

ALANA CAVALCANTE FELIPPE

INVARIANTES GLOBAIS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE  
SUPERFÍCIES FECHADAS EM  $S^2$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2013

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

F315i  
2013

Felippe, Alana Cavalcante, 1988-

Invariantes globais de aplicações estáveis de superfícies  
fechadas em  $S^2$  / Alana Cavalcante Felippe. – Viçosa, MG,  
2013.

xii, 83f. : il. (algumas color.) ; 29cm.

Orientador: Catarina Mendes de Jesus

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 81-83

1. Superfícies (Matemática). 2. Invariantes. I. Universidade  
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 516.36

ALANA CAVALCANTE FELIPPE

INVARIANTES GLOBAIS DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE  
SUPERFÍCIES FECHADAS EM  $S^2$

Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Viçosa, como parte das exi-  
gências do Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, para obtenção do título  
de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de janeiro de 2013.

---

Marcelo José Saia

---

Allan de Oliveira Moura

---

Mércio Botelho Faria  
(Coorientador)

---

Catarina Mendes de Jesus  
(Orientadora)

# Agradecimentos

Para a realização desta etapa, foram necessários muitos dias e noites de estudo, abdicção de momentos com a família, namorado e amigos, muita oração de todos aqueles que torcem por mim e de uma boa orientação.

Primeiramente agradeço à Deus, pela oportunidade e força em todos os momentos. Por tornar-me capaz de concluir este curso tão importante.

À minha Família, que sempre esteve ao meu lado torcendo por mim. À minha mãe Aparecida Hermínia, por tudo que me ensinou e por me dar a força necessária para seguir em frente. À minha irmã Andressa pelo apoio e incentivo na realização desse objetivo. À minha sobrinha Milena, por tanto carinho e amor. Aos meus avós, Sérgio e Lilipa, por não medirem esforços para que eu chegasse até aqui. Ao meu namorado Rafael, por estar sempre do meu lado me dando força nos momentos difíceis.

Aos amigos da MAT caverna, pelos grupos de estudos e aos que ingressaram antes e depois de mim, pelos bons momentos. Em especial à Alana (preta), Gustavo, Fernanda, Michely, Anna Paula e Robledo pela amizade, desabafos e discussões. À Jane e ao Isaque por compartilhar seus conhecimentos e me acompanhar nos estudos, sempre com muita dedicação.

Aos professores do DMA pelas belas aulas, extensivo ao professor orientador da atividade Reuni: Diogo da Silva Machado por compartilhar sua experiência na disciplina MAT 137.

Agradeço à minha mãezona e orientadora Dra. Catarina Mendes de Jesus, por não passar a mão na minha cabeça, pelo apoio incondicional, incentivo, paciência, ensinamentos, sugestões e pela amizade que foi essencial no desenvolvimento deste trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro concedido durante estes dois anos, sem o qual a realização desta dissertação não seria possível.

Enfim, a todos que colaraboraram direta ou indiretamente para a concretização deste sonho.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Topologia Quociente . . . . .	4
1.2 Topologia de Superfícies . . . . .	5
1.2.1 Complexos Regulares e Característica de Euler . . . . .	6
1.2.2 Superfícies . . . . .	7
1.2.3 Característica de Euler e Superfícies . . . . .	10
1.3 Grafos . . . . .	14
1.4 Aplicações Estáveis entre superfícies . . . . .	15
1.5 Grau de Aplicações . . . . .	21
1.5.1 Curvas Planas . . . . .	21
1.5.2 Superfícies Fechadas na Esfera . . . . .	22

<b>2</b>	<b>Invariantes de Aplicações Estáveis entre Superfícies</b>	<b>25</b>
2.1	Invariantes Locais . . . . .	25
2.1.1	Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas na Esfera . . . . .	25
2.1.2	Transições de codimensão 1 . . . . .	27
2.1.3	Sinais das Cúspides . . . . .	32
2.2	Invariante Global . . . . .	34
2.2.1	Grafo Dual de Aplicações Estáveis . . . . .	34
2.2.2	Grafo associado a superfície com curvas . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Realização de Grafos por Aplicações Estáveis</b>	<b>41</b>
3.1	Cirurgias entre Aplicações Estáveis . . . . .	41
3.1.1	Cirurgia Horizontal . . . . .	41
3.1.2	Cirurgia Vertical . . . . .	49
3.2	Realização de Grafos . . . . .	52
3.2.1	Grafos Bipartidos . . . . .	53
3.2.2	Grafos com único vértice . . . . .	54
3.2.3	Grafos Arbitrários . . . . .	56
3.2.4	Algoritmo para a realização de um grafo . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Contorno Minimal de Aplicações Estáveis entre Superfícies</b>	<b>59</b>
4.1	Contorno Aparente na $S^2$ . . . . .	59
4.2	Contorno Irredutível e Contorno Minimal . . . . .	65
4.3	Contorno Minimal de Aplicações de Superfícies Orientadas . . . . .	69
4.3.1	Construção de Aplicações com Contorno Minimal . . . . .	71
4.3.2	Mínimo de $c + n$ para Contorno Minimal sobre $S^2$ . . . . .	76

4.4	Contorno Minimal de Aplicações de Superfícies Não - Orientadas . . . . .	79
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Lista de Figuras

1.1	Superfícies obtidas através da identificação . . . . .	5
1.2	Decomposição do Plano Projetivo . . . . .	5
1.3	Construção de um 2-complexo. . . . .	6
1.4	Característica de Euler da Esfera . . . . .	7
1.5	Uma faixa de Moebius na garrafa de Klein plana. . . . .	8
1.6	Uma triangulação da faixa de Moebius. . . . .	8
1.7	Característica de Euler do disco $D^2$ . . . . .	9
1.8	Espaço subjacente homeomorfo ao $S^1$ . . . . .	10
1.9	Soma conexa do Toro com a Garrafa de Klein. . . . .	11
1.10	Exemplos de grafos. . . . .	14
1.11	Tipos de pontos do conjunto singular. . . . .	17
1.12	Os multi-germes de $f _{\Sigma f}$ . . . . .	18
1.13	Pontos de dobra e de cúspide. . . . .	18
1.14	Contradizendo duas cúspides. . . . .	19
1.15	Algumas imersões do círculo no Plano. . . . .	21
1.16	Projeção estereográfica . . . . .	22
1.17	Grau de uma aplicação no ponto $p$ . . . . .	23
2.1	Exemplo de Aplicação do Toro na Esfera. . . . .	26

2.2	Transição do tipo Lábios. . . . .	27
2.3	Transição do tipo Bicos. . . . .	28
2.4	Transições do tipo $B_+$ e $B_-$ . . . . .	28
2.5	Diferentes aplicações da Garrafa de Klein no plano. . . . .	29
2.6	Transição do tipo Rabo de andorinha. . . . .	29
2.7	Transição do tipo Tangência de Dobra. . . . .	30
2.8	Transição do tipo Dobra com cúspide. . . . .	30
2.9	Transição do tipo Ponto Triplo. . . . .	31
2.10	Transições sobre a mesma superfície. . . . .	32
2.11	Sinal das Cúspides . . . . .	32
2.12	Grafos associados às aplicações da Figura 2.5. . . . .	35
2.13	Aplicação estável $g : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ . . . . .	35
2.14	Aplicação estável do Plano Projetivo no plano. . . . .	36
2.15	Componentes de bordo de $M_i$ . . . . .	37
2.16	Laços no grafo. . . . .	37
2.17	Uma superfície não orientada obtida através de um grafo. . . . .	38
3.1	Cirurgia Horizontal. . . . .	42
3.2	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (a). . . . .	43
3.3	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (b). . . . .	44
3.4	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (c). . . . .	44
3.5	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (d). . . . .	45
3.6	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (e). . . . .	46
3.7	Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (f). . . . .	46
3.8	Alteração do peso com cirurgia horizontal. . . . .	47

3.9	Exemplo de cirurgia horizontal. . . . .	48
3.10	Construção de uma aplicação do toro com grau um. . . . .	48
3.11	Cirurgia Vertical. . . . .	49
3.12	Diferentes tipos de Cirurgia Vertical. . . . .	50
3.13	Cirurgia Vertical referente a Figura 3.11 (b). . . . .	51
3.14	Algumas aplicações básicas . . . . .	52
3.15	Esquema para realização de um grafo bipartido. . . . .	54
3.16	Diferentes grafos do tipo $L_0^2$ . . . . .	55
3.17	Grafo com único vértice e quatro laços. . . . .	55
3.18	Esquema para realização de um grafo. . . . .	57
3.19	Retirando arestas e laços de um grafo. . . . .	57
3.20	Aplicações na esfera. . . . .	58
3.21	Realização de um grafo. . . . .	58
4.1	Componente $U_i$ . . . . .	60
4.2	(a) : ponto duplo positivo e (b) : ponto duplo negativo. . . . .	61
4.3	Ponto base em diferentes locais. . . . .	62
4.4	Interseção de componentes. . . . .	62
4.5	Homotopia entre aplicações estáveis do plano projetivo. . . . .	66
4.6	Laços e auto-interseções. . . . .	68
4.7	Realização de Contorno Minimal. . . . .	69
4.8	Construção de uma aplicação do bitoro na esfera com contorno minimal. . . . .	71
4.9	Construção de uma aplicação $f_{0,g} : M_g \rightarrow S^2$ com contorno minimal. . . . .	72
4.10	Contorno Aparente da aplicação estável $f_{d,g}$ com $d \leq g$ e $d \equiv g \pmod{2}$ . . . . .	74
4.11	Contorno Aparente da aplicação estável $f_{d,g}$ com $d < g$ e $d \not\equiv g \pmod{2}$ . . . . .	75

4.12 Contorno Aparente da aplicação estável $f_{d,g}$ com $d \geq g$ . . . . .	76
4.13 Exemplo de aplicações com contorno minimal. . . . .	80

# Resumo

FELIPPE, Alana Cavalcante, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, janeiro de 2013. **Invariantes globais de aplicações estáveis de superfícies fechadas em  $S^2$** . Orientadora: Catarina Mendes de Jesus. Coorientador: Mércio Botelho Faria.

Esta dissertação é dedicada ao estudo de aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, do ponto de vista global. Associado ao domínio de tais aplicações, estudamos grafos com pesos inteiros positivos nos vértices como invariantes, baseado nos trabalhos [14] e [15] de Hacon, Mendes e Romero. E associado à imagem dessas aplicações, estudamos o contorno minimal baseado no trabalho [4] de Kamenosono-Yamamoto.

# Abstract

FELIPPE, Alana Cavalcante, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, January of 2013. **Invariants global of the stable maps to the closed surface on  $S^2$** . Advisor: Catarina Mendes de Jesus. Coadviser: Mércio Botelho Faria.

This dissertation is devoted to the study of stable maps from closed surfaces to the sphere, from a global viewpoint. Associated of such maps domain, we study graphs with integers positive weight in the vertices as invariants, based in the Hacon, Mendes and Romero [14] and [15] works. And associated the image of these maps, we study the minimal contour based in the Kamenosono-Yamamoto [4] work.

# Introdução

As aplicações estáveis de superfícies na esfera, localmente podem ser vistas como aplicações do plano no plano. O estudo dessas aplicações foi introduzido em 1955 por Whitney, no artigo *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*. Whitney determinou que um germe de aplicação em cada ponto é equivalente a um ponto regular, ou ponto de dobra ou uma cúspide. Além disso, determinou que o conjunto de aplicações estáveis formam um subconjunto aberto e denso no espaço  $C^\infty$  de todas as aplicações entre duas superfícies. No final dos anos 50, Thom [29] notou que esses resultados poderiam ser incorporados a uma nova teoria: a Teoria das Singularidades.

A classificação de aplicações estáveis, a menos de equivalência, se tornou um problema clássico da Teoria de Singularidades. Uma noção de equivalência no espaço das aplicações diferenciáveis é a mudança de coordenadas no domínio e na imagem ( $\mathcal{A}$ -equivalência). Os rumos da pesquisa no sentido de resolver o problema de classificação por  $\mathcal{A}$ -equivalência, se resumem, em muitos casos, na busca de invariantes que permitem classificar boa parte das aplicações.

Em 1992, Vassiliev [30] desenvolveu uma teoria para a obtenção de invariantes topológicos de isotopia nos espaços de aplicações estáveis entre variedades, em especial para obtenção de invariantes de nós em  $\mathbb{R}^3$ . Essa técnica se baseia no estudo da estrutura do subconjunto discriminante na imagem da aplicação, formado pelo subespaço das aplicações não estáveis.

Esta teoria estimulou vários pesquisadores a dedicarem seus estudos a invariantes topológicos de aplicações estáveis, tanto do ponto de vista local como global, sendo aplicada em vários casos como: mergulhos de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^3$ , pelo próprio Vassiliev [30]; imersões de  $S^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , por Arnold [1], superfícies imersas em  $\mathbb{R}^3$ , por Goryunov [10], superfícies no plano, por Ohmoto-Aicardi [26] e Hacon, Mendes e Romero [16].

Um invariante do ponto de vista global, que é associado ao domínio da aplicação, foi introduzido por Mendes [22] em sua tese de doutorado e mais tarde foi publicado por Hacon, Mendes e Romero em [11], [12] e [13], para o caso de aplicações estáveis de superfícies orientadas no plano e aplicações sem cúspides, conhecidas como aplicações dobras. Este invariante caracteriza completamente a superfície do domínio: gênero, tipo topológico do complemento do conjunto singular, assim como o número de componentes singulares.

Essa técnica de associar invariantes às aplicações estáveis foi também estendida para outras aplicações estáveis como: aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera e no plano projetivo, por Hacon, Mendes e Romero em [14] e [15]; aplicações estáveis de 3-variedades orientadas e fechadas no  $\mathbb{R}^3$ , por Mendes, Oset e Romero, em [23] e aplicações estáveis de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaço, por Mendes, Moraes e Romero em [24].

Em [27], Quine estabeleceu uma fórmula que relaciona o grau de aplicações estáveis  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são superfícies, com o somatório dos sinais das cúspides de  $f$  e a característica de Euler das superfícies. Esta fórmula foi utilizada por Pignoni, Demoto e Kamenosono-Yamamoto para provar alguns resultados sobre contorno minimal de aplicações estáveis, sendo considerado como invariante global associado à imagem da aplicação.

Pignoni [5], introduziu a noção de um contorno mínimo de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , mostrando que toda aplicação  $f : M \rightarrow N$  é homotópica a uma aplicação cujo contorno minimal é irredutível. Mais tarde, Demoto [2] introduziu o conceito de contorno minimal irredutível de aplicações da esfera na esfera. Seguindo esta linha, Kamenosono-Yamamoto generalizaram os resultados para aplicações entre superfícies, em [4], apresentando relações numéricas para o mínimo de pontos duplos, cúspides e grau de uma aplicação.

Neste trabalho, o nosso objetivo é tratar especialmente das aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera. Uma parte do trabalho, a que trata dos grafos associados a aplicações estáveis, está baseada nas referências [14] e [15]. A outra parte, estudamos o contorno minimal destas aplicações com grau arbitrário e está baseada no trabalho do Kamenosono-Yamamoto [4], publicado em 2009.

Assim, dividimos o presente trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, vemos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para este

trabalho. Começamos com a topologia quociente, os complexos regulares e a característica de Euler de uma superfície compacta, seguida de alguns conceitos relevantes da Teoria de Grafos.

Apresentamos também alguns conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, alguns conceitos de aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares, considerando em particular, o caso de aplicações de superfícies na esfera. E para finalizar, definimos a noção de grau de uma aplicação. As referências utilizadas são [7], [8], [9], [17], [21], [28], [31], [32] e [33].

No capítulo 2, apresentamos os invariantes locais para o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies no plano. Em seguida, são apresentados grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis, que serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos na classificação dessas aplicações. Tomamos como principais referências os trabalhos de Ohmoto-Aicardi [26] e Hacon, Mendes e Romero [11], [13], [14].

No capítulo 3, estudamos as cirurgias de aplicações estáveis bem como seus efeitos sobre os grafos. Utilizamos as transições locais e as cirurgias para tratar do problema de realização de grafos por aplicações estáveis. As referências utilizadas são [14] e [15].

Já no capítulo 4, estudamos o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, tomando como principal referência o trabalho de Kamenosono-Yamamoto [4], de Pignoni [5] e Quine [27]. O nosso objetivo é estudar o contorno minimal de aplicações estáveis entre superfícies, levando-se em consideração o grau da aplicação, o número de cúspides e o número de pontos-duplos do seu contorno aparente.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos e resultados preliminares necessários para este trabalho. Começamos com a topologia quociente, com os complexos regulares e a característica de Euler de uma superfície compacta, seguida de alguns conceitos relevantes da Teoria de Grafos.

Apresentamos também alguns conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, alguns conceitos de aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares, considerando em particular, o caso de aplicações de superfícies na esfera. E para finalizar, definimos a noção de grau de uma aplicação.

### 1.1 Topologia Quociente

A Topologia Quociente, também conhecida como Topologia da Identificação, é a fonte dos mais importantes exemplos de espaços topológicos, visto que podemos construir novas superfícies.

**Definição 1.1** [25] *Sejam  $X$  um espaço topológico com a topologia  $\mathfrak{T}$  e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação sobrejetiva. A topologia  $\mathfrak{T}'$  em  $Y$  é uma **topologia quociente** sempre que  $U \subseteq Y$  é aberto em  $Y$  se  $f^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ . Assim,*

$$U \in \mathfrak{T}' \text{ se, e somente se, } f^{-1}(U) \in \mathfrak{T}.$$

**Exemplo 1.2** A Figura 1.1 ilustra duas identificações diferentes das curvas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , de forma que a superfície resultante seja orientada, como em (a), ou não orientada, como em (b).

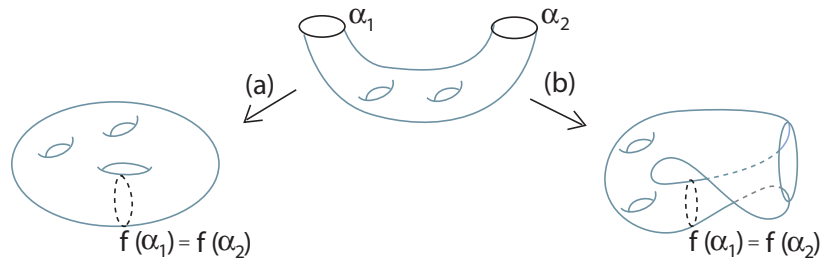


Figura 1.1: Superfícies obtidas através da identificação

**Notação:**  $S^2, T^2, \mathcal{D}^2, P^2, K^2$  e  $F$  correspondem à esfera, toro, disco, plano projetivo, garrafa de Klein e faixa de Moebius, respectivamente.

**Exemplo 1.3** A Figura 1.2 ilustra o plano projetivo obtido através da identificação do bordo da faixa de Moebius com o bordo do disco. Dessa forma, o complemento  $P^2 \setminus \mathcal{D}^2$  corresponde a faixa de Moebius e o complemento  $P^2 \setminus F$  corresponde ao disco.

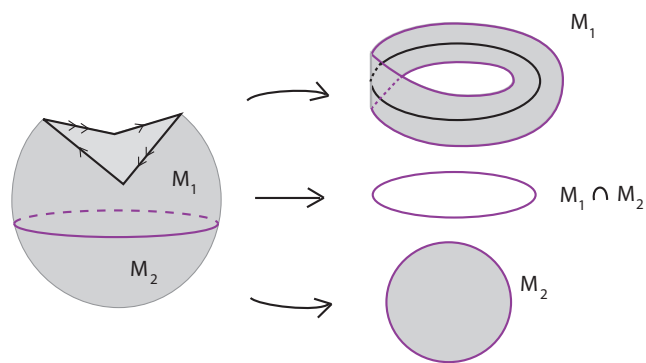


Figura 1.2: Decomposição do Plano Projetivo

## 1.2 Topologia de Superfícies

Um dos problemas clássicos em Topologia é o de classificação dos espaços topológicos. Uma ferramenta importante nesta classificação são os invariantes topológicos. Em geral,

um invariante topológico diferencia dois espaços não homeomorfos, ou seja, não topologicamente equivalentes.

Tendo como pré-requisito os simplexes, nesta seção vamos apresentar a característica de Euler como um invariante completo para diferenciar superfícies compactas (ver [17]). Além disso, vamos estudar uma classe importante de complexos: as superfícies.

As principais referências utilizadas são [8], [17], [21] e [31].

### 1.2.1 Complexos Regulares e Característica de Euler

**Definição 1.4** *Uma  $n$ -célula é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco  $n$ -dimensional  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  com a propriedade adicional de que sua fronteira deve ser dividida em um número finito de células com dimensões menores, chamadas faces da  $n$ -célula.*

De modo geral, as faces de uma  $n$ -célula são as células de dimensão menor: pontos finais de uma 1-célula são as 0-células, a fronteira de uma 2-célula consiste de 1-células e 0-células e as faces de uma  $n$ -célula consiste de 0-células, 1-células, ...,  $n - 1$ -células.

**Definição 1.5** *Um  $n$ -complexo regular é a união de  $k$ -células, com  $0 \leq k \leq n$ , ou seja,  $K = \bigcup_{k=0}^n k$ -células.*

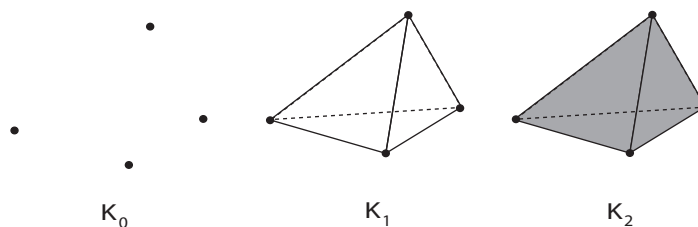


Figura 1.3: Construção de um 2-complexo.

**Observação 1.6** *O  $n$ -complexo regular  $K$  e o espaço original  $X$  são espaços distintos, pois  $X$  é um conjunto de pontos, enquanto  $K$  é um conjunto de células.*

**Definição 1.7** Seja  $K$  um  $n$ -complexo regular. O conjunto de todos os pontos nas células de  $K$  é

$$X = |K| = \{x : x \in \sigma \in K, \sigma \text{ uma célula em } K\}$$

$X$  é chamado **espaço subjacente** do complexo  $K$ .

**Definição 1.8** A **característica de Euler** de um  $n$ -complexo regular  $K$ , denotada por  $\chi(K)$ , é definida pela soma alternada das células do complexo  $K$ , isto é,

$$\chi(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-célula}) - \dots (-1)^n \#(n\text{-célula}),$$

onde  $\#(r\text{-célula})$  denota o número de  $r$ -células do complexo  $K$ .

**Exemplo 1.9** Para um 2-complexo, denotando  $F = \#\{\text{faces}\}$ ,  $A = \#\{\text{arestas}\}$  e  $V = \#\{\text{vértices}\}$ , a característica de Euler é dada por:

$$\chi(K) = V - A + F$$

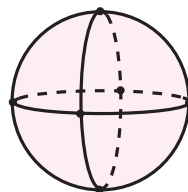


Figura 1.4: Característica de Euler da Esfera

Na Figura 1.4 temos um 2-complexo em  $S^2$ , sendo  $V = 6$ ,  $A = 12$  e  $F = 8$ . Assim,  $\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$ .

## 1.2.2 Superfícies

**Definição 1.10** Uma **superfície**  $M$  é uma variedade conexa 2-dimensional, isto é, um espaço Hausdorff no qual cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa ao disco aberto de dimensão 2,  $\mathcal{D}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ .

**Definição 1.11** Um **caminho que inverte orientação** é um caminho que pode ser representado pelo diagrama da Figura 1.5 (b).

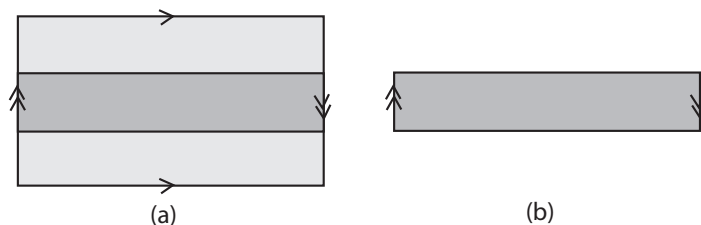


Figura 1.5: Uma faixa de Moebius na garrafa de Klein plana.

**Definição 1.12** A superfície  $M$  é **orientável** se todo caminho fechado preserva orientação. Caso contrário, se existe um caminho que inverte orientação,  $M$  é **não-orientável**.

**Exemplo 1.13** A Garrafa de Klein e o Plano Projetivo são superfícies não-orientáveis, enquanto a Esfera e o Toro bidimensional são superfícies orientáveis.

**Observação 1.14** Toda superfície que contém uma faixa de Moebius é não orientável.

**Definição 1.15** Um espaço topológico 2-dimensional  $M$  é **triangulável** se o seu espaço subjacente  $K$  homeomorfo a  $M$  possui apenas células triangulares que satisfazem a condição de que dois triângulos são indentificados ao longo de uma aresta ou somente em um vértice ou são disjuntos.

**Definição 1.16** Uma triangulação do complexo  $K$  é dito **complexo simplicial** ou uma **triangulação em  $M$** . Uma célula de um complexo simplicial é dito **simplex**.

**Definição 1.17** Uma **triangulação de uma superfície** (sem bordo) é um simplicial 2-complexo tal que :

1. cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. um dado vértice pode pertencer a  $n$  triângulos, denotados por  $T_1, \dots, T_n$ , de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum e  $T_n$  identifica com  $T_1$  ao longo de uma aresta.

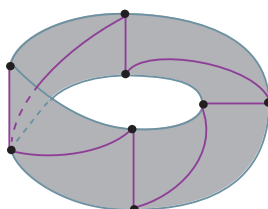


Figura 1.6: Uma triangulação da faixa de Moebius.

**Exemplo 1.18** A Figura 1.6 ilustra uma triangulação da faixa de Moebius, na qual  $V = 8$ ,  $A = 16$  e  $F = 8$ . Calculando sua característica de Euler, segue que  $\chi(F) = 0$ .

**Definição 1.19** Uma superfície é **compacta** se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.

**Definição 1.20** Superfície **fechada** é uma superfície que não tem bordo, e ao mesmo tempo, pode ser subdividida em um número finito de pedaços triangulares.

**Observação 1.21** As superfícies fechadas são chamadas superfícies compactas por serem reunião de um número finito de triângulos. Assim, o termo superfície fechada é sinônimo de superfície compacta e sem bordo.

**Definição 1.22** Uma superfície é **conexa** se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem  $T_1, \dots, T_n$ , de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com aresta de outro triângulo anterior.

Seja  $M$  uma superfície compacta e conexa. Se  $K$  é um  $n$ -complexo regular, tal que  $|K| \cong M$ , então  $\chi(K) = \chi(M)$ .

Este número comum a estes 2-complexos é então chamado de **característica de Euler da superfície** e utilizaremos a mesma notação.

