= -(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \bar{A}(\partial_u) &= -(\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}, 0) - \cos \theta \operatorname{sen} \theta (N_1, N_2, N_3, \cos \theta) \\ \bar{A}(\partial_v) &= -(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0) \end{cases}$$

Dessa forma, usando (2.88)

$$\begin{aligned} \bar{A}(\partial_u) &= -(\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}, 0) + (\operatorname{sen}^2 \theta \phi_{1u}, \operatorname{sen}^2 \theta \phi_{2u}, \operatorname{sen}^2 \theta \phi_{3u}, \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta) \\ &= -\cos^2 \theta (\phi_{1u}, \phi_{2u}, \phi_{3u}, \operatorname{sen} \theta) \\ &= -\cos^2 \theta \partial_u \end{aligned}$$

e

$$\bar{A}(\partial_v) = -(\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0) = -1\partial_v.$$

Assim,

$$[\bar{A}]_{\{\partial_u, \partial_v\}} \begin{pmatrix} -\cos^2 \theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Agora que possuímos os operadores de forma  $A$  e  $\bar{A}$  vamos determinar o sistema de EDPs ao qual a superfície  $S$  deve satisfazer:

$$\begin{aligned} \phi_{uu} = D_{\phi_u} \phi_u &= \nabla_{\phi_u} \phi_u + \langle \phi_u, \bar{A}(\phi_u) \rangle \bar{N} \\ &= 0 + \langle \phi_u, -\cos^2 \theta \phi_u \rangle \bar{N} \\ &= -\cos^2 \theta \bar{N} \\ &= -\cos \theta (\phi_1, \phi_2, \phi_3, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{uv} = D_{\phi_v} \phi_u &= \nabla_{\phi_v} \phi_u + \langle \phi_u, \bar{A}(\phi_v) \rangle \bar{N} \\ &= \sigma \cos \theta \phi_v + \langle \phi_u, -\phi_v \rangle \bar{N} \\ &= \sigma \cos \theta (\phi_{1v}, \phi_{2v}, \phi_{3v}, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{vv} = D_{\phi_v} \phi_v &= \nabla_{\phi_v} \phi_v + \langle \phi_v, \bar{A}(\phi_v) \rangle \bar{N} \\
&= -\beta \beta_u \phi_u + \frac{\beta_v}{\beta} \phi_v + \langle \phi_v, -\phi_v \rangle \bar{N} \\
&= -\beta \beta_u \phi_u + \frac{\beta_v}{\beta} \phi_v + -\beta^2 \bar{N}.
\end{aligned}$$

E dessa forma, temos

$$\phi_{j_{uu}} = -\cos \theta \phi_j \quad (2.99)$$

$$\phi_{j_{u,v}} = \sigma \cos \theta \phi_{j_v} \quad (2.100)$$

$$\phi_{j_{vv}} = -\beta \beta_u \phi_{j_u} + \frac{\beta_v}{\beta} \phi_{j_v} + -\beta^2 \phi_j \quad (2.101)$$

para  $j = 1, 2, 3$ .

Por fim, para concluir a demonstração, precisamos resolver o sistema acima. Fazendo uso da equação (2.10) de  $\sigma$  em (2.100) e integrando com respeito a  $u$ , encontramos

$$\phi_{j_v} = \cos(u \cos \theta + C(v)) H_j(v) \quad (2.102)$$

e integrando novamente, agora com respeito a  $v$ , resulta que

$$\phi_j = \int_{v_0}^v \cos(u \cos \theta + C(y)) H_j(y) dy + I_j(u) \quad (2.103)$$

para  $j = 1, 2, 3$  e onde  $H_j$  e  $I_j$  são funções arbitrárias definidas em  $S$ . Da equação (2.99), usando (2.103), obtemos

$$I_{j_{uu}}(u) - \cos^2 \theta I_j(u) = 0$$

donde concluímos que

$$I_j(u) = K_j \cos(u \cos \theta) + L_j \sen(u \cos \theta) \quad (2.104)$$

para constantes  $K_j, L_j \in \mathbb{R}$ . Assim, obtemos que  $\phi$  é da forma:

$$\begin{aligned}
\phi(u, v) = & \left( \left( K_1 + \int_{v_0}^v \cos(C(y)) H_1(y) dy \right) \cos(u \cos \theta) \right. \\
& \left. + \left( L_1 - \int_{v_0}^v \sen(C(y)) H_1(y) dy \right) \sen(u \cos \theta), \dots, u \sen \theta \right).
\end{aligned} \quad (2.105)$$

