

LUCAS CARVALHO SILVA

MÉTODO DE MELNIKOV GENERALIZADO E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011

LUCAS CARVALHO SILVA

Método de Melnikov Generalizado e Aplicações

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de Fevereiro de 2011.

Luis Fernando de Osório Mello

Rogério Casagrande

Kennedy Martins Pedroso
(Co-orientador)

Sandro Vieira Romero
(Co-orientador)

Valéria Mattos da Rosa (Orientadora)

*“Por tudo o que tens feito,
por tudo que irás fazer.
Te agradeço, meu Senhor. Te agradeço!!!”*
Dennis Jernigan.

Agradecimentos

A Deus Pai, Filho e Espírito Santo, com muito amor, por me amar antes mesmo de eu existir, por me ensinar a caminhar um caminho bom, ser paciente e misericordioso mesmo quando decido, de maneira egoísta, fazer apenas as minhas vontades.

Te agradeço, pois sei que mesmo nos meus momentos de fraqueza, estas comigo e me carrega nos braços quando necessário, mas principalmente, por fazer isto tudo de forma gratuita.

Aos meus pais *José Carlos e Ieda*, os grandes mestres da minha vida, pois desde o início de meu existir me amaram e educaram de maneira ímpar, me apontaram o Caminho e como bons professores da vida, souberam que não há aprendizado sem exemplos.

Como se não bastasse caminharam comigo o meu caminho, instrumentos de Deus, direcionando e impulsionando o meu caminhar.

Aos meus irmãos *Nathalia e Marcus* por também participarem dessa caminhada, pelas conversas e conselhos, pela presença, por orarem e torcerem por mim e como bons companheiros de turma me ajudaram a entender as "lições de casa", teorias e exemplos transmitidos por nossos pais.

A todos os meus familiares, avôs e avós, tios e tias, primos e primas, padrinhos e madrinhas, cunhados e cunhadas, sogro, sogra e a minha afilhada.

A todos esses que mudaram o conceito de métrica que conhecemos, mesmo longe estiveram sempre juntos a mim, com carinho e dedicação. Em particular a minha *Vó Ereni*, por se interessar profundamente por mim e ter me ajudado muito em alguns momentos difíceis da minha caminhada. À *Solange* desde os primeiros dias ao meu lado dividindo comigo alegrias e frustrações, até hoje uma grande amiga.

Aos amigos da escola e do cachorrão, *Maykon, Milton, Kryslan, Mateus, Felipe, Márcio e Aredes*, porto seguro. Aos amigos do 1512, 1731 e da casa do Rê, em especial ao *Danilo, Deyvison e Renan*, respectivamente. Aos amigos na fé, em particular ao *Renato* e a todos da Pequena Via, comunidade que me acolheu, amou e me ensinou uma nova via, pequena, rumo a Deus.

A *Naiara*, grande amiga, conselheira e confidente, sem você não seria possível! Confiou em mim mesmo quando eu não confiava e dividiu comigo os melhores momentos em Viçosa.

Minha fortaleza durante estes últimos dois anos: Orou, sofreu, motivou e acreditou, desde o período de verão em 2009, passando comigo pelas disciplinas e qualificações, até chegar aqui.

Te amo!!!

A *Valéria*, minha orientadora, por aceitar me orientar, pela boa vontade durante as disciplinas que estivemos juntos, me orientando desde então e durante todos os dias em Viçosa. Por sempre me receber em Juiz de Fora de maneira atenciosa. Pelo bom humor costumeiro, humildade e sensatez.

Aos meus co-orientadores Kennedy e Sandro.

Ao *Kennedy* em especial, colocado por Deus em meu caminho, se propôs a estudar comigo um conteúdo novo, buscou opções, sempre disponível e transparente, sempre questionando.

Muito mais que um co-orientador.

Aos professores do programa pelas disciplinas e atenção. Em especial à professora *Simone* e *Marinês* pela grande dedicação às disciplinas e ao programa. A esta última, gostaria de agradecer ainda por me atender sempre, até quando não poderia.

Aos professores da banca por aceitarem o convite.

Aos funcionários do DMA, em especial a *Mara* pela dedicação, torcida e orações. A *Miriam* pelo esforço e dedicação. E ao *Jair* e *Celino*, pelo companherismo e pelo cafezinho.

Aos docentes da turma de 2009 pela experiência transmitida e aos docentes de 2010 pelos momentos de estudo e amizade.

Àqueles que se foram durante esse período: *Vó Nonô*, *Vô Arlindo*, *Tio Fernando* e ao amigo *Zé Moura*.

A CAPES por me dar uma oportunidade de fonte de renda.

A todos, muito obrigado!!!

Biografia

Lucas Carvalho Silva, filho de José Carlos da Silva e Ieda Moia de Carvalho Silva, nasceu no dia 18 de fevereiro de 1983, na cidade do Rio de Janeiro-RJ.

Em 1997, concluiu o ensino fundamental na Escola Estadual Desembargador Canêdo e em 2000, concluiu o Ensino Médio na Escola Estadual Dr. Olavo Tostes, ambos em Muriaé-MG. Em 2003 ingressou no curso de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, graduando-se em Licenciatura em janeiro de 2008.

Em 2008 atuou como professor substituto pela Universidade Federal de Viçosa e em 2009 ingressou no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, submetendo-se à defesa da dissertação no dia 22 de fevereiro de 2011.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Método de Melnikov	3
1.2 Sistemas Hamiltonianos	12
1.3 Um exemplo do método clássico de Melnikov.	16
2 O Método de Melnikov-Gruendler	20
2.1 O Método clássico de Melnikov, $n=2$	41
3 O Método de Melnikov para perturbações não periódicas	45
4 O Problema de Gylden	55
5 O Pêndulo esférico, magnetizado e amortecido	61
6 Considerações Finais	71
Referências Bibliográficas	73

Resumo

SILVA, Lucas Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2011.
Método de Melnikov generalizado e aplicações. Orientadora: Valéria Mattos da Rosa. Co-Orientadores: Kennedy Martins Pedroso e Sandro Vieira Romero.

Um sistema dinâmico

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x, t, \varepsilon) , \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ são de classe C^2 , g é periódica em t , tal que o sistema $\dot{x} = f(x)$ (2) tem um ponto de equilíbrio do tipo sela e uma órbita homoclínica associada a este ponto, (1) é chamado sistema homoclínico perturbado. O que acontece com o sistema (2) após uma perturbação, ou seja, quando fazemos em (1) ε assumir valores positivos? Nesse trabalho analisamos ferramentas analíticas para começar a responder a esta pergunta, como o método clássico de Melnikov, para sistemas quando $n = 2$ e g é periódica em t . Usando um tipo especial de funções, provamos que o método de Melnikov fornece um critério para mostrar que para um intervalo de tempo finito $[-T, T]$, com T arbitrariamente grande, o sistema perturbado é igual a um sistema caótico para uma classe mais geral de "funções perturbadoras". Por fim, apresentamos uma generalização deste método clássico para dimensões maiores, o método de Melnikov-Gruendler. Daremos ainda duas aplicações, uma exemplificando que para um intervalo de tempo finito o sistema perturbado é igual a um caótico e o outro relativo ao método de Melnikov-Gruendler.

Abstract

SILVA, Lucas Carvalho, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2011.
Generalized method of Melnikov and applications. Adviser: Valéria Mattos da Rosa. Co-advisers: Kennedy Martins Pedroso and Sandro Vieira Romero.

We define a dynamic system as follows

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x, t, \varepsilon) , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ are C^2 , g is periodic in t , such that the system $\dot{x} = f(x)$ (2) has a hyperbolic saddle point and a homoclinic orbit associated to this point, (1) is called perturbed homoclinic system (PHS). What happens with the system (2) after a disturbance, ie, when we in (1) ε assume positive values? In this work we analyze some methods in order to answer this question. We study the classical method of Melnikov for systems when $n = 2$ and g is periodic in t , a method to eliminate the requirement that g is periodic in t and also a generalization of the classical method of Melnikov to higher dimensions, the method of Melnikov-Gruendler. For each case we present applications.

Introdução

Existe um grande interesse no estudo de soluções caóticas para sistemas determinísticos, uma vez que os cálculos envolvendo a teoria do caos são utilizados para descrever e entender fenômenos meteorológicos, crescimento de populações, variações no mercado financeiro, movimentos de placas tectônicas, entre outros.

Uma das abordagens para encontrar soluções caóticas é o uso de perturbações e, nesse sentido, uma ferramenta analítica importante é o método de Melnikov.

O método de Melnikov é uma ferramenta analítica, que nos dá um critério para determinar a existência de certas órbitas especiais, cujo aparecimento implica no início de uma dinâmica caótica em um tipo específico de sistema dinâmico, a saber, o sistema homoclínico perturbado (S.H.P).

Um S.H.P é um sistema do tipo

$$\dot{x} = f(x) + h(x, t, \varepsilon) , \quad x \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que}$$

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde B_δ é uma bola de raio δ centrada na origem, são aplicações de classe C^2 ;
- A função g é periódica em t e $h(x, t, 0) = 0$;
- O sistema não perturbado $\dot{x} = f(x)$, tem um ponto de sela hiperbólico e uma órbita especial associada a esse ponto.

O primeiro trabalho neste sentido é de Melnikov, V.K, [1], que considerou o caso de um sistema dinâmico planar analítico. Posteriormente Holmes, P.J. em "*Averaging and chaotic motions in forced oscillations*" e Sanders, J.A. "*A note on the validity of Melnikov's method*" reduziram o grau de diferenciabilidade requerida de C^ω para C^2 e fizeram uma demonstração mais geométrica para o caso hamiltoniano que pode ser encontrado em [7] e [8]. Neste trabalho iremos apresentar o método de Melnikov e uma extensão deste método para o caso não hamiltoniano, C^2 e de

dimensão finita arbitrária, conhecido como o método de Melnikov-Gruendler [12]. Analisaremos também um critério para mostrar que, em um intervalo de tempo finito $[-T, T]$, com T arbitrariamente grande, um certo tipo de sistema dinâmico perturbado é igual a um sistema caótico [15].

No primeiro capítulo apresentaremos alguns resultados e conceitos acerca dos sistemas dinâmicos que nos permitirão definir o S.H.P. e entender de que maneira o método de Melnikov nos auxiliará na descoberta de uma dinâmica caótica.

O segundo capítulo é destinado a generalização do método clássico de Melnikov [12], e isso acontece em três sentidos.

1. Diminuiremos o grau de diferenciabilidade requerido de C^ω para C^2 , ou seja, não há mais a necessidade de que f e h sejam analíticas.
2. Em segundo lugar, no resultado principal, consideraremos também os sistemas não hamiltonianos. Dessa forma, perderemos as propriedades geométricas desse tipo de sistema, mas através da equação variacional

$$\dot{u} = Df(\gamma(t))u(t)$$

ao longo da órbita homoclínica γ , poderemos considerar um conjunto de vetores transversais a γ e portanto, considerar um plano gerado por tais vetores que nos permitirá acompanhar a evolução das variedades estável e instável do sistema perturbado e assim, medirmos a distância entre estas variedades.

3. A última generalização será na dimensão, consideraremos o problema para o $\mathbb{R}^n$.

Na proposta inicial de Melnikov, bem como no trabalho de Gruendler [12], h , a "*função perturbadora*", é necessariamente uma função periódica na variável t , o que limita o número de sistemas nos quais podemos aplicar o método de Melnikov.

No terceiro capítulo, mostraremos um critério que nos permitirá extrair informações sobre a dinâmica de um certo tipo de sistema, perturbado por funções não periódicas em t [15].

Nos dois capítulos finais mostraremos duas aplicações.

Na primeira, utilizaremos as idéias do terceiro capítulo, para mostrarmos que um certo tipo de sistema dinâmico, perturbado por uma função não periódica g é igual, em um intervalo de tempo finito, a um outro sistema dinâmico, perturbado por uma função periódica $\tilde{g}$ [15] e [16].

No último capítulo aplicaremos o método de Melnikov Gruendler, o MMG, ao problema do pêndulo esférico magnetizado e amortecido [12].

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo, apresentaremos alguns resultados e conceitos acerca dos sistemas dinâmicos que nos permitirão definir uma família a um parâmetro de sistemas dinâmicos com a qual iremos trabalhar [2],[3],[4] e [5]. Apresentaremos o resultado clássico de Melnikov, de 1963, que determinou uma ferramenta analítica para detectar a presença de uma dinâmica caótica em sistemas planares analíticos, perturbados por $\varepsilon g(x, t)$, ou seja, um sistema na forma

$$\dot{x} = f(x, t) + \varepsilon g(x, t),$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real e $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função periódica em t [6], [7] e [8]. A segunda seção deste capítulo tratará de um tipo especial de sistemas dinâmicos, os sistemas Hamiltonianos, que merecem um destaque especial pela grande presença deste tipo de sistemas em nossas aplicações e pela simplicidade da função de Melnikov neste caso [6] e [9]. Para completar, daremos um exemplo da aplicação do método de Melnikov num sistema de dimensão 2.

1.1 Método de Melnikov

Seja $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde, D é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{onde } \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1)$$

Dentro do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias e dos sistemas dinâmicos um resultado importante que devemos citar é o Teorema de Peano que garante a existência de soluções de (1.1), quando fixamos uma condição inicial, digamos $x(t_0) = x_0$.

Teorema 1.1 (Teorema de Peano) *Seja f contínua em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| < M$ em Ω , o sistema (1.1) com a condição inicial $x(t_0) = x_0$, tem pelo menos uma solução em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

Temos também o Teorema de Picard que, fixada uma condição inicial, garante a existência e unicidade de soluções do sistema (1.1).

Teorema 1.2 (Teorema de Picard) *Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$. Se $|f| \leq M$ em Ω , existe uma e única solução do sistema (1.1) com a condição inicial $x(t_0) = x_0$, em I_α , onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

Ou seja, satisfazendo algumas condições, é possível garantir a existência (ou existência e unicidade) de uma solução, $\varphi(t, x_0)$, solução de (1.1) passando por x_0 quando $t = t_0$, definida em um certo intervalo $I_\alpha = (a_-(x_0), b_+(x_0))$. Em alguns casos podemos ter $b_+(x_0) = +\infty$ ou $a_-(x_0) = -\infty$. Dessa forma, se $b_+(x_0) = +\infty$ podemos definir o conjunto

$$\omega(x_0) = \{p \in D; \exists t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

e de forma análoga, se $a_-(x_0) = -\infty$, definimos

$$\alpha(x_0) = \{p \in D; \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos $\omega(x_0)$ e $\alpha(x_0)$ são chamados respectivamente de conjunto ω —**limite** e α —**limite** de x_0 .

Exemplo 1.3 *Considere o retrato de fase com um ponto de sela na origem (Figura 1.1).*

Seja $x_0 \in D$ um aberto do $\mathbb{R}^2$, se:

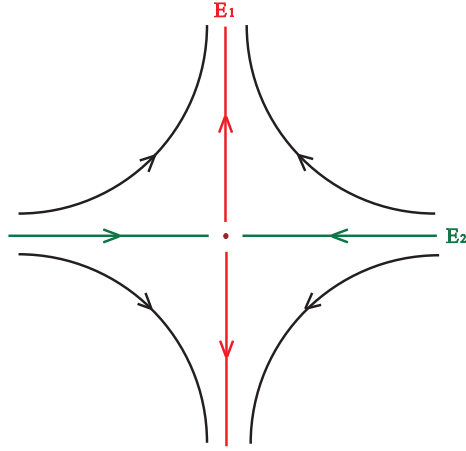


Figura 1.1: Retrato de fase com um ponto de sela na origem.

- $x_0 = 0$, então $\alpha(x_0) = \omega(x_0) = \{0\}$;
- $x_0 \in E_1 - \{0\}$, então $\omega(x_0) = \emptyset$ e $\alpha(x_0) = \{0\}$;
- $x_0 \in E_2 - \{0\}$, então $\omega(x_0) = \{0\}$ e $\alpha(x_0) = \emptyset$;
- $x_0 \notin E_1 \cup E_2$, então $\alpha(x_0) = \omega(x_0) = \emptyset$.

Exemplo 1.4 Considere o retrato de fase que tem uma órbita periódica $\theta(t) = \theta(t, x_0)$, de período τ , como ciclo limite e uma espiral instável na origem (Figura 1.2).

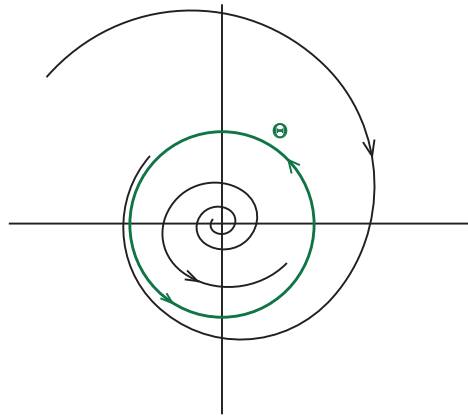


Figura 1.2: Retrato de fase com uma órbita periódica.

Logo, $\omega(x_0) = \Theta = \{\theta(t, x_0) ; 0 \leq t \leq \tau\} = \alpha(x_0)$. E ainda, dado $x \in D$, se:

- $x = 0$, então $\alpha(x) = \omega(x) = \{0\}$;
- $x \neq 0$, então $\omega(x) = \Theta$;
- x é interior a Θ , então $\alpha(x) = \{0\}$;
- x é exterior a Θ , então $\alpha(x) = \emptyset$;
- $x \in \Theta$, então $\alpha(x) = \omega(x) = \Theta$.

Como vimos existem soluções que conseguimos compreender o seu comportamento mesmo no infinito, por exemplo, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existem soluções que passam por x_0 para $t = t_0$ e se aproximam de p a medida que $t \rightarrow +\infty$ e outras que se aproximam de p quando $t \rightarrow -\infty$. Sendo assim, podemos definir dois conjuntos inerentes ao ponto p e que são importantes dentro do nosso estudo, as **variedades estável e instável** do ponto p .

