

DIEGO VIEIRA TRINDADE

SOBRE ENVELOPES DE RETAS INTERMEDIÁRIAS DE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

Coorientador: Mostafa Salarinoghabi

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

T833s Trindade, Diego Vieira, 1995-
2021 Sobre envelopes de retas intermediárias de curvas planas
[recurso eletrônico] / Diego Vieira Trindade. – Viçosa, MG,
2021.

78 f.: il. (algumas color.).

Orientador: Ady Cambraia Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 77-78.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2021.038>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria afim. 2. Geometria diferencial. 3. Curvas
planas. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 516.36

Bibliotecário(a) responsável: Alice Regina Pinto Pires CRB6 2523

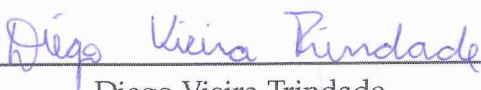
DIEGO VIEIRA TRINDADE

SOBRE ENVELOPES DE RETAS INTERMEDIÁRIAS DE CURVAS PLANAS

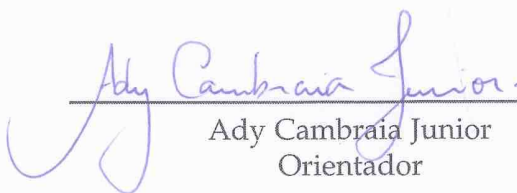
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de agosto de 2021.

Assentimento:



Diego Vieira Trindade
Autor



Ady Cambraia Junior
Orientador

A Deus e aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço ao Deus Eterno pelo dom da vida, pela sabedoria a mim concedida, pela graça e força de todos os dias. Sem isso, certamente não teria chegado até aqui e alcançado mais essa conquista.

Agradeço aos meus pais, Lenilda e Guanair, pelo total apoio e singelo amor durante toda minha jornada.

Agradeço aos amigos de mestrado, os quais muito me alegraram e ajudaram a suportar a árdua caminhada até aqui. Certamente o companheirismo de vocês foi vital nesse processo.

Ao meu orientador, professor Ady, sou eternamente grato pelo apoio, confiança e motivação. Sua orientação, com entusiasmo e sensatez, sempre me fizeram ter mais ânimo para concluir esse trabalho.

De semelhante forma, ao meu coorientador, Mostafa, agradeço por toda atenção, paciência e confiança. Seus direcionamentos muito contribuíram nessa dissertação.

Aos amigos de Viçosa (dentre outros lugares), agradeço por todo suporte, ânimo e companheirismo. Os momentos com vocês fizeram essa jornada menos árdua.

A todas as pessoas que, de alguma forma, por menor que seja, tenham feito parte desse processo, meus sinceros agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"O temor ao Senhor é o princípio da
sabedoria (...)" (Pv 9, 10a)

Resumo

TRINDADE, Diego Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2021.
Sobre envelopes de retas intermediárias de curvas planas. Orientador: Ady Cambraia Junior. Coorientador: Mostafa Salarinoghi.

Dada uma curva γ plana, fechada e convexa, e dois pontos distintos em tal curva, pode-se definir a reta média a qual passa pelo ponto médio do segmento ligando esses dois pontos e a intersecção das retas tangentes em cada um deles. Uma análise interessante, para tais retas, é investigar o comportamento do conjunto chamado de envelope das retas médias. Em nosso estudo, abordamos as ideias fundamentais e alguns resultados da Geometria Diferencial Afim e da Teoria de Singularidades, a fim de apresentaremos qual é o comportamento a cerca do envelope das retas médias. Posteriormente, é feita uma generalização desses conceitos, levando em conta o envelope da família de retas intermediárias, as quais são retas que passam por um ponto intermediário da corda ligando dois pontos distintos da curva e pelo ponto de intersecção das tangentes nesses respectivos pontos, isto é, o Envelope das Retas Intermediárias.

Palavras-chave: AESS. Aplicação conormal. Geometria diferencial afim. Ponto médio.

Abstract

TRINDADE, Diego Vieira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2021. **On the envelopes of intermediate lines of plane curves.** Adviser: Ady Cambraia Junior. Co-adviser: Mostafa Salarinoghabi.

Given a planar, closed and convex γ curve, and two distinct points on that curve, it is possible to define the mid-line which passes through the midpoint of the segment connecting these two points and the intersection of the tangent lines in each of them. An interesting analysis for such lines is to investigate the behavior of the set called the envelope of the mid-lines. In our study, we approach the fundamental ideas and some results of Affine Differential Geometry and the Theory of Singularities, in order to present what is the behavior around the envelope of the mid-lines. Subsequently, a generalization of these concepts is made, taking into account the envelope of the family of intermediate lines, which are lines that pass through an intermediate point of the chord connecting two distinct points on the curve and through the intersection point of the tangents at these respective points, that is, the Envelope of the Intermediate Lines.

Keywords: AESS. Conormal map. Affine differential geometry. Middle point.

Sumário

Introdução	10
1 Conceitos iniciais	13
1.1 Grupo das transformações afins	13
1.2 Comprimento de arco afim	15
1.3 Tangente afim e normal afim	16
1.3.1 Interpretação Geométrica do Normal Afim	18
1.4 Curvatura Afim	19
1.5 Contato entre Curvas na Geometria Diferencial Afim	24
1.6 Evoluta afim	26
2 Envelope de retas médias de uma curva plana	28
2.1 Envelopes	29
2.2 Envelope de retas médias de uma curva plana	31
2.2.1 Retas tangentes não paralelas	32
2.2.2 Estrutura local do <i>AESS</i>	42
2.2.3 Retas tangentes paralelas coincidentes	46
2.2.4 Retas tangentes paralelas não coincidentes	48
3 Envelope de retas intermediárias de uma curva plana	54
3.1 Retas intermediárias com tangentes não paralelas	56
3.2 Estrutura local do envelope de retas intermediárias	59
3.2.1 Retas tangentes concorrentes	61
3.2.2 Retas tangentes paralelas não coincidentes	64
3.2.3 Retas tangentes paralelas coincidentes	68
3.3 Abordagem por meio da Teoria de Singularidades	70

3.3.1	Germes de aplicações suaves	70
3.3.2	Singularidades de germes de aplicações suaves	71
3.3.3	Desdobramentos	72

Referências Bibliográficas	77
-----------------------------------	-----------

Introdução

No campo da geometria diferencial afim de uma curva γ plana, convexa e fechada, um estudo interessante está relacionado com o envelope das retas chamadas de retas médias associadas à curva γ .

Dados dois pontos p_1, p_2 na curva γ com tangentes não paralelas, define-se o ponto médio do segmento ligando esses dois pontos como o ponto $M = (p_1 + p_2)/2$. Naturalmente, a reta média é a reta que passa pelo ponto médio M e o ponto de intersecção das retas tangentes em p_1 e p_2 . Se as tangentes são paralelas não coincidentes, a reta média corresponde à única reta paralela às tangentes e que passa pelo ponto M . Se $p_1 \rightarrow p_2$, ou seja, se as retas tangentes são paralelas coincidentes, a reta média coincide com a reta normal afim em p_2 .

De modo geral, pode-se estabelecer a família de retas médias de uma curva γ e, nessa perspectiva, o *Envelope of Middle Lines* (EML), conjunto associado a tal família, é composto por 3 outros conjuntos, a saber: o *Affine Envelope of Symmetry Set* (AESS), o qual está associado aos pares de pontos (p_1, p_2) com tangentes não paralelas; o *Mid Point Tangent Locus* (MPTL), associado aos pares de pontos (p_1, p_2) , $p_1 \neq p_2$, com tangentes paralelas e a *Affine Evolute* (AE), o qual está relacionado com o caso limite, quando p_1 tende a p_2 .

Esses três conjuntos se comportam de forma peculiar, sendo invariantes afins, possuindo também relações interessantes quando se observam seus pontos limites e seus pontos singulares; possuindo, inclusive, pontos em comum. Além disso, há uma teoria robusta a respeito de tais conjuntos já estudada anteriormente por Holtom em [7].

Estudar o envelope das retas médias, tendo em vista a perspectiva de um conjunto de simetria afim, é um caso cativante, uma vez que, na geometria diferencial afim, construções análogas ao caso euclidiano, produzem dois conjuntos distintos, os quais

foram apresentados inicialmente por Giblin e Sapiro em [5] e [6], sendo um desses conjuntos o próprio *AESS*.

Por outro lado, um questionamento natural a ser feito é indagar qual é o conjunto obtido, por meio do envelope, ao se levar em consideração a família das retas que passam por um ponto "intermediário" do segmento ligando dois pontos p_1, p_2 na curva γ , com tangentes não paralelas, e pela intersecção de suas respectivas tangentes. De modo geral, na verdade, estamos em busca da generalização do envelope das retas médias.

Inicialmente, dados dois pontos p_1, p_2 na curva γ com tangentes não paralelas, o ponto intermediário do segmento ligando esses dois pontos é $M_\alpha = (1 - \alpha)p_1 + \alpha p_2$, com $\alpha \in [0, 1]$. A reta intermediária é a reta a qual passa pelo ponto intermediário M_α e o ponto de intersecção das retas tangentes em p_1 e p_2 . Se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$, a reta intermediária corresponde à reta tangente em p_1, p_2 , respectivamente. Se $\alpha = \frac{1}{2}$, a reta intermediária coincide com a reta média.

Fixado $\alpha \in [0, 1]$, o *Envelope of Intermediate Lines (EIL)* é composto também por 3 outros conjuntos: o *Affine Envelope of Intermediate Lines (AEIL)*, o qual está associado aos pares de pontos (p_1, p_2) com tangentes não paralelas; o *Intermediate-Parallel Tangent Locus (IPTL)*, associado aos pares de pontos (p_1, p_2) , $p_1 \neq p_2$, com tangentes paralelas e o *Coincident Tangent Lines (CTL)*, o qual está relacionado com o caso limite, quando p_1 tende a p_2 . Tais conjuntos foram recentemente explorados por Cambraia Junior, Salarinoghabi e Trindade em [9].

Ao contrário do que acontece com o envelope das retas médias ($\alpha = 1/2$), para $\alpha \neq 1/2$, os três conjuntos que compõem o *EIL* se comportam de maneira diferente e possuem certas características dignas de um estudo aprofundado.

Mediante isso, na presente dissertação, dada uma curva plana, convexa e fechada, apresentamos as propriedades associadas tanto ao Envelope de Retas Médias, como também do Envelope de Retas Intermediárias. Para tanto, far-se-a uso da teoria da Geometria Diferencial Afim de curvas planas [2] e da teoria de Singularidades [1].

Os capítulos da dissertação contemplam os seguintes assuntos: no Capítulo 1, apresentamos as ideias elementares e os principais resultados da Geometria Diferencial Afim de curvas planas. No Capítulo 2, começamos por entender o conceito de envelopes; posteriormente definimos a família de retas médias de uma curva

plana e estudamos cada um dos casos que compõem o envelope dessa família de retas. Na parte final desse capítulo, apresentamos a estrutura local do envelope das retas médias. No capítulo final, fazemos uma extensão do que foi feito no capítulo anterior, onde definimos a família de retas intermediárias de uma curva plana e também estudamos o envelope dessa família de retas. Também apresentamos o comportamento local desse envelope. Por fim, é feita uma breve introdução a alguns conceitos da teoria de singularidades com o objetivo de fazermos uma releitura do envelope das retas intermediárias de uma curva plana.

O último capítulo, aliás, é fruto de uma pesquisa a qual inciou-se no final de 2016, quando este que vos escreve foi aluno de iniciação científica do professor Ady. Na época, o Ady levantou a hipótese de generalizarmos a reta média para uma reta intermediária e estudarmos o envelope dessa família de retas associadas a uma curva plana. Nessa perspectiva, iniciamos os trabalhos e o tempo passou. Posteriormente, o Mostafa, até então pós-doutorando no Programa de Pós Graduação no DMA, chegou e veio a nos ajudar, acrescentando muito em nossa pesquisa. Finalmente, em 2019, a pesquisa proposta foi finalizada e um artigo, [9], foi submetido por nós no final daquele ano, o qual veio a ser publicado em junho de 2020.

Capítulo 1

Conceitos iniciais

Abordaremos, neste capítulo, os conceitos básicos usados ao longo do estudo feito nos capítulos posteriores da dissertação. Serão abordadas as ideias elementares que cercam a teoria de curvas planas na Geometria Diferencial, em particular, na geometria não euclidiana conhecida como Geometria Diferencial Afim.

1.1 Grupo das transformações afins

Antes de apresentarmos as ideias centrais da geometria diferencial afim de curvas planas, é preciso entendermos como age um certo grupo de transformações definidas no plano. Tal grupo é conhecido como grupo das transformações afins e, baseado nele, estenderemos os conceitos para as curvas no plano. Destacamos que o objetivo desta seção é meramente contextualizar nosso estudo a respeito das transformações afins, sendo dispensada uma abordagem mais aprofundada sobre o tema. Mais detalhes com um estudo mais amplo podem ser vistos em [3] e [7].

Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ um ponto no plano bidimensional afim. Dada uma matriz 2×2 não-singular $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2$, então uma transformação $\mathbf{x} \mapsto \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ é uma transformação afim desde que

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j + b_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Se escrevermos $\mathbf{b}$ como sendo $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$, então essa transformação afim pode

ser expressa como

$$\bar{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (1.1)$$

Definição 1.1. *As transformações do tipo (1.1) formam um grupo (com a composição usual de transformações), o qual é chamado de grupo das transformações afins, ou, simplesmente, grupo afim, denotado por $\mathcal{A}^2$.*

Qualquer área no plano é ampliada ou reduzida pelo fator $\det(A)$ por meio de transformações do tipo (1.1). Sendo assim, um importante subgrupo de $\mathcal{A}^2$ é definido por aquelas matrizes A cujo $\det(A) = 1$, isto é, tais transformações preservam áreas, as quais são chamadas de transformações *equi-afins*.

Além de preservarem área, as transformações equi-afins em $\mathcal{A}^2$ preservam: o *grau* da curva, isto é, cônicas são levadas em cônicas, mais ainda, preservam o tipo da cônica; *paralelismo*, duas retas paralelas continuam paralelas após ação de uma transformação afim; *contato* entre curvas, ou seja curvas que compartilham a mesma reta tangente, tangente afim ou normal afim continuam compartilhando-os após a aplicação de uma transformação afim; *proporção* de distância Euclidiana ao longo de uma reta, em particular, pontos médios de cordas são invariantes. Todos esses conceitos são de extrema importância no presente trabalho e serão apresentados ao longo da exposição do conteúdo.

Mediante a ação do grupo das transformações afins, definiremos a seguir alguns conceitos básicos envolvendo invariantes afins.

Definição 1.2. *Uma reflexão afim com o eixo d é uma transformação afim de ordem 2 (a transformação igual à sua inversa, mas não a identidade) a qual leva d pontualmente fixada.*

Definição 1.3. *Uma curva γ é simétrica afim sobre um eixo d se existe uma reflexão afim com eixo d a qual leva γ nela mesma.*

Esses conceitos podem ser muito úteis para simplificarmos algumas situações geométricas. Podemos, por exemplo, considerar um sistema de coordenadas o qual dois arcos locais de curvas, em uma posição genérica, onde um desses arcos passe pela origem e seja tangente ao eixo x e o outro passe por um ponto (a, b) . Além disso, é possível considerarmos também uma aplicação afim a qual nos dá $a = 0$, o que significa que o segundo arco da curva é transladado e cruza o eixo y .

Sendo assim, inciaremos agora nossa jornada em direção aos conceitos e definições básicas da geometria diferencial afim de curvas planas, tendo como referências [2], [4] e [7].

1.2 Comprimento de arco afim

Uma vez que transformações *equi-afins* preservam área, é natural procurarmos então uma nova parametrização para as curvas planas a qual envolva o uso de área, desde que essa possa ser invariante afim.

Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana suave parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Dado que $u_1(t)$ é o vetor $\gamma' = d\gamma/dt$ (tangente à curva), procuramos um segundo vetor $u_2(t)$ que esteja ao longo da curva, tal que o paralelogramo definido por $u_1(t)$ e $u_2(t)$ tenha área unitária constante, isto é, $[u_1(t), u_2(t)] = 1$, para todo $t \in I$, em que $[\cdot, \cdot]$ representa a notação usada para determinantes.

Na verdade, a ideia básica por trás da geometria diferencial afim de curvas planas é definir um novo parâmetro s que seja invariante por transformações afins; isto é, definir γ por $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in I$, em que o subscrito s refere-se à derivada com respeito ao parâmetro s .

Os passos apresentados a seguir nos conduzirão para encontrarmos essa nova reparametrização invariante afim.

Definição 1.4. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana suave parametrizada por um parâmetro t qualquer. Um ponto $\gamma(t_0)$ da curva é chamado de ponto de inflexão se $[\gamma_t(t_0), \gamma_{tt}(t_0)] = 0$. A curva γ é dita ser sem pontos de inflexão se $[\gamma_t(t), \gamma_{tt}(t)] \neq 0$, para todo $t \in I$.*

Considere $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por um parâmetro t arbitrário, sem pontos de inflexão. Queremos reparametrizá-la com um parâmetro s tal que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in I$. Daí:

$$\gamma(t) = \gamma(s(t)) \implies \gamma_t = \gamma_s s_t \text{ e } \gamma_{tt} = \gamma_{ss} s_t^2 + \gamma_s s_{tt}.$$

Assim:

$$[\gamma_t, \gamma_{tt}] = [\gamma_s s_t, \gamma_{ss} s_t^2 + \gamma_s s_{tt}] = s_t^3 [\gamma_s, \gamma_{ss}] = s_t^3, \text{ isto é,}$$

$$s_t = [\gamma_t, \gamma_{tt}]^{\frac{1}{3}} \implies s(t) = \int_{t_0}^t [\gamma_{\bar{t}}, \gamma_{\bar{t}\bar{t}}]^{\frac{1}{3}} d\bar{t}. \quad (1.2)$$

Observe que na construção acima, $s_t = [\gamma_t, \gamma_{tt}]^{\frac{1}{3}} \neq 0$, para todo $t \in I$, uma vez que consideramos a curva sem pontos de inflexão, isto é, $[\gamma_t, \gamma_{tt}] \neq 0$, para todo $t \in I$. Logo, a função $s : I \rightarrow J$ é um difeomorfismo. No fundo, a mudança de parâmetro procurada é dada pela composição $(\gamma \circ s^{-1}) : J \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definição 1.5. Dada uma curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por um parâmetro t arbitrário, sem pontos de inflexão, a função $s(t) = \int_{t_0}^t [\gamma_{\bar{t}}, \gamma_{\bar{t}\bar{t}}]^{\frac{1}{3}} d\bar{t}$ é chamada de **função comprimento de arco afim** medido de t_0 até t .

Definição 1.6. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada e convexa, dizemos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco afim s (p.p.c.a.a. s) se, e somente se, $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in I$.

Observação 1.1. O fato de uma curva estar parametrizada pelo comprimento de arco afim impõe uma orientação para tal curva. De fato, a curvatura euclidiana pode ser expressa por

$$\kappa(s) = \frac{[\gamma_s, \gamma_{ss}]}{||\gamma_s||^3}.$$

Como $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in I$, então $\kappa(s) = ||\gamma_s||^{-3} > 0$, para todo $s \in I$.

1.3 Tangente afim e normal afim

Um questionamento natural a ser feito é a respeito de quem são os vetores tangentes e normais afins. Ao olharmos para a Definição 1.6, já temos os candidatos para os dois postos.

Definição 1.7. Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva sem pontos de inflexão parametrizada pelo comprimento de arco afim. O vetor $\gamma_s(s_0)$ é o **vetor tangente afim** a γ em $\gamma(s_0)$ e o vetor γ_{ss} é o **vetor normal afim** a γ em $\gamma(s_0)$.

Caso v seja o comprimento de arco euclidiano ($||\gamma_v|| = 1$), então, de (1.2) temos:

$$\frac{ds}{dv} = [\gamma_v, \gamma_{vv}]^{\frac{1}{3}}.$$

Assim, deduzimos que:

$$\frac{ds}{dv} = [\vec{t}, \kappa \vec{n}]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{ds}{dv} = \kappa^{\frac{1}{3}},$$

onde κ é a curvatura euclidiana de γ , $\vec{t}$ e $\vec{n}$ são o tangente e o normal euclidianos unitários, respectivamente. Como

$$\cdot \frac{d}{dv} \gamma(s(v)) = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{dv} \Rightarrow \gamma_s = \kappa^{-\frac{1}{3}} \vec{t} \quad (1.3)$$

Além disso, se γ está parametrizada por um parâmetro t arbitrário, podemos expressar também o vetor normal afim em função de t .

