

GABRIEL JÚNIOR DE SOUSA

ESTUDO DA TRANSIÇÃO BKT NA PSEUDOESFERA ATRAVÉS DA
APROXIMAÇÃO HARMÔNICA AUTO-CONSISTENTE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Antônio Ribeiro de Moura

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2023

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S725e
2023

Sousa, Gabriel Júnior de, 1997-
Estudo da transição BKT na pseudoesfera através da aproximação harmônica auto-consistente / Gabriel Júnior de Sousa. – Viçosa, MG, 2023.
1 dissertação eletrônica (107 f.): il. (algumas color.).

Inclui apêndices.

Orientador: Antonio Ribeiro de Moura.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Física, 2023.

Referências bibliográficas: f. 100-107.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.449>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Magnetismo. 2. Transformações de fase (Física estatística). I. Moura, Antonio Ribeiro de, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDD 22. ed. 538

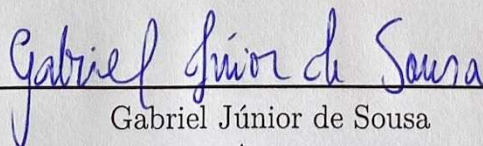
GABRIEL JÚNIOR DE SOUSA

ESTUDO DA TRANSIÇÃO BKT NA PSEUDOESFERA ATRAVÉS DA