ADRIANA DE JESUS DE PAULA

A CONSTRUÇÃO DA HIPERSUPERFÍCIE PRINCIPAL PARA SISTEMAS ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Edir Júnior Ferreira Leite

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

P324c
2021

Paula, Adriana de Jesus de, 1995-
A construção da hipersuperfície principal para sistemas elípticos / Adriana de Jesus de Paula. – Viçosa, MG, 2021.
62 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 60-62.

1. Análise funcional. 2. Hipersuperfícies. 3. Equações diferenciais elípticas. 4. Equações diferenciais parciais. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 515.7

Bibliotecário(a) responsável: Renata de Fatima Alves CRB6/2578

ADRIANA DE JESUS DE PAULA

A CONSTRUÇÃO DA HIPERSUPERFÍCIE PRINCIPAL PARA SISTEMAS ELÍPTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de maio de 2021.

Assentimento:

AJPaula.

Adriana de Jesus de Paula
Autora

Edir Júnior

Edir Júnior Ferreira Leite
Orientador

Dedico este trabalho à minha mãe,
Maurila Ferreira Guimarães.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer a Deus por ter chegado até aqui, não foi um caminho fácil, mas ele colocou ótimas pessoas no meu caminho.

Quero agradecer à minha mãe por todo apoio, ao meu pai, em memória, pois sei que de onde ele estiver continua olhando por mim, à minha vó Elza por ser minha base desde sempre e minha vó Marta, em memória, que acabei perdendo no meio dessa caminhada até aqui, mas sei que ela está em um lugar melhor e olhando por mim.

Quero agradecer à minha família, em especial minha tia Creuza, minha madrinha Sandra, tio Rogério, primas Andreza, Duda, Chaiane, Drielly, Flaviana, primos Juliano, Gabriel, Marcelino e Rogerinho por todo apoio psicológico, pois eu não teria conseguido sem vocês.

Quero agradecer também aos meus amigos antigos e aos novos, em especial ao Rodolfo que teve que me aturar bastante, a Luana, a Carol, a Iara, a Joyce, os Geogébricos Deberton e Jefferson, principalmente o Jeff que me incentivou a fazer esse mestrado, aguentou muitas das minhas crises e ajudou também muito com os meus estudos, o Pedro, a minha República Vai Dá-Nada e suas moradoras: Camila, Gil, Mylena e Iara, por todas as conversas, conselhos e rolês, eu amo muito vocês.

E por último, mas não menos importante, quero agradecer ao Edir, pela orientação e ensinamentos, à CAPES, pelo apoio financeiro, que me possibilitou realizar esse mestrado, à UFV e os professores, pelo acolhimento, e também à UFOP e professores do DEMAT que me fizeram ter uma ótima base para chegar aqui, em especial ao Wenderson, Edney, Gil e Éder.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo"
"Devemos promover a coragem onde há medo, promover o acordo onde existe conflito, e inspirar esperança onde há desespero"

Nelson Mandela

Resumo

PAULA, Adriana de Jesus de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2021. **A construção da hipersuperfície principal para sistemas elípticos**. Orientador: Edir Junior Ferreira Leite.

Neste trabalho, estudamos o sistema

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i &= \gamma_i \rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{i+1} & \text{em} & \Omega, \\ \varphi_i &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\varphi_{m+1} := \varphi_1$, $m \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $n \geq 2$, $\rho_i \in L^p(\Omega)$ são funções positivas q.t.p., $p > n$, $i = 1, \ldots, m$ e α_i são números reais positivos que satisfazem $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$ e utilizamos uma versão do Teorema de Krein-Rutman não-linear para mostrar que a hipersuperfície principal gerada pelos autovalores associados ao sistema é a imagem inversa de uma função suave.

E também estudamos resultados de existência e não existência de solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $p > n$ para o seguinte sistema de m equações, $m \geq 2$,

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_i &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $i = 1, \ldots, m$, $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$.

Investigamos o caso em que as funções f_i, $i = 1, \ldots, m$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H1) $f_i(x, \cdot, \ldots, \cdot) \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in \Omega$;

(H2) $0 < f_i(\cdot, 0, \ldots, 0) \leq f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \leq f_i(\cdot, v_1, \ldots, v_m)$ se $0 \leq u_j \leq v_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$;

(H3) $f_i(\cdot, t_1, \ldots, t_m) \in L^p(\Omega), \forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, $p > n$;

(H4) $f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \geq \rho_i(\cdot) u_{i+1}^{\alpha_i}$, em que $u_{m+1} := u_1$, $\alpha_j > 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, $\prod_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$ e $\rho_1, \ldots, \rho_m \in L^p(\Omega)$ são funções positivas em quase todo ponto, $p > n$.

Definimos o conjunto extremal do sistema (2) e provamos algumas de suas propriedades qualitativas, como por exemplo, continuidade, comportamento assintótico e limitação.

Palavras-chave: Sistemas Elípticos. Hipersuperfície Principal. Conjunto Extremal.

Abstract

PAULA, Adriana de Jesus de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2021. **The construction of the main hypersurface for elliptical systems**. Adviser: Edir Junior Ferreira Leite.

In this work, we study the system

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i &= \gamma_i\rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i-1}\varphi_{i+1} \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \varphi_i &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

where $\varphi_{m+1} := \varphi_1$, $m \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with $C^{1,1}$ boundary, $n \geq 2$, $\rho_i \in L^p(\Omega)$ are positive functions a.e., $p > n$, $i = 1, \ldots, m$, and α_i are positive real numbers that satisfy $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$ and we use a version of nonlinear Krein-Rutman Theorem to show that the principal hypersurface generated by the eigenvalues associated to system is the reverse image of a smooth function.

And we also study existence and nonexistence results of positive strong solution in $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $p > n$, to the following system of m equations, $m \geq 2$,

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with $C^{1,1}$ boundary, $i = 1, \ldots, m$, $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ are given functions and $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$.

We investigate the case where the functions f_i, $i = 1, \ldots, m$ satisfy the following hypotheses:

(H1) $f_i(x, \cdot, \ldots, \cdot) \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in \Omega$;

(H2) $0 < f_i(\cdot, 0, \ldots, 0) \leq f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \leq f_i(\cdot, v_1, \ldots, v_m)$ if $0 \leq u_j \leq v_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$;

(H3) $f_i(\cdot, t_1, \ldots, t_m) \in L^p(\Omega), \forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, $p > n$;

(H4) $f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \geq \rho_i(\cdot) u_{i+1}^{\alpha_i}$, where $u_{m+1} := u_1$, $\alpha_j > 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, $\prod_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$ e $\rho_1, \ldots, \rho_m \in L^p(\Omega)$ are positive functions a.e., $p > n$.

We define the extremal set of the system (4) and prove some of their qualitative properties such as continuity, asymptotic behavior and limitation.

Keywords: Elliptic Systems. Principal Hypersurface. Extremal Set.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos resultados de existência e não existência de soluções fortes positivas em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $p > n$ para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) = (W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)) \times \ldots \times (W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $m \geq 2$.

A principal motivação desse estudo vem do contexto escalar e tem o seguinte modelo como protótipo:

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

em que $\lambda > 0$ é chamado de parâmetro.

Sobre (6), podemos citar as seguintes referências: [7], [20], [23], onde o caso em que $f(u) = e^u$ é considerado. Para esta classe particular de não-linearidade, o problema (6) é conhecido como problema de Bratu-Liouville-Gelfand e está relacionado com modelos que descrevem fenômenos de auto-combustão [17], [19].

Estudos sobre a existência de soluções clássicas para (6) no caso em que o termo de reação f não é necessariamente exponencial, foram feitos nos seguintes trabalhos: [8], [9], [19] e [25].

Em particular, considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, convexa e satisfazendo as seguintes hipóteses:

1. $f(0) > 0$ (f é positiva na origem);
2. $f(x) \leq f(y), \forall\, 0 \leq x \leq y$ (f é não decrescente);
3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ (f é superlinear no infinito).

Admitindo as hipóteses 1, 2 e 3, sintetizamos no teorema a seguir alguns fatos conhecidos sobre (6), que foram provados em [8], [9], [19], [25].

Teorema 0.1. *[8], [9], [19], [25]. Seja f uma função satisfazendo as hipóteses 1, 2 e 3. Então existe uma constante $\lambda^* \in \mathbb{R}_+$ tal que:*

1. *se* $\lambda \in (0, \lambda^*)$, *então (6) admite pelo menos uma solução clássica, isto é, uma solução pertencente à* $C^2(\overline{\Omega})$.

2. *se* $\lambda > \lambda^*$, *então o sistema (6) não admite solução clássica não negativa.*

3. *se* $\lambda = \lambda^*$, *então o problema (6) admite uma solução fraca* u^*, *isto é,* $u^* \in L^1(\Omega)$, $f(u^*)\delta \in L^1(\Omega)$, *em que* $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$, *e* u^* *satisfaz:*

$$-\int_\Omega u^* \Delta\phi = \lambda^* \int_\Omega f(u^*)\phi, \ \forall \phi \in C^2(\overline{\Omega}), \phi = 0 \ sobre \ \partial\Omega.$$

Em 2005, Marcelo Montenegro [29], estendeu o teorema anterior para sistemas acoplados de duas equações da forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu f(x,u,v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = \eta g(x,u,v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, é um domínio suave e limitado, ν, η são parâmetros positivos e f, g são funções que satisfazem:

1. $f(x,\cdot,\cdot), g(x,\cdot,\cdot) \in C^1([0,+\infty] \times [0,+\infty]), \ \forall x \in \Omega$;

2. $\sup\{|(f_u(\cdot,u,v), f_v(\cdot,u,v))| + |(g_u(\cdot,u,v), g_v(\cdot,u,v))| \mid 0 < u, v < k\} \in L^p(\Omega), \ p > n, \ \forall k > 0$;

3. $f_v(\cdot,u,v), g_u(\cdot,u,v) \not\equiv 0, \ \forall u, v \geq 0$;

4. $0 \leq f(\cdot,u_1,v_1) \leq f(\cdot,u_2,v_2), \ 0 \leq g(\cdot,u_1,v_1) \leq g(\cdot,u_2,v_2), \ \forall \ 0 \leq u_1 \leq u_2, \ 0 \leq v_1 \leq v_2$;

5. $f(\cdot,0,0), \ g(\cdot,0,0) \in L^p(\Omega), p > n$ e $p \not\equiv 0$;

6. $f(\cdot,u,v) \geq \rho(\cdot)v^\alpha, \ g(\cdot,u,v) \geq \theta(\cdot)u^\beta, \ \forall u,v \geq 0$, em que $\alpha, \beta > 0, \ \alpha\beta = 1$, $\rho, \theta \in L^p(\Omega)$, $p > n$, $\rho, \theta \geq 0$ e $\rho, \theta \not\equiv 0$.

Sistemas com mais de duas equações foram tratados na tese [13] e no artigo [14], e estas são as principais referências que inspiraram esta dissertação, onde estudamos alguns resultados obtidos nesses trabalhos. Primeiramente, estudamos a hipersuperfície principal, que é formada pelos autovalores principais do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = \gamma_i \rho_i(x) |\varphi_{i+1}|^{\alpha_i - 1} \varphi_{i+1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi_i = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

em que $\varphi_{m+1} := \varphi_1$, $m \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $n \geq 2$, $\rho_i \in L^p(\Omega)$ são funções positivas q.t.p., $p > n$, com $i = 1, \ldots, m$ e α_i números reais positivos que satisfazem $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$. A denominação de hipersuperfície principal vem do fato da hipersuperfície dada ser a extensão natural do conceito de curva principal introduzida por Marcos Montenegro em [30].

Para mostrar que essa hipersuperfície é a imagem inversa por um valor positivo de uma função suave, usamos o Teorema de Krein-Rutman não linear na seguinte versão:

Teorema 0.2. *[28](**Teorema do Tipo Krein-Rutman**) Sejam E um espaço de Banach real contendo um cone fechado K e $T : E \to E$ um operador crescente, positivamente 1-homogêneo, contínuo e compacto e tal que existe um elemento não nulo $u \in K$ e $M > 0$ satisfazendo*

$$u \preceq MTu.$$

Então T possui um autovetor não nulo $x_0 \in K$. Além disso, se K é um cone sólido e se o operador T é estritamente crescente e fortemente positivo em $K \setminus \{0\}$, então x_0 é o único autovetor em K a menos de constante multiplicativa. E, finalmente, se μ_0 é o autovalor correspondente, então ele pode ser caracterizado como o autovalor de menor valor absoluto e além disso, é simples.

Finalmente, como aplicação da hipersuperfície principal associada ao sistema (8), estudamos o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $i = 1, \ldots, m$, $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ são funções dadas e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ números reais.

Assim como em [29], admitiremos as seguintes hipóteses sobre f_i:

(H1) $f_i(x, \cdot, \ldots, \cdot) \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in \Omega$;

(H2) $0 < f_i(\cdot, 0, \ldots, 0) \leq f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \leq f_i(\cdot, v_1, \ldots, v_m)$ se $0 \leq u_j \leq v_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$;

(H3) $f_i(\cdot, t_1, \ldots, t_m) \in L^p(\Omega)$, $\forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, $p > n$;

(H4) $f_i(\cdot, u_1, \ldots, u_m) \geq \rho_i(\cdot) u_{i+1}^{\alpha_i}$, em que $u_{m+1} := u_1$, $\alpha_j > 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, $\prod_{j=1}^m \alpha_j = 1$ e $\rho_1, \ldots, \rho_m \in L^p(\Omega)$ são funções positivas em quase todo ponto, $p > n$.

Definimos também:

1. $\mathcal{U} = \{(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1}) \mid 0 < \sigma < \theta_1^*(\nu), \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$;
2. $\mathcal{V} = \{(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1}) \mid \sigma > \theta_1^*(\nu), \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$,

em que $\theta_1^*(\nu)$ é limitado (vide Observação 3.2) e o conjunto extremal do sistema (9) como sendo:

$$\Theta^* = \{(\theta_1^*(\nu), \theta_1^*(\nu)\nu_1, \ldots, \theta_1^*(\nu)\nu_{m-1}) \mid \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}.$$

Considerando os elementos que acabamos de definir, mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 0.3. *Sejam $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem (H1), (H2), (H3) e (H4). Então o conjunto Θ^* decompõe $\mathbb{R}_+^m$ em dois conjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ como definidos anteriormente. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *o sistema (9) admite uma solução forte positiva em* $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, *para todo* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathcal{U}$;

2. *o sistema (9) não admite solução forte não negativa em* $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, *para qualquer* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathcal{V}$.

Podemos parametrizar o conjunto extremal através da função $P:\mathbb{R}_+^{m-1}\to\Theta^*\subset\mathbb{R}_+^m$ dada por:

$$P(\nu_1,\ldots,\nu_{m-1}):=(\theta_1^*,\theta_1^*\nu_1,\ldots,\theta_1^*\nu_{m-1}),$$

e assim mostramos algumas de suas propriedades qualitativas, que são apresentadas nos teoremas a seguir.

Teorema 0.4. *A função* P, *como definida anteriormente, é contínua.*

Teorema 0.5. *A função* $\theta_1^*:\mathbb{R}_+^{m-1}\to\mathbb{R}_+$ *é não crescente em todo o domínio.*

Teorema 0.6. *A função* $\psi_i:\mathbb{R}_+^{m-1}\to\mathbb{R}_+$ *dada por* $\psi_i(\nu)=\theta_1^*(\nu)\nu_i$ *é não decrescente em todo o domínio, para todo* $i\in\{1,\ldots,m-1\}$.

Teorema 0.7. *Sejam* $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_{m-1})\in\mathbb{R}_+^{m-1}$ *e* $i\in\{1,\ldots,m-1\}$ *fixo. Se* $\nu_i\to\infty$ *e as demais coordenadas de* ν *estão fixas, então* $\theta_1^*(\nu)\to 0$.