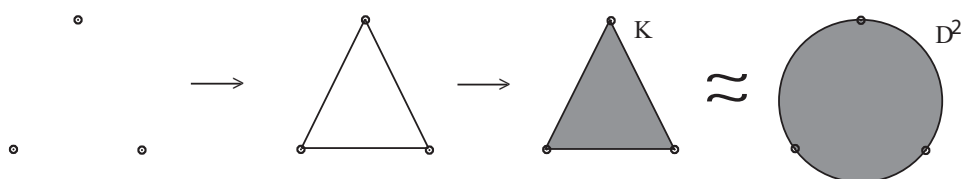


Figura 1.7: Característica de Euler do disco  $D^2$ .

**Exemplo 1.23** O disco fechado  $D^2$  possui a mesma característica de Euler que uma região triangular. Com efeito, tome três pontos não colineares no plano. Una-os com arestas e considere uma face na região delimitada por esta figura. Temos então um 2-complexo  $K$  cujo o espaço subjacente é uma região triangular do plano, como ilustra a Figura 1.7. Como esta região pode ser deformada continuamente em um disco fechado, segue que  $\chi(D^2) = \chi(K)$ . Em  $K$ ,  $V = 3$ ,  $A = 3$  e  $F = 1$ , logo,  $\chi(D^2) = 1$ .

**Exemplo 1.24 (Característica de Euler do  $S^1$ )** *A fim de calcular a característica de Euler do círculo, construímos um 1-complexo regular  $K$  cujo o espaço subjacente é homeomorfo a  $S^1$ , como na Figura 1.8.*

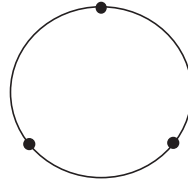


Figura 1.8: Espaço subjacente homeomorfo ao  $S^1$

*Desse modo,  $\chi(S^1) = \chi(K)$  e prova-se que o seu valor independe do 1-complexo construído.*

*Como podemos ver na Figura 1.8, o número de vértices é igual ao número de arestas ( $V = A = 3$ ). Assim, concluímos facilmente que  $\chi(S^1) = 0$ .*

O próximo teorema diz que se  $M_1$  e  $M_2$  são superfícies compactas, conexas e homeomorfas, então  $\chi(M_1) = \chi(M_2)$ .

### 1.2.3 Característica de Euler e Superfícies

**Teorema 1.25** [17] *A característica de Euler é um invariante topológico para superfícies compactas e conexas.*

**Proposição 1.26** [17] *Se  $M_1$  e  $M_2$  são superfícies compactas e conexas, então*

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [18].

**Proposição 1.27** *Seja  $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$  a união de superfícies compactas e conexas (com bordo), tais que para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$ , ou  $M_i \cap M_j = \emptyset$  ou  $M_i \cap M_j$  é homeomorfo ao círculo  $S^1$ . Então*

$$\chi(M) = \sum_{l=1}^k \chi(M_l).$$

**Demonstração:** Para demonstrar esse resultado basta usar a Proposição 1.26 e o fato de que  $\chi(S^1) = 0$ . □

**Exemplo 1.28** Na Figura 1.2, observamos que  $M_1 = F, M_2 = \mathcal{D}^2$  e  $M_1 \cap M_2 = S^1$ . Utilizando a Proposição 1.26, temos:

$$\chi(P^2) = \chi(F) + \chi(\mathcal{D}^2) - \chi(S^1) = 0 + 1 - 0 = 1$$

Logo,  $\chi(P^2) = 1$ .

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas superfícies disjuntas. Em cada uma delas, removendo um pequeno disco, obtemos as superfícies  $M'_1$  e  $M'_2$  com uma nova componente de bordo cada, denotadas por  $c_1$  e  $c_2$ . Colando  $c_1$  e  $c_2$ , como exemplifica a Figura 1.9, formamos uma nova superfície.

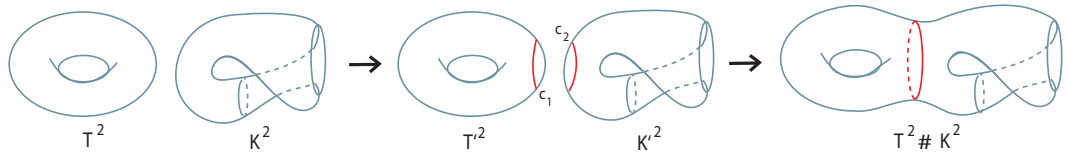


Figura 1.9: Soma conexa do Toro com a Garrafa de Klein.

**Definição 1.29** A *soma conexa* de  $M_1$  e  $M_2$ , denotada por  $M_1 \# M_2$  é a nova superfície obtida na descrição acima.

**Proposição 1.30** Para a soma conexa de duas superfícies,  $M_1$  e  $M_2$ , temos que

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

**Demonstração:** A demonstração desta proposição pode ser encontrada em [18]. □

**Observação 1.31** A esfera  $S^2$  é o elemento neutro da soma conexa de superfícies. Em outras palavras,  $M \# S^2 = M$ , seja qual for a superfície  $M$ .

**Exemplo 1.32** A garrafa de Klein, é topologicamente falando, a soma conexa de dois planos projetivos, isto é,  $K^2 = P^2 \# P^2$ .

Usando a Proposição 1.30, temos:

$$\chi(K^2) = \chi(P^2) + \chi(P^2) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Logo,  $\chi(K^2) = 0$ .

**Teorema 1.33** [17] Toda **superfície orientada** é homeomorfa a uma esfera ou a soma conexa de  $n$  toros e toda **superfície não orientada** é homeomorfa a soma conexa de  $n$  planos projetivos.

**Proposição 1.34** A soma conexa de um toro e um plano projetivo é, topologicamente falando, a soma conexa de uma garrafa de Klein com um plano projetivo, isto é,

$$T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$$

Note que não podemos cancelar a superfície  $P^2$  em ambos os termos da igualdade. Consequentemente,

$$T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2.$$

**Demonstração:** De fato, como a característica de Euler é um invariante topológico, vamos calcular  $\chi(T^2 \# P^2)$  e  $\chi(K^2 \# P^2)$  e verificar que são iguais. Pela Proposição 1.30, segue que

$$\chi(T^2 \# P^2) = \chi(T^2) + \chi(P^2) - 2 = 0 + 1 - 2 = -1$$

e

$$\chi(K^2 \# P^2) = \chi(K^2) + \chi(P^2) - 2 = 0 + 1 - 2 = -1.$$

Portanto,  $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$ .

□

**Observação 1.35** Pelo Lema 1.34 podemos concluir que  $(2k) P^2 \# P^2 = k T^2 \# P^2$  e  $(2k) P^2 \# 2P^2 = k T^2 \# K^2$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .

**Observação 1.36** A característica de Euler de superfície orientável é par, enquanto a característica de Euler de uma superfície não-orientável pode ser par ou ímpar, como pode ser verificado na tabela abaixo.

Superfície	Característica de Euler
Soma conexa de $n$ toros	$2 - 2n$
Soma conexa de $n$ planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de um plano projetivo e $n$ toros	$1 - 2n$
Soma conexa de uma garrafa de Klein e $n$ toros	$-2n$

**Definição 1.37** O *gênero*,  $g(M)$  de uma superfície orientável  $M$  corresponde ao número de toros ou alças presentes nela. Caso contrário, se  $M$  é uma superfície não-orientável, o gênero  $g(M)$  de  $M$  corresponde ao número de planos projetivos presentes nela.

**Definição 1.38** Seja  $M$  uma superfície compacta. O gênero de  $M$  é dado por:

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi), & \text{se } M \text{ é orientável} \\ 2 - \chi, & \text{se } M \text{ é não - orientável} \end{cases}$$

Desse modo, dado a característica de Euler da superfície, conseguimos saber qual o gênero dessa superfície.

**Proposição 1.39** Seja  $M$  uma superfície sem bordo, então a característica de  $M$  é:

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 - 2g(M), & \text{se } M \text{ é orientável} \\ 2 - g(M), & \text{se } M \text{ é não - orientável} \end{cases}$$

Assim, dado o gênero da superfície, conseguimos determinar sua característica de Euler.

**Corolário 1.40** Se  $M$  é uma superfície orientável com  $k$  componentes de bordo, então

$$\chi(M) = 2 - 2g(M) - k.$$

A demonstração desse corolário encontra-se em [18].

**Teorema 1.41** [17] Sejam  $M_1, M_2$  duas superfícies fechadas e conexas.  $M_1$  é topologicamente equivalente a  $M_2$  se e somente se  $\chi(M_1) = \chi(M_2)$  e ambas são orientáveis ou ambas são não-orientáveis.

**Demonstração:** Segue imediatamente dos Teoremas 1.33 e 1.25 □

## 1.3 Grafos

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos da Teoria dos Grafos necessários para este trabalho. As referências são [17] e [31].

**Definição 1.42** Um grafo  $G$  é um 1-complexo regular conexo.

Uma aresta em  $G$  conectando dois vértices  $u$  e  $w$  será denotada pelo par  $[u, w]$  ou, simplesmente, por  $uw$ . Neste caso, dizemos que os vértices  $u$  e  $w$  são **adjacentes**. As arestas de um vértice  $u$  são aquelas que se conectam a este vértice, isto é, as arestas de  $G$  do tipo  $uw$ . Quando  $u$  possui apenas uma única aresta,  $u$  é chamado **vértice extremo**. Neste caso, a aresta de  $u$  é dita **aresta extrema**. **Arestas Adjacentes** são duas arestas com um extremo em comum. Um **laço** em  $G$  é uma aresta da forma  $uu$ .

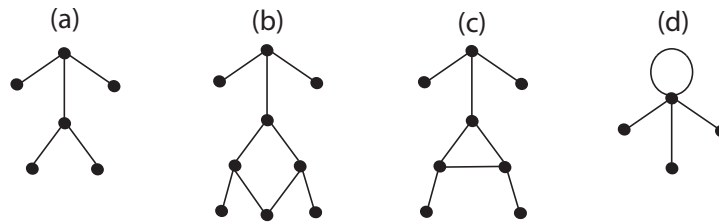


Figura 1.10: Exemplos de grafos.

**Exemplo 1.43** A Figura 1.10 ilustra quatro exemplos de grafos. Em (a) não ocorrem ciclos, em (b) e (c) ocorrem um ciclo e em (d) ocorre um laço (ciclo com uma única aresta).

**Definição 1.44** O número de ciclos de um grafo  $G$  é chamado de **número de Betti** do grafo  $G$  e é denotado por  $\beta_1(G)$ .

**Teorema 1.45** [17] Seja  $G$  um grafo, o **número de ciclos**  $\beta_1(G)$  é dado por:

$$1 - V + A,$$

onde  $V$  e  $A$  são, respectivamente, o número de vértices e arestas de  $G$ .

**Definição 1.46** Uma **árvore** é um grafo  $G$  que não possui ciclos.

O grafo ilustrado em 1.10 (a) é uma árvore.

Os teoremas 1.47 e 1.48 a seguir foram apresentados em [17].

**Teorema 1.47** *Dado um grafo  $G$ , se  $G$  é uma árvore, então  $\mathcal{X}(G) = 1$ .*

**Demonstração:** Pela Definição 1.42,  $G$  é um 1-complexo, logo pela Definição 1.8,  $\mathcal{X}(G) = V - A$ . Por ser árvore,  $G$  não possui ciclos. Segue do Teorema 1.45 que  $\mathcal{X}(G) = 1$ .  $\square$

**Teorema 1.48** [17] *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

**Definição 1.49** *Um grafo  $G$  é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais  $\pm$  a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos. Caso contrário, dizemos que  $G$  é **não-bipartido**.*

**Teorema 1.50** [31] *Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm tamanho par. Caso contrário, se  $G$  tem um ciclo de tamanho ímpar, ele é não-bipartido. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.*

**Exemplo 1.51** *Na Figura 1.10, o grafo (b) é bipartido pois tem ciclo de tamanho quatro, enquanto o grafo (c) não é bipartido por ter um ciclo de tamanho três.*

**Definição 1.52** *Um **grafo com peso** é um grafo em que a cada um dos seus vértices está associado um número natural.*

Neste trabalho, os grafos que iremos considerar serão apenas grafos com peso. Para simplificar a partir de agora iremos chamá-los apenas de grafos.

## 1.4 Aplicações Estáveis entre superfícies

Nesta seção, apresentaremos conceitos de aplicações estáveis e conjuntos singulares.

As principais referências são [9], [32] e [33].

**Definição 1.53** *Sejam  $(X, \mathfrak{T})$  um espaço topológico e  $x \in X$ . Dois subconjuntos  $S, T$  de  $X$  **definem o mesmo germe em  $x$**  se existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $x$  em  $X$  tal que  $U \cap S = U \cap T$ .*

Definir o mesmo germe em  $x$  é uma relação de equivalência e cada classe é um **germe de conjunto de  $x$  em  $X$** .

**Definição 1.54** Seja  $M$  um espaço topológico não vazio, dizemos que  $M$  é uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$  se, e somente se, para qualquer  $p \in M$ , existem abertos  $V_p$  em  $M$  contendo  $p$ ,  $U_p$  aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $\psi : V_p \rightarrow U_p$  um difeomorfismo.

Dadas duas variedades diferenciáveis  $X$  e  $Y$ , denotamos por  $C^\infty(X, Y)$  o espaço de todas as aplicações de classe  $C^\infty$  de  $X$  em  $Y$ .

**Definição 1.55** Sejam  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação diferenciável. Se  $f$  tem posto máximo, então:

- i)  $f$  é uma **imersão** se, e somente se,  $\dim X \leq \dim Y$ .
- ii)  $f$  é um **mergulho** se, e somente se,  $f$  é uma imersão injetiva.

**Definição 1.56** Sejam  $f, g \in C^\infty(X, Y)$ , com  $X$  e  $Y$  variedades diferenciáveis. Dizemos que  $f$  é  **$\mathcal{A}$ -equivalente** a  $g$ , e denotemos por  $f \sim_{\mathcal{A}} g$  se existirem difeomorfismos  $\phi : X \rightarrow X$  e  $\psi : Y \rightarrow Y$  tais que

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1},$$

ou seja, se o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & \searrow & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

**Definição 1.57** Sejam  $M$  uma superfície fechada e conexa,  $N$  uma superfície conexa e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$ . O **conjunto de pontos singulares** de  $f$ , denotado por  $\Sigma f$ , é o conjunto de pontos de  $M$  nos quais a diferencial  $df$  não tem posto máximo, ou seja,

$$\Sigma f = \{p \in M / \text{posto } df_p < 2\}.$$

Um ponto  $p \in M \setminus \Sigma f$  é dito **ponto regular** de  $f$  e um ponto  $y \in N$  é dito **valor regular** de  $f$ , se  $f^{-1}(y)$  contém somente pontos regulares.

**Definição 1.58** O **contorno aparente** de  $f$ ,  $f(\Sigma f)$ , é a imagem do conjunto singular de  $f$  e vamos denotá-lo por  $\gamma(f)$ .

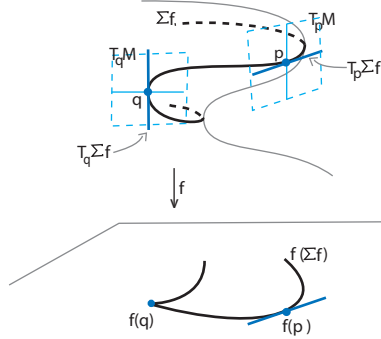


Figura 1.11: Tipos de pontos do conjunto singular.

Seja  $p \in \Sigma f$  um ponto singular de uma aplicação  $f : M \rightarrow S^2$ , então uma das seguintes situações ocorre:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad T_p \Sigma f \oplus \ker(df)_p = T_p M \\ (b) \quad T_p \Sigma f = \ker(df)_p \end{array} \right.$$

onde  $T_p \Sigma f$  é a reta tangente à  $\Sigma f$  no ponto  $p$  e  $\ker(df)_p$  é o núcleo da aplicação diferencial de  $f$  no ponto  $p$ .

Se  $p$  é um ponto singular satisfazendo (a), então  $p$  é chamado **ponto de dobra**. Caso contrário, se (b) ocorre, dizemos que  $p$  é um **ponto de cúspide**.

Na Figura 1.11,  $p$  é ponto de dobra e  $q$  ponto de cúspide. Observe que  $T_p \Sigma f$  é levado por  $df_p$  na reta tangente a  $f(p)$ , enquanto que  $T_q \Sigma f$  é levado sobre  $f(q)$  por  $df_q$ .

**Definição 1.59** Uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  é **estável** se satisfaz as duas propriedades seguintes:

- (i) Para cada  $p \in M$ , o germe de aplicação em  $p \in M$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a um germe de aplicação em  $0 \in \mathbb{R}^2$  como abaixo:
  - $(a, x) \mapsto (a, x)$  : um ponto regular,
  - $(a, x) \mapsto (a, x^2)$  : um ponto de dobra,
  - $(a, x) \mapsto (a, x^3 + ax)$  : um ponto de cúspide.
- (ii) Para cada  $q \in \gamma(f)$ , o germe de aplicação  $(f|_{\Sigma f}, f^{-1}(q) \cap \Sigma f)$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos três multi-germes como representado na figura abaixo.

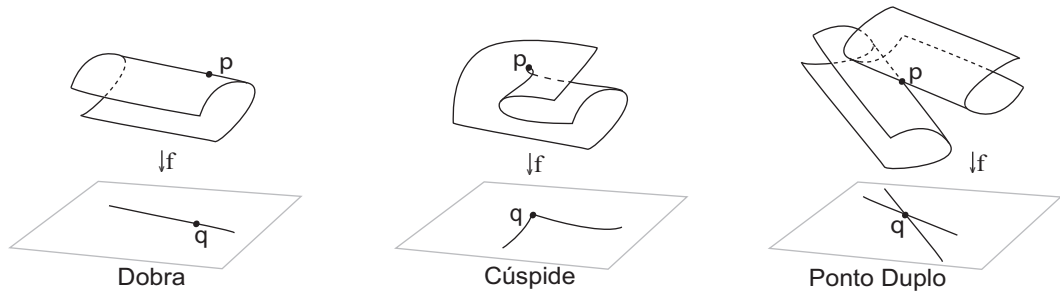


Figura 1.12: Os multi-germes de  $f|_{\Sigma f}$ .

Na Figura 1.12 podemos ter uma idéia geométrica das singularidades do tipo dobra e cúspide. No caso da dobra, vemos sobre a superfície  $M$  a curva formada pelos pontos de dobra que compõem o conjunto singular  $\Sigma f$ . No caso da cúspide, vemos sobre  $M$  que duas curvas de dobra se encontram num ponto  $p$  dando origem a uma cúspide. Neste ponto o vetor tangente à curva singular é vertical.

Denotamos por  $\mathcal{E}(M, N)$  conjunto das aplicações estáveis de  $M$  em  $N$  em  $C^\infty(M, N)$ .

**Teorema 1.60** [9] *Se  $f : M \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície compacta e sem bordo, então o conjunto singular de  $f$ ,  $\Sigma f$ , é uma subvariedade de codimensão 1 em  $M$ .*

**Teorema 1.61** [32] *As aplicações estáveis  $f : M \rightarrow S^2$  formam um subconjunto aberto e denso no espaço das aplicações  $C^\infty(M, S^2)$ .*

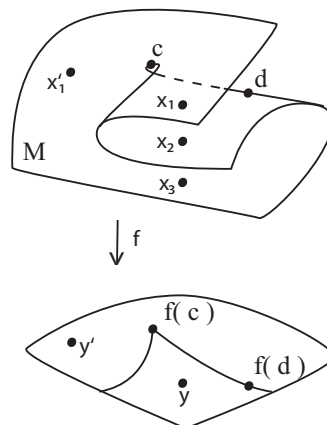


Figura 1.13: Pontos de dobra e de cúspide.

Como vemos na Figura 1.13,  $d$  é um ponto de dobra e a cúspide  $c$  é o ponto de encontro de duas curvas singulares. Notemos que uma curva singular separa regiões de  $M$  cuja orientação é

invertida e preservada por  $f$ , e ainda, notemos que o ponto  $y$  possui três pré-imagens:  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , enquanto o ponto  $y'$  possui apenas uma pré-imagem:  $x'_1$ .

**Observação 1.62** *Observemos na Figura 1.13, que se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação estável, onde  $M$  e  $N$  são superfícies orientadas, então as curvas do conjunto singular  $\Sigma f$  separam as regiões de  $M$  cuja orientação é invertida e preservada por  $f$ .*

**Definição 1.63** *No contorno aparente de  $f$ , a **orientação da curva** no sentido positivo, está determinada quando, ao percorrer a curva o número de pré-imagens de  $f$  é sempre maior do lado esquerdo. O vetor normal  $v$  aponta para a região onde tem o maior número de pré-imagens.*

**Observação 1.64** *Observemos na Figura 1.13, que se dois pontos na imagem de uma aplicação estável estão separados por uma curva do contorno aparente, então a diferença do números de suas respectivas pré-imagens é dois. Neste exemplo, a região para a qual a cúspide aponta possui apenas uma pré-imagem, enquanto a outra região possui três pré-imagens.*

**Observação 1.65** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície orientada, compacta e sem bordo, cujo contorno aparente é formado por uma curva conexa contendo quatro cúspides e nenhuma auto-interseção. Pela estrutura das cúspides, a região para a qual ela aponta possui menor número de pré-imagens. Sendo assim, o contorno aparente com duas cúspides consecutivas apontando para lados opostos, como ilustra a Figura 1.14 (i), não ocorre. Logo, o contorno aparente de  $f$  deve ser como na Figura 1.14 (ii), onde duas cúspides consecutivas apontam para o mesmo lado.*



Figura 1.14: Contradizendo duas cúspides.

De fato, na Figura 1.14 (i), supondo que a região  $a$  possui  $k$  pré-imagens, seguindo a seta, chegamos à região  $b$ , que possui  $k + 2$  pré-imagens. Passando pela outra seta, novamente o número de pré-imagens é acrescentado por 2. Agora, podemos retornar à região  $a$ , sem passar por nenhuma curva, logo concluímos que a região  $a$  possui  $k + 4$  pré-imagens. Absurdo! Por outro lado, em (ii), o número de pré-imagens é somado e subtraído por 2. Logo, o contorno aparente pode ser desse tipo. A região apontada pela seta possui mais duas pré-imagens que a região na qual seta começa.

**Lema 1.66** *Se  $f : M \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada, então as curvas que compõem o conjunto singular  $\Sigma f$  são fechadas, simples e disjuntas.*

**Demonstração:** Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, se existe uma curva  $\alpha_i$  do conjunto singular de  $f$  aberta, ou seja, que termina em um dado ponto, então os dois lados de  $f(\alpha_i)$  possuem o mesmo número de pré-imagens, contradição! Se existe uma curva  $\alpha_i$  do conjunto singular de  $f$  com auto-interseção, obtemos uma contradição quando analisamos as regiões cuja orientação é preservada e invertida por  $f$ , localmente no ponto de auto-interseção. Análogo para o caso de curvas com ponto em comum. Portanto, o conjunto singular de  $f$  deve possuir somente curvas fechadas, simples e disjuntas.  $\square$

**Observação 1.67** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada. As componentes do complemento do conjunto singular de  $f$  são levadas por  $f$  com orientações opostas, logo  $\Sigma f$  separa  $M \setminus \Sigma f$  em componentes disjuntas.*

*As curvas singulares de  $f$  separam  $M$  em regiões conexas, que são as componentes do complemento  $M \setminus \Sigma f$ . Isto se deve ao fato de  $\Sigma f$  ser composta por um conjunto de curvas fechadas em  $M$ , de acordo com o Lema 1.66.*

Segundo Whitney, o conjunto singular de uma aplicação estável é composto por pontos de dobra e cúspides e além disso, os pontos de cúspides são isolados. Segue, então, do Lema 1.66, que:

**Proposição 1.68** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada e orientada. O contorno aparente de  $f$ ,  $f(\Sigma f)$ , é uma coleção de curvas fechadas na 2-esfera, cujas singularidades são pontos duplos transversais, ou seja, sem tangências e pontos de cúspides isolados.*

**Observação 1.69** *Se  $f : M \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície orientada, então podemos atribuir, de maneira natural, sinais  $\pm$  a cada uma das componentes do complemento  $M \setminus \Sigma f$ .*

**Definição 1.70** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície orientada, uma região conexa  $R \in M \setminus \Sigma f$  é dita **positiva** se  $f$  preserva a sua orientação, caso contrário,  $R$  é dita **negativa**.*

**Definição 1.71** *O fecho de cada componente conexa de  $M \setminus \Sigma f$  cuja orientação é preservada por  $f$  será denotado por  $M_i^+$ , enquanto o fecho de cada componente conexa de  $M \setminus \Sigma f$  cuja orientação é invertida por  $f$  será denotado por  $M_j^-$ .*

Neste trabalho, vamos considerar  $M^+ = \bigcup_i M_i^+$  e  $M^- = \bigcup_j M_j^-$ . Assim,  $M^+$  e  $M^-$  são superfícies compactas e com bordo. Além disso,

$$M = M^+ \cup M^- \quad \text{e} \quad \Sigma f = M^+ \cap M^-.$$

## 1.5 Grau de Aplicações

### 1.5.1 Curvas Planas

O estudo de curvas planas se torna imprescindível para o nosso trabalho, uma vez que, essas curvas aparecem como componentes do contorno aparente de algumas aplicações estáveis.

**Definição 1.72** *Uma curva plana fechada é uma imersão  $\Gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  do círculo no plano.*

**Definição 1.73** *Seja  $h$  uma curva plana fechada. O grau de  $h$ , denotado por  $\tau(h)$ , também conhecido como o índice de Whitney, é o número total de voltas (sentido anti-horário menos sentido horário) que os vetores unitários tangentes a  $h$  percorrem  $S^1$ .*

**Exemplo 1.74** *A Figura 1.15 ilustra três imersões do círculo no plano:  $h_1, h_2$  e  $h_3$ . O grau de cada uma delas é  $\tau(h_1) = -2$ ,  $\tau(h_2) = 0$  e  $\tau(h_3) = 1$ .*

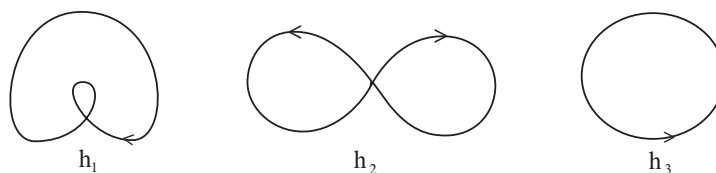


Figura 1.15: Algumas imersões do círculo no Plano.