Considere uma EDO para a qual o fluxo $\Phi(t, x)$ está definido para todo t . Agora considere $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo, levando em consideração que, no caso de uma EDO, teremos o caso particular $F(x) = \Phi(t, x)$, para um t fixo.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ um **ponto fixo hiperbólico** de F , isto é, $F(p) = p$ e todos os autovalores de $DF(p)$ tem norma não unitária.

Podemos agora definir as variedades estável e instável.

Definição 1.5 *Consideremos, para β suficientemente pequeno, a bola $B_\beta \subset \mathbb{R}^n$, de centro p e raio β .*

Os conjuntos

$$W_\beta^s(p) = S = \{q \in B_\beta : F^n(q) \in B_\beta, \forall n \geq 0\},$$

$$W_\beta^u(p) = U = \{q \in B_\beta : F^{-n}(q) \in B_\beta, \forall n \geq 0\},$$

são chamados variedades estável e instável locais, de tamanho β , do ponto p .

Podemos também pensar nas variedades estável e instável do ponto de vista global.

Definição 1.6 Definimos, respectivamente, a variedade estável e instável de p , como segue:

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(S)$$

e

$$W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} F^n(U)$$

No caso particular em que $F(x) = \Phi(t, x)$, para um t fixo, podemos, equivalentemente, definir a variedade estável de p , como o conjunto $W^s(p)$, dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que tem p como $\omega - \text{limite}$. De forma análoga, definimos a variedade instável de p , como o conjunto $W^u(p)$, dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que tem p como $\alpha - \text{limite}$.

Observação 1.7 $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são invariantes por F , por exemplo, se $x \in W^s(p)$, $F(x) \in W^s(p)$.

O próximo teorema, cuja a demonstração pode ser encontrada em [2] e [3], formaliza a nossa discussão e nos apresenta uma condição suficiente para a existência das variedades invariantes locais. Além disso, caracteriza a ação do difeomorfismo F e suas iteradas sobre os elementos das variedades locais.

Definição 1.8 Consideremos o operador linear $DF(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

O subespaço estável de $DF(p)$, $E^s \subset \mathbb{R}^n$, é o maior subespaço invariante por $DF(p)$ e tal que todos os autovalores de $DF(p)|_{E^s}$ tem módulo menor que 1.

O subespaço instável de $DF(p)$, $E^u \subset \mathbb{R}^n$, é o maior subespaço invariante por $DF(p)$ e tal que todos os autovalores de $DF(p)|_{E^u}$ tem módulo maior que 1.

Teorema 1.9 (O Teorema da Variedade Estável para Difeomorfismos)

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 com um ponto fixo hiperbólico, $0 \in \mathbb{R}^n$. Então existem as variedades invariantes estável e instável local, S e U respectivamente, ambas de classe C^1 , tangentes aos subespaços estável e instável E^s e E^u de $DF(0)$, respectivamente, tais que:

$$\dim(S) = \dim(E^s) \text{ e } \dim(U) = \dim(E^u).$$

Para todo $x \in S$ e $n \geq 0$, $F^n(x) \in S$ e $F^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

Para todo $x \in U$ e $n \geq 0$, $F^{-n}(x) \in U$ e $F^{-n}(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

No nosso trabalho aplicaremos, o método de Melnikov e o método de Melnikov-Gruendler a um tipo específico de sistema dinâmico. Como já foi mencionado, o método de Melnikov é válido para sistemas dinâmicos planares, ou seja, $n = 2$. Neste momento, começaremos a definir o sistema com o qual iremos trabalhar no restante deste capítulo e ao qual iremos aplicar o método clássico de Melnikov.

Considere o sistema

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial de classe C^2 e $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe C^2 , periódica em t .

Suponhamos que para $\varepsilon = 0$ o nosso sistema tenha um ponto de equilíbrio do tipo sela na origem e que associada a este ponto de sela tenhamos uma **órbita homoclínica** $\gamma(t)$ (Figura 1.3).

Definição 1.10 *Seja p um ponto de sela do sistema (1.2). Uma curva solução de (1.2) que satisfaz:*

$$p = \omega(x_0) = \alpha(x_0), \quad \forall x_0 \in \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

é dita uma órbita (solução) homoclínica de (1.2).

Além disso, note que $\gamma \subset W^s(p) \cap W^u(p)$.

É com este sistema descrito acima que iremos trabalhar.

Quando $\varepsilon = 0$ diremos que (1.2) está na forma não perturbada e quando $\varepsilon > 0$ diremos que (1.2) está na forma perturbada.

A pergunta que fazemos agora é a seguinte:

O que acontece quando fazemos $0 \leq \varepsilon \lll 1$? Suponhamos que $W_\varepsilon^s(0_\varepsilon)$ e $W_\varepsilon^u(0_\varepsilon)$ se intersectem de maneira não paralela, ou seja, de uma maneira transversal.

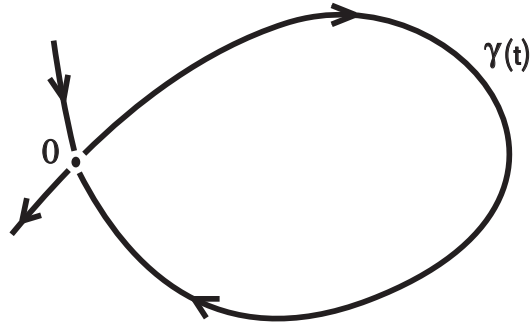


Figura 1.3: $\gamma_0(t)$: Órbita homoclínica associada a origem.

Definição 1.11 *Um ponto q que esteja em $W^s(p) \cap W^u(p)$ é homoclínico em relação a p . Se $W^s(p)$ intersecta $W^u(p)$ transversalmente em um ponto q , então o ponto q é chamado ponto homoclínico transversal.*

Na Figura 1.4 podemos ver as variedades estável e instável do ponto fixo hiperbólico e a interseção homoclínica transversal.

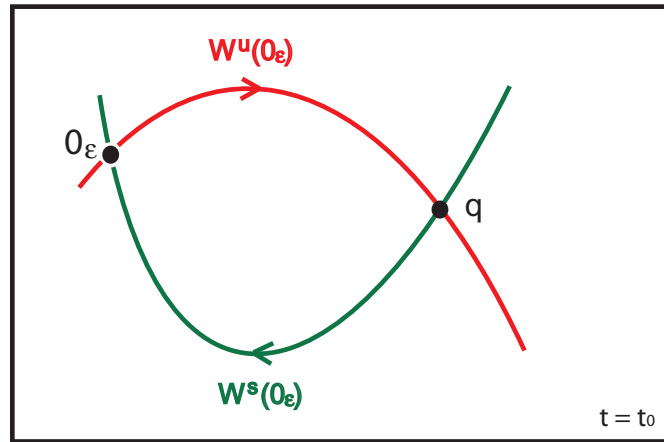


Figura 1.4: Interseção homoclínica transversal.

A existência do ponto fixo hiperbólico, implica, pelo Teorema da Variedade Estável para Difeomorfismos, na existência das variedades locais, estável e instável. E a existência do ponto homoclínico transversal, onde ela nos leva? A resposta para esta pergunta também está no Teorema da Variedade Estável para Difeomorfismos.

Como $W^s(0_\epsilon)$ e $W^u(0_\epsilon)$ são invariantes por F , temos $F(q) \in W^s(0_\epsilon) \cap W^u(0_\epsilon)$.

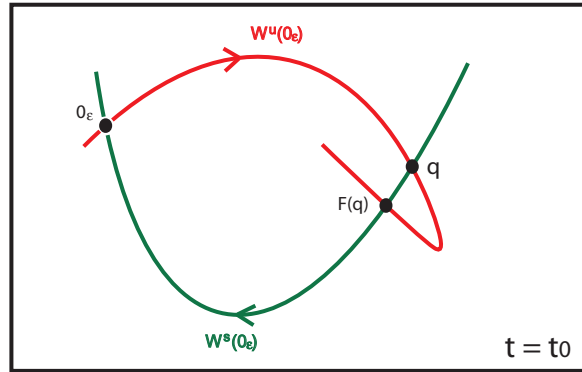


Figura 1.5: $F(q)$.

Repetindo o raciocínio temos que $F^n(q) \in W^s(0_\epsilon) \cap W^u(0_\epsilon)$, $\forall n > 0$. Porém, temos pelo Teorema 1.9 que $F^n(q) \rightarrow 0_\epsilon$ quando $n \rightarrow \infty$. Sendo assim, surge numa vizinhança da origem, um **emaranhado homoclínico** decorrente da interseção homoclínica transversal.

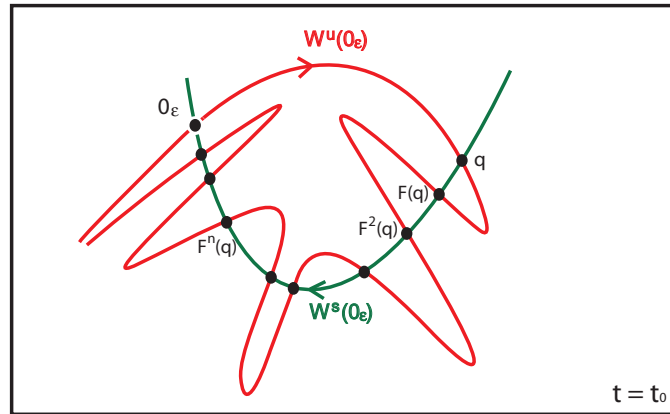


Figura 1.6: Emaranhado homoclínico.

De maneira análoga acontece para $F^n(q)$ com $n < 0$ (Figura 1.7).

Temos então que, ao supormos uma interseção homoclínica transversal, estamos gerando um emaranhado homoclínico numa vizinhança do ponto fixo hiperbólico. Sendo assim, existe um inteiro N tal que F^N tem um conjunto de Cantor compacto, hiperbólico, invariante, Λ , no qual F é topologicamente equivalente a uma aplicação sobre sequências bi-infinitas de zeros e uns, caracterizando uma **dinâmica caótica**.

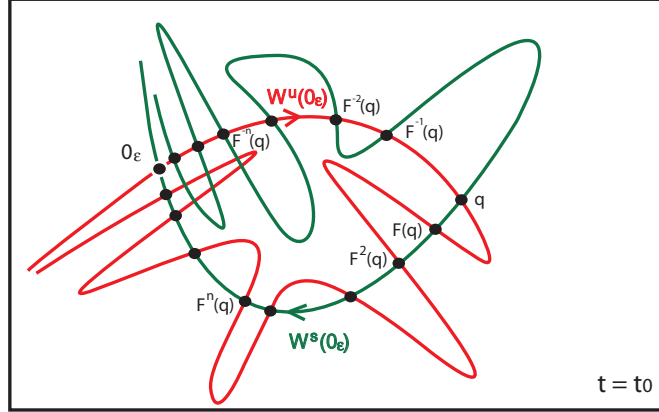


Figura 1.7: Emaranhado homoclínico.

[8] e [9].

O *Teorema Homoclínico de Smale-Birkhoff*, cuja idéia da demonstração pode ser encontrado em [7], formaliza essas idéias.

Temos, então, que a dinâmica caótica se inicia na interseção homoclínica transversal, ou seja, na interseção de $W^s(0_\epsilon)$ e $W^u(0_\epsilon)$. É neste contexto que aparece o método de Melnikov.

Através da função de Melnikov, que podemos encontrar em [6], e é dada por

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(\gamma(s)) ds} f(\gamma(t)) \wedge g(\gamma(t), t + t_0) dt, \quad (1.3)$$

onde, γ é a órbita homoclínica do sistema não perturbado e se $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2)$ temos

$$f \wedge g = (f_1, f_2) \wedge (g_1, g_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = f_1 \cdot g_2 - f_2 \cdot g_1,$$

podemos medir a distância entre as variedades estável e instável do sistema perturbado. Dessa maneira, quando a função de Melnikov se anula, temos uma interseção das variedades estável e instável e o início de uma dinâmica caótica. Mais precisamente, a função de Melnikov é o termo de primeiro grau da expansão em série de Taylor da distância entre $W_\epsilon^s(0_\epsilon)$ e $W_\epsilon^u(0_\epsilon)$ (Figura 1.8).

Podemos agora enunciar o Teorema de Melnikov.

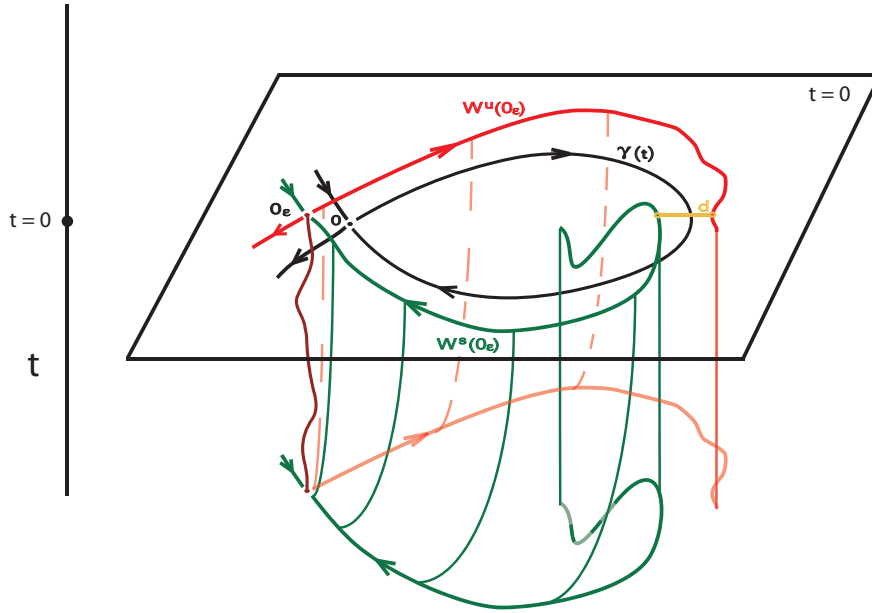


Figura 1.8: $\gamma(t)$, $W^s(0_\varepsilon)$ e $W^u(0_\varepsilon)$.

Teorema 1.12 (O Teorema de Melnikov)

Se a função de Melnikov tem um zero simples em t_0 , isto é, $M(t_0) = 0$ e $\frac{\partial M}{\partial t}(t_0) \neq 0$, então, para todo ε suficientemente pequeno, $W^u(0_\varepsilon)$ e $W^s(0_\varepsilon)$ se cruzam transversalmente.

Se a função de Melnikov não possui zeros, então $W^u(0_\varepsilon) \cap W^s(0_\varepsilon) = \emptyset$.

Uma demonstração para esse resultado pode ser encontrado em [8].

A função de Melnikov mede a separação das variedades estável e instável do ponto fixo hiperbólico. Logo, quando ela se anula temos uma interseção homoclínica transversal.

1.2 Sistemas Hamiltonianos

Os sistemas hamiltonianos definem uma classe de sistemas dinâmicos que ocorrem em uma ampla variedade de circunstâncias. As propriedades das equações de Hamilton dotam estes sistemas com atributos que diferem qualitativamente e fundamentalmente de outros sistemas, por exemplo, os sistemas hamiltonianos não possuem atratores e as curvas de nível da hamiltoniana contém soluções do sistema [6], [9] e [10]. Existem vários exemplos de dinâmica Hamiltoniana, como acontece

em sistemas mecânicos na ausência de atrito. Além disso eles aparecem em [6], [7], e [8], estreitamente ligados ao método de Melnikov, pois, em sistemas hamiltonianos é possível definir mais facilmente a função de Melnikov e ainda, como o $\nabla \cdot f \equiv 0$, a função de Melnikov assume uma forma simplificada,

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt, \text{ pois, } \nabla \cdot f(\gamma_0(s)) = 0.$$

Em uma de nossas aplicações trabalharemos com um sistema hamiltoniano, em um problema envolvendo o movimento da lua, onde estudar a possibilidade do surgimento de uma dinâmica caótica, é uma questão importante.

Nesta seção, veremos alguns resultados e definições básicas de sistemas hamiltonianos, que podem ser encontrados na literatura em [6].

Definição 1.13 *Seja $\mathbf{E}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e seja $H \in C^2(\mathbf{E} \times \mathbb{R})$ onde, $H = H(x, y, t)$ com $x, y \in \mathbb{R}^n$. Um sistema da forma:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (1.4)$$

onde

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T$$

é dito um **Sistema Hamiltoniano** com grau de liberdade n sobre $\mathbf{E}$.

As equações de (1.4) são conhecidas como as **equações de Hamilton**.

Em alguns casos pode acontecer da função hamiltoniana não possuir dependência explícita do tempo, nestes casos definimos:

Definição 1.14 *Um sistema hamiltoniano definido por uma hamiltoniana onde,*

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0,$$

é dito um sistema hamiltoniano autônomo.

Exemplo 1.15 A função hamiltoniana com grau de liberdade $n = 2$,

$$H(x, y) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{2} \quad (1.5)$$

define o seguinte sistema hamiltoniano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_1 = -x_1 \\ \dot{y}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Observação 1.16 É comum identificarmos o valor da Hamiltoniana com o valor da energia total do sistema, pois a energia total de um sistema independente do tempo é conservada.

Teorema 1.17 (Conservação de Energia) A energia total $H(x, y)$ do Sistema Hamiltoniano autônomo permanece constante ao longo de suas trajetórias (soluções).

Demonstração: Pela regra da cadeia, da derivada total da função Hamiltoniana, $H(x, y, t)$, ao longo de uma trajetória $x(t), y(t)$ de (1.4):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Das equações de Hamilton temos:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) \text{ pois } \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Portanto,

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Assim, $H(x, y)$ é constante ao longo de uma curva solução de um sistema hamiltoniano autônomo e consequentemente, as trajetórias do sistema se encontram sobre os conjuntos de nível $H(x, y) = \text{constante}$, o que conclui nossa demonstração.

No exemplo da aplicação do método clássico de Melnikov, que iremos apresentar no final deste primeiro capítulo, o sistema com o qual iremos trabalhar possui dimensão dois, então, iremos estabelecer alguns resultados específicos sobre a natureza de pontos críticos de sistemas hamiltonianos com um grau de liberdade.