Teorema 0.8. *Se* $f_1(x,t_1,0,\ldots,0)\geq\phi(x)t_1$, *para todo* $t_1\geq 0$, $x\in\Omega$ *q.t.p. e* $\phi\in L^p(\Omega)$ *é uma função positiva em* Ω, $p>n$, *então* $\theta_1^*(\nu)$ *é limitado.*

Teorema 0.9. *Sejam* $i\in\{1,\ldots,m-1\}$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_{m-1})\in\mathbb{R}_+^{m-1}$ *e* $\nu_0=1$. *Se para todo* $K>0$, *existem* $y_1,\ldots,y_m>0$ *tais que*

$$K||f_1(\cdot,y_1,\ldots,y_m)||_{L^p(\Omega)}\leq y_1,$$

então θ_1^* *é ilimitado.*

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo enunciamos algumas definições e resultados que serão úteis para o entendimento dos próximos capítulos. Para maiores detalhes sobre as definições e resultados, pode-se consultar [4], [5], [6] e [21].

1.1 Análise Funcional

Definição 1.1. *Um espaço de Banach* $(X, ||\cdot||)$ *é um espaço vetorial normado completo, isto é, todas as sequências de Cauchy são convergentes nesse espaço.*

Proposição 1.1. *Sejam* X *um espaço de Banach e* Y *um subespaço vetorial de* X*. Então* Y *é fechado em* X *se, e somente se,* Y *é um espaço de Banach com a norma induzida de* E*.*

Demonstração. Veja [[6], Proposição 1.1.1]. □

Definição 1.2. *Um espaço de Hilbert* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno.*

Definição 1.3. *Uma função* $f : Y \to \mathbb{R}$ *é limitada se o seu conjunto imagem é um subconjunto limitado de* $\mathbb{R}$*. Denotamos por* $B(Y)$ *o espaço de todas as funções limitadas com domínio* Y *e contradomínio* $\mathbb{R}$*.*

Proposição 1.2. *Seja* Y *um conjunto não vazio. O conjunto B(Y) das funções limitadas com domínio* Y *e contradomínio* $\mathbb{R}$ *é um espaço de Banach com a norma usual*

$$||f||_\infty = \sup_{x\in Y} |f(x)|.$$

Demonstração. Veja [[6], Exemplo 1.1.2]. □

Definição 1.4. *O espaço das funções* k *vezes continuamente diferenciáveis em* $[a,b]$*,* $k \in \mathbb{N}$*, é definido e denotado por*

$$C^k[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ é diferenciável em } [a,b] \text{ e } f' \in C^{k-1}[a,b]\}.$$

Proposição 1.3. *O espaço* $C^k[a,b]$, $k \in \mathbb{N}$, *é um espaço de Banach com a norma:*

$$||f||_{C^k} := ||f||_\infty + ||f'||_\infty + \ldots + ||f^{(k)}||_\infty.$$

Demonstração. Veja [[6], Exemplo 1.1.4]. □

Definição 1.5. *Um espaço separável é um espaço normado que contém um subconjunto enumerável e denso.*

Proposição 1.4. *Todo subespaço de um espaço separável é também um espaço separável.*

Demonstração. Veja [[26], Exemplo 9.1.4]. □

Definição 1.6. *Sejam* E *e* F *espaços vetoriais normados sobre* $\mathbb{R}$. *Um operador linear contínuo de* E *em* F *é uma função contínua* $T : E \to F$ *que é linear, isto é, é uma função contínua que satisfaz:*

1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$ *para quaisquer* $x, y \in E$;
2. $T(ax) = aT(x)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$ *e qualquer* $x \in E$.

O espaço dos operadores lineares contínuos de E *em* F *é denotado por* $\mathcal{L}(E,F)$. *No caso em que* $F = \mathbb{R}$, *o espaço* $\mathcal{L}(E,F)$, *agora denotado por* E', *é chamado dual topológico de* E *e seus elementos são denominados funcionais lineares contínuos.*

Definição 1.7. *Dois espaços vetoriais normados* $(E, ||\cdot||_E)$ *e* $(F, ||\cdot||_F)$ *são isomorfos, se existir um operador linear contínuo bijetor* $T : E \to F$ *com inversa* $T^{-1} : F \to E$ *contínua. Tal operador é dito isomorfismo.*

Se o operador T *também for uma isometria, isto é,* $||T(x)||_F = ||x||_E$, *para todo* $x \in E$, *então dizemos que* T *é um isomorfismo isométrico e os espaços* E *e* F *são ditos isomorfos isometricamente.*

Teorema 1.1. *Sejam* E *e* F *espaços normados sobre* $\mathbb{R}$ *e* $T : E \to F$ *linear. As seguintes condições são equivalentes:*

1. T *é lipschitziano.*
2. T *é uniformemente contínuo.*
3. T *é contínuo.*
4. T *é contínuo em algum ponto de* E.
5. T *é contínuo na origem.*
6. $\sup\{||T(u)|| \mid x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1)\} < \infty$.
7. *Existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que* $||T(x)|| \leq C||x||$ *para todo* $x \in E$.

Demonstração. Veja [[6], Teorema 2.1.1]. □

Teorema 1.2. *Seja E um espaço normado. O dual E' é um espaço de Banach com a norma*

$$||f|| = \sup\{|f(x)| \mid x \in E \text{ e } ||x|| \leq 1\}.$$

Demonstração. Veja [[6], Proposição 2.1.4 e Corolário 2.1.5]. □

Definição 1.8. *O bidual de um espaço normado E, denotado por E'', é o dual do seu dual, isto é,*

$$E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{R}) = \{\phi : E' \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ é um funcional linear contínuo}\}.$$

Teorema 1.3. *O bidual de um espaço normado E é um espaço de Banach com a seguinte norma:*

$$||\phi|| = \sup\{|\phi(\varphi)| \mid \varphi \in E' \text{ e } ||\varphi|| \leq 1\}.$$

Demonstração. Como o espaço dual é um espaço de Banach, o bidual é o dual do dual e a norma considerada é a mesma do Teorema 1.2, segue por esse teorema que o bidual é um espaço de Banach. □

Proposição 1.5. *Seja E um espaço normado. O mergulho canônico de E em E'', dado pelo seguinte operador linear*

$$J_E : E \to E'', \; J_E(x)(\phi) = \phi(x) \quad \text{para todos } x \in E \text{ e } \phi \in E',$$

é uma isometria linear.

Demonstração. Veja [[6], Proposição 4.3.1]. □

Definição 1.9. *Um espaço normado E é dito reflexivo se o mergulho canônico descrito na proposição anterior é sobrejetivo. Nesse caso, o mergulho J_E é um isomorfismo isométrico.*

Proposição 1.6. *Se E é um espaço normado reflexivo, então E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [[6], Proposição 4.3.5]. □

Teorema 1.4. *Seja E um espaço reflexivo. Se $F \subset E$ é um subespaço vetorial fechado, então F é reflexivo.*

Demonstração. Veja [[4], Teorema 4.2]. □

Definição 1.10. *Um espaço normado E é dito uniformemente convexo se, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leq 1 - \delta,$$

sempre que $||x - y|| \geq \epsilon$ e $x, y \in B_E := \{z \in E \mid ||z|| \leq 1\}$.

Teorema 1.5. *(Teorema de Milman-Pettis) Se E é um espaços de Banach uniformemente convexos, então E é reflexivo.*

Demonstração. Veja [[6], Teorema 6.6.6]. □

Definição 1.11. *Sejam E e F espaços de Banach e $U \subset E$. Uma aplicação $\phi : U \to F$ é compacta se para todo subconjunto limitado $V \subset U$, $\overline{\phi(V)}$ é compacto em F.*

Teorema 1.6. *Sejam E e F espaços de Banach. Se $\phi : E \to F$ é compacto então para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a sequência $(\phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subsequência convergente em F.*

Demonstração. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitado em E, segue do fato de ϕ ser compacto que o conjunto dos elementos da sequência $(\phi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ pré-compacto em F. Logo, $\overline{\{\phi(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}}$, é compacto em F e portanto admite uma subsequência convergente e segue o resultado. □

Definição 1.12. *Sejam E e F espaços normados tais que $E \subset F$.*

1. *Se a aplicação identidade $id : E \to F$ for um operador linear contínuo, dizemos que E está imerso continuamente em F, e denota-se por $E \hookrightarrow F$.*

2. *Se a aplicação identidade $id : E \to F$ for um operador linear compacto, dizemos que E está imerso compactamente em F, e denota-se por $E \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow F$. Neste caso, toda sequência limitada em $(E, ||.||_E)$ possui uma subsequencia convergente em $(F, ||.||_F)$.*

Observação 1.1. *Sabe-se que a aplicação inclusão é uma aplicação linear, então nota-se que para existir uma imersão $E \hookrightarrow F$, é necessário e suficiente que exista uma constante C tal que*

$$||x||_F \leq C||x||_E, \text{ para todo } x \in E.$$

Teorema 1.7. *(Teorema de Arzelá-Ascoli) Seja E um subconjunto do conjunto das aplicações contínuas de K em $\mathbb{R}$, em que K é um espaço métrico compacto. A fim de que $E \subset C(K;\mathbb{R})$ seja relativamente compacto, isto é, $\overline{E}$ seja compacto em $C(K;\mathbb{R})$, é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam atendidas:*

1. *E é equicontínuo, isto é, para todo $t_0 \in K$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(t) - f(t_0)| < \epsilon,$$

para todo $t \in K$ com $d(t, t_0) < \delta$ e $f \in E$.

2. *E é equilimitado, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C$, para todos $t \in K$ e $f \in E$.*

Demonstração. Veja [[6], Teorema B.7]. □

1.2 Espaços de Funções

1.2.1 Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta subseção, apresentaremos a definição e algumas propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$ que serão úteis ao longo desse trabalho. Para maiores detalhes, consultar [5] e [6].

Definição 1.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\Omega)$ é definido como sendo o espaço das funções p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}.$$

A norma usual desse espaço é

$$||f||_{L^p(\Omega)} = ||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Definição 1.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. O espaço $L^\infty(\Omega)$ é definido como sendo o espaço das funções reais mensuráveis essencialmente limitadas, isto é,*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \sup_\Omega |f| < \infty \},$$

munido da norma

$$||f||_\infty = \sup_\Omega |f|.$$

Teorema 1.8. *O espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço de Banach munido das normas introduzidas nas definições 1.13 e 1.14.*

Demonstração. Veja [[4], Proposição 1.14. [6], Teorema 1.2.3 e Teorema 1.3.1]. □

Definição 1.15. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O conjugado de p é o numero positivo q tal que:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

No caso em que $p = \infty$ temos $q = 1$ e vice-versa.

Teorema 1.9 (Desigualdade de Hölder para integrais)**.** *Sejam $p, q > 1$ tais que q é o conjugado de p. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$||fg||_1 = \int_\Omega |fg| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

Demonstração. Veja [[6], Teorema 1.2.1]. □

Teorema 1.10 (Desigualdade de Minkowski para integrais)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \right)^{1/p}.$$

Demonstração. Veja [[6], Teorema 1.2.2]. □

Teorema 1.11. *O espaço $L^p(\Omega)$ é um reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Veja [[6], Proposição 4.3.12]. □

Teorema 1.12. *O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço separável para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Veja [[4], Proposição 4.18]. $\square$

Definição 1.16. *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denota-se por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$ valer*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Teorema 1.13. *Sejam $1 < q < \infty$ e $u \in L^q(\Omega)$. Então para todo $1 \leq p \leq q$, temos $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Se $p = q$ é imediato. Supondo então $p < q$, logo $\dfrac{q}{p} > 1$. Como $u \in L^q(\Omega)$, então

$$\int_\Omega |u|^q < \infty$$

mas $\displaystyle\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{q}{p}} = \int_\Omega |u|^q < \infty$. Logo $|u|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\Omega)$. Para aplicar o Teorema 1.9, devemos encontrar o conjugado de $\frac{q}{p}$. Seja tal conjugado denotado por m, logo ele deve satisfazer:

$$\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = 1 - \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{q-p}{q} \Leftrightarrow m = \frac{q}{q-p}.$$

Sabe-se que função constante pertence a $L^k(\Omega)$ para todo k natural. Aplicando a Desigualdade de Holder para integrais 1.9 temos:

$$\begin{aligned}
||1 \cdot |u|^p||_1 = \int_\Omega 1 \cdot |u|^p &\leq ||1||_m \cdot ||(|u|^p)||_{q/p} \\
&= \left(\int_\Omega 1^m\right)^{1/m} \cdot \left(\int_\Omega (|u|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= |\Omega|^{1/m} \cdot \left(\int_\Omega (|u|)^q\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= C \cdot \left(\left(\int_\Omega (|u|)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p \\
&= C||u||_q^p.
\end{aligned}$$

Logo, elevando ambos os lados da desigualdade acima a $\dfrac{1}{p}$ obtemos que $||u||_p \leq C||u||_q$. E isso implica que $L_q(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$, como queríamos. $\square$

1.2.2 Espaços $C^k(\overline{\Omega})$ e Espaços de Hölder

Nesta subseção, apresentaremos algumas definições e notações sobre os espaços $C^k(\overline{\Omega})$ e os espaços de Hölder. Consideramos ao longo dessa subseção que Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.17. *Usaremos a notação de multi-índice para denotar a derivada parcial*

$$D^\gamma f(x) = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}}(x),$$

em que $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ *e* $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Definição 1.18. *Seja* k *um inteiro não negativo. Definimos o espaço* $C^k(\Omega)$ *por:*

$$C^k(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\gamma f \textit{ é contínua em } \Omega \textit{ para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Denota-se $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Definição 1.19. *Seja* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. O suporte de* g *é o seguinte conjunto:*

$$\operatorname{supp}(g) := \overline{\{x \in \Omega \mid g(x) \neq 0\}}.$$

Se $\operatorname{supp}(g)$ *for compacto em* Ω*, dizemos que a função* g *tem suporte compacto. Denota-se por* $C_0(\Omega)$ *o espaço das funções contínuas em* Ω *que têm suporte compacto.*

Definição 1.20. *Seja* k *um inteiro não negativo. Definimos por* $C_0^k(\Omega)$ *o seguinte conjunto:*

$$C_0^k(\Omega) := \{g \in C^k(\Omega) \mid g \textit{ tem suporte compacto}\},$$

e para $k = \infty$,

$$C_0^\infty(\Omega) := \{g \in C^k(\Omega) \textit{ para todo } k \in \mathbb{Z}_+ \mid g \textit{ tem suporte compacto}\}.$$

Definição 1.21. *Dizemos que uma função* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *Hölder contínua com expoente* $\alpha \in (0, 1]$*, se*

$$\sup_{x,y \in \Omega \text{ e } x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

e denotamos este fato por $f \in C^\alpha(\Omega)$*, se* $\alpha < 1$*, e* $f \in C^{0,1}(\Omega)$ *se* $\alpha = 1$*. Também adotamos a seguinte notação:*

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x,y \in \Omega \text{ e } x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Logo, se f é Hölder contínua com expoente α em Ω, então

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^\alpha(\Omega)} |x - y|^\alpha \text{ para todos } x, y \in \Omega.$$

Vemos então que, se uma função é Hölder contínua em Ω, então ela é contínua, e ainda mais, é uniformemente contínua.

Definição 1.22. *Define-se o espaço de Hölder como*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \mid D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \textit{ para todo } |\gamma| \leq k\}.$$

Sabe-se que uma função limitada e uniformemente contínua em Ω tem uma única extensão contínua limitada em $\overline{\Omega}$; A definição a seguir esta fundamentada nesta idéia.

Definição 1.23. *Definimos $C^k(\overline{\Omega})$ como o espaço das funções reais definidas em Ω, cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são limitadas e uniformemente contínuas, isto é,*

$$\begin{aligned} C^k(\overline{\Omega}) \;\; &= \;\; \{f \in C^k(\Omega) \mid D^\gamma f \textit{ é limitada e uniformemente contínua em} \\ &\qquad \Omega \textit{ para todo } |\gamma| \leq k\}, \end{aligned}$$

dotado da norma

$$||f||_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\gamma|\leq k} ||D^\gamma f||_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Usualmente, denota-se $C^0(\overline{\Omega})$ simplesmente por $C(\overline{\Omega})$, e define-se $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$.

Veremos agora a definição de um outro espaço, que também é chamado de Espaço de Hölder.