**Definição 1.75** *Se  $h$  é uma união de círculos finitos  $S_i^1$ , então  $\tau(h)$  é a soma do número de voltas da aplicação, restrita a cada um dos círculos  $h|_{S_i^1}$ .*

**Definição 1.76** *A projeção estereográfica da esfera  $m$ -dimensional menos um ponto  $p \in S^m$  é a aplicação  $\Psi$  que leva cada ponto  $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^m \setminus \{p\}$  no ponto  $\Psi(x) = y = (y_1, \dots, y_m, 0) \in \mathbb{R}^m$ , tal que  $y = p\tilde{x} \cap \mathbb{R}^m$ , onde  $p\tilde{x}$  é a semi-reta que começa em  $p$ , passa em  $x$  e intersecta  $\mathbb{R}^m$ .*

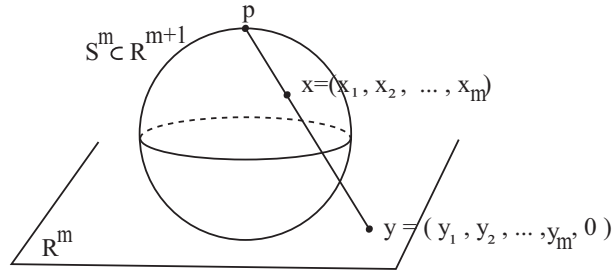


Figura 1.16: Projção estereográfica

**Exemplo 1.77** Se  $m = 2$  e  $p = (0, 0, 1)$ , então a projeção estereográfica é dada por

$$\Psi : S^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto \Psi(x) = \frac{1}{1 - x_{m+1}}(x_1, \dots, x_m, 0).$$

## 1.5.2 Superfícies Fechadas na Esfera

Nesta subseção, vamos obter o grau de uma aplicação examinando a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação própria  $f : M \rightarrow N$ , de classe  $C^1$ , onde  $M$  e  $N$  são superfícies orientadas de mesma dimensão. Os resultados e definições abaixo podem ser encontrados em [7].

**Definição 1.78** Uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  é **própria** se a imagem inversa de um compacto é um compacto.

**Proposição 1.79** As aplicações  $f : M \rightarrow S^2$  contínuas, onde  $M$  é compacto, são próprias.

**Demonstração:** De fato, dado  $K \subset S^2$  compacto,  $K$  é fechado, pois  $S^2$  é Hausdorff. Por outro lado,  $f$  é contínua, logo  $f^{-1}(K)$  é fechado em  $M$ , e como  $M$  é compacto, segue que  $f^{-1}(K)$  é compacto.  $\square$

**Definição 1.80** Dizemos que um ponto  $x_k \in f^{-1}(y)$  é **positivo** se  $x_k \in M_i^+$  ou **negativo** se  $x_k \in M_j^-$ , onde  $M^\pm$  estão definidos em 1.71.

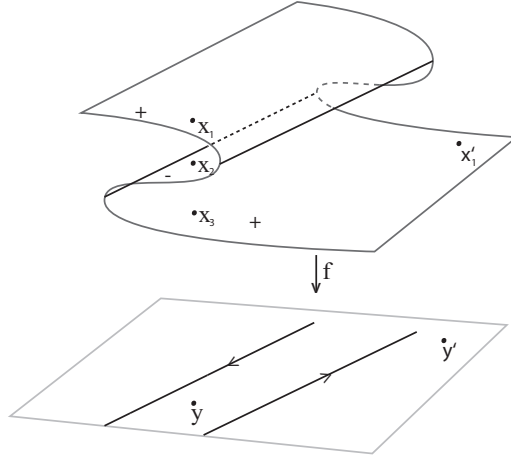


Figura 1.17: Grau de uma aplicação no ponto  $p$ .

**Definição 1.81** *Sejam  $M, N$  superfícies orientadas, sem bordo e de mesma dimensão  $m$ , e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação própria de classe  $C^1$ . O **grau de  $f$  no ponto  $y$** , indicado por  $\deg_y f$  é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em  $f^{-1}(y)$ .*

**Exemplo 1.82** *A Figura 1.17 ilustra localmente uma aplicação  $f$ . Temos que  $f^{-1}(y) = x_1, x_2$  e  $x_3$ , sendo que  $x_1$  e  $x_3$  pertencem a regiões cuja orientação é preservada por  $f$ , logo são positivos e  $x_2$  pertence a uma região cuja orientação é invertida por  $f$ , logo é negativo. Segue que  $\deg_y f = 1$ . Analogamente, como  $f^{-1}(y') = x'_1$ , que pertence a uma região cuja orientação é preservada por  $f$ , segue que  $\deg_{y'} f = 1$ . Observe que ao atravessar a imagem de um conjunto singular de uma aplicação estável, o número de pré-imagem sempre aumenta ou diminui por dois pontos, que são levados por  $f$  com orientações opostas.*

**Teorema 1.83** [7] *Seja  $M$  uma superfície compacta,  $m$ -dimensional, orientada e sem bordo. A toda aplicação  $f : M \rightarrow S^m$ , de classe  $C^2$ , corresponde um inteiro  $r$ , tal que para todo valor regular  $y$  de  $f$ , tem-se que  $\deg_y f = r$ .*

**Definição 1.84** *O número  $r = \deg_y f$  do Teorema 1.83 é o **grau da aplicação  $f$** , ou simplesmente,  $\deg f$ .*

**Proposição 1.85** [7]

1. Se  $f, g : M \rightarrow S^m$  são homotópicas em classe  $C^2$ , então  $\deg f = \deg g$ ;
2. Se  $f : S^m \rightarrow S^m$  é a aplicação identidade, então  $\deg f = 1$ .

**Corolário 1.86** *Se o conjunto singular  $\Sigma f$  de uma aplicação  $f : S^2 \rightarrow S^2$  é vazio, então  $\deg f = 1$ .*

**Demonstração:** Se  $\Sigma f = \emptyset$ , então  $f$  é homotópica a  $Id : S^2 \rightarrow S^2$ , que pela Proposição 1.85 (2), possui grau um. Então por 1, segue que  $\deg f = \deg Id = 1$ .  $\square$

**Observação 1.87** *Desse corolário, temos que se  $f : S^2 \rightarrow S^2$  é tal que  $\deg f > 1$ , então o conjunto singular  $\Sigma f \neq \emptyset$ .*

## Capítulo 2

# Invariantes de Aplicações Estáveis entre Superfícies

Neste capítulo, vamos apresentar alguns invariantes (locais) de aplicações estáveis definidos por Ohmoto-Aicardi [26]. Em seguida, apresentaremos grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis, que serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos na classificação dessas aplicações. Tomamos como principais referências os trabalhos de Ohmoto-Aicardi [26] e Hacon, Mendes e Romero [11], [13], [14], [15].

## 2.1 Invariantes Locais

### 2.1.1 Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas na Esfera

Neste trabalho, vamos estudar aplicações estáveis  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. Vamos considerar a partir de agora aplicações como esta e para melhor visualização, vamos ver a imagem da aplicação representada no plano correspondente a esfera menos um ponto, que será denotado por infinito.



A seguir, vamos tratar das transições de codimensão 1 apresentadas pelos autores acima.

## 2.1.2 Transições de codimensão 1

Nesta subseção, cada transição está representada localmente por uma sequência de três aplicações em  $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$  ordenadas com orientação positiva (da esquerda para direita). A aplicação do meio é uma aplicação não estável, ou seja, essa singularidade pertence ao conjunto  $C^\infty(M, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{E}(M, \mathbb{R}^2)$ . As setas nos arcos indicam o sentido em que o número de pré-imagens aumenta (por dois).

As transições que alteram o número de cúspides são denominadas de: **lábios** ( $L$ ), **bicos** ( $B$ ) e **rabo de andorinha** ( $S$ ); as transições que alteram o número de pontos duplos são denominadas de: **tangência de dobras** ( $T$ ), **dobra com cúspides** ( $C$ ) e **rabo de andorinha** ( $S$ ); enquanto que as transições que alteram o número de componentes do conjunto singular são denominadas de **bicos** ( $B$ ) ou **lábios** ( $L$ ).

### Transição Lábios ( $L$ )

A transição do tipo Lábios ocorre quando a partir de uma região regular, forma-se uma componente singular com duas cúspides que apontam para a mesma região regular.

A orientação da transição pode ser positiva ou negativa. Isto significa que essa transição leva ao nascimento ou morte de um par de cúspides.

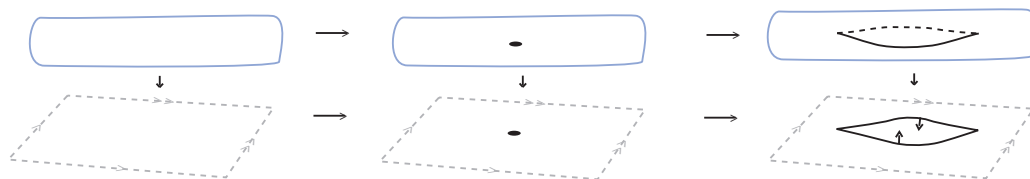


Figura 2.2: Transição do tipo Lábios.

A Figura 2.2 ilustra uma transição do tipo lábios. Ohmoto e Aicardi mostraram que quando uma aplicação sofre uma transição do tipo  $L$ , o índice de pontos de cúspides ( $I_c$ ) é alterado por  $\pm 2$ , com o sinal dependendo da orientação da transição. Em outras palavras, o número de cúspides da aplicação aumenta ou diminui por dois.

**Observação 2.2** Além dessa transição alterar o número de cúspides do conjunto singular, o número de componentes conexas também é modificado, provocando um aumento de uma unidade em  $I_E$  no sentido positivo.

### Transição Bicos (B)

A transição do tipo Bicos ocorre quando duas curvas de dobra, que são bordos de uma mesma região, se tangenciam e separam em duas cúspides que apontam para a mesma região regular. Esta transição também leva ao nascimento ou morte de um par de cúspides.

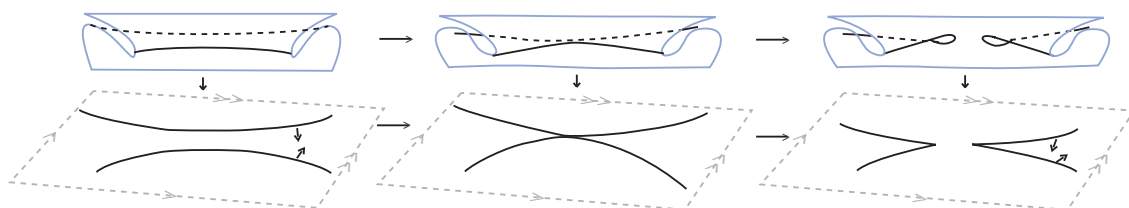


Figura 2.3: Transição do tipo Bicos.

A Figura 2.3 ilustra uma transição do tipo  $B$ , onde o número de cúspides é alterado por  $\pm 2$ , de acordo com a orientação da transição.

**Definição 2.3**  $B_+$  é a transição do tipo bicos, no sentido positivo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, acrescenta o número de componentes do conjunto singular por um. Analogamente,  $B_-$  é a transição do tipo bicos, no sentido positivo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, diminui por um o número de componentes singulares (Figura 2.4).

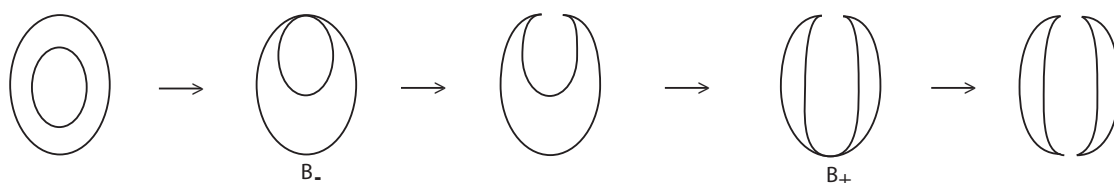


Figura 2.4: Transições do tipo  $B_+$  e  $B_-$ .

**Observação 2.4** Esta transição também altera o número de componentes conexas, que sofre um aumento de uma unidade, se é uma transição positiva do tipo  $B_+$ . Enquanto que uma transição positiva do tipo  $B_-$  diminui este número por um.

**Exemplo 2.5** A Figura 2.5 ilustra quatro aplicações estáveis distintas da garrafa de Klein na esfera, com grau zero. A aplicação (b) pode ser obtida de (a) seguida de uma transição do tipo bicos, que tangencia as duas curvas singulares obtendo duas cúspides no contorno aparente. Enquanto as aplicações (c) e (d) podem ser obtidas de (a) seguida de uma transição do tipo lábios, que acrescenta uma nova curva singular com duas cúspides no contorno aparente.

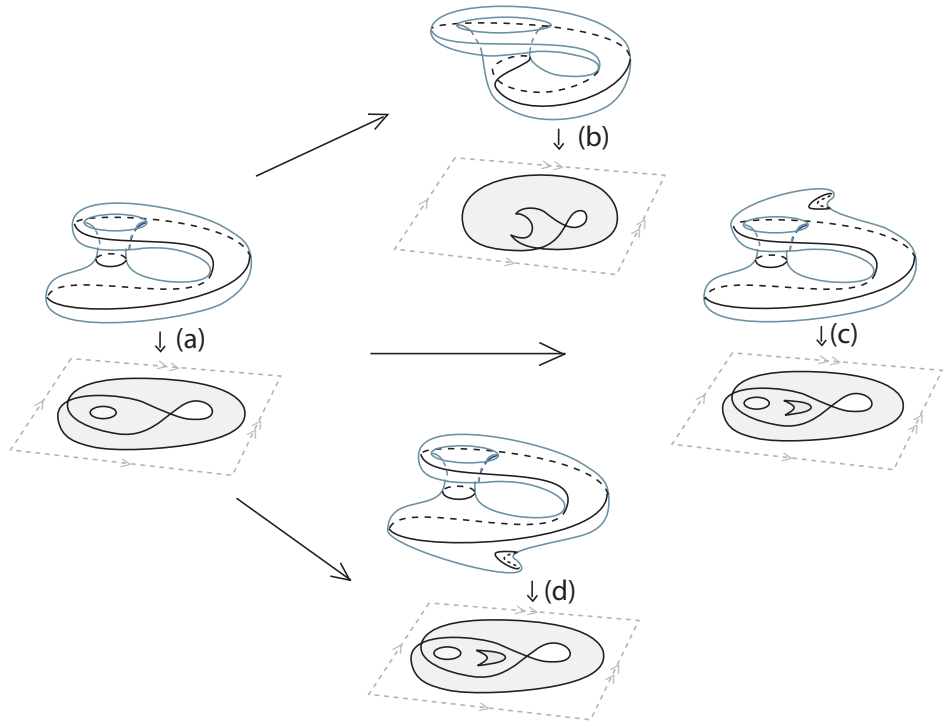


Figura 2.5: Diferentes aplicações da Garrafa de Klein no plano.

### Transição Rabo de Andorinha (S)

A transição do tipo Rabo de Andorinha ocorre quando a curva de dobra passa por uma pequena deformação e aparecem duas cúspides que apontam para regiões regulares de sinais diferentes e um ponto duplo.

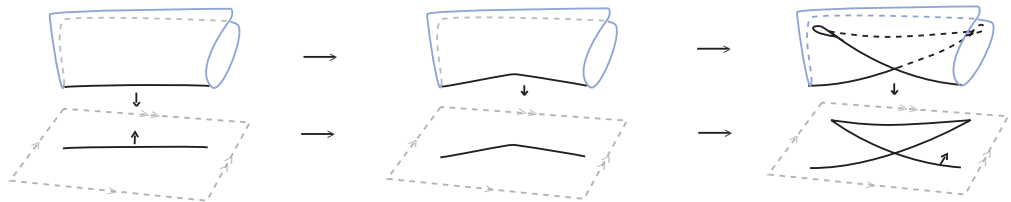


Figura 2.6: Transição do tipo Rabo de andorinha.

A Figura 2.6 ilustra uma transição do tipo rabo de andorinha. De acordo com a orientação da transição, o número de cúspides é alterado por  $\pm 2$ , e o número de pontos duplos é alterado por  $\pm 1$ .

### Transição Tangência de Dobra (T)

Em [26], Ohmoto e Aicardi apresentaram três transições do tipo tangência de dobras, onde uma delas pode ser vista na Figura 2.7.

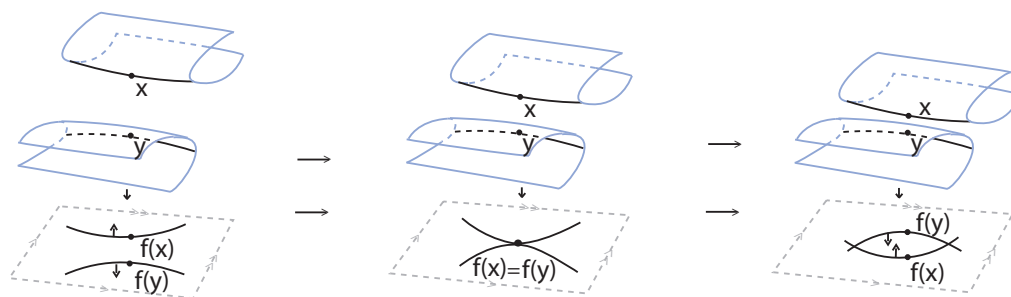


Figura 2.7: Transição do tipo Tangência de Dobra.

A Figura 2.7 ilustra uma transição do tipo tangência de dobras, que ocorre quando duas curvas de dobra com orientações opostas, se tangenciam. A nova região criada entre as duas curvas após a tangência tem necessariamente quatro pré-imagens. De acordo com a orientação da transição, o número de pontos duplos é alterado por  $\pm 2$ .

Nos outros dois casos de transição do tipo  $T$ , o número de pré-imagens dentro da nova região criada após a tangência é necessariamente zero (quando as curvas de dobra têm orientações opostas) e dois (quando as curvas de dobra têm a mesma orientação).

**Notação:**  $T^+$  e  $T^-$  denotam as transições do tipo tangência de dobra, quando as curvas de dobra tem a mesma orientação e orientações opostas, respectivamente.

### Transição Dobra com Cúspides (C)

Ohmoto e Aicardi apresentaram duas transições do tipo dobra com cúspide, onde uma delas pode ser vista na Figura 2.8.

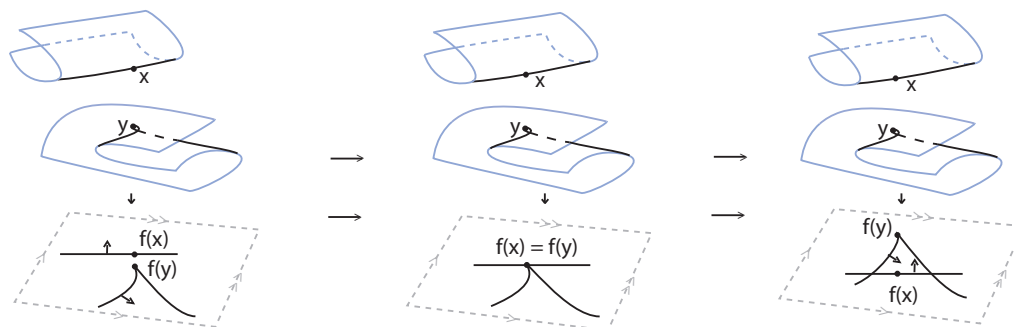


Figura 2.8: Transição do tipo Dobra com cúspide.

A Figura 2.8 ilustra uma transição do tipo dobra com cúspide, que ocorre quando uma curva de dobra e uma cúspide se tangenciam. A nova região triangular criada após a tangência, tem necessariamente quatro pré-imagens.

No outro caso de transição do tipo  $C$ , o número de pré-imagens dentro da nova região triangular criada após a tangência é necessariamente dois.

**Notação:**  $C^+$  e  $C^-$  denotam as transições do tipo dobra com cúspide, com orientação positiva e negativa, respectivamente.

### Transição Ponto Triplo (PT)

Ohmoto e Aicardi apresentaram duas transições do tipo ponto triplo, onde uma delas pode ser vista na Figura 2.9.

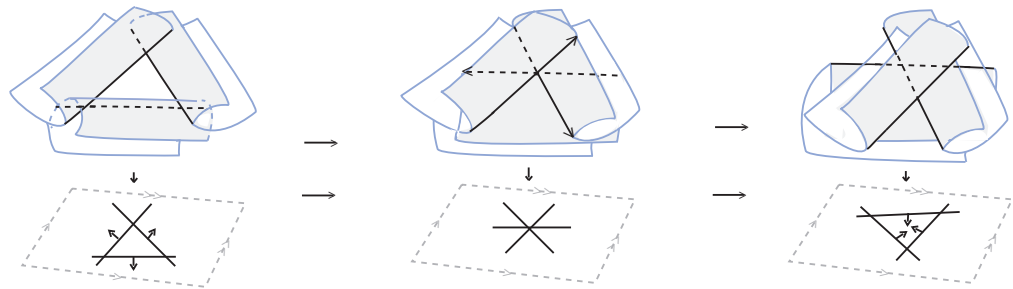


Figura 2.9: Transição do tipo Ponto Triplo.

A Figura 2.9 ilustra uma transição do tipo ponto triplo, que ocorre quando três curvas de dobra se tangenciam. A nova região triangular criada após a tangência tem necessariamente seis pré-imagens.

No outro caso de transição do tipo  $PT$ , o número de pré-imagens dentro da nova região triangular criada após a tangência é necessariamente quatro.

**Exemplo 2.6** A Figura 2.10 ilustra uma sequência de aplicações suaves da esfera no plano: de (a) para (b) passando por rabo de andorinha ( $S$ ), criamos um ponto duplo e duas cúspides; de (b) para (c) passando por uma tangência quando as curvas de dobra têm orientações opostas  $T^-$ , aumentamos dois pontos duplos; de (c) para (d) passando por dobra com cúspide com orientação positiva  $C^+$ , aumentamos dois pontos duplos; de (d) para (e) passando por um ponto triplo e de (e) para (f) passando por dobra com cúspides com orientação negativa  $C^-$ , eliminamos dois pontos duplos.

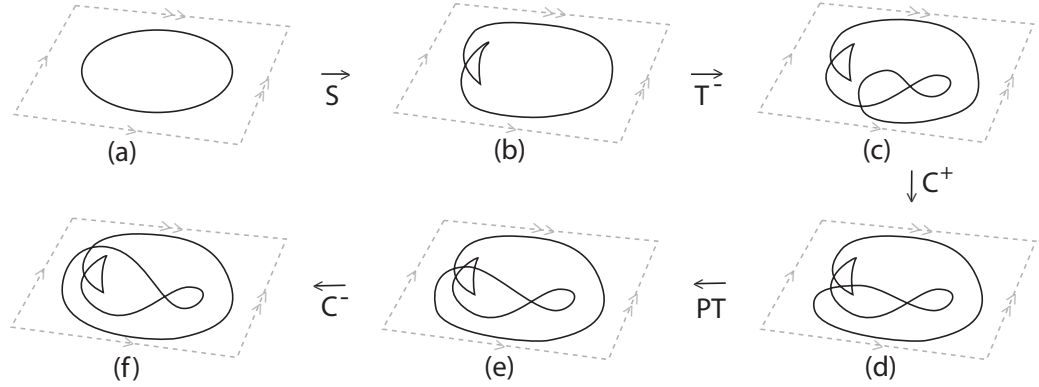


Figura 2.10: Transições sobre a mesma superfície.

### 2.1.3 Sinais das Cúspides

Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável onde  $M$  é uma superfície orientada. Pela Observação 1.69, cada região do complemento  $M \setminus \Sigma f$  recebe um sinal  $\pm$ .

Desse modo, levando em consideração a orientação da região para o qual a cúspide aponta, podemos definir seu sinal da seguinte maneira:

**Definição 2.7** O sinal da cúspide  $C$  de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  é  $s(C) = +1$ , se  $C$  aponta para a região positiva de  $f$  ou  $s(C) = -1$ , se  $C$  aponta para a região negativa de  $f$ .

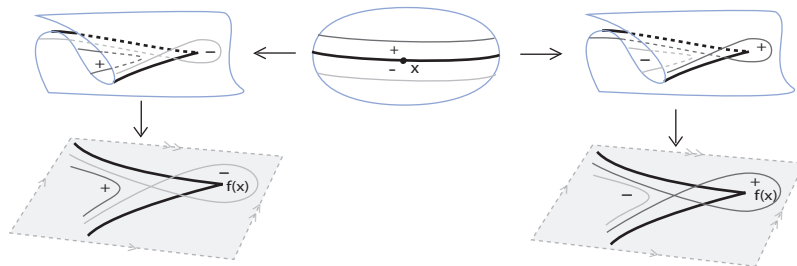


Figura 2.11: Sinal das Cúspides

**Observação 2.8** As transições que alteram a soma dos sinais das cúspides,  $\sum s(C_i)$ , por  $\pm 2$ , são as do tipo bicos e lábios pois estas cúspides sempre tem o mesmo sinal.

As cúspides que aparecem com a transição do tipo rabo de andorinha possuem sinais opostos por apontarem para regiões de sinais diferentes, cancelando entre si na soma total  $\sum s(C_i)$ .

O Teorema de Quine [27] relaciona a característica de Euler do complemento do conjunto singular sobre  $M$  e do contradomínio  $N$  com a soma dos sinais das cúspides e o grau de uma aplicação estável entre duas superfícies. Enunciaremos a seguir, o teorema para o caso em que  $N = S^2$ .

**Teorema 2.9 (Teorema de Quine para aplicações estáveis na 2-esfera)** *Sejam  $M$  uma 2-variedade suave, compacta, orientada e conexa,  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável,  $M^+$  o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais  $f$  preserva a orientação,  $M^-$  o fecho dos pontos regulares os quais  $f$  inverte a orientação e  $C_1, \dots, C_n$  pontos de cúspides, então*

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde  $\mathcal{X}$  é a característica de Euler e  $deg$  é o grau da aplicação e  $s(C_i)$  é o sinal da cúspide  $C_i$ .

Uma demonstração detalhada do Teorema 2.9, por transições de codimensão um, pode ser encontrada em [19] e em [15] para superfície com gênero  $g > 0$ .

**Corolário 2.10 [2]** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície  $M$  fechada, orientada e conexa. Se o conjunto singular  $\Sigma f$  é não vazio e conexo, então*

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2deg(f) \right| \leq 2 - \chi(M).$$

Uma demonstração mais detalhada deste resultado encontra-se em [19].

**Teorema 2.11 [29]** *Se  $M$  é orientada então o número de cúspides do contorno aparente  $\gamma(f)$  de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$ , é um número par.*

**Observação 2.12** *O Teorema 2.11 é bastante natural, pois o espaço das aplicações  $C^\infty$  é conexo por caminhos e pode ligar uma aplicação qualquer a uma aplicação dobra (sem cúspide). Ao longo deste caminho todas as transições alteram o número de cúspides aos pares.*

Os invariantes  $(I_c, I_n, I_e)$  do ponto de vista local, estão relacionados com o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies na 2-esfera. No entanto, quando o contorno aparente de duas aplicações são iguais, esses três invariantes não são suficientes para dizer se elas são ou não  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

A Figura 2.5 (c) e (d) ilustra duas aplicações estáveis distintas da garrafa de Klein na esfera com grau zero, passando por uma transição do tipo lábios. Ambas as aplicações possuem o mesmo contorno aparente formado por três componentes conexas.

Uma maneira de diferenciar essas aplicações, é pela disposição de suas curvas singulares na superfície do domínio. Em [11], Hacon, Mendes e Romero apresentaram um invariante para o caso de superfícies orientadas no plano: o grafo, que é associado ao domínio da aplicação, juntamente com seu conjunto singular. Posteriormente, em [15], os mesmos autores estenderam a técnica de associar grafos para o caso de superfícies fechadas na esfera.