Inicialmente, perceba que os pontos de equilíbrio (pontos críticos) do sistema hamiltoniano, coincidem com os pontos críticos da função hamiltoniana $H(x, y)$, de fato:

O sistema hamiltoniano é definido como em (1.4), ou ainda, na forma,

$$\dot{X} = F(X), \text{ onde, } F(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right).$$

Logo, temos um ponto crítico do sistema quando $F(X) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right) = (0, 0)$, ou seja, quando, $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$, o que é equivalente a dizer que $\text{grad}(H) = 0$.

Portanto, pontos críticos do sistema, coincidem com pontos críticos da hamiltoniana.

Definição 1.18 *Um ponto crítico, x_0 , do sistema $\dot{x} = f(x)$, no qual $Df(x_0)$ não tem autovalores nulos, é dito um ponto crítico não degenerado e, caso contrário, x_0 é dito um ponto crítico degenerado.*

Quando pensamos em aplicar o método de Melnikov estamos trabalhando com pontos críticos não degenerados, pois, qualquer ponto crítico não degenerado de um sistema planar ou é um ponto crítico hiperbólico do sistema ou um centro do sistema linearizado.

Teorema 1.19 *Qualquer ponto crítico não degenerado de um sistema hamiltoniano analítico ou é uma sela ou é um centro. Além disso, (x_0, y_0) é uma sela do sistema, se for uma sela da função hamiltoniana $H(x, y)$. E, (x_0, y_0) , será um centro do sistema se for um máximo (ou mínimo) local e estrito da função $H(x, y)$.*

Demonstração: Seja p um ponto crítico do sistema. Assim,

$$H_x(p) = H_y(p) = 0$$

e como o sistema é analítico podemos expandir H em torno do ponto crítico. Daí,

$$\dot{x} = Ax \quad (1.6)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} H_{yx}(p) & H_{yy}(p) \\ -H_{xx}(p) & -H_{xy}(p) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Como $H \in C^2(\mathbf{E})$, $tr(A) = 0$.

Como, por hipótese, estamos trabalhando com um ponto crítico não degenerado, temos $\det(A) \neq 0$.

- Se $\det(A) = H_{xx}(p).H_{yy}(p) - H_{xy}(p)^2 < 0$ então p é um ponto de sela da função Hamiltoniana H e também uma sela para de (1.6). Porém, p é um ponto de sela de (1.6) se, e somente se, for um ponto de sela de (1.4). Logo, se p é um ponto de sela para a função Hamiltoniana, então p é um ponto de sela do sistema (1.4).
- Por outro lado, se $\det(A) = H_{xx}(p).H_{yy}(p) - H_{xy}(p)^2 > 0$, uma vez que $tr(A) = 0$, a origem é um centro do sistema (1.6) (Ver [6], seção 1.5). Logo, a origem ou é um centro ou é um foco para (1.4) (Ver [6], seção 2.10). Como estamos supondo $\det(A) > 0$, a função Hamiltoniana tem um extremo local estrito em p , logo, pelo lema acima, a origem não é um foco do sistema (1.4), ou seja, a origem é um centro para o sistema Hamiltoniano (1.4).

1.3 Um exemplo do método clássico de Melnikov.

Considere o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(\mu \cos t - 2, 5y) \end{aligned}$$

ou na forma vetorial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ x - x^3 \end{bmatrix}}_{f(x,y)} + \varepsilon \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mu \cos t - 2, 5y \end{bmatrix}}_{g(x,y,t)}.$$

Na forma vetorial podemos facilmente identificar que

$$f(x, y) = (y, x - x^3) \text{ e } g(x, y, t) = (0, \mu \cos t - 2, 5y).$$

Notemos que f e g são aplicações de classe C^2 e que g é periódica na variável t . Para que este sistema atenda as condições necessárias para a aplicação do método de Melnikov, resta encontrarmos para o sistema na forma não perturbada um ponto de sela hiperbólico com uma órbita homoclínica associada.

O sistema não perturbado, ou seja, quando $\varepsilon = 0$, é um sistema hamiltoniano dado pela hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Na seção anterior, vimos que $p \in \mathbb{R}^2$ é uma sela do sistema hamiltoniano, se p for uma sela da hamiltoniana. Daí, calculamos:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{vmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{yx} & H_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x^2 - 1.$$

e daí, $\mathcal{H}(0, 0) = -1$, isto é, $(0, 0)$ é uma sela da hamiltoniana e consequentemente é uma sela do sistema hamiltoniano.

Vimos também, na seção anterior, que as soluções do sistema hamiltoniano estão contidas nas curvas de nível da função hamiltoniana (Figuras 1.9 e 1.10).

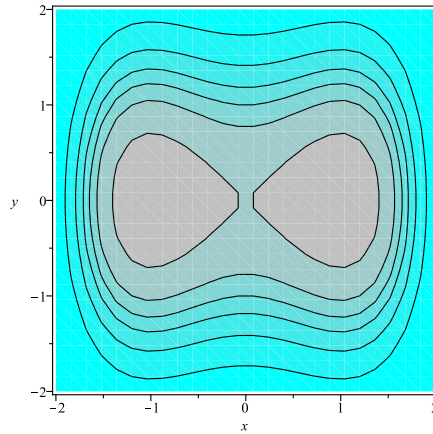


Figura 1.9: As curvas de nível da Hamiltoniana H (Maple 12).

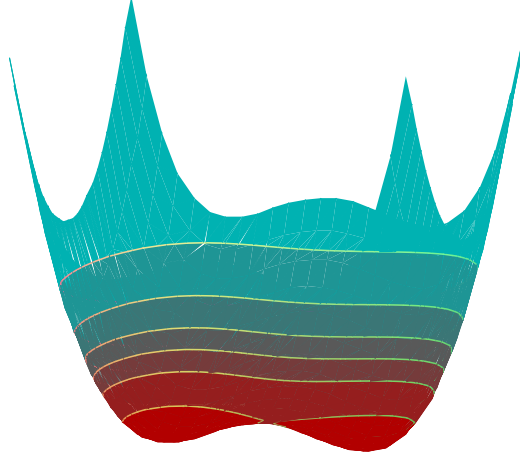


Figura 1.10: As curvas de nível da Hamiltoniana H (*Maple 12*).

Note que, neste caso, a curva de nível dada por $H(x, y) = 0$, define duas soluções homoclínicas do nosso sistema hamiltoniano (Figura 1.11), a saber:

$$\Gamma_0^\pm : \gamma_0^\pm(t) = \pm(\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t))^T.$$

Agora, o nosso sistema já atende a todas as hipóteses. Podemos então, aplicar o método clássico de Melnikov, para sabermos se existe, para $\varepsilon > 0$, o surgimento de uma dinâmica caótica.

Como na forma não perturbada estamos trabalhando com um sistema hamiltoniano, a nossa função de Melnikov é simplificada.

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(t)) \wedge g(\gamma_0(t), t + t_0) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t), \sqrt{2}\operatorname{sech}(t) - 2\sqrt{2}\operatorname{sech}^3(t) \right) \wedge \\ &\quad \left(0, \mu \cos(t + t_0) + \frac{5\sqrt{2}}{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t) \right) dt = \end{aligned}$$

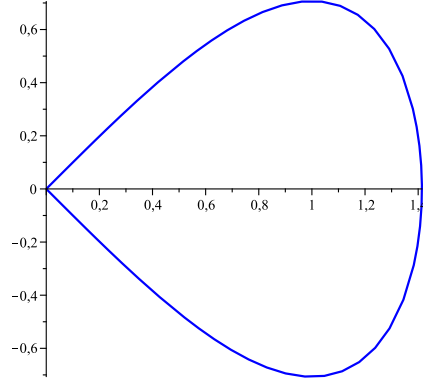


Figura 1.11: Γ_0^+ (*Maple 12*).

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right) \left(\mu \cos(t + t_0) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right) dt = \\
&= -\sqrt{2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \cos(t + t_0) dt - \frac{5\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt.
\end{aligned}$$

A primeira integral pode ser resolvida pelo método de resíduos e a segunda através de uma mudança de variável simples. Sendo assim, temos

$$M(t_0) = \sqrt{2}\mu\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\sin t_0 - \frac{k_0}{\mu} \right),$$

$$\text{onde } k_0 = \frac{10 \cosh(\frac{\pi}{2})}{\sqrt{2}\pi 3} \simeq 1,88.$$

Logo se, $\mu > k_0 > 0$, $M(t_0)$ tem um zero simples e pelo teorema de Melnikov $W_\varepsilon^s(p_\varepsilon)$ e $W_\varepsilon^u(p_\varepsilon)$, onde p_ε é o ponto p após a perturbação, se intersectam transversalmente e dessa forma temos o surgimento de uma dinâmica caótica.

Capítulo 2

O Método de Melnikov-Gruendler

O método de Melnikov-Gruendler (MMG) é uma generalização do método clássico de Melnikov para sistemas dinâmicos com dimensões maiores. Neste capítulo apresentaremos a construção da função de Melnikov para $n > 2$, proposta pelo matemático *Joseph Gruendler* em [11] e que também pode ser encontrado em [12] e [13]. Uma outra visão para o estudo pode ser encontrada em [14].

Enunciaremos e provaremos o teorema desenvolvido por Gruendler que nos dá uma condição suficiente para que as variedades estável e instável do sistema homoclínico perturbado (SHP) se intersectem. Por fim mostraremos que o método clássico de Melnikov é um caso particular do MMG.

O método de Melnikov-Gruendler (MMG) será aplicado em um tipo especial de sistema dinâmico, que definimos neste momento.

Definição 2.1 *Um Sistema Homoclínico Perturbado, S.H.P., é um sistema dinâmico da forma*

$$\dot{x} = f(x) + h(x, t, \varepsilon), \text{ tal que:} \quad (2.1)$$

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^2 e $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^2 , onde $B_\delta \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola de raio δ centrada na origem;
- A aplicação h é periódica em t com frequência ω e $h(0, t, \varepsilon) = h(x, t, 0) = 0$,
- O sistema não perturbado, ou seja, quando temos $\varepsilon = 0$ em (2.1), tem um ponto de equilíbrio de sela na origem e possui uma órbita homoclínica associada a este ponto de sela.

Denotemos por $W^s, W^u \subset \mathbb{R}^n$ as variedades estável e instável, respectivamente, da origem do sistema não perturbado, $\dot{x} = f(x)$, sendo $d_s = \dim(W^s)$, $d_u = \dim(W^u)$.

Podemos considerar o nosso sistema na forma

$$\dot{x} = F(x, t, \varepsilon), \text{ onde}$$

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t, \varepsilon) \mapsto f(x) + h(x, t, \varepsilon) \text{ é uma aplicação } T\text{-periódica em } t.$$

Consideremos a mudança $\xi = 2\pi\omega t \Leftrightarrow t = \frac{\xi}{2\pi\omega}$, onde $\omega = \frac{1}{T}$. Logo, temos o seguinte sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \xi, \varepsilon) \\ \dot{\xi} = 2\pi\omega \\ x(t_0) = x_0 \\ \xi(t_0) = \xi_0 \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde $F(x, \xi, \varepsilon)$ é 2π -periódica em ξ . Assim, ficamos motivados a definir

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, \bar{\xi}, \varepsilon) \mapsto F(x, \bar{\xi}, \varepsilon), \text{ onde } \bar{\xi} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \equiv \xi \pmod{2\pi}\}.$$

Fazendo a identificação entre todos os planos $\mathbb{R}^n \times \{\alpha\}$, com $\alpha \in \bar{\xi}$, como o mesmo plano $\Sigma = \mathbb{R}^n \times \{\xi\}$ e definindo o difeomorfismo

$$\Phi : \Sigma \rightarrow \Sigma \\ (x_0, \xi_0) \mapsto (\varphi(t_0 + T, x_0), \xi_0 + 2\pi),$$

onde $\varphi(t, x)$ é uma solução de $\dot{x} = F(x, \xi, \varepsilon)$, estamos identificando o espaço de fase com um cilindro (Figura 2.1).

Com essa identificação, a origem, ponto de equilíbrio do sistema (2.1), se torna uma órbita periódica sobre o cilindro $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$.

Podemos agora definir as variedades estável e instável desta órbita periódica

$$\hat{W}_\varepsilon^s = \left\{ (x, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \left| \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x, \xi, \varepsilon) = 0 \right. \right\}, \\ \hat{W}_\varepsilon^u = \left\{ (x, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \left| \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x, \xi, \varepsilon) = 0 \right. \right\},$$

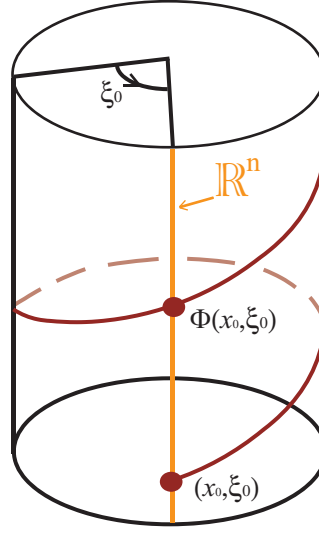


Figura 2.1: O espaço de fase identificado com um cilindro $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$.

onde $\phi(t, x, \xi, \varepsilon)$ é uma solução de (2.2) que passa pelo ponto (x, ξ) do cilindro em algum instante t .

Fixando $\bar{\xi}$ na definição acima podemos definir seções destas variedades.

$$W_\varepsilon^s(\bar{\xi}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x, \xi, \varepsilon) = 0 \right\}.$$

$$W_\varepsilon^u(\bar{\xi}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x, \xi, \varepsilon) = 0 \right\}.$$

Fazendo a identificação de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n \times \{\bar{\xi}\}$, onde cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ corresponde a $(x_1, \dots, x_n, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \{\bar{\xi}\}$, podemos relacionar os conjuntos que definimos acima da seguinte forma

$$W_\varepsilon^s(\bar{\xi}) = \hat{W}_\varepsilon^s \cap (\mathbb{R}^n \times \{\bar{\xi}\}), \quad W_\varepsilon^u(\bar{\xi}) = \hat{W}_\varepsilon^u \cap (\mathbb{R}^n \times \{\bar{\xi}\}).$$

Com essa notação podemos escrever

$$W^s = W_0^s(\bar{\xi}) \text{ para todo } \xi, \quad W^u = W_0^u(\bar{\xi}) \text{ para todo } \xi.$$

Por hipótese, sabemos que W^s e W^u se intersectam. A pergunta que fazemos é se $\hat{W}_\varepsilon^s$ e $\hat{W}_\varepsilon^u$ se intersectam. Então, vamos definir uma função que responda a esta pergunta, isto é, que nos diga se $\hat{W}_\varepsilon^s$ e $\hat{W}_\varepsilon^u$ se intersectam, e quando isso acontece.

Definição 2.2 *Seja $P \in W^s \cap W^u$ e $d_b = \dim(T_P W^s \cap T_P W^u) = \text{codim}(T_P W^s + T_P W^u)$.*

*Uma **função de Melnikov** para um S.H.P. é uma aplicação de classe C^1*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{S}^1 \times B_\delta &\rightarrow \mathbb{R}^{d_b} \\ (\bar{\xi}, \varepsilon) &\mapsto \Delta(\bar{\xi}, \varepsilon), \end{aligned}$$

que possui a seguinte propriedade:

$\Delta(\bar{\xi}, \varepsilon) = 0$ para algum $(\bar{\xi}, \varepsilon) \in \mathbb{S}^1 \times B_\delta$ se, e somente se, $W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ e $W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$ se intersectam.

Vale notar que a função de Melnikov para o MMG não é uma função real, ao contrário do caso clássico, e que d_b , a dimensão do contra-domínio, é igual ao número de direções transversais a $W^s \cap W^u$.

Para $\bar{\xi}$ fixado, uma função de Melnikov mede a distância entre as variedades estável e instável do sistema perturbado. Para podermos encontrar uma expressão para a função de Melnikov precisamos conseguir acompanhá-las. O próximo resultado nos mostra uma maneira de fazermos este acompanhamento, através de certos pontos sobre W_ε^s e W_ε^u .

Teorema 2.3 *Sejam $P_1 \in W^s$, $P_2 \in W^u$ e*

$$\dot{x} = f(x) + h(x, t, \varepsilon), \quad \text{um S.H.P.} \quad (2.3)$$

Fixado ξ , seja Π^+ um hiperplano de dimensão d_u no $\mathbb{R}^n$, transverso a W^s em P_1 .

Então, para $\|\varepsilon\|$ suficientemente pequeno, Π^+ intersecta $W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ em um ponto $q^+(\bar{\xi}, \varepsilon)$, onde q^+ é C^1 em $(\bar{\xi}, \varepsilon)$ e $q^+(\bar{\xi}, \varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Analogamente, para o ξ fixado, teremos um hiperplano Π^- de dimensão d_s e transverso a W^u em P_2 , definindo um ponto $q^-(\bar{\xi}, \varepsilon) \in W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$.

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrado em [11].

O próximo passo será encontrar q^+ e q^- para um ponto $P \in W^s \cap W^u$ e construir uma função de Melnikov a partir da sua propriedade, ou seja, iremos construir uma função Δ que se anule quando $q^+ = q^-$. Vamos fazer isso de tal maneira que Δ seja facilmente obtida da perturbação h . Para tanto o próximo teorema, onde $q^\pm(\bar{\xi}, \varepsilon)$ representa $q^+(\bar{\xi}, \varepsilon)$ ou $q^-(\bar{\xi}, \varepsilon)$, apresenta uma importante contribuição.