Definição 1.24. *O espaço de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o subespaço de $C^k(\overline{\Omega})$ formado pelas funções cujas derivadas parciais até a ordem k (inclusive) são todas Hölder contínuas com expoente α em Ω, isto é,*

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}) \mid D^\gamma f \in C^\alpha(\Omega) \textit{ para todo } |\gamma| \leq k\},$$

com a norma

$$||f||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = ||f||_{C^k(\overline{\Omega})} + \max_{|\gamma|\leq k}[D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)}, \tag{1.2}$$

em que

$$[D^\gamma f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega \textit{ e } x\neq y} \frac{|D^\gamma f(x) - D^\gamma f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Caso $\alpha = 0$, temos $C^k(\overline{\Omega})$ um espaço de Hölder:

$$C^k(\overline{\Omega}) = C^{k,0}(\overline{\Omega}).$$

Proposição 1.7. *$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é um espaço vetorial normado, e além disso, é Banach, com a norma dada em (1.2).*

Demonstração. Veja [[4], Proposição 1.20, Proposição 1.21]. □

Teorema 1.14. *(Imersões de Hölder) Para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$ valem as seguintes imersões:*

1. $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;
2. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;
3. $C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Se Ω é limitado, as duas últimas imersões são compactas.
Se Ω é convexo e limitado, todas as três imersões são compactas.
Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais:

1. $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$;

2. $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$;

sendo a última compacta se Ω for também limitado.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 9.6]. □

Definição 1.25. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. O conjunto $\partial\Omega$ ou Ω é dito de classe $C^{k,\alpha}$, em que $0 \leq \alpha \leq 1$, se para todo $x \in \partial\Omega$ existe uma bola $B := B(x,r)$ e um difeomorfismo $\phi : B \to U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, tais que:*

1. $\phi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$;

2. $\phi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

3. $\phi \in C^{k,\alpha}(B)$, $\phi^{-1} \in C^{k,\alpha}(U)$;

em que $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.

Em particular, se $\alpha = 0$ dizemos que $\partial\Omega$ ou Ω é de classe C^k. Se Ω é de classe C^k para todo k natural, então dizemos que Ω é um domínio limitado e suave.

1.2.3 Espaço de Sobolev

Nesta subseção apresentaremos alguns resultados e definições sobre espaços de Sobolev, que são espaços usados ao longo desse trabalho. Para maiores detalhes, consultar Biezuner [4] e [5] e Gilbarg e Trudinger [21]. Vamos considerar ao longo dessa subseção $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto.

Definição 1.26. *Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice, isto é, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Dizemos que uma função $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a α-ésima derivada fraca de u, se*

$$\int_\Omega u(D^\alpha \varphi)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se este for o caso, denota-se

$$v_\alpha := D^\alpha u.$$

Uma função u é dita fracamente diferenciável, se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u existirem, e é fracamente diferenciável k vezes, quando $D^\alpha u$ existir para todos os multi-índices $0 \leq |\alpha| \leq k$. Denotamos o espaço das funções k vezes fracamente diferenciáveis por $W^k(\Omega)$.

Se v_α existe, ela é unicamente determinada, a menos de conjuntos de medida nula.

Observação 1.2. *Temos $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. Nota-se então que o conceito de derivada fraca é uma extensão do conceito de derivada.*

O próximo exemplo nos mostra que a inclusão na observação anterior é própria.

Exemplo 1.1. *Sejam* $\Omega = (-1,1)$ *e* $u(x) = |x|$. *Como* u *é uma função contínua, segue que* $u \in L^1(\Omega)$, *donde* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Para todo* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)dx &= -\int_{-1}^{0} x\phi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\phi'(x)dx \\
&= -\phi(-1) + \int_{-1}^{0} \phi(x)dx + \phi(1) - \int_{0}^{1} \phi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \phi(x)dx - \int_{0}^{1} \phi(x)dx \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\phi(x)dx + \int_{0}^{1} \phi(x)dx\right).
\end{aligned}$$

Para a terceira igualdade anterior, usamos o fato de $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, *o que implica em* $\phi(-1) = \phi(1) = 0$. *Então, se tomarmos* $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ *como sendo*

$$v(x) = \begin{cases} -1 & se \quad -1 < x \leq 0, \\ \ \ 1 & se \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

segue que

$$\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)dx,$$

donde v *é uma derivada fraca de* u, *isto é,* $u \in W^1(\Omega)$. *Entretanto, sabemos do cálculo diferencial que a derivada da função* u *não existe em* 0, *então* $u \notin C^1(\Omega)$.

Definição 1.27. *Sejam* $p \geq 1$ *e* $k \geq 0$ *inteiros. O espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$ *é definido como:*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\}.$$

Observação 1.3. *O espaço de Sobolev é um espaço vetorial.*

O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ pode ser munido da seguinte norma:

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{1/p}, \text{ para } 1 \leq p < \infty \tag{1.3}$$

e

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq k} ||D^\alpha u||_{L^\infty}, \text{ para } p = \infty.$$

Usamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ para denotar o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$ e esse também é chamado de Espaço de Sobolev.

Observação 1.4. *Pelas definições dos espaços de Sobolev, podemos notar que para todo* $p \geq 1$ *e* $k \geq 0$ *inteiros, temos as seguintes inclusões:*

$$C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Teorema 1.15. *Sejam $p \geq 1$ e $k \geq 0$ inteiros. Então, $W^{k,p}(\Omega)$ dotado da norma (1.3), é um espaço de Banach se $1 \leq p \leq \infty$, separável se $1 \leq p < \infty$, reflexivo e uniformemente convexo se $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.15]. □

Corolário 1.1. *Sejam $p \geq 1$ e $k \geq 0$ inteiros. Então, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach se $1 \leq p \leq \infty$, separável se $1 \leq p < \infty$ e reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Por definição, temos $W_0^{k,p}(\Omega)$ um subespaço vetorial fechado de $W^{k,p}(\Omega)$, que pelo teorema anterior é um espaço de Banach. Logo pela Proposição 1.1, segue que $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O fato de $W_0^{k,p}(\Omega)$ ser separável e reflexivo, decorre da Proposição 1.4 e do Teorema 1.4, respectivamente. □

Definição 1.28. *Para $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ como o espaço das funções que pertencem ao espaço $W^{k,p}(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, isto é, $\overline{\Omega'}$ é compacto em Ω.*

Teorema 1.16. *$C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.18]. □

Teorema 1.17. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $u \in W^{k,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.24]. □

1.2.4 Imersões de Sobolev

Caso $kp < n$

Definição 1.29. *Sejam $n, p, k \in \mathbb{N}$. Se $kp < n$, definimos*

$$p^* := \frac{np}{n - kp}.$$

Notemos que, por definição, $p^* > p$.

Teorema 1.18 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos*

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [[5], Lema 11.27]. □

Teorema 1.19. *(Imersão de Sobolev) Sejam $p, n, k \in \mathbb{N}$. Se $p \geq 1$ e $kp < n$, então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo $p \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.30 e Corolário 11.31]. □

Corolário 1.2. *Se Ω, além de aberto, for limitado, então para $p \geq 1$ tal que $kp < n$ vale a imersão*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Veja [[5], Corolário 11.32]. □

Teorema 1.20. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1. Se $p \geq 1$ e $kp < n$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

para todo $1 \leq q \leq p^*$.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.33 e Corolário 11.34]. □

Teorema 1.21. *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $p \geq 1$ e $kp < n$, então*

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega)$$

para todo $p \leq q \leq p^*$. O resultado é valido para abertos arbitrários se trocarmos W por W_0.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.35]. □

Caso $kp = n$

Teorema 1.22. *(Imersão de Sobolev) Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $p \geq 1$ então*

$$W^{\frac{n}{p},p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

em que $p \leq q < \infty$. O resultado é valido para abertos arbitrários se trocarmos W por W_0.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.37]. □

Caso $kp > n$

Teorema 1.23. *(Imersão de Sobolev) Sejam Ω aberto e limitado e $p \geq 1$ tal que $kp > n$. Então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m < k - \dfrac{n}{p}$.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.40]. □

Lema 1.1. *(Desigualdade de Morrey) Seja $p > n$. Se Ω, além de aberto, for limitado, então existe uma constante $C(n,p)$ tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se*

$$||u||_{C^{1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

Em geral, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ existe uma constante C tal que

$$||u||_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Veja [[5], Lema 11.42]. □

Teorema 1.24. *(Imersão de Sobolev) Seja Ω aberto e limitado. Se $p \geq 1$ e $kp > n$, então*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$, em que

$$0 < \beta < \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro,}$$

e

$$0 < \beta < 1 \text{ se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.}$$

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.43]. □

Teorema 1.25. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Se $p \geq 1$ e $kp > n$, então*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$$

para todo $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$, em que

$$0 < \beta < \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro,}$$

e

$$0 < \beta < 1 \text{ se } \frac{n}{p} \text{ não é um inteiro.}$$

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.45]. □

Definição 1.30. *Dizemos que o conjunto Ω satisfaz a condição de cone interior uniforme, se existe um cone fixo K_Ω tal que cada $x \in \partial\Omega$ é o vértice de um cone $K_\Omega(x) \subset \overline{\Omega}$ congruente a K_Ω. Exemplos de conjuntos que satisfazem essa condição, são os abertos com fronteiras de Lipschitz, que inclui abertos de classe C^1.*

Definição 1.31. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com volume finito. A média de u em Ω é definida como*

$$\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx.$$

Teorema 1.26 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo que satisfaz a condição do cone interior. Se $p \geq 1$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||u - \overline{u}||_{L^p(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.55]. □

Teorema 1.27 (Desigualdade de Sobolev-Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado conexo que satisfaz a condição do cone interior. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||u - \overline{u}||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.56]. □

Teorema 1.28 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n}\right)^{1/n} ||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Veja [[5], Corólario 11.58]. □

Notação: $||D^k u||_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}$.

Teorema 1.29 (Desigualdade de Interpolação)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado que satisfaz a condição do cone interior. Se $p \geq 1$, então para qualquer $\epsilon > 0$ e para qualquer inteiro $1 \leq |\alpha| \leq k-1$, existe uma constante $C_\epsilon = C(n, k, p, |\alpha|, \Omega, \epsilon) > 0$ tal que*

$$||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon||D^k u||_{L^p(\Omega)} + C_\epsilon||u||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se substituirmos W por W_0, o resultado é válido para abertos arbitrários.

Demonstração. Veja [[5], Teorema 11.59]. □

Corolário 1.3. *A norma $||u|| := ||u||_{L^p(\Omega)} + ||D^k u||_{L^p(\Omega)}$ é uma norma equivalente à norma usual em $W^{k,p}(\Omega)$, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado que satisfaz a condição do cone interior, e à norma usual em $W_0^{k,p}(\Omega)$ se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto arbitrário.*

Demonstração. Veja [[5], Corolário 11.60]. □

1.3 Um Pouco sobre Teoria Elíptica

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados envolvendo operadores elípticos que serão muito úteis ao longo deste trabalho. Para maiores detalhes, consultar Biezumer [5] e Gilbarg e Trudinger [21].

Operadores lineares de segunda ordem são dados da seguinte forma:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{1.4}$$

em que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall i,j \in \{1,\ldots,n\}$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.32. *Um operador da forma (1.4) é dito elíptico, se a matriz $(a_{ij}(x))$ é positiva definida para todo $x \in \Omega$, isto é, denotando por $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são o menor e o maior autovalor de $(a_{ij}(x))$, respectivamente, então*

$$0 < \lambda(x)||\xi||^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)||\xi||^2$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. O operador L é dito estritamente elíptico em Ω se existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \lambda_0$ para todo $x \in \Omega$. Se $\dfrac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ é limitado em Ω, então o operador é dito uniformemente elíptico.

Observação 1.5. *O operador Laplaciano $\Delta u := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ é um operador estritamente elíptico. Como ao longo do texto vamos tratar de equações diferenciais envolvendo o operador laplaciano, nós restringiremos à ele nos próximos resultados que seguem. Suas versões para operadores mais gerais podem ser encontrados em [5] e [21].*

Definição 1.33. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $f \in L^p(\Omega)$. Uma função $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ é dita solução forte da equação $\Delta u = f$ se satisfaz a equação em q.t.p.(quase todo ponto) em Ω.*

Observação 1.6. *Para cada função u denotamos por $u^+ = \max(u,0)$ e $u^- = \min(u,0)$.*

Teorema 1.30. *(Princípio do Máximo Fraco) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$. Se $\Delta u \geq 0$ em Ω, então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Se $\Delta u \leq 0$ em Ω, então

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

Demonstração. Veja [[21], Teorema 9.1]. $\square$

Proposição 1.8. *(Princípio de Comparação) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Se* $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ *são tais que*

$$\begin{cases} \Delta u &= \Delta v \quad em \quad \Omega, \\ u &= v \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u = v$ *em* Ω. *Se*

$$\begin{cases} \Delta u &\geq \Delta v \quad em \quad \Omega, \\ u &\leq v \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \leq v$ *em* Ω.

Demonstração. Veja [[21], Teorema 9.5]. □

Observação 1.7. *Como consequência do princípio de comparação, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad em \quad \Omega, \\ u &= g \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma única solução forte $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.34. *Seja* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$. *Dizemos que a fronteira* $\partial\Omega$ *satisfaz a condição de esfera interior (com raio* r_0*) se existe* $r_0 > 0$ *satisfazendo a seguinte condição: para todo* $y_0 \in \partial\Omega$ *existe um ponto* $x_0 \in \Omega$ *tal que* $B(x_0, r_0) \subset \Omega$ *e* $y_0 \in \partial B(x_0, r_0)$.

A fronteira $\partial\Omega$ *é dita satisfazendo a condição de esfera exterior (com raio* r_0*) se existe* $r_0 > 0$ *satisfazendo a seguinte condição: para todo* $y_1 \in \partial\Omega$ *existe um ponto* $x_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ *tal que* $B(x_1, r_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ *e* $y_1 \in \partial B(x_1, r_0)$. *Se ambas as condições de esfera exterior e interior (com raio* r_0*) são satisfeitas dizemos que* $\partial\Omega$ *satisfaz a condição de esfera.*

Teorema 1.31. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e limitado. Então* $\partial\Omega$ *é de classe* $C^{1,1}$ *se, e somente se,* $\partial\Omega$ *satisfaz a condição de esfera.*

Demonstração. Veja [[2], Lema 2.2]. □

Teorema 1.32. *(Lema de Hopf (Fraco)) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e* $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > n$, *uma função não constante satisfazendo* $\inf ess \Delta u \geq 0$ *em* Ω *e*

$$m := \inf_{\Omega} u \in (-\infty, 0].$$

Assuma ainda que existe $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que* $u(x_0) = m$. *Então,*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

em que ν *é um vetor normal exterior a* $\partial\Omega$.