## 2.2 Invariante Global

Nesta seção vamos estudar os grafos como invariantes globais de aplicações estáveis e estabelecer condições para que um dado grafo, com pesos inteiros positivos nos vértices, seja associado a uma superfície com curvas.

### 2.2.1 Grafo Dual de Aplicações Estáveis

Sejam  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável, onde  $M$  é uma superfície fechada (sem bordo) e  $\Sigma f$  é o conjunto singular de  $f$ . Ao par  $(M, \Sigma f)$  associamos um grafo  $G$ , com pesos (inteiros positivos) nos vértices do seguinte modo:

1. Cada vértice  $v_i$  corresponde a uma componente conexa  $M_i$  do complemento  $M \setminus \Sigma f$  e cada aresta  $a_i$  corresponde a uma curva  $\alpha_i$  de  $\Sigma f$ ;
2. Um vértice  $v_i$  e uma aresta  $a_i$  são **incidentes** se, e somente se, a curva representada por  $a_i$  encontra-se no bordo da região representada por  $v_i$ ;
3. O peso do vértice  $v_i$  corresponde ao gênero  $g_i$  da região orientada  $M_i$  (imersa na  $S^2$ ).
4. Um laço  $a_i$  em  $G_f$  receberá um  $*$  se a curva  $\alpha_i$  tem como vizinhança uma faixa de Moebius em  $M$ .

Se  $\alpha \in \Sigma f$ , então pode acontecer um dos seguintes casos:

- i)* A vizinhança de  $\alpha$  é um cilindro;
- ii)* A vizinhança de  $\alpha$  é uma faixa de Moebius.



**Definição 2.13** O grafo com pesos nos vértices obtido na construção acima, associado à uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$ , é dito **grafo dual** de  $\Sigma f$  em  $M$ , denotado por  $G_f$ .

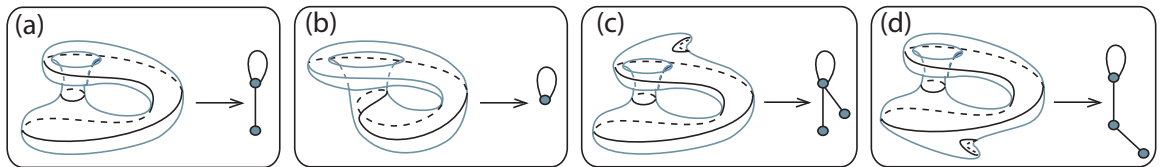


Figura 2.12: Grafos associados às aplicações da Figura 2.5.

Os grafos podem diferenciar aplicações não  $\mathcal{A}$ -equivalentes que possuem o mesmo contorno aparente, como pode ser visto na Figura 2.12 (c) e (d).

**Observação 2.14** O grafo é um invariante por  $\mathcal{A}$ -equivalência. Em outras palavras, se duas aplicações dadas estão associadas a grafos distintos  $G_f$  e  $G_g$ , então afirmamos que  $f$  e  $g$  não são  $\mathcal{A}$ -equivalentes.

**Exemplo 2.15** A Figura 2.13 (b) ilustra o contorno aparente de uma aplicação  $g$  da faixa de Moebius no plano com três cúspides e nenhum ponto duplo. Este contorno aparente pode ser visto como a identificação dos pontos antípodas dos arcos contidos em um dos bordos de um cilindro imerso no plano. A Figura 2.13 (c) corresponde a um cilindro  $C$  mergulhado no plano. A Figura 2.13 (d) corresponde a uma perturbação de  $C$  na vizinhança do bordo interno, deixando fixo o bordo externo. Movimentando o bordo interno até identificar os pontos antípodas, obtemos a aplicação  $g$ .

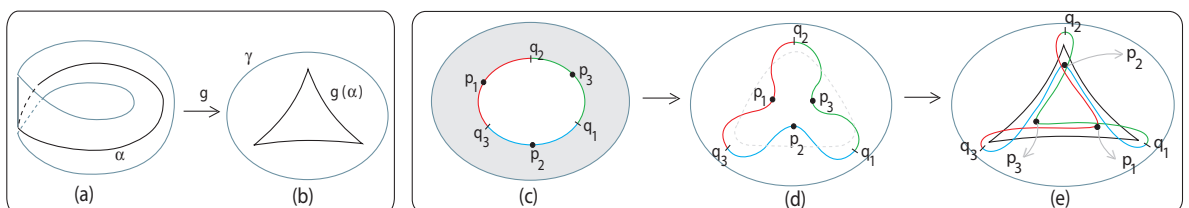


Figura 2.13: Aplicação estável  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.16** A Figura 2.14 ilustra duas aplicações  $h_1, h_2 : P^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde a imagem de  $h_1$  contém duas componentes de curvas disjuntas, sendo que uma delas possui três cúspides. Esta aplicação também pode ser obtida da aplicação do Exemplo 2.15, completada por um disco no bordo externo. A imagem de  $h_2$  contém uma única curva conexa com três cúspides e três auto-interseções.

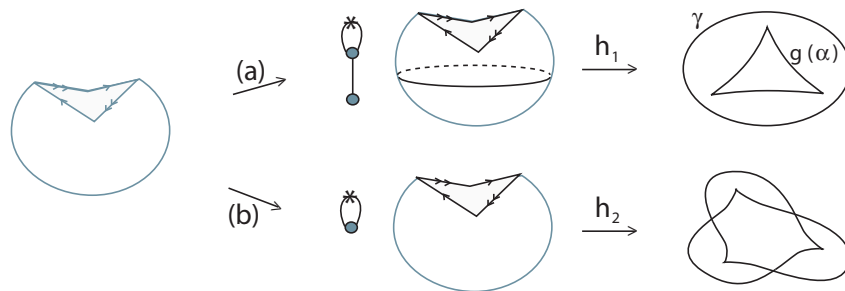


Figura 2.14: Aplicação estável do Plano Projetivo no plano.

**Observação 2.17** O grafo associado à aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície orientada, é sempre bipartido, pois pela Definição 1.70, as componentes de  $\Sigma f$  separam as regiões de  $M$  com sinais opostos. Logo, as arestas dos grafos sempre separam vértices de sinais opostos.

## 2.2.2 Grafo associado a superfície com curvas

Podemos estender a associação de grafos para qualquer superfície com curvas. Neste caso, sendo  $M$  uma superfície fechada e  $\mathcal{C}$  um conjunto finito de curvas fechadas e disjuntas em  $M$ , associamos as arestas do grafo pelas componentes de  $\mathcal{C}$  e os vértices pelas componentes conexas de  $M \setminus \mathcal{C}$ . Vale a mesma relação de adjacência da construção do grafo associado ao par  $(M, \Sigma f)$ .

Vamos considerar uma superfície fechada  $M$  com um conjunto finito de curvas  $\mathcal{C}$  que decompõe  $M$  em componentes orientadas.

Seja  $G$  um grafo associado ao par  $(M, \mathcal{C})$ .

**Notação:** Denotemos por  $W$  a soma dos pesos dos vértices,  $V$  o número total de vértices e  $A = E + L + S$  o número total de arestas, onde  $E$ ,  $L$  e  $S$  correspondem respectivamente ao total de arestas conectadas a dois vértices diferentes, ao total de laços sem asterisco e ao total de laços com asterisco.

**Observação 2.18** Observe que as curvas correspondentes as arestas que são conectadas a dois vértices diferentes são bordos de duas componentes disjuntas de  $M$ . As curvas correspondentes a laços sem asterisco são bordos da mesma componente de  $M$  duas vezes. E as curvas

correspondentes a laços com asteriscos são bordos de uma única componente e uma única vez. Consequentemente, o número de bordo de uma região  $M_i$  correspondente a um vértice  $v_i$  é igual a  $E_i + 2L_i + S_i$

**Exemplo 2.19** A Figura 2.15 ilustra um grafo  $G$  associado ao par  $(M, \mathcal{C})$ , onde  $M$  é homeomorfa ao 5-projetivo com três componentes de curva, sendo  $W = 1$ ,  $E = L = S = 1$  e  $A = 3$ .

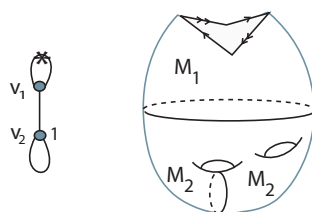


Figura 2.15: Componentes de bordo de  $M_i$ .

**Observação 2.20** Se  $M = \bigcup_{i=1}^V M_i$  e  $k_i = \#\partial(M_i)$  então  $\sum_{i=1}^V k_i = 2E + 2L + S$ , onde  $E$  fica multiplicado por dois, pois as curvas correspondentes as arestas de  $E$  são bordos de duas componentes disjuntas de  $M$ . Assim, como  $A = E + L + S$ , podemos escrever  $\sum_{i=1}^V k_i = 2A - S$ .

Em [11], Hacon, Mendes e Romero mostraram o resultado abaixo usando como ferramentas a vizinhança tubular e a soma conexa. A demonstração dessa proposição pode ser vista com mais detalhes em [19].

**Proposição 2.21** [11] *Todo grafo  $G$  com pesos inteiros positivos nos vértices está associado a uma superfície orientada  $M$  com um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas. O gênero de  $M$  é  $g(M) = 1 - V + A + W$ .*

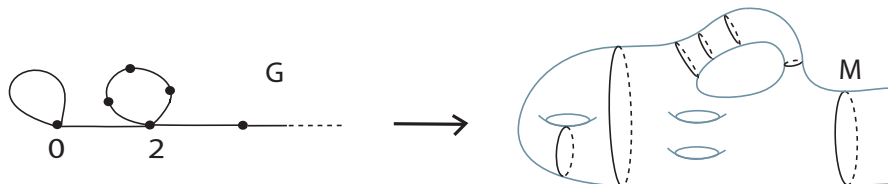


Figura 2.16: Laços no grafo.

A seguir, a Proposição 2.21 é generalizada para o caso em que  $M$  é uma superfície não orientada:

**Proposição 2.22** [15] *Todo grafo  $G$  com pesos inteiros positivos nos vértices e com pelo menos um asterisco, está associado a alguma superfície não orientada  $M$  com um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas. O gênero de  $M$  é dado por  $g(M) = 2(1 - V + A + W) - S$ .*

**Demonstração:** Dado um grafo  $G$  com  $V$  vértices,  $A$  arestas,  $S$  \* e peso total  $W$ , vamos considerar  $S > 0$ , isto é,  $G$  possui pelo menos uma aresta com asterisco.

Retirando do grafo  $G$  todas as arestas com asterisco, como na Figura 2.17 (a), obtém-se um novo grafo  $G'$ , com  $V' = V$ ,  $A' = A - S$  e  $W' = W$ .

A Proposição 2.21 garante que  $G'$  está associado a uma superfície orientada  $M'$  com um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas, onde  $g(M') = 1 - V' + A' + W'$ , como ilustrado na Figura 2.16. Como pode ser observado no Exemplo 1.2 qualquer ciclo pode estar associado a uma curva cujo complemento conectado por esta curva, pode ser orientado (a) ou não orientado (b). Dessa forma, podemos considerar  $M'$  como na Figura 2.17.

Para obter a superfície  $M$ , associada ao grafo  $G$ , deve-se fazer a soma conexa nas regiões correspondentes aos vértices de pesos zero e dois, com o plano projetivo do Exemplo 1.3, como mostrado em (c). Assim, o par  $(M, \mathcal{C})$  está associado ao grafo  $G$ .

Pela Proposição 2.21, a superfície orientada  $M$  tem  $\beta_1 + W$  alças. Por hipótese,  $G$  possui pelo menos uma aresta com asterisco, então  $M$  é não orientada. Logo,  $g(M) = 2(\beta_1 + W)$ . Como cada aresta com asterisco acrescenta somente um gênero, segue que  $g(M) = 2(\beta_1 + W) - S$ , ou seja,  $g(M) = 2(1 - V + A + W) - S$ .

□

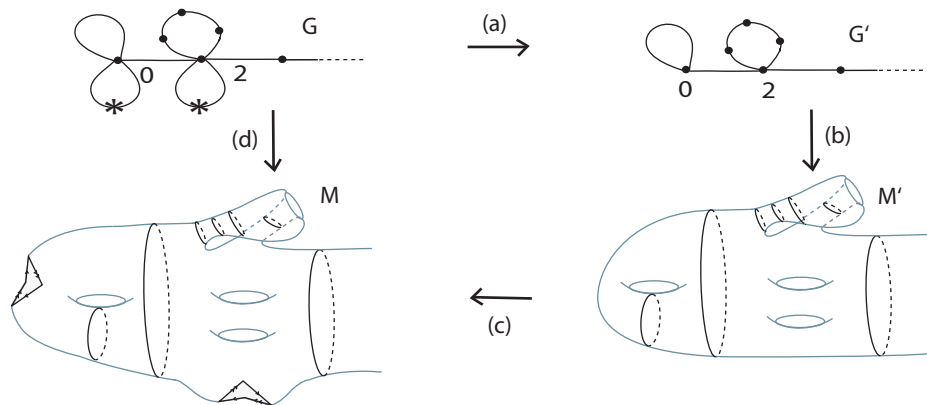


Figura 2.17: Uma superfície não orientada obtida através de um grafo.

**Teorema 2.23** *Se  $G_f$  é um grafo associado a aplicação estável  $f$  de  $M$  em  $S^2$ , então o gênero*

$$g(M) = \begin{cases} 1 - V + A + W, & \text{se } M \text{ é orientada,} \\ 2(1 - V + A + W) - S, & \text{se } M \text{ é não orientada.} \end{cases}$$

**Demonstração:** Para cada região  $M_i \in M \setminus \Sigma f$  vamos denotar por  $k_i$  o número de componentes de bordo de  $M_i$  e  $g_i$  o gênero da região  $M_i$ . Pela Proposição 1.27 e pelo Corolário 1.40, podemos escrever

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{i=1}^V \chi(M_i) \\ &= \sum_{i=1}^V 2 - 2g_i - k_i \\ &= 2V - 2 \sum_{i=1}^V g_i - \sum_{i=1}^V k_i. \end{aligned}$$

Mas  $\sum_{i=1}^V g_i$  corresponde ao número total de pesos do grafo,  $W$ . E pela Observação 2.20,  $\sum_{i=1}^V k_i = 2A - S$ . Dessa forma,

$$\chi(M) = 2V - 2W - 2A + S. \quad (2.1)$$

Pela Definição 1.38, se  $M$  é orientável,

$$g(M) = \frac{1}{2}(2 - \chi). \quad (2.2)$$

Substituindo a característica de Euler da expressão (2.1) em (2.2), temos que  $g(M) = \frac{1}{2}(2 - 2V + 2W + 2A + 0)$  pois como  $M$  é orientável, não possui nenhuma curva cuja vizinhança é uma faixa de Moebius. Assim,

$$g(M) = 1 - V + A + W.$$

Se  $M$  é não-orientável, pela Definição 1.38

$$g(M) = 2 - \chi. \quad (2.3)$$

Substituindo a característica de Euler da expressão (2.1) em (2.3), e colocando o número dois em evidência, segue que

$$g(M) = 2(1 - V + A + W) - S.$$

□

Uma vez que qualquer grafo está associado a uma superfície com curvas, baseado em [11], [14] e [15], veremos quais grafos estão associados a uma aplicação estável de uma superfície fechada  $M$  na esfera.

No próximo capítulo, vamos estudar as cirurgias de aplicações estáveis como uma ferramenta para a realização de grafos arbitrários por aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera.

# Capítulo 3

## Realização de Grafos por Aplicações Estáveis

Neste capítulo, estudaremos as cirurgias de aplicações estáveis. Em seguida, abordaremos o problema de realização de grafos por aplicações estáveis. As principais referências utilizadas foram [14] e [15].

### 3.1 Cirurgias entre Aplicações Estáveis

Nesta seção, apresentaremos dois tipos de cirurgias, conhecidas como cirurgias horizontais e verticais, que foram introduzidas por Hacon, Mendes e Romero em [13] para aplicações estáveis de superfícies orientadas no plano. Posteriormente, os mesmos autores, em [14], estenderam esta técnica para aplicações estáveis de superfícies orientadas na esfera e em [15], estenderam-na para aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano projetivo.

As cirurgias, como veremos, serão utilizadas como técnicas para mostrar como realizar um dado grafo, para alguma aplicação estável.

#### 3.1.1 Cirurgia Horizontal

Considere  $f : M \rightarrow S^2$  e  $g : N \rightarrow S^2$  duas aplicações estáveis, onde  $M$  e  $N$  são superfícies fechadas e disjuntas. Conectando através de um tubo  $T$  limitado (homeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$ ), dois discos centrados nos pontos  $p \in \Sigma f$  e  $q \in \Sigma g$ , para dentro do qual as aplicações são estendidas, obtemos uma superfície homeomorfa à soma conexa  $M \# N$ , como ilustrado na Figura

3.1. Assim, obtemos uma nova aplicação estável  $f \oplus_h g : M \# N \rightarrow S^2$ , cujas restrições a  $M$  e  $N$  correspondem a  $f$  e  $g$ , respectivamente.

**Definição 3.1** Uma *ponte*  $\beta$  é um retângulo imerso em  $S^2$ , que une os arcos opostos  $a$  e  $b$  de  $\beta$  respectivamente com os arcos  $a'$ , vizinhança de  $f(p)$ , e  $b'$ , vizinhança de  $g(q)$  (Figura 3.1).

**Observação 3.2** Se  $M$  e  $N$  são superfícies orientadas, para que  $M \# N$  seja orientada, a ponte  $\beta$  deve respeitar a orientação.

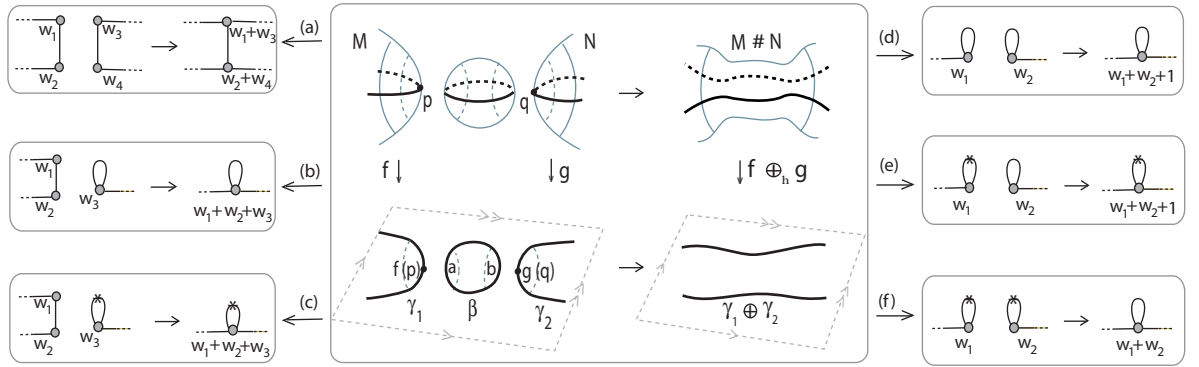


Figura 3.1: Cirurgia Horizontal.

**Definição 3.3** A aplicação  $f \oplus_h g$ , obtida na cirurgia acima, é dita *cirurgia horizontal* entre  $f$  e  $g$ .

Sejam  $\alpha \in \Sigma f$ ,  $\sigma \in \Sigma g$  curvas singulares e  $G_f$ ,  $G_g$  os grafos associados às aplicações  $f$  e  $g$ , respectivamente.

Obtemos três diferentes casos de cirurgia horizontal entre duas aplicações  $f$  e  $g$  :

- (i) as curvas  $\alpha$  e  $\sigma$  correspondem a arestas separando dois vértices nos grafos  $G_f$  e  $G_g$ , respectivamente;
- (ii) a curva  $\alpha$  corresponde a aresta no grafo  $G_f$  e a curva  $\sigma$  corresponde a um laço no grafo  $G_g$ ;
- (iii) as curvas  $\alpha$  e  $\sigma$  correspondem a laços nos grafos  $G_f$  e  $G_g$ , respectivamente.

Vamos analisar os pesos nos vértices resultantes da cirurgia horizontal:

Caso (i):  $\alpha$  é bordo de duas componentes disjuntas  $M_1$  e  $M_2$  de  $M \setminus \Sigma f$  com gêneros  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente e  $\sigma$  é bordo de duas componentes disjuntas  $N_1$  e  $N_2$  de  $N \setminus \Sigma g$  com gêneros  $w_3$  e  $w_4$ , respectivamente. Como a cirurgia horizontal na vizinhança de um ponto  $p \in \alpha$  e  $q \in \sigma$ , une as componentes  $M_1$  com  $N_1$  e  $M_2$  com  $N_2$ , o peso dos vértices correspondentes as novas regiões  $R_1 = M_1 \# N_1$  e  $R_2 = M_2 \# N_2$ , é a soma dos pesos dos vértices que o geraram,  $w_1 + w_3$  e  $w_2 + w_4$ , respectivamente (Figura 3.1 (a)).

**Exemplo 3.4** A Figura 3.2 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  uma aplicação de uma superfície fechada e orientada na esfera e  $g$  uma aplicação do toro na esfera, contendo uma única componente no conjunto singular, que separa um disco do toro menos um disco.

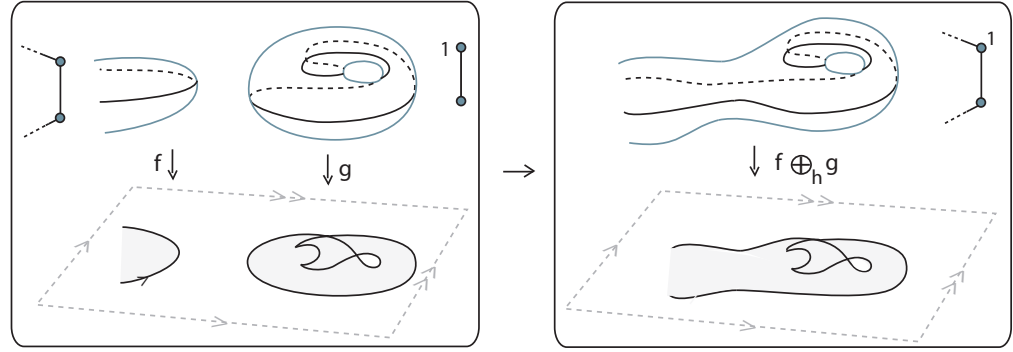


Figura 3.2: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (a).

Caso (ii):  $\alpha$  é bordo de duas componentes disjuntas  $M_1$  e  $M_2$  de  $M \setminus \Sigma f$  com gêneros  $w_1$  e  $w_2$ , respectivamente, e  $\sigma$  pode acontecer de duas formas: (a) ser bordo duas vezes de uma mesma componente  $N_1$ , com gênero  $w_3$  (a curva  $\sigma$  corresponde a um laço sem asterisco no grafo  $G_g$ ), ou (b) ser bordo uma única vez de uma mesma componente  $N_1$ , com gênero  $w_3$  (a curva  $\sigma$  corresponde a um laço com asterisco no grafo  $G_g$ ).

Observe que em:

- (a) A cirurgia horizontal une as componentes  $M_1$ ,  $M_2$  com  $N_1$ , onde a curva resultante da conexão de  $\alpha$  e  $\sigma$  é bordo duas vezes da componente  $R_1 = M_1 \# M_2 \# N_1$  e o cilindro, vizinhança desta curva, está contido em uma alça da superfície. O peso do vértice correspondente a nova região  $R_1$  é a soma dos pesos dos vértices que o geraram,  $w_1 + w_2 + w_3$  (Figura 3.1 (b)).
- (b) A cirurgia horizontal une as componentes  $M_1$ ,  $M_2$  com  $N_1$  e a curva resultante é bordo uma única vez da componente  $R_1 = M_1 \# M_2 \# N_1$ , tendo como vizinhança uma faixa de Moebius. O peso do vértice correspondente a nova região  $R_1$  é a soma dos pesos dos vértices que o geraram,  $w_1 + w_2 + w_3$  (Figura 3.1 (c)).

**Exemplo 3.5** A Figura 3.3 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  uma aplicação da garrafa de Klein na esfera, com grau zero e uma única curva singular. E  $g$  uma aplicação do toro na esfera, contendo uma única componente no conjunto singular, que separa um disco do toro menos um disco.

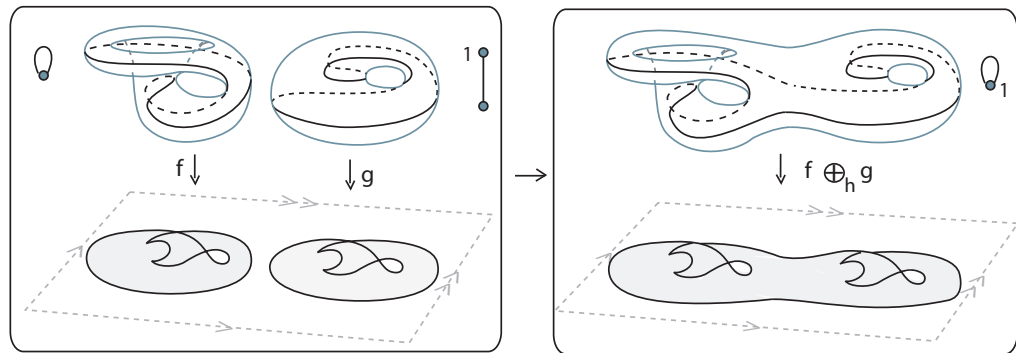


Figura 3.3: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (b).

**Exemplo 3.6** A Figura 3.4 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  uma aplicação do bitoro na esfera, com grau zero, e  $g$  uma aplicação do plano projetivo na esfera, com grau zero, contendo uma única curva no conjunto singular.

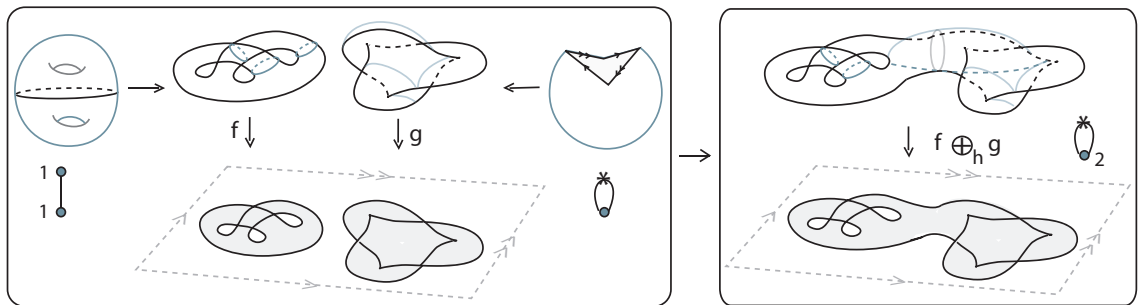


Figura 3.4: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (c).

Caso (iii): As arestas correspondentes as curvas  $\alpha$  e  $\sigma$  são laços nos grafos e pode acontecer uma das três formas: (a) os dois laços não tem asterisco, (b) somente um laço tem asterisco e (c) os dois laços tem asterisco.