Teorema 2.4 *Considere o S.H.P. e sejam $B_{\delta_2} \subset \mathbb{R}^N$, $q^\pm : \mathbb{S}^1 \times \bar{B}_{\delta_2} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 que associa $(\bar{\xi}, \varepsilon) \mapsto q^\pm(\bar{\xi}, \varepsilon)$ com $q^\pm(\bar{\xi}, \varepsilon) \in W_\varepsilon^{s,u}(\bar{\xi})$. Sejam $Dq^\pm$ representando a derivada de $q^\pm$ com relação a ε e $t \mapsto \gamma(t, \bar{\xi}, \varepsilon)$ a solução do S.H.P. satisfazendo $\gamma(\xi, \bar{\xi}, \varepsilon) = q^\pm(\bar{\xi}, \varepsilon)$. Então*

i) γ é C^1 em $\varepsilon = 0$.

ii) Seja $D\gamma$ a derivada de γ em relação a ε . Então $t \mapsto D\gamma(t, \bar{\xi}, 0)$ satisfaz a equação variacional não homogênea, isto é,

$$\dot{U}(t) = Df(\gamma(t, \bar{\xi}, 0))U(t) + D_1h(\gamma(t, \bar{\xi}, 0), t, 0)U(t) + D_3h(\gamma(t, \bar{\xi}, 0), t, 0),$$

$$U(\xi) = Dq^\pm(\bar{\xi}, 0).$$

iii) Defina R_γ por

$$\gamma(t, \bar{\xi}, \varepsilon) = \gamma(t, \bar{\xi}, 0)\varepsilon + D\gamma(t, \bar{\xi}, 0)\varepsilon + R_\gamma(t, \bar{\xi}, \varepsilon).$$

Então existe uma constante $\alpha > 0$ e uma função $M : B_\delta \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, onde $M(0) = 0$ e tal que

$$\|R_\gamma(t, \bar{\xi}, \varepsilon)\| \leq \|\varepsilon\| M(\varepsilon) e^{-\alpha(t-\xi)} \quad \text{para todo } t \geq \xi.$$

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrado em [11]. Se pensarmos na curva γ , do teorema acima, como a órbita que para $\varepsilon = 0$ passa pelo ponto $P \in W^s \cap W^u$, em um determinado instante t , concluímos que, para ε suficientemente pequeno, as órbitas através de q^+ e q^- estão próximas a γ , uma vez que γ é de classe C^1 em ε .

Até o presente momento, sabemos que precisamos encontrar os pontos q^+ e q^- para podermos acompanhar o desenvolvimento das variedades estável e instável, respectivamente. Porém, ainda não está claro como faremos para determinar os planos Π^+ e Π^- . No caso clássico, na bibliografia consultada [7] e [8], consideramos sistemas hamiltonianos e neste caso, pelas propriedades geométricas deste tipo de sistema, temos que a reta na direção do gradiente da função hamiltoniana é transversal a $W^s \cap W^u$ em P e assim, com o auxílio de Teorema 2.3, determinamos q^+ e q^- . Como estamos trabalhando com um sistema que não é necessariamente hamiltoniano, perdemos tal propriedade, porém a definição que segue nos permitirá definir vetores que gerarão tais planos.

Definição 2.5 *A equação*

$$\dot{u}(t) = Df(\gamma(t))u(t)$$

é chamada de equação variacional ao longo da curva γ .

Uma vez que γ é solução de $\dot{x} = f(x)$, segue diretamente da definição e da regra da cadeia, que $\dot{\gamma}(t)$ é uma solução da equação variacional ao longo da curva γ . Tal equação, possui um conjunto de n soluções linearmente independentes, $\{\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)\}$, que chamamos de **conjunto de soluções fundamentais**. Entretanto, estamos procurando um conjunto de soluções fundamentais que detenham certas propriedades:

- $\psi^n(t) = \dot{\gamma}(t)$;
- Os vetores iniciais $\psi^i(0)$ geram certos espaços vetoriais;
- Existem $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de acordo com a multiplicidade algébrica dos autovalores de $Df(0)$ tais que $\psi^i(t) \rightarrow t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i$ quando $t \rightarrow +\infty$, para algum inteiro positivo k_i , e algum vetor v_i ;
- Existe uma permutação, σ , sobre os índices n e vetores $\bar{v}_i$, tais que, $\psi^i(t) \rightarrow t^{k_{\sigma(i)}} e^{\lambda_{\sigma(i)} t} \bar{v}_i$ quando $t \rightarrow -\infty$;
- Os sinais de $\text{Re}(\lambda_i)$ e $\text{Re}(\lambda_{\sigma(i)})$ obedecem a certas condições.

Nas tabelas (2.4) e (2.5) estão as informações complementares sobre o conjunto de soluções fundamentais.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} T_p W^u \ni \\ T_p W^s \not\ni \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \psi^1(0) \\ \vdots \\ \psi^{d_u-d_b}(0) \end{array} \right\} \\
& \begin{array}{l} T_p W^u \not\ni \\ T_p W^s \not\ni \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \psi^{d_u-d_b+1}(0) \\ \vdots \\ \psi^{d_u}(0) \end{array} \right\} \\
& \begin{array}{l} T_p W^u \not\ni \\ T_p W^s \ni \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \psi^{d_u+1}(0) \\ \vdots \\ \psi^{n-d_b}(0) \end{array} \right\} \\
& \begin{array}{l} T_p W^u \ni \\ T_p W^s \ni \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \psi^{n-d_b+1}(0) \\ \vdots \\ \psi^n(0) \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$t \rightarrow -\infty$	$\psi^i(t)$	$t \rightarrow +\infty$	
$\sim t^{k_{\sigma(i)}} e^{\lambda_{\sigma(i)} t} \bar{v}_i,$ onde $Re(\lambda_{\sigma(i)}) > 0$	$\left\{ \begin{array}{c} \psi^1(t) \\ \vdots \\ \psi^{d_u-d_b}(t) \end{array} \right\}$	$\sim t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i,$ onde $Re(\lambda_i) > 0$	
$\sim t^{k_{\sigma(i)}} e^{\lambda_{\sigma(i)} t} \bar{v}_i,$ onde $Re(\lambda_{\sigma(i)}) < 0$	$\left\{ \begin{array}{c} \psi^{d_u-d_b+1}(t) \\ \vdots \\ \psi^{d_u}(t) \end{array} \right\}$	$\sim t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i,$ onde $Re(\lambda_i) > 0$	
$\sim t^{k_{\sigma(i)}} e^{\lambda_{\sigma(i)} t} \bar{v}_i,$ onde $Re(\lambda_{\sigma(i)}) < 0$	$\left\{ \begin{array}{c} \psi^{d_u+1}(t) \\ \vdots \\ \psi^{n-d_b}(t) \end{array} \right\}$	$\sim t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i,$ onde $Re(\lambda_i) < 0$	
$\sim t^{k_{\sigma(i)}} e^{\lambda_{\sigma(i)} t} \bar{v}_i,$ onde $Re(\lambda_{\sigma(i)}) > 0$	$\left\{ \begin{array}{c} \psi^{n-d_b+1}(t) \\ \vdots \\ \psi^n(t) \end{array} \right\}$	$\sim t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i,$ onde $Re(\lambda_i) < 0$	(2.5)

Note que:

- Os vetores $\psi^1(t), \dots, \psi^{d_u}(t)$, são transversos a W^s em $\gamma(t)$ enquanto que os vetores $\psi^{d_u-d_b+1}(t), \dots, \psi^{n-d_b}(t)$, são transversos a W^u em $\gamma(t)$.
- Para alguma n -forma Ω nós temos:

$$\Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)) \sim \Omega(v^1(t), \dots, v^n(t)) t^{k_1+\dots+k_n} e^{tr(DF(0))t} \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

$$\Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)) \sim \Omega(\bar{v}^1(t), \dots, \bar{v}^n(t)) t^{k_1+\dots+k_n} e^{tr(DF(0))t} \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

Por um instante, pode parecer que estamos restringindo demasiadamente o nosso conjunto solução. Porém, o teorema a seguir, nos garante a existência de um conjunto fundamental de soluções com todas estas propriedades.

Teorema 2.6 *A equação variacional ao longo de γ possui um conjunto fundamental de soluções $\{\psi^1, \dots, \psi^n\}$ satisfazendo as condições apresentadas em (2.4) e (2.5).*

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrado em [11].

Como os vetores $\psi^1, \dots, \psi^n$, são L.I's podemos considerar $\{\psi^1(0), \dots, \psi^n(0)\}$ como uma base para o $\mathbb{R}^n$. Além disso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\det(\psi^1(0), \dots, \psi^n(0)) = 1$. Dentre os vetores $\psi^1(0), \dots, \psi^n(0)$ daremos uma atenção especial a $\psi^i(0)$, $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$, vetores transversais a $W^s \cap W^u$ em P .

Seguem abaixo, duas observações que serão citadas posteriormente e resumem propriedades importantes de uma n -forma Ω .

Observação 2.7 *Uma vez que cada ψ^i é uma solução da equação variacional ao longo de γ e $\det(\psi^1(0), \dots, \psi^n(0)) = 1$, temos*

$$\Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)) = \exp \left(\int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) ds \right). \quad (2.6)$$

Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [2, p.56].

Observação 2.8 Se A é alguma transformação linear sobre o $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\sum_{i=1}^n \Omega(v_1, \dots, v_{i-1}, Av_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \text{Tr}(A) \Omega(v_1, \dots, v_n).$$

Estamos nos encaminhando para definirmos a nossa função de Melnikov. Segue abaixo a definição de um importante elemento na construção desta.

Definição 2.9 Seja $h_j(\gamma(t), t + \xi) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_j}(\gamma(t), t + \xi, 0)$, $j = 1, 2, \dots, N$, as derivadas parciais de h em relação a ε_j , aplicadas sobre a curva $\gamma(t)$, no instante $t + \xi$.

Definimos a aplicação $K_{ij}(t, \bar{\xi})$, para $1 \leq i \leq n - d_b$ e $1 \leq j \leq N$, sendo a função obtida ao substituirmos $\psi^i(t)$ por $h_j(\gamma(t), t + \xi)$ na expressão

$$\Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)) \cdot \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) ds \right), \text{ isto é,}$$

$$K_{ij}(t, \bar{\xi}) = \Omega(\psi^1(t), \dots, \underbrace{h_j(\gamma(t), t + \xi)}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, \psi^n(t)) \cdot \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) ds \right). \quad (2.7)$$

$K_{ij}(t, \bar{\xi})$ é a projeção na direção de $\psi^i(t)$ do vetor h_j , evoluindo ao longo de γ .

Podemos então, interpretar $K_{ij}(t, \bar{\xi})$, como a contribuição da variação de h em relação a ε_j , ao longo de γ , especificadamente, na direção do i -ésimo vetor da base $\{\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)\}$. Em particular, para $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$, temos o valor desta contribuição nas direções transversais a $W^s \cap W^u$ em P .

Definiremos a seguir um tipo particular de perturbação que usaremos constantemente no decorrer deste trabalho.

Definição 2.10 O S.H.P. tem uma perturbação transversal se, dado $\xi \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon \neq 0$, existem $t \in \mathbb{R}$ e inteiros p, q com $1 \leq p \leq d_u$ e $d_u - d_b + 1 \leq q \leq n - d_b$ tais que

$$\sum_{j=1}^N K_{pj}(t, \bar{\xi}) \varepsilon_j \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N K_{qj}(t, \bar{\xi}) \varepsilon_j \neq 0. \quad (2.8)$$

Em outras palavras, uma perturbação é dita transversal, quando esta perturba $W^s \cap W^u$, necessariamente, em pelo menos uma direção transversal.

Agora já estamos em condição de apresentar a nossa função de Melnikov-Gruendler. Esta será a função que usaremos para medir a distância entre $W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ e $W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$, e que será dada pela equação integral

$$\Delta_{ij}(\bar{\xi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(t, \bar{\xi}) dt, \quad (2.9)$$

para $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$ e $1 \leq j \leq N$. Note que, para i neste intervalo, $\psi^i(t) \notin T_P W^s$ e $\psi^i(t) \notin T_P W^u$. Logo, ψ^i exibe um crescimento exponencial quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Note que, se fixarmos, por exemplo, $\bar{\xi} = 0$, temos

$$\Delta_{ij}(\bar{0}) = - \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(t, 0) dt,$$

onde $K_{ij}(t, 0)$ é uma função sobre $\mathbb{R}$.

Se nos lembrarmos do significado geométrico de $K_{ij}(t, \bar{\xi})$ e da integral, veremos que $\Delta_{ij}(\bar{\xi})$ representa o quanto ε_j alterou a órbita $\gamma(t)$ na direção de $\psi^i(t)$, durante todo o processo $(-\infty$ a $+\infty)$. Note que estamos levando em consideração $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$, ou seja, estamos interessados apenas nas alterações causadas pela perturbação nas direções dos vetores que não pertencem a $T_P W^s$ e $T_P W^u$.

Quando $\Delta_{ij}(\bar{\xi}) = 0$, temos na prática que durante todo o processo, ε_j não alterou a órbita $\gamma(t)$ na direção de $\psi^i(t)$. Adiante, iremos mostrar que $\Delta_{ij}(\bar{\xi})$ é o quanto ε_j separou $W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ e $W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$ na direção de $\psi^i(t)$.

Sem perda de generalidade, assuma que $N \geq d_b$, ou seja, o número de parâmetros perturbacionais é maior que $\dim(T_P W^s \cap T_P W^u)$, e defina a matriz

$$A(\bar{\xi}) = [a_{ij}] \text{ por } a_{ij} = \Delta_{i+d_u-d_b, j},$$

e seja $\bar{A}(\bar{\xi})$ denotando a matriz quadrada de ordem d_b , formada pelas primeiras d_b colunas de $A(\bar{\xi})$. Note que, depois de uma possível renumeração dos ε'_j s, quando o posto da matriz $A(\bar{\xi})$ for d_b , teremos $\det(\bar{A}(\bar{\xi})) \neq 0$.

Chegamos agora ao principal resultado deste capítulo. O teorema abaixo nos garante, sob algumas hipóteses, a existência de um zero da função de Melnikov e consequentemente, a um ponto homoclínico transversal. Sugerimos que, simultaneamente à leitura desta demonstração, seja feita a leitura do *Capítulo 5*.

Teorema 2.11 *Suponha que $N \geq d_b$, que o S.H.P. tenha uma perturbação transversal, que $\bar{\xi}^*$ e ε^* satisfaçam $\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}(\bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = 0$ e que $\det(\bar{A}(\bar{\xi}^*)) \neq 0$.*

Então existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$, contendo zero e uma aplicação

$$\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^{d_b} \quad \text{tal que} \quad \alpha(0) = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_{d_b}^*)$$

e que o S.H.P. tenha um ponto homoclínico transversal quando

$$\varepsilon = s(\alpha_1(s), \dots, \alpha_{d_b}(s), \varepsilon_{d_b+1}^*, \dots, \varepsilon_N^*).$$

Demonstração: Como já vimos, para encontrarmos uma interseção homoclínica transversal de um S.H.P. é suficiente encontrarmos os valores que anulam uma dada função de Melnikov. Porém, para isso, se faz necessário acompanhar $W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ e $W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$. Para tal finalidade, iremos definir um plano transversal a W^s , em um ponto arbitrário $\gamma(t_0)$, sobre γ .

Considere o conjunto $\{u_1^+, \dots, u_{d_u}^+\}$ de vetores transversos a W^s em $\gamma(t_0)$, onde

$$u_i^+ = \psi^i(t_0) + \sum_{k=d_u+1}^n a_{ki}^+ \psi^k(t_0), \quad 1 \leq i \leq d_u, \quad (2.10)$$

para escalares arbitrários a_{ki}^+ .

Note que o vetor u_i^+ é a soma do vetor $\psi^i(t_0)$ com uma combinação linear de vetores transversais a W^s em $\gamma(t_0)$. Com esses vetores podemos gerar o plano $\Pi^+(t_0, a^+)$, transversal a W^s em $\gamma(t_0)$, e gerado pelos vetores u_i^+ . Analogamente definimos

$$u_i^- = \psi^i(t_0) + \sum_{k \in I_u} a_{ki}^- \psi^k(t_0), \quad d_u - d_b + 1 \leq i \leq n - d_b, \quad (2.11)$$

onde $I_u = \{1, 2, \dots, d_u - d_b\} \cup \{n - d_b + 1, \dots, n\}$ e assim podemos definir também o plano $\Pi^-(t_0, a^+)$, transverso a W^u em $\gamma(t_0)$, gerado pelos vetores u_i^- .

Pelo Teorema 2.3 os planos $\Pi^+(t_0, a^+)$ e $\Pi^-(t_0, a^-)$ determinam, respectivamente, os pontos

$$q^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) \in \Pi^+(t_0, a^+) \cap W_\varepsilon^s(\bar{t}_0 + \bar{\xi}_s), \quad q^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) \in \Pi^-(t_0, a^-) \cap W_\varepsilon^u(\bar{t}_0 + \bar{\xi}_u).$$

Então, o S.H.P tem uma solução homoclínica $t \rightarrow \gamma(t, \varepsilon)$, com $\gamma(t, 0) = \gamma(t)$ se, e somente se, $q^+ = q^-$, para algum $t_0, \bar{\xi}, a^\pm$.

Definimos Δ^+ e Δ^- por

$$\Delta^+ = q^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) - \gamma(t_0) = \sum_{i=1}^{d_u} \Delta_i^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) u_i^+, \quad (2.12)$$

$$\Delta^- = q^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) - \gamma(t_0) = \sum_{i=d_u-d_b+1}^{n-d_b} \Delta_i^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) u_i^-, \quad (2.13)$$

Note que, $\|\Delta^+\|$ é igual a distância entre W_ε^s e γ . Por outro lado, $\|\Delta^-\|$ é igual a distância entre W_ε^u e γ .