Demonstração. Veja [[18], Teorema 1.6]. □

Teorema 1.33. *(Princípio do Máximo Forte) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto. Suponha que* $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ *e satisfaz* $\Delta u \geq 0$ *(respectivamente* $\Delta u \leq 0$*) em* Ω. *Se* u *atinge seu máximo não negativo (respectivamente mínimo não positivo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*

Demonstração. Veja [[21], Teorema 9.6]. □

Lema 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $v, w \in W^{2,p}(\Omega)$, em que $p > n$, tais que $v, w > 0$ em Ω e $v \equiv w \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}, \dfrac{\partial w}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, em que ν é um vetor normal exterior a $\partial\Omega$. Então, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $v > tw$ em Ω.*

Demonstração. (Adaptação da prova do Lema 5.3 [16]). Definimos

$$m = \min_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu}, \;\; M = \max_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Logo, por hipótese segue que $m, M < 0$. Tome $t > 0$ tal que $tm - M > 0$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(tw - v) = t\frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \geq t \min_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} - \max_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} = tm - M > 0,$$

sobre $\partial\Omega$. Como por hipótese, $tw - v = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue da desigualdade acima que $tw - v < 0$ em uma determinada vizinhança de $\partial\Omega$. Definindo $K \subset\subset \Omega$ um conjunto compacto, o complementar em Ω de tal vizinhança. Então, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $tw - v < 0$ em K. Dessa maneira, para $t > 0$ suficientemente pequeno, vale $tw - v < 0$ em Ω. □

Teorema 1.34. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe $C^{1,1}$ e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Então existe uma única solução forte $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para o seguinte problema:*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [[21], Teorema 9.15]. □

Lema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe $C^{1,1}$. Então existe uma constante C (independente de u) tal que*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||\Delta u||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Demonstração. Veja [[21], Lema 9.17]. □

Teorema 1.35. *(Estimativas Globais) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe $C^{1,1}$ e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{2,p}(\Omega)$ é uma solução forte de*

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega,$$

então existe uma constante

$$C = C(n, p, \Omega)$$

tal que

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)}\right).$$

Demonstração. Veja [[5], Teorema 13.4]. □

Teorema 1.36. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $f \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$ *(respectivamente* $C^{k-1,\alpha}(\Omega)$*),* $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$ *e* $0 < \alpha < 1$. *Se* $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *é uma solução forte de*

$$\Delta u = f \ \text{em} \ \Omega,$$

então $u \in W^{k+2,q}_{loc}(\Omega)$ *(respectivamente* $C^{k+1,\alpha}(\Omega)$*). Além disso, se* Ω *é uma aberto de classe* $C^{k+1,1}$ *e* $f \in W^{k,q}(\Omega)$ *(respectivamente* $C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$*), então* $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$ *(respectivamente* $C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega})$*).*

Demonstração. Veja [[5], Teorema 13.6]. $\square$

Capítulo 2

Construção da Hipersuperfície Principal para Sistemas do Tipo Lane-Emden

2.1 Teorema do Tipo Krein-Rutman Não Linear

Neste capítulo, usamos um teorema do tipo Krein-Rutman não linear para encontrar a hipersuperfície principal gerada pelos autovalores principais associados ao sistema (8).

Considere E um espaço de Banach real.

Definição 2.1. *Define-se um cone fechado como sendo um conjunto convexo $K \subset E$ tal que:*

1. $\lambda K \subset K$, *para todo* $\lambda \geq 0$;
2. $K \cap (-K) = \{0\}$.

Definição 2.2. *Um cone $K \subset E$ é dito um cone sólido se $intK \neq \emptyset$.*

Definição 2.3. *Uma relação entre elementos de um determinado conjunto é chamada de ordem parcial se satisfaz as propriedades de reflexividade, antissimetria e transitividade.*

Através da Definição 2.1, podemos usar um cone fechado $K \subset E$ para induzir uma ordem parcial em E da seguinte maneira:

$$u \preceq v \Leftrightarrow v - u \in K \text{ e } u \prec v \Leftrightarrow v - u \in K \setminus \{0\}, \tag{2.1}$$

em que $u, v \in E$.

Mostremos que a relação (2.1) é de fato uma ordem parcial em E:

1. <u>Reflexividade</u>: Seja $u \in K$. Então, $u - u = 0 \in 0K \subset K$ e assim $u \preceq u$;

2. Antissimetria: Sejam $u, v \in K$ tais que $u \preceq v$ e $v \preceq u$. Então $v-u \in K$ e $u-v \in K$. Logo, por $v-u = -(u-v) \in -K$, segue que $v-u \in K \cap (-K) = \{0\}$.

3. Transitividade: Sejam $u, v, w \in K$ tais que $u \preceq v$ e $v \preceq w$. Então $v-u \in K$, $w-v \in K$ e como K é convexo, segue que $\frac{1}{2}(w-u) = \frac{1}{2}(w-v) + (1-\frac{1}{2})(v-u) \in K$. Assim, do item 1 da Definição 2.1, decorre que $w-u \in K$, isto é, $u \preceq w$.

Utilizando essa ordenação, podemos dizer que o espaço de Banach $(E, K, \preceq)$ está parcialmente ordenado e que K é o cone positivo deste espaço.

Antes de enunciar a versão do Teorema de Krein-Rutman, que será usada neste trabalho, apresentamos algumas definições necessárias para este fim.

Definição 2.4. *Um operador $T : E \to E$ é dito crescente se*

$$u \prec v \Rightarrow T(u) \preceq T(v). \tag{2.2}$$

E é dito estritamente crescente se

$$u \prec v \Rightarrow T(u) \prec T(v). \tag{2.3}$$

Se $T(u) \succeq 0$ para todo $u \in K$, então T é dito um operador positivo. Neste caso, $T(K) \subset K$, pois $T(u) \succeq 0$ implica em $T(u) = T(u) - 0 \in K, \forall u \in K$. Além disso, diremos que T é fortemente positivo, se $T(K \setminus \{0\}) \subset intK$.

Definição 2.5. *Um operador $T : E \to E$ é positivamente 1-homogêneo, se a seguinte condição é valida*

$$T(tx) = tT(x) \text{ para todo } t > 0.$$

Teorema 2.1. *[28](**Teorema do Tipo Krein-Rutman**) Seja E um espaço de Banach real contendo um cone fechado K. Seja $T : E \to E$ um operador crescente, positivamente 1-homogêneo, contínuo e compacto e tal que existem um elemento não nulo $u \in K$ e $M > 0$ satisfazendo*

$$u \preceq MTu.$$

Então T possui um autovetor não nulo $x_0 \in K$. Além disso, se K é um cone sólido e se o operador T é estritamente crescente e fortemente positivo em $K \setminus \{0\}$, então x_0 é o único autovetor em K a menos de constante multiplicativa. E, finalmente, se μ_0 é o autovalor correspondente, então ele pode ser caracterizado como o autovalor de menor valor absoluto e além disso, é simples.

2.2 Hipersuperfície Principal

De agora em diante, consideraremos $m \geq 2$ um número natural, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $n \geq 2$, $\rho_i \in L^p(\Omega)$ funções positivas q.t.p. em Ω, $p > n$, com $i = 1, \ldots, m$, e α_i números reais positivos que satisfazem $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Também adotaremos a seguinte notação:

$$\mathbb{R}^m_+ := \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_j > 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Por fim, sempre que falarmos em solução, caso não seja mencionado nada ao contrário, estaremos nos referindo à solução forte, como na Definição 1.33.

Queremos encontrar condições para que o seguinte sistema, que é um problema de autovalor, tenha solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i &= \gamma_i\rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{i+1} & \text{em} & \Omega, \\ \varphi_i &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

em que $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_{m+1} := \varphi_1$, γ_i são reais positivos.

Definição 2.6. *O ponto $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ é um autovalor do sistema (2.4) se ele admite uma solução forte não trivial em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Um ponto $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$ é chamado de autovalor principal se o sistema (2.4) admite uma solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.*

Mostraremos que o conjunto dos autovalores principais

$$\begin{aligned} \Gamma \;=\; & \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m \mid (2.4) \text{ tem solução forte positiva em} \\ & \quad W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

forma uma hipersuperfície suave em $\mathbb{R}^m_+$, que denominaremos hipersuperfície principal do sistema (2.4), pois é formada por autovalores principais em espaços de dimensão maior ou igual a 2. Essa nomenclatura foi introduzida por M. Montenegro em [30].

Nesse sentido, usaremos o Teorema 2.1 para mostrar que o conjunto Γ pode ser visto como a imagem inversa de um valor positivo por uma função suave.

Para tanto, consideremos $E_0 := C(\overline{\Omega})$, $E_1 := C_0^1(\overline{\Omega}) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ e seus respectivos cones positivos, $K_0 := \{u \in E_0 \mid u \geq 0 \text{ em } \Omega\} \subset E_0$ e $K_1 := \{u \in E_1 \mid u \geq 0 \text{ em } \Omega\} \subset E_1$.

As seguintes caracterizações para os interiores dos cones K_0 e K_1 podem ser encontradas em [3] e [18]:

$$intK_0 := \{f \in E_0 \mid f > 0 \ \text{ em } \Omega\}$$

e

$$intK_1 := \{f \in E_1 \mid f > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial f}{\partial \nu} < 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

logo ambos os cones possuem interior não vazio.

Observação 2.1. *Observe que K_0 realmente satisfaz as condições da Definição 2.1. De fato, sejam $\lambda \geq 0$ e $v \in K_0$. Então $\lambda v \geq 0$, pois $v \geq 0$ e $\lambda \geq 0$, segue que $\lambda v \geq 0$. E como $v \in K_0$, segue que v é limitada e uniformemente contínua em Ω, e por propriedades de funções segue que λv também sera limitada e uniformemente continua em Ω, donde $\lambda v \in C(\overline{\Omega})$, logo $\lambda K_0 \subset K_0$.*

Além disso, pela definição de K_0, temos $-K_0 = \{-u \in C(\overline{\Omega}) \mid u \geq 0 \text{ em } \Omega\} = \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v \leq 0 \text{ em } \Omega\}$. Assim, então se uma função $w \in K_0 \cap (-K_0)$, segue que $w \geq 0$ em Ω e $w \leq 0$ em Ω, logo $w \in C(\overline{\Omega})$ e $w = 0$ em Ω, donde $K_0 \cap (-K_0) = \{0\}$.

Unindo os fatos que acabamos de mostrar com a convexidade de K_0, concluímos que K_0 é um cone fechado em E_0. E de maneira similar temos K_1 um cone fechado em E_1.

Como vimos na seção anterior esses cones definem uma ordem parcial nos seus respectivos espaços de Banach. Basta agora construir uma função T com as propriedades afirmadas no Teorema 2.1.

Se $\varphi \in E_0$, então $|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \in C(\overline{\Omega})$. De fato, para que $|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \in C(\overline{\Omega})$ devemos mostrar que $|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi$ é uniformemente contínua e limitada. Primeiro, temos $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, isto é, φ é limitada e contínua. Logo, tomando um conjunto em $\mathbb{R}$ compacto que contém a imagem de φ, e compondo com as funções módulo e potência que são limitadas e contínuas nesse compacto, logo uniformemente contínuas, segue que $|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Vejamos que $\rho_i|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \in L^p(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\rho_i|\varphi|^{\alpha_i-1}\varphi|^p dx &\leq \int_\Omega |\rho_i|^p||\varphi|^{\alpha_i-1}\varphi|^p dx \\
&\leq \sup_{\overline{\Omega}}|\varphi|^{\alpha_i p}\int_\Omega |\rho_i|^p dx \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Então, a partir do Teorema 1.34 faz sentido definirmos para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ o operador solução $T_i : E_0 \to E_1$ por $T_i(\varphi) = u$, em que $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ é a única solução forte do problema

$$\left\{\begin{array}{rcllc}
-\Delta u &=& \rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i-1}\varphi & \text{em} & \Omega, \\
u &=& 0 & \text{sobre} & \partial\Omega.
\end{array}\right. \tag{2.6}$$

Notemos que como a solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $p > n$ segue pelo Teorema 1.25 que $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, em que $0 < \beta < 1$, e pelo Teorema 1.14 segue que $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ e além disso satisfaz o sistema anterior, logo $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, implicando que $u \in C_0^1(\overline{\Omega}) = E_1$.

Usaremos esses operadores para construir uma função T que satisfaça as hipóteses do Teorema de Krein-Rutman 2.1. Antes disso, vejamos algumas propriedades dos operadores T_i.

Lema 2.1. *Para todo $\tau > 0$ e $\varphi \in E_0$, temos $T_i(\tau\varphi) = \tau^{\alpha_i}T_i(\varphi)$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.*

Demonstração. Sejam $i \in \{1, \ldots, m\}$ fixo, $\varphi \in E_0$ e $u \in E_0$ tal que $u = T_i(\varphi)$. Além disso, considere $\overline{u} = \tau^{\alpha_i} u = \tau^{\alpha_i} T_i(\varphi)$. Então, explorando a linearidade do operador laplaciano e usando o fato de u ser solução de (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} &= -\Delta(\tau^{\alpha_i} u) \\ &= \tau^{\alpha_i}(-\Delta u) \\ &= \tau^{\alpha_i} \rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \\ &= \rho_i(x)|\tau\varphi|^{\alpha_i - 1}\tau\varphi. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{u}$ satisfaz o problema (2.6) com $\tau\varphi$ no lugar de φ, isto é, $T_i(\tau\varphi) = \overline{u}$. Portando, $T_i(\tau\varphi) = \overline{u} = \tau^{\alpha_i} T_i(\varphi)$, como queríamos provar. □

Agora definimos $T : E_0 \to E_0$ como

$$T := T_1 \circ \ldots \circ T_m \circ J, \tag{2.7}$$

em que J é o operador inclusão de $C_0^1(\overline{\Omega})$ em $C(\overline{\Omega})$ garantido pelo Teorema 1.14. Para mostrar que T definido dessa forma satisfaz as condições do Teorema 2.1 usaremos o lema anterior.

Lema 2.2. *$T : E_0 \to E_0$ é positivamente 1-homogêneo.*

Demonstração. Sejam $\tau > 0$ e $\varphi \in E_0$, então usando recorrentemente o Lema 2.1 e a hipótese $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} T(\tau\varphi) &= (T_1 \circ \ldots \circ T_m \circ J)(\tau\varphi) \\ &= (T_1 \circ \ldots \circ T_m)(\tau\varphi) \\ &= (T_1 \circ \ldots \circ T_{m-1})(\tau^{\alpha_m} T_m(\varphi)) \\ &= (T_1 \circ \ldots \circ T_{m-2})(\tau^{\alpha_m \alpha_{m-1}} T_{m-1} \circ T_m(\varphi)) \\ &= \vdots \\ &= \tau^{\prod_{i=1}^m \alpha_i} T(\varphi) \\ &= \tau T(\varphi). \end{aligned}$$

Logo, pela Definição 2.5 temos T positivamente 1-homogêneo. □

Considere o operador solução $(-\Delta)^{-1} : L^\infty(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = h & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Temos, pelo Lema 1.3 a existência de $C, D > 0$ tais que

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||h||_{L^p(\Omega)} \leq D||h||_{L^\infty(\Omega)}$$

e $(-\Delta)^{-1}$ é contínuo.

Lema 2.3. *$T : E_0 \to E_0$ é compacto.*

Demonstração. Como a composição de operadores compactos é um operador compacto, basta mostrarmos que T_i é compacto, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$. De fato, tomando $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $X \subset E_0$ um conjunto limitado. Assim, temos $X^{\alpha_i} = \{|\varphi|^{\alpha_i} \mid \varphi \in X\}$ limitado em $C(\overline{\Omega})$. Logo,

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} \leq C||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||\varphi||^{\alpha_i}_{L^\infty(\Omega)} < C, \ \forall \varphi \in X,$$

isto é, $T_i(X)$ é uniformemente limitado em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Vamos mostrar que $T_i(X)$ é pré-compacto em E_1, isto é, seu fecho é compacto em E_1. Para isto, usaremos o Teorema de Arzelá-Ascoli 1.7. Denotando o conjunto $T_i(X) := S$, segue do que foi observado acima que S é equilimitado em E_1. Por outro lado, como S é uniformemente limitado em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, existe $C > 0$ tal que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leq C, \ \forall u \in S \text{ e } x, y \in \overline{\Omega}.$$

Consequentemente, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \left(\dfrac{\epsilon}{C}\right)^{1/\beta}$, obtemos que $|u(x) - u(y)| < \epsilon$ para todo $x, y \in \overline{\Omega}$ tal que $|x - y| < \delta$ e $u \in S$, isto é, S é equicontínuo.

Além disso, por argumento análogo, prova-se que para cada direção canônica e_i, as derivadas parciais de ordem 1 de funções de S na direção e_i formam um conjunto equicontínuo. Desse modo, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli 1.7, segue que S é pré-compacto, e portando T_i é compacto. $\square$

Lema 2.4. *$T : E_0 \to E_0$ é contínuo.*

Demonstração. Para que T seja contínuo, é suficiente mostrarmos que T_i é contínuo para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, pois a composição de funções contínuas é uma função contínua e J é um operador contínuo. Sejam $i \in \{1, \dots, m\}$ e $\varphi_n \to \varphi$ uma sequência convergente em E_0. Para cada n, seja u_n tal que $u_n = T_i(\varphi_n)$. Então devemos mostrar que $u_n = T_i(\varphi_n) \to T_i(\varphi)$.