Agora, defina as funções

$$f_j(v) = K_j + \int_{v_0}^v \cos(C(y)) H_j(y) dy$$

$$g_j(v) = L_j - \int_{v_0}^v \sen(C(y)) H_j(y) dy.$$

Do que foi feito até aqui, possuímos as seguintes condições

$$\begin{aligned}
\langle \phi_u, \phi_u \rangle &= 1, & \langle \phi_v, \phi_v \rangle &= \beta^2(u, v), & \langle \phi_u, \phi_v \rangle &= 0 \\
\langle \phi_u, N \rangle &= 0, & \langle \phi_v, N \rangle &= 0, & \langle N, N \rangle &= 1, \\
\langle \phi_u, \bar{N} \rangle &= 0, & \langle \phi_v, \bar{N} \rangle &= 0, & \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle &= 1 \\
\langle N, \bar{N} \rangle &= 0,
\end{aligned}$$

donde concluimos que,

$$\sum_{j=1}^3 f_j^2 = 1, \quad (2.106)$$

$$\sum_{j=1}^3 g_j^2 = 1, \quad (2.107)$$

$$\sum_{j=1}^3 f_j g_j = 0, \quad (2.108)$$

$$\sum_{j=1}^3 f'_j g_j = 0, \quad (2.109)$$

$$\sum_{j=1}^3 H_j^2 = \sum_{j=1}^3 (f'_j)^2 + (g'_j)^2 = D(v)^2. \quad (2.110)$$

De (2.106) e (2.107) podemos concluir que  $f(v) = (f_1(v), f_2(v), f_3(v))$  e  $g(v) = (g_1(v), g_2(v), g_3(v))$  são curvas em  $\mathbb{S}^2$ . Portanto,  $g = \pm f \times f'$  e sem perda de generalidade, podemos tomar  $g = f \times f'$ . Consequentemente, a imersão  $\phi : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  é dada por

$$\phi(u, v) = (\cos(u \cos \theta) f(v) + \operatorname{sen}(u \cos \theta) f(v) \times f'(v), u \operatorname{sen} \theta) \quad (2.111)$$

e concluimos assim a prova do Teorema.  $\square$

## Considerações Finais

Neste trabalho estudamos e apresentamos resultados sobre a classificação de superfícies com ângulo constante imersas em  $M^2 \times \mathbb{R}$ , onde  $M^2$  é uma forma espacial bidimensional podendo ser  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  ou  $S^2$ , para isso, foi preciso recorrer a diversas literaturas, visto que, cada ambiente tem suas peculiaridades, apesar de que, para atingir o objetivo principal a técnica seja semelhante. Vale ressaltar que os trabalhos utilizados como referência são recentes e existe uma convergência entre os autores sobre as técnicas aplicadas, o que é altamente interessante pois possibilita aplicar tais técnicas em trabalhos futuros.

Por fim, este tipo de trabalho é fundamental para treinamentos a nível de mestrado. No meu caso, por exemplo, possibilitou um aprofundamento em temas relevantes da geometria que têm recebido foco de diversos geômetras pelo mundo e conseqüentemente este embasamento teórico permitirá pesquisas mais avançadas futuramente.