Observe que em:

(a) a curva  $\alpha$  é bordo duas vezes de uma mesma componente  $M_1$ , com gênero  $w_1$  e a curva  $\sigma$  é bordo duas vezes de uma mesma componente  $N_1$ , com gênero  $w_2$ . Na cirurgia horizontal,

$M_1$  conecta com  $N_1$ , e a curva resultante da conexão de  $\alpha$  e  $\sigma$  é bordo duas vezes da componente  $R_1 = M_1 \# N_1$  e o cilindro, vizinhança desta curva, está contido em uma alça (não orientada) da superfície. O peso do vértice resultante, correspondente ao gênero de  $R_1$ , é  $w = w_1 + w_2 + 1$ , pois

$$\begin{aligned} 2 - 2w - (r + s + 2) &= \chi(R_1) \\ &= \chi(M_1) + \chi(N_1) - \chi(M_1 \cap N_1) \\ &= (2 - 2w_1 - (r + 2)) + (2 - 2w_2 - (s + 2)) - 2, \end{aligned}$$

onde  $r + 2$  e  $s + 2$  correspondem ao número de componentes de bordo de  $M_1$  e  $N_1$ , respectivamente (Figura 3.1 (d)).

**Exemplo 3.7** A Figura 3.5 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  e  $g$  aplicações da garrafa de Klein na esfera com única curva singular.

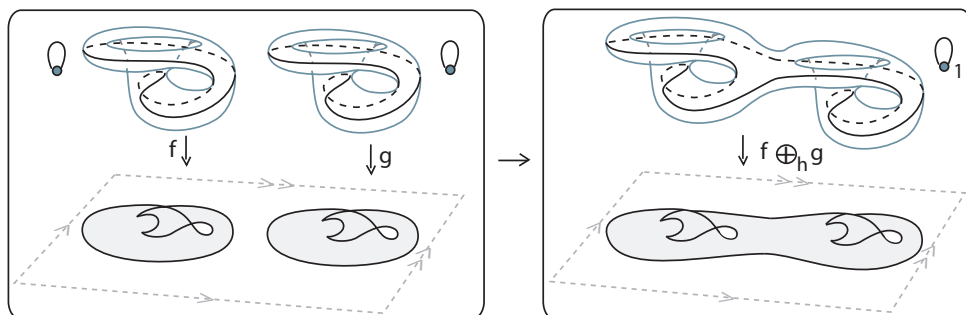


Figura 3.5: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (d).

**Observação 3.8** A superfície resultante da Figura 3.5 é homeomorfa a superfície resultante da Figura 3.3.

- (b) A curva  $\alpha$  é bordo duas vezes de uma mesma componente  $M_1$ , com gênero  $w_1$  e a curva  $\sigma$  é bordo uma única vez de uma mesma componente  $N_1$ , com gênero  $w_2$ . Na cirurgia horizontal,  $M_1$  conecta com  $N_1$  e a curva resultante da conexão de  $\alpha$  e  $\sigma$  é bordo uma única vez da componente  $R_1 = M_1 \# N_1$ , tendo como vizinhança uma faixa de Moebius. O peso do vértice resultante, correspondente ao gênero de  $R_1$ , é  $w = w_1 + w_2 + 1$ , pois

$$\begin{aligned} 2 - 2w - (r + s + 1) &= \chi(R_1) \\ &= \chi(M_1) + \chi(N_1) - \chi(M_1 \cap N_1) \\ &= (2 - 2w_1 - (r + 2)) + (2 - 2w_2 - (s + 1)) - 2, \end{aligned}$$

onde  $r + 2$  e  $s + 1$  correspondem ao número de componentes de bordo de  $M_1$  e  $N_1$ , respectivamente (Figura 3.1 (e)).

**Exemplo 3.9** A Figura 3.6 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  uma aplicação da garrafa de klein na esfera com uma única curva singular e  $g$  uma aplicação do plano projetivo na esfera com uma única curva singular.

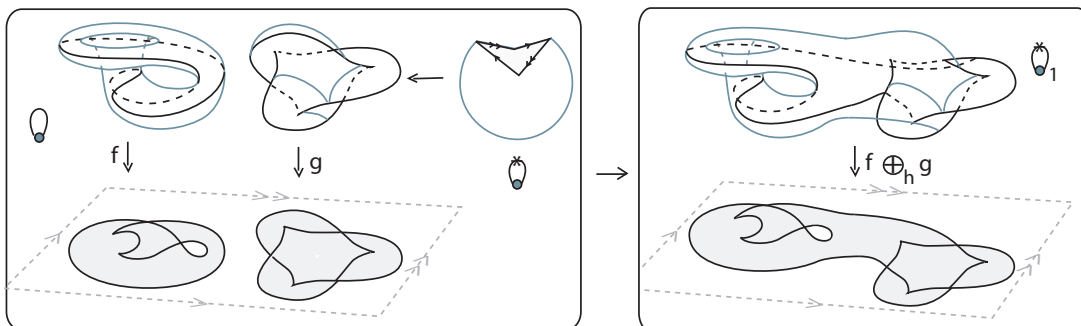


Figura 3.6: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (e).

(c) A curva  $\alpha$  é bordo uma única vez de uma mesma componente  $M_1$ , com gênero  $w_1$  e a curva  $\sigma$  é bordo uma única vez de uma mesma componente  $N_1$ , com gênero  $w_2$ . Na cirurgia horizontal,  $M_1$  conecta com  $N_1$  e a curva resultante da conexão de  $\alpha$  e  $\sigma$  é bordo duas vezes da componente  $R_1 = M_1 \# N_1$ , correspondendo a uma alça (não orientada) na superfície. O peso  $w$  do vértice resultante é a soma dos pesos dos vértices que o geraram,  $w_1 + w_2$ . (Figura 3.1 (f)).

**Exemplo 3.10** A Figura 3.7 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f$  e  $g$  aplicações do plano projetivo na esfera, contendo uma única componente no conjunto singular.

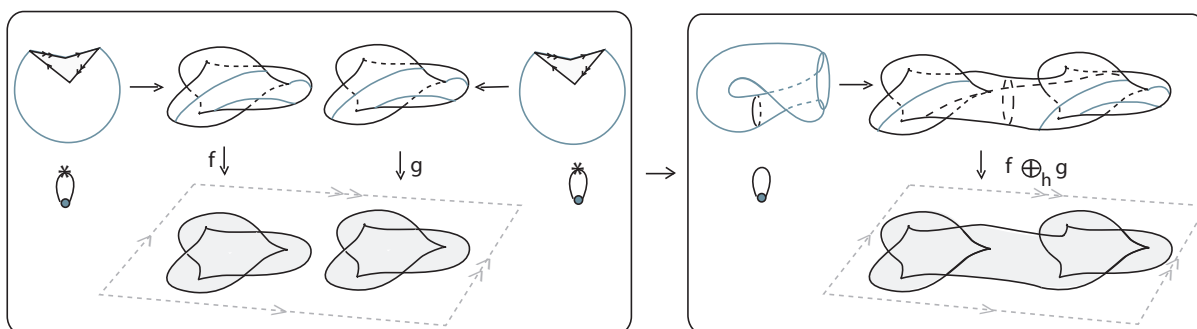


Figura 3.7: Cirurgia Horizontal referente a Figura 3.1 (f).

**Proposição 3.11** Seja  $G'$  um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável de uma superfície fechada e sem bordo na esfera. Aumentando por uma unidade o peso de algum de seus vértices, obtemos um novo grafo realizável  $G$ .

**Demonstração:** Seja  $G'$  um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável  $f$  de uma superfície fechada e sem bordo na esfera. Fazendo a cirurgia horizontal de  $f$  com uma aplicação estável  $g : T^2 \rightarrow S^2$ , tal que o grafo associado à  $g$  possui uma aresta e um vértice com peso um, obtemos a aplicação estável  $f \oplus_h g$  cujo grafo associado é o grafo  $G$  com o peso acrescentado por um em algum de seus vértices.  $\square$

**Exemplo 3.12** A Figura 3.8 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada e  $g : T^2 \rightarrow S^2$ . O grafo da aplicação  $g$  é uma árvore com dois vértices e uma aresta, tendo peso 1 em um dos vértices. Quanto ao grafo de  $f$ , denotamos, respectivamente, por  $k$  e  $l$  o peso dos vértices correspondentes as regiões  $a$  e  $b$  de  $M \setminus \Sigma f$  envolvidas na cirurgia.

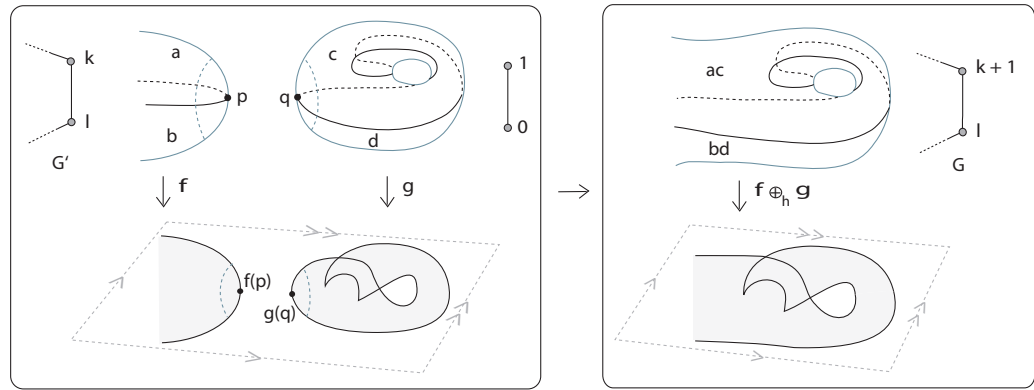


Figura 3.8: Alteração do peso com cirurgia horizontal.

Em [19], Jane Lage Bretas observou que dados dois grafos bipartidos  $G_1$  e  $G_2$ , a soma destes por cirurgia horizontal será ainda um grafo bipartido. Com isto, fazemos a seguinte observação:

**Observação 3.13** Dados dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  :

1. Se  $G_1$  e  $G_2$  são dois grafos conexos e disjuntos e ambos são não bipartidos, a soma destes por cirurgia horizontal será ainda um grafo não bipartido. Se  $G_1$  é bipartido e  $G_2$  é não bipartido, ou vice-versa, a soma destes por cirurgia horizontal será um grafo não bipartido;
2. Se  $G_1 = G_2$ , um grafo resultante por uma cirurgia horizontal sobre este, será um grafo bipartido (não bipartido) se as regiões conectadas tiverem sinais opostos (sinais iguais).

**Exemplo 3.14** A Figura 3.9 ilustra uma cirurgia horizontal  $f \oplus_h g$ , sendo  $f : M \rightarrow S^2$ , com  $M$  uma superfície fechada e  $g : S^2 \rightarrow S^2$ .

Neste caso,  $\deg(f \oplus_h g) = \deg(f) + 1$ , pois  $\deg(g) = 1$ .

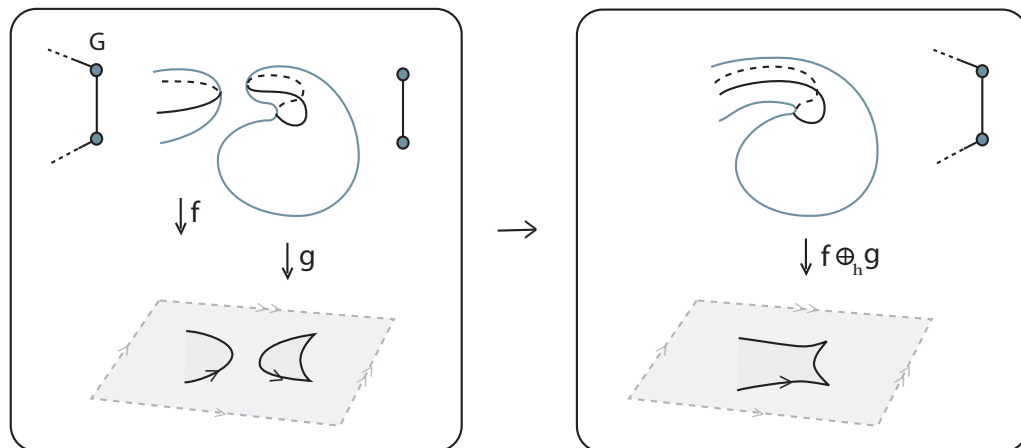


Figura 3.9: Exemplo de cirurgia horizontal.

**Observação 3.15** Para acrescentar o grau de uma aplicação  $f_1$  por um, fazemos uma cirurgia horizontal desta com uma aplicação  $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtida pela aplicação identidade, passando por uma transição do tipo lábios, como ilustrado na Figura 3.9.

**Exemplo 3.16** A Figura 3.10 ilustra a cirurgia horizontal sobre uma mesma aplicação da esfera na esfera, obtendo uma aplicação do toro na esfera. Esta é uma forma de realizar um grafo com uma aresta e peso um, por uma aplicação de grau um, cujo contorno aparente possui quatro cúspides e nenhum ponto duplo.

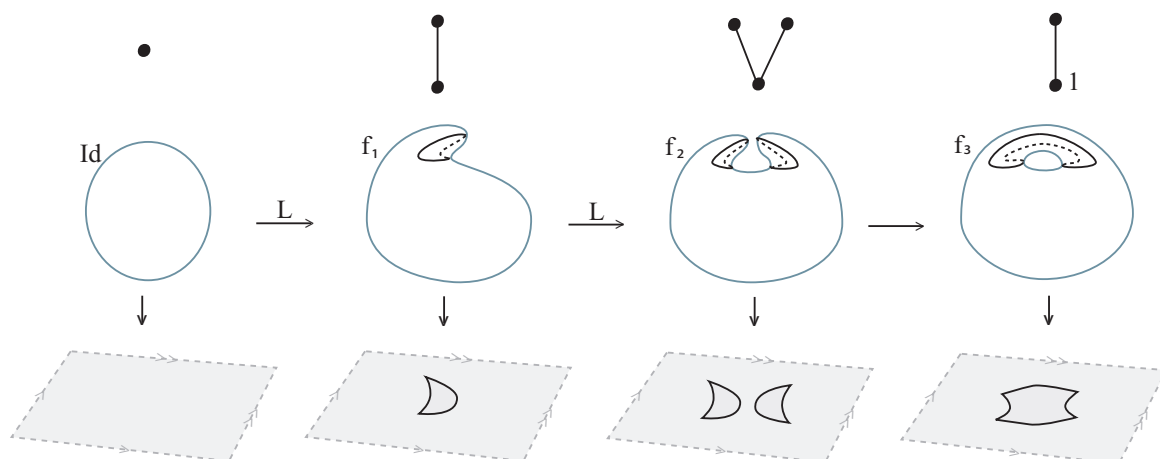


Figura 3.10: Construção de uma aplicação do toro com grau um.

**Observação 3.17** A cirurgia horizontal sobre uma mesma aplicação, altera o gênero da superfície por um.

**Notação:**  $H_1^d$  e  $H_2^d$  correspondem respectivamente, as cirurgias horizontais sobre a mesma aplicação e entre duas aplicações distintas, ambas alterando o grau da aplicação por  $d$ .

As Figuras 3.9 e 3.10 ilustram as cirurgias horizontais  $H_2^1$  e  $H_1^0$  respectivamente.

### 3.1.2 Cirurgia Vertical

Sejam  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável e  $p, q \in M \setminus \Sigma f$  tais que  $f(p) = f(q)$ . Escolhemos dois discos fechados,  $D_p$  e  $D_q$  em  $M$ , cujos interiores contenham os pontos  $p$  e  $q$ , respectivamente. Substituindo os interiores de  $D_p$  e  $D_q$  por um tubo limitado  $T$ , identificando  $\partial D_p$  e  $\partial D_q$  às duas componentes de bordo do tubo e estendendo  $f$  sobre  $T$ , de forma estável com uma única curva singular  $\alpha$ , obtém-se uma aplicação estável  $f_\alpha : M_\alpha \rightarrow S^2$ . O conjunto singular de  $f_\alpha$  tem uma componente a mais que  $\Sigma f$ .

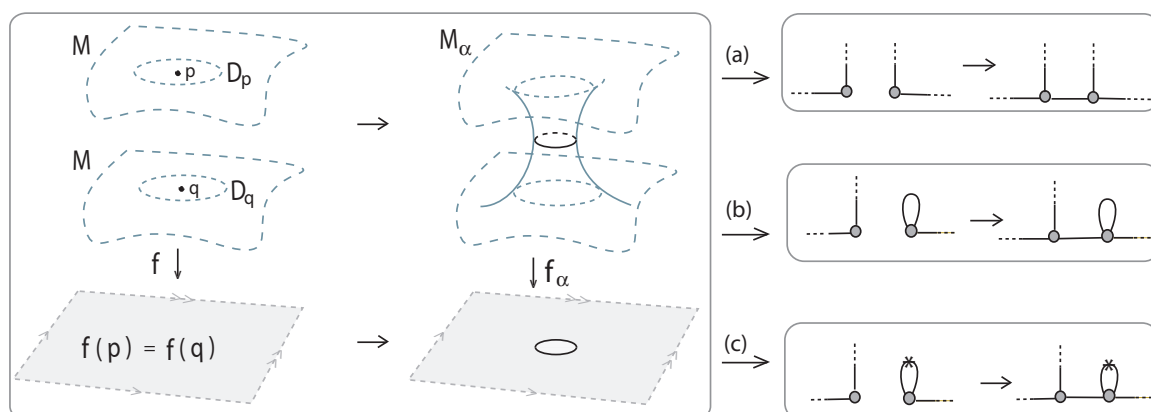


Figura 3.11: Cirurgia Vertical.

**Definição 3.18** A aplicação  $f_\alpha$  obtida da cirurgia vertical acima, é dita **cirurgia vertical**.

**Observação 3.19** Na cirurgia vertical podemos ter dois casos diferentes para  $M$  :

1. Se  $M = M_1 \cup M_2$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são componentes conexas disjuntas, então a cirurgia vertical é uma soma conexa;
2. Se  $M$  tem única componente conexa, então a cirurgia vertical é uma alça.

**Observação 3.20** Na cirurgia vertical:

O tubo  $T$  corresponde a uma alça na superfície;

2. A curva  $\alpha$  corresponde a uma aresta no ciclo do grafo  $G_\alpha$  associado a  $f_\alpha$ ;
3. Se  $M$  é orientada e  $p \in M^+$  e  $q \in M^-$ , então  $M_\alpha$  é orientada (Figura 3.12 (a));
4. Se  $M$  é orientada e  $p, q \in M^+$  ou  $p, q \in M^-$ , então  $M_\alpha$  é não orientada (Figura 3.12 (b));

Uma consequência imediata da Observação 3.20 é a seguinte proposição:

**Proposição 3.21** *Sejam  $G$  um grafo com pesos arbitrários nos vértices e  $G'$  um grafo obtido de  $G$  ao retirar uma aresta de cada um dos seus ciclos. Se  $G'$  é realizável por uma aplicação estável de uma superfície fechada e sem bordo na esfera, então  $G$  também o é.*

**Exemplo 3.22** *A Figura 3.12 ilustra duas cirurgias verticais sobre a esfera imersa no  $R^3$ , obtendo do lado esquerdo o toro, ao fazer a conexão entre duas regiões de sinais opostos. E do lado direito a garrafa de Klein, ao fazer a conexão entre duas regiões de sinais iguais.*

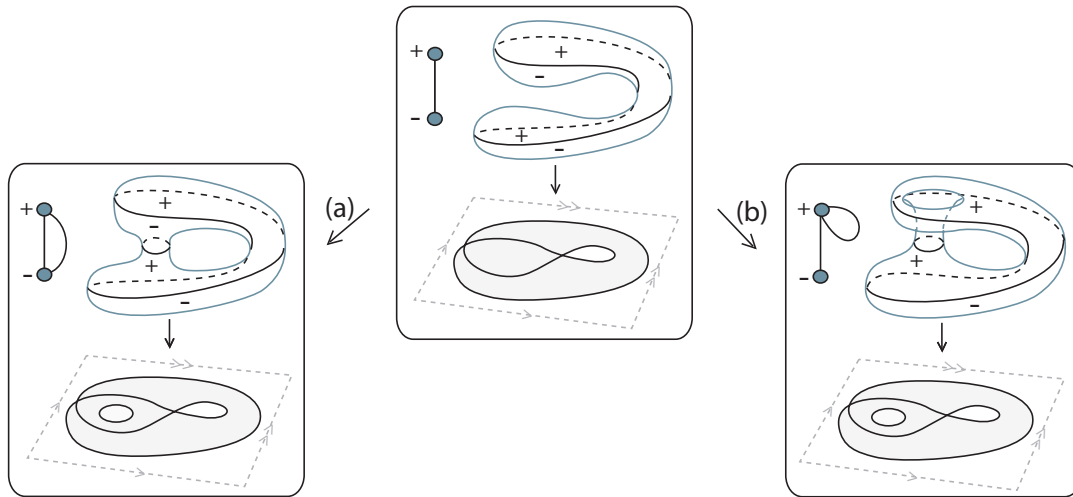


Figura 3.12: Diferentes tipos de Cirurgia Vertical.

**Observação 3.23** *A cirurgia vertical sobre uma mesma aplicação, altera o gênero da superfície por um.*

**Observação 3.24** *Se  $G$  é o grafo associado à aplicação  $f : M \rightarrow S^2$ , então realizando a cirurgia vertical sobre  $f$  obtemos:*

1.  $V(G_{f_\alpha}) = V(G_f)$ , pois nenhuma região é tirada ou colocada.

2.  $A(G_{f_\alpha}) = A(G_f) + 1$ , pois uma nova componente singular é criada.
3.  $W(G_{f_\alpha}) = W(G_f)$ , pois não é acrescentado ou retirado gênero das regiões.

**Exemplo 3.25** A Figura 3.13 ilustra uma cirurgia vertical  $f_1 \oplus_v f_2$ , sendo  $f_1$  uma aplicação da garrafa de klein na esfera, com grau zero e  $f_2$  uma aplicação da esfera na esfera com grau um. Neste caso,  $\deg(f_1 \oplus_v f_2) = \deg(f_1) + 1$ , pois  $\deg(f_2) = 1$ .

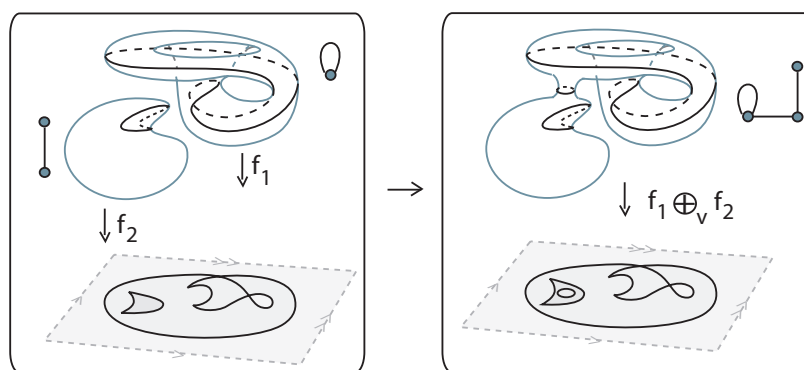


Figura 3.13: Cirurgia Vertical referente a Figura 3.11 (b).

**Observação 3.26** Para acrescentar grau de uma aplicação  $f_1$  por um, fazemos uma cirurgia vertical desta com uma aplicação  $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtida pela aplicação identidade, passando por uma transição do tipo lábios, como ilustrado na Figura 3.13.

**Notação:**  $V_1^d$  e  $V_2^d$  correspondem respectivamente, as cirurgias verticais sobre a mesma aplicação e entre duas aplicações distintas, ambas alterando o grau da aplicação por  $d$ .

As Figuras 3.12 e 3.13 ilustram as cirurgias verticais  $V_1^0$  e  $V_2^1$  respectivamente.

Aos grafos retos com uma ou duas arestas, chamaremos de **grafos básicos**.

A Figura 3.14 ilustra algumas aplicações estáveis que estão associadas a grafos com no máximo duas arestas, dois vértices e peso total um. A estas aplicações chamaremos de **aplicações básicas**.

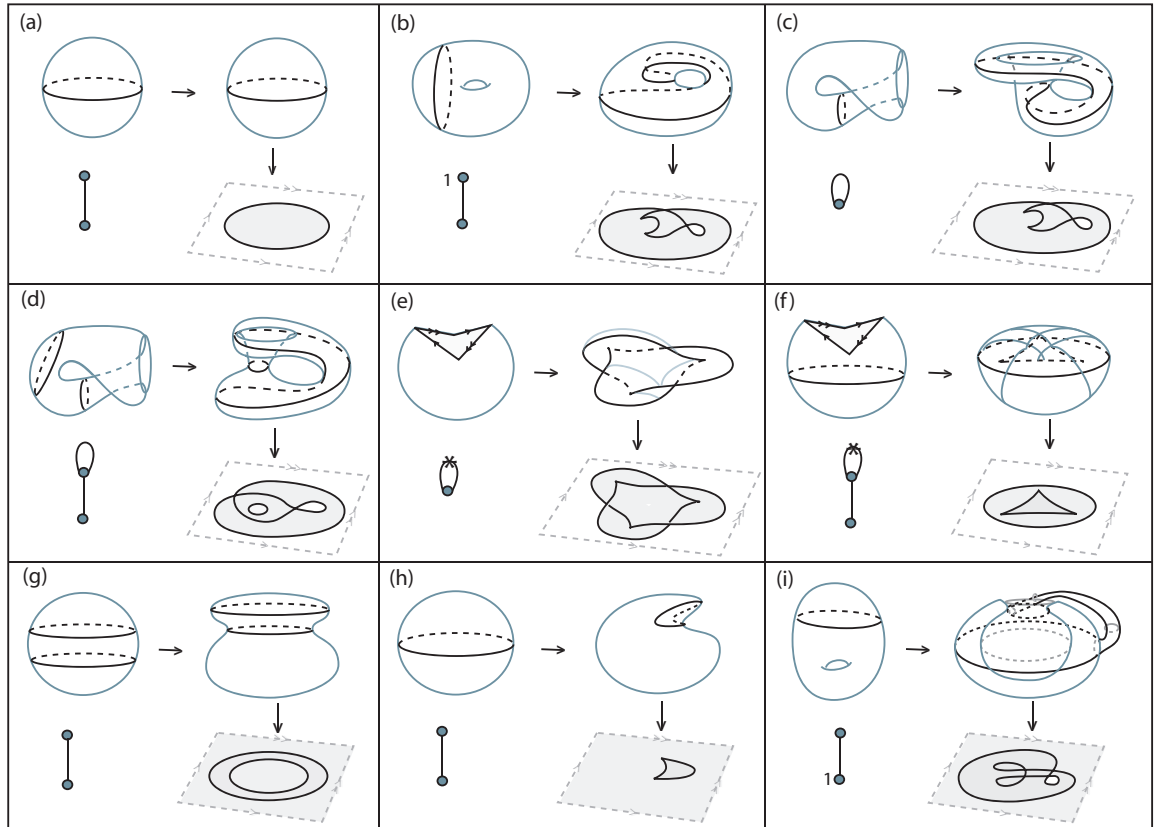


Figura 3.14: Algumas aplicações básicas

Qualquer grafo obtido através de cirurgias de outros grafos mais simples realizáveis por aplicações estáveis, é ainda realizável.