Como $\{\varphi_n\}$ limitada em E_0, e provamos no lema anterior que T_i é compacto, segue do Teorema 1.6 que a sequência $\{u_n\}$ admite uma subsequência convergente, isto é, existe $\overline{u} \in C^1_0(\overline{\Omega})$ tal que $u_{n_k} \to \overline{u}$. Mostremos que $\overline{u} = T_i(\varphi)$. De fato, $\varphi_{n_k} \to \varphi$ em E_0 implica em

$$\rho_i(x)|\varphi_{n_k}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{n_k} \to \rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi.$$

Como $(-\Delta)^{-1}$ é contínuo segue que

$$(-\Delta)^{-1}(\rho_i(x)|\varphi_{n_k}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{n_k}) \to (-\Delta)^{-1}(\rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi) \text{ em } E_0.$$

Por outro lado, $(-\Delta)^{-1}(\rho_i(x)|\varphi_{n_k}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{n_k}) = u_{n_k}$ e pela unicidade do limite temos

$$(-\Delta)^{-1}(\rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi) = \overline{u}.$$

Daí, $\overline{u}$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} &= \rho_i(x)|\varphi|^{\alpha_i - 1}\varphi \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \overline{u} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, $\overline{u} = T_i(\varphi)$. Logo T_i é contínuo $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ e então T é contínuo. $\square$

Lema 2.5. *$T : K_0 \to K_0$ é fortemente positivo.*

Demonstração. Sejam $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\varphi \in K_0 \setminus \{0\}$. Como $T_i(\varphi) = 0$ sobre $\partial\Omega$, pelo Princípio do Máximo Forte donde, ou $T_i(\varphi) \equiv 0$, ou $T_i(\varphi) > 0$. Como estamos tomando $\varphi \not\equiv 0$, devemos necessariamente ter $T_i(\varphi) > 0$. Além disso, pelo Lema de Hopf, temos que

$$T_i(\varphi) \in \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) \mid u > 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

em que ν é um vetor normal exterior à $\partial\Omega$.

Logo, $T_i(\varphi)$ pertence ao interior de K_1 que está contido no interior de K_0 e como vale para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ segue que $T(\varphi) \in intK_0$ implicando que T é fortemente positivo. □

Lema 2.6. *$T : E_0 \to E_0$ é estritamente crescente.*

Demonstração. Sejam $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in E_0$ tais que $\varphi_1 \prec \varphi_2$. Isso implica que $\varphi_2 - \varphi_1 \in K_0 \setminus \{0\}$ e pela definição de K_0 temos $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \forall x \in \Omega$ e como $\varphi_2 - \varphi_1$ não é identicamente nula em K_0 segue que existe pelo menos um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que

$$(\varphi_2 - \varphi_1)(x_0) = \varphi_2(x_0) - \varphi_1(x_0) > 0,$$

implicando em $\varphi_2(x_0) > \varphi_1(x_0)$.

Pela desigualdade acima segue que

$$|\varphi_1(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_1(x) \leq |\varphi_2(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_2(x),$$

implicando em

$$\rho_i(x)|\varphi_1(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_1(x) \leq \rho_i(x)|\varphi_2(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_2(x), \forall x \in \Omega.$$

Se $\varphi_1 \equiv 0$, então $T_i(\varphi_1) \equiv 0$ e o resultado segue, pois pelo Lema 2.5 $T_i(\varphi_1) \equiv 0 \prec T_i(\varphi_2)$.

Se $\varphi_1 \not\equiv 0$, considere $u_1 := T_i(\varphi_1)$ e $u_2 := T_i(\varphi_2)$, donde

$$(-\Delta u_1 =)\rho_i(x)|\varphi_1(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_1(x) \leq \rho_i(x)|\varphi_2(x)|^{\alpha_i - 1}\varphi_2(x)(= -\Delta u_2), \forall x \in \Omega,$$

e $u_1 = u_2 = 0$, sobre $\partial\Omega$.

Assim, segue do Princípio de Comparação 1.8 que $u_1 \leq u_2$ em Ω, isto é, $T_i(\varphi_2) - T_i(\varphi_1) \geq 0$. Portanto, $T_i(\varphi_2) - T_i(\varphi_1) \in K_0$ e além disso temos que $T_i(\varphi_2) - T_i(\varphi_1)$ não pode ser identicamente nula. Supondo por contradição que seja identicamente nula, isto é,

$$(T_i(\varphi_2) - T_i(\varphi_1))(x) = 0, \forall x \in \Omega,$$

logo $T_i(\varphi_2)(x) = T_i(\varphi_1)(x)$. E por hipótese temos $\varphi_2(x_0) > \varphi_1(x_0)$ implicando que

$$\begin{aligned}(-\Delta T_i(\varphi_1)(x_0) =)\rho_i(x_0)|\varphi_1(x_0)|^{\alpha_i - 1}\varphi_1(x_0) &< \rho_i(x_0)|\varphi_2(x_0)|^{\alpha_i - 1}\varphi_2(x_0) \\ &= -\Delta T_i(\varphi_2)(x_0).\end{aligned}$$

Logo, $T_i(\varphi_2)(x_0) = T_i(\varphi_1)(x_0)$ e $-\Delta T_i(\varphi_1)(x_0) < -\Delta T_i(\varphi_2)(x_0)$, o que é uma contradição, logo não pode ser identicamente nula e então T_i é estritamente crescente. Como isso vale para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e o operador inclusão também é estritamente crescente, então valerá também para a composição T, como queríamos. $\square$

Lema 2.7. *Seja $T : E_0 \to E_0$. Existe um elemento $u \in K_0 \setminus \{0\}$ e $M > 0$ tal que:*

$$u \preceq MTu.$$

Demonstração. Devemos mostrar que existe $u \in K_0 \setminus \{0\}$ e $M > 0$ tal que:

$$u \preceq MTu \Leftrightarrow MTu - u \in K_0.$$

Tomando uma função $u \in K_0 \setminus \{0\}$ tal que $u \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$ e pela demonstração do Lema 2.5 temos que $Tu > 0$ em Ω, $Tu \equiv 0$ sobre $\partial\Omega$ e $\dfrac{\partial Tu}{\partial \nu} < 0$, então podemos aplicar o Lema 1.2 e temos que existe $\tau > 0$ tal que $Tu - \tau u > 0$ em Ω, mas tomando $M = \dfrac{1}{\tau} > 0$ temos:

$$0 < Tu - \tau u = \tau\left(\frac{1}{\tau}Tu - u\right) = \tau(MTu - u)$$

em Ω. Segue então da positividade de τ que $MTu - u > 0$, e pela forma como foi tomado tem-se que $MTu - u \in K_0$ e temos o que queríamos. $\square$

Através desses lemas, temos T como definida em (2.7) satisfazendo as hipóteses do Teorema de Krein-Rutman 2.1. Então usaremos esse teorema para mostrar que a hipersuperfície principal Γ é a imagem inversa da função suave $H(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1} \dots \gamma_m^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}$ por um valor positivo γ^*, como veremos no teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$. Suponha que $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ e satisfazem $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Então existem uma função $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e uma constante $\gamma^* > 0$ tais que, o sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\varphi_i & = & \gamma_i\rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{i+1} & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_i & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.9}$$

em que $i = 1, \dots, m$ e $\varphi_{m+1} := \varphi_1$, tem uma solução forte limitada positiva em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ se, e somente se,

$$H(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \gamma^*.$$

Demonstração. Através de todos os lemas anteriores provamos que T satisfaz as hipóteses do Teorema do Tipo Krein-Rutman 2.1 e aplicando temos que existem $\gamma^* > 0$ e $\varphi_1 \in K_0 \setminus \{0\}$ tais que $\varphi_1 = \gamma^* T(\varphi_1)$.

Seja $H : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1} \dots \gamma_m^{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}.$$

Suponha que o sistema (2.9) tenha solução forte positiva $(\overline{\varphi_1},\ldots,\overline{\varphi_m}) \in W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, logo $(\overline{\varphi_1},\ldots,\overline{\varphi_m}) \in C_0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^m)$ e

$$-\Delta\overline{\varphi_i} = \gamma_i\rho_i(x)|\overline{\varphi_{i+1}}|^{\alpha_i-1}\overline{\varphi_{i+1}} = -\gamma_i\Delta(T_i(\overline{\varphi_{i+1}})) = -\Delta(\gamma_i T_i(\overline{\varphi_{i+1}})),$$

em que $\overline{\varphi_{m+1}} := \overline{\varphi_1}$.

Assim, como ambas as funções $\overline{\varphi_i}, \gamma_i T_i(\overline{\varphi_{i+1}})$ valem 0 sobre $\partial\Omega$ e pela igualdade anterior segue do Principio da Comparação 1.8 que $\overline{\varphi_i} \equiv \gamma_i T_i(\overline{\varphi_{i+1}})$.

Aplicando a igualdade anterior e o Lema 2.1 segue que

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_1} &= \gamma_1 T_1(\overline{\varphi_2}) \\
&= \gamma_1 T_1(\gamma_2 T_2(\overline{\varphi_3})) \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1} T_1(T_2(\overline{\varphi_3})) \\
&= \vdots \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_m^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}(T_1\circ\ldots\circ T_m)(\overline{\varphi_1}) \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_m^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}(T_1\circ\ldots\circ T_m\circ J)(\overline{\varphi_1}) \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_m^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}} T(\overline{\varphi_1}).
\end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade do autovetor no cone dada pelo Teorema de Krein-Rutman, logo o autovalor principal associado também é único, e concluímos que $H(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) = \gamma^*$.

Reciprocamente, suponha que o vetor $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) \in \mathbb{R}_+^m$ satisfaça

$$\gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_m^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}} = \gamma^*$$

isto é,

$$\varphi_1 = \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_m^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}} T(\varphi_1).$$

Usando o Lema 2.1, segue que

$$\varphi_1 = \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_{m-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}}(T_1\circ\ldots\circ T_{m-1})(\gamma_m T_m(\varphi_1)).$$

Tomando $\varphi_m = \gamma_m T_m(\varphi_1)$, como T é fortemente positivo, concluímos que $\varphi_m > 0$ e

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_{m-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}}(T_1\circ\ldots\circ T_{m-1})(\gamma_m T_m(\varphi_1)) \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_{m-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}}(T_1\circ\ldots\circ T_{m-1})(\varphi_m) \\
&= \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\ldots\gamma_{m-2}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-3}}(T_1\circ\ldots\circ \gamma_{m-1}T_{m-1})(\varphi_m).
\end{aligned}$$

Assim, procedendo de maneira similar definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
\varphi_{m-1} &:= \gamma_{m-1}T_{m-1}(\varphi_m) \\
\vdots &:= \vdots \\
\varphi_2 &?= \gamma_2 T_2(\varphi_3) \\
\overline{\varphi_1} &:= \gamma_1 T_1(\varphi_2).
\end{aligned}$$

E pela fórmula anterior para φ_1 segue que $\varphi_1 = \overline{\varphi_1}$. E pela definição de T_i, satisfazem

$$-\Delta\varphi_i = -\gamma_i\Delta T_i(\varphi_{i+1}) = \gamma_i\rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i-1}\varphi_{i+1}.$$

Logo $(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$ é solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ do sistema (2.9). $\square$

Concluímos, através do teorema anterior, que $\Gamma = H^{-1}(\gamma^*)$, Γ definido em (2.5). E mais, a $(m-1)$-hipersuperfície Γ decompõe $\mathbb{R}^m_+$ em dois conjuntos conexos ilimitados.

Corolário 2.1. *Se $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}_+$, então existe um $\theta = \theta(\nu) > 0$ tal que*

$$(\theta, \theta\nu_1, \ldots, \theta\nu_{m-1}) \in \Gamma.$$

Mais precisamente, o número $\theta(\nu)$ é dado pela seguinte fórmula:

$$\theta(\nu) = \left(\frac{\gamma^*}{\prod_{i=0}^{m-1} \nu_i^{\prod_{k=0}^{i} \alpha_k}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \prod_{k=0}^{i} \alpha_k}},$$

em que $\nu_0 = \alpha_0 = 1$.

Demonstração. Seja H a função definida como no teorema anterior, isto é,

$$H(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \gamma_1 \gamma_2^{\alpha_1} \ldots \gamma_m^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}.$$

Para $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}_+$ tomado arbitrariamente definimos a seguinte função real:

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t, t\nu_1, \ldots, t\nu_{m-1}) \\ &= t \cdot (t\nu_1)^{\alpha_1} \ldots (t\nu_{m-1})^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \\ &= t \cdot t^{\alpha_1} \nu_1^{\alpha_1} \ldots t^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \nu_{m-1}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \\ &= t \cdot t^{\alpha_1} \ldots t^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_{m-1}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \\ &= t^{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_{m-1}^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} \\ &= t^{1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}} H(1, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Observe que g é uma função real contínua e, pelas hipóteses assumidas para α_i, segue que

$$g(0) = 0$$

e

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty.$$

Logo, podemos usar o Teorema do Valor Intermediário para garantir que existe $\theta > 0$

tal que $g(\theta) = \gamma^* > 0$, e assim tomando $\nu_0 = \alpha_0 = 1$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\gamma^* = g(\theta) &= \theta^{\left(\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{i}\alpha_k\right)} H(1,\nu_1,\ldots,\nu_{m-1}) \\
\frac{\gamma^*}{H(1,\nu_1,\ldots,\nu_{m-1})} &= \theta^{\left(\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{i}\alpha_k\right)} \\
\left(\frac{\gamma^*}{H(1,\nu_1,\ldots,\nu_{m-1})}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{i}\alpha_k}} &= \theta \\
\left(\frac{\gamma^*}{\nu_1^{\alpha_1}\ldots\nu_{m-1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{i}\alpha_k}} &= \theta \\
\left(\frac{\gamma^*}{\prod_{i=0}^{m-1}\nu_i^{\prod_{k=0}^{i}\alpha_k}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1}\prod_{k=0}^{i}\alpha_k}} &= \theta.
\end{aligned}$$

□

O corolário anterior será muito útil na construção e demonstrações de algumas propriedades do conjunto extremal, que será estudado no próximo capítulo.

Observação 2.2. *Com esse corólario podemos parametrizar a hipersuperficie principal* Γ *como:*

$$\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1} \mapsto (\theta(\nu), \theta(\nu)\nu_1, \ldots, \theta(\nu)\nu_{m-1}) \in \Gamma.$$

Observação 2.3. *No caso em que* $m = 3$, *temos o sistema*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \gamma_1\rho_1(x)|\varphi_2|^{\alpha_1-1}\varphi_2 & em \quad \Omega, \\ -\Delta\varphi_2 = \gamma_2\rho_2(x)|\varphi_3|^{\alpha_2-1}\varphi_3 & em \quad \Omega, \\ -\Delta\varphi_3 = \gamma_3\rho_3(x)|\varphi_1|^{\alpha_3-1}\varphi_1 & em \quad \Omega, \\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado com fronteira de classe* $C^{1,1}$, $n \geq 2$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in L^p(\Omega)$ *são funções positivas q.t.p.,* $p > n$ *e* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *são números reais positivos tais que* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$. *Um esboço da hipersuperfície principal*

$$\Gamma = \{(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \gamma_1\gamma_2^{\alpha_1}\gamma_3^{\alpha_1\alpha_2} = \gamma^*\}$$

desse sistema é do tipo:

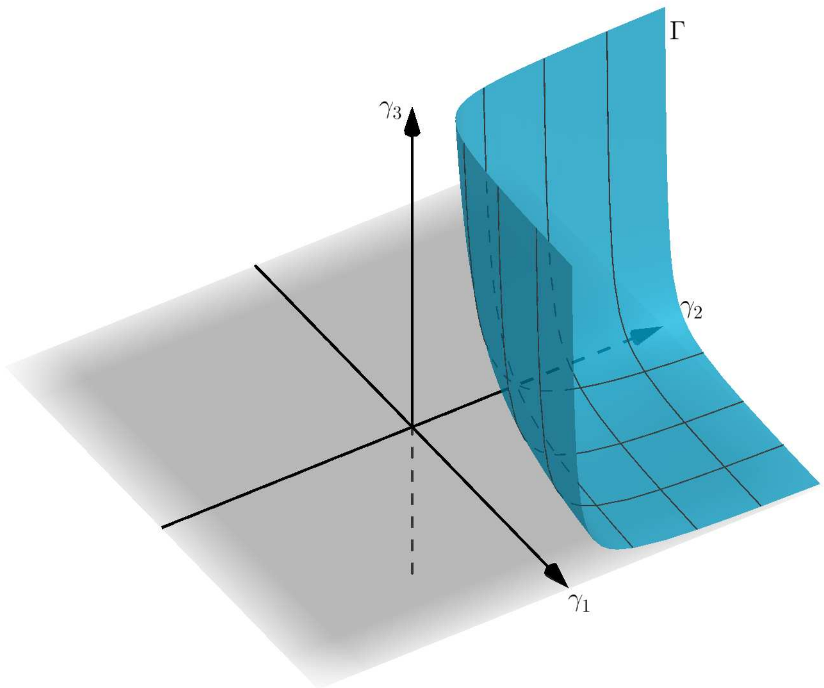

Figura 2.1: Hipersuperfície principal para o caso $m = 3$.