Se nós definimos $\Delta_i = \Delta_i^+ - \Delta_i^-$ para $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$, a condição $q^+ - q^- = 0$ se torna

$$\begin{aligned} F_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) &= \\ &= \Delta_i^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) - \sum_{k=d_u-d_b+1}^{n-d_b} a_{ik}^- \Delta_k^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) = 0, \quad 1 \leq i \leq d_u - d_b, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$F_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) = \Delta_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) = 0, \quad d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} F_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) &= \\ &= -\Delta_i^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) + \sum_{k=1}^{d_u} a_{ik}^+ \Delta_k^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) = 0, \quad d_u + 1 \leq i \leq n - d_b, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\sum_{k=1}^{d_u} a_{ik}^+ \Delta_k^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) - \sum_{k=d_u-d_b+1}^{n-d_b} a_{ik}^- \Delta_k^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) = 0, \quad n-d_b+1 \leq i \leq n. \quad (2.17)$$

Note que, (2.17) pode ser satisfeito tomando $a_{ij}^+ = a_{ij}^- = 0$, para todo $n-d_b+1 \leq i \leq n$, ou seja, podemos satisfazer (2.17) quando definimos os vetores u_i^+ , com $n-d_b+1 \leq i \leq n$. Pelo Teorema 2.3, $\Delta_i^\pm$ são funções de classe C^1 em relação a ε . Como $\Delta_i^\pm$ são diferenciáveis, podemos escrever

$$\Delta_i^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) = \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^\pm(t_0, \bar{\xi}) \varepsilon_j + R_i^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) \quad (2.18)$$

onde nós usamos "+" para $1 \leq i \leq d_u$ e "-" para $d_u-d_b+1 \leq i \leq n-d_b$ e $\|R_i^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm)\| < \|\varepsilon\| M_i^\pm(\varepsilon, a^\pm)$. De forma análoga, podemos escrever

$$\Delta_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) = \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}(\bar{\xi}) \varepsilon_j + R_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) \quad (2.19)$$

para $d_u-d_b+1 \leq i \leq d_u$. Obteremos uma fórmula explícita para $\Delta_{ij}^\pm$. Então, da definição de Δ_i , teremos $\Delta_{ij} = \Delta_{ij}^+ - \Delta_{ij}^-$.

Seja $t \rightarrow \gamma^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm)$, denotando a solução do S.H.P, satisfazendo $\gamma^\pm(t_0 + \xi, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) = q^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm)$. Note que, as curvas $\gamma^\pm$ intersectam $q^\pm$, para $t = t_0 + \xi$. Então, do Teorema 2.4, nós temos

$$\gamma^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) = \gamma(t - \xi) + \sum_{j=1}^N v_j^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) + R^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm), \quad (2.20)$$

onde $\|R^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm)\| \leq \|\varepsilon\| M^\pm(\varepsilon, a^\pm) e^{\mp\alpha(t-t_0-\xi)}$ e $v_j^\pm$ satisfaz

$$\dot{v}_j^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) = Df(\gamma(t - \xi)) v_j^\pm(t, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) + h_j(\gamma(t - \xi), t). \quad (2.21)$$

Substituindo $t = t_0 + \xi$ em (2.20), temos

$$q^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) = \gamma(t_0) + \sum_{j=1}^N v_j^\pm(t_0 + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) \varepsilon_j + R^\pm(t_0 + \xi, t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm). \quad (2.22)$$

Usando (2.10) a (2.13) e lembrando de (2.7), temos

$$\Delta_i^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) =$$

$$\Omega(\psi^1(t_0), \dots, \underbrace{q^\pm(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) - \gamma(t_0)}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, \psi^n(t_0)) \times \exp\left(-\int_0^{t_0} (\nabla \cdot f)(\gamma(t)) dt\right),$$

onde o intervalo de "+" e "-" são como em (2.18). Substituindo (2.22) neste resultado e comparando com (2.18), temos

$$\Delta_i^\pm(t_0, \bar{\xi}) =$$

$$\Omega(\psi^1(t_0), \dots, \underbrace{v_j^\pm(t_0 + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm)}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, \psi^n(t_0)) \times \exp\left(-\int_0^{t_0} (\nabla \cdot f)(\gamma(t)) dt\right)$$

onde, novamente, o intervalo de "+" e "-" são como em (2.18).

Nós agora definimos

$$\phi_{ij}^+(t) = \Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^{i-1}(t), v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \psi^{i+1}(t), \dots, \psi^n(t)) \quad (2.23)$$

de tal forma que

$$\Delta_{ij}^+(t_0, \bar{\xi}) = \phi_{ij}^+(t_0) \exp\left(-\int_0^{t_0} (\nabla \cdot f)(\gamma(t)) dt\right). \quad (2.24)$$

Diferenciando (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{ij}^+(t) &= \sum_{k=1}^{i-1} \Omega(\psi^1(t), \dots, \dot{\psi}^k(t), \dots, \psi^{i-1}(t), v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \psi^{i+1}(t), \dots, \psi^n(t)) + \\
&+ \sum_{k=i+1}^n \Omega(\psi^1(t), \dots, \psi^{i-1}(t), v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \psi^{i+1}(t), \dots, \dot{\psi}^k(t), \dots, \psi^n(t)) \\
&+ \Omega(\psi^1(t), \dots, \dot{v}_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)).
\end{aligned}$$

De (2.21) segue que

$$\begin{aligned}
&\Omega(\psi^1(t), \dots, \dot{v}_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) = \\
&= \Omega(\psi^1(t), \dots, Df(\gamma(t))v_j^\pm(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) + h_j(\gamma(t), t + \xi), \dots, \psi^n(t)) = \\
&= \Omega(\psi^1(t), \dots, Df(\gamma(t))v_j^\pm(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) + \\
&+ \Omega(\psi^1(t), \dots, h_j(\gamma(t), t + \xi), \dots, \psi^n(t)).
\end{aligned}$$

$$\text{onde, } \Omega(\psi^1(t), \dots, h_j(\gamma(t), t + \xi), \dots, \psi^n(t)) = K_{ij}(t, \bar{\xi}) \cdot \exp \left(+ \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right),$$

pela definição de K_{ij} .

Como cada um dos $\psi^{i's}$ é uma solução da equação variacional, temos

$$\dot{\psi}^i(t) = Df(\gamma(t))\psi^i(t).$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{ij}^+(t) &= \Omega(Df(\gamma(t))\psi^1(t), \dots, v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) \quad + \\
&\quad \vdots \\
&+ \Omega(\psi^1(t), \dots, Df(\gamma(t))v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) \quad + \\
&\quad \vdots \\
&+ \Omega(\psi^1(t), \dots, v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, Df(\gamma(t))\psi^n(t)) \quad + \\
&\quad + K_{ij}(t, \bar{\xi}) \cdot \exp \left(+ \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right).
\end{aligned}$$

e usando (2.8), temos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{ij}^+(t) &= \text{Traço}(Df(\gamma(t))) \cdot \Omega(\psi^1(t), \dots, v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) \quad + \\
&\quad K_{ij}(t, \bar{\xi}) \cdot \exp \left(+ \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right).
\end{aligned}$$

$$\text{onde, } \text{Traço}(Df(\gamma(t))) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\gamma(t)) = (\nabla \cdot f)(\gamma(t)) \quad \text{e}$$

$$\Omega(\psi^1(t), \dots, v_j^+(t + \xi, t_0, \bar{\xi}, a^\pm), \dots, \psi^n(t)) = \phi_{ij}^+(t).$$

Portanto,

$$\dot{\phi}_{ij}^+(t) = (\nabla \cdot f)(\gamma(t)) \phi_{ij}^+(t) + K_{ij}(t, \bar{\xi}) \exp \left(\int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right).$$

Temos então uma equação diferencial ordinária de primeira ordem para ϕ_{ij}^+ . Usando um fator integrante temos

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^+(t) \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right) &= \\ &= \phi_{ij}^+(t_0) \exp \left(- \int_0^{t_0} (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right) + \int_{t_0}^t K_{ij}(s, \bar{\xi}) \, ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Note que:

1. Em (2.25), $1 \leq i \leq d_u$, de modo que $\text{Re}(\lambda_i) > 0$.
2. De (2.20), $v_j(t, t_0, \bar{\xi}, a^\pm) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.
3. Usando (2) e (2.17) quando $t \rightarrow +\infty$, o comportamento assintótico de $\phi_{ij}^+(t)$ é um fator que vai a zero multiplicado por $\exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n)t)$.
De fato. Como $\psi^i(t) \sim t^{k_i} e^{\lambda_i t} v_i$ quando $t \rightarrow +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^+(t) &\sim \Omega(t^{k_1} e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, t^{k_{i-1}} e^{\lambda_{i-1} t} v_{i-1}, v_j, t^{k_{i+1}} e^{\lambda_{i+1} t} v_{i+1}, \dots, t^{k_n} e^{\lambda_n t} v_n) = \\ &= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n)t} \cdot \underbrace{t^{k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i+1} + \dots + k_n} \cdot \Omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}_{\rightarrow 0, \text{ pois, } v_j \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty}. \end{aligned}$$

4. Quando $t \rightarrow +\infty$, o comportamento assintótico de $\exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right)$ é $\exp(-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t)$.

De fato,

$$\exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) ds \right) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_1 + \dots + \lambda_n ds \right) = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}.$$

pois o traço de um operador independe da matriz que o represente.

A partir dessas observações, podemos concluir que o primeiro membro da equação (2.25) vai a zero quando $t \rightarrow +\infty$, pois, no infinito

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^+(t) \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right) &\sim \\ e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_n)t} &\underbrace{t^{k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i+1} + \dots + k_n} \Omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}_{\rightarrow 0, \text{ pois, } v_j \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.} \\ &= e^{-\lambda_i t} \underbrace{t^{k_1 + \dots + k_{i-1} + k_{i+1} + \dots + k_n} \cdot \Omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)}_{\rightarrow 0, \text{ pois, } v_j \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.} \end{aligned}$$

Por (1) $\text{Re}(\lambda_i) > 0$. Logo,

$$\phi_{ij}^+(t) \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \, ds \right) \rightarrow 0, \text{ quando, } t \rightarrow +\infty.$$

Da mesma forma $K_{ij}(t, \bar{\xi})$ é majorado por $e^{-\lambda_i t}$ quando $t \rightarrow +\infty$. Logo, K_{ij} é integrável de t_0 a $+\infty$.

Além disso, fazendo $t \rightarrow \infty$ em (2.25), e usando (2.24), temos:

$$\Delta_{ij}^+(t_0, \bar{\xi}) = - \int_{t_0}^{\infty} K_{ij}(t, \bar{\xi}) \, dt, \quad 1 \leq i \leq d_u.$$

Analogamente

$$\Delta_{ij}^-(t_0, \bar{\xi}) = \int_{-\infty}^{t_0} K_{ij}(t, \bar{\xi}) \, dt, \quad d_u - d_b + 1 \leq i \leq n - d_b.$$

Considerando, $d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u$, e fazendo $\Delta_{ij}^+(t_0, \bar{\xi}) - \Delta_{ij}^-(t_0, \bar{\xi})$, temos:

$$\Delta_{ij}(\bar{\xi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(t, \bar{\xi}) \, dt, \quad d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u. \quad (2.26)$$

Dessa maneira, a parte ε – linear da equação $F(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+, a^-) = 0$ se torna

$$\bar{F}_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^-) = \sum_{j=1}^N \left[\Delta_{ij}^+(t_0, \bar{\xi}) - \sum_{k=d_u-d_b+1}^{n-d_b} a_{ik}^- \Delta_{kj}^-(t_0, \bar{\xi}) \right] \varepsilon_j = 0, \quad 1 \leq i \leq d_u - d_b, \quad (2.27)$$

$$\bar{F}(\bar{\xi}, \varepsilon) = \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}(\bar{\xi}) \varepsilon_j = 0, \quad d_u - d_b + 1 \leq i \leq d_u, \quad (2.28)$$

$$\bar{F}_i(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^+) = \sum_{j=1}^N \left[-\Delta_{ij}^-(t_0, \bar{\xi}) + \sum_{k=1}^{d_u} a_{ik}^+ \Delta_{kj}^+(t_0, \bar{\xi}) \right] \varepsilon_j = 0, \quad d_u + 1 \leq i \leq n - d_b, \quad (2.29)$$

Por hipótese, temos que existe $(\bar{\xi}^*, \varepsilon^*) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}(\bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = 0$.

Logo, (2.28) está satisfeita.

Por hipótese o S.H.P. tem uma perturbação transversal, sendo assim, dado $\bar{\xi}^*$ e ε^* , existem $t_0 \in \mathbb{R}$, e inteiros p, q com $1 \leq p \leq d_u$ e $d_u - d_b + 1 \leq q \leq n - d_b$ tais que

$$\sum_{j=1}^N K_{pj}(t_0, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N K_{qj}(t_0, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* \neq 0.$$

Definamos

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*.$$

Segue que

$$\dot{\phi}(t_0) = \sum_{j=1}^N K_{pj}(t_0, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* \neq 0.$$

Sem perda de generalidade, consideremos $\dot{\phi}(t_0) > 0$.

Então, como $\dot{\phi}$ é contínua, segue que existe δ suficientemente pequeno tal que $\dot{\phi}(t) > 0$, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Este fato implicará que $\phi(t) \neq 0$, para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$.

Vejamos

- Se $\phi(t_0) \neq 0$ então $\phi(t) < 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ e $\phi(t) > 0$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \delta)$.
- Se $\phi(t_0) = 0$, como ϕ é contínua, $\phi(t) \neq 0$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Logo, $\phi(t) \neq 0$, $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $t \neq t_0$.

Portanto, existem $t_0^* \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\bar{\xi}^*, \varepsilon_j^*, p$ e q , tais que

$$\sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* \neq 0 \neq \sum_{j=1}^N \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*.$$

$$\text{Definindo } a_{ip}^+ = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*}{\sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*} \text{ e } a_{ij}^+ = 0 \text{ para todos os outros valores de } j,$$

$1 \leq j \leq d_u$, de (2.29), temos:

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(t_0^*, \bar{\xi}^*, \varepsilon_j^*, a^+) &= \sum_{j=1}^N [-\Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) - a_{ip}^+ \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*)] \varepsilon_j^* = \\ &= - \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* + a_{ip}^+ \sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = \\ &= - \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* + \left[\frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*}{\sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*} \right] \sum_{j=1}^N \Delta_{pj}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* + \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = 0.$$

Analogamente, definindo $a_{iq}^- = \frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*}{\sum_{j=1}^N \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*}$ e $a_{ij}^- = 0$ para todos os outros valores de j , $d_u - d_b + 1 \leq j \leq n - d_b$, temos

$$\begin{aligned} \bar{F}_i(t_0^*, \bar{\xi}^*, \varepsilon_j^*, a^-) &= \sum_{j=1}^N [\Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) - a_{iq}^- \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*)] \varepsilon_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* - a_{iq}^- \sum_{j=1}^N \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* - \left[\frac{\sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*}{\sum_{j=1}^N \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^*} \right] \sum_{j=1}^N \Delta_{qj}^-(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* - \sum_{j=1}^N \Delta_{ij}^+(t_0^*, \bar{\xi}^*) \varepsilon_j^* = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{F}_i(t_0^*, \bar{\xi}^*, \varepsilon_j^*, a^\pm) = 0$, ou seja, $q^+(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) - q^-(t_0, \bar{\xi}, \varepsilon, a^\pm) = 0$.

2.1 O Método clássico de Melnikov, n=2.

Nesta seção iremos mostrar que a função de Melnikov definida no primeiro capítulo é um caso particular da função de Melnikov-Gruendler construída na demonstração do Teorema 2.11, ou seja, vamos mostrar que ela atende a definição (2.2).

Consideremos o S.H.P.

$$\dot{x} = f(x) + h(x, t, \varepsilon), \text{ onde, } x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \varepsilon \in \mathbb{R}^N \quad (2.30)$$

e as mesmas definições e notações que usamos no segundo capítulo para a construção do caso geral.

Seja $\gamma(t)$ uma solução homoclínica para $\dot{x} = f(x)$ tal que $\gamma(t_0) = P \in W^s \cap W^u$.

Consideremos a equação variacional ao longo de γ ,

$$\dot{u}(t) = Df(\gamma(t))u(t)$$

e note que $\dot{\gamma}(t)$ é uma solução da equação variacional e $\dot{\gamma}(t_0)$ é um vetor tangente a curva γ em $\gamma(t_0) = P$. Denotaremos $\dot{\gamma} \equiv \psi_2$.

Seja $\psi_1(t)$ uma solução para a equação variacional, independente de $\dot{\gamma}$, ou seja, o vetor $\psi_1(t_0)$ é um vetor transversal a γ em $t = t_0$. Dessa maneira podemos definir uma base para o $\mathbb{R}^2$, a saber, $\{\psi_1(t_0), \psi_2(t_0)\}$ (Figura 2.2).

Podemos definir as retas r_+ e r_- que possuem como vetor diretor u^+ e u^- respectivamente, onde

$$u^+ = \psi_1(t_0) + a^+ \psi_2(t_0),$$

$$u^- = \psi_1(t_0) + a^- \psi_2(t_0).$$

Como os vetores u^+ e u^- são transversos a γ em $\gamma(t_0) = P \in W^s \cap W^u$, as retas r^+ e r^- são secantes a curva γ em $\gamma(t_0) = P$. Então, segue pelo Teorema 2.3 que as retas r^+ e r^- intersectam W_ε^s e W_ε^u em pontos $q^+(t_0, \varepsilon) = \Delta^+ u^+$ e $q^-(t_0, \varepsilon) = \Delta^- u^-$ respectivamente.

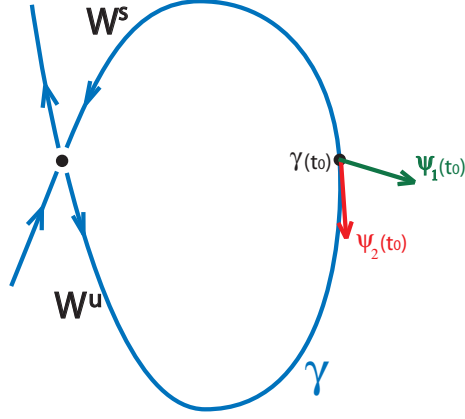


Figura 2.2: Os vetores $\{\psi_1(t_0), \psi_2(t_0)\}$, uma base para o $\mathbb{R}^2$.