Surge então a pergunta:

*“Quais as condições para que um grafo seja associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera?”*

## 3.2 Realização de Grafos

Nesta seção estamos interessados em saber quais grafos são realizados por aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, com grau arbitrário.

### 3.2.1 Grafos Bipartidos

O Teorema 3.27 e a Proposição 3.28 foram apresentados em [14]. Uma demonstração mais detalhada e exemplificada pode ser encontrada em [19].

**Teorema 3.27** [14] *Um grafo  $G$  é realizável por uma aplicação da esfera na esfera, com grau arbitrário se, e somente se,  $G$  é árvore, com todos os pesos iguais a zero.*

**Proposição 3.28** [14] *Todo grafo do tipo árvore com peso total  $W$  pode ser realizado por uma aplicação estável, com grau arbitrário, de alguma superfície fechada e orientada  $M$  em  $S^2$ .*

**Observação 3.29** *Todo grafo  $G$  contém um subgrafo que chamaremos de árvore maximal, a qual contém todos os vértices de  $G$ .*

**Lema 3.30** *Seja  $T$  uma árvore maximal do grafo  $G$  com peso nos seus vértices. Se  $T$  é realizada por uma aplicação estável, então  $G$  também o é.*

**Demonstração:** Seja uma árvore maximal  $T$  do grafo  $G$ , obtida após tirar  $B$  arestas de  $G$ , uma de cada ciclo.

Vamos assumir que  $T$  é realizada por uma aplicação  $f' : M' \rightarrow S^2$ , onde  $M'$  é uma superfície fechada e orientada. Para realizar uma aresta  $a_1 \in G \setminus T$ , fazemos uma cirurgia vertical sobre  $f'$  com ela mesma, nas regiões correspondentes aos vértices da aresta  $a_1$ , de onde obtemos  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$ .

Pela definição de cirurgia vertical, uma nova componente singular é criada e a aresta associada a esta componente fecha um ciclo.

Repetindo esse processo para todas as  $B$  arestas de  $G$  que foram retiradas para obter  $T$ , obtemos uma aplicação  $f : M_k \rightarrow S^2$ , que realiza o grafo  $G$ . □

Em [14], Hacon, Mendes e Romero, mostraram o teorema 3.31 utilizando a Proposição 3.28 e o Lema 3.30.

**Teorema 3.31** [14] *Todo grafo bipartido, com pesos inteiros positivos nos vértices, é grafo de alguma aplicação estável na esfera, com grau arbitrário, de uma superfície  $M$  fechada e orientada, com gênero  $g(M) = 1 - V + A + W$ .*

Este teorema garante a realização de todo grafo bipartido. Em [19], podemos encontrar uma demonstração mais detalhada. Apresentaremos a seguir, somente um esquema que facilita a realização deste grafo.

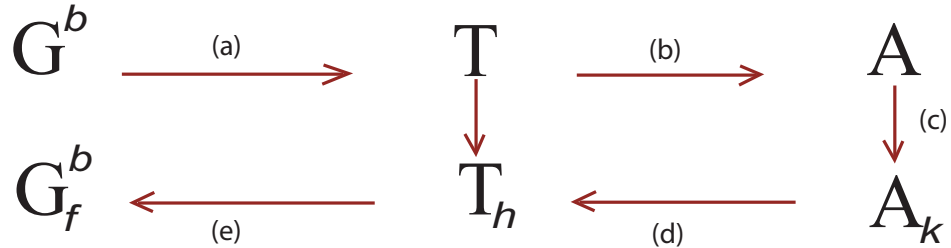


Figura 3.15: Esquema para realização de um grafo bipartido.

Dado um grafo bipartido  $G^b$  com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $W$  pesos, o número de Betti de  $G^b$  é  $\beta_1 = 1 - V + A$ , que corresponde ao número de ciclos do grafo.

- (a) Retirando uma aresta de cada ciclo de  $G^b$ , obtemos uma árvore maximal  $T$  do grafo  $G^b$  contendo todos os vértices e pesos do grafo.
- (b) Retirando todos os pesos de  $T$ , obtemos a árvore maximal  $A$  com peso zero.
- (c) Pelo Teorema 3.27, toda árvore com peso zero pode ser associada a uma aplicação estável da esfera na esfera. Assim, existe uma aplicação  $k : S^2 \rightarrow S^2$  que realiza  $A$ .
- (d) Com cirurgias horizontais das aplicações básicas sobre  $k$ , acrescentamos peso e grau. Desse modo, construímos uma aplicação estável  $h : N \rightarrow S^2$  com grau  $d$  que realiza  $T$ , onde  $N$  é uma superfície orientada.
- (e) Com cirurgias verticais sobre  $h$ , fechamos os ciclos. Desse modo, construímos uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  com grau  $d$  que realiza  $G^b$ , onde  $M$  é uma superfície orientada.

### 3.2.2 Grafos com único vértice

Denotaremos por  $L_m^k$  os grafos com  $m$  arestas e  $k$  laços.

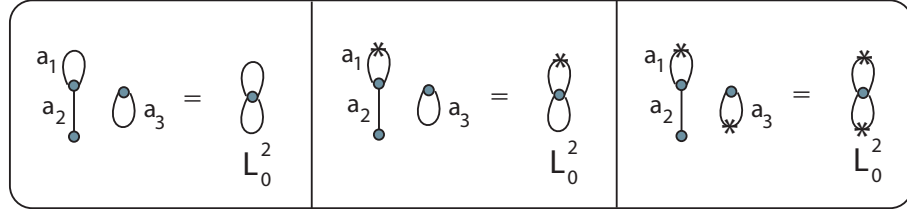


Figura 3.16: Diferentes grafos do tipo  $L_0^2$ .

**Exemplo 3.32** A Figura 3.16 ilustra três grafos diferentes com zero arestas e dois laços, obtidos através da cirurgia horizontal entre as arestas  $a_2$  e  $a_3$ , definida e exemplificada na subseção 3.1.1.

**Exemplo 3.33** A Figura 3.17 ilustra uma forma de obter um grafo com único vértice e quatro laços. Em (a), o grafo com dois vértices, uma aresta e três laços foi obtido pela cirurgia horizontal nas curvas correspondentes às arestas  $a_1, a_2$  e  $a_3$ . Em (b), o grafo com único vértice e quatro laços foi obtido pela cirurgia horizontal como no Exemplo 3.32.

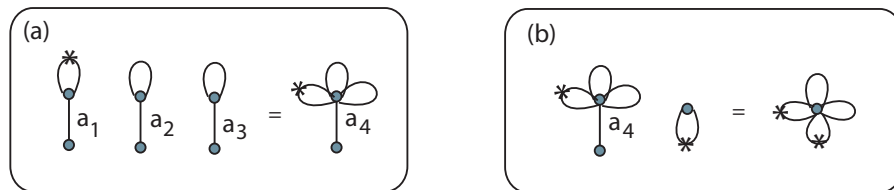


Figura 3.17: Grafo com único vértice e quatro laços.

**Proposição 3.34** Qualquer grafo com único vértice com peso  $l$  e  $k$  laços, pode ser realizado por uma aplicação de uma superfície fechada e não orientada na esfera, com grau zero.

**Demonstração:** A aplicação da garrafa de Klein na esfera com única curva singular realiza o grafo com uma aresta sem asterisco e um vértice, como ilustra a Figura 3.14 (c). A aplicação do plano projetivo na esfera com única curva singular realiza o grafo com uma aresta com asterisco e um vértice, como pode ser verificado no Exemplo 2.16.

Para realizar um grafo do tipo  $L_0^k$ , primeiramente podemos realizar  $k - 2$  cirurgias horizontais entre  $k - 1$  aplicações associadas a grafos do tipo  $L_1^1$ , obtendo uma aplicação  $h$  que realiza o grafo do tipo  $L_1^{k-1}$ . Fazendo cirurgia horizontal entre uma aplicação associada a grafo do tipo  $L_0^1$  com a aplicação  $h$  obtemos uma aplicação  $f$  que realiza o grafo  $L_0^k$ .

Esta construção não depende se o laço tem ou não asterisco. Para realizar o peso  $l$  basta somar  $k$  vezes uma aplicação do toro com única curva singular, que separa um disco do toro menos um disco, a qual corresponde ao grafo com única aresta e peso um como ilustra a Figura 3.14(b).  $\square$

### 3.2.3 Grafos Arbitrários

**Definição 3.35** Dizemos que o grafo  $G^b$  é um *subgrafo bipartido maximal* de um grafo  $G$  se  $G^b$  pode ser obtido ao eliminar uma aresta de cada ciclo ímpar de  $G$ , contendo todos os vértices e pesos de  $G$ .

**Lema 3.36** Se um subgrafo bipartido maximal  $G^b$  do grafo  $G$  é realizado por uma aplicação estável, então  $G$  também o é.

**Demonstração:** Suponhamos que  $G$  tenha  $B$  ciclos ímpar e  $G^b$  é obtido de  $G$  ao retirar uma aresta de cada ciclo ímpar.

Vamos assumir que  $G^b$  é realizado por uma aplicação estável  $f' : M' \rightarrow S^2$ , onde  $M'$  é uma superfície fechada e orientada.

Pela Proposição 3.34, os laços são realizados por uma aplicação  $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$ , onde  $M_1$  é uma superfície fechada e não orientada. Pela demonstração do Lema 3.30, as arestas  $a_i \in G \setminus G^b$  são realizadas através de cirurgias verticais de  $f_1$  com ela mesma.

Repetindo esse processo para todas as  $B$  arestas de  $G$  que foram retiradas para obter  $G^b$ , obtemos uma aplicação  $f_k : M_k \rightarrow S^2$ , que realiza o grafo  $G$ .  $\square$

Em [15], Hacon, Mendes e Romero generalizaram o Teorema 3.31 para grafos quaisquer.

**Teorema 3.37** [15] *Todo grafo com pesos inteiros positivos arbitrários nos vértices é realizado por uma aplicação estável de uma superfície fechada na 2-esfera.*

**Demonstração:** Seja  $G$  um grafo com pesos inteiros positivos nos vértices e  $G^b$  um subgrafo bipartido de  $G$ .

Pelo Teorema 3.31,  $G^b$  é realizado por uma aplicação estável, com grau arbitrário, de alguma superfície  $M$  fechada e orientada, na esfera.

Pelo Lema 3.36,  $G$  é realizado por uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$ .  $\square$

A seguir, apresentamos um esquema para a realização de um grafo com pesos arbitrários nos seus vértices.

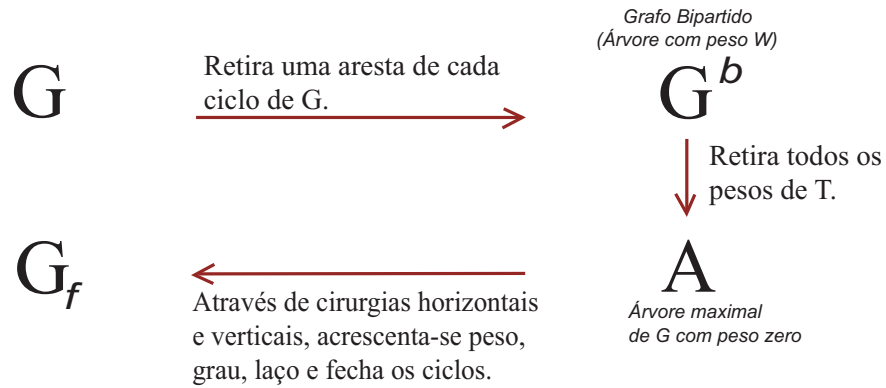


Figura 3.18: Esquema para realização de um grafo.

### 3.2.4 Algoritmo para a realização de um grafo

Para a realização de um dado grafo, apresentaremos um algoritmo que pode auxiliar na construção de uma aplicação estável na esfera.

Dado um grafo  $G$  :

- (1) Retirando todos os pesos de  $G$  e uma aresta de cada ciclo de  $G$  ( $A \geq 2$ ), obtemos um grafo  $L$ , como ilustra a Figura 3.19. Retirando todos os laços de  $L$ , obtemos um grafo bipartido  $T_1$ .

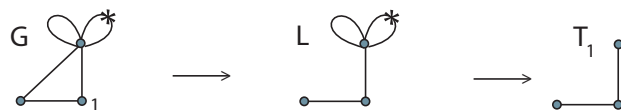


Figura 3.19: Retirando arestas e laços de um grafo.

- (2) Pelo Teorema 3.31, todo grafo bipartido está associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na esfera. Realizamos  $T_1$  com uma aplicação básica da esfera na esfera com grau um, ilustrada na Figura 3.14.
- (3) Com cirurgia horizontal nos pontos  $p_1, q_1$  e  $p_2, q_2$  realizamos o grafo  $L$ , como pode ser visto na Figura 3.20.

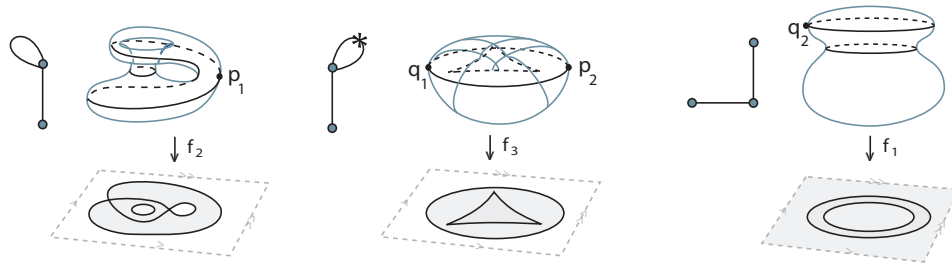


Figura 3.20: Aplicações na esfera.

- (4) Com cirurgia horizontal de aplicações que realizam grafos com única aresta e peso  $(1,0)$ , realizamos os pesos de  $G$ . E com cirurgia vertical, realizamos as arestas complementares a  $L$  em  $G$ , obtendo assim, uma aplicação que realiza  $G$ , como pode ser visto na Figura 3.21.

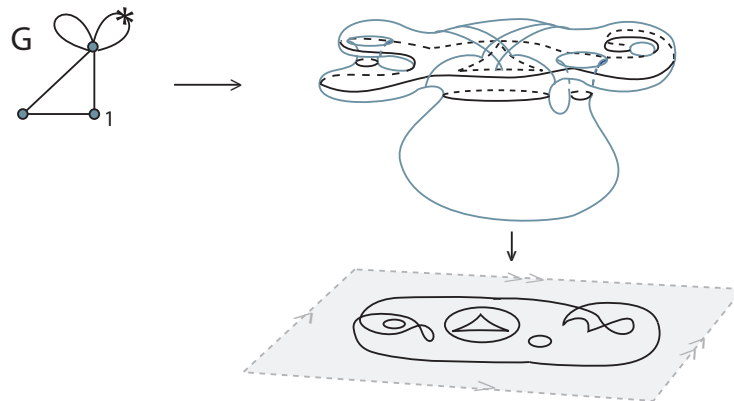


Figura 3.21: Realização de um grafo.

No próximo capítulo, vamos estudar as aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, levando em consideração o grau da aplicação, o número mínimo de cúspides e o número mínimo de pontos duplos do seu contorno aparente.

# Capítulo 4

## Contorno Minimal de Aplicações Estáveis entre Superfícies

Neste capítulo, estudaremos o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, tomando como principal referência o trabalho de Kamenosono - Yamamoto [4], que aplica resultados de Quine [27] e generaliza resultados de Pignoni [5].

O objetivo deste capítulo é estudar o contorno minimal de aplicações estáveis de superfícies fechadas na esfera, levando-se em consideração o grau da aplicação, o número de cúspides e número de pontos duplos do seu contorno aparente.

Em [4], foram utilizados resultados importantes, como o Teorema de Quine, disponível em [27], uma proposição devido a Levine [20] e uma proposição devido a Quine [28].

### 4.1 Contorno Aparente na $S^2$

Nesta seção, estudaremos os contornos aparentes de aplicações estáveis  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. Neste caso, o contorno aparente  $\gamma(f)$  é a união finita de curvas  $\gamma_i = f(\alpha_i)$ , onde  $\alpha_i \in \Sigma f$ . As principais referências são [4] e [5].

Se o conjunto singular de  $f$  é não vazio, denota-se por  $m(f)$  o menor número de elementos do conjunto  $f^{-1}(y)$ , onde  $y \in S^2$  percorre todos os valores regulares de  $f$ . Fixado um valor regular  $\infty$  tal que  $f^{-1}(\infty)$  consiste de  $m(f)$  pontos, denote por  $U_i$  a componente de  $S^2 - \gamma_i$  que contém  $\infty$ .

Observe que  $\partial U_i \subset \gamma_i$ . A Figura 4.1, correspondente a imagem da Figura 2.1, ilustra um

exemplo onde os bordos de  $U_2$  e  $U_3$  coincidem com as curvas  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  respectivamente, enquanto que o bordo de  $U_1$  corresponde a um arco da curva  $\gamma_1$ .

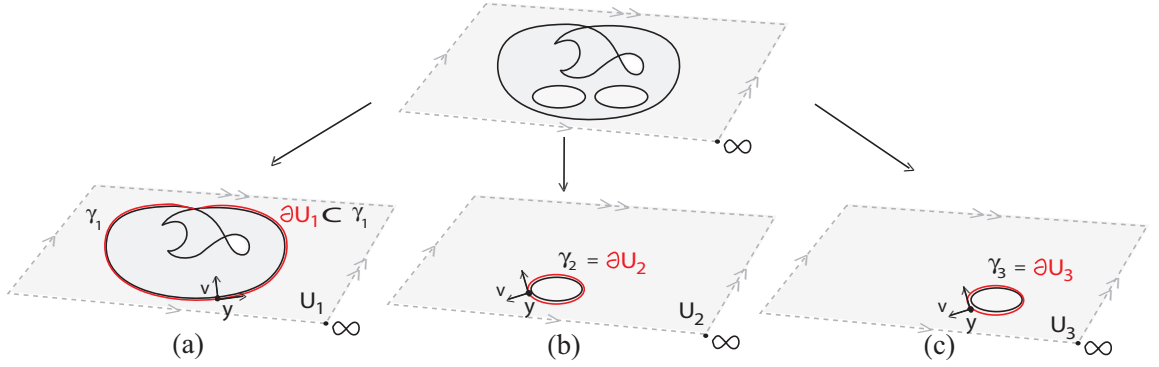


Figura 4.1: Componente  $U_i$

Considere a orientação de  $\gamma_i$  como na Definição 1.63. Oriente  $S^2$  pelo par ordenado  $(\tau, v)$ , onde  $\tau$  e  $v$  são vetores tangente e normal de  $\gamma_i$  com respeito a orientação de  $\gamma_i$ .

**Definição 4.1** A orientação descrita acima é chamada de **orientação canônica** de  $\gamma_i$ .

**Definição 4.2** Um ponto  $y \in \partial U_i \setminus \{\text{cúspides, pontos duplos}\}$  é **positivo** se a orientação normal  $v$  em  $y$  aponta para  $U_i$ . Caso contrário, ele é **negativo**.

Uma componente  $\gamma_i$  é **positiva** se todos os pontos de  $\partial U_i \setminus \{\text{cúspides, pontos duplos}\}$  são positivos. Caso contrário, se o  $\partial U_i \setminus \{\text{cúspides, pontos duplos}\}$  possuir um ponto negativo,  $\gamma_i$  é **negativa**.

**Definição 4.3**  $\eta(\gamma_i) = 1$ , se  $\gamma_i$  tem orientação positiva e  $\eta(\gamma_i) = -1$ , caso contrário.

Uma consequência imediata da Definição 4.3 é a seguinte observação:

**Observação 4.4**  $\eta(\gamma_i) = 1$  se, e somente se,  $\gamma_i$  é uma componente negativa.

**Exemplo 4.5** A componente  $\gamma_1$  da Figura 4.1 (a) é negativa, pois  $y$  é um ponto negativo e pela Observação 4.4,  $\eta(\gamma_1) = 1$ . Em (b) e (c) da mesma figura, as componentes  $\gamma_i$ ,  $i = 2, 3$ , são positivas, pois o  $\partial U_i \setminus \{\text{cúspides, pontos duplos}\}$  não possui nenhum ponto negativo. Além disso, como essas componentes têm orientação negativa, pela Definição 4.3,  $\eta(\gamma_i) = -1$ ,  $i = 2, 3$ .

**Notação:**  $i^+$  e  $i^-$  correspondem ao número total de componentes  $\gamma_i$ , positivas e negativas, respectivamente.

**Observação 4.6** Se  $f : M \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável onde  $M$  é uma superfície fechada, o contorno aparente de  $f$  tem pelo menos uma componente negativa, a menos que o conjunto singular de  $f$  seja vazio. Consequentemente, se o contorno aparente de  $f$  é irredutível, o número  $1 + i^+ - i^- = 0$ , pois o conjunto singular de  $f$  tem apenas uma componente singular e  $i^+ = 0$  e  $i^- = 1$ .

**Definição 4.7** Um ponto  $y \in \partial U_i \setminus \{\text{cúspides, pontos duplos}\}$  é dito **ponto base** se

1.  $y$  é um ponto positivo de uma componente positiva  $\gamma_i$ , ou
2.  $y$  é um ponto negativo de uma componente negativa  $\gamma_i$ .

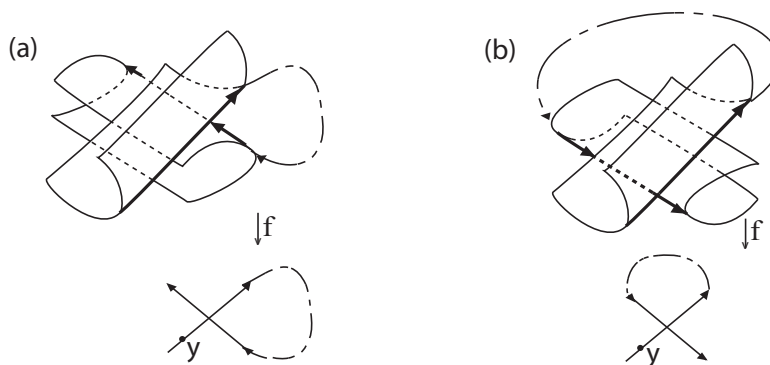


Figura 4.2: (a) : ponto duplo positivo e (b) : ponto duplo negativo.

Sejam  $y \in \gamma_i$  um ponto base e  $Q \in \gamma_i$  um ponto duplo. Considere  $\mu : [0, 1] \rightarrow \gamma_i$  uma parametrização positiva (com orientação positiva), que é singular somente quando a imagem é um ponto de cúspide tal que  $\mu^{-1}(y) = \{0, 1\}$ . Existem dois números  $0 < t_1 < t_2 < 1$  satisfazendo  $\mu(t_1) = \mu(t_2) = Q$ .

**Definição 4.8**  $Q$  é um **ponto duplo positivo** (Figura 4.2 (a)) se o par ordenado  $(\mu'(t_1), \mu'(t_2))$  induz a mesma orientação com respeito à  $S^2$ . Caso contrário,  $Q$  é um **ponto duplo negativo** (Figura 4.2 (b)).

**Notação:**  $N_i^+$  e  $N_i^-$  correspondem ao número de pontos duplos positivos e negativos de  $\gamma_i$ , respectivamente.

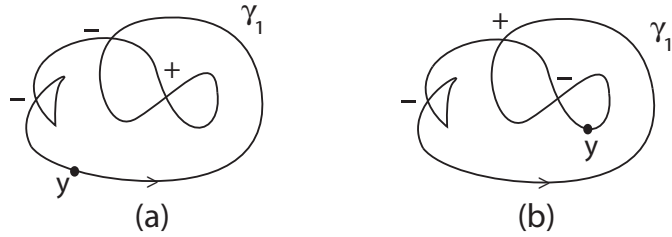


Figura 4.3: Ponto base em diferentes locais.

**Exemplo 4.9** A Figura 4.3 ilustra o ponto base em diferentes locais de uma mesma componente  $\gamma_1$ . Ao percorrer a curva de acordo com a orientação canônica, os sinais do primeiro e do segundo ponto duplo encontrados, invertem ao trocar o ponto base de lugar. Por outro lado, como  $N_1^+ = 1$  e  $N_1^- = 2$  em (a) e em (b), o número algébrico  $N_1^+ - N_1^-$  permanece o mesmo ao trocar o ponto base de lugar.

A definição de ponto duplo positivo ou negativo em  $\gamma_i$  depende da escolha de um ponto base  $y$ . Contudo, o número algébrico  $N_i^+ - N_i^-$  de cada componente de um contorno aparente não depende da escolha de  $y$ , como pode ser visto no Exemplo 4.9. Assim, o número algébrico  $N^+ - N^- = \sum_{i=1}^k (N_i^+ - N_i^-)$  está bem definido.

**Exemplo 4.10** A Figura 4.4 ilustra uma aplicação do toro na esfera de grau zero com duas componentes conexas, onde apenas  $\gamma_1$  apresenta pontos duplos,  $N_1^+ = 3$  e  $N_1^- = 1$ . Os pontos duplos  $p$  e  $q$ , resultantes da interseção de  $\gamma_1$  com  $\gamma_2$ , não são positivos nem negativos visto que, ao percorrer o contorno aparente da aplicação, passamos por esses pontos apenas uma vez.

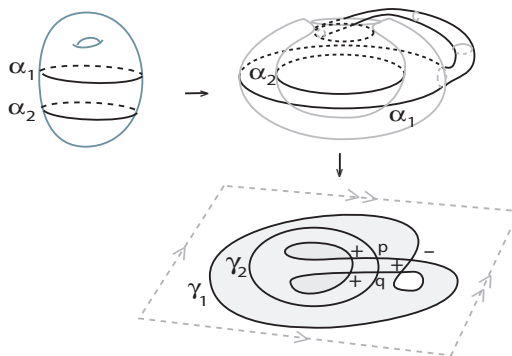


Figura 4.4: Interseção de componentes.

**Observação 4.11** Se  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  são duas componentes disjuntas, os pontos duplos resultantes de  $\gamma_i \cap \gamma_j$  ( $i \neq j$ ) não desempenham nenhum papel na soma do número total de pontos duplos.

**Lema 4.12** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera. Se  $D_\infty$  é uma vizinhança de  $\infty$  em  $S^2 \setminus \gamma(f)$  e  $\tilde{M} = M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , então*

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M) - m(f).$$

**Demonstração:** Por hipótese,  $\tilde{M} = M \setminus f^{-1}(D_\infty)$ , então a superfície  $M$  pode ser decomposta da seguinte forma:  $M = \tilde{M} \cup D_\infty^i$ . Pela Proposição 1.26,

$$\chi(M) = \chi(\tilde{M}) + \chi\left(\bigcup_{i=1}^{m(f)} D_\infty^i\right) - \chi(\tilde{M} \cap D_\infty^i) \quad (4.1)$$

Pela Proposição 1.27,  $\chi\left(\bigcup_{i=1}^{m(f)} D_\infty^i\right) = \sum_{i=1}^{m(f)} \chi(D_\infty^i)$ . Como  $\tilde{M} \cap D_\infty^i = S^1$  e  $\chi(S^1) = 0$ , temos que  $\chi(\tilde{M} \cap D_\infty^i) = 0$ .