Capítulo 3

Conjunto Extremal

Neste capítulo, estudamos resultados de existência e não existência de soluções fortes não negativas em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $p>n$, para o sistema a seguir

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x,u_1,\ldots,u_m) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u_i &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{1,1}$, $i=1,\ldots,m$, $m\geq 2$, $f_1,\ldots,f_m:\Omega\times\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}$ funções dadas e $\lambda_1,\ldots,\lambda_m>0$. Mais precisamente, queremos estudar condições sobre $\lambda_i's$ para que o sistema (3.1) admita ou não soluções fortes positivas em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Consideremos primeiramente o conjunto χ como o subconjunto de $\mathbb{R}_+^m$ tal que o sistema (3.1) admite solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, isto é,

$$\begin{aligned} \chi \;=\; \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in\mathbb{R}_+^m \mid & \text{ (3.1) admite uma solução forte positiva em} \\ & W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nesse texto, vamos estudar o caso em que as funções $f_i,\ i=1,\ldots,m$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H1) $f_i(x,\cdot,\ldots,\cdot)\in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall x\in\Omega$;

(H2) $0<f_i(\cdot,0,\ldots,0)\leq f_i(\cdot,u_1,\ldots,u_m)\leq f_i(\cdot,v_1,\ldots,v_m)$ se $u_j\leq v_j$, $\forall j\in\{1,\ldots,m\}$;

(H3) $f_i(\cdot,t_1,\ldots,t_m)\in L^p(\Omega), \forall t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+,\ p>n$;

(H4) $f_i(\cdot,u_1,\ldots,u_m)\ \geq\ \rho_i(\cdot)u_{i+1}^{\alpha_i}$, em que $u_{m+1}:=u_1$, $\alpha_j>0$, $\forall j\in\{1,\ldots,m\}$, $\prod_{j=1}^m\alpha_j=1$ e $\rho_1,\ldots,\rho_m\in L^p(\Omega)$ são funções positivas em quase todo ponto, $p>n$.

Observe que o sistema tratado no capítulo anterior, não se trata de um caso particular desse, pois a função $f_i(\cdot,u_1,\ldots,u_m)=\rho_i(\cdot)u_{i+1}^{\alpha_i}$ não satisfaz (H2) já que $f_i(\cdot,0,\ldots,0)=\rho_i(\cdot)0=0$, contrariando a hipótese de f_i ser estritamente positiva.

Vejamos um exemplo de função que satisfaz as 4 hipóteses anteriores.

Exemplo 3.1. *Seja $i \in \{1, \ldots, m\}$ e considere $\rho_i(x), \tau_i(x) \in L^p(\Omega)$ funções positivas q.t.p. em Ω, $p > n$ e $\delta_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ tais que $\prod_{j=1}^m \delta_j\beta_j > 1$, a função*

$$f_i(x, t_1, \ldots, t_m) := (\rho_i(x)t_{i+1}^{\delta_i} + \tau_i(x))^{\beta_i},$$

em que $t_{m+1} = t_1 = 1$, satisfaz todas as quatro hipóteses $(H1) - (H4)$, logo os resultados a seguir valem para esse caso.

O próximo resultado diz que o conjunto χ, como definido em (3.2), é não vazio.

Lema 3.1. *$B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}^m_+ \subset \chi$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. Considere a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, em que $x_j := (u_1^j, \ldots, u_m^j)$ é definido por

$$x_1 = (0, \ldots, 0)$$

e

$$x_{j+1} = (\lambda_1(-\Delta)^{-1}f_1(x, x_j), \ldots, \lambda_m(-\Delta)^{-1}f_m(x, x_j)), \ \forall j \geq 1.$$

Pela definição acima, vemos que $u_i^{j+1} = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_j), \ \forall j \geq 1, \ i = 1, \ldots, m.$

Observe que, pela hipótese (H3) e o Teorema 1.34, temos que $(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_j) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ para todo $j \geq 1$. Para $\overrightarrow{A} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m_+$ fixo, tomemos $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, a_1, \ldots, a_m) \leq a_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Verifiquemos agora que com esse ϵ, temos $B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}^m_+ \subset \chi$. Seja $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}^m_+$, e como $\Lambda \in B_\epsilon(0)$, segue $||\Lambda|| < \epsilon$ implicando $\lambda_i = |\lambda_i| \leq ||\Lambda|| < \epsilon$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Considerando $i = 1, \ldots, m$, segue da afirmação anterior e de (H2) que

$$\lambda_i f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \epsilon f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \epsilon f_i(x, a_1, \ldots, a_m).$$

Podemos usar o Princípio da Comparação 1.8 e a ordem da desigualdade será mantida com o operador solução:

$$\lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, a_1, \ldots, a_m),$$

assim,

$$u_i^2 = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_1) = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, a_1, \ldots, a_m) \leq a_i,$$

e com isso vemos

$$u_i^2 \leq a_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Usando o fato e a ideia anterior temos

$$\begin{array}{rcl} u_i^3 & = & \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_2) \\ & = & \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, u_1^2, \ldots, u_m^2) \\ & \leq & \epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, u_1^2, \ldots, u_m^2) \\ & \leq & \epsilon(-\Delta)^{-1}f_i(x, a_1, \ldots, a_m) \\ & \leq & a_i, \end{array}$$

implicando em $u_i^3 \leq a_i,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$. E continuando de maneira similar chegamos a conclusão que $u_i^j \leq a_i,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Notemos por (H2) que

$$-\Delta u_i^2 = \lambda_i f_i(x, 0, \dots, 0) > 0, \forall x \in \Omega$$

e como $u_i^2 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ temos $u_i^2(y) = 0,\ \forall y \in \partial\Omega$ e então podemos aplicar o Principio do Máximo Fraco, donde $\lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, 0, \dots, 0) \geq 0$, implicando $u_i^2 \geq u_i^1 = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Usando isto e (H2) obtemos

$$\begin{aligned} u_i^3 &= \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, x_2) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, u_1^2, \dots, u_m^2) \\ &\geq \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, u_1^1, \dots, u_m^1) \\ &= u_i^2, \end{aligned}$$

e prosseguindo de maneira similar segue que $u_i^{j+1} \geq u_i^j,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$ e $\forall j \in \mathbb{N}$.

Logo, a sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ está bem definida, é limitada e também é monótona não decrescente para cada x, donde é convergente em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, isto é, existe $X = (X_1, \dots, X_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$x_j \to X,$$

ou seja, $u_i^j = \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, x_{j-1}) \to X_i,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Com isso e com a hipótese que $f_i(x, \cdot, \dots, \cdot) \in C(\mathbb{R}^m),\ \forall x \in \Omega$ segue

$$\begin{aligned} X_i &= \lim_{j \to \infty} u_i^j \\ &= \lim_{j \to \infty} \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, u_1^{j-1}, \dots, u_m^{j-1}) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(\lim_{j \to \infty} x, \lim_{j \to \infty} u_1^{j-1}, \dots, \lim_{j \to \infty} u_m^{j-1}) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1} f_i(x, X_1, \dots, X_m) \\ &= (-\Delta)^{-1} \lambda_i f_i(x, X_1, \dots, X_m). \end{aligned}$$

Logo X é solução do sistema (3.1) pertencente a $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, e então $\Lambda \in \chi$, e como $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}_+^m$ é qualquer segue que $B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}_+^m \subset \chi$. $\square$

No lema anterior, mostramos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\Lambda \in B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}_+^m$, o problema (3.1) admite solução forte positiva. Além disso, a demonstração apresentada nos fornece uma maneira de construir uma solução minimal para (3.1). De fato, suponha $\overrightarrow{U} \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ seja uma solução forte positiva qualquer de (3.1). Substituindo $\overrightarrow{A}$ por $\overrightarrow{U}$ na demonstração anterior, obteremos ao final uma solução $\underline{\overrightarrow{U}}$ de (3.1) satisfazendo $\underline{\overrightarrow{U}} \leq \overrightarrow{U}$, isto é, $\underline{\overrightarrow{U}}$ é solução minimal de (3.1).

Definiremos agora alguns conjuntos e propriedades que vão ajudar a provar propriedades do conjunto extremal que será definido logo adiante.

Definição 3.1. *Para cada $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ definimos o subconjunto $\eta_\nu = \{\lambda > 0 \mid (\lambda, \lambda\nu_1, \dots, \lambda\nu_{m-1}) \in \chi\}$ de $\mathbb{R}_+$.*

Observação 3.1. *Seja* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ *para* λ *suficientemente pequeno, temos* $K = (\lambda, \lambda\nu_1, \ldots, \lambda\nu_{m-1}) \in B_\epsilon(0)$*, em que* ϵ *é tal que* $B_\epsilon(0) \cap \mathbb{R}_+^m \subset \chi$*, como no lema anterior. Em particular,* η_ν *é não vazio.*

Lema 3.2. *O conjunto* η_ν *é limitado para cada* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$.

Demonstração. Seja $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ fixo. Pela forma como definimos o conjunto η_ν, temos ele limitado inferiormente por 0. Então, para mostrar que η_ν é um conjunto limitado, basta mostrar que é limitado superiormente.

Usando agora o Corolário 2.1 para ν, existe $\theta > 0$ tal que $(\theta, \theta\nu_1, \ldots, \theta\nu_{m-1})$ é um autovalor principal do sistema (2.4), isto é, o seguinte sistema tem solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = \theta\nu_{i-1}\rho_i(x)|\varphi_{i+1}|^{\alpha_i - 1}\varphi_{i+1} & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_i = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

em que $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_{m+1} = \varphi_1$, $\nu_0 = 1$, $\rho_i(x) \in L^p(\Omega)$ positiva em q.t.p., $\alpha_i > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, $\prod_{i=1}^m \alpha_i = 1$.

Queremos mostrar que θ é cota superior do conjunto η_ν.

Como vimos na observação anterior, o conjunto η_ν é não vazio. Seja λ^* tal que o vetor $(\lambda^*, \lambda^*\nu_1, \ldots, \lambda^*\nu_{m-1})$ é um autovalor principal do sistema (3.1), isto é, existe um vetor positivo $X = (u_1, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \lambda^*\nu_{i-1}f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $i = 1, \ldots, m$ e $\nu_0 = 1$. No que segue, mostraremos que $\lambda^* \leq \theta$. Usando (H4), concluímos que

$$\begin{cases} -\Delta u_i \geq \lambda^*\nu_{i-1}\rho_i(x)u_{i+1}^{\alpha_i} & \text{em} \quad \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Definimos agora o seguinte subconjunto auxiliar

$$T = \{t > 0 \mid u_i > t^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i \text{ em } \Omega, \forall i \in \{1, \ldots, m\}\} \subset \mathbb{R}.$$

Pelo Lema de Hopf segue u_i e φ_i possuem as derivadas normais exteriores a $\partial\Omega$ negativas, então elas satisfazem as hipóteses do Lema 1.2 o que garante então que o conjunto T é não vazio. Por outro lado, podemos notar é que T é limitado, pois u_i e φ_i são funções limitadas, e portanto denotaremos por $S := \sup T$. Para tal S temos: $u_i \geq S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i$ em Ω, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$.

Suponha por contradição que $\lambda^* > \theta$. Neste caso, usando os sistemas (3.3) e (3.4) obtemos:

$$\begin{aligned}
-\Delta(u_i - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i) &= -\Delta u_i + \Delta(S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i)\\
&= -\Delta u_i + S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\Delta\varphi_i\\
&\geq \lambda^*\nu_{i-1}\rho_i(x)u_{i+1}^{\alpha_i} - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\theta\nu_{i-1}\rho_i(x)\varphi_{i+1}^{\alpha_i}\\
&\geq \lambda^*\nu_{i-1}\rho_i(x)(S^{\prod_{k=i+1}^m \alpha_k}\varphi_{i+1})^{\alpha_i} - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\theta\nu_{i-1}\rho_i(x)\varphi_{i+1}^{\alpha_i}\\
&= \lambda^*\nu_{i-1}\rho_i(x)S^{\alpha_i\prod_{k=i+1}^m \alpha_k}\varphi_{i+1}^{\alpha_i} - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\theta\nu_{i-1}\rho_i(x)\varphi_{i+1}^{\alpha_i}\\
&= \lambda^*\nu_{i-1}\rho_i(x)S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_{i+1}^{\alpha_i} - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\theta\nu_{i-1}\rho_i(x)\varphi_{i+1}^{\alpha_i}\\
&= (\lambda^* - \theta)\nu_{i-1}\rho_i(x)S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_{i+1}^{\alpha_i}\\
&> 0, \text{ em } \Omega.
\end{aligned}$$

Assim, como $u_i - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i = 0$ sobre $\partial\Omega$, podemos usar o Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.33) e concluir que $u_i - S^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i > 0$, donde é possível tomar um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $u_i > (S+\epsilon)^{\prod_{k=i}^m \alpha_k}\varphi_i$, o que contraria a definição de S. Logo $\lambda^* \leq \theta$, como que queríamos mostrar. □

Observação 3.2. *O conjunto η_ν como vimos no lema anterior é limitado, donde faz sentido definir $\theta_1^*(\nu) := \sup \eta_\nu$. Além disso, pela demonstração do lema vale $\theta_1^*(\nu) \leq \theta$, em que θ é dado pelo Corolário 2.1.*

Definição 3.2. *Assumam válidas as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4). Dizemos que $(u_1, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, é uma subsolução do sistema (3.1) se para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ vale a desigualdade*

$$\begin{cases} -\Delta u_i \leq \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u_i \leq 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Definição 3.3. *Assumam válidas as hipóteses (H1), (H2), (H3) e (H4). Dizemos que $(u_1, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, é uma supersolução do sistema (3.1) se para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ vale a desigualdade*

$$\begin{cases} -\Delta u_i \geq \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u_i \geq 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Lema 3.3 (Método da sub e supersolução). *Sejam f_i satisfazendo (H1), (H2), (H3) e (H4), para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Se $\overline{u} = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})$ é uma supersolução não negativa do sistema (3.1), então o sistema (3.1) tem solução forte positiva $u = (u_1, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, tal que*

$$0 \leq u_i \leq \overline{u_i}, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Demonstração. A demonstração que apresentaremos aqui, é similar à demonstração do Lema 3.1. Seja f_i satisfazendo (H1), (H2), (H3) e (H4), para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$. Considere a sequência em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ da seguinte forma:

$$y_1 = (0, \ldots, 0),$$

e

$$y_{j+1} = (z_1^j, \ldots, z_m^j) = (\lambda_1(-\Delta)^{-1}f_1(x, y_j), \ldots, \lambda_m(-\Delta)^{-1}f_m(x, y_j)) \ \forall j \geq 1.$$

Pela forma como foi definido temos $z_i^{j+1} = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, y_j)$, $\forall j \geq 1$, e esse termo está bem definido, pois como $f_i(x, y_j) \in L^p(\Omega)$ podemos aplicar o Teorema 1.34 e da mesma forma explicada no Lema 3.1 temos para qualquer $y \in \partial\Omega$ vale $(-\Delta)^{-1}f_i(y, y_j) = 0$.