Proposição 1.1. *Se $\gamma = \gamma(t)$ é uma parametrização regular qualquer da curva γ sem pontos de inflexão, onde $k(t) = [\gamma_t, \gamma_{tt}]$, então o tangente afim e o normal afim, são, respectivamente:*

$$\gamma_s = k^{-\frac{1}{3}} \gamma_t \text{ e } \gamma_{ss} = k^{-\frac{2}{3}} \gamma_{tt} - \frac{1}{5} k' k^{-\frac{5}{3}} \gamma_t.$$

Demonstração: Considere $\gamma(t) = \gamma(s(t))$, onde s é a mudança de parâmetros dada na equação (1.2). Assim:

$$\gamma(t) = \gamma(s(t)) \Rightarrow \gamma_t = \gamma_s s_t \text{ e } \gamma_{tt} = \gamma_{ss} s_t^2 + \gamma_s s_{tt}.$$

Daí, isolando γ_s e γ_{ss} na expressão anterior e, tendo em vista que $s_t = [\gamma_t, \gamma_{tt}]^{\frac{1}{3}} = \kappa(t)^{\frac{1}{3}}$, basta fazer as devidas substituições e concluirmos o desejado. $\square$

Exemplo 1.1. *Considere a curva suave $\gamma(t) = (t, f(t))$. Assim, temos:*

$$\gamma_t(t) = (1, f'(t)), \gamma_{tt} = (0, f''(t)), \kappa(t) = f''(t), \kappa_t(t) = f'''(t).$$

Logo, pela proposição anterior, podemos determinar o normal afim a γ em $\gamma(t)$, o qual é expresso por:

$$\gamma_{ss}(t) = \left(-\frac{1}{3} (f''(t))^{-\frac{5}{3}} f'''(t), (f''(t))^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} f'(t) (f''(t))^{-\frac{5}{3}} f'''(t) \right).$$

Em uma parametrização arbitrária de γ , a reta tangente afim a γ em $\gamma(s(t_0))$ é a reta paralela a $\gamma_t(s(t_0))$ a qual passa por $\gamma(t_0)$. Se $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, então a reta

tangente afim a γ em $\gamma(t_0)$ é

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : [\mathbf{x} - \gamma(t_0), \gamma_t(t_0)] = 0\}.$$

Além disso, a reta normal afim a γ em $\gamma(t_0)$ é a reta paralela a $\gamma_{tt}(s(t_0))$ a qual passa por $\gamma(t_0)$. Daí, usando a expressão para γ_{tt} , encontramos a equação para a reta normal afim.

Proposição 1.2. *Dada uma curva $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ parametrizada por um parâmetro arbitrário t , a equação da reta normal afim a γ é dada por:*

$$(y - Y)(\kappa_t X_t - 3\kappa X_{tt}) + (x - X)(3\kappa Y_{tt} - \kappa_t Y_t) = 0.$$

Demonstração: Para $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$, temos

$$\gamma_{tt} = \frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}}(\kappa_t X_t - 3\kappa X_{tt}, 3\kappa Y_{tt} - \kappa_t Y_t).$$

Note que a reta passando por um ponto de γ e paralela a γ_{tt} é dada por

$$\{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : [\mathbf{x} - \gamma(t_0), \gamma_{tt}(t_0)] = 0\}, \text{ isto é,}$$

$$\frac{1}{3}\kappa^{-\frac{5}{3}} \begin{vmatrix} \kappa_t X_t - 3\kappa X_{tt} & 3\kappa Y_{tt} - \kappa_t Y_t \\ x - X & y - Y \end{vmatrix} = 0.$$

Ao multiplicarmos a igualdade anterior por $3\kappa^{\frac{5}{3}}$, obtemos a equação da reta normal afim. $\square$

1.3.1 Interpretação Geométrica do Normal Afim

Ao se definir o normal afim da forma o qual foi definido, não fica estabelecido com clareza a posição e direção desse vetor. É interessante perceber que, ao contrário do que acontece na geometria euclidiana, aqui, o normal afim não tem uma relação angular definida em relação ao tangente afim, isto é, eles não necessariamente formam um ângulo reto.

De fato, o vetor normal afim em $\gamma(s_0)$ pode ser determinado da seguinte forma: Consideramos a reta tangente à curva em $\gamma(s_0)$. Em uma vizinhança desse ponto, traçamos retas paralelas a reta tangente em $\gamma(s_0)$. Essas retas paralelas interceptarão a curva em dois pontos distintos gerando segmentos de retas paralelos à reta tangente. Para cada segmento de reta, considere seu centro de massa, que, neste caso, coincide com o ponto médio de cada segmento. Note bem que o lugar geométrico desses pontos médios irá gerar uma curva. O vetor que é tangente em $\gamma(s_0)$ à essa curva gerada é o vetor normal afim em $\gamma(s_0)$ à curva dada. Esse detalhe técnico pode ser verificado em [3].

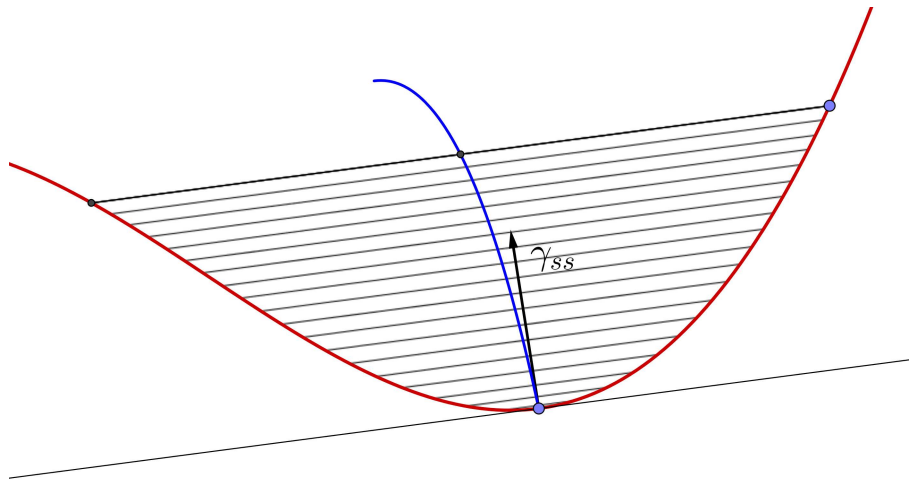


Figura 1.1: Vetor normal afim à curva γ em $\gamma(s_0)$.

1.4 Curvatura Afim

A exemplo do que ocorre na geometria diferencial euclidiana com a curvatura euclidiana de uma curva γ sendo o mais simples invariante euclidiano, na geometria diferencial afim também podemos definir o menor invariante sob transformações afins, o qual chamamos de curvatura afim.

Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim. Assim, $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = 1$, para todo $s \in I$. Daí, derivando a igualdade anterior com respeito a s , temos $[\gamma_s, \gamma_{sss}] = 0$, para todo $s \in I$. Isso significa que $\gamma_{sss} + \mu \gamma_s = \vec{0}$, onde

$\mu : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real. Além disso, observe que: $\gamma_{sss} = -\mu\gamma_s$, assim:

$$[\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] = [\gamma_{ss}, -\mu\gamma_s] = -\mu[\gamma_{ss}, \gamma_s] = \mu(s).$$

Definição 1.8. A função $\mu(s)$ definida anteriormente é a **curvatura afim** da curva γ e é o mais simples não-trivial invariante diferencial afim.

Exemplo 1.2. Considere a parábola dada por $\gamma(t) = \left(a + bt, c + \frac{t^2}{2b}\right)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, onde: $\gamma_t = \left(b, \frac{t}{b}\right)$ e $\gamma_{tt} = \left(0, \frac{1}{b}\right)$, isto é, $[\gamma_t, \gamma_{tt}] = 1$, portanto, γ está p.p.c.a.a. Assim, $\mu(t) = [\gamma_{tt}, \gamma_{ttt}] = 0$.

Em um caso particular, se $a = c = 0$ e $b = 1$, então $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$, a qual nos dá $\gamma_t = (1, t)$ e $\gamma_{tt} = (0, 1)$.

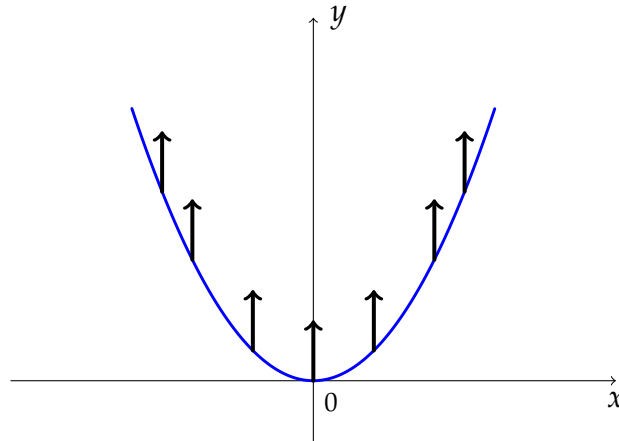


Figura 1.2: Vetores normais afins à parábola dada por $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$.

Do exemplo acima, tiramos algumas conclusões interessantes. Em qualquer ponto da parábola, o normal afim está na direção do eixo y . Além disso, a curvatura da parábola é constante para todo t ; na verdade qualquer seção cônica possui curvatura afim constante.

Teorema 1.1. Uma curva γ tem curvatura afim constante se, e somente se, γ é uma seção cônica regular.

Demonstração: Inicialmente, vale ressaltar que as cônicas regulares em questão são a elipse, parábola e hipérbole.

Para a implicação direta, temos o seguinte:

Sem perda de generalidade, considere $\gamma(s)$ p.p.c.a.a. cuja curvatura afim $\mu(s)$ seja constante. Assim, temos: $\gamma_{sss} + \mu\gamma_s = \vec{0}$, ou seja, $\gamma_{sss} = -\mu\gamma_s$. Então podem ocorrer três casos:

i. $\mu = 0$:

Se $\mu = 0$, então $\gamma_{sss} = \vec{0}$. Integrando em relação à s , obtemos:

$$\int \gamma_{sss} ds = \int \vec{0} ds \Rightarrow \gamma_{ss} = \vec{a} \Rightarrow \gamma_s = \vec{a}s + \vec{b} \Rightarrow \gamma(s) = \frac{\vec{a}}{2}s^2 + \vec{b}s + \vec{c},$$

onde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são vetores constantes do plano.

A menos de transformações afins, podemos considerar $\vec{a} = (0, 1), \vec{b} = (1, 0), \vec{c} = \vec{0}$. Note que $[\gamma_s, \gamma_{ss}] = [\vec{a}s + \vec{b}, \vec{a}] = [\vec{a}s, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{a}] = 1$. De fato, γ está p.p.c.a.a., portanto, $\gamma(s) = \left(s, \frac{s^2}{2}\right)$, a qual é uma parábola.

ii. $\mu > 0$:

Se $\mu(s) > 0$, então $\gamma_{sss} + \mu\gamma_s = \vec{0} \Leftrightarrow (\gamma_{ss})_s + \mu(\gamma_s) = \vec{0}$. Considere $y(s) = \gamma_s$ uma função vetorial, daí, $y'' + \mu y = 0$. Para determinarmos $\gamma(s)$, precisamos resolver essa EDO de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes, onde a função y é uma função vetorial.

A equação característica da EDO em questão é $1r^2 + \mu = 0$, a qual possui raízes da forma $r = \alpha \pm i\beta$, expressas por:

$$r_1 = 0 - i\sqrt{\mu} \text{ e } r_2 = 0 + i\sqrt{\mu}, \text{ onde } \alpha = 0, \beta = \sqrt{\mu}.$$

Assim, obtemos a solução geral:

$$y(s) = \vec{a}e^{\alpha s} \cos(\beta s) + \vec{b}e^{\alpha s} \sin(\beta s) = \vec{a} \cos(\sqrt{\mu}s) + \vec{b} \sin(\sqrt{\mu}s), \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2.$$

Como $y(s) = \gamma_s$, $\gamma_{ss} = -\sin(\sqrt{\mu}s)\sqrt{\mu}\vec{a} + \cos(\sqrt{\mu}s)\sqrt{\mu}\vec{b}$. Note que $\gamma_s(0) = \vec{a}$ e $\gamma_{ss}(0) = \sqrt{\mu}\vec{b}$. Precisamos ainda estipular algumas condições para $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de forma que γ esteja p.p.c.a.a.. A menos de transformações afins, podemos considerar $\vec{a} = (1, 0)$ e $\sqrt{\mu}\vec{b} = (0, 1)$ para que $[\gamma_s(0), \gamma_{ss}(0)] = 1$, obtendo $\vec{b} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$.

Concluimos assim que

$$\gamma_s = \left(\cos(\sqrt{\mu}s), \frac{\sin(\sqrt{\mu}s)}{\sqrt{\mu}} \right).$$

Portanto,

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sin(\sqrt{\mu}s)}{\sqrt{\mu}} + d_1, \frac{\cos(\sqrt{\mu}s)}{\mu} + d_2 \right),$$

a qual é uma elipse.

ii. $\mu < 0$:

De forma análoga ao caso *ii*, se $\mu < 0$, precisaremos resolver uma EDO de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes de uma função vetorial, cuja solução é:

$$y(s) = \gamma_s = \vec{a}e^{ks} + \vec{b}e^{-ks}, \text{ onde } k = \sqrt{-\mu}.$$

Após transformações afins convenientes de forma que $[\gamma_s(0), \gamma_{ss}(0)] = 1$, obtemos $\vec{a} = \left(1, \frac{1}{4k}\right)$ e $\vec{b} = \left(1, -\frac{1}{4k}\right)$.

Portanto,

$$\gamma(s) = \left(\frac{e^{ks} - e^{-ks}}{4k^2} + d_1, \frac{e^{ks} + e^{-ks}}{4k^2} + d_2 \right) = \left(\frac{\sinh(ks)}{2k^2} + d_1, \frac{\cosh(ks)}{2k^2} + d_2 \right),$$

a qual é uma hipérbole.

Para a implicação contrária, temos:

i. γ é uma elipse;

Considere $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a, b \neq 0$, cujo traço é uma elipse. Note que $\gamma_t = (-a \sin t, b \cos t)$ e $\gamma_{tt} = (-a \cos t, b \sin t)$, isto é, $[\gamma_t, \gamma_{tt}] = ab \neq 1$, ou seja, $\gamma(t)$ não está p.p.c.a.a.

Reparametrizando γ p.c.a.a., obtemos $\gamma(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right), b \sin \left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}} \right) \right)$.

Calculando a curvatura afim,

$$\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] = \frac{ab \cos^2(s(ab)^{-\frac{1}{3}})}{(ab)^{\frac{5}{3}}} + \frac{ab \sin^2(s(ab)^{-\frac{1}{3}})}{(ab)^{\frac{5}{3}}} = (ab)^{-\frac{2}{3}} > 0.$$

ii. γ é uma hipérbole;

Seja $\gamma(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$, $a, b \neq 0$, uma hipérbole. Observe que $\gamma_t = (a \sinh t, b \cosh t)$ e $\gamma_{tt} = (a \cosh t, b \sinh t)$, isto é, $[\gamma_t, \gamma_{tt}] = -ab \neq 1$, ou seja, $\gamma(t)$ não está p.p.c.a.a.

Reparametrizando γ p.c.a.a., obtemos:

$$\gamma(s) = \left(a \cosh \left(\frac{s}{(-ab)^{\frac{1}{3}}} \right), b \sinh \left(\frac{s}{(-ab)^{\frac{1}{3}}} \right) \right).$$

Calculando a curvatura afim,

$$\mu(s) = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}] = \frac{ab \cosh^2(s(-ab)^{-\frac{1}{3}})}{(-ab)^{\frac{5}{3}}} + \frac{ab \sinh^2(s(-ab)^{-\frac{1}{3}})}{(-ab)^{\frac{5}{3}}} = -(ab)^{-\frac{2}{3}} < 0.$$

iii. γ é uma parábola;

Este caso foi feito no Exemplo 1.2. □

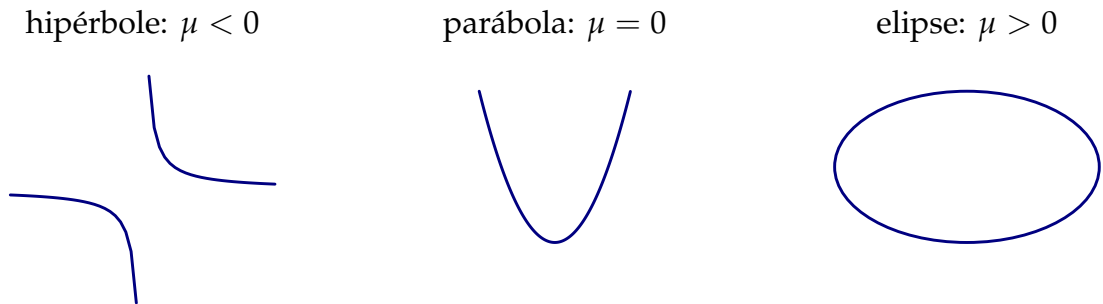


Figura 1.3: Curvas com curvatura afim constante.

Também podemos expressar a curvatura afim de γ em função de um parâmetro t qualquer.

Teorema 1.2. *Seja γ uma curva plana suave sem pontos de inflexão parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Se escrevermos $\kappa = [\gamma_t, \gamma_{tt}]$, então a curvatura afim pode ser expressa como:*

$$\mu = \frac{1}{9}(3\kappa\kappa_{tt} - 5\kappa_t^2 + 9\kappa[\gamma_{tt}, \gamma_{ttt}])\kappa^{-\frac{8}{3}}.$$

Demonstração: Considere γ parametrizada pelo comprimento de arco afim s . Sabemos que $s_t = \kappa^{\frac{1}{3}}$ e $\gamma_s = \gamma_t \kappa^{-\frac{1}{3}}$. Assim, basta calcular γ_{ss} , γ_{sss} e usar que $\kappa_t = [\gamma_t, \gamma_{ttt}]$ para simplificar a expressão $\mu = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}]$ e obter o desejado.

□

Seja γ uma curva plana dada na forma de Monge, sem pontos de inflexão perto da origem, expressa por

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}a_2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}a_kt^k + g(t)t^{k+1} \right),$$

para a qual cada $a_i \in \mathbb{R}$, com $a_2 \neq 0$, e g uma função suave. Podemos calcular a curvatura afim de γ em $\gamma(0)$ usando o teorema anterior, isto é,

$$\mu(0) = \frac{3a_2a_4 - 5a_3^2}{9a_2^{\frac{8}{3}}}.$$

Sendo assim, podemos enxergar a função curvatura afim da curva plana γ como um invariante diferencial afim de ordem 4.

Por outro lado, o normal afim de γ é um invariante diferencial afim de ordem 3 expresso por

$$\gamma_{ss}(0) = a_2^{-\frac{5}{3}} \left(-\frac{a_3}{3}, a_2^2 \right).$$

1.5 Contato entre Curvas na Geometria Diferencial Afim

Passaremos a estudar agora uma propriedade entre duas curvas a qual chamamos de contato.

Definição 1.9. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F(x, y) = 0$ curvas regulares. Dizemos que F e α têm k -contato em $t = t_0$, se $g(t) = F(\alpha(t))$ satisfaz $g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{k-1}(t_0) = 0$, mas $g^k(t_0) \neq 0$. Se retirarmos a condição $g^k(t_0) \neq 0$, então dizemos maior ou igual a contato ou, pelo menos k -contato.*

Geometricamente, podemos entender o estudo do contato entre duas curvas num ponto p_0 como sendo o "quão coladas" essas curvas estão em p_0 .

Exemplo 1.3. *Considere a curva $\gamma(t) = (t, t^k)$, k inteiro positivo. Estudemos o contato de γ com o eixo x em $t_0 = 0$, isto é, na origem $(0, 0)$. Podemos tomar $F(x, y) = y$ de tal sorte que $F(x, y) = 0$ represente o eixo x . Assim, $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k$.*

Se $k = 1$, temos $g(t) = t$. Então $g'(t) = 1$. Daí, $g(0) = 0$, mas $g'(0) = 1 \neq 0$. Logo, γ e F têm contato de ordem um (as curvas apenas se cruzam na origem).