A distância entre W_ε^s e W_ε^u definimos como segue

$$d(P, \varepsilon) = \|q^+(P, \varepsilon) - q^-(P, \varepsilon)\|.$$

Inicialmente note que, $d(P, \varepsilon) = 0$ quando $q^+(P, \varepsilon) - q^-(P, \varepsilon) = 0$ e daí, segue que

$$\Delta^+ u^+ - \Delta^- u^- = 0 \Rightarrow \Delta^+(\psi_1(t_0) + a^+ \psi_2(t_0)) - \Delta^-(\psi_1(t_0) + a^- \psi_2(t_0)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Delta^+ - \Delta^-) \psi_1(t_0) + (\Delta^+ a^+ - \Delta^- a^-) \psi_2(t_0) = 0.$$

Quando definimos os vetores $u^\pm$ os deixamos em função dos escalares $a^\pm$. Sendo assim, podemos escolher $a^\pm$ de maneira conveniente, como por exemplo $a^+ = a^- = 0$. Dessa forma temos que as retas $r_+ \equiv r_- \equiv r$ são coincidentes e daí, para termos $q^+(P, \varepsilon) - q^-(P, \varepsilon) = 0$ basta $\Delta^+ - \Delta^- = 0$, o que implica que a nossa função de Melnikov para $n = 2$ será uma função real. E isso garante que o contra-domínio da função de Melnikov é $\mathbb{R}_b^d$ com $d_b = \dim(T_P W^s \cap T_P W^u) = \text{codim}(T_P W^s + T_P W^u)$.

A partir de agora será conveniente trabalharmos da seguinte maneira:

$$d(P, \varepsilon) = (q^+(t_0, \varepsilon) - q^-(t_0, \varepsilon)) \cdot \frac{\psi_1(t_0)}{\|\psi_1(t_0)\|}.$$

ou seja, estamos projetando a separação das variedades estável e instável na direção do vetor $\psi_1(t_0)$.

Consideremos agora a expansão se Taylor de $d(P, \varepsilon)$ em torno de $\varepsilon = 0$

$$d(P, \varepsilon) = d(P, 0) + \varepsilon \frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(P, 0) + R(\varepsilon^2).$$

Por construção temos que $d(P, 0) = 0$ e

$$\frac{\partial d}{\partial \varepsilon}(P, 0) = \frac{\psi_1(t_0)}{\|\psi_1(t_0)\|} \cdot \left(\frac{\partial q^+}{\partial \varepsilon}(t_0, 0) - \frac{\partial q^-}{\partial \varepsilon}(t_0, 0) \right).$$

Definimos a função de Melnikov como sendo

$$M(t_0, \varepsilon) = \psi_1(t_0) \cdot \left(\frac{\partial q^+}{\partial \varepsilon}(t_0, 0) - \frac{\partial q^-}{\partial \varepsilon}(t_0, 0) \right).$$

Assim,

$$d(P, \varepsilon) = \varepsilon \frac{M(t_0, \varepsilon)}{\|\psi_1(t_0)\|} + R(\varepsilon^2).$$

Logo, para ε suficientemente pequeno

$$d(P, \varepsilon) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(t_0, \varepsilon) = 0.$$

Como já definimos, uma função de Melnikov é uma aplicação de classe C^1

$$\begin{aligned} M : \mathbb{S}^1 \times B_\delta &\rightarrow \mathbb{R}^{d_b} \\ (\bar{\xi}, \varepsilon) &\mapsto M(\bar{\xi}, \varepsilon), \end{aligned}$$

onde:

- (i) $d_b = \dim(T_P W^s \cap T_P W^u) = \text{codim}(T_P W^s + T_P W^u);$
- (ii) $\exists (\bar{\xi}, \varepsilon) \in \mathbb{S}^1 \times B_\delta$ tal que, $M(\bar{\xi}, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow W_\varepsilon^s(\bar{\xi})$ e $W_\varepsilon^u(\bar{\xi})$ se intersectam.

Portanto, a função de Melnikov clássica é contemplada pela definição dada por Gruendler.

Capítulo 3

O Método de Melnikov para perturbações não periódicas

Neste capítulo, apresentaremos uma técnica que nos permitirá estudar sistemas perturbados, por uma classe mais geral de funções perturbadoras [15].

Veremos que, para um intervalo de tempo finito $[-T, T]$, T suficientemente grande, o sistema perturbado é igual a um sistema caótico e concluiremos que, sendo a função perturbadora, periódica ou não, contanto que restrinjamos a dinâmica para um intervalo finito $[-T, T]$, poderemos utilizar o método de Melnikov.

O grande diferencial deste capítulo será o uso de funções cutoff (funções de corte) e extensões periódicas. Com essas ferramentas, seremos capazes de transformar uma função $g(x, t)$, não periódica, em uma função $\tilde{g}(x, t)$, periódica em t .

Considere o sistema dinâmico,

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

Assumiremos que f e g são C^r , $r \geq 2$, limitadas sobre conjuntos limitados, f é hamiltoniana, g não necessariamente periódica e que o sistema não perturbado, $\varepsilon = 0$, possui uma órbita homoclínica $\gamma(t)$, associada a um ponto de sela p_0 . Sem perda de generalidade tomaremos $p_0 = (0, 0)$.

Consideremos ainda as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad \|g(\gamma(t), t)\| < \alpha_1, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\gamma(t), t) \right\| < \alpha_2, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$(iii) \quad \|\nabla g(\gamma(t), t)\| < \alpha_3, \forall t \in \mathbb{R},$$

onde α_1, α_2 e α_3 , são constantes positivas.

Teorema 3.1 *Assumamos as condições acima para $f(x)$ e $g(x, t)$. Logo, se*

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t - t_0)) \wedge g(\gamma(t - t_0), t) dt \quad (3.3)$$

tem um zero simples para algum t_0 , então o fluxo do sistema (3.1) é, para $t \in (-T, T)$, com $T > 0$ tão grande quanto necessário, igual ao fluxo de um sistema caótico.

Observação 3.2 *A demonstração deste teorema será dividida em três partes.*

(i) *Consideraremos a aplicação g definida em um intervalo de tempo $(-T, T)$ e estenderemos g , usando funções cutoff C^∞ , a uma função periódica $\tilde{g}$. Em seguida definiremos o campo de vetores*

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \tilde{g}(x, t), \quad (3.4)$$

para o qual, o Método de Melnikov se aplica.

(ii) *Precisamos encontrar um valor suficientemente grande para T , de tal modo que $M(t_0) \approx \tilde{M}(t_0)$, onde $\tilde{M}(t_0)$ é a função de Melnikov do sistema (3.4). Sendo assim, um zero simples de M implica em um zero simples de $\tilde{M}$, que por sua vez, implica em comportamento caótico para o sistema periódico estendido.*

(iii) *Concluimos, então, que o sistema original, não periódico, é caótico durante um intervalo de tempo $(-T, T)$, arbitrariamente grande.*

Demonstração: Denotemos $x = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $X(x, t) = f(x) + \varepsilon g(x, t)$ e definamos o conjunto $D_L = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3, t \in (-L, L)\}$. Sendo $\delta \in \mathbb{R}_+$, considere a função $c : [-L - \delta, L + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , dada por:

$$t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } -L - \frac{\delta}{4} \leq t \leq L + \frac{\delta}{4} \\ 0 & \text{se } t \leq -L - \frac{3\delta}{4} \text{ ou } t \geq L + \frac{3\delta}{4} \\ 0 < c(t) < 1 & \text{se } -L - \frac{3\delta}{4} < t < -L - \frac{\delta}{4} \text{ ou } L + \frac{\delta}{4} < t < L + \frac{3\delta}{4} \end{cases}, \quad (3.5)$$

e tal que $|c'(t)| < \varrho$, para uma constante real ϱ . Denotemos por $\bar{g}(x, t)$ a restrição de $g(x, t)$ para o intervalo de tempo $I = (-L - \delta, L + \delta)$ e consideremos a função $\bar{g}(x, t)c(t) : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Essa função se estende como uma função t -periódica, de período $T = 2L + 2\delta$, de classe C^∞ , $\tilde{g}(x, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Figura 3.1).

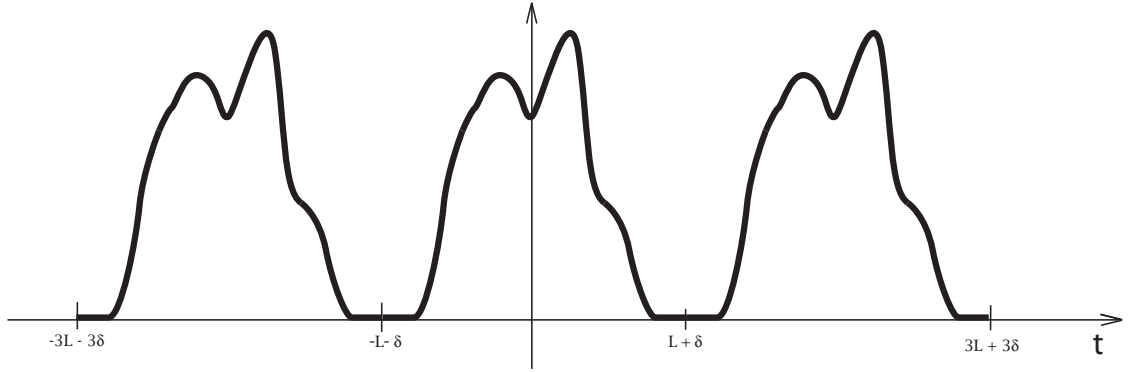


Figura 3.1: Evolução de $\tilde{g}(x, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ na variável t .

Definimos o campo de vetores C^r ,

$$\tilde{X}(x, t) = f(x) + \varepsilon \tilde{g}(x, t). \quad (3.6)$$

$\tilde{X}(x, t)$ é uma família a um parâmetro de campos de vetores C^r em $\mathbb{R}^3$, periódicos em t , com período $2L + 2\delta$. A família está parametrizada pelo parâmetro de perturbação ε , e por construção, temos que

$$\tilde{X}(x, t)|_{D_L} = X(x, t)|_{D_L}. \quad (3.7)$$

Como dissemos anteriormente, para um intervalo de tempo finito $[-T, T]$, com T suficientemente grande, poderemos utilizar o método de Melnikov, sendo a função perturbadora, periódica ou não, contanto que restrinjamos a dinâmica para um intervalo finito $[-T, T]$.

Precisamos encontrar um valor, grande o suficiente para $T = L + \delta$.

Vamos então, determinar este valor.

Denotamos por $\mathcal{O}_\mu \subset \mathbb{R}^2$ a bola de raio μ centrada na origem, para μ suficientemente pequeno, tal que a trajetória homoclínica é controlada por um comportamento exponencial quando $\gamma(t) \in \mathcal{O}_\mu$, ou seja, existem constantes $C_1, C_2, \Lambda_1, \Lambda_2 > 0$, tais que

$$\|\gamma(t)\| < C_1 e^{\Lambda_1 t}, \quad \text{quando } t > 0 \text{ e } \gamma(t) \in \mathcal{O}_\mu$$

e

$$\|\gamma(t)\| < C_2 e^{\Lambda_2 t}, \quad \text{quando } t < 0 \text{ e } \gamma(t) \in \mathcal{O}_\mu.$$

A existência de tais constantes segue do Teorema de Hartman-Grobman, uma vez que a origem é um ponto de sela.

$$\text{Seja } C = \max \left\{ \frac{C_1}{\Lambda_1}, \frac{C_2}{\Lambda_2} \right\}.$$

Consideremos t_0^* um zero transversal de M .

Seja η suficientemente pequeno, de tal modo que t_0^* é o único zero de M no intervalo $I = (t_0^* - \eta, t_0^* + \eta)$.

Sejam $m = \min\{|M(t_0^* - \eta)|, |M(t_0^* + \eta)|\}$ e $\Gamma > 0$ uma constante tal que, $\Gamma > \max\{|t_0^* + \eta|, |t_0^* - \eta|\}$ e se $|t| > \Gamma$, então, $\gamma(t) \in \mathcal{O}_\mu$.

Como $\gamma(t)$ é uma órbita homoclínica, podemos colocá-la dentro de um retângulo, ou seja, $\gamma(t)$ é limitada. Consequentemente, existe uma constante real ϖ tal que $\|\dot{\gamma}(t)\| < \varpi$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Definimos $\tilde{K} = \alpha_3 \varpi + \alpha_2 + \alpha_1 \varrho$ e tomamos

$$L + \frac{\delta}{4} > \max \left\{ \Gamma + |t_0^*| + \eta, \frac{\ln \left(\frac{4\tilde{K}C}{m} \right)}{\min\{\Lambda_1, \Lambda_2\}} + |t_0^*| + \eta \right\}. \quad (3.8)$$

A desigualdade (3.8) para $L + \frac{\delta}{4}$, não está ainda, inteiramente justificada. Entenderemos melhor o porquê desta escolha, com o decorrer da demonstração.

Consideremos a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon \tilde{g}(x, t). \quad (3.9)$$

Esse é um campo de vetores t -periódico que satisfaz todas as condições do Teorema de Melnikov. Portanto, se a função

$$\widetilde{M}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (f \wedge \tilde{g})\gamma(t - t_0) dt$$

tem um zero transversal, temos um comportamento caótico para $\tilde{X}(x, t) = f(x) + \varepsilon \tilde{g}(x, t)$. Como já mencionamos, a idéia da demonstração é mostrarmos que para $T = L + \delta$, suficientemente grande, um zero transversal de M , implica em um zero transversal de $\widetilde{M}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t - t_0)) \wedge \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \gamma(t - t_0) \wedge \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) \wedge \gamma(t - t_0) dt. \end{aligned}$$

A segunda igualdade acima se justifica por hipótese. Como $\gamma(t)$ é uma solução do sistema não perturbado, temos $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$. A segunda igualdade vem da integração por partes. Consideremos $\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ e $\tilde{g}(x, t) = (\tilde{g}_1(x, t), \tilde{g}_2(x, t))$ temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \gamma(t - t_0) \wedge \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_1(t) \tilde{g}_2(x, t) - \dot{\gamma}_2(t) \tilde{g}_1(x, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_2(x, t) \dot{\gamma}_1(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_1(x, t) \dot{\gamma}_2(t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{g}_2(x, t) \cdot \gamma_1(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_1(t) \frac{d}{dt} \tilde{g}_2(x, t) \, dt \quad - \\
&\quad \left(\tilde{g}_1(x, t) \cdot \gamma_2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2(t) \frac{d}{dt} \tilde{g}_1(x, t) \, dt \right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma_2(t) \frac{d}{dt} \tilde{g}_1(x, t) - \gamma_1(t) \frac{d}{dt} \tilde{g}_2(x, t) \right) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) \wedge \gamma(t - t_0) \, dt,
\end{aligned}$$

$$\text{pois, } \tilde{g}_2(x, t) \cdot \gamma_1(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \tilde{g}_1(x, t) \cdot \gamma_2(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

De fato, como $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$ é limitada e $\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2) \rightarrow (0, 0)$ segue que,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow -\infty} \tilde{g}_2(x, t) \gamma_1(t) \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\lim_{a \rightarrow -\infty} \tilde{g}_1(x, t) \gamma_2(t) \right) = 0.$$

Portanto, temos

$$\widetilde{M}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \tilde{g}(\gamma(t - t_0), t) \wedge \gamma(t - t_0) \, dt$$

De forma análoga, temos

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma(t - t_0)) \wedge g(\gamma(t - t_0), t) \, dt.$$

Analogamente

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} g(\gamma(t - t_0), t) \wedge \gamma(t - t_0) \, dt.$$

Vamos agora mostrar que para $T = L + \delta$, escolhido como em (3.8), $M(t_0) \approx \widetilde{M}(t_0)$. Para todo $t_0 \in \bar{I}$, temos:

$$\begin{aligned} M(t_0) - \widetilde{M}(t_0) &= \int_{-\infty}^{-L-\frac{\delta}{4}} \frac{d}{dt} \{g(\gamma(t-t_0), t) - \tilde{g}(\gamma(t-t_0), t)\} \wedge \gamma(t-t_0) dt \\ &\quad + \int_{L+\frac{\delta}{4}}^{\infty} \frac{d}{dt} \{g(\gamma(t-t_0), t) - \tilde{g}(\gamma(t-t_0), t)\} \wedge \gamma(t-t_0) dt. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de " $\wedge$ " e porque, para $t \in \left[-L-\frac{\delta}{4}, L+\frac{\delta}{4}\right]$, temos $M(t_0) = \widetilde{M}(t_0)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{g(\gamma(t-t_0), t) - \tilde{g}(\gamma(t-t_0), t)\} &= \left(\nabla g \cdot \dot{\gamma}(t-t_0) + \frac{\partial g}{\partial t} \right) - \left(\nabla \tilde{g} \cdot \dot{\gamma}(t-t_0) + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right) = \\ &= (\nabla g - \nabla \tilde{g}) \cdot \dot{\gamma}(t-t_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right), \text{ onde } \nabla g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela construção de $\tilde{g}$, temos

$$\|\nabla \tilde{g}\| \leq \|\nabla g\| \cdot |c(t)|$$

e

$$\left\| \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right\| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\| \cdot |c(t)| + \|g\| \cdot |\dot{c}(t)| \leq \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\| + \|g\| \cdot |\dot{c}(t)|.$$

Logo,

$$\left\| \frac{d}{dt} \{g(\gamma(t-t_0), t) - \tilde{g}(\gamma(t-t_0), t)\} \right\| \leq 2 \|\nabla g\| \cdot \|\dot{\gamma}\| + 2 \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\| + \|g\dot{c}\|,$$

e finalmente,

$$\left\| \frac{d}{dt} \{g(\gamma(t-t_0), t) - \tilde{g}(\gamma(t-t_0), t)\} \right\| \leq 2\alpha_3\varpi + 2\alpha_2 + \alpha_1\varrho = \tilde{K}.$$

Agora, para todo $t_0 \in \bar{I}$, podemos escrever

$$|M(t_0) - \widetilde{M}(t_0)| \leq \tilde{K} \int_{-\infty}^{-L-\frac{\delta}{4}} \|\gamma(t-t_0)\| dt + \tilde{K} \int_{L+\frac{\delta}{4}}^{\infty} \|\gamma(t-t_0)\| dt.$$

Note que, se $t < -L - \frac{\delta}{4}$, temos que, $t - t_0 < -L - \frac{\delta}{4} - t_0 \leq -L - \frac{\delta}{4} - t_0^* + \eta < -\Gamma$ pois, $L + \frac{\delta}{4} > \Gamma - t_0^* + \eta$, pela escolha feita em (3.8). Da definio de Γ , isto implica que $\gamma(t - t_0) \in \mathcal{O}_\mu$. Sendo assim,

$$\int_{-\infty}^{-L-\frac{\delta}{4}} \|\gamma(t-t_0)\| dt \leq \int_{-\infty}^{-L-\frac{\delta}{4}} C_1 e^{\Lambda_1(t-t_0)} dt = \frac{C_1}{\Lambda_1} e^{-\Lambda_1(L+\frac{\delta}{4}+t_0)}.$$

Novamente por (3.8), temos $t > L + \frac{\delta}{4} > \Gamma + t_0^* + \eta > \Gamma + t_0$ e daí, $t - t_0 > \Gamma$ e pela definio de Γ , isto implica que, $\gamma(t - t_0) \in \mathcal{O}_\mu$. Logo,

$$\int_{L+\frac{\delta}{4}}^{\infty} \|\gamma(t-t_0)\| dt \leq \int_{L+\frac{\delta}{4}}^{\infty} C_2 e^{-\Lambda_2(t-t_0)} dt \leq \frac{C_2}{\Lambda_2} e^{-\Lambda_2(L+\frac{\delta}{4}-t_0)}.$$

Portanto, lembrando que $C = \max \left\{ \frac{C_1}{\Lambda_1}, \frac{C_2}{\Lambda_2} \right\}$, temos que, $\forall t_0 \in \bar{I}$

$$|M(t_0) - \widetilde{M}(t_0)| \leq \tilde{K}C(e^{-\Lambda_1(L+\frac{\delta}{4}+t_0)} + e^{-\Lambda_2(L+\frac{\delta}{4}-t_0)}) \leq 2\tilde{K}Ce^{-\min\{\Lambda_1, \Lambda_2\}(L+\frac{\delta}{4}-|t_0^*|-\eta)}.$$

Novamente, por (3.8), temos

$$L + \frac{\delta}{4} > \frac{\ln\left(\frac{4\tilde{K}C}{m}\right)}{\min\{\Lambda_1, \Lambda_2\}} + |t_0^*| + \eta.$$

Daí, segue que

$$|M(t_0) - \widetilde{M}(t_0)| < \frac{m}{2},$$

onde $m = \min\{|M(t_0^* - \eta)|, |M(t_0^* + \eta)|\}$ e $0 < \eta \lll 1$.