Como temos uma supersolução do sistema (3.1), então $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são fixos e

$$\lambda_i f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \leq -\Delta\overline{u_i},$$

em que $i = 1, \ldots, m$, e segue através do Princípio da Comparação 1.8 que a desigualdade anterior será mantida com o operador solução, isto é,

$$\lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) = (-\Delta)^{-1}(\lambda_i f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})) \leq \overline{u_i}.$$

Então, por (H2), pela supersolução ser não negativa e usando novamente o Princípio da Comparação,

$$\lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \leq \overline{u_i},$$

logo,

$$z_i^2 = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, y_1) = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) \leq \overline{u_i}.$$

A partir disso temos

$$\begin{aligned} z_i^3 &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, y_2) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, z_1^2, \ldots, z_m^2) \\ &\leq \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \\ &\leq \overline{u_i}, \end{aligned}$$

e então $z_i^3 \leq \overline{u_i}$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. E prosseguindo assim, notamos que $z_i^j \leq \overline{u_i}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Outro fato é que $f_i(x, t_1, \ldots, t_m) > 0$, $\forall x \in \Omega$ e $\forall (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}_+^m$ e $\lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(y, t) = 0$, $\forall y \in \partial\Omega$, segue pelo Princípio do Máximo Forte que $\lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, 0, \ldots, 0) > 0$, implicando $z_i^2 \geq z_i^1 = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, e ainda mais

$$\begin{aligned} z_i^3 &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_2) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, z_1^2, \ldots, z_m^2) \\ &\geq \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, z_1^1, \ldots, z_m^1) \\ &= z_i^2. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos ver que $z_i^{j+1} \geq z_i^j$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \mathbb{N}$. Concluímos então que a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ está bem definida, é limitada e também é monótona não decrescente para cada $x \in \Omega$, logo convergente em $W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Então existe $u = (u_1, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$y_j \to u,$$

isto é, $z_i^j = \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, x_{j-1}) \to u_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Então usando a hipótese que $f_i(x, \cdot, \ldots, \cdot) \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in \Omega$ segue

$$\begin{aligned} u_i &= \lim_{j\to\infty} z_i^{j-1} \\ &= \lim_{j\to\infty} \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, z_1^{j-1}, \ldots, z_m^{j-1}) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(\lim_{j\to\infty} x, \lim_{j\to\infty} z_1^{j-1}, \ldots, \lim_{j\to\infty} z_m^{j-1}) \\ &= \lambda_i(-\Delta)^{-1}f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \\ &= (-\Delta)^{-1}\lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m). \end{aligned}$$

Logo u é solução do sistema (3.1) pertencente a $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ e todas as suas coordenadas são menores ou iguais às correspondentes em $\overline{u}$ e por ser monótona não decrescente segue que $0 < z_i^2 \leq u_i$, isto é, u é estritamente positiva. $\square$

Definição 3.4. *Introduziremos agora os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}_+^m$:*

1. $\mathcal{U} = \{(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1}) \mid 0 < \sigma < \theta_1^*(\nu), \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$;
2. $\mathcal{V} = \{(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1}) \mid \sigma > \theta_1^*(\nu), \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$.

Definiremos agora o conjunto extremal do sistema (3.1).

Definição 3.5. *O conjunto extremal Θ^* do sistema (3.1) é definido como :*

$$\Theta^* = \{(\theta_1^*(\nu), \theta_1^*(\nu)\nu_1, \ldots, \theta_1^*(\nu)\nu_{m-1}) \mid \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$$

ou equivalentemente

$$\Theta^* = \partial\chi \cap \mathbb{R}_+^m.$$

Teorema 3.1. *Sejam $f_1, \ldots, f_m : \Omega \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ funções que satisfazem (H1), (H2), (H3) e (H4). Então o conjunto Θ^* decompõe $\mathbb{R}_+^m$ em dois conjuntos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ como definidos anteriormente. Além disso, as seguintes afirmações são válidas:*

1. *o sistema (3.1) admite uma solução forte positiva em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, para todo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{U}$;*
2. *o sistema (3.1) não admite solução forte não negativa em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, para qualquer $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathcal{V}$.*

Demonstração. 1. Para prova o primeiro item, precisamos verificar que $\mathcal{U} \subset \chi$. Para isto, vamos fixar uma direção $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ e $0 < \sigma < \theta_1^*(\nu)$. Segue da definição de $\theta_1^*(\nu)$ que existe $\sigma_0 \in [\sigma, \theta_1^*(\nu)]$ tal que $(\sigma_0, \sigma_0\nu_1, \ldots, \sigma_0\nu_{m-1}) \in \chi$, isto é, existe $\overline{U} = (\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \in W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)\cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\overline{u_i} & = & \sigma_0\nu_{i-1}f_i(x,\overline{U}) & \text{em} \quad \Omega, \\ \overline{u_i} & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \\ \overline{u_i} & > & 0 \text{ em } \Omega, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, m\}, & \end{array}\right.$$

em que $\nu_0 := 1$.

Desse modo, como $-\Delta\overline{u_i} \geq \sigma\nu_{i-1}f_i(x,\overline{U})$ em Ω, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, segue que $\overline{U}$ é supersolução do sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u_i & = & \sigma\nu_{i-1}f_i(x,u_1,\ldots,u_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ u_i & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Assim, do Lema 3.3 concluímos que (3.7) admite solução forte positiva, isto é, $(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1}) \in \chi$, o que conclui a prova do primeiro item.

2. O conjunto $\mathcal{V}$ não tem solução forte não negativa em $W^{2,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ pela definição de θ_1^* ser o supremo do conjunto η_ν, pois se existisse tal solução, pela forma como $\mathcal{V}$ foi definido teríamos um autovalor associado a essa solução da forma $(\sigma, \sigma\nu_1, \ldots, \sigma\nu_{m-1})$ em que $\sigma > \theta_1^*$. Pela definição de η_ν, σ pertenceria a esse conjunto e seria maior estrito do que o supremo dele, o que contraria a definição de supremo.

$\square$

Definiremos uma função que parametriza o conjunto extremal e assim mostraremos algumas propriedades desse conjunto.

Definição 3.6. *Definimos a função* $P : \mathbb{R}_+^{m-1} \to \Theta^* \subset \mathbb{R}_+^m$ *por:*

$$P(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) := (\theta_1^*, \theta_1^*\nu_1, \ldots, \theta_1^*\nu_{m-1}),$$

em que $\theta_1^* = \theta_1^*(\nu_1, \ldots, \nu_{m-1})$ *é o mesmo definido na Observação 3.2.*

Teorema 3.2. *A função* P*, como dada na Definição 3.6, é contínua.*

Demonstração. A continuidade de P fica comprovada, se mostrarmos que $\nu \mapsto \theta_1^*(\nu)$ é uma aplicação contínua.

Suponhamos por contradição que θ_1^* é descontínua em um dado ponto $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$. Então, existem $\epsilon > 0$ e uma sequência $(\beta_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ convergindo à β, em que $\beta_k = (\beta_{k,1}, \ldots, \beta_{k,m-1})$ é tal que

$$|\theta_1^*(\beta) - \theta_1^*(\beta_k)| \geq \epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da desigualdade anterior e passando a uma subsequência, se necessário, temos duas possibilidades:

$$\theta_1^*(\beta) - \theta_1^*(\beta_k) \geq \epsilon \text{ ou } \theta_1^*(\beta) - \theta_1^*(\beta_k) \leq -\epsilon, \text{ para infinitos índices } k,$$

isto é,

$$\theta_1^*(\beta) \geq \theta_1^*(\beta_k) + \epsilon \text{ ou } \theta_1^*(\beta) \leq \theta_1^*(\beta_k) - \epsilon.$$

Vamos estudar o que acontece em ambos os casos. Primeiramente, consideremos o caso em que $\theta_1^*(\beta) \geq \theta_1^*(\beta_k) + \epsilon$. Neste caso, existem $\underline{\beta}, \overline{\beta}$ tais que:

$$\theta_1^*(\beta_k) < \underline{\beta} < \overline{\beta} < \theta_1^*(\beta). \tag{3.8}$$

Desde que $\beta_k \to \beta$, temos que $\beta_{k,i} \to \beta_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Assim, para k suficientemente grande, a seguinte desigualdade se verifica: $\beta_{k,i-1}\underline{\beta} < \beta_{i-1}\overline{\beta}$, donde obtemos

$$\beta_{k,i-1}\theta_1^*(\beta_k) < \beta_{k,i-1}\underline{\beta} < \beta_{i-1}\overline{\beta} < \beta_{i-1}\theta_1^*(\beta).$$

Como $\overline{\beta} < \theta_1^*(\beta)$, segue que $(\overline{\beta}, \beta_1\overline{\beta}, \ldots, \beta_{m-1}\overline{\beta}) \in \mathcal{U}$, e pelo Teorema 3.1 existe uma solução $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})_{\overline{\beta}}$ do sistema

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u_i} &= \beta_{i-1}\overline{\beta} f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) & \text{em} & \Omega, \\ \overline{u_i} &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\beta_0 = 1$. Daí, como $\beta_{k,i-1}\underline{\beta} < \beta_{i-1}\overline{\beta}$ e f_i é não negativa, obtemos que

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u_i} &= \beta_{i-1}\overline{\beta} f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \geq \beta_{k,i-1}\underline{\beta} f_i(x, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \overline{u_i} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})_{\overline{\beta}}$ é uma supersolução positiva associada ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \beta_{k,i-1}\underline{\beta} f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $i = 1, \ldots, m$ e $\beta_{k,0} = 1$.

Portanto, pelo Lema 3.3 temos que $(\underline{\beta}, \beta_{k,1}\underline{\beta}, \ldots, \beta_{k,m-1}\underline{\beta}) \in \chi$, o que implica $\underline{\beta} \in \eta_{\beta_k}$. Assim, $\underline{\beta} \leq \theta_1^*(\beta_k)$, o que contradiz (3.8).

Suponha agora que

$$\theta_1^*(\beta) + \epsilon \leq \theta_1^*(\beta_k), \text{ para infinitos índices } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, existem $\underline{\delta}$ e $\overline{\delta}$ tais que

$$\theta_1^*(\beta) < \underline{\delta} < \overline{\delta} < \theta_1^*(\beta_k). \tag{3.9}$$

De maneira análoga ao caso anterior podemos tomar k suficientemente grande tal que a desigualdade $\beta_{i-1}\underline{\delta} < \beta_{k,i-1}\overline{\delta}$ ocorra e disso obter:

$$\beta_{i-1}\theta_1^*(\beta) < \beta_{i-1}\underline{\delta} < \beta_{k,i-1}\overline{\delta} < \beta_{k,i-1}\theta_1^*(\beta_k).$$

Como $\overline{\delta} < \theta_1^*(\beta_k)$, segue que $(\overline{\delta}, \beta_{k,1}\overline{\delta}, \ldots, \beta_{k,m-1}\overline{\delta}) \in \mathcal{U}$ e pelo Teorema 3.1 existe uma solução $(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_m})$ do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u_i} &= \beta_{k,i-1}\overline{\delta} f_i(x, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_m}) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \underline{u_i} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, como $\beta_{i-1}\underline{\delta} < \beta_{k,i-1}\overline{\delta}$ e f_i é não negativa, concluímos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u_i} &= \beta_{k,i-1}\overline{\delta} f_i(x, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_m}) \geq \beta_{i-1}\underline{\delta} f_i(x, \underline{u_1}, \ldots, \underline{u_m}) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \underline{u_i} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, $(\underline{u_1}, \ldots, \underline{u_m})$ é uma supersolução positiva do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \beta_{i-1}\underline{\delta} f_i(x, u_1, \ldots, u_m) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\beta_0 = 1$. Logo, pelo Lema 3.3 existe uma solução do sistema anterior associada ao autovalor $(\underline{\delta}, \beta_1\underline{\delta}, \ldots, \beta_{m-1}\underline{\delta})$, o que implica $\underline{\delta} \in \eta_\beta$. Portanto, $\underline{\delta} \leq \theta_1^*(\beta)$, o que contradiz (3.9). Com isso, mostramos que θ_1^* é contínua, como queríamos provar. $\square$

No teorema a seguir, vamos mostrar que a função θ_1^* é não crescente, mas para isso precisamos definir uma relação de ordem em $\mathbb{R}_+^{m-1}$. Sejam $\beta' = (\beta_1', \ldots, \beta_{m-1}'), \beta'' = (\beta_1'', \ldots, \beta_{m-1}'') \in \mathbb{R}_+^{m-1}$, a relação $\beta' < \beta''$ será válida se $\beta_i' < \beta_i''$, $\forall i \in \{1, \ldots, m-1\}$.

Teorema 3.3. *A função $\theta_1^* : \mathbb{R}_+^{m-1} \to \mathbb{R}_+$ é não crescente em todo o domínio.*

Demonstração. Suponha por contradição que existam $\beta' = (\beta_1', \ldots, \beta_{m-1}'), \beta'' = (\beta_1'', \ldots, \beta_{m-1}'') \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ tais que

$$\beta' < \beta'' \text{ e } \theta_1^*(\beta') < \theta_1^*(\beta'').$$

Considere $\underline{\delta}, \overline{\delta} \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$\theta_1^*(\beta') < \underline{\delta} < \overline{\delta} < \theta_1^*(\beta''). \tag{3.10}$$

Como $0 < \underline{\delta} < \overline{\delta}$ e para qualquer $i \in \{2, \ldots, m\}$ vale $0 < \beta_{i-1}' < \beta_{i-1}''$, segue que

$$\beta_{i-1}'\underline{\delta} < \beta_{i-1}''\overline{\delta}.$$

Além disso, $\theta_1^*(\beta') < \underline{\delta}$ obtemos

$$\beta_{i-1}'\theta_1^*(\beta') < \beta_{i-1}'\underline{\delta},$$

e de $\overline{\delta} < \theta_1^*(\beta'')$ obtemos

$$\beta_{i-1}''\overline{\delta} < \beta_{i-1}''\theta_1^*(\beta'').$$

Juntando as desigualdades anteriores, concluímos que

$$\beta_{i-1}'\theta_1^*(\beta') < \beta_{i-1}'\underline{\delta} < \beta_{i-1}''\overline{\delta} < \beta_{i-1}''\theta_1^*(\beta''). \tag{3.11}$$

Como $\overline{\delta} < \theta_1^*(\beta'')$, segue que $(\overline{\delta}, \beta_1''\overline{\delta}, \ldots, \beta_{m-1}''\overline{\delta}) \in \mathcal{U}$ e pelo Teorema 3.1 obtemos uma solução $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})$ para o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \beta_{i-1}''\overline{\delta} f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ u_i = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\beta_0'' = 1$. Assim, de ((H2)) e (3.11) temos que $(\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m})$ é supersolução do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \beta_{i-1}'\underline{\delta} f_i(x, u_1, \ldots, u_m), & \text{em} \quad \Omega, \\ u_i = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\beta_0' = 1$.

Logo, pelo Lema 3.3 existe uma autofunção associada ao autovalor $(\underline{\delta}, \beta_1'\underline{\delta}, \ldots, \beta_{m-1}'\underline{\delta})$, implicando que $\underline{\delta} \in \eta_{\beta'}$ e $\underline{\delta} \leq \theta_1^*(\beta')$, o que contradiz (3.10). Desta contradição, fica provado que θ_1^* é não crescente, como queríamos. □

A seguir, mostramos que o comportamento não crescente da primeira coordenada de P, não é preservada pelas demais coordenadas.

Teorema 3.4. *A função $\psi_i : \mathbb{R}_+^{m-1} \to \mathbb{R}_+$ dada por $\psi_i(\nu) = \theta_1^*(\nu)\nu_i$ é não decrescente em todo o domínio, para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$.*

Demonstração. Suponha por contradição que existam dois pontos $\beta' = (\beta'_1, \dots, \beta'_{m-1}), \beta'' = (\beta''_1, \dots, \beta''_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}_+$ tais que $\beta' < \beta''$, isto é, $\beta'_{j-1} < \beta''_{j-1}$, $\forall j \in \{2, \dots, m\}$ e $\theta_1^*(\beta')\beta'_{i-1} > \theta_1^*(\beta'')\beta''_{i-1}$ para algum $i \in \{2, \dots, m\}$, .