Se $k = 2$, temos $g(t) = t^2$. Então $g'(t) = 2t$ e $g''(t) = 2$. Daí, $g(0) = g'(0) = 0$, mas $g''(0) = 2 \neq 0$. Logo, γ e F tem contato de ordem 2 na origem.

De modo geral, para um certo $k \geq 1$, temos $g(t) = t^k$. Assim, $g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, mas $g^{(k)}(t) = k!$, isto é, $g^{(k)}(0) \neq 0$. Portanto, γ e F têm contato de ordem k em $t_0 = 0$.

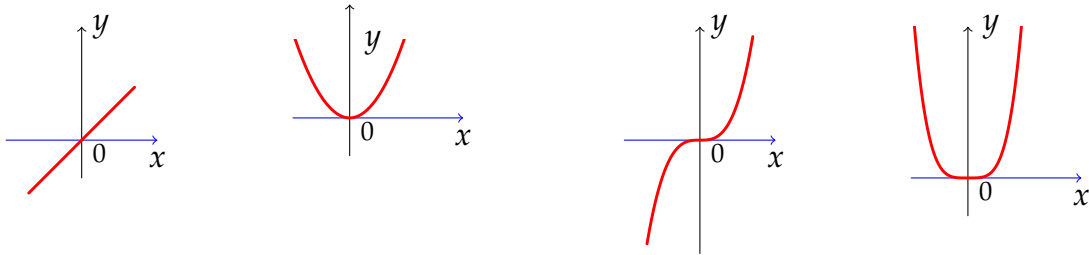


Figura 1.4: Curvas $\gamma(t) = (t, t^k)$ para $k = 1, 2, 3$ e 4 , respectivamente.

Proposição 1.3. *Sejam γ e δ duas curvas planas regulares. Se γ e δ possuem a mesma tangente afim em t_0 , então elas têm 3-contato em t_0 .*

Demonstração: Como ambas as curvas são regulares, podemos supor que as duas curvas estão parametrizadas pelo comprimento de arco euclidiano.

Duas curvas com mesmo tangente afim implica ambas curvas possuem o mesmo tangente euclidiano e, pela relação entre os parâmetros euclidianos e afins apresentada na Equação (1.3), segue que as curvaturas euclidianas são iguais para as duas curvas.

A curva γ tem pelo 3-contato com um círculo passando em $\gamma(t_0)$ se, e somente se, o centro de tal círculo é o centro de curvatura (euclidiano) de γ (consequência da Proposição 2.14, Capítulo 2, em [1]). O mesmo acontece com δ . Como as curvaturas euclidianas de ambas as curvas são iguais em t_0 , o raio de curvatura delas coincidem. Daí, γ e δ têm, pelo menos, 3-contato em t_0 com o mesmo círculo. Logo, isso garante que γ e δ também têm, pelo menos, 3-contato em t_0 . $\square$

Teorema 1.3. *Um ponto (x_0, y_0) está sobre a normal afim de γ em s_0 se, e somente se, (x_0, y_0) é centro de uma cônica que tem pelo menos 4-contato com a curva em $\gamma(s_0)$.*

Demonstração: $(\Leftrightarrow)$

Toma-se (x_0, y_0) na reta normal afim de γ em s_0 . A menos de transformações afins convenientes, podemos considerar:

- a reta normal afim em $\gamma(s_0)$ como sendo o eixo y de forma que $\gamma(s_0) = \vec{0}$;
- $(x_0, y_0) = (0, y_0) = \left(0, \frac{a}{c}\right)$, para convenientes a e c não nulos;
- $\gamma_s(s_0) = (1, 0)$ e $\gamma_{ss}(s_0) = (0, 1)$.

Daí, a cônica dada por $C(x, y) = ax^2 + cy^2 - 2ay = 0$ tem centro em $\left(0, \frac{a}{1c}\right) = (x_0, y_0)$ e tem pelo menos 4-contato com a curva em s_0 . Para verificar isso, tomamos a função contato como sendo $g(s) = C(\gamma(s))$ e a condição da ordem de contato vem como consequência dos fatos assumidos inicialmente.

□

1.6 Evoluta afim

De forma semelhante ao que acontece na geometria diferencial euclidiana, podemos definir uma nova curva a partir de uma curva dada usando os conceitos da geometria diferencial afim.

Caso a curvatura afim de uma curva γ p.p.c.a.a. seja não nula em s_0 , associamos a s_0 o ponto $\gamma(s_0) + \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0)$ chamado de centro de curvatura afim.

Assim, definimos uma nova curva como sendo o lugar geométrico dos centros de curvatura afim da curva γ .

Definição 1.10. *Seja γ uma curva p.p.c.a.a. com $\mu(s) \neq 0$. A **evoluta afim** de γ é o lugar geométrico dos centros de curvatura afim, isto é, $e(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)}\gamma_{ss}(s)$.*

Um questionamento pertinente é saber a respeito das singularidades da evoluta afim de uma curva γ p.p.c.a.a. De fato, essa nova curva guarda informações interessantes a respeito da curva γ dada. Além disso, podemos fazer uma análise da evoluta de γ tendo em vista as duas definições a seguir.

Definição 1.11. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave sem inflexões parametrizada pelo comprimento de arco afim. Dizemos que a curva γ tem um vértice afim em $\gamma(s_0)$ se $\mu(s_0) \neq 0$*

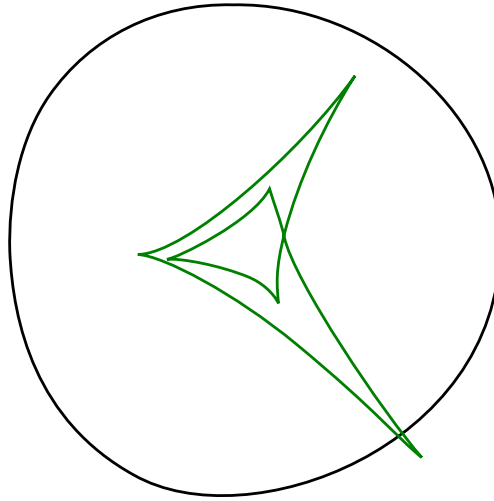


Figura 1.5: Na figura acima, temos a curva $\gamma(t) = (0.08 \cos(2\pi t) + \cos(\pi t), 0.03 \sin(2\pi + 6.7) + \sin(\pi t))$ em preto e sua *Evoluta Afim* em verde.

e $\mu'(s_0) = 0$. Um vértice afim é chamado ordinário se $\mu''(s_0) \neq 0$. Se $\mu''(s_0) = 0$, então o vértice afim é dito ser de ordem superior.

Voltemos ao caso da evoluta afim. Já que $e(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\mu(s)}\gamma_{ss}(s)$, temos:

$$e_s(s) = \gamma_s(s) + \left(\frac{-\mu_s(s)}{\mu(s)^2} \right) \gamma_{ss}(s) + \frac{1}{\mu(s)} \gamma_{sss}(s).$$

Como $\gamma_{sss} = -\mu\gamma_s$, então $e_s(s_0) = \vec{0}$ se, e somente se, $\mu_s(s_0) = 0$. Ou seja, a evoluta afim de γ é singular em $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $\gamma(s_0)$ é um vértice afim de γ . Note então que os pontos singulares da evoluta afim estão associados aos vértices afins da curva dada.

De maneira geral, existem pelo menos seis pontos numa curva γ oval para a qual $\mu_s = 0$, ou seja, existem pelo menos seis vértices afins em γ . Caso p seja um ponto não singular da evoluta afim de γ , então p é centro de uma cônica que faz um contato de pelo menos ordem 5 com γ . Por outro lado, os pontos singulares da evoluta afim são chamados de pontos sextáticos (centro de cônicas que fazem 6-contato com a curva). Esses detalhes podem ser conferidos em [11].

Finalizamos assim a exposição dos conceitos fundamentais da geometria diferencial afim de curvas planas, muitos dos quais serão usados naturalmente nos dois próximos capítulos, cernes desta dissertação.

Capítulo 2

Envelope de retas médias de uma curva plana

A parte de geometria diferencial de curvas planas relacionada ao estudo do "envelope" é algo peculiar. De fato, dada uma curva plana, ao se definir outras curvas a partir da curva dada (um bom exemplo são retas), geralmente associadas a uma família, o envelope de tal família pode nos gerar curvas bastante interessantes.

Um exemplo é o caso dos raios de luz refletidos no interior de uma caneca. Esses raios refletidos contribuem para a formação de uma curva chamada de cáustica. Tal curva é conhecida como o envelope desses raios de luz refletidos.

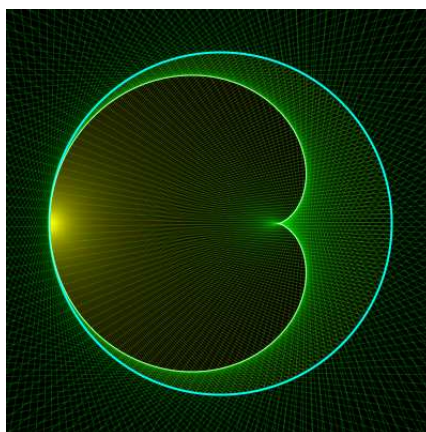


Figura 2.1: O cardioide, em verde, é o envelope dos raios refletido no interior da superfície da caneca, em azul.

No caso do envelope de retas médias (retas essas associadas à uma curva plana oval), tal conjunto já foi estudado anteriormente em [6] e [7]. A forma

como conduziremos nossa abordagem aqui é diferente da qual foi adotada pelos autores citados. De fato, apresentaremos um caminho o qual facilita uma eventual generalização desses conceitos para o caso de superfícies.

Faremos uma breve apresentação do conceito formal do envelope antes de partirmos para o estudo do envelope de retas médias. Vale ressaltar que o conceito de envelope independe da geometria em questão. Porém, os conjuntos regerados por meio do envelope, alvos de nosso estudo, se dão no campo da geometria diferencial afim.

Este capítulo, aliás, é uma compilação de resultados presentes em [7] e [8].

2.1 Envelopes

Iniciaremos apresentando a definição do que vem a ser o envelope de uma família F .

Definição 2.1. *O envelope, ou discriminante, de uma família $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$, a n parâmetros, é o conjunto*

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid \exists u \in \mathbb{R}^n; F(u, x) = \frac{\partial F}{\partial u_i}(u, x) = 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Dependendo do espaço em que a F está definida, o conjunto solução do envelope pode gerar coisas muito atraentes.

Suponha que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$. Usaremos $t, x_1, \dots, x_r$ como as coordenadas do lado esquerdo e pensaremos numa família de funções de x , parametrizadas por t .

Vejamos alguns exemplos para fixarmos melhor o conceito.

Exemplo 2.1. *Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(t, x) = (x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1$, de modo que $x = (x_1, x_2)$. Para cada t real, a curva $F(t, x) = 0$ nos dá $(x_1 - t)^2 + x_2^2 - 1 = 0$, a qual representa um círculo de raio 1 centrado no eixo x_1 .*

De acordo com a definição do envelope, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R}; F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R}; (x_1 - t)^2 + x_2^2 = 1 \text{ e } 2(x_1 - t) = 0 \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x_1 = t \text{ e } x_2^2 = 1, \text{ para algum } t \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x_2 = \pm 1 \right\},
 \end{aligned}$$

ou seja, o envelope dessa família F é constituído pelas retas $y = \pm 1$ no plano. Note que cada t real corresponde a dois elementos do envelope, a saber $(t, 1)$ e $(t, -1)$.

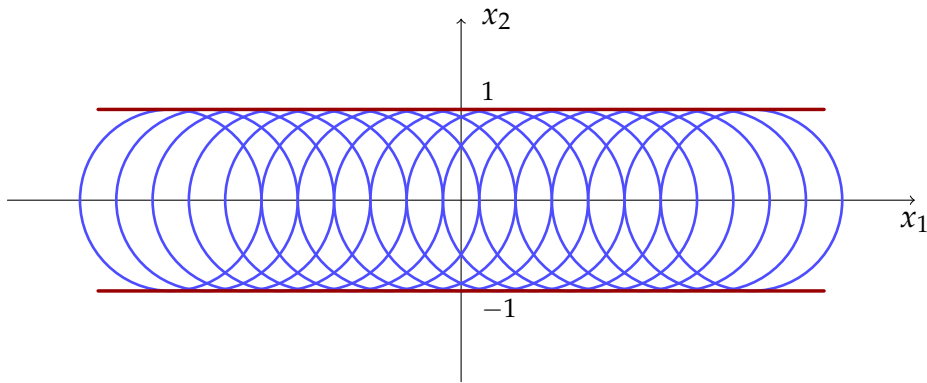


Figura 2.2: Os círculos dados por $F(t, x) = 0$ estão em azul e o envelope da família F são as retas $x_2 = \pm 1$ em vermelho.

Exemplo 2.2. Considere a família $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $F(t, x) = 2t^3 + t(1 - 2x_2) - x_1$, onde $F(t, x) = 0$ é a família das retas normais à parábola $x_2 = x_1^2$.

Assim:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R}; F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\} \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \exists t \in \mathbb{R}; 2t^3 + t(1 - 2x_2) - x_1 = 0 \text{ e } 6t^2 + 1 - 2x_2 = 0 \right\} \\
 &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 2(2x_2 - 1)^3 = 27x_1^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a curva no plano expressa por $2(2x_2 - 1)^3 = 27x_1^2$ é conhecida como evoluta euclidiana da parábola. Genericamente, o envelope das retas normais à uma curva plana é a evoluta euclidiana da curva dada. Veja o Capítulo 5 de [1].

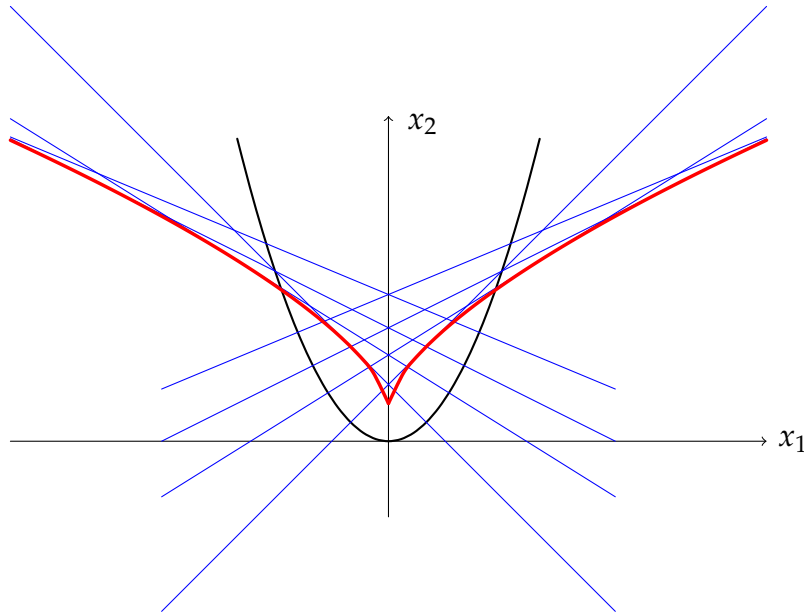


Figura 2.3: As retas normais à parábola $x_2 = x_1^2$ estão em azul e o envelope dessa família de retas está em vermelho.

De modo geral, também podemos ver o envelope de uma família de curvas no plano como sendo o conjunto limite dos pontos de intersecção de curvas da família F infinitesimalmente próximas, resultado do Capítulo 5, Seção 5.18, em [1].

2.2 Envelope de retas médias de uma curva plana

Passemos ao nosso objetivo, o qual é o estudo do envelope de uma família específica de retas, chamadas de retas médias, definidas sobre uma curva plana, convexa fechada (oval).

Definição 2.2. Sejam γ uma curva oval, $p_1, p_2 \in \gamma$. A **reta média** de $p_1 = \gamma(t_1)$ e $p_2 = \gamma(t_2)$ é:

- i. a reta que liga o ponto de intersecção das tangentes em p_1, p_2 ao ponto médio da corda formada por estes pontos, se $t_1 \neq t_2$ e as tangentes em p_1 e p_2 são concorrentes;
- ii. a única reta que passa pelo ponto médio da corda ligando p_1 e p_2 , e é paralela às tangentes, se $t_1 \neq t_2$ e as tangentes em p_1 e p_2 são paralelas;
- iii. a reta normal afim a γ em p_1 , se $t_1 = t_2$.

Destacamos que é necessário uma análise em cada um dos três casos da definição.

2.2.1 Retas tangentes não paralelas

Considere a reta tangente nos pontos p_1, p_2 e seja R o ponto de intersecção dessas duas retas tangentes. Tomaremos γ_1 e γ_2 parametrizações locais em torno de p_1 e p_2 , respectivamente. O ponto médio do segmento ligando os pontos $p_1 = \gamma_1(t)$ e $p_2 = \gamma_2(s)$ será chamado de M , isto é, $M = \frac{p_1 + p_2}{2}$ e $C = p_1 - p_2$ a corda ligando estes dois pontos.

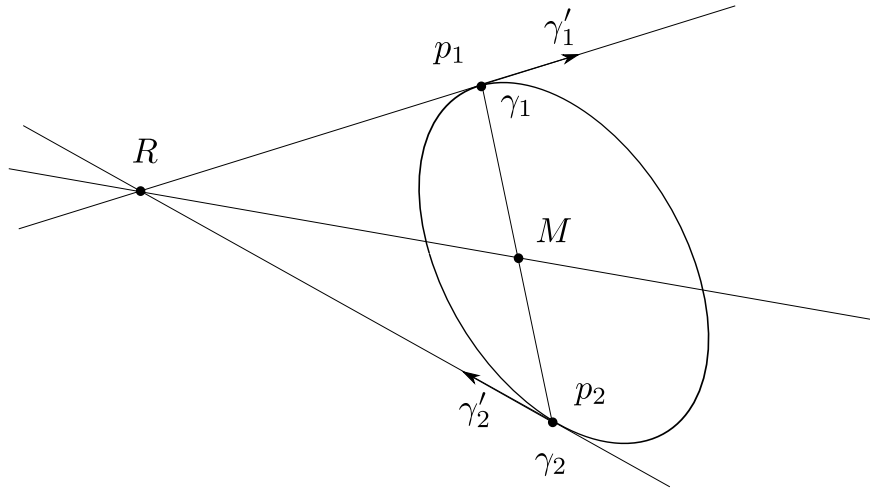


Figura 2.4: Reta média para os pontos p_1 e p_2 com tangentes concorrentes.

Definiremos agora um funcional linear, o qual será usado para se determinar a equação da reta média. Mais detalhes a respeito disso podem ser vistos em [2]. Vale ressaltar que esse funcional é a chave para uma generalização no caso de superfícies.

Definição 2.3. Os conormais v_1 e v_2 referente a cada um dos pontos p_1 e p_2 , respectivamente, são definidos por:

$$v_1(u) = \frac{[\gamma'_1, u]}{[\gamma'_1, \xi_1]^{\frac{1}{3}}} \text{ e } v_2(u) = \frac{[\gamma'_2, u]}{[\gamma'_2, \xi_2]^{\frac{1}{3}}}, u \in \mathbb{R}^2, \text{ de forma que}$$

$$v_1(\gamma'_1(t)) = 0 \text{ e } v_1(\xi_1) = 1,$$

$$v_2(\gamma'_2(s)) = 0 \text{ e } v_2(\xi_2) = 1,$$

em que ξ_1 e ξ_2 são os normais afins nos pontos p_1 e p_2 , respectivamente.

Lema 2.1. *A equação da reta média é dada por*

$$\nu_2(C)\nu_1(X - M) + \nu_1(C)\nu_2(X - M) = 0.$$

Demonstração: Seja ν o funcional que anula o vetor diretor da reta média. Neste caso, já que os vetores ν_1 e ν_2 são linearmente independentes, podemos escrever

$$\nu = a\nu_1 + b\nu_2.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \nu(R - M) = 0 &\iff (a\nu_1 + b\nu_2) \left(\frac{C}{2} + R - p_2 \right) = 0 \\ &\iff a \frac{\nu_1(C)}{2} + a\nu_1(R - p_2) + b \frac{\nu_2(C)}{2} = 0 \end{aligned}$$

De fato, $\nu_2(R - p_2) = 0$, uma vez que $R - p_2$ é tangente a γ_2 . Como $R - p_2 = R - p_1 - C$, a última igualdade é equivalente a:

$$\begin{aligned} a \frac{\nu_1(C)}{2} + a\nu_1(R - p_1) - a\nu_1(C) + b \frac{\nu_2(C)}{2} &= 0 \\ &\iff -a \frac{\nu_1(C)}{2} + b \frac{\nu_2(C)}{2} = 0, \end{aligned}$$

já que $R - p_1$ é tangente a γ_1 , isto é, $a\nu_1(R - p_1) = 0$.