Por hipótese, $M(t_0^*) = 0$ e como esta é uma função contínua, $0 < m \lll 1$ e daí,

$$M(t_0) \approx \widetilde{M}(t_0), \text{ ou seja, } 0 \leq \sup\{|(\widetilde{M} - M)(t_0)| ; t_0 \in \bar{I}\} \leq \beta \lll 1. \text{ (Figura 3.2)}$$

Como t_0^* é um zero simples de M temos que, para m suficientemente pequeno, $\widetilde{M}$ também possui um zero simples, para algum $\tilde{t}_0 \in (t_0^* - \eta, t_0^* + \eta)$.

Dessa forma, como $\tilde{X}(x, t)|_{D_L} = X(x, t)|_{D_L}$, concluímos que o sistema original não periódico é caótico, durante um intervalo de tempo finito $(-L, L)$, arbitrariamente grande.

Portanto, concluímos que, embora g não seja uma função periódica, é possível aplicarmos o teorema de Melnikov ao sistema dinâmico através das idéias apresentadas neste capítulo.

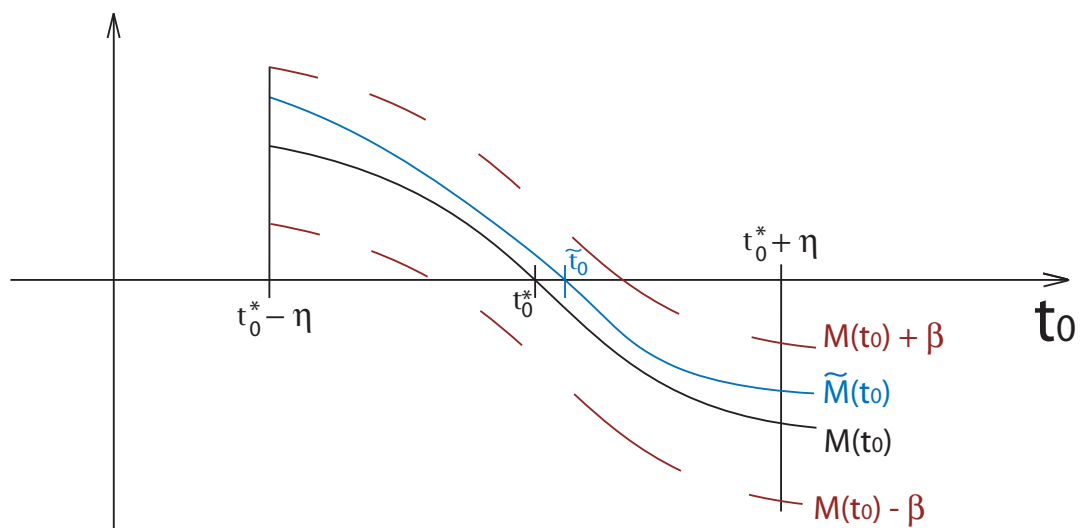


Figura 3.2: O comportamento de M e $\tilde{M}$.

Capítulo 4

O Problema de Gyldén

Em 1884, o astrônomo sueco Johan August Hugo Gyldén, propôs um modelo para descrever a aceleração secular do movimento longitudinal da lua. Ele considerou o problema de Kepler perturbado, no qual a perturbação μ é uma função explícita do tempo.

Consideraremos o movimento de uma partícula atraída por uma campo de força central

$$\vec{F} = -\frac{1 + \varepsilon\mu(t)}{||r^3||}\vec{r},$$

localizada na origem do sistema (Figura 4.1).

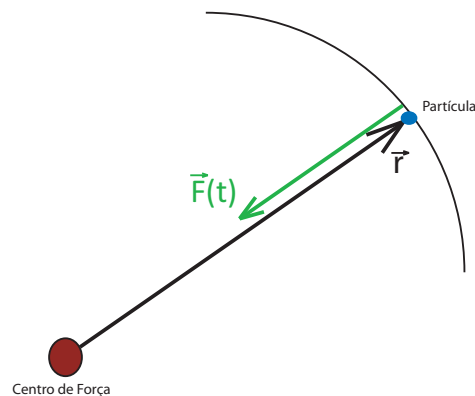


Figura 4.1: Partícula atraída por uma força central.

De um modo geral, as equações de movimento são descritas pela função Hamiltoniana,

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2, t) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - (1 - \varepsilon\mu(t))(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}, \quad (4.1)$$

onde $\mu(t) = 1 + e^{-\cosh(t)}$ [16], ou de forma explícita pelo sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_1 = -(1 - \varepsilon\mu(t))q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-3/2} \\ \dot{p}_2 = -(1 - \varepsilon\mu(t))q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-3/2} \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde, (q_1, q_2) e (p_1, p_2) representam, respectivamente, a posição e o momento da partícula, μ é uma aplicação de classe C^2 , perturbação periódica de período $T > 0$ e $\varepsilon \geq 0$ é um parâmetro.

Após algumas mudanças de coordenadas, veja [16] e [15], obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = u - u^3 + \varepsilon u\mu(t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t), \quad x = (u, v), \quad (4.3)$$

$$\text{onde } \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix}, f(u, v) = \begin{bmatrix} v \\ u - u^3 \end{bmatrix}, g(u, v, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u\mu(t) \end{bmatrix}.$$

Note que

- f e g são aplicações de classe C^2 .
- A origem é um ponto de sela hiperbólico do sistema não perturbado.
- $h(t) = (\sqrt{2}\operatorname{sech}(t), -\sqrt{2}\operatorname{sech}(t)\tanh(t))$ é uma órbita homoclínica do sistema não perturbado, associada a origem do sistema.
- $\|g(\gamma(t), t)\| = \|(0, \sqrt{2}\operatorname{sech}(t)(1 + e^{-\cosh t}))\| = \sqrt{2}(1 + e^{-\cosh t})\operatorname{sech}(t)$.

Quando $t \rightarrow \pm\infty$, $\|g(\gamma(t), t)\| \rightarrow 0$ e como esta é contínua e positiva, possui um máximo. Portanto, existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que, $\|g(\gamma(t), t)\| < \alpha_1, \forall t \in \mathbb{R}$.

- Analogamente, provamos que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\gamma(t), t) \right\| < \alpha_2, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\|\nabla g(\gamma(t), t)\| < \alpha_3, \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Porém, a nossa função perturbação, $g(u, v, t)$, não é uma função periódica na variável t . Portanto, nosso sistema, ainda não é um S.H.P.

O que está nos impedindo de utilizar o teorema de Melnikov é o fato da função g não ser periódica na variável t . Porém, podemos resolver este problema usando as teorias do capítulo 3.

Dessa forma, precisamos de uma função cutoff para, posteriormente, através de uma extensão periódica, definirmos uma função $\tilde{g}(t)$, periódica em t , para enfim podermos aplicarmos o teorema de Melnikov.

Definamos o conjunto $D_L = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3, t \in (-L, L)\}$. Sendo $\delta \in \mathbb{R}_+$, considere a função $c : [-L - \delta, L + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , dada por:

$$t \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se} & -L - \frac{\delta}{4} \leq t \leq L + \frac{\delta}{4} \\ 0 & \text{se} & t \leq -L - \frac{3\delta}{4} \quad \text{ou} \quad t \geq L + \frac{3\delta}{4} \\ 0 < c(t) < 1 & \text{se} & -L - \frac{3\delta}{4} < t < -L - \frac{\delta}{4} \quad \text{ou} \quad L + \frac{\delta}{4} < t < L + \frac{3\delta}{4} \end{cases} \quad (4.4)$$

e tal que $|\dot{c}(t)| < \varrho$ para uma constante ϱ . Assim como na demonstração do Teorema 3.1, denotemos por $\bar{g}(u, v, t)$ a restrição de $g(u, v, t)$ para o intervalo de tempo $I = (-L - \delta, L + \delta)$ e consideremos a função $\bar{g}(u, v, t)c(t) : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Essa função se estende como uma função *t-periódica*, de período T , $T = 2L + 2\delta$, de classe C^∞ , $\tilde{g}(u, v, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Neste momento podemos definir um novo sistema dinâmico

$$\dot{x} = \tilde{X}(x, t), \quad \text{onde} \quad \tilde{X}(x, t) = f(x) + \varepsilon \tilde{g}(x, t) \quad \text{e} \quad x = (u, v). \quad (4.5)$$

$\tilde{X}(x, t)$ é uma família a um parâmetro de campos de vetores C^r em $\mathbb{R}^3$, periódicos em t , com período $2L + 2\delta$. Esta família está parametrizada pelo parâmetro de perturbação ε . Por construção, temos que

$$\tilde{X}(x, t)|_{D_L} = X(x, t)|_{D_L}. \quad (4.6)$$

A este novo sistema dinâmico é possível aplicar o método de Melnikov, pois o único entrave existente foi sanado.

Chamaremos de $\tilde{M}(t_0)$, a função de Melnikov do novo sistema estendido. Devido a convergência da integral que define a função de Melnikov, se nós escolhermos T suficientemente grande, então $M(t_0) \approx \tilde{M}(t_0)$ de tal maneira que um zero transverso de $M(t_0)$ implica em um zero transverso de $\tilde{M}(t_0)$, que por sua vez, implica em comportamento caótico para o sistema periódico estendido. E isso implica que o sistema não periódico é caótico durante um intervalo de tempo suficientemente grande $(-T, T)$.

O valor de T que necessitamos é encontrado na demonstração do Teorema 3.1.

Encontraremos agora a função de Melnikov do problema original.

Sabemos que, para $n = 2$, a função de Melnikov toma a forma

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^t \nabla \cdot f(h(s)) ds} f(h(t)) \wedge g(h(t), t + t_0) dt,$$

e ainda

$$f(u, v) = (v, u - u^3) \text{ e } g(h(t), t + t_0) = (0, u\mu(t)), \text{ onde } h(t) = (u(t), v(t)).$$

Note que

$$\nabla \cdot f(u, v) = \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) = 0 \Rightarrow M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(h(t)) \wedge g(h(t), t + t_0) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} uv\mu(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t)\operatorname{sech}(t + t_0) \tanh(t)(1 + e^{-\cosh(t+t_0)}) dt.$$

Como já vimos $M(t_0) \approx \widetilde{M}(t_0)$ e daí, um zero de M implica em um zero de $\widetilde{M}$ e conseqüentemente, pelo Teorema de Melnikov, teremos o surgimento de uma dinâmica caótica para o sistema dinâmico estendido.

Fazendo $t_0 = 0$ na função de Melnikov, temos

$$M(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \tanh(t) (1 + e^{-\cosh(t)}) dt.$$

Note que a função

$$t \mapsto \operatorname{sech}^2(t) \tanh(t) (1 + e^{-\cosh(t)})$$

é ímpar. Sendo assim, $M(0) = 0$.

Temos ainda que

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_0} [\operatorname{sech}(t) \operatorname{sech}(t + t_0) \tanh(t) (1 + e^{-\cosh(t+t_0)})] dt.$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \tanh(t + t_0) \left(e^{-\cosh(t+t_0)} - \frac{1 + e^{-\cosh(t+t_0)}}{\cosh(t + t_0)} \right) dt.$$

E daí,

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh^2(t)}{\cosh^2(t)} e^{-\cosh(t)} (\cosh(t) - e^{\cosh(t)} + 1) dt.$$

Note que a função $t \mapsto \frac{\tanh^2(t)}{\cosh^2(t)} e^{-\cosh(t)} (\cosh(t) - e^{\cosh(t)} + 1)$ é, exceto na origem, extritamente negativa. Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(0) \neq 0.$$

Portanto, a função $M(t_0)$ possui um zero simples e pelo Teorema 3.1, o sistema (4.3) apresenta uma dinâmica caótica em um intervalo de tempo suficientemente grande $(-T, T)$.

Capítulo 5

O Pêndulo esférico, magnetizado e amortecido

Para exemplificarmos a generalização do método de Melnikov, o método de Melnikov-Gruendler, usaremos um problema envolvendo um pêndulo esférico que sofre a ação magnética de um ímã [12] e [13]. Mais precisamente, assumimos que a bola do pêndulo está magnetizada, que existe um ímã exatamente abaixo do suporte do pêndulo e este está magnetizado de modo a repelir a bola do pêndulo (Figura 5.1).

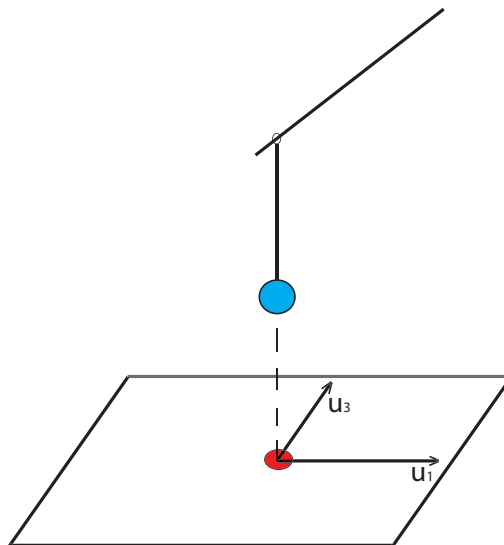


Figura 5.1: Pêndulo esférico, magnetizado e amortecido.

Vamos inserir no nosso problema três perturbações.

A primeira perturbação será trocar o imã que está abaixo do pêndulo, por outros dois, *separados por uma distância* ε_1 . A segunda perturbação é um amortecimento radial, simétrico, com *coeficiente de amortecimento* ε_2 . A terceira perturbação é relativa a uma *força externa*, de magnitude $\varepsilon \cos(\omega t)$, aplicada ao longo de uma direção horizontal arbitrária, que aparece em duas componentes, com amplitudes independentes ε_3 e ε_4 (Figura 5.2).

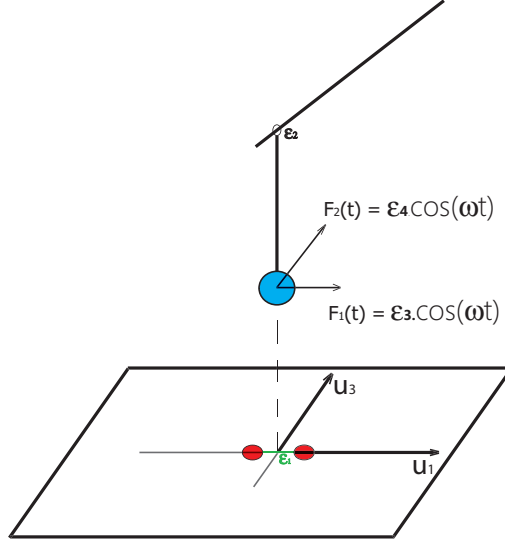


Figura 5.2: Pêndulo esférico, magnetizado, amortecido e perturbado.

As equações que governam o movimento do pêndulo esférico são

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x - 2x(x^2 + y^2) - 3\varepsilon_1 x - \varepsilon_2 \dot{x} + \varepsilon_3 \cos(\omega t), \\ \ddot{y} &= y - 2y(x^2 + y^2) - c\dot{y} - \varepsilon_1 y - \varepsilon_2 \dot{y} + \varepsilon_4 \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

e o sistema não perturbado tem a forma

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= x - 2x(x^2 + y^2), \\ \ddot{y} &= y - 2y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Após algumas mudanças de variáveis, veja [12] temos as seguintes equações

$$\dot{u}_1 = u_2$$

$$\dot{u}_2 = u_1 - 2u_1(u_1^2 + u_3^2) - 3\varepsilon_1 u_1 - \varepsilon_2 u_2 +$$

$$\frac{2\varepsilon_3}{\omega^2 + 1}(3u_1^2 + u_3^2) \cos(\omega t) + \frac{4\varepsilon_4}{\omega^2 + 1} u_1 u_3 \cos(\omega t)$$

$$\dot{u}_3 = u_4$$

$$\dot{u}_4 = u_3 - 2u_3(u_1^2 + u_3^2) - 2cu_4 - \varepsilon_1 u_3 - \varepsilon_2 u_4 +$$

$$\frac{4\varepsilon_3}{\omega^2 + 1} u_1 u_3 \cos(\omega t) + \frac{2\varepsilon_4}{\omega^2 + 1} (u_1^2 + 3u_3^2) \cos(\omega t)$$

e o sistema não perturbado toma a forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = f_1(u) = u_2 \\ \dot{u}_2 = f_2(u) = u_1 - 2u_1(u_1^2 + u_3^2) \\ \dot{u}_3 = f_3(u) = u_4 \\ \dot{u}_4 = f_4(u) = u_3 - 2u_3(u_1^2 + u_3^2) - 2cu_4. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Daí temos,

$$Df(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - 6u_1^2 - 2u_3^2 & 0 & -4u_1 u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4u_3 u_1 & 0 & 1 - 2u_1^2 - 6u_3^2 & -2c \end{bmatrix}$$

e

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2c \end{pmatrix}$$

Os autovalores de $Df(0)$ são ± 1 e $-c \pm \alpha$ onde $\alpha = \sqrt{c^2 + 1}$. Temos então dois autovalores com parte real negativa e dois com parte real positiva, sendo assim temos $d_s = d_u = 2$. Como em uma direção o movimento é amortecido temos $d_b = 1$.