## Referências Bibliográficas

- [1] Carmo, M. P., Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, (2008).
- [2] Doria, C. M.; Geometrias Não Euclidianas Exemplos, Bienal de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2004.
- [3] Toubiana, E., Sá Earp, R.; Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann. Bibliothèque des sciences, 1997.
- [4] Carmo, M. P., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática, 5 ed. Rio de Janeiro:IMPA, (2015).
- [5] Dillen, F. and Fastenakels, J. and Van der Veken, J. and Vrancken, L., *Constant Angle Surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* , Monats. Math 152 (2), 89-96 (2007).
- [6] Nistor, A. I., On a class of surfaces in  $\mathbb{H}^+ \times \mathbb{R}$ , Romai Journal, 7 (2), (2011).
- [7] Dillen, F. and Munteanu, M. I., *Surfaces in  $\mathbb{H}^+ \times \mathbb{R}$* , Pure and Applied Differential Geometry, PADGE, 185-193, (2007).
- [8] Dillen, F. and Munteanu, M. I., *Constant Angle Surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bulletin Braz. Math. Soc. 40, 1, 85 - 97, (2009).
- [9] Munteanu, M. I. and Nistor, A. I., *Constant Angle Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Turk J. Math. 33, 169-178 (2009).
- [10] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* vol. 1, Publish or Perish, Houston, Texas, (1999).
- [11] PENAFIEL, Carlos. *Surfaces of constant mean curvature in homogeneous three manifolds with emphasis in  $PSL_2(\mathbb{R}, \tau)$* . Tese de Doutorado - PUC, (2010).
- [12] Meeks, W. and Rosenberg, H., *Stable minimal surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$* , J. Differential Geometry, 68 (3), 515-534 (2004).
- [13] Rosenberg, H., *Minimal surfaces in  $M^2 \times \mathbb{R}$* , Illinois J. Math., 46 (4) 1177-1195 (2002).
- [14] Thurston, W. P., *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc., 6, 3, 357-381, (1982).

- [15] Fastenakels, J. and Munteanu, M. I. and Van Der Veken, J., *Constant angle surfaces in the Heisenberg group*, Acta Mathematica Sinica, English Series, v. 27, n. 4, p. 747-756, 2011.
- [16] Benoît, D., *Isometric Immersions into 3-dimensioanl homogeneous manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici 82.1 87-131(2007)

# Índice Remissivo

- Ângulo Hiperbólico, 12
- Aplicação Diferenciável entre Variedades, 25
- Base Ortonormal, 34
- Campo  $\xi$ , 37
- Campo de Vetores, 27
- Campo Diferenciável, 27
- Campo Normal, 37
- Campo Tangente, 29
- Campos de Vetores, 29
- Codimensão, 27
- Colchete, 27
- Compatibilidade com a métrica, 29
- Comprimento Hiperbólico, 12
- Conexão Afim, 29
- Conexão de Levi Civita, 29
- Conexão Normal, 31
- Conexão Riemanniana de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ , 34
- Conexão Riemanniana de  $S$ , 39
- Curva, 28
- Curva Diferenciável, 25
- Curvatura, 30
- Curvatura Gaussiana, 39
- Difeomorfismo, 26
  - Local, 26
- Direções Principais, 38
- Distância Hiperbólica, 13, 19
- Distribuição Diferenciável, 32
  - Completamente Integral, 32
  - Involutiva, 32, 40
- Equação
  - de Codazzi, 31, 38
  - de Gauss, 32, 37, 38
  - de Weingarten, 37
- Esfera Euclidiana, 24
- Fibrado Tangente, 27
- Função Ângulo, 37
- Geodésica, 13, 30
- Geodésica Completa, 16
- Grupo de Transformações Conformes, 13
- Hipersuperfície, 57
- Horociclos, 17
- Identidade de Jacobi, 27
- Imersão, 26, 37
  - Isométrica, 31
- Inversão por Círculo, 13
- Isometria, 13, 28
- Isometria de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , 37
- Isometria Local, 28
- Isometrias da Esfera, 24
- Isometrias de  $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ , 36
- Isometrias Positivas, 15
  - Elíptica, 18, 22
  - Hiperbólica, 18
  - hiperbólica, 18
  - Parabólica, 18, 20
- Isometrias Positivas do Disco, 23
- Métrica Produto, 34
- Métrica Riemanniana, 28
- Mergulho, 26
- rotações hiperbólicas, 24
- S.C.A. invariante por isometria
  - hiperbólica, 54
  - parabólica, 55
- Símbolos de Christoffel, 34
- Semiplano de Poincaré, 11
- Simétrica, 29
- Sistema de Coordenadas Locais, 42
- Sistema de Equações Diferenciais, 43, 60
- Subvariedade, 32
- subvariedade, 26
- Superfície
  - Completa, 37
  - Invariante por Isometrias, 37

- Tensor, 37
- Tensor de ordem  $r$ , 31
- Teorema
  - de Frobenius, 32
- Teorema de Classificação
  - em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , 54
  - em  $\mathbb{R}^3$ , 44
  - em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , 57
- Transformação Conforme, 12
- translação
  - hiperbólica, 23
  - parabólica, 24
- Translação Hiperbólica, 20
  
- Variedade Diferenciável, 25
- Variedade Integral, 32
- Variedade Riemanniana, 28, 29, 34