Portanto, basta tomar $a = \nu_2(C)$ e $b = \nu_1(C)$ para se obter o resultado desejado. □

Para a família de retas médias a 2 parâmetros, (s, t) , dada por

$$F(s, t, X) = \nu_2(C)\nu_1(X - M) + \nu_1(C)\nu_2(X - M) = 0,$$

o envelope $\mathcal{E}$ de F , de acordo com a Definição 2.1, é o conjunto:

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (s, t) \in \mathbb{R}^2, F = F_t = F_s = 0 \text{ em } (s, t, X)\}.$$

o subscrito em F refere-se à derivada de F em relação ao parâmetro em questão.

Neste caso, determinar o envelope de retas médias significa solucionar um sistema,

$F = F_t = F_s = 0$, de três equações e quatro incógnitas, s, t, x_1, x_2 . Cabe então uma pergunta natural: sob quais condições esse sistema admite solução? De fato, usaremos o lema a seguir para encontrarmos a condição de existência da solução do envelope. Além disso, veremos também que tal condição é equivalente a existir uma cônica tendo pelo menos 3—contato com a curva em dois pontos distintos.

Lema 2.2. *As derivadas dos conormais ν_1 e ν_2 são dadas por:*

$$\nu'_1 = \frac{\nu'_1(\gamma'_2)}{\nu_1(\gamma'_2)}\nu_1 + \frac{\nu'_1(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_1)}\nu_2, \quad \nu'_2 = \frac{\nu'_2(\gamma'_2)}{\nu_1(\gamma'_2)}\nu_1 + \frac{\nu'_2(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_1)}\nu_2.$$

Demonstração: Daremos aqui apenas a demonstração da primeira equação, uma vez que a outra segue de forma semelhante. Como ν_1 e ν_2 são linearmente independentes, escrevemos

$$\nu'_1 = a\nu_1 + b\nu_2.$$

Aplicando ν'_1 ao vetor γ'_1 , obtemos:

$$\nu'_1(\gamma'_1) = a\nu_1(\gamma'_1) + b\nu_2(\gamma'_1) \Rightarrow b = \frac{\nu_1(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_1)},$$

já que $\nu_1(\gamma'_1) = 0$. Agora, aplicando ν'_1 ao vetor γ'_2 , obtemos:

$$\nu_1(\gamma'_2) = a\nu_1(\gamma'_2) \Rightarrow a = \frac{\nu_1(\gamma'_2)}{\nu_1(\gamma'_2)}.$$

Portanto,

$$\nu'_1 = \frac{\nu'_1(\gamma'_2)}{\nu_1(\gamma'_2)}\nu_1 + \frac{\nu'_1(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_1)}\nu_2.$$

□

Teorema 2.1. *A condição para que o par s, t determine um ponto do envelope das retas médias é que: $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$, em que $\lambda = \left(\frac{\nu'_1(\gamma'_1)\nu_1^2(\gamma'_2)}{\nu'_2(\gamma'_2)\nu_2^2(\gamma'_1)} \right)^{\frac{1}{3}}$.*

Demonstração: Na equação da reta média

$$F(s, t, X) = \nu_2(C)\nu_1(X - M) + \nu_1(C)\nu_2(X - M) = 0,$$

tomemos a derivada de F com respeito a t , obtendo $F_t = 0$, isto é:

$$\nu_2(-\gamma'_1)\nu_1(X - M) + \nu_2(C)\nu'_1(X - M) + \nu'_1(C)\nu_2(X - M) - \nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) = 0.$$

Usamos as derivadas dos conormais dadas pelo Lema 2.2 e, ao substituí-las em $F_t = 0$, encontramos:

$$\nu_2(\gamma'_1)\nu_1(X - M) + 2\frac{\nu'_1(\gamma'_1)}{\nu'_2(\gamma'_1)}\nu_2(C)\nu_2(X - M) = \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1).$$

Por outro lado, na equação da reta média $F(s, t, X) = 0$, tomemos agora a derivada de F com respeito a s , obtendo $F_s = 0$.

Novamente, ao substituir as derivadas dos conormais em $F_s = 0$, temos

$$2\frac{\nu'_2(\gamma'_2)}{\nu'_1(\gamma'_2)}\nu_1(C)\nu_1(X - M) - \nu_1(\gamma'_2)\nu_2(X - M) = \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(\gamma'_2).$$

Agora, ao isolar $\nu_1(X - M)$ na equação da reta média e substituí-lo nas duas expressões encontradas anteriormente, obtemos, respectivamente:

$$\nu_2(X - M) = \frac{-\nu_2^2(C)\nu_1^2(\gamma'_2)}{2\nu'_2(\gamma'_2)\nu_1^2(C) + \nu_1^2(\gamma'_2)\nu_2(C)},$$

$$\nu_2(X - M) = \frac{\nu_1(C)\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma'_1)}{2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2^2(C) - \nu_2^2(\gamma'_1)\nu_1(C)}.$$

Por fim, ao igualar as duas últimas equações, obtem-se a condição referida no teorema.

□

Observação 2.1. Se γ_1 e γ_2 estiverem parametrizadas pelo comprimento de arco afim, então $\lambda = 1$. Assim, a condição do teorema acima é equivalente a: $[\gamma'_1 + \gamma'_2, \gamma_1 - \gamma_2] = 0$.

Os dois resultados a seguir serão úteis para podermos relacionar o envelope das retas médias, quando as tangentes são concorrentes, com um conjunto de simetria invariante afim, conhecido como AESS.

Lema 2.3. Seja δ uma cônica p.p.c.a.a. Então, para todo s_1, s_2 , temos

$$[\delta(s_1) - \delta(s_2), \delta_s(s_1) + \delta_s(s_2)] = 0,$$

ou seja, a corda é paralela à soma dos tangentes.

Demonstração: Seja δ uma elipse. A menos de transformações afins, podemos considerar δ uma circunferência unitária centrada na origem, a saber $\delta(s) = (\cos s, \sin s)$, $s \in I = [0, 2\pi]$. Neste caso, o comprimento de arco afim e o comprimento de arco euclidiano são equivalentes, pois:

$$[\delta_s, \delta_{ss}] = 1 \text{ e } \|\delta_s\| = 1, \forall s \in I.$$

Assim, $[\delta(s_1) - \delta(s_2), \delta_s(s_1) + \delta_s(s_2)] = 0$, para todo $s_1, s_2 \in I$.

Como a condição é satisfeita para a circunferência, então o mesmo acontece com a elipse. O mesmo argumento pode ser usado para as outras cônicas. $\square$

A partir disso, é possível obter o resultado a seguir.

Proposição 2.1. *Seja γ uma curva p.p.c.a.a. Então existe uma cônica δ tendo pelo menos 3-contato com γ em dois pontos distintos $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$, nenhum deles pontos de inflexão, se e somente se, $[\gamma'(s_1) + \gamma'(s_2), \gamma(s_1) - \gamma(s_2)] = 0$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$

Se existe tal cônica com pelo menos 3-contato com γ em $\gamma(s_1)$ e em $\gamma(s_2)$, então γ e a cônica compartilham a mesma tangente afim nesses dois pontos. Daí, pelo Lema 2.3, concluímos o desejado.

$(\Leftarrow)$

Considere a única cônica δ tendo pelo menos 3-contato com γ em $\gamma(s_1)$ e apenas tangente a γ em $\gamma(s_2)$, onde δ está p.p.c.a.a. Assim, $\delta(s_1) = \gamma(s_1)$ e $\delta_s(s_2) = \lambda \gamma_s(s_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Do Lema 2.3, temos $[\delta(s_1) - \delta(s_2), \delta_s(s_1) + \delta_s(s_2)] = 0$. Como δ tem pelo menos 3-contato com γ em s_1 , então $\gamma(s_1) = \delta(s_1)$ e

$$[\delta(s_1) - \delta(s_2), \delta_s(s_1) + \delta_s(s_2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma_s(s_1) + \lambda \gamma_s(s_2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma_s(s_1) + \gamma_s(s_2) - \gamma_s(s_2) + \lambda \gamma_s(s_2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), -\gamma_s(s_2) + \lambda\gamma_s(s_2)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$[\gamma(s_1) - \gamma(s_2), \gamma_s(s_2) - \lambda\gamma_s(s_2)] = 0.$$

Se $\lambda \neq 1$, $\gamma(s_1) - \gamma(s_2) = \alpha(\gamma_s(s_2) - \lambda\gamma_s(s_2)) = \alpha(1 - \lambda)\gamma_s(s_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ou seja, $\gamma(s_1) - \gamma(s_2) // \gamma_s(s_2) \Rightarrow \gamma$ tem inflexão, o que não pode acontecer.

Assim, $\lambda = 1$, daí $\delta_s(s_2) = \gamma_s(s_2)$, ou seja, δ tem pelos menos 3-contato com γ em s_2 . Portanto, δ tem pelo menos 3-contato com γ em pelo menos dois pontos distintos com γ .

□

A cônica que tem 3-contato com a curva em pelo menos dois pontos distintos da curva é chamada de 3 + 3 cônica.

Note bem que a propriedade da proposição anterior é a mesma apresentada no Teorema 2.1 para encontramos a condição de um par (s, t) pertencer ao envelope. No caso do teorema, a curva não necessariamente está parametrizada pelo comprimento de arco afim.

Sendo assim, a Proposição 2.1 nos diz que a condição apresentada no teorema para que o sistema $F = F_t = F_s = 0$ tenha solução é a existência de uma cônica tendo pelo menos 3-contato com a curva em pelo menos dois pontos distintos.

Portanto, no caso das tangentes não paralelas, conseguimos fazer uma forte conexão entre o envelope das retas médias e o famoso conjunto de simetria invariante afim AEES.

Definição 2.4. *Dada uma curva plana convexa e fechada γ , o conjunto de simetria invariante afim - AEES, é o fecho do lugar geométrico dos centros das cônicas que têm pelo menos 3-contato com a curva γ em dois ou mais pontos distintos. A sigla AEES refere-se, em inglês, ao "Affine Envelope Symmetry Sets".*

Já que a existência do AEES e do envelope de retas médias está relacionada com a existência de tal cônica, cabe-nos agora a indagarmos qual é o centro dessa cônica.

Para se determinar um ponto X pertencente ao envelope das retas médias com tangentes não paralelas, precisamos encontrar X que satisfaça o sistema $F = F_s = F_t = 0$, isto é:

$$\begin{cases} \nu_2(C)\nu_1(X-M) + \nu_1(C)\nu_2(X-M) = 0 \\ \nu_2(\gamma'_1)\nu_1(X-M) + 2\frac{\nu'_1(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_2)}\nu_2(C)\nu_2(X-M) = \frac{1}{2}\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) \\ 2\frac{\nu'_2(\gamma'_2)}{\nu_1(\gamma'_2)}\nu_1(C)\nu_1(X-M) - \nu_1(\gamma'_2)\nu_2(X-M) = \frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_1(\gamma'_2) \end{cases}$$

Teorema 2.2. *Um ponto X do envelope de retas médias com tangentes não paralelas é dado por*

$$X = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\lambda\nu_2(\gamma'_1)\nu_2(C)}{2(2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma'_1))} \left(\gamma'_1 + \frac{\lambda\nu_2(\gamma'_1)}{\nu_1(\gamma'_2)}\gamma'_2 \right) \right).$$

Demonstração: Pelo Lema 2.1, a condição para que o sistema visto acima tenha solução é que $\nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C)$. Usando este fato, da primeira equação do sistema, temos $\nu_1(X-M) = \lambda\nu_2(X-M)$. Assim, substituindo essa última igualdade na segunda equação do sistema, obtemos:

$$\nu_2(\gamma'_1)\lambda\nu_2(X-M) + 2\frac{\nu'_1(\gamma'_1)}{\nu_2(\gamma'_1)}\nu_2(C)\nu_2(X-M) = -\frac{1}{2}\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma'_1) \iff$$

$$\nu_2(X-M) = \frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma'_1)}{2(2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma'_1))} \iff$$

$$\nu_2 \left((X-M)(2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma'_1)) + \frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma'_1)}{2}\gamma'_1 \right) = 0 \iff$$

$$(X-M)(2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma'_1)) + \frac{\lambda\nu_2(C)\nu_2(\gamma'_1)}{2}\gamma'_1 = \alpha\gamma'_2.$$

Já que $\nu_1(X-M) = \lambda\nu_2(X-M)$, podemos determinar α da última equação:

$$\alpha = -\frac{\lambda^2\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma'_1)}{2\nu_1(\gamma'_2)}.$$

Assim,

$$X-M = \frac{-\frac{1}{2}\nu_2(C)\nu_2(\gamma'_1)\gamma'_1 - \frac{\lambda^2\nu_2(C)\nu_2^2(\gamma'_1)}{2\nu_1(\gamma'_2)}\gamma'_2}{2\nu'_1(\gamma'_1)\nu_2(C) + \lambda\nu_2^2(\gamma'_1)}.$$

Portanto, um ponto X é dado por:

$$X = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{\lambda v_2(\gamma'_1) v_2(C)}{2(2v'_1(\gamma'_1) v_2(C) + \lambda v_2^2(\gamma'_1))} \left(\gamma'_1 + \frac{\lambda v_2(\gamma'_1)}{v_1(\gamma'_2)} \gamma'_2 \right) \right).$$

□

Se as curvas estiverem parametrizadas pelo comprimento de arco afim, então

$$X = \frac{1}{2} \left(\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{v_2(\gamma'_1) v_2(C)}{2(v_2^2(\gamma'_1) - 2v_2(C))} (\gamma'_1 - \gamma'_2) \right). \quad (2.1)$$

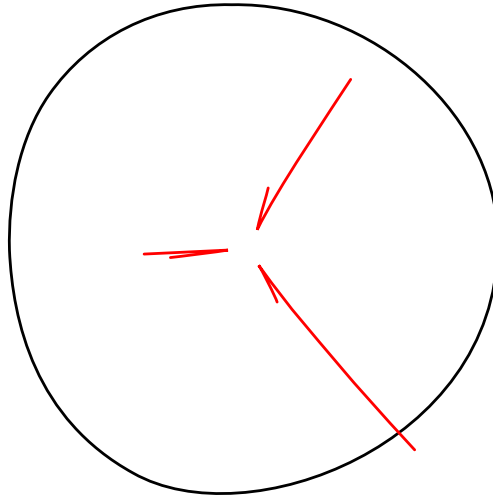


Figura 2.5: A figura acima mostra a curva $\gamma(t) = (0.08 \cos(2\pi t) + \cos(\pi t), 0.03 \sin(2\pi + 6.7) + \sin(\pi t))$ em preto e seu AESS em vermelho.

Um fato interessante a respeito do AESS é que todo ponto de uma curva oval contribui para o AESS. O teorema a seguir nos garante esse resultado.

Teorema 2.3. *Considere γ uma curva oval p.p.c.a.a. e $\gamma(s_0) \in \gamma$. Se $\gamma(s_0)$ não é um ponto tal que $\mu_s(s_0) \neq 0$, então existe pelo menos um ponto $\gamma(s_1)$, $s_0 \neq s_1$, e uma cônica tendo 3-contato com a curva em $\gamma(s_0)$ e em $\gamma(s_1)$.*

Demonstração: Considere $h(s) = [\gamma(s) - \gamma(s_0), \gamma_s(s) + \gamma_s(s_0)]$, função definida sobre a oval e é zero, a exceção de $s = s_0$, se e somente se existe uma cônica como dita no teorema (pela Proposição 2.1).

Por outro lado, verifica-se que as quatro primeiras derivadas de h se anulam em $s = s_0$ e que as cinco primeiras derivadas de h se anulam em $s = s_0$ se, e somente se $\mu'(s_0) = 0$, ou seja, se e somente se $\gamma(s_0)$ é um ponto sextático de γ .

Como h é periódica, pois está definida sobre uma oval, isso mostra que há pelo menos um outro zero quando $\mu'(s_0) \neq 0$.

□

O envelope de retas médias é constituído não somente do *AESS*, caso em que as tangentes não são paralelas, mas como também pelo *Mid Point Tangente Locus-MPTL*, quando as tangentes são paralelas não coincidentes, e pela *Evoluta afim*, caso em que as retas tangentes são paralelas coincidentes. Abordaremos esses dois casos nas sessões futuras.

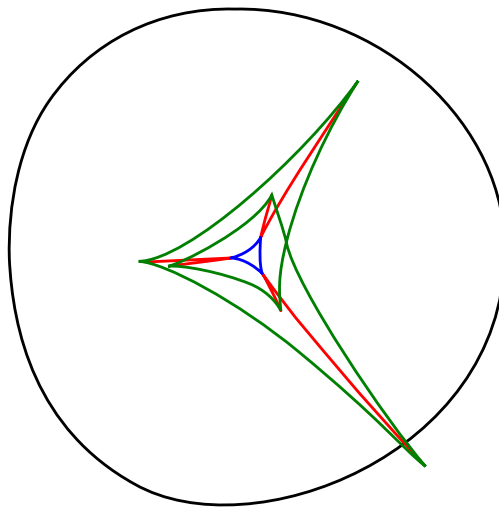


Figura 2.6: Ilustração da curva γ em preto, o *AESS* em vermelho, a *Evoluta Afim* em verde e o *MPTL* em azul.

Um detalhe importante a respeito do *AESS* é que se tal conjunto possui um segmento de reta, então a curva é simétrica afim em relação a esse segmento. O resultado a seguir nos garante tal fato.

Teorema 2.4. *Suponha que o AESS para dois pares de arcos de uma curva oval γ é um segmento de reta l . Então cada um desses arcos é obtido do outro por meio de uma reflexão afim em torno de l .*

Demonstração: Considere o segmento de reta ao longo do eixo x . Assim, a tangente ao *AESS* em um ponto correspondente ao par de parâmetros (t_1, t_2) sempre passa por dois pontos:

- i. o ponto médio da corda ligando esses dois pontos da curva;

ii. a intersecção das duas tangentes nesses dois pontos.

Neste caso, todos esses pontos médios e todos os pontos de interseções das correspondentes tangentes estão sobre o eixo x .

Seja $(X(t), Y(t))$ uma parametrização para um desses arcos. Assuma que Y e Y' são não nulos. Daí, a tangente a esse arco encontra o eixo x no ponto com coordenada x igual a $\frac{XY' - X'Y}{Y'}$. A outra tangente à oval passando por esse ponto encontra a oval, digamos em $(U(t), V(t))$, e então tem-se

$$(XY' - X'Y)V' = (UV' - U'V)Y' (*),$$

para todo t .

Por outro lado, o ponto médio da corda também está sobre o eixo x e é tal que $Y + V = 0$, para todo t . Isso nos dá $Y' + V' = 0$ para todo t e, substituindo na equação $(*)$, temos:

$$XY' - X'Y = UY' - U'Y,$$

isto é, $\frac{d}{dt} \left(\frac{X}{Y} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{Y} \right)$, o que nos dá $X = U + \alpha Y$.

A suposição $Y \neq 0$ não afeta o resultado, pois, caso contrário, a oval encontraria o eixo x em dois pontos dela. Já a condição $Y' \neq 0$ também é plausível, pois as tangentes, neste caso, nunca são paralelas.

Logo, o arco (U, V) é obtido do arco (X, Y) por meio de uma transformação afim dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a qual é uma reflexão afim em torno do eixo x . □

Exemplo 2.3. Considere a curva $\gamma_1 : [-0.5, 0.5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ expressa por $\gamma_1(t) = \left(t, 1 - \frac{1}{2}t^2\right)$ e $\gamma_2(t) = (x(t), y(t))$ o outro arco que, junto com γ_1 , têm o AECS pertencente ao eixo x e é um segmento de reta. Assim, podemos expressar γ_2 por meio do teorema anterior, a qual é dada por:

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t - \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Estrutura local do AESS

Passaremos a estudar o comportamento local do AESS. Destacamos que será construído um modelo local do AESS para o par de curvas ao invés de usarmos a parametrização encontrada no Teorema 2.2.

Considere p_1, p_2 pontos de uma curva γ , convexa e fecha, e X o ponto correspondente ao AESS de γ , tais que γ_1, γ_2 sejam parametrizações locais em torno de p_1, p_2 , respectivamente.