Note que $\gamma(t) = (r(t), \dot{r}(t), 0, 0)$, onde $r(t) = \text{sech}(t)$ é uma solução homoclínica do sistema (5.2), de fato:

- $\gamma(t)$ é uma solução de (5.2);

$$u_1(t) = \text{sech} t, \quad u_2(t) = -\text{sech} t \tanh t, \quad u_3 \equiv u_4 \equiv 0.$$

Daí,

$$\dot{u}_1(t) = -\text{sech} t \tanh t = u_2(t), \quad \forall t.$$

$$\dot{u}_2(t) = \text{sech} t \tanh^2 t - \text{sech}^3 t = \text{sech} t (1 - \text{sech}^2 t) - \text{sech}^3 t =$$

$$= \text{sech} t (1 - \text{sech}^2 t - \text{sech}^2 t) = \text{sech} t - 2\text{sech}^3 t =$$

$$= u_1(t) - 2u_1^3(t) = u_1(t) - 2u_1(t)(u_1^2(t) + u_3^2(t)), \quad \forall t \quad \text{pois} \quad u_3 \equiv 0.$$

$$\dot{u}_3(t) = 0 = u_4(t), \quad \forall t.$$

$$\dot{u}_4(t) = 0 = u_3(t) - 2u_3(t)(u_1^2(t) + u_3^2(t)) - 2cu_4, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{pois} \quad u_3 \equiv u_4 \equiv 0.$$

- $\gamma(t)$ é uma órbita homoclínica.

Quando $t \rightarrow \pm\infty$, $\text{sech } t \rightarrow 0$, logo $u_1(t), u_2(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. Portanto, $\gamma(t)$ é uma órbita homoclínica.

Podemos agora encontrar um ponto sobre $W^s(0) \cap W^u(0)$, em particular tomaremos $P = (1, 0, 0, 0) = \gamma(0) \in W^s(0) \cap W^u(0)$.

Neste momento introduzimos no nosso problema a equação variacional ao longo de $\gamma(t)$, a saber,

$$\dot{u}(t) = Df(\gamma(t))u(t).$$

Através da solução fundamental da equação variacional é possível definirmos planos transversos a $\gamma(t)$ em $P = \gamma(0) \in W^s(0) \cap W^u(0)$. Pelo Teorema 2.3, podemos garantir que estes planos transversos intersectam $W_\varepsilon^s(0)$ e $W_\varepsilon^u(0)$ em pontos q^+ e q^- , respectivamente. Através destes pontos é que conseguimos acompanhar a evolução de $W_\varepsilon^s(0)$ e $W_\varepsilon^u(0)$.

A saber, uma solução fundamental da equação variacional é $\{\psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t), \psi^4(t)\}$, onde

$$\psi^1(t) = \frac{1}{c\sqrt{2\alpha}}(0, 0, v_1(t), \dot{v}_1(t)) \quad \text{onde} \quad v_1(t) = e^{-ct} \left[\frac{(\alpha - \tanh t)(1 + \tanh t)^\alpha}{\text{sech}^\alpha t} \right],$$

$$\psi^2(t) = ((Q\dot{r})(t), (Q\dot{r})'(t), 0, 0), \quad \text{onde} \quad Q(t) = -\frac{3}{2}(t) - \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \coth t,$$

$$\psi^3(t) = \frac{1}{c\sqrt{2\alpha}}(0, 0, v_2(t), \dot{v}_2(t)) \quad \text{onde} \quad v_2(t) = e^{-ct} \left[\frac{(\alpha + \tanh t)(1 - \tanh t)^\alpha}{\text{sech}^\alpha t} \right],$$

$$\psi^4(t) = \dot{\gamma}(t) = (\dot{r}, \ddot{r}, 0, 0).$$

As constantes do problema foram escolhidas de modo que

$$\det(\psi^1(0), \psi^2(0), \psi^3(0), \psi^4(0)) = 1$$

e

$$\begin{vmatrix} Q\dot{r} & \dot{r} \\ (Q\dot{r})^\cdot & \ddot{r} \end{vmatrix} = 1.$$

Do teorema da variedade estável, temos

$$\psi_1(0) \notin T_p W^s, \in T_p W^u,$$

$$\psi_2(0) \notin T_p W^s \notin T_p W^u,$$

$$\psi_3(0) \in T_p W^s \notin T_p W^u,$$

$$\psi_4(0) \in T_p W^s \cap T_p W^u.$$

A partir de agora podemos encontrar K_{ij} , para posteriormente encontrarmos a nossa função de Melnikov.

Recordemos que

$$K_{ij}(t, \bar{\xi}) = \Omega(\psi^1(t), \dots, \underbrace{h_j(\gamma(t), t + \xi)}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, \psi^n(t)) \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) \right) ds$$

onde

$$\nabla \cdot f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_i}{\partial u_i}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

e

$$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_2, u_1 - 2u_1(u_1^2 + u_3^2), u_4, u_3 - 2u_3(u_1^2 + u_3^2) - 2cu_4).$$

$$\text{Logo, } \nabla \cdot f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0 + 0 + 0 - 2c \Rightarrow \exp \left(- \int_0^t (\nabla \cdot f)(\gamma(s)) ds \right) = e^{2ct}.$$

$$h(x, t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\varepsilon_1 u_1 - \varepsilon_2 u_2 + \frac{2\varepsilon_3}{\omega^2 + 1} (3u_1^2 + u_3^2) \cos(\omega t) + \frac{4\varepsilon_4}{\omega^2 + 1} u_1 u_3 \cos(\omega t) \\ 0 \\ -\varepsilon_1 u_3 - \varepsilon_2 u_4 + \frac{4\varepsilon_3}{\omega^2 + 1} u_1 u_3 \cos(\omega t) + \frac{2\varepsilon_4}{\omega^2 + 1} (u_1^2 + 3u_3^2) \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$h_1(x, t) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_1}(x, t, 0) = (0, -3u_1, 0, -u_3) \Rightarrow h_1(\gamma(t), t + \xi) = (0, -3r(t), 0, 0).$$

$$h_2(x, t) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_2}(x, t, 0) = (0, -u_2, 0, -u_4) \Rightarrow h_2(\gamma(t), t + \xi) = (0, -\dot{r}(t), 0, 0).$$

$$h_3(x, t) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_3}(x, t, 0) = \left(0, \frac{2}{\omega^2 + 1} (3u_1^2 + u_3^2) \cos(\omega t), 0, \frac{4}{\omega^2 + 1} u_1 u_3 \cos(\omega t) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_3(\gamma(t), t + \xi) = \left(0, \frac{6r(t)^2}{\omega^2 + 1} \cos(\omega(t + \xi)), 0, 0 \right).$$

$$h_4(x, t) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_4}(x, t, 0) = \left(0, \frac{4}{\omega^2 + 1} (u_1 u_3) \cos(\omega t), 0, \frac{2}{\omega^2 + 1} (u_1^2 + 3u_3^2) \cos(\omega t) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_4(\gamma(t), t + \xi) = \left(0, 0, 0, \frac{2r(t)^2}{\omega^2 + 1} \cos(\omega(t + \xi)) \right).$$

Podemos agora calcular o valor de $K_{ij}(t, \xi)$.

$$K_{11}(t, \xi) = \Omega(h_1(\gamma(t), t + \xi), \psi^2(t), \psi^3(t), \psi^4(t)).e^{2ct} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (Q\dot{r})(t) & 0 & \dot{r}(t) \\ -3r(t) & (Q\dot{r})'(t) & 0 & \ddot{r}(t) \\ 0 & 0 & kv_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & k\dot{v}_2(t) & 0 \end{vmatrix} .e^{2ct} = 0, \text{ onde } k = \frac{1}{c\sqrt{2\alpha}}.$$

Analogamente, calculamos $K_{12} = K_{13} = 0$.

$$K_{14}(t, \xi) = \Omega(\psi^1(t), \psi^2(t), \psi^3(t), h_4(\gamma(t), t + \xi)).e^{2ct} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (Q\dot{r})(t) & 0 & \dot{r}(t) \\ 0 & (Q\dot{r})'(t) & 0 & \ddot{r}(t) \\ 0 & 0 & kv_2(t) & 0 \\ \frac{2r(t)^2}{\omega^2 + 1} \cos(\omega(t + \xi)) & 0 & k\dot{v}_2(t) & 0 \end{vmatrix} .e^{2ct} =$$

$$= -e^{2ct} \frac{2r(t)^2}{\omega^2 + 1} \cos(\omega(t + \xi)) \begin{vmatrix} (Q\dot{r})(t) & 0 & \dot{r}(t) \\ (Q\dot{r})'(t) & 0 & \ddot{r}(t) \\ 0 & kv_2(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2ct} \frac{2r(t)^2}{\omega^2 + 1} \cos(\omega(t + \xi)) kv_2(t) \begin{vmatrix} (Q\dot{r})(t) & \dot{r}(t) \\ (Q\dot{r})'(t) & \ddot{r}(t) \end{vmatrix} = \frac{e^{2ct} 2r(t)^2 \cos(\omega(t + \xi)) e^{-ct} w(t)}{(\omega^2 + 1) c\sqrt{2\alpha}} =$$

$$= \frac{2e^{ct} \text{sech}^2(t) \cos(\omega(t + \xi)) (\alpha + \tanh t) \text{sech}^\alpha t}{c\sqrt{2\alpha}(\omega^2 + 1)} \frac{(1 + \tanh t)^\alpha}{(1 + \tanh t)^\alpha} =$$

$$= \frac{2}{c\sqrt{2\alpha}(\omega^2 + 1)} \frac{e^{ct} (\alpha + \tanh t) \text{sech}^{(2+\alpha)} t}{(1 + \tanh t)^\alpha} \cos(\omega(t + \xi)).$$

Da mesma forma calculamos:

$$K_{21}(t, \xi) = -3\text{sech}^2 t \tanh t,$$

$$K_{22}(t, \xi) = \operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t,$$

$$K_{23}(t, \xi) = \frac{6}{(\omega^2 + 1)} \operatorname{sech}^3 t \tanh t \cos(\omega(t + \xi)),$$

$$K_{24}(t, \xi) = K_{31}(t, \xi) = K_{32}(t, \xi) = K_{33}(t, \xi) = 0,$$

$$K_{34}(t, \xi) = \frac{-2}{c\sqrt{2\alpha}(\omega^2 + 1)} \frac{e^{ct}(\alpha - \tanh t) \operatorname{sech}^{(2+\alpha)} t}{(1 - \tanh t)^\alpha} \cos(\omega(t + \xi)).$$

Vamos agora verificar que o nosso sistema possui uma perturbação transversal.

Dado $\xi \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^4$, $\varepsilon \neq 0$, devem existir $t \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq d_u = 2$ e $2 = d_u - d_b + 1 \leq q \leq n - d_b = 3$ tais que

$$\sum_{j=1}^4 K_{pj}(t, \xi) \varepsilon_j \neq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^4 K_{qj}(t, \xi) \varepsilon_j \neq 0.$$

Como $\varepsilon_1 > 0$ temos para $p = q = 2$ que

$$\sum_{j=1}^4 K_{2j}(t, \xi) \varepsilon_j \neq 0.$$

isto é, o sistema possui uma perturbação transversal.

Dessa forma, se após uma reordenação tivermos $\det \bar{A}(\bar{\xi}) \neq 0$, segue da demonstração do Teorema 2.11 que basta mostrarmos

$$\sum_{j=1}^4 \Delta_{2j}(\bar{\xi}) \varepsilon_j = 0, \quad 1 \leq j \leq 4,$$

onde

$$\Delta_{2j}(\bar{\xi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} K_{2j}(t, \bar{\xi}) \, dt.$$

Note que a função K_{21} é ímpar e como $K_{24} \equiv 0$, temos

$$\Delta_{21}(\bar{\xi}) = \Delta_{24}(\bar{\xi}) = 0,$$

$$\Delta_{22}(\bar{\xi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 t \tanh^2 t \, dt = - \int_{-1}^1 u^2 \, du = -\frac{2}{3}.$$

Com o auxílio do software matemático calculamos

$$\Delta_{23}(\bar{\xi}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^3 t \tanh t \cos(\omega(t + \xi)) \, dt = \frac{\pi \omega \sin \omega \xi}{\cos\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)}.$$

Portanto, se tomarmos $\bar{A}(\bar{\xi}) = [\Delta_{22}]$ temos $\det \bar{A}(\bar{\xi}) \neq 0$ e, logo, a condição para a existência de uma interseção entre $W_{\varepsilon}^s(0)$ e $W_{\varepsilon}^u(0)$ se torna:

$$\sum_{j=1}^4 \Delta_{2j}(\bar{\xi}) \varepsilon_j = \frac{2}{3} \varepsilon_2 + \frac{\pi \omega \operatorname{sen} \omega \xi}{\cos \frac{\pi \omega}{2}} \varepsilon_3 = 0.$$

Portanto, valores de ε_2 e ε_3 que satisfaçam a equação acima acarretará em uma dinâmica caótica para o movimento do pêndulo.

Capítulo 6

Considerações Finais

Começamos este estudo diante do questionamento sobre o que acontece com um sistema não-perturbado $\dot{x} = f(x)$, que contém uma órbita homoclínica, ao se acrescentar uma perturbação, periódica ou não. Basicamente, quando (ou se) essa perturbação implicaria no início de uma dinâmica caótica. O interesse neste tipo de problema se deve ao fato de que muitos sistemas físicos podem ser modelados deste jeito. Ao longo deste trabalho analisamos algumas ferramentas que começam a responder essa questão.

Estudamos o Método Clássico de Melnikov (MM), para sistemas de dimensão dois e perturbação periódica em t ; um método dado por [15], que nos permite aplicar o método de Melnikov em um sistema, onde a função perturbadora, não é necessariamente periódica em t e ainda uma generalização deste método clássico para dimensões maiores, o método de Melnikov-Gruendler (MMG). Para cada método estudado apresentamos uma aplicação.

Quando trabalhamos com um S.H.P. onde f é uma hamiltoniana usamos o vetor ∇H , o vetor gradiente de H , para encontrarmos e acompanharmos a evolução das variedades invariantes do sistema perturbado.

Pela demonstração do Teorema 2.11, onde consideramos um S.H.P onde f não é necessariamente hamiltoniana, vimos que a utilização da equação variacional $\dot{u}(t) = Df(\gamma(t))u(t)$ é fundamental para a demonstração deste. Ela nos possibilita definir ao longo de $\gamma(t)$, um conjunto de vetores, onde alguns deles são transversais a $\gamma(t)$. Então, definimos o plano gerado por estes vetores e com o auxílio do Teorema 2.3 podemos definir os pontos sobre as variedades invariantes do sistema perturbado.

Uma grande vantagem que encontramos em utilizar o MM e o MMG é nos possibilitar a obtenção de resultados analíticos, enquanto que técnicas numéricas nos prendem a problemas de convergência e estabilidade dos seus integradores. Devemos destacar que uma desvantagem do MM e do MMG é o aparecimento de cálculos um

pouco complicados, como por exemplo, encontrar uma parametrização para a órbita homoclínica do sistema não perturbado. Mas, mesmo diante desta dificuldade, achamos que este estudo foi de grande importância, de forma que pretendemos continuar a análise destes métodos em um futuro trabalho de doutoramento.

Referências Bibliográficas

- [1] MELNIKOV, V.K. *On the stability of the center for time-periodic perturbation*, **TRANS. MOSCOW MATH. SOC.**, p.1-5, December 1963.
- [2] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [3] PALIS JR, J.; MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [4] HIRSCH, M.W.; SMALE, S. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press Limited, San Diego, 1974.
- [5] DOERING, C.I.; LOPES, A.O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [6] PERKO, Lawrence. *Differential equations and dynamical system*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [8] WIGGINS, Stephen. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [9] ALMEIDA, A.M.O. *Sistemas Hamiltonianos, caos e quantização*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 1995.
- [10] HIRSCH, M.W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2004.
- [11] GRUENDLER, Joseph. *A generalization of the method of Melnikov to arbitrary dimension*, Ph. D. thesis, Univ. North Carolina, Chapel Hill, 1982.

- [12] GRUENDLER, Joseph. *The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in $\mathbb{R}^n$* . **SIAM J. MATH. ANAL.** Philadelphia, PA, v.19, n.5, p.907-931, September 1985.
- [13] AWREJCEWICZ, J.; HOLICKE, M.M. *Smooth and nonsmooth high dimensional chaos and the Melnikov-type methods*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2007.
- [14] SUN, J.H. *Melnikov vector function for high-dimensional maps*. **PHYSICS LETTERS A**. Nanjing, v.216, n.1-5, p.47-52, June 1996.
- [15] CASTILHO, C.; MARCHESIN, M. *A practical use of the Melnikov homoclinic method*. **JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS**. Melville, NY, v.50, n.11, p.112704-112704-11, November 2009.
- [16] DIACU, F.; SELARU, D. *Chaos in the Gylden problem*. **JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS**. Melville, NY, v.39, n.12, p.6537-6546, December 1998.