Como a desigualdade $\theta_1^*(\beta')\beta'_{i-1} > \theta_1^*(\beta'')\beta''_{i-1}$ é estrita, é possível tomar $\underline{\delta}, \overline{\delta} > 0$ tais que

$$\theta_1^*(\beta'')\beta''_{i-1} < \underline{\delta} < \overline{\delta} < \theta_1^*(\beta')\beta'_{i-1}.$$

De $0 < \beta'_{i-1} < \beta''_{i-1}$ e da desigualdade $\theta_1^*(\beta'')\beta''_{i-1} < \underline{\delta}$ temos

$$\theta_1^*(\beta'') < \frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}}.$$

Analogamente, da desigualdade $\overline{\delta} < \theta_1^*(\beta')\beta'_{i-1}$ segue que

$$\frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}} < \theta_1^*(\beta').$$

Como $0 < \frac{1}{\beta''_{i-1}} < \frac{1}{\beta'_{i-1}}$ e $0 < \underline{\delta} < \overline{\delta}$, concluímos que

$$\frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}} < \frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}}. \tag{3.12}$$

e portanto

$$\theta_1^*(\beta'') < \frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}} < \frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}} < \theta_1^*(\beta'). \tag{3.13}$$

Desde que $\frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}} < \theta_1^*(\beta')$, segue que

$$\left(\frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}}, \frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}}\beta'_1, \dots, \frac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}}\beta'_{m-1}\right) \in \mathcal{U},$$

e pelo Teorema 3.1 existe uma solução $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m})$ do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_j &= \beta'_{j-1}\left(\dfrac{\overline{\delta}}{\beta'_{i-1}}\right) f_j(x, u_1, \dots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_j &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela desigualdade (3.12) segue que $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_m})$ é supersolução do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_j &= \beta''_{j-1}\left(\dfrac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}}\right) f_j(x, u_1, \dots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_j &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

Assim, mais uma vez segue do Lema 3.3 que (3.14) admite solução, ou seja, e

$$\left(\left(\frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}}\right), \beta''_1\left(\frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}}\right), \dots, \beta''_{m-1}\left(\frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}}\right)\right) \in \chi,$$

donde $\frac{\underline{\delta}}{\beta''_{i-1}} \leq \theta_1^*(\beta'')$, o que é uma contradição com (3.13). Desta contradição, concluímos que a função P é não decrescente em todas as suas coordenadas, com exceção da primeira. □

Teorema 3.5. *Sejam $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ e $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ fixo. Se $\nu_i \to \infty$ e as demais coordenadas de ν estão fixas, então $\theta_1^*(\nu) \to 0$.*

Demonstração. Seja $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ fixo. Pela Observação 3.2, temos $0 < \theta_1^*(\nu) \leq \theta$, em que θ é dado pelo Corolário 2.1, isto é,

$$\theta = \theta(\nu) = \left(\frac{\gamma^*}{\prod_{i=0}^{m-1} \nu_i^{\prod_{k=0}^{i} \alpha_k}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \prod_{k=0}^{i} \alpha_k}},$$

em que $\nu_0 = \alpha_0 = 1$. Logo, quando $\nu_i \to \infty$, pela igualdade anterior temos $\theta \to 0$ e como consequência $\theta_1^*(\nu) \to 0$, como queríamos mostrar. $\square$

Teorema 3.6. *Se $f_1(x, t_1, 0, \ldots, 0) \geq \phi(x) t_1$ para todo $t_1 \geq 0$ e $x \in \Omega$, em que $\phi \in L^p(\Omega)$ é função positiva em Ω, então $\theta_1^*(\nu)$ é limitado.*

Demonstração. Para $\phi \in L^p(\Omega)$ dada na hipótese do teorema, consideremos o seguinte problema de autovalor:

$$\left\{ \begin{array}{rcllc} -\Delta\varphi & = & \lambda\phi(x)\varphi & \text{em} & \Omega, \\ \varphi & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.15}$$

De acordo com o Teorema 6.4 de [27], o problema (3.15) admite um autovalor principal $\beta_1 = \beta_1(-\Delta, \Omega, \phi)$ e associada à β_1 existe uma autofunção positiva $\varphi_1 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Afirmamos que $\theta_1^*(\nu) \leq \beta_1$, $\forall \nu \in \mathbb{R}_+^{m-1}$. De fato, caso contrário existiriam $\nu \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ e $\lambda > \beta_1$ tais que

$$(\lambda, \lambda\nu_1, \ldots, \lambda\nu_{m-1}) \in \mathcal{U} \subset \chi.$$

Neste caso, para algum $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ positivo teríamos

$$\left\{ \begin{array}{rcllc} -\Delta u_i & = & \lambda\nu_{i-1} f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_i & > & 0 & \text{em} & \Omega, \\ u_i & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.16}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, em que $\nu_0 = 1$.

Consideremos o conjunto:

$$T = \{t > 0 \mid u_1 > t\varphi_1 \text{ em } \Omega\}.$$

Por uma justificativa análoga à utilizada na demonstração do Lema 3.2, temos T não vazio e limitado. De fato, usando o Lema de Hopf segue que u_1 e φ_1 possuem derivadas normais exteriores a $\partial\Omega$ negativas, logo essas funções satisfazem as hipóteses do Lema 1.2 implicando que T é não vazio. Por outro lado, notamos que T é limitado, pois u_1 e φ_1 são funções limitadas, e portanto denotaremos por $S := \sup T$. E para tal que vale

$$u_1 \geq S\varphi_1 \tag{3.17}$$

em Ω.

Assim segue de (3.15), (3.16), da hipótese ((H2)), da desigualdade $f_1(x, t_1, 0, 0, \ldots, 0) \geq \phi(x)t_1$ e de (3.17) que

$$\begin{aligned}
-\Delta(u_1 - S\varphi_1) &= -\Delta u_1 + \Delta(S\varphi_1) \\
&= -\Delta u_1 + S\Delta\varphi_1 \\
&= \lambda\nu_0 f_1(x, u_1, \ldots, u_m) - S\beta_1\phi(x)\varphi_1 \\
&\geq \lambda f_1(x, u_1, 0, \ldots, 0) - S\beta_1\phi(x)\varphi_1 \\
&\geq \lambda\phi(x)u_1 - S\beta_1\phi(x)\varphi_1 \\
&\geq \lambda\phi(x)S\varphi_1 - S\beta_1\phi(x)\varphi_1 \\
&= (\lambda - \beta_1)S\phi(x)\varphi_1 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω.

Assim, como $u_1 - S\varphi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, pois ambas as funções valem 0 na fronteira, segue pelo Princípio do Máximo Forte que $u_1 - S\varphi_1 > 0$ em Ω, donde é possível tomar um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $u_1 > (S + \epsilon)\varphi_1$, o que contraria a definição de supremo de T. Portanto, $\lambda \leq \beta_1$, e temos o que queríamos mostrar. □

Teorema 3.7. *Sejam $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}) \in \mathbb{R}_+^{m-1}$ e $\nu_0 = 1$. Se para todo $K > 0$, existem $y_1, \ldots, y_m > 0$ tais que*

$$K||f_1(\cdot, y_1, \ldots, y_m)||_{L^p(\Omega)} \leq y_1,$$

então θ_1^* é ilimitado.

Demonstração. Primeiramente, pelo Lema 1.3 existe $C > 0$ tal que

$$||v||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||\Delta v||_{L^p(\Omega)},$$

em que $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando $\lambda_1 > 0$, pela hipótese do teorema existem $y_1, \ldots, y_m > 0$ tais que

$$C\lambda_1||f_1(\cdot, y_1, \ldots, y_m)||_{L^p(\Omega)} \leq y_1.$$

Por (H3) podemos aplicar o Teorema 1.34 e então existe uma solução forte $\varphi_2 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ do seguinte sistema que é positiva pelo Princípio do Máximo Forte:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_2 = f_2(x, y_1, \ldots, y_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos tomar $\lambda_2 > 0$ tal que $\lambda_2\varphi_2 \leq y_2$ em Ω, pois a solução dada pelo Teorema 1.34 é limitada em Ω, e definimos então $u_2 := \lambda_2\varphi_2 > 0$.

Procedendo de maneira similar, seja $i \in \{2, \ldots, m\}$, temos pelo Teorema 1.34 a existência de uma solução forte $\varphi_i \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_m) & \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi_i = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.18}$$

que é uma solução positiva pelo Princípio do Máximo Forte e como φ_i é limitada em Ω é possível tomar $\lambda_i > 0$ tal que $\lambda_i\varphi_i \leq y_i$, denotando $u_i := \lambda_i\varphi_i > 0$ segue que $u_i \leq y_i$ e também de $\varphi_i = \frac{u_i}{\lambda_i}$ segue

$$-\Delta\varphi_i = -\Delta\left(\frac{u_i}{\lambda_i}\right) = \frac{1}{\lambda_i}(-\Delta u_i).$$

Com isso podemos substituir no sistema (3.18) obtendo

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, y_1, \ldots, y_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_i &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Consideremos agora $u_1 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo a solução garantida pelo Teorema 1.34 do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= \lambda_1 f_1(x, y_1, u_2, \ldots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_1 &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que podemos aplicar o Teorema 1.34, pois se $f_1 \in L^p(\Omega)$ então $\lambda_1 f_1 \in L^p(\Omega)$.

Obtemos com esses resultados as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} u_1 &\leq ||u_1||_{L^\infty} \\ &\leq C||u_1||_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\leq C||\Delta u_1||_{L^p(\Omega)} \\ &= C||\lambda_1 f_1(x, y_1, u_2, \ldots, u_m)||_{L^p(\Omega)} \\ &= C\lambda_1||f_1(x, y_1, u_2, \ldots, u_m)||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq y_1. \end{aligned}$$

Pelos sistemas que as funções $u_i's$ satisfazem, pelo fato de $u_i \leq y_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e por (H2) temos

$$-\Delta u_i = \lambda_i f_i(x, y_1, \ldots, y_m) \geq \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m),$$

para $i \in \{2, \ldots, m\}$ e

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 f_1(x, y_1, u_2, \ldots, u_m) \geq \lambda_1 f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

Segue então que $(u_1, \ldots, u_m)$ é uma supersolução não negativa do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i f_i(x, u_1, \ldots, u_m) & \text{em} & \Omega, \\ u_i &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.3 existe uma solução forte positiva do sistema anterior com o seguinte autovalor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, logo

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \left(\lambda_1, \lambda_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \lambda_1\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right) \in \mathcal{U}.$$

Então

$$\lambda_1 \leq \theta_1^* \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right).$$

Como tomamos λ_1 qualquer temos o conjunto $\{\theta_1^*(\nu) \mid \nu \in \mathbb{R}_+^{m-1}\}$ ao qual $\theta_1^* \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \right)$ pertence ilimitado, logo temos o que queríamos mostrar. □

Corolário 3.1. *Considere o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i (1 + u_1^2 + \ldots + u_m^2) \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.6, temos o conjunto extremal desse sistema limitado na primeira coordenada.

Corolário 3.2. *Considere o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta u_i &= \lambda_i e^{u_{i+1}} \quad \textit{em} \quad \Omega, \\ u_i &= 0 \quad \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $u_{m+1} = u_1$. Pelo Teorema 3.7, temos o conjunto extremal desse sistema ilimitado na primeira coordenada.

A partir desses resultados, concluímos que o Conjunto Extremal satisfaz as propriedades de continuidade, comportamento assintótico e limitação. Tais propriedades são importantes para a continuação do estudo de equações diferenciais parciais elípticas.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Pure Appl. Math. Series; v. 65, Academic Press, New York, San Franscisco, London, (1975).

[2] H. Aikawa; T. Kilpeläinen; N. Shanmugalingam; X. Zhong. *Boundary Harnack Principle for p-harmonic Functions in Smooth Euclidean Domains.* Potential Anal. 26 (2007), 281–301.

[3] H. Amann. *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces.* SIAM Rev. 18 (1976), no. 4, 620-709.

[4] R. J. Biezuner. *Notas de Aula - Análise Funcional*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (2009).

[5] R. J. Biezuner. *Notas de Aula - Equações Diferenciais Parciais I/II*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte (2010).

[6] G. Botelho; D. Pellegrino; E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Rio de Janeiro, (2015), Coleção Textos Universitários.

[7] G. Bratu. *Sur Les Équations Intégrales Non Linéaires.* Bull. Soc. Math. France 42 (1914), 113-142.

[8] H. Brezis. *Is There Failure of the Inverse Function Theorem?* Workshop held ate the Morningsde Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing, june 1999.

[9] H. Brezis; T. Cazenave; Y. Martel; A. Ramiandrisoa. *Blow Up for* $u_t - \Delta u = g(u)$ *Revisited*. Adv. Differential Equations 1 (1996), no. 1, 73-90.

[10] H. Brezis; J. L. Vázquez. *Blow-up Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems.* Rev. Mat. Complut. 10 (1997), 443-469.

[11] K. C. Chang. *A Nonlinear Krein Rutman Theorem* J. Syst. Sci. Complex. 22 (2009), 542-554.

[12] D. S. Cohen; H. B. Keller. *Some Positone Problems Suggested by Nonlinear Heat Genetarion.* J. Math. Mech. 16 (1967), 1361-1376.

[13] F. L. S. Costa. *Tese de Doutorado: O problema Extremal para Sistemas Elípticos Semilineares*, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, (2017).

[14] F. L. S. Costa; G. F. de Souza; M. Montenegro. *Extremal Solutions for a Broad Spectrum of Nonlinear Elliptic Systems.* arXiv: 2001.07235v2.

[15] M. Crandall; P. Rabinowitz. *Some Continuation and Variatonal Methods for Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Eigenvalue Problems.* Arch. Ration. Mech. Anal. (1975), 207-218.

[16] E. M. dos Santos. *On the Existence of Positive Solutions for a Nonhomogeneous Elliptic System.* Port. Math. (N.S.) 66 (2009), Fasc. 3, 347-371.

[17] Y. Du. *Exact Multiplicity and S-Shaped Bifurcation Curve for Some Semilinear Elliptic Problems from Combustion Theory.* SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), 707-733.

[18] I. B. M. Duarte. *Tese de Doutorado: Problemas em Dinâmica Populacional com Termos Não-Lineares e Não-Locais.* Universidade Federal do Pará, Belém, (2017).

[19] L. Dupaigne. *Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations.* Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math. (2011).

[20] I. M. Gel'fand. *Some Problems in the Theory of Quasilinear Equations.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 29 (1963), 295-381.

[21] D. Gilbart; N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 Edition*, Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Singapore; Tokyo, (2001), (Springer).

[22] J. Jacobsen. *Global Bifurcation Problems Associated with k-Hessian Operators.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999), 81-130.

[23] J. Jacobsen; K. Schmitt. *The Liouville-Bratu-Gelfand Problem for Radial Operators.* J. Differential Equations 184 (2002), 283-298.

[24] D. D. Joseph; T. S. Lundgren. *Quasilinear Dirichlet Problems Driven by Positive Sources.* Arch. Ration. Mech. Anal. 49 (1972), 241-269.

[25] H. B. Keller; J. P. Kenner. *Positive Solutions of Convex Nonlinear Eigenvalue Problems.* J. Differential Equations 16 (1974), 103-125.

[26] E. L. Lima. *Espaços Métricos.* Projeto Euclides, IMPA, 3ª edição, Rio de Janeiro, (1993).

[27] J. López-Gómez. *The Maximum Principle and the Existence of Principal Eigenvalues for Some Linear Weighted Boundary Value Problems.* J. Differential Equations 127 (1996), 263-294.

[28] R. Mahadevan. *A Note on a Non-linear Krein-Rutman Theorem.* Nonlinear Anal. 67 (2007), no. 11, 3084-3090.

[29] M. Montenegro. *Minimal Solutions for a Classe of Elliptic Systems.* Bull. Lond. Math. Soc. 37 (2005), 405-416.

[30] M. Montenegro. *The Construction of Principal Spectral Curves for Lane-Emden Systems and Applications*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 29 (4) (2000), 193-229.

[31] M. R. B. Quispe. *Dissertação de Mestrado: Um Estudo sobre a Equação de Hénon.* USP - São Carlos, (2013).

[32] R. Schaaf. *Uniqueness for Semilinear Elliptic Problems Supercritical Growth and Domain Geometry.* Adv. Differential Equations 5 (2000), 1201-1220.