Lema 2.4. *A menos de transformações afins, podemos considerar:*

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \left(t, 1 + \frac{p}{c}t - \frac{(c + p^2)}{2c}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 \dots \right), \\ \gamma_2(s) &= \left(s, -1 - \frac{p}{c}s + \frac{(c + p^2)}{2c}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 \dots \right), \end{aligned}$$

em que $(p, 0)$, $p \neq 0$, é o centro da cônica e $c \in \mathbb{R}$, de forma que:

- i. se $c > 0$, a cônica é uma elipse,
- ii. se $c < 0$, a cônica é uma hipérbole.

Demonstração: Por hipótese, X é centro de uma $3 + 3$ cônica. A menos de um cisalhamento, o qual é uma transformação afim, podemos considerar que a reta média para o par de curvas γ_1, γ_2 é ortogonal à corda p_1 até p_2 .

Assim, faremos um sistema de coordenadas em que o eixo x é a reta média e o eixo y é a reta que passa por p_1 e p_2 . Daí, o centro X da cônica está sobre o eixo x (lembre-se de que a reta média é tangente à $X \in \text{AESS}$).

Agora, a menos de uma contração, supomos que p_1 e p_2 estão sobre o eixo y , de modo que $p_1 = (0, 1)$ e que $p_2 = (0, -1)$.

Deduzimos então que a equação de uma cônica centrada em $(p, 0)$, $p \neq 0$, e que passa por $p_1 = (0, 1)$ e $p_2 = (0, -1)$ é da forma

$$ax^2 + cy^2 - 2apx - c = 0, \text{ com } a, c \in \mathbb{R}^*.$$

Note que se $c > 0$, a cônica em questão é uma elipse, e que se $c < 0$, a cônica é uma hipérbole. Faremos a suposição, a menos de transformações afins convenientes, que $c = \pm 1$. Por outro lado, se $p = 0$ ou $c = 0$, a cônica se transforma em um par de retas, então esse caso não nos convém.

Logo, para que se tenha contato, pelo menos ordem 3, da cônica com as curvas nos pontos $p_1 = (0, 1)$ e $p_2 = (0, -1)$, o par de curvas têm a expressão

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \left(t, 1 + \frac{p}{c}t - \frac{(c + p^2)}{2c}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 \dots \right), \\ \gamma_2(s) &= \left(s, -1 - \frac{p}{c}s + \frac{(c + p^2)}{2c}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 \dots \right),\end{aligned}$$

com $c = \pm 1$.

□

Após essa construção local para o par de curvas, podemos então analisar a condição de regularidade do AEES para esse par.

Teorema 2.5. *Para o par de curvas tomado na construção do lema anterior, se $p^2(p^3 + pc - 2p_3c^3)(p^3 + pc + 2q_3c^3) \neq 0$, com $p \neq 0$ e $c = \pm 1$, então o AEES é suave.*

Demonstração: Sejam F a equação da reta média para o par p_1 e p_2 , dada pelo Lema 2.1, e H a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, s, x, y) &\longmapsto (F, F_t, F_s).\end{aligned}$$

Os valores de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que nos fornecem $H \equiv 0$ são justamente os pontos que pertencem ao envelope das retas médias. Além disso, a matriz jacobiana J_H da função H é expressa por:

$$J_H = \begin{pmatrix} F_t & F_s & F_x & F_y \\ F_{tt} & F_{ts} & F_{tx} & F_{ty} \\ F_{st} & F_{ss} & F_{sx} & F_{sy} \end{pmatrix}.$$

Avaliada em $(0, 0, p, 0)$, obtemos:

$$J_H(0,0,p,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{3(p^2+c)p^2}{c^3} - 6p_3p & 0 & \frac{1}{c} & \frac{p}{c} \\ 0 & \frac{-3(p^2+c)p^2}{c^3} - 6q_3p & -\frac{1}{c} & \frac{p}{c} \end{pmatrix}.$$

Para que $H^{-1}(0)$ seja suave, precisamos que a matriz $J_H(0,0,p,0)$ tenha posto máximo, ou seja, que $p^2(p^3 + pc - 2p_3c^3)(p^3 + pc + 2q_3c^3) \neq 0$ e, por hipótese, tal condição já é satisfeita. Logo, $H^{-1}(0)$ suave.

Por outro lado, note que o AESS corresponde a $\pi_2(H^{-1}(0))$, em que $\pi_2(t,s,x,y) = (x,y)$, e tal conjunto é suave desde que

$$\ker(J_H(0,0,p,0)) \cap \ker(D\pi_2(0,0,p,0)) = \{0\},$$

condição a qual corresponde ao determinante da matriz $\begin{pmatrix} F_{tt} & F_{ts} \\ F_{st} & F_{ss} \end{pmatrix}$ ser não nulo, isto é, $p^2(p^3 + pc - 2p_3c^3)(p^3 + pc + 2q_3c^3) \neq 0$, o que já é verdade.

□

Observação 2.2. No modelo local apresentado no teorema anterior, caso $p_3 = \frac{(p^2+c)p}{2c^3}$ ou $q_3 = \frac{(p^2+c)p}{2c^3}$, então a cônica tem 3-contato com a curva em um ponto e 4-contato com a curva em outro ponto. Para esse fato, chamamos tal situação de 3 + 4 cônica.

Além disso, supomos no teorema anterior que $p \neq 0$. Na subseção 2.2.4, abordaremos o caso em que $p = 0$.

Antes de apresentarmos um resultado a respeito do AESS, consideraremos a seguinte definição de cúspide em uma curva.

Definição 2.5. Uma curva plana θ tem uma singularidade em $t = 0$ do tipo cúspide ordinária (resp. uma (3,4)-cúspide) se $\theta'(0) = 0$ e $[\theta^{(2)}(0), \theta^{(3)}(0)] \neq 0$ (resp. se $\theta'(0) = [\theta^{(2)}(0), \theta^{(3)}(0)] = 0$ e $[\theta^{(3)}(0), \theta^{(4)}(0)] \neq 0$); onde $[\cdot, \cdot]$ representa o determinante da matriz 2×2 definida pelos vetores em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2.6. Se X é centro de uma 3 + 4 cônica, então o AESS é uma cúspide.

Demonstração: Suponha que as parametrizações locais de dois arcos da curva γ são dados como no Lema 2.4 e, sem perda de generalidade, tome $c = 1$. Daí, temos:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \left(t, 1 + pt - \frac{(1+p^2)}{2}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 \dots \right) \text{ e} \\ \gamma_2(s) &= \left(s, -1 - ps + \frac{(1+p^2)}{2}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 \dots \right).\end{aligned}$$

A ideia é encontrar a equação F da reta média para esse par de curvas e estudar o comportamento do $AESS$ no caso em que uma das condições do Teorema 2.5 não é satisfeita.

Considere $F(x, y, t, s) = l_1(t, s)x + l_2(t, s)y + l_3(t, s)$ equação da reta média para um par de pontos na curva γ dada pela parametrização local γ_1, γ_2 . A condição de existência da solução para o envelope de tal família de retas é que o determinante da matriz M a seguir seja nulo:

$$M = \begin{bmatrix} F_x(0, 0, t, s) & F_y(0, 0, t, s) & F(0, 0, t, s) \\ F_{sx}(0, 0, t, s) & F_{sy}(0, 0, t, s) & F_s(0, 0, t, s) \\ F_{tx}(0, 0, t, s) & F_{ty}(0, 0, t, s) & F_t(0, 0, t, s) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Com o auxílio de algum software computacional, o Maple, por exemplo, verifica-se que $\det M = A(s, t)B(s, t) = 0$, em que $A(s, t)$ representa a condição de paralelismo e $B(s, t)$ é expressa por

$$B(s, t) = (p^3 + p - 2p_3)t - (p^3 + p + 2q_3)s + O_2(s, t).$$

Usamos $O_2(s, t)$ para representar os termos de grau maiores ou iguais a 2 em relação a (s, t) .

Avaliando as expressões de $A(s, t)$ e $B(s, t)$ na origem, $(0, 0)$, verificamos que as retas tangentes para os respectivos pontos não são paralelas, ou seja, $A(0, 0) \neq 0$, já que $p \neq 0$. Assim, o envelope da família de retas médias admite solução se, e somente se, $B(0, 0) = 0$.

Como vimos no Teorema 2.5, se $p^3 \neq \frac{p^3 + p}{2}$ ou $q_3 \neq \frac{p^3 + p}{2}$, então o $AESS$ é suave (lembre-se de que tomamos $c = 1$). Suponha então que, na origem, $X \in AESS$ seja centro de uma $3 + 4$ cônica, isto é, o contato da cônica com a curva em p_1 é de

ordem 4, o que nos dá $p^3 = \frac{p^3 + p}{2}$, e o contato da cônica com a curva em p_2 é de ordem 3, ou seja, $p^4 \neq -\frac{1 + 5a^4 + 6a^2}{8}$.

Note que $\frac{\partial B}{\partial s}(0,0) = p^3 + p + 2q_3 \neq 0$. Daí, podemos evocar o teorema da função implícita para escrevermos s como função de t , ou seja:

$$s = \frac{5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1}{p^3 + p + 2q_3} t^2 + O_3(t).$$

Assim, tomando a expressão de s e a substituindo na solução do envelope, encontramos a parametrização para $X = (x, y) \in AECS$, na qual

$$x = p + 3(5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1)pt^2 + O_3(t) \text{ e}$$

$$y = -\frac{1}{2}5p^4 + 6p^2 + 8p_4 + 1)pt^3 + O_4(t),$$

expressão a qual caracteriza uma cúspide.

Portanto, o $AECS$, no centro de uma $3 + 4$ cônica, é uma cúspide.

□

2.2.3 Retas tangentes paralelas coincidentes

Passaremos a analisar agora o envelope de retas médias no caso limite, ou seja, como é o comportamento da reta média e seu envelope quando um ponto da curva tende a um outro.

Considere um único segmento da curva e o parametrize por $\gamma_1(t_1) = (t_1, f(t_1))$ e $\gamma_2(t_2) = (t_2, f(t_2))$, onde f é uma função suave.

O objetivo é discutir o caso limite quando $t_2 \rightarrow t_1$. Neste caso, o resultado a seguir nos diz qual é o comportamento da reta média.

Proposição 2.2. *Se $t_2 \rightarrow t_1$, então a reta média está na direção da reta normal afim à curva em t_1 .*

Demonstração: Considere

$$C = (t_1 - t_2, f(t_1) - f(t_2)), M = \frac{1}{2}(t_1 + t_2, f(t_1) + f(t_2)),$$

$$\mathbf{n}_1(t) = (-f'(t), 1) \text{ e } \mathbf{n}_2(s) = (-f'(s), 1),$$

a corda, o ponto médio dessa corda e os normais euclidianos em γ_1 , γ_2 , respectivamente.

Sabemos, do Lema 2.1, condição de existência do envelope, que $v_1(C) = -\lambda v_2(C)$, onde:

$$\lambda = \left(\frac{v'_1(\gamma'_1) v_1^2(\gamma'_2)}{v'_2(\gamma'_2) v_2^2(\gamma'_1)} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Observe que podemos escrever $\langle \mathbf{n}_i, u \rangle = [\gamma'_i, u]$, para $u \in \mathbb{R}^2$ e $i = 1, 2$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Daí, temos:

$$v_1(u) = \frac{[\gamma'_1, u]}{[\gamma'_1, \gamma''_1]^{\frac{1}{3}}} = \frac{\langle \mathbf{n}_1, u \rangle}{[\gamma'_1, \gamma''_1]^{\frac{1}{3}}} \text{ e } v_2(u) = \frac{[\gamma'_2, u]}{[\gamma'_2, \gamma''_2]^{\frac{1}{3}}} = \frac{\langle \mathbf{n}_2, u \rangle}{[\gamma'_2, \gamma''_2]^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.3)$$

Assim, se escrevermos $\langle \mathbf{n}_i, u \rangle = N_i(u)$, então a equação da reta média se torna

$$N_2(C)N_1(X - M) + N_1(C)N_2(X - M) = 0.$$

Suponha γ parametrizada pelo comprimento de arco afim. Assim, na condição de existência do envelope, $\lambda = 1$, daí, usando a definição do conormal, temos:

$$\frac{N_1(C)}{(f''(t_1))^{\frac{1}{3}}} = -\frac{N_2(C)}{(f''(t_2))^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{N_1(C)}{N_2(C)} = -\left(\frac{f''(t_1)}{f''(t_2)} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Estamos interessados em encontrar o coeficiente angular da reta média. Considere $X - M = (x, y) - (x_M, y_M) = (x - x_M, y - y_M)$. Agora, utilizando a equação do lema para a reta média e a relação entre $N_1(C)$ com $N_2(C)$ encontrada acima, temos:

$$N_2(C)N_1(X - M) + N_1(C)N_2(X - M) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$N_1(X - M) + \frac{N_1(C)}{N_2(C)}N_2(X - M) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} 1 & x - x_M \\ f'(t_1) & y - y_M \end{array} \right| - \left(\frac{f''(t_1)}{f''(t_2)} \right)^{\frac{1}{3}} \left| \begin{array}{cc} 1 & x - x_M \\ f'(t_2) & y - y_M \end{array} \right| = 0 \\
& \Updownarrow \\
& (y - y_M) \left(1 - \left(\frac{f''(t_1)}{f''(t_2)} \right)^{\frac{1}{3}} \right) = (x - x_M) \left(f'(t_1) - \left(\frac{f''(t_1)}{f''(t_2)} \right)^{\frac{1}{3}} f'(t_2) \right) \\
& \Downarrow \\
& (y - y_M) = \left(\frac{f'(t_1)(f''(t_2))^{\frac{1}{3}} - f'(t_2)(f''(t_1))^{\frac{1}{3}}}{(f''(t_2))^{\frac{1}{3}} - (f''(t_1))^{\frac{1}{3}}} \right) (x - x_M).
\end{aligned}$$

Considere $A(t_1, t_2)$ o coeficiente da reta média dado por

$$A(t_1, t_2) = \frac{f'(t_1)(f''(t_2))^{\frac{1}{3}} - f'(t_2)(f''(t_1))^{\frac{1}{3}}}{(f''(t_2))^{\frac{1}{3}} - (f''(t_1))^{\frac{1}{3}}}.$$

Ao calcularmos $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} A(t_1, t_2)$ e aplicando a Regra de L'Hopital por três vezes, temos:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} A(t_1, t_2) = \frac{-f''(t_1)f'(t_1) + 3(f''(t_1))^2}{f'''(t_1)},$$

o qual é o coeficiente angular da reta normal afim em $\gamma(t_1)$, de acordo com Proposição 1.2 referente a equação da reta normal afim apresentada no Capítulo 1.

□

Como o envelope das retas normais afins de uma curva γ é a evoluta afim (EA), neste caso, o ponto X do envelope de retas médias com tangentes coincidentes é um ponto da evoluta afim de γ .

2.2.4 Retas tangentes paralelas não coincidentes

O objetivo agora é construir o envelope das retas médias quando as retas tangentes em cada um dos pontos correspondentes da curva são paralelas e não coincidentes.

Assim, a reta média é a reta que passa pelo ponto médio da corda para a qual as tangentes são paralelas e que é paralela a estas tangentes.

Apresentaremos, a seguir, um importante resultado associado ao conjunto

conhecido como *MPTL*.

Definição 2.6. O *Mid-Point Tangents Locus - MPTL* de uma curva suave γ é o lugar geométrico dos pontos médios de pontos de γ que têm tangentes paralelas.

Proposição 2.3. O *MPTL* é uma curva regular com singularidade do tipo cúspide ordinária no centro de uma $3 + 3$ -cônica.

Demonstração: Sejam p_1, p_2 pontos da curva γ e $\gamma(t_1) = (t_1, f(t_1))$, $\gamma(t_2) = (t_2, g(t_2))$, parametrizações locais em torno de p_1, p_2 , respectivamente, de forma que as tangentes em p_1, p_2 sejam paralelas, em que

$$f(t_1) = a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3 + a_4 t_1^4 + \dots \text{ e } g(t_2) = b_2 t_2^2 + b_3 t_2^3 + b_4 t_2^4 + \dots$$

A condição para as tangentes em γ_1 e γ_2 serem paralelas é que $f'(t_1) = g'(t_2)$, o símbolo $'$ denota a derivada em relação ao parâmetro correspondente (t_1 ou t_2). Resolveremos isso assumindo que t_2 é uma função de t_1 e escrevemos

$$t_2 = u(t_1) = u_1 t_1 + u_2 t_1^2 + u_3 t_1^3 + \dots$$

Assim, ao fazermos $f'(t_1) = g'(t_2)$ com $t_2 = u(t_1)$, temos:

$$f'(t_1) = g'(t_2) \implies$$

$$2a_2 t_1 + 3a_3 t_1^2 + 4a_4 t_1^3 + \dots = 2b_2 t_2 + 3b_3 t_2^2 + 4b_4 t_2^3 + \dots$$

$$2a_2 t_1 + 3a_3 t_1^2 + 4a_4 t_1^3 + \dots = 2b_2 (u_1 t_1 + u_2 t_1^2 + u_3 t_1^3 + \dots) + 3b_3 (u_1 t_1 + u_2 t_1^2 + u_3 t_1^3 + \dots)^2 + \dots$$

Por igualdade de polinômios:

$$2a_2 = 2b_2 u_1 \Rightarrow u_1 = \frac{a_2}{b_2}$$

$$3a_3 = 2b_2 u_2 + 3b_3 u_1^2 \Leftrightarrow 3a_3 = 2b_2 u_2 + 3b_3 \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^2 \Rightarrow u_2 = \frac{3(a_3 b_2^2 - b_3 a_2^2)}{2b_2^3}.$$

Daí, obtemos uma parametrização para o *MPTL* em função apenas de t_1 .

Denotaremos tal parametrização por $M(t_1)$, ou seja:

$$\begin{aligned}
 M(t_1) &= \frac{1}{2}(t_1 + t_2, d + f(t_1) + g(t_2)) \\
 &= \frac{1}{2}(t_1 + u(t_1), d + f(t_1) + g(u(t_1))) \\
 &= \frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{a_2}{b_2}t_1 + \frac{3}{2b_2^3}(a_3b_2^2 - b_3a_2^2)t_1^2 + \dots, \right. \\
 &\quad \left. d + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 + \dots + b_2(u(t_1))^2 + b_3(u(t_1))^3 \dots \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{a_2}{b_2}t_1 + \frac{3}{2b_2^3}(a_3b_2^2 - b_3a_2^2)t_1^2 + \dots, \right. \\
 &\quad \left. d + a_2t_1^2 + a_3t_1^3 + \dots + b_2 \left(\frac{a_2}{b_2}t_1 + \frac{3(a_3b_2^2 - b_3a_2^2)}{2b_2^3}t_1^2 + \dots \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. b_3 \left(\frac{a_2}{b_2}t_1 + \frac{3(a_3b_2^2 - b_3a_2^2)}{2b_2^3}t_1^2 + \dots \right)^3 + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Assim, tomando a derivada de M em relação a t_1 avaliada em $t_1 = 0$, temos:

$$M'(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_2}{b_2}, 0 \right) \text{ e}$$

$$M'(0) = (0, 0) \Leftrightarrow a_2 = -b_2.$$

Logo, o $MPTL$ é suave perto de $t_1 = 0$, a menos que $a_2 = -b_2$, condição a qual, de acordo com Holtom (2000, p.53), é a mesma para que exista uma $3 + 3$ cônica para os parâmetros $t_1 = t_2 = 0$. Assim, o $MPTL$ é singular no centro de uma $3 + 3$ cônica.

Para mostrar que a singularidade é uma cúspide ordinária, precisamos checar que os vetores $M''(0)$ e $M'''(0)$ são linearmente independentes (pois essa é a condição para a existência de uma cúspide ordinária em um ponto, de acordo com a Definição 2.5), quando $a_2 = -b_2$. E cálculos rotineiros nos mostram que isso é verdade, desde que $a_3 \neq b_3$, supondo que $a_2 = b_2 \neq 0$.

Portanto, o $MPTL$ genericamente tem uma cúspide no centro de uma $3 + 3$ cônica. □

Como foi visto anteriormente Teorema 2.6, o $AESS$ possui uma cúspide quando as tangentes são paralelas nos pontos de contato com uma $3 + 3$ cônica. Por outro lado, o resultado verificado anteriormente nos garante que o $MPTL$ tem uma cúspide no centro de uma $3 + 3$ cônica. Ou seja, o $AESS$ e o $MPTL$ se encontram nos seus pontos

de cúspides.