Substituindo o valor da característica de Euler da interseção entre  $\tilde{M}$  e  $D_\infty^i$  e o valor da característica de Euler da união dos discos  $D_\infty^i$ , na equação 4.1 temos:

$$\chi(M) = \chi(\tilde{M}) + \sum_{i=1}^{m(f)} \chi(D_\infty^i) \quad (4.2)$$

Mas  $\sum_{i=1}^{m(f)} \chi(D_\infty^i) = m(f)$ , pois  $\chi(D_\infty^i) = 1$ ,  $i = 1, \dots, m(f)$ .

Substituindo o valor do somatório em 4.2, segue que  $\chi(\tilde{M}) = \chi(M) - m(f)$ .

□

As Proposições 4.13 e 4.14 podem ser encontradas em [20] e [28] e serão utilizadas na demonstração da Proposição 4.16.

**Proposição 4.13** [20] *Considere  $P$  uma superfície compacta com bordo e  $h : P \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação estável satisfazendo  $\Sigma(h) \cap \partial P = \emptyset$ . Então,*

$$\chi(P) = \sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \tau(e_j),$$

onde  $\gamma_i$  e  $e_j$  denotam a componente irredutível de  $\gamma(h)$  e a componente irredutível de  $h(\partial P)$  respectivamente e  $\tau(\gamma_i), \tau(e_j)$  denotam o dobro do número de voltas que faz os vetores unitários tangentes a  $\gamma_i$  e  $e_j$  respectivamente.

**Proposição 4.14** [28] *Seja  $\alpha$  uma curva plana fechada. Então:*

$$\tau(\alpha) = 2\eta(\alpha) + 2n^+ - 2n^- + c^+ - c^-,$$

onde  $\eta(\alpha) = \pm 1$  é definido de acordo com a orientação da curva  $\alpha$ ,  $c^+$  ou  $(c^-)$  denota o número de cúspides positivas (respectivamente negativas) de  $\alpha$  e  $n^+$  ou  $(n^-)$  o número de pontos duplos positivos (respectivamente negativos) de  $\alpha$ .

**Observação 4.15** *Os números de pontos duplos positivos e negativos de uma curva plana fechada  $\alpha$ ,  $n^+$  e  $n^-$ , apresentados na fórmula da Proposição 4.14, correspondem ao número de pontos duplos negativos e positivos de  $\gamma_i$ ,  $N_i^-$  e  $N_i^+$ , respectivamente.*

**Proposição 4.16** *Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de uma superfície fechada na esfera. O gênero de  $M$  é dado por:*

$$g(M) = \varepsilon(M) \left[ (N^+ - N^-) + \frac{c(f)}{2} + (1 + i^+ - i^-) - m(f) \right], \quad (4.3)$$

onde  $\varepsilon(M)$  é igual a 1 se  $M$  é orientável e 2 caso contrário.

**Demonstração:** Dada uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada, primeiramente escolha um ponto  $\infty$  em  $S^2 \setminus \gamma(f)$  que tem o menor número de pré-imagens, ou seja,  $f^{-1}(D_\infty)$  tem  $m(f)$  discos abertos.

Como  $S^2 \setminus \gamma(f)$  é aberto, existe uma vizinhança de  $\infty$   $D_\infty$  contida em  $S^2 \setminus \gamma(f)$ . Vamos denotar por  $\tilde{M} = M \setminus f^{-1}(D_\infty)$  a superfície obtida ao retirar  $m(f)$  discos abertos de  $M$ . Pelo Lema 4.12,  $\chi(\tilde{M}) = \chi(M) - m(f)$ . O conjunto de todas as componentes de bordo de  $\tilde{M}$ ,  $\partial(\tilde{M})$  consiste da união disjunta de  $m(f)$  círculos  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m(f)}$ , ou seja  $\partial(\tilde{M}) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{m(f)}$ .

Considere a aplicação  $l = i \circ f|_{\tilde{M}} : \tilde{M} \rightarrow S^2 \setminus D_\infty \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $i : S^2 \setminus D_\infty \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma inclusão. Podemos obter uma aplicação estável  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfazendo  $\tilde{f}(\alpha_i) \cap \tilde{f}(\alpha_j) = \emptyset$ , se  $i \neq j$ , e  $\Sigma(\tilde{f}) \cap \partial(\tilde{M}) = \emptyset$ , por uma pequena perturbação de  $l$  (afastando a imagem de um dos bordos de  $\tilde{M}$ ). Pela Observação 2.1,  $\gamma(\tilde{f})$  identifica com  $\gamma(f)$ .

Pela Proposição 4.14 e pela Observação 4.15, o dobro do número de voltas do vetor tangente a  $\gamma_i$ ,  $\tau(\gamma_i)$  é dado por

$$\tau(\gamma_i) = 2\eta(\gamma_i) + 2N_i^- - 2N_i^+ - c_i, \quad (4.4)$$

onde  $c_i$  denota o número de cúspides de  $\gamma_i$ .

Aplicando o somatório em ambos os lados da igualdade 4.4, tem-se pela Observação 4.4, que

$$\sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) = 2i^- - 2i^+ + 2N^- - 2N^+ - c(f). \quad (4.5)$$

Cada  $f(\alpha_j)$  é uma curva fechada e simples com índice do campo tangente igual a 1, logo  $\tau(f(\alpha_j)) = 2$ .

Por outro lado, como  $\gamma(\tilde{f})$  identifica com  $\gamma(f)$  e a componente irredutível  $e_j$ , na Proposição 4.13, corresponde a curva  $\tilde{f}(\alpha_j)$  no plano, então  $2 = \tau(f(\alpha_j)) = \tau(e_j)$ . Aplicando o somatório em ambos os lados, temos

$$\sum_1^{m(f)} (\tau(e_j)) = \sum_1^{m(f)} 2 = 2m(f). \quad (4.6)$$

Pela Proposição 4.13,

$$\chi(M) - m(f) = \chi(\tilde{M}) = \sum_{i=1}^k \tau(\gamma_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \tau(e_j). \quad (4.7)$$

Substituindo os valores dos somatórios encontrados em 4.5 e 4.6, na equação 4.7, temos:

$$\chi(M) - m(f) = 2i^- - 2i^+ + 2N^- - 2N^+ - c(f) + m(f). \quad (4.8)$$

Se  $M$  é orientável, pelo corolário 1.39,  $\chi(M) = 2 - 2g(M)$ . Substituindo em 4.8, segue que

$$g = \left[ (N^+ - N^-) + \frac{c(f)}{2} + (1 + i^+ - i^-) - m(f) \right].$$

Se  $M$  é não orientável, pelo corolário 1.39,  $\chi(M) = 2 - g(M)$ . Substituindo em 4.8, segue que

$$g = 2 \left[ (N^+ - N^-) + \frac{c(f)}{2} + (1 + i^+ - i^-) - m(f) \right].$$

□

## 4.2 Contorno Irredutível e Contorno Minimal

Nesta seção, classificaremos os contornos aparentes de aplicações estáveis  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada. Essa classificação é feita em relação às componentes conexas do conjunto singular  $\Sigma f$ , ao número de cúspides e o número de auto-interseções de  $f$ . As principais referências são [4] e [5].

**Definição 4.17** O *contorno irreduzível* de  $f : M \rightarrow S^2$ , onde  $M$  é uma superfície fechada, é o seu contorno aparente, quando o conjunto singular  $\Sigma f$  consiste de uma única componente.

Segundo Èliasberg [6], para cada aplicação  $f : M \rightarrow S^2$  de classe  $C^\infty$ , existe uma aplicação estável  $h$  que é homotópica a  $f$ , cujo contorno é irreduzível.

**Exemplo 4.18** A Figura 4.5 ilustra uma sequência de aplicações, sendo que o contorno aparente da primeira aplicação tem duas componentes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , onde  $\gamma_1$  não tem cúspides e  $\gamma_2$  tem três cúspides e tem como vizinhança da curva singular uma faixa de Moebius. A última aplicação tem contorno irreduzível, com três cúspides e três auto-interseções. Passando por três transições do tipo rabo de andorinha sobre a componente  $\gamma_1$ , obtém-se  $\gamma'_1$ , de modo que a segunda cúspide de cada rabo de andorinha esteja sobre a mesma componente que as três cúspides de  $\gamma_2$ , permitindo a transição bicos entre essas cúspides. Passando por três transições do tipo bicos, obtém-se o contorno irreduzível, ou seja, com única componente singular.

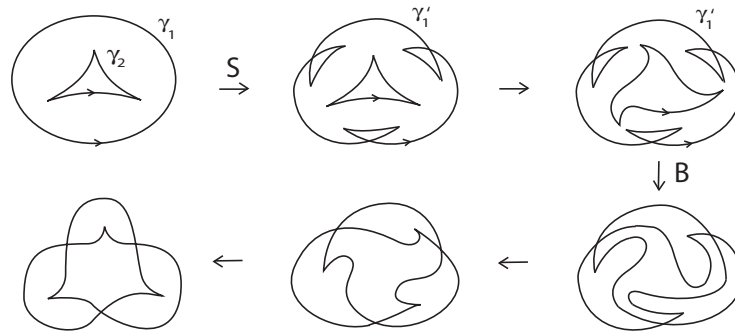


Figura 4.5: Homotopia entre aplicações estáveis do plano projetivo.

**Observação 4.19** Cada aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  tem um ponto singular, a menos que  $M$  corresponda a  $S^2$ , pois pela Definição 1.57,  $\Sigma f = \{p \in M / \text{posto } df_p < 2\}$ , mas o posto  $df = 2$ , logo  $\Sigma f = \emptyset$ . Neste caso,  $f$  é homotópica a aplicação identidade.

**Notação:** O número de cúspides será denotado por  $c$  e o número de pontos duplos será denotado por  $n$ , onde  $n = N^+ + N^-$ .

Seja  $f : M \rightarrow S^2$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ , cujo contorno aparente  $\gamma$  é irreduzível.

**Definição 4.20** Se  $c + n$  assume o menor valor possível (para qualquer contorno irreduzível de  $M$ ),  $\gamma$  será chamado de *contorno minimal*.

**Exemplo 4.21** *Podemos ver como contornos minimais o contorno aparente das seguintes aplicações:*

1. *Aplicação de grau um do toro na esfera, sem pontos duplos como ilustrado na Figura 3.10. Neste caso, o contorno minimal possui quatro cúspides e nenhum ponto duplo. Fazendo sucessivas cirurgias horizontais como nesta figura, podemos concluir que o contorno minimal de aplicações estáveis do  $k$ -toro na esfera, com grau um e sem pontos duplos, possui  $2k+2$  cúspides, pois a cada cirurgia, acrescentamos o número de cúspides por dois, sempre que acrescentamos o gênero da superfície do domínio da aplicação por um.*
2. *Aplicação de grau um do toro na esfera, com única curva singular como ilustrado na Figura 3.14 (i). Neste caso o contorno minimal possui quatro pontos duplos e nenhuma cúspide.*

**Lema 4.22** *Se  $\gamma(f)$  tem um único ponto duplo  $Q$ , então  $Q$  é um ponto duplo negativo.*

**Demonstração:** Sejam  $Q$  um ponto duplo positivo de  $\gamma(f)$  e  $y$  um ponto base. Ao percorrer  $\gamma(f)$ , a partir de  $y$ , seguindo a sua orientação canônica, quando passamos por  $Q$  pela primeira vez, o número de pré - imagens diminui por dois, como pode ser visto na Figura 4.2. Isto é uma contradição, pois deveríamos ter ganhado um par de pontos antes, o que só é possível se passarmos por um ponto duplo negativo. □

No que segue esta seção, vamos assumir que o contorno de uma aplicação estável  $f : M \rightarrow S^2$  é irredutível e tem apenas um ponto duplo negativo  $p_0$ . Fixe um ponto base  $y \in \gamma(f)$  e denote por  $U$  a componente de  $S^2 \setminus \gamma(f)$  que contém  $\infty$ .

**Observação 4.23** *O primeiro ponto duplo encontrado (que pertence ao  $\partial U$ ), tem que ser negativo pela demonstração do Lema 4.22.*

**Notação:** Para cada ponto duplo positivo  $p \in \gamma(f)$ , denote por  $C_p$  o laço completo começando e terminando em  $p$  descrito ao longo do contorno uma vez, começando por  $y$  e seguindo a orientação canônica de  $\gamma(f)$ .

Observe que para cada  $p$ , tal laço é único porque  $\gamma(f)$  é irredutível.

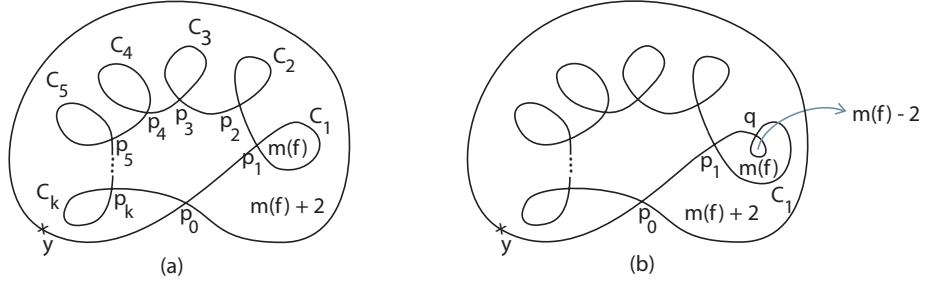


Figura 4.6: Laços e auto-interseções.

Como vemos na Figura 4.6,  $p_0$  é um ponto duplo negativo. Os laços  $C_1, \dots, C_k$  estão associados à  $p_1, \dots, p_k$ , e  $q \in C_1$  é o próximo ponto duplo encontrado depois de passar por  $p_1$  pela primeira vez.

**Observação 4.24** *Se atravessarmos  $p_1$  pela primeira vez, perdemos dois pontos na imagem inversa de  $f$ . Isto significa que para cada ponto na região situada a nossa esquerda descrito ao longo de  $C_1$ , o número de pré-imagens de  $f$  é igual a  $m(f) + 2$ , pelo menos até encontrarmos o próximo ponto duplo.*

**Observação 4.25** *Observemos na Figura 4.6 que  $q \neq p_0$ , porque antes de chegarmos em  $p_0$ , temos que passar por  $y$ , mas  $y \notin C_1$  e porque antes de passar por  $p_0$  pela segunda vez, o número de pré-imagens de um ponto imediatamente a nossa esquerda deve ser  $m(f) + 4$ .*

**Observação 4.26** *Observemos na Figura 4.6 que se  $q \neq p_1, q = p_2$ , ou ... ou  $q = p_k$ . Então, existe uma região que é adjacente a  $q$  tal que para cada ponto na região, o número de pré-imagens é igual a  $m(f) - 2$ . Isto é uma contradição. Então,  $q = p_1$ . Assim, o único ponto duplo no fecho de  $C_1$  é  $p_1$ .*

**Proposição 4.27** *O laço  $C_p$  não contém ponto duplo, exceto  $p$ .*

**Demonstração:** Sejam  $p_0, p_1, \dots, p_k \in \gamma(f)$  pontos duplos. Eles estão indexados de acordo com a sua ordem de aparição ao longo de  $\gamma(f)$ . O ponto  $p_0$  é um ponto duplo negativo, e os outros são pontos duplos positivos. Denote por  $C_1, \dots, C_k$  os laços associados a  $p_1, \dots, p_k$ .

Pela Observação 4.26, o único ponto duplo no fecho de  $C_1$  é  $p_1$ .

Suponha que estabelecemos o lema para os pontos duplos  $p_1, \dots, p_s$ . Vamos provar para  $p_{s+1}$ . Em primeiro lugar,  $C_{s+1}$  não intersecta cada  $p_1, \dots, p_s$ . Por indução, podemos generalizar a Observação 4.24 para  $C_{s+1}$ . Isso mostra que  $C_{s+1}$  não contém cada um dos pontos  $p_0, p_{s+2}, \dots, p_k$ , pelas mesmas razões discutidas nas Observações 4.25 e 4.26.  $\square$

### 4.3 Contorno Minimal de Aplicações de Superfícies Orientadas

Em [2], Demoto estudou o contorno minimal de uma aplicação estável da esfera na esfera e obteve o seguinte teorema:

**Teorema 4.28** *Seja  $f : S^2 \rightarrow S^2$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ , com  $\deg(f) \geq 2$ . O contorno minimal de  $f$  possui exatamente  $2\deg(f)$  cúspides e nenhuma auto-interseção.*

A demonstração deste teorema encontra-se com mais detalhes em [19].

**Exemplo 4.29** *As aplicações estáveis entre duas 2-esferas, construídas na Figura 4.7, realizam o contorno minimal com  $2\deg(f)$  cúspides cada e nenhuma auto-interseção, onde  $\deg(f)$  é o grau da aplicação dada. A medida que aumenta o grau, aumenta o número de cúspides do contorno minimal por dois, devido à cirurgia horizontal com uma aplicação  $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ , obtida a partir da aplicação identidade passando pela transição do tipo lábios.*

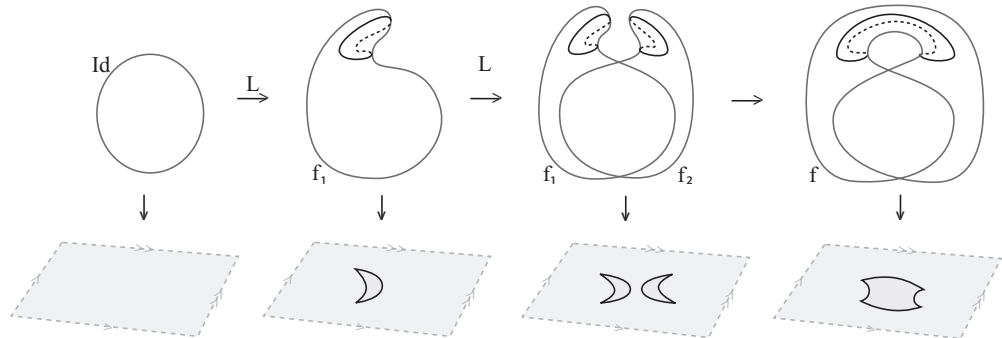


Figura 4.7: Realização de Contorno Minimal.

A partir de agora, vamos assumir  $g \geq 1$  e  $d \geq 0$ . Além disso, uma superfície fechada orientada, que é uma soma conexa de  $g$  cópias de um toro 2-dimensional  $T^2$ , será denotada por  $M_g$ .

**Observação 4.30** *Se  $M^+$  e  $M^-$  tem única componente conexa e  $M^+$  tem gênero  $\lambda$  com  $0 \leq \lambda \leq g$  então  $\chi(M_g^-) = \chi(M_{g-\lambda} \setminus D^2)$ .*

**Lema 4.31** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável com grau  $d$  cujo contorno é irreduzível. Se o número  $(g - d)$  é ímpar, então o contorno  $\gamma(f)$  tem pelo menos duas cúspides.*

**Demonstração:** Como  $f : M_g \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável de uma superfície orientada na esfera com grau  $d$ , pelo Teorema 2.9 temos que

$$\chi(M_g) - 2\chi(M_g^-) + \sum_i s(C_i) = 2d. \quad (4.9)$$

Pela Observação 4.30,  $\chi(M_g^-) = \chi(M_{g-\lambda} \setminus D^2)$ . Assim, substituindo em (4.9), temos que

$$\chi(M_g) - 2\chi(M_{g-\lambda} \setminus D^2) + \sum_i s(C_i) = 2d. \quad (4.10)$$

Pelo Corolário 1.39,  $\chi(M_g) = 2 - 2g$  e pelo Corolário 1.40,  $\chi(M_{g-\lambda} \setminus D^2) = 2 - 2(g - \lambda) - 1$ . Portanto, substituindo os valores das características de Euler de  $M_g$  e  $M_{g-\lambda} \setminus D^2$  em (4.10), segue que

$$2g - 4\lambda + \sum_i s(C_i) = 2d.$$

Se  $\gamma(f)$  não tem cúspides, então  $2g - 4\lambda = 2d \Leftrightarrow \lambda = \frac{g-d}{2}$ . Isto é uma contradição.  $\square$

**Observação 4.32** *Pelo Teorema 2.11, o número de cúspides para  $\gamma(f)$  é um número par.*

**Lema 4.33** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável com grau  $d$  cujo contorno é irredutível. Então, o contorno  $\gamma(f)$  tem pelo menos  $2(d - g)$  cúspides.*

**Demonstração:** Como  $f : M_g \rightarrow S^2$  é uma aplicação estável de uma superfície orientada na esfera com grau  $d$ , pelo Corolário 2.10, temos que:

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2d \right| \leq 2 - \chi(M_g).$$

Pela propriedade de módulo, segue que

$$-2 + \chi(M_g) \leq \sum_i s(C_i) - 2d \leq 2 - \chi(M_g). \quad (4.11)$$

Pelo Corolário 1.39,  $\chi(M_g) = 2 - 2g$ . Substituindo em (4.11) e somando  $2d$  em todos os termos de (4.11), temos:

$$2(d - g) \leq \sum_i s(C_i) \leq 2(d + g).$$

O sinal das cúspides coincide com o número de cúspides, pois se algum par de cúspides tiver sinais opostos, elas se cancelam na soma  $\sum_i s(C_i)$ . Portanto,  $\gamma(f)$  tem pelo menos  $2(d - g)$  cúspides.

$\square$

**Notação:** Uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na esfera com grau  $d$  e gênero  $g$  será denotada por  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ .

### 4.3.1 Construção de Aplicações com Contorno Minimal

Nesta subsecção, vamos construir aplicações estáveis com contorno minimal satisfazendo as seguintes condições: (i)  $d = 0$ , (ii)  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ , (iii)  $d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$ , (iv)  $d \geq g$ .

(i)  $d = 0$ :

Considere  $\pi : S^2 \rightarrow S^2$  a projeção trivial, tal que  $\deg(\pi) = 0$  e seu contorno aparente não possui cúspides (Figura 4.8 (a)).

Passando pela transição do tipo tangência de dobra  $T^-$  (quando as curvas de dobra tem orientações opostas) obtemos a aplicação  $f_{0,0} : S^2 \rightarrow S^2$ , tal que o seu contorno aparente  $\gamma(f_{0,0})$  possui dois pontos duplos e nenhuma cúspide (Figura 4.8 (b)).

Realizando a cirurgia vertical sobre a mesma aplicação  $V_1^0$ , na componente que contém duas pré-imagens, obtemos a aplicação  $f_{0,1} : T^2 \rightarrow S^2$  (Figura 4.8 (c)). Neste caso, o contorno aparente  $\gamma(f_{0,1})$  possui duas componentes conexas.

Passando pela transição do tipo tangência de dobra  $T^+$  (quando as curvas de dobra tem a mesma orientação) obtemos a aplicação  $f'_{0,1} : T^2 \rightarrow S^2$ , cujo contorno aparente possui quatro pontos duplos e nenhuma cúspide (Figura 4.8 (d)).

Realizando a cirurgia horizontal sobre a mesma aplicação  $H_1^0$ , obtemos a aplicação  $f_{0,2} : 2T^2 \rightarrow S^2$ , cujo contorno aparente possui quatro pontos duplos e nenhuma cúspide (Figura 4.8 (e)).

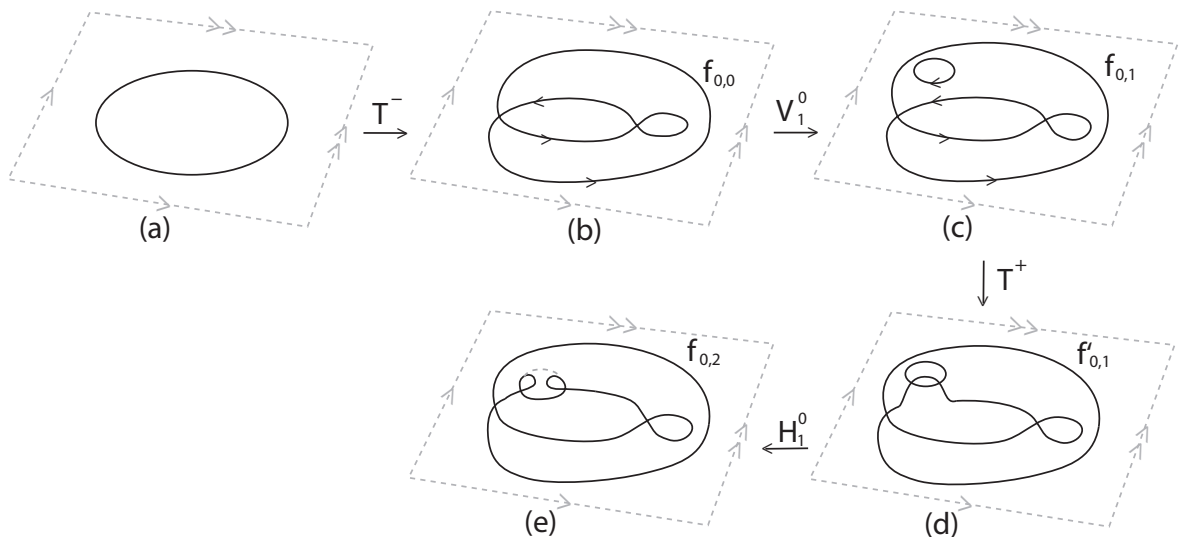


Figura 4.8: Construção de uma aplicação do bitoro na esfera com contorno minimal.

Generalizando a construção da Figura 4.8, temos:

1. Se  $g$  é par,  $g = 2k$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Realizando  $k$  cirurgias verticais do tipo  $V_1^0$  a partir da aplicação  $f_{0,0}$ , obtemos a aplicação  $f_{0,k} : kT^2 \rightarrow S^2$  cujo contorno aparente possui  $k + 1$  componentes, dois pontos duplos e nenhuma cúspide. Passando por  $k$  transições do tipo  $T^-$ , altera-se o número de pontos duplos por  $2k$ . Realizando  $k$  cirurgias horizontais sobre a nova aplicação, obtemos a aplicação  $f_{0,2k} : 2k T^2 \rightarrow S^2$  tal que o contorno aparente  $\gamma(f_{0,2k})$  possui  $2k + 2$  pontos duplos e nenhuma cúspide (Figura 4.9 (a)). Assim,  $c + n = 2k + 2 = g + 2$ .
2. Se  $g$  é ímpar,  $g = 2k + 1$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Para realizar  $g = 2k$ , aplicamos o procedimento do item 1, obtendo a aplicação  $f_{0,2k}$ . Para realizar  $g = 1$ , passamos por uma transição do tipo lábios  $L$ , obtendo uma aplicação  $f'_{0,2k}$  cujo contorno aparente possui  $2k + 2$  pontos duplos e duas cúspides. Com cirurgia horizontal do tipo  $H_1^0$ , obtemos a aplicação  $f_{0,2k+1} : (2k + 1) T^2 \rightarrow S^2$  cujo contorno aparente possui  $2k + 2$  pontos duplos e duas cúspides (Figura 4.9 (b)). Assim,  $c + n = 2 + 2k + 2 = g + 3$ .

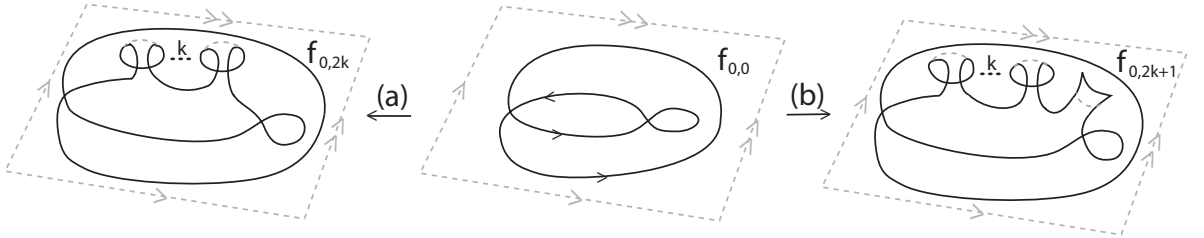


Figura 4.9: Construção de uma aplicação  $f_{0,g} : M_g \rightarrow S^2$  com contorno minimal.

Esta mesma construção pode ser feita considerando aplicações estáveis de superfícies fechadas no plano, visto que o grau da aplicação é zero.

A seguir, enunciaremos o resultado obtido por Pignoni [5] para o caso de aplicações no plano:

**Teorema 4.34** [5] *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^\infty$ . Então o número  $c + n$  para um contorno minimal de  $f$  é um dos itens abaixo:*

$$c + n = \begin{cases} g + 2, & \text{se } M \text{ é orientável e } g \text{ é par} \\ g + 3, & \text{se } M \text{ é orientável e } g \text{ é ímpar} \\ (g + 4)/2, & \text{se } M \text{ é não-orientável, } g \text{ é par e } g/2 \text{ é par} \\ (g + 6)/2, & \text{se } M \text{ é não-orientável, } g \text{ é par e } g/2 \text{ é ímpar} \\ (g + 7)/2, & \text{se } M \text{ é não-orientável, } g \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Este resultado pode ser verificado pela construção acima, considerando a aplicação de grau zero.

**Observação 4.35** *O contorno aparente da aplicação  $f_{0,g} : M_g \rightarrow S^2$  é irredutível. Pela construção acima, se  $g$  é par,  $\gamma(f_{0,g})$  tem um ponto duplo negativo,  $g + 1$  pontos duplos positivos e não tem cúspides, portanto  $c + n = g + 2$ . Se  $g$  é ímpar,  $\gamma(f_{0,g})$  tem um ponto duplo negativo,  $g$  pontos duplos positivos e duas cúspides. Assim,  $c + n = g + 3$ .*

**Observação 4.36** *O menor número de pré-imagens da aplicação  $f_{0,g}$  é  $m(f_{0,g}) = 0$ , visto que  $f_{0,g}$  é uma aplicação estável de grau zero.*

**Proposição 4.37** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável de grau zero cujo contorno é irredutível. Se  $m(f) \neq 0$ , o número  $c + n$  para  $\gamma(f)$  é maior do que para  $\gamma(f_{0,g})$ .*

**Demonstração:** Por 4.3, obtemos a seguinte igualdade para o contorno de uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  :

$$g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2} + (1 + i^+ - i^-). \quad (4.12)$$

Pela Observação 4.6, como o contorno aparente de  $f$  é irredutível, o número  $1 + i^+ - i^- = 0$ . Substituindo este número em 4.12, temos

$$g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2}.$$

Por hipótese, a aplicação tem grau zero e  $m(f) \neq 0$ . Desse modo, obtém-se a seguinte desigualdade:

$$g + 2 \leq g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2}. \quad (4.13)$$

Assuma que  $g$  é um número ímpar. Pelo Lema 4.22, se  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então  $N^- = 1$ . Substituindo em (4.13) temos que  $N^+ \geq g + 3 - \frac{c}{2}$ .

Como  $n = N^+ - N^- \geq g + 4 - \frac{c}{2}$ , somando  $c$  em ambos os lados da desigualdade, temos que  $c + n \geq g + 4 + \frac{c}{2}$ .

Pelo Lema 4.31, como  $(g - d)$  é ímpar, o contorno tem pelo menos duas cúspides. Assim,

$$c + n \geq g + 4 + \frac{c}{2} \geq g + 4.$$

Se  $f$  não tem pontos duplos, então por (4.13)  $c \geq 2g + 4$ . Temos que  $2g + 4 \geq g + 4 \geq g + 3$ . Pela Observação 4.35, se  $g$  é ímpar, o número  $c + n$  para  $\gamma(f_{0,g})$  é igual a  $g + 3$ . Logo,  $\gamma(f_{0,g})$  é minimal.

Agora assumamos que  $g$  é um número par. Se  $f$  não tem cúspides, então por (4.13) temos

$$g + 2 \leq g + m(f) = (N^+ - N^-). \quad (4.14)$$

Pelo Lema 4.22, se  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então  $N^- = 1$ . Substituindo em (4.14), segue que  $N^+ \geq g + 3$ . Assim,  $n = N^+ - N^- \geq g + 4$ . Temos que  $g + 4 \geq g + 2$ .

Pela Observação 4.35, se  $g$  é par, o número  $c + n$  para  $\gamma(f_{0,g})$  é igual a  $g + 2$ . Logo,  $\gamma(f_{0,g})$  é minimal.

□

(ii)  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$  :

Como  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ ,  $(g - d)$  é par, isto é,  $g - d = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Considere as seguintes aplicações: uma aplicação  $f_{0,0} : S^2 \rightarrow S^2$ , de grau zero e com única curva singular, cujo contorno aparente possui dois pontos duplos e zero cúspides, e  $d$  aplicações  $Id : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau um e conjunto singular vazio.

Realizando  $d$  cirurgias verticais do tipo  $V_2^1$  entre a aplicação  $f_{0,0}$  e as  $d$  aplicações do tipo  $Id$ , obtemos a aplicação  $f_{d,0} : S^2 \rightarrow S^2$  com grau  $d$  e  $d + 1$  curvas singulares. Realizando  $d$  cirurgias horizontais do tipo  $H_1^0$  sobre  $f_{d,0}$ , alteramos o gênero da aplicação por  $d$  e o número de pontos duplos por  $2d$ , obtendo uma aplicação  $f_{d,d} : dT^2 \rightarrow S^2$ .

Realizando  $k = \frac{g-d}{2}$  cirurgias verticais do tipo  $V_1^0$ , sobre  $f_{d,d}$ , alteramos o gênero da superfície por  $k$  e realizando  $k$  cirurgias horizontais do tipo  $H_1^0$ , alteramos o gênero da superfície por  $k$  e o número de pontos duplos por  $2k$ . A aplicação estável obtida é  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$  com  $m(f_{d,g}) = d$ ,  $c = 0$  e  $n = 2 + 2d + 2k = d + g + 2$  (Figura 4.10.)

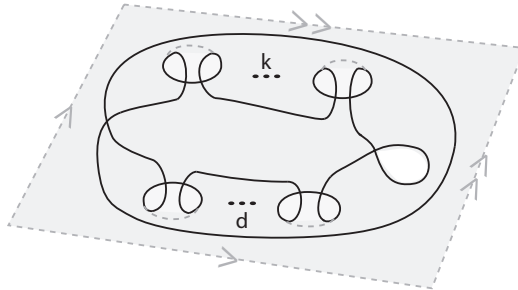


Figura 4.10: Contorno Aparente da aplicação estável  $f_{d,g}$  com  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ .

**Observação 4.38** O contorno  $\gamma(f_{d,g})$  para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$  é irredutível e tem um ponto duplo negativo,  $d + g + 1$  pontos duplos positivos e não tem cúspides. O número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é  $c + n = d + g + 2$ .

(iii)  $d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$  :

Como  $d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$ ,  $(g - d)$  é ímpar, isto é,  $g - d = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . De modo análogo, obtemos a aplicação  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , como ilustrado na Figura 4.10.

Passando por uma transição do tipo lábios  $L$  e fazendo cirurgia horizontal do tipo  $H_1^0$ , obtemos a aplicação  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , com  $m(f_{d,g}) = d$ ,  $c = 2$  e  $n = 2d + 2k + 2 = d + g + 1$  (Figura 4.11).

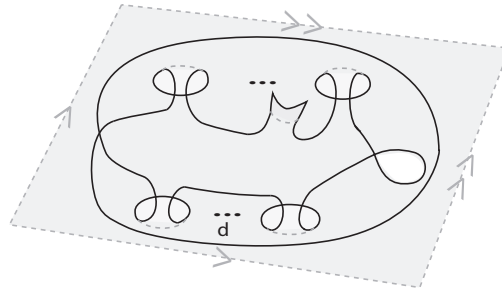


Figura 4.11: Contorno Aparente da aplicação estável  $f_{d,g}$  com  $d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$ .

**Observação 4.39** O contorno  $\gamma(f_{d,g})$  para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$  é irredutível e tem um ponto duplo negativo,  $d + g$  pontos duplos positivos e duas cúspides. O número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é  $c + n = d + g + 3$ .

(iv)  $d \geq g$  :

Considere as seguintes aplicações: uma aplicação  $f_{0,0} : S^2 \rightarrow S^2$ , de grau zero e com única curva singular, cujo contorno aparente possui dois pontos duplos e zero cúspides,  $g$  aplicações  $Id : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau um e conjunto singular vazio e  $d - g$  aplicações  $h_{1,0} : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau um e única curva singular com duas cúspides e zero pontos duplos, como na Figura 3.14 (h).

Realizando  $g$  cirurgias verticais do tipo  $V_2^1$  entre a aplicação  $f_{0,0}$  e as  $g$  aplicações do tipo  $Id$ , obtemos a aplicação  $f_{g,0} : S^2 \rightarrow S^2$ , com grau  $g$  e  $g + 1$  curvas singulares. Realizando  $g$  cirurgias horizontais do tipo  $H_1^0$  sobre  $f_{g,0}$ , alteramos o gênero da aplicação por  $g$  e o número de pontos duplos por  $2g$ , obtendo uma aplicação  $f_{g,g} : gT^2 \rightarrow S^2$ . (Figura 4.12 (a).)

Fazendo  $d - g$  cirurgias horizontais com uma aplicação do tipo  $h_{1,0}$ , alteramos o número de cúspides por  $2(d - g)$ , o grau da aplicação por  $d - g$  e não alteramos o número de pontos duplos, obtendo uma aplicação  $f_{d,g} : M_g \rightarrow S^2$ , com  $m(f_{d,g}) = d$ ,  $c = 2(d - g)$  e  $n = 2g + 2$  (Figura 4.12).

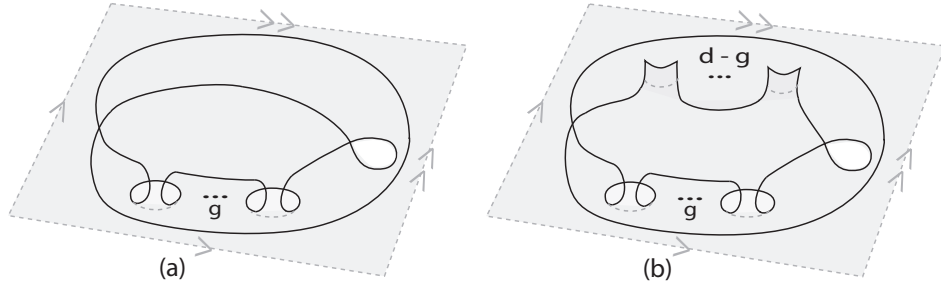


Figura 4.12: Contorno Aparente da aplicação estável  $f_{d,g}$  com  $d \geq g$ .

**Observação 4.40** O contorno  $\gamma(f_{d,g})$  para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $d \geq g$  é irreduzível e tem um ponto duplo negativo,  $2g + 1$  pontos duplos positivos e  $2(d - g)$  cúspides. O número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é  $c + n = 2d + 2$ .

### 4.3.2 Mínimo de $c + n$ para Contorno Minimal sobre $S^2$

O seguinte teorema descreve o número de cúspides e de pontos duplos que o contorno minimal de uma aplicação estável de uma superfície orientada na esfera deve possuir.

**Teorema 4.41** Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação  $C^\infty$  de grau  $d$  cujo contorno é irreduzível. O par  $(c, n)$  para um contorno minimal de  $f$  é um dos itens abaixo:

$$(c, n) = \begin{cases} (2(d-1), 4) \text{ ou } (2d+2, 0), & \text{se } d \neq 0 \text{ e } g = 1 \\ (2, 4) \text{ ou } (6, 0), & \text{se } (d, g) = (1, 2) \\ (2(d-g), 2g+2), & \text{se } d \geq g > 1 \\ (0, d+g+2), & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 1) \\ (2, d+g+1), & \text{se } d \leq g \text{ e } d \not\equiv g \pmod{2} \text{ exceto } (d, g) = (1, 2) \end{cases}$$

**Demonstração:**

Vamos considerar uma aplicação estável  $M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  cujo contorno é irreduzível. Esta prova consiste de quatro casos:

- (1)  $d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$
- (2)  $d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$
- (3)  $d \geq g$  (para (1), (2) e (3) assumamos  $d \neq 0$ )
- (4)  $d = 0$

### Caso (1)

Por 4.3, obtemos a seguinte desigualdade para o contorno de uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  cujo contorno é irredutível:

$$d + g \leq g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2} \quad (4.15)$$

Se  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então pelo Lema 4.22,  $N^- = 1$ . Substituindo em (4.15), temos  $N^+ \geq d + g + 1 - \frac{c}{2}$ . Somando  $c$  em ambos os membros da desigualdade,

$$c + n \geq d + g + 2 + \frac{c}{2} \geq d + g + 2.$$

Se  $\gamma(f)$  não tem ponto duplo, por (4.15)  $c \geq 2(g+d)$ . Temos que se  $d \geq 1$ , então  $2(d+g) \geq d+g+2$ .

Assim, para o contorno  $\gamma(f)$ , temos  $c + n \geq d + g + 2$ .

Pela Observação 4.38, o número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é igual a  $d + g + 2$ . Desse modo, o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é minimal para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d \leq g$  e  $d \equiv g \pmod{2}$ .

### Caso (2)

Por 4.3, obtemos a seguinte desigualdade para o contorno de uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  cujo contorno é irredutível:

$$d + g + 1 < g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2} \quad (4.16)$$

Se  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então pelo Lema 4.22,  $N^- = 1$ . Substituindo em (4.16), temos  $N^+ > d + g + 2 - \frac{c}{2}$ . Somando  $c$  em ambos os membros da desigualdade,

$$c + n > d + g + 3 + \frac{c}{2}.$$

Pelo Lema 4.31, se o número  $(g - d)$  é ímpar, então o contorno  $\gamma(f)$  tem pelo menos duas cúspides. Logo,  $c + n > d + g + 3$ .

Se  $\gamma(f)$  não tem ponto duplo, por (4.16)  $c \geq 2(g+d+1)$ . Temos que se  $d \geq 1$ , então  $2(d+g+1) > d + g + 3$ .

Assim, para o contorno  $\gamma(f)$ , temos  $c + n > d + g + 3$ .

Pela Observação 4.39, o número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é igual a  $d + g + 3$ . Desse modo, o contorno  $\gamma(f_{d,g})$  é minimal para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $1 \leq d < g$  e  $d \not\equiv g \pmod{2}$ .

### Caso (3)

Por 4.3, obtemos a seguinte desigualdade para o contorno de uma aplicação estável  $f : M_g \rightarrow S^2$  de grau  $d$  cujo contorno é irreduzível:

$$g + d \leq g + m(f) = (N^+ - N^-) + \frac{c}{2} \quad (4.17)$$

Se  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então pelo Lema 4.22,  $N^- = 1$ . Substituindo em (4.17), temos  $N^+ \geq d + g + 1 - \frac{c}{2}$ . Logo,  $n = N^+ + N^- \geq d + g + 2 - \frac{c}{2}$  e  $c + n \geq d + g + 2 + \frac{c}{2}$ .

Pelo Lema 4.33, como o contorno  $\gamma(f)$  tem pelo menos  $2(d - g)$  cúspides,  $c + n \geq 2d + 2$ .

Se  $\gamma(f)$  não tem pontos duplos, por (4.17)  $c \geq 2(g + d)$ . Temos que se  $g \geq 1$ ,  $2(g + d) \geq 2d + 2$ . Assim, para o contorno  $\gamma(f)$ , temos  $c + n \geq 2d + 2$ .

Pela Observação 4.40, o número  $c + n$  para  $\gamma(f_{d,g})$  é igual a  $2d + 2$ .

Desse modo, o contorno  $\gamma(f_{d,g})$ , é minimal para cada par  $(d, g)$  satisfazendo  $d \geq g \geq 1$ .

### Caso (4)

Pela Proposição 4.37 o contorno  $\gamma(f_{0,g})$  é minimal e conclui-se a prova do Teorema 4.41.

□

Uma consequência imediata deste teorema é o seguinte corolário:

**Corolário 4.42** *Seja  $d \geq 0$ ,  $g \geq 1$  e  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação  $C^\infty$  de grau  $d$  cujo contorno é irreduzível. Então:*

1. O número  $c + n$  para um contorno minimal de  $f$  é um dos itens abaixo:

$$c + n = \begin{cases} 2d + 2, & \text{se } d \geq g \\ d + g + 2, & \text{se } d \leq g \text{ e } d \equiv g \pmod{2} \\ d + g + 3, & \text{se } d < g \text{ e } d \not\equiv g \pmod{2} \end{cases}$$

2. O número  $c + n$  de um contorno minimal de  $f$  é um número par. Em particular, o número de pontos duplos é também um número par.

Uma consequência imediata da prova do Teorema 4.41 é o seguinte corolário:

**Corolário 4.43** *Seja  $f : M_g \rightarrow S^2$  uma aplicação estável cujo contorno é minimal. Então,*

1. Se o contorno  $\gamma(f)$  tem um ponto duplo, então tem somente um ponto duplo negativo.
2. O grau de  $f$  é igual ao número  $m(f)$ .

## 4.4 Contorno Minimal de Aplicações de Superfícies Não - Orientadas

Uma superfície fechada não orientada, que é uma soma conexa de  $g$  cópias do plano projetivo real  $\mathbb{R}P^2$ , será denotada por  $F_g$ .

Em [4], os autores também estudaram o contorno minimal de aplicações estáveis de superfícies não orientadas na esfera, obtendo o Teorema 4.44. Essas aplicações podem ser construídas de maneira análoga à construção para superfícies orientadas apresentada na subseção 4.3.2.

Não iremos abordar este caso.

**Teorema 4.44** *Seja  $h : F_g \rightarrow S^2$  ( $g \geq 1$ ) uma aplicação  $C^\infty$  de grau módulo dois,  $d_2$ . Então, o par  $(c, n)$  para um contorno minimal de  $h$  é um dos itens abaixo:*

$$(c, n) = \begin{cases} (3, 0), & \text{se } (d_2, g) = (1, 1) \\ (4, 0) \text{ ou } (0, 4), & \text{se } (d_2, g) = (1, 2) \\ (1, (g+5)/2) & \text{se } d_2 = 1 \text{ e } g \text{ é ímpar, exceto } (d_2, g) = (1, 1) \\ (0, (g+6)/2) & \text{se } d_2 = 1 \text{ e } g \text{ é par, exceto } (d_2, g) = (1, 2) \\ (3, (g+1)/2), & \text{se } d_2 = 0 \text{ e } g \text{ é ímpar} \\ (0, (g+4)/2) & \text{se } d_2 = 0, \text{ } g \text{ é par e } g/2 \text{ é par} \\ (2, (g+2)/2) & \text{se } d_2 = 0, \text{ } g \text{ é par e } g/2 \text{ é ímpar} \end{cases}$$

**Exemplo 4.45** *A Figura 4.13 ilustra o contorno minimal de aplicações estáveis de superfícies não orientadas na esfera. Em (a), o contorno corresponde a uma aplicação do plano projetivo com grau módulo dois  $d_2 = 1$ , contendo três cúspides e nenhum ponto duplo. Em (b), o contorno corresponde a uma aplicação da garrafa de Klein com grau módulo dois  $d_2 = 1$ , contendo quatro pontos duplos e nenhuma cúspide. Em (c), o contorno corresponde a uma aplicação de três planos projetivos com grau módulo dois  $d_2 = 1$ , contendo uma cúspide e quatro pontos duplos. Em (d), o contorno corresponde a uma aplicação de duas garrafas de Klein com grau módulo dois  $d_2 = 1$ , contendo cinco pontos duplos e nenhuma cúspide. Em (e), o contorno corresponde a uma aplicação do plano projetivo com grau módulo dois  $d_2 = 0$ , contendo contendo três cúspides e nenhum ponto duplo. Em (f), o contorno corresponde a uma aplicação de duas garrafas de Klein com grau módulo dois  $d_2 = 0$ , contendo quatro pontos duplos e nenhuma cúspide. E em (g), o contorno corresponde a uma aplicação da garrafa de Klein com grau módulo dois  $d_2 = 0$ , contendo dois pontos duplos e duas cúspides.*

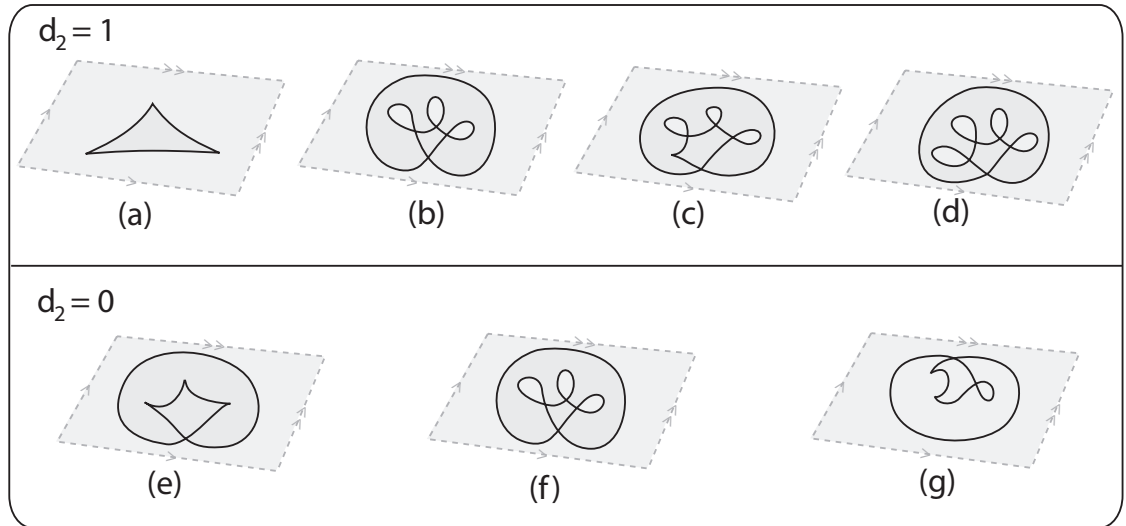


Figura 4.13: Exemplo de aplicações com contorno minimal.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. I. ARNOLD - Topological Invariants of Plane Curves and Caustic, *University Lecture Series*, Vol. 5, AMS Providenci 1994.
- [2] S. DEMOTO - Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve, *Hiroshima Math. J.* 35 (2005), 93-113.
- [3] E. CHÍNCARO “Bifurcations of Whitney Maps”, Tese de Doutorado, IMPA, 1978.
- [4] T. YAMAMOTO and A. KAMENOSONO- The Minimal numbers of singularities of stable maps between surfaces, *Topology and its Applications* 156 (2009), 2390-2405.
- [5] R. PIGNONI - Projections os surfaces with a connected fold curve, *Topology and its Applications* 49 (1993), 55-74.
- [6] JA. M. ÈLIASBERG - On Singularities of Folding Type, *Math. USSR-Izvestija.* 4 (1970) 1119-1134.
- [7] E. L. LIMA - “Curso de Análise.”, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, vol. 2, 2008, pp.505-517.
- [8] W. FULTON -“Algebraic Topology, a first course.”, Springer, 1995.
- [9] M. GOLUBITSKY and V. GUILLEMIN -“Stable Mappings and Their Singularities.”, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [10] V. GORYUNOV - Local Invariants of Mappings os Surface into three-space, Preprint (2006).
- [11] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint, *Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232 Marcel and Dekker (2003) 227-235.
- [12] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Fold maps from the sphere to the plane. To apper in *Experimental Maths* 15 (2006) 491-497.

- [13] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.* 154 (2007) 166-175.
- [14] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, *Journal of Singularities*, aceito em 2010.
- [15] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Stable maps the surfaces in to projective plane, preprint.
- [16] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Global aspects of the classification of the stable maps of compact surfaces in the plane, *Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas* Vol.3 (2005) 3-23.
- [17] L. C. KINSEY -“Topology of Surfaces.”, Springer Verlag, New York, 1994.
- [18] D. DA S. MACHADO “Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano”, Dissertação de Mestrado, DMA-UFV, 2010.
- [19] J. L. BRETAS “Singularidades de Aplicações Estáveis de Superfícies Fechadas e orientadas em  $S^2$ ”, Dissertação de Mestrado, DMA-UFV, 2011.
- [20] H.LEVINE - Stable maps: An introduction with low dimensional examples, *Bol.Soc.Brasil.Mat.* 7 (2) (1976) 145-184.
- [21] W. S. MASSEY - “A Basic Course in Algebraic Topology.”, Springer, 1991.
- [22] C. MENDES DE JESUS “Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano”, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 2001.
- [23] C. MENDES DE JESUS, R. OSET SINHA and M.C. ROMERO FUSTER - Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to  $R^3$ , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, v. 267 (2009).
- [24] C. MENDES DE JESUS, S. M. DE MORAES and M.C. ROMERO FUSTER - Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin Brazilian Mathematical Society*, (Impresso) (2010).
- [25] J. R. MUNKRES - “Topologia”, 2ª Edição. *Prentice Hall*, Madrid, 2002, pp.108.
- [26] T. OHMOTO e F. AICARDI - First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology* 45 (2006), 27-45.
- [27] J.R. QUINE - A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, *Trans. AMS* 236 (1978), 307-314.
- [28] J.R. QUINE - Plucker equations for curves, *Trans. AMS* 88 (1) (1981), 21-29.

- [29] R. THOM - Structural Stability and Morphogenesis, (translated by D. H. Fowler), Benjamin-Adison Wesley, New York.(1975).
- [30] V. A. VASSILIEV - Complements of Discriminants of smooth maps: topology and applications, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [31] A. T. WHITE- Graphs, Groups and Surfaces, *Mathematics Studies*, Nort Holland (1973).
- [32] H. WHITNEY - On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62 (1955) 374-410.
- [33] YUNG-CHE - "Singularity Theory and Introduction to Catastrophe.", Springer (1976).