Sendo assim, nos passos a seguir, usaremos parametrizações locais dadas pelo Lema 2.4 para verificarmos o comportamento local do $AESS \cup MPTL$.

Além disso, como o $MPTL$ está associado ao caso em que as tangentes à curva são paralelas, consideraremos que esse fato ocorra na origem, ou seja, no modelo local faremos $p = 0$. Logo, as parametrizações têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \left(t, 1 - \frac{1}{2}t^2 + p_3t^3 + p_4t^4 \dots \right) \text{ e} \\ \gamma_2(s) &= \left(s, -1 + \frac{1}{2}s^2 + q_3s^3 + q_4s^4 \dots \right).\end{aligned}$$

A ideia é escrevermos a equação F da reta média para um par de pontos nessas curvas e, a partir disso, encontrarmos uma expressão tanto para $X \in AESS$, quanto para $X \in MPTL$, correspondentes para esse par de pontos.

Sejam $p_1, p_2 \in \gamma$, tomemos $F(x, y, s, t)$ como a família de retas médias associadas a esses pontos, de modo que $F(x, y, s, t) = l_1(t, s)x + l_2(t, s)y + l_3(t, s)$. A exemplo do que vimos na Seção 2.2.2, o envelope dessa família tem solução se, e somente se, o determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} F_x(0, 0, t, s) & F_y(0, 0, t, s) & F(0, 0, t, s) \\ F_{sx}(0, 0, t, s) & F_{sy}(0, 0, t, s) & F_s(0, 0, t, s) \\ F_{tx}(0, 0, t, s) & F_{ty}(0, 0, t, s) & F_t(0, 0, t, s) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

é nulo.

Por meio do software Maple, verificamos que

$$\det(M) = -\frac{1}{32}A(s, t)B(s, t) = 0, \text{ para o qual}$$

$$A(s, t) = 3p_3t^2 - s - 4q_4s^3 - 5q_5s^4 - t + 4p_4t^3 + 5p_5t^4 - 3q_3s^2 \text{ e}$$

$$B(s, t) = 192q_3s + 192p_3t + O_2(s, t).$$

O caso $A(s, t) = 0$ está associado a condição de paralelismo das retas tangentes às curvas, logo, esse fato está relacionado com o $MPTL$. Mais ainda, tal condição já

e satisfeita, uma vez que tomamos $p = 0$ no modelo local, nos dando a condição de paralelismo na origem. Além disso, observe que $\frac{\partial A}{\partial s}(s, t) = -1 - 12q_4s^2 - 20q_5s^3 - 6q_3s$, isto é, $\frac{\partial A}{\partial s}(0, 0) \neq 0$. Daí, pelo teorema da função implícita, localmente podemos escrever s como função de t , isto é

$$s(t) = -t + 3(p_3 - q_3)t^2 + [18q_3(q_3 - p_3) + 4(p_4 + q_4)]t^4 + \dots$$

Assim, ao substituirmos tal relação na solução do envelope, podemos obter uma parametrização para $X = (x, y) \in MPTL$, isto é:

$$x(t) = \frac{3}{2}(p_3 - q_3)t^2 + O_3(t) \text{ e}$$

$$y(t) = (q_3 - p_3)t^3 + O_4(t).$$

Ou seja, isso significa que o $MPTL$ no centro de uma $3 + 3$ cônica é uma cúspide.

Analisaremos agora o outro caso, isto é, se $B(s, t) = 0$, então temos duas situações: $q_3 \neq 0$ ou $p_3 \neq 0$. Pode ocorrer também de $p_3 = q_3 = 0$, mas isso não nos convém, pois assim a cônica teria $4 + 4$ contato com a curva.

Suponha que $q_3 \neq 0$. Assim, $\frac{\partial B}{\partial s}(s, t) = 192q_3 \neq 0$, ou seja, aplicando o teorema de função inversa novamente a s , podemos escrever $s = s(t)$. Por outro lado, se $p_3 \neq 0$, também podemos escrever $t = t(s)$. Consideraremos $s = s(t)$, isto é:

$$s(t) = -\frac{p_3}{q_3}t + O_2(t),$$

expressão a qual nos fornece $X = (x, y) \in AECS$ como sendo:

$$x(t) = \frac{3p_3}{2q_3}(p_3 - q_3)t^2 + O_3(t) \text{ e}$$

$$y(t) = \frac{p_3}{2q_3^2}(q_3 - p_3^2)t^3 + O_4(t).$$

Portanto, no caso em que as tangentes são paralelas, chegamos à conclusão que o $AECS$ possui uma cúspide.

Mediante ao que foi exposto ao longo deste capítulo, em particular nas Subseções 2.2.1, 2.2.3 e 2.2.4, podemos enunciar o seguinte teorema a respeito do envelope das retas médias:

Teorema 2.7. *Dada uma curva γ plana, convexa e fechada, o envelope das retas médias (EML) de γ é constituído pelo AEISS, a (AE) de γ e o MPTL, isto é:*

$$EML = AEISS \cup AE \cup MPTL.$$

Finalizamos assim o estudo do envelope das retas médias. No próximo capítulo, o qual é fruto dos resultados apresentados recentemente no artigo [9], nos debruçaremos em generalizar esses conceitos para o caso em que a reta levada em consideração não é a reta média da corda ligando dois pontos da curva, mas sim uma reta passando por um ponto "intermediário" da corda.

Capítulo 3

Envelope de retas intermediárias de uma curva plana

Seja γ uma curva plana suave. Dados dois pontos $p_1, p_2 \in \gamma$, considere $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(s)$ parametrizações locais em torno de p_1, p_2 e l_1, l_2 as retas tangentes a γ em p_1 e p_2 , respectivamente. Se l_1 e l_2 são concorrentes, considere R a intersecção dessas duas retas. Para $0 < \alpha < 1$, tomemos M_α o ponto intermediário do segmento ligando p_1 até p_2 , ou seja, $M_\alpha = (1 - \alpha)\gamma_1(t) + \alpha\gamma_2(s)$. Vale lembrar que quando $\alpha = 1/2$, o ponto M_α se torna o ponto médio da corda ligando p_1 até p_2 , situação a qual foi explorada no capítulo anterior.

Definição 3.1. *Dada uma curva oval γ , a reta intermediária de $p_1 = \gamma_1(t)$ e $p_2 = \gamma_2(s)$ é:*

- i. a reta que passa por R e M_α quando l_1 e l_2 são concorrentes se $t \neq s$;*
- ii. a única reta que passa por M_α e é paralela às tangentes l_1 e l_2 , com $t \neq s$;*
- iii. a reta tangente a γ em p_1 , se $t = s$. No caso de o ponto da corda ser o ponto médio da mesma, então a reta é a reta normal afim a γ em p_1 . Este caso não é imediato e será verificado.*

A exemplo do que foi feito no Capítulo 2 para deduzirmos a equação da reta média, novamente usaremos aqui a aplicação conormal, vista em na Definição 2.3, para encontrarmos a equação da reta intermediária.

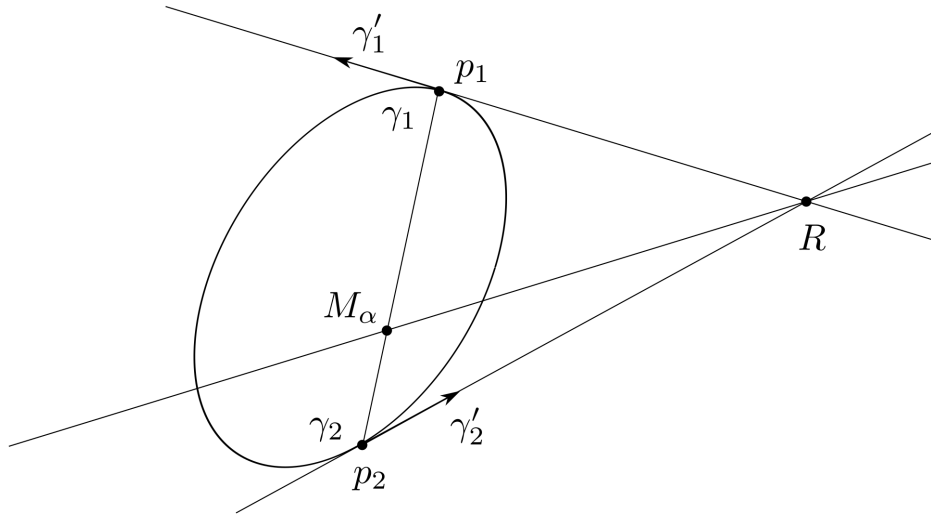


Figura 3.1: Reta intermediária para os pontos p_1 e p_2 com tangentes concorrentes.

Lema 3.1. A equação da reta intermediária é dada por:

$$(1 - \alpha)v_2(C)v_1(X - M_\alpha) + \alpha v_1(C)v_2(X - M_\alpha) = 0,$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ e $C = p_2 - p_1$ é a corda ligando os pontos p_1 e p_2 .

Demonstração: Tomemos ν o funcional que anula o vetor diretor da reta intermediária. Assim, temos:

$$\nu = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Observe que:

$$\nu(R - M_\alpha) = 0 \iff (\alpha v_1 + \beta v_2)((1 - \alpha)C + R - p_2) = 0$$

$$\iff \alpha v_1((1 - \alpha)C) + \alpha v_1(R - p_2) + \beta v_2((1 - \alpha)C) = 0$$

De fato, $v_2(R - p_2) = 0$, uma vez que $R - p_2$ é tangente a γ_2 e, como $R - p_2 = R - p_1 - C$, a última igualdade é equivalente a:

$$\alpha v_1((1 - \alpha)C) + \alpha v_1(R - p_1) - \alpha v_1(C) + \beta v_2((1 - \alpha)C) = 0 \iff$$

$$-\alpha v_1(\alpha C) + \beta v_2((1 - \alpha)C) = 0,$$

já que $R - p_1$ é tangente a γ_1 , isto é, $\alpha v_1(R - p_1) = 0$.

Portanto, basta tomar $a = (1 - \alpha)v_2(C)$ e $b = \alpha v_1(C)$, para se obter o resultado desejado.

□

Considere a família $F : \gamma_1 \times \gamma_2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(s, t, X) = (1 - \alpha)v_2(C)v_1(X - M_\alpha) + \alpha v_1(C)v_2(X - M_\alpha), \quad (3.1)$$

com $\alpha \in (0, 1)$. Para dois pontos fixados p_1 e p_2 , pelo Lema 3.1, concluímos que a equação da reta intermediária é dada por $F(s, t, X) = 0$.

De acordo com a Definição 2.1, queremos determinar o envelope $\mathcal{E}_F$ da família F , isto é,

$$\mathcal{E}_F = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (s, t); F = F_t = F_s = 0 \text{ em } (s, t, X)\}. \quad (3.2)$$

Passemos então a investigar como é o envelope da família de retas intermediárias em cada um dos casos a seguir: quando as tangentes são concorrentes e quando as tangentes são paralelas.

3.1 Retas intermediárias com tangentes não paralelas

Nesta seção, iremos estudar o envelope da família das retas intermediárias quando l_1 e l_2 são concorrentes e $t \neq s$. O resultado a seguir nos diz qual relação precisa ser satisfeita para que os parâmetros (s, t) , associados a um par de pontos na curva γ , determine um ponto no envelope das retas intermediárias.

Teorema 3.1. *A condição necessária e suficiente para que um par (s, t) determine um ponto no envelope das retas intermediárias é que:*

$$v_1(C) = -\lambda v_2(C),$$

onde:

$$\lambda = \left(\frac{(1 - \alpha)v_1(\gamma_1'')v_1^2(\gamma_2')}{\alpha v_2(\gamma_2'')v_2^2(\gamma_1')} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Demonstração: Uma vez que $\nu_1(\gamma'_1(t)) = \nu_2(\gamma'_2(s)) = 0$, ao tomarmos a derivada da Equação (3.1) com respeito a t , temos

$$F_t = (1 - \alpha)\nu_2(-\gamma'_1)\nu_1(X - M_\alpha) + (1 - \alpha)\nu_2(C)(\nu'_1(X - M_\alpha)) + \\ + \alpha\nu'_1(C)\nu_2(X - M_\alpha) - \alpha(\nu_1(C)\nu_2((1 - \alpha)\gamma'_1)).$$

Agora, usando o Lema 2.2 para a derivada dos conormais na equação anterior, obtemos:

$$F_t = - (1 - \alpha)\nu_2(\gamma'_1)\nu_1(X - M_\alpha) + b\nu_2(C)\nu_2(X - M_\alpha) \\ - \alpha(1 - \alpha)\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) + aF, \quad (3.3)$$

onde $F = F(s, t, X)$.

De forma análoga,

$$F_s = \bar{a}\nu_1(C)\nu_1(X - M_\alpha) + \alpha\nu_1(\gamma'_2)\nu_2(X - M_\alpha) \\ - \alpha(1 - \alpha)\nu_2(C)\nu_1(\gamma'_2) + \bar{b}F, \quad (3.4)$$

Isolando $\nu_2(X - M_\alpha)$ na equação $F = 0$ e o substituindo nas equações $F_t = 0$ e $F_s = 0$, obtemos, respectivamente:

$$\nu_1(X - M_\alpha) = \frac{-\alpha^2\nu_1^2(C)\nu_2(\gamma'_1)}{\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) + b\nu_2^2(C)}, \quad (3.5)$$

$$\nu_1(X - M_\alpha) = \frac{\alpha(1 - \alpha)\nu_1(C)\nu_2(C)\nu_1(\gamma'_2)}{\bar{a}\nu_1^2(C) - (1 - \alpha)\nu_2(C)\nu_1(\gamma'_2)}. \quad (3.6)$$

O próximo passo é igualar as equações (3.5) e (3.6) para obtermos

$$-\bar{a}\alpha^2\nu_1^3(C)\nu_2(\gamma_1) = b\alpha(1 - \alpha)\nu_2^3(C)\nu_1(\gamma'_2).$$

Novamente, usamos o Lema 2.2 para explicitarmos b e $\bar{a}$ na equação anterior e chegamos a

$$\frac{\nu_1^3(C)}{\nu_2^3(C)} = -\frac{(1-\alpha)\nu_1(\gamma_1'')\nu_1^2(\gamma_2')}{\alpha\nu_2(\gamma_2'')\nu_2^2(\gamma_1')} \Leftrightarrow \nu_1(C) = -\lambda\nu_2(C),$$

$$\text{onde } \lambda = \left(\frac{(1-\alpha)\nu_1(\gamma_1'')\nu_1^2(\gamma_2')}{\alpha\nu_2(\gamma_2'')\nu_2^2(\gamma_1')} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

□

Observação 3.1. Se γ_1 e γ_2 estiverem parametrizadas pelo comprimento de arco afim, então $\lambda = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}$. Assim, a condição do Teorema 3.1 é equivalente a:

$$[\gamma_1' + \lambda\gamma_2', \gamma_1' - \gamma_2'] = 0.$$

Uma vez satisfeita a condição do teorema anterior, podemos encontrar uma parametrização para um ponto X no conjunto solução do envelope das retas intermediárias com tangentes concorrentes, resultado este o qual apresentaremos a seguir.

Teorema 3.2. Seja F a família de retas intermediárias. Um ponto X pertencente ao envelope de retas intermediárias com tangentes não paralelas é dado por:

$$X - M_\alpha = \frac{\alpha\nu_1(C)}{\alpha\nu_2(\gamma_1')\nu_1(C) + b\nu_2^2(C)} \left((1-\alpha)\nu_2(C)\gamma_1' - \frac{\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma_1')}{\nu_1(\gamma_2')} \gamma_2' \right).$$

Demonstração: Para este caso, como γ_1' e γ_2' não são paralelos, podemos escrever

$$X - M_\alpha = \overline{A}\gamma_1' + \overline{B}\gamma_2'.$$

Assim, aplicando ν_2 à essa igualdade e usando a expressão de $\nu_2(X - M_\alpha)$ na equação da reta intermediária $F = 0$, temos:

$$\overline{A} = \frac{\nu_2(X - M_\alpha)}{\nu_2(\gamma_1')} = \frac{-(1-\alpha)\nu_2(C)\nu_1(X - M_\alpha)}{\alpha\nu_2(\gamma_1')\nu_1(C)}$$

Usando a expressão encontrada em (3.5) para $\nu_1(X - M_\alpha)$, temos:

$$\overline{A} = \frac{-(1-\alpha)\nu_2(C)}{\alpha\nu_2(\gamma_1')\nu_1(C)} \left(\frac{-\alpha^2\nu_1^2(C)\nu_2(\gamma_1')}{\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma_1) + b\nu_2^2(C)} \right)$$

$$\bar{A} = \frac{\alpha(1-\alpha)\nu_1(C)\nu_2(C)}{(\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) + b\nu_2^2(C))}.$$

Por um raciocínio semelhante ao que foi feito anteriormente, mas aplicando ν_1 a $X - M_\alpha = \bar{A}\gamma'_1 + \bar{B}\gamma'_2$, temos:

$$\bar{B} = \frac{\nu_1(X - M_\alpha)}{\nu_1(\gamma'_2)} = \frac{\alpha\nu_1(C)\nu_2(X - M_\alpha)}{(1-\alpha)\nu_1(\gamma'_2)\nu_2(C)}.$$

Agora, usando a expressão de $\nu_1(X - M_\alpha)$ encontrada em (3.5), concluímos que

$$\bar{B} = \frac{-\alpha^2\nu_1(C)\nu_2(C)\nu_2(\gamma'_1)}{\nu_1(\gamma'_2)(\alpha\nu_1(C)\nu_2(\gamma'_1) + b\nu_2^2(C))}.$$

Portanto, verificamos a expressão para $X - M_\alpha$.

□

Observação 3.2. 1. Neste caso, o envelope das retas intermediárias é chamado de "Affine Envelope of Intermediate Lines" (AEIL).

2. Caso as curvas estejam parametrizadas pelo comprimento de arco afim, um ponto do envelope das retas intermediárias com tangentes não paralelas se resume a:

$$X - M_\alpha = \frac{\alpha\lambda[\gamma'_2, C][\gamma'_2, \gamma'_1]}{\alpha\lambda[\gamma'_2, \gamma'_1]^2 + [\gamma'_2, C]} ((1-\alpha)\gamma'_1 - \alpha\lambda\gamma'_2).$$

3. Observe também que, quando $\alpha = 1/2$, obtemos a parametrização do AEIL, o qual compõe o envelope das retas médias, caso em que as tangentes são concorrentes, isto é,

$$X - M = \frac{1}{2} \left(\frac{[\gamma'_2, \gamma_1 - \gamma_2][\gamma'_1, \gamma'_2]}{-2[\gamma'_2, \gamma_1 - \gamma_2] + [\gamma'_1, \gamma'_2]^2} \right) (\gamma'_1 - \gamma'_2),$$

assim como visto na Equação (2.1) no Capítulo 2.

3.2 Estrutura local do envelope de retas intermediárias

Agora, estamos interessados em entender qual é o comportamento local do envelope das retas intermediárias. Assim como fizemos no Capítulo 2 para o envelope das retas médias, nesta seção, faremos essa análise do envelope das retas intermediárias levando em conta os três casos das retas tangentes à curva, isto é,

quando as tangentes são concorrentes, quando as tangentes são paralelas distintas e quando as tangentes são paralelas coincidentes.

Inicialmente, apresentaremos um modelo local para uma curva plana suave, o qual será usado para entendermos a estrutura local do envelope das retas intermediárias nos dois primeiros casos mencionados anteriormente.

A exemplo do que foi definido no Capítulo 1 para vértice e inflexão afins, relembremos aqui, nas duas definições a seguir, o que são vértice e inflexão do ponto de vista euclidiano, pois esses fatos serão úteis na construção do modelo local mencionado anteriormente.

Definição 3.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Dizemos que a curva γ tem uma inflexão em $\gamma(t_0)$ se $\kappa(t_0) = 0$, onde $\kappa(t)$ é a curvatura euclidiana de γ . Uma inflexão é chamada ordinária se $\kappa'(s_0) \neq 0$. Por outro lado, uma inflexão é dita ser de ordem superior se $\kappa'(s_0) = 0$.*

Definição 3.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada por um parâmetro arbitrário t . Dizemos que a curva γ tem um vértice em $\gamma(t_0)$ se $\kappa(t_0) \neq 0$ e $\kappa'(t_0) = 0$. Um vértice é chamado ordinário se $\kappa''(t_0) \neq 0$. Se $\kappa''(t_0) = 0$, então o vértice é dito ser de ordem superior.*

Seja γ uma curva plana, suave e fechada. Considere $p_1 = \gamma(t)$ e $p_2 = \gamma(s)$ dois pontos distintos de γ , tais que $\kappa(t) \neq 0$ e $\kappa'(t) \neq 0$, onde κ é a curvatura euclidiana em p_1 , isto é, p_1 não é um ponto de vértice ordinário e nem um ponto de inflexão ordinária. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\begin{aligned} p_1 &= (t, f(t)) = \left(t, \frac{1}{2}t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + O_6(t)\right), \\ p_2 &= (s, g(s)) = (s, b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4 + b_5s^5 + O_6(s)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que $b_0 > 0$, $a_3 > 0$, $b_1^2 - b_0 > 0$ e $O_6(t)$ (resp. $O_6(s)$) representa os termos de ordem maiores ou iguais a 6 em relação ao parâmetro t (resp. s). A figura a seguir ilustra essa situação.

Seja $F(x, y, t, s) = l_1(t, s)x + l_2(t, s)y + l_3(t, s)$ a equação da reta intermediária passando pelo ponto M_α dada pelo Lema 3.1. A condição de existência da solução para o envelope de tal família de retas é que o determinante da matriz M a seguir seja

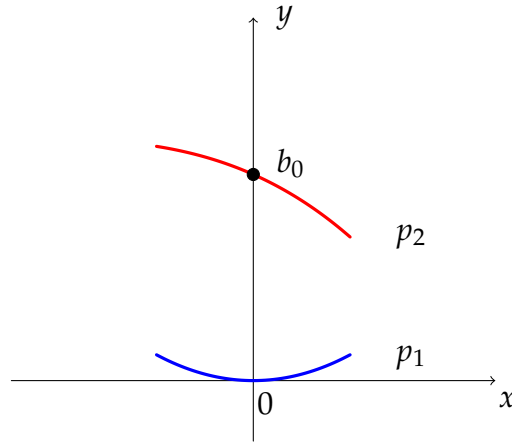


Figura 3.2: Parametrizações locais da curva γ em torno de p_1 e p_2 , onde o arco p_1 é dado em azul e o arco p_2 em vermelho.

nulo:

$$M = \begin{bmatrix} F_x(0,0,t,s) & F_y(0,0,t,s) & F(0,0,t,s) \\ F_{sx}(0,0,t,s) & F_{sy}(0,0,t,s) & F_s(0,0,t,s) \\ F_{tx}(0,0,t,s) & F_{ty}(0,0,t,s) & F_t(0,0,t,s) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

O determinante da matriz M é dado por

$$\det(M) = \frac{1}{8} \alpha(\alpha - 1) A(t,s) B(t,s), \quad (3.9)$$

onde $A(0,0) = 0$ e $B(0,0) = 8(2\alpha b_2 - \alpha + 1)b_0^3$ com

$$A(t,s) = t - 2b_2s + 3a_3t^2 - 3b_3s^2 + O_3(t,s), \quad (3.10)$$

e $O_3(t,s)$ representa os termos com respeito aos parâmetros t e s de ordem maiores ou iguais a 3.

Além disso, vale lembrar que as retas tangentes em p_1 e p_2 podem ser paralelas ou concorrentes.

3.2.1 Retas tangentes concorrentes

Se as retas tangentes nos pontos p_1 e p_2 não são paralelas, então o determinante da matriz M dado na Equação (3.9) é zero se $B(t,s) = 0$. Note que, neste caso, $A(t,s) \neq 0$. Como $B(0,0) = 8(2\alpha b_2 - \alpha + 1)b_0^3$ e $b_0 \neq 0$, a expressão $B(t,s)$ localmente tem um zero ao redor da origem se $b_2 = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$. Usando esse fato, por meio do teorema

da função implícita, podemos assumir que t é uma função de s para escrevermos

$$t = \frac{2\alpha b_0 b_3 + b_1(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(2a_3 b_0 + b_1)} s + O_2(s). \quad (3.11)$$

Note que, como o ponto p_1 não é um ponto de vértice, sem perda de generalidade, podemos assumir que b_0, b_1 e $a_3 > 0$. De fato, como p_1 não é um vértice, segue que, em $t = 0$, $\kappa(0) \neq 0$ e $\kappa'(0) = 6a_3 \neq 0$. Daí, $2a_3 b_0 + b_1 \neq 0$.

Teorema 3.3. *Dada uma curva plana γ , suponha que dois pontos de γ , p_1 e p_2 , satisfazem a parametrização local dada como nas equações em (3.7), de modo que não tenham tangentes paralelas. Assim:*

- i) *Se p_1 e p_2 não são pontos de inflexão, a condição de regularidade do envelope da família de retas intermediárias é que*

$$\alpha \neq \frac{b_0}{b_1^2}, 1, \\ b_3 \neq \frac{(\alpha - 1)(-6\alpha a_3 b_0 b_1^2 + 4\alpha a_3 b_0^2 - 3\alpha b_1^3 - 2a_3 b_0^2)}{2\alpha b_0(6\alpha a_3 b_0 b_1 + 3\alpha b_1^2 + 2\alpha b_0 - b_0)},$$

- ii) *Se p_1 é um ponto de inflexão, então o envelope da família de retas intermediárias é regular em $s = 0$ se $b_3 \neq 0$. De forma equivalente, se p_2 é um ponto de inflexão na origem.*

Demonstração: i) Considere os pontos p_1 e p_2 dados como nas equações em (3.7), de forma que nenhum deles seja um ponto de inflexão. Após substituir o parâmetro t , expresso em (3.11), na solução do envelope de retas intermediárias (3.1), obtemos a seguinte parametrização:

$$X(t(s), \alpha) = \left(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 s + O(s^2), \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 s + O(s^2) \right), \quad (3.12)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{a}_0 &= -\frac{\alpha b_1 b_0}{\alpha b_1^2 - b_0}, \\ \tilde{a}_1 &= -\frac{b_0 \delta}{(b_1^2 \alpha^2 - (b_1^2 + b_0) \alpha + b_0)(2a_3 b_0 + b_1)(b_1^2 \alpha - b_0)}, \\ \tilde{b}_0 &= -\frac{\alpha b_0^2}{\alpha b_1^2 - b_0}, \\ \tilde{b}_1 &= -\frac{b_1 \delta}{(b_1^2 \alpha^2 - (b_1^2 + b_0) \alpha + b_0)(2a_3 b_0 + b_1)(b_1^2 \alpha - b_0)},\end{aligned}$$

e δ é um termo constante. Observe que, como assumimos que $b_1^2 - b_0 > 0$, o denominador de $\tilde{a}_1$ e $\tilde{b}_1$ não se anulam para qualquer valor real de $\alpha \neq b_0/b_1^2$ e $\alpha \neq 1$. O Envelope (3.12) é singular em $s = 0$ se $\delta = 0$. Isso acontece se

$$b_3 = \frac{\alpha - 1}{2\alpha b_0} \frac{(-6\alpha a_3 b_0 b_1^2 + 4\alpha a_3 b_0^2 - 3\alpha b_1^3 - 2a_3 b_0^2)}{(6\alpha a_3 b_0 b_1 + 3\alpha b_1^2 + 2\alpha b_0 - b_0)},$$

o completa a prova do item i).

ii) Suponha que a curva γ não é uma oval e tenha um ponto de inflexão em p_1 . Então, podemos assumir que os pontos p_1 e p_2 tenham as seguintes formas locais: $p_1 = (t, a_3 t^3 + O(t^4))$ e $p_2 = (s, b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + O(s^3))$, com $b_0 b_1 \neq 0$. Neste caso, o fator que anula no determinante da matriz M dado em (3.8) se torna

$$B(t, s) = 16\alpha b_0^3 b_2 + O(t, s).$$

Assim, $B(0, 0) = 0$ se, e somente se, $b_2 = 0$. Daí, pelo Teorema da Função Implícita, escrevemos t como função de s de modo a obtermos

$$t = \frac{\alpha b_3}{(\alpha - 1)a_3} s + O(s^2).$$

Ou seja, a parametrização do envelope da família F em (3.1) é expresso por

$$X(s, \alpha) = \left(-\frac{b_0}{b_1} + \hat{a}s + O(s^2), \hat{b}s + O(s^2) \right),$$

onde

$$\hat{a}\hat{b} = \frac{36\alpha b_3^2 b_0^4}{b_1^5 (\alpha - 1)^2}.$$

Isso significa que $X(s, \alpha)$ é singular na origem, se $b_3 = 0$. De forma equivalente, $X(s, \alpha)$ é regular na origem se p_2 é um ponto de inflexão.

□

O comportamento local do AEIL é mostrado na Figura 3.3.

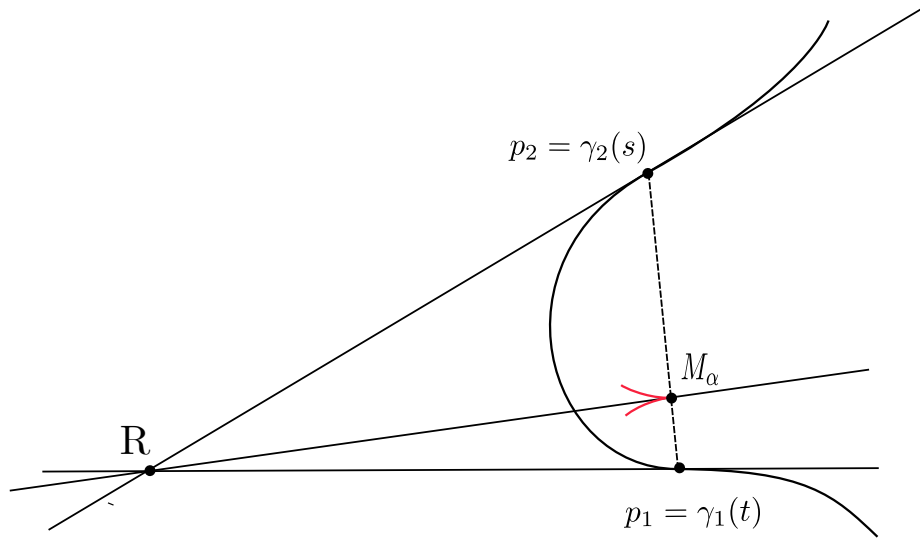


Figura 3.3: O AEIL (em vermelho) da curva γ (em preto) quando p_1 e p_2 são pontos de inflexão com tangentes não paralelas.

3.2.2 Retas tangentes paralelas não coincidentes

O envelope das retas intermediárias com tangentes paralelas não coincidentes é chamado de *Intermediate-Parallel Tangent Locus* (IPTL).

Neste caso, suponha agora que nos pontos p_1 e p_2 , dados como em (3.7), as tangentes sejam paralelas e distintas. Segue então que $b_1 = 0$. Além disso, a equação $A(t, s) = 0$, presente em (3.10), nos dá a relação entre os parâmetros t e s nesse caso.

Ao aplicarmos o Teorema da Função Implícita na expressão (3.10), podemos obter t como função de s , isto é, podemos escrever

$$t = 2b_2s + (-12a_3b_2^2 + 3b_3)s^2 + O_3(s).$$

Assim, conseguimos uma relação entre os parâmetros t e s , de forma a investigarmos o comportamento do envelope das retas intermediárias quando as

tangentes são paralelas distintas. O resultado a seguir nos diz a respeito dessa situação.

Proposição 3.1. *Sejam γ uma curva plana suave, p_1 e p_2 dois pontos de γ dados como em (3.7). Se as retas tangentes de γ nos pontos p_1 e p_2 são paralelas, então o IPTL da curva γ :*

1. *passa pelo ponto $M_\alpha(0,0) = (0, b_0\alpha)$;*
2. *é regular em $s = 0$ se, e somente se, $b_2 \neq \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}$;*
3. *tem uma cúspide ordinária em $s = 0$ se, e somente se,*

$$b_2 = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \text{ e } b_3 \neq \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 a_3;$$

4. *tem uma singularidade do tipo $(3,4)$ -cúspide em $s = 0$ se, e somente se,*

$$b_2 = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}, b_3 = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2 a_3 \text{ e } b_4 \neq \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^3 a_4.$$

Demonstração: Neste caso, a parametrização do IPTL é dada por $M_\alpha(s, \alpha) = (1-\alpha)p_1 + \alpha p_2$. Então, segue que $M_\alpha(0,0) = (0, b_0\alpha)$, o que prova o item 1.

As demonstrações de 2 a 4 seguem de cálculos rotineiros, basta se atentar para o fato de que uma curva plana θ é regular em $t = 0$ se $\theta'(0) \neq 0$. Por outro lado, para se verificar o tipo de cúspide, atentamos à Definição 2.5, levando em conta a parametrização $M_\alpha(s, \alpha) = (1-\alpha)p_1 + \alpha p_2$ do IPTL.

□

Antes de seguirmos com mais propriedades do envelope de retas intermediárias, definiremos o que são jatos de funções, pois usaremos essa definição na demonstração do próximo resultado.

Dada uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, definida numa vizinhança de t_0 , a série de Taylor de f em t_0 pode ser expressa como

$$f(t_0) + tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!}f''(t_0) + \frac{t^3}{3!}f'''(t_0) + \dots,$$

onde expandimos $f(t+t_0)$ em vez de $f(t)$, de modo que t está perto de 0 ao invés de t_0 .

Definição 3.4. *Seja $k \geq 1$ inteiro. O k -jato de f com o termo constante é o polinômio*

$$j^k f(t_0) = f(t_0) + t f'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \dots + \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(t_0),$$

obtido pelo truncamento da série de Taylor no grau k .

Dois k -jatos são chamados iguais quando eles são identicamente os mesmos polinômios.

De volta ao caso do envelope das retas intermediárias, também podemos estudar o caso em que há um ponto de inflexão na curva γ . Considere $p_1 = (t, a_3 t^3 + O(t^4))$ e p_2 dado como em (3.7). A proposição a seguir nos diz respeito a essa situação.

Proposição 3.2. *Pelas considerações feitas anteriormente, se um dos pontos p_1 ou p_2 , ou ambos, tem uma inflexão na origem, então o IPTL passa pelo ponto M_α e é regular na origem se $\alpha \in (0, 1)$.*

Além disso, caso $b_2 \neq 0$, a curva γ tem uma inflexão de ordem k em p_1 se, e somente se, o IPTL tem uma inflexão de ordem k na origem, para $k = 1, 2$.

Demonstração: Inicialmente, suponha que p_2 não seja um ponto de inflexão em $s = 0$, ou seja, $b_2 \neq 0$. Usando a Expressão (3.10), conseguimos escrever s como uma função de t . Assim, conseguimos uma parametrização do IPTL, como segue:

$$\left((1 - \alpha)t + O(t^2), \alpha b_0 + a_3(1 - \alpha)t^3 + \frac{9\alpha a_3^2 + 4a_4 b_2(1 - \alpha)}{b_2} t^4 + O(t^5) \right).$$

Agora, suponha que a curva γ tenha uma inflexão ordinária no ponto p_2 , isto significa que $b_2 = 0$ e $b_3 \neq 0$. Daí, usando a relação $v_1(C) = -\lambda v_2(C)$, onde $\lambda = ((1 - \alpha)/\alpha)^{\frac{1}{3}}$, referente ao Teorema 3.1, obtemos:

$$s = -\frac{a_3}{b_3} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) t + O(t^2).$$

Ao substituirmos essa relação de s e t na Expressão (3.1) referente ao envelope, conseguimos uma parametrização para o envelope de retas intermediárias dado por

$$X(t, \alpha) = \left(\frac{h_1(\alpha)}{2\alpha b_3} t + O(t^2), \alpha b_0 + \frac{h_2(\alpha)}{2\alpha^2 b_3^2} t^3 + O(t^4) \right),$$

onde h_1 e h_2 são funções suaves com respeito a α e seus 1-jatos são, respectivamente:

$$j^1 h_1(\alpha) = a_3 - 2(2a_3 + b_3)\alpha \quad , \quad j^1 h_2(\alpha) = a_3^3 - 3a_3^2(2a_3 - b_3)\alpha.$$

Neste caso, $X(t, \alpha)$ é regular, em $t = 0$, se $X'(0, \alpha) \neq (0, 0)$. Isso significa que $h_1(\alpha)$, em torno de $\alpha = 0$, precisar ser não nula. E isso é verdade, basta olhar para $j^1 h_1(\alpha)$, o que conclui a demonstração.

A Figura 3.4 ilustra o IPTL da curva γ , quando p_1 e p_2 são pontos de inflexão com tangentes paralelas distintas.. □

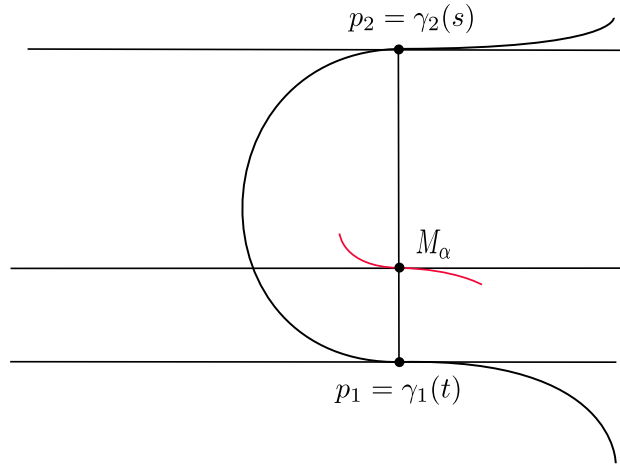


Figura 3.4: O IPTL (em vermelho) da curva γ (em preto) quando p_1 e p_2 são pontos de inflexão com tangentes paralelas distintas.

- Observação 3.3.** 1. Vale lembrar que, quando $\alpha = 1/2$, o conjunto $AEIL = AEISS$ e $IPTL = MPTL$ se encontram sem seus pontos singulares, como vimos no Capítulo 2. Por sua vez, quando $\alpha \neq 1/2$, ambos não se encontram em seus pontos singulares.
2. Além disso, é possível determinar o "primeiro" $\alpha = \alpha_0$ para o qual a cúspide aparece no IPTL ou AEIL. Para isso, em relação ao IPTL (resp. AEIL), basta encontramos a relação entre os parâmetros, como fizemos nesta seção. Daí, de acordo com a condição de regularidade presente na Proposição 3.1 (resp. Teorema 3.3), encontra-se o α_0 .

3.2.3 Retas tangentes paralelas coincidentes

Chegamos ao último caso, que está relacionado com o caso limite do envelope de retas intermediárias de uma curva γ . Assim, queremos saber o comportamento da reta intermediária quando um ponto da curva tende ao outro. Para isso, considere parametrizações locais da curva γ , em cada ponto, dadas por

$$\gamma_1(t) = (t, f(t)) \text{ e } \gamma_2(s) = (s, f(s)),$$

onde f é uma função suave em relação aos parâmetros s e t .

Sejam $C = (t - s, f(t) - f(s))$ a corda, $M_\alpha = ((1 - \alpha)t + \alpha s, (1 - \alpha)f(t) + \alpha f(s))$ o ponto intermediário, $\mathbf{n}_1(t) = (-f'(t), 1)$ e $\mathbf{n}_2(s) = (-f'(s), 1)$, os vetores normais euclidianos em γ_1 e γ_2 , respectivamente.

Lembre-se de que podemos escrever $\langle \mathbf{n}_i, u \rangle = [\gamma'_i, u]$, para $u \in \mathbb{R}^2$ e $i = 1, 2$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$, e também podemos considerar $\langle \mathbf{n}_i, u \rangle = N_i(u)$. Então a equação da reta intermediária se torna

$$(1 - \alpha)N_2(C)N_1(X - M_\alpha) + \alpha N_1(C)N_2(X - M_\alpha) = 0.$$

Do Teorema 3.1, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{N_1(C)}{(f''(t_1))^{\frac{1}{3}}} = -\lambda \frac{N_2(C)}{(f''(t_2))^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{N_1(C)}{N_2(C)} = - \left(\frac{(1 - \alpha)f''(t_1)}{\alpha f''(t_2)} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Considere $X = (x, y)$ um ponto da reta intermediária e $M_\alpha = (\tilde{x}, \tilde{y})$ o ponto intermediário. Usando a equação de reta intermediária e a relação anterior, obtemos:

$$(1 - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & x - \tilde{x} \\ f'(t) & y - \tilde{y} \end{vmatrix} - \alpha \left(\frac{(1 - \alpha)f''(t)}{\alpha f''(s)} \right)^{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 1 & x - \tilde{x} \\ f'(s) & y - \tilde{y} \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, temos

$$(y - \tilde{y}) \left(1 - \alpha - \alpha \left(\frac{(1 - \alpha)f''(t)}{\alpha f''(s)} \right)^{\frac{1}{3}} \right) = (x - \tilde{x}) \left((1 - \alpha)f'(t) - \alpha \left(\frac{(1 - \alpha)f''(t)}{\alpha f''(s)} \right)^{\frac{1}{3}} \right),$$

então encontramos o coeficiente angular $A = A(s, t)$ da reta intermediária, expresso por:

$$A(s, t) = \frac{(1 - \alpha)f'(t)(\alpha f''(s))^{\frac{1}{3}} - \alpha f'(s)((1 - \alpha)f''(t))^{\frac{1}{3}}}{(1 - \alpha)(\alpha f''(s))^{\frac{1}{3}} - \alpha((1 - \alpha)f''(t))^{\frac{1}{3}}}.$$

Agora, faremos o $\lim_{s \rightarrow t} A(s, t)$. Quando $\alpha = 1/2$, temos

$$\lim_{s \rightarrow t} A(s, t) = \frac{\frac{1}{3}f'(t)(f''(t))^{-\frac{2}{3}}f'''(t) - f''(t)^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{3}(f''(t))^{-\frac{2}{3}}f'''(t)},$$

o qual é o coeficiente angular da reta norma afim de γ no ponto p_1 , como vimos na Proposição 2.2 do Capítulo 2.

Por outro lado, se $\alpha \neq 1/2$,

$$\lim_{s \rightarrow t} A(s, t) = \frac{f'(t)(f''(t))^{\frac{1}{3}}((1 - \alpha)\alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha(1 - \alpha)^{\frac{1}{3}})}{(f''(t))^{\frac{1}{3}}((1 - \alpha)\alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha(1 - \alpha)^{\frac{1}{3}})} = f'(t),$$

o qual é o coeficiente angular da reta tangente a γ no ponto p_1 .

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.4. *Sejam γ uma curva plana suave, $p_1 = \gamma_1(t) = (t, f(t))$ e $p_2 = \gamma_2(s) = (s, f(s))$ dois pontos de γ . Quando s tende a t , então a reta intermediária ($\alpha \neq 1/2$) tende à reta tangente a γ , no ponto p_1 .*

Diferente do que acontece no envelope das retas médias, aqui, o envelope das retas intermediárias no caso limite é a própria curva, uma vez que a reta intermediária se torna a reta tangente à γ .

Pelo que vimos até aqui neste capítulo, em especial na Seção 3.1 e Subseções 3.2.2 e 3.2.3, concluímos que o envelope de retas intermediárias é constituído por outros três conjuntos, o que nos possibilita enunciarmos o teorema a seguir.

Teorema 3.5. *Dada uma curva γ plana suave, o envelope das retas intermediárias (EIL) de γ é constituído pelo AEIL, o IPTL e o CTL, ou seja,*

$$EIL = AEIL \cup IPTL \cup CTL.$$

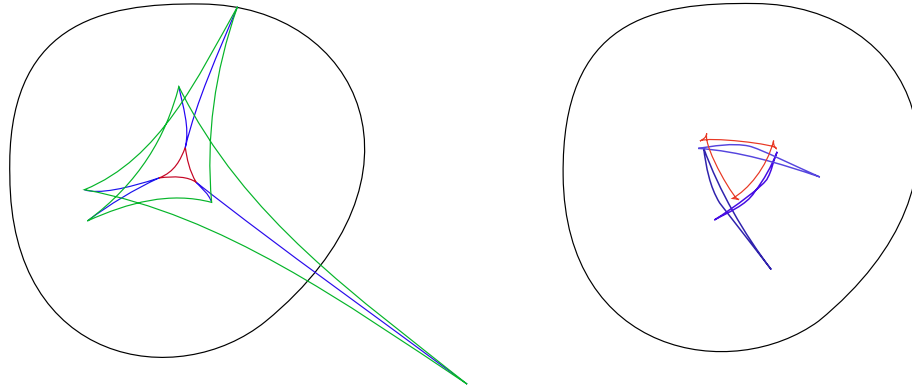


Figura 3.5: A figura ilustra um exemplo do Envelope das Retas Intermediárias da curva $\gamma(t) = (0.1 \cos(2\pi t) + \cos(\pi t), 0.1 \sin(2\pi t + 1) + \sin(\pi t))$. Na figura da esquerda, temos o envelope quando $\alpha = 0.5$ com o *MPTL* (vermelho), *AEISS* (azul) e a Evoluta afim (verde). Já a figura da direita ilustra o envelope para $\alpha = 0.6$, onde o *IPTL* (vermelho) e *AEIL* (azul) aparecem.

3.3 Abordagem por meio da Teoria de Singularidades

Agora faremos um estudo um pouco mais abrangente a respeito do envelope de retas intermediárias, não somente tendo um certo valor de α fixado, mas entender um pouco o que acontece com o envelope a medida que α varia em $(0, 1) \setminus \{1/2\}$. Na verdade, estamos interessados em investigar uma condição para um determinado tipo de singularidade nesse envelope.

Para tanto, faremos uso de alguns resultados da Teoria de Singularidades, os quais nos possibilitam chegar a certas conclusões a respeito de como o envelope de retas intermediárias se comporta na situação a qual α se torna uma variável. Para saber mais detalhes sobre a Teoria de Singularidades, veja [1] ou [10].

3.3.1 Germes de aplicações suaves

Sejam X e Y dois subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é equivalente a Y se existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p tal que $X \cap U = Y \cap U$. Essa regra define uma relação de equivalência entre os subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto p . A classe de equivalência de um subconjunto X é chamado de germe de X em p e é denotado por (X, p) .

Dados dois subconjuntos abertos U e V do $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, considere $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ duas aplicações suaves. Dizemos que f é

equivalente a g , e denotamos por $f \sim g$, se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p , tal que $f = g$ em W , ou seja, $f|_W = g|_W$.

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência e o germe em p de uma função suave é, por definição, uma classe de equivalência por meio dessa relação de equivalência. Um germe de função em p é denotado por $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Algumas vezes, pode desejar-se que todos os elementos da classe de equivalência tenham um mesmo valor em p , digamos q . Daí, escrevemos

$$f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q).$$

Suponha que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$ é um germe de uma aplicação. O espaço de todos esses germes é denotado por $\mathcal{E}(n, m)$. Quando $m = 1$, denotamos $\mathcal{E}(n, 1)$ por $\mathcal{E}_n$. O conjunto dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n : f(0) = 0\}$ é um ideal maximal de $\mathcal{E}_n$.

3.3.2 Singularidades de germes de aplicações suaves

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave e considere $df : TU \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação derivada onde TU é o espaço tangente ao conjunto aberto U . A aplicação f é singular em $p \in U$ se o posto da transformação linear

$$(df)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

não é máximo, isto é, se $\text{rank}(df)_p < \min(n, m)$. O ponto p é então chamado de ponto singular de f . Caso contrário, dizemos que f é não singular em p e que p é um ponto regular de f . O conjunto crítico de f , denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto dos pontos singulares de f , isto é,

$$\Sigma(f) = \{p \in U; \text{rank}(df)_p < \min(n, m)\}.$$

3.3.3 Desdobramentos

Considere um germe de função $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$. Uma família de funções a r -parâmetro para f é uma função suave

$$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.13)$$

definida em torno de (t_0, x_0) , tal que $F(t, 0) = f(t)$.

Exemplo 3.1. Considere $X \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana p.p.c.a.a. Definimos a família de funções

$$F : I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$F(s, X) = [X - \gamma(s), \gamma_s(s)],$$

a qual é chamada de Função Distância ao cubo Afim, ou simplesmente, Função Distância Afim.

Note que F nos dá uma família de funções de $X \in \mathbb{R}^2$, a 2 parâmetros, parametrizadas por s .

Seja F uma família de funções contendo uma função f . Podemos usar como exemplo a família de funções distância ao cubo de uma curva no $\mathbb{R}^2$, a qual vimos anteriormente, onde há dois parâmetros dados pelas coordenadas de um ponto $X \in \mathbb{R}^2$. Mudando um pouco os parâmetros, iremos “perturbar” f em uma certa vizinhança dessa função. Em outro exemplo, exibido na Figura 3.6, estão os traços das perturbações de $f(t) = t^5$.

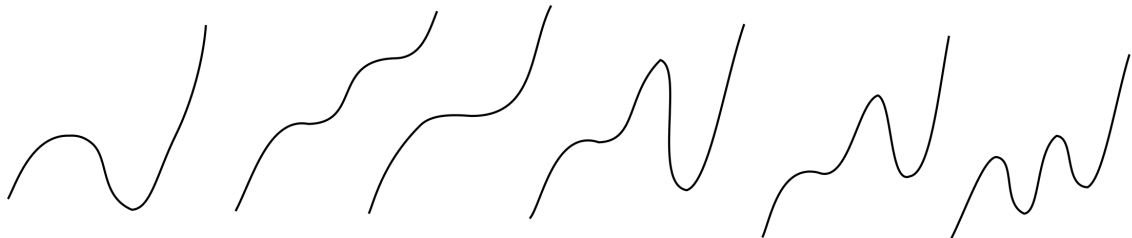


Figura 3.6: Perturbações de t^5 .

Uma família de funções contendo f é chamada de **desdobramento** de f : a família

desdobrada revela todas essas funções próximas de f . Por exemplo, para $f(t) = t^5$, a função $F(t, x_1, x_2, x_3) = x^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t$ é um desdobramento de f com 3 parâmetros x_1, x_2 e x_3 . A Figura 3.6 ilustra todos os gráficos da função F .

Definição 3.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f^{(p)}(t_0) = 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, para todo $1 \leq p \leq k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Para $k \geq 0$, dizemos que f tem uma singularidade de tipo A_k em t_0 . Dizemos também que f tem tipo $A_{\geq k}$ quando $f^{(p)}(t_0) = 0$, para todo $1 \leq p \leq k$.*

Exemplo 3.2. *Retornando à função distância ao cubo do Exemplo 3.1, considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada p.p.c.a.a., tal que $\mu(s) \neq 0$, para todo $s \in I$. Dado $X \in \mathbb{R}^2$, a função $f(s) = F(s, X)$ goza das seguintes propriedades:*

- i. *tem singularidade do tipo A_2 em s_0 se, e somente se, $X = \gamma(s_0) + \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0)$, isto é, X é um ponto da evoluta afim de γ ;*
- ii. *tem singularidade do tipo A_3 em s_0 se, e somente se, $\mu(s_0) \neq 0, \mu'(s_0) = 0$ e X é um ponto da evoluta afim de γ , ou seja, $\gamma(s_0)$ é um vértice afim de γ .*

Com efeito:

Note que $f'(s) = [-\gamma_s, \gamma_s] + [X - \gamma, \gamma_{ss}]$. Assim:

$$f'(s_0) = 0 \Leftrightarrow [-\gamma_s(s_0), \gamma_s(s_0)] + [X - \gamma(s_0), \gamma_{ss}(s_0)] = 0 \Leftrightarrow [X - \gamma(s_0), \gamma_{ss}(s_0)] = 0,$$

ou seja, $X - \gamma(s_0)$ é paralelo a $\gamma_{ss}(s_0)$, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que $X - \gamma(s_0) = \lambda\gamma_{ss}(s_0)$. Além disso,

$$f''(s) = [-\gamma_{ss}, \gamma_s] + [-\gamma_s, \gamma_{ss}] + [-\gamma_s, \gamma_{ss}] + [X - \gamma, \gamma_{sss}] \Leftrightarrow$$

$$f''(s) = [X - \gamma, \gamma_{sss}] - 1.$$

Assim,

$$f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow [X - \gamma(s_0), \gamma_{sss}(s_0)] = 1.$$

Mas $X - \gamma(s_0) = \lambda\gamma_{ss}(s_0)$. Daí,

$$f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow [\lambda\gamma_{ss}(s_0), \gamma_{sss}(s_0)] = 1 \Leftrightarrow \lambda[\gamma_{ss}(s_0), \gamma_{sss}(s_0)] = 1 \Leftrightarrow \lambda\mu(s_0) = 1.$$

Como $\mu(s_0) \neq 0$, então:

$$f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\mu(s_0)}.$$

Logo,

$$X = \gamma(s_0) + \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0),$$

ou seja, f tem singularidade do tipo A_2 em s_0 , se e somente se, X está sobre a evoluta afim de γ em s_0 .

Para o item ii., temos:

Como $\mu = [\gamma_{ss}, \gamma_{sss}]$, então $\mu' = [\gamma_{ss}, \gamma_{ssss}]$. Agora,

$$f'''(s) = [-\gamma_s, \gamma_{sss}] + [X - \gamma, \gamma_{ssss}].$$

Daí,

$$f'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow [X - \gamma(s_0), \gamma_{ssss}(s_0)] = [\gamma_s(s_0), \gamma_{sss}(s_0)].$$

Do item i., $X - \gamma(s_0) = \frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0)$, assim:

$$f'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{\mu(s_0)}\gamma_{ss}(s_0), \gamma_{ssss}(s_0) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\gamma_{ss}(s_0), \gamma_{ssss}(s_0)] = 0 \Leftrightarrow \mu'(s_0) = 0.$$

Portanto, f tem singularidade do tipo A_3 em s_0 se, e somente se, X é um ponto da evoluta afim de γ em s_0 e $\gamma(s_0)$ é um vértice afim de γ .

Agora, de volta à família de retas intermediárias introduzida anteriormente neste capítulo, podemos fazer a seguinte observação:

Observação 3.4. As condição apresentadas nas Proposições 3.1, 3.2 e no Teorema 3.3 são equivalentes a dizer que o envelope tem singularidade A_2 ou A_3 na origem ($t_0 = 0$).

Um dos conceitos importantes na teoria de singularidades é sobre um desdobramento versal F de um germe da aplicação f . Um desdobramento versal é, em certo sentido, aquela família que contém todas as deformações possíveis do germe de mapa inicial f . Além disso, um desdobramento versal de um germe de mapa f fornece um modelo de todas as singularidades que aparecem sob pequenas perturbações do germe f . Para ver a definição geral de um desdobramento versal

de um germe de mapa, confira [10]. Por exemplo, a família $F(t, x_1, x_2, x_3) = x^5 + x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t$, ilustrada na Figura 3.6, é um desdobramento versal de $f(t) = t^5$.

A seguir, para um germe de função f com singularidade do tipo A_r em t_0 , daremos uma definição alternativa para o desdobramento versal F de função f (para saber mais detalhes, veja [1]), a qual será usada no resultado envolvendo o envelope das retas intermediárias.

Definição 3.6. *Suponha que $t = t(s)$ e que $F = F_s = 0$ em $(s_0, X_0) = (s_0, x_0, y_0, \alpha_0)$. Considere também que $f(s) = F(s, X_0)$ tem uma singularidade do tipo A_r em s_0 . Escreva as derivadas parciais de F como F_x , F_y e F_α em relação ao parâmetro x_i , avaliadas em X_0 e considere seus polinômios de Taylor $\mathcal{T}_i$ até grau $r - 1$, expandidos em s_0 , isto é, temos r termos. A família $F(X, s)$ é chamada de um desdobramento versal de f em s_0 se $\{\mathcal{T}_i\}$ gera um espaço vetorial de dimensão r . Então, colocando os coeficientes de $\mathcal{T}_i$ nas colunas de uma matriz $(r - 1) \times 3$ nos dão uma matriz de posto $r - 1$, o que só é possível se $r \geq 3$.*

Voltando ao caso do envelope das retas intermediárias, apresentaremos, a seguir, uma condição de versalidade para que a família do envelope de retas intermediárias tenha uma singularidade do tipo A_2 .

Teorema 3.6. *Sejam γ uma curva plana fechada, $p_1 = \gamma(t)$ e $p_2 = \gamma(s)$ dois pontos distintos de γ com tangentes concorrentes os quais têm parametrizações locais dadas como em (3.7). Considere F a família de retas intermediárias de γ , dadas em (3.1). Suponha que $f(s) = F(x_0, y_0, \alpha_0, s)$ tenha uma singularidade do tipo A_2 na origem. Então, F é versal se, e somente se,*

$$a_3 = -\frac{1}{6} \frac{5\alpha - 1}{\alpha^2 b_1}.$$

Demonstração: Usando a relação entre os parâmetros s e t dada em (3.11) e a condição de uma singularidade do tipo A_2 , como mencionado no Teorema 3.3, podemos escrever

$$F(x, y, \alpha, s) = \alpha^2 b_1^2 (-\alpha^2 b_1^2 - b_1 x + y) + (1 - \alpha) \alpha b_1^2 (-\alpha^2 b_1^2 + y) + O(s).$$

Além disso, considere:

$$\begin{aligned} j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x}(X_0, s) \right) (0) &= m_{11}s, \\ j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial y}(X_0, s) \right) (0) &= m_{21}s, \\ j^1 \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}(X_0, s) \right) (0) &= m_{31}s, \end{aligned}$$

onde $X_0 = (x_0, y_0, \alpha_0) = (-\alpha b_1, 0, \alpha)$ e

$$\begin{aligned} m_{11} &= -\frac{\alpha b_1^2(6\alpha^2 a_3 b_1 + 5\alpha - 1)}{2(3\alpha a_3 b_1 + \alpha + 1)} \\ m_{12} &= \frac{b_1(6\alpha^2 a_3 b_1 + 5\alpha - 1)}{2(3\alpha a_3 b_1 + \alpha + 1)} \\ m_{13} &= \frac{\alpha b_1^3(36\alpha^3 a_3^2 b_1^2(\alpha - 1) + 12\alpha^3 a_3 b_1 + 9\alpha^2 a_3 b_1 - 24\alpha a_3 b_1 + \alpha^2 + 2\alpha - 5)}{2(3\alpha a_3 b_1 + \alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz $M = (m_{11}, m_{12}, m_{13})$ tem posto 1 se, e somente se, $a_3 = -\frac{1}{6} \frac{5\alpha - 1}{\alpha^2 b_1}$. $\square$

Para finalizar, considere X para denotar os parâmetros (x, y, α) e X_0 um valor fixo de X . Suponha que a família de retas intermediárias F seja uma família versal de $f(t) = F(X_0, t)$ onde $f(t)$ tem tipo A_k , $k = 2$ ou 3 .

Resultados mais aprofundados da Teoria de Singularidades nos dizem que o discriminante de F , ou seja, o envelope $\mathcal{E}_F$ dado em (3.2), é uma vizinhança de X_0 , localmente, difeomorfo ao discriminante padrão de uma família com singularidade do tipo A_k . Neste caso, para a singularidade do tipo A_2 , localmente, o envelope da família de retas intermediárias é difeomorfo ao conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^3 = x_2^2\}$, o qual é uma cúspide. Os detalhes técnicos dessa constatação podem ser encontrados em [1].

Referências Bibliográficas

- [1] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. **Curves and Singularities**: A geometrical introduction to singularity theory. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 340 p.
- [2] NOMIZU, K.; SASAKI, T. **Affine Differential Geometry**: Geometry of Affine Immersions. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 263 p.
- [3] BUCHIN, S. **Affine Differential Geometry**. 1. ed. New York: Gordon and Breach, 1983. 258 p.
- [4] DAVIS, D. **Affine Differential Geometry & Singularity Theory**. 2008. Thesis (Ph. D). University of Liverpool, Liverpool, England. 2008.
- [5] GIBLIN, P. J.; SAPIRO, G. Affine invariant distances, envelopes and symmetry sets. **Computer Peripherals Laboratory**, HPL-96-93, 1996.
- [6] GIBLIN, P. J.; SAPIRO, G. Affine invariant distances, envelopes and symmetry sets. **Geometriae Dedicata**. vol 71, p. 237-261, 1998.
- [7] HOLTOM, P. A. **Affine-invariant symmetry sets**. 2000. Thesis (Ph. D). University of Liverpool, Liverpool, England. 2000.
- [8] CAMBRIA JUNIOR, A. **Envelope de planos médios**. 2015. Tese (Doutorado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2015.
- [9] CAMBRIA JUNIOR, A.; SALARINOGHABI, M.; TRINDADE, D. Envelope of intermediate lines of a planar curve. **Results Math**. v. 75, n. 87, 2020.
- [10] GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. 1. ed. London: Pitman Publishing Limited, 1979. 239 p.

- [11] BLASHKE, W. **Vorlesungen über Differentialgeometrie II:** Affine Differentialgeometrie. 1. ed. Berlin: Springer, 1923. 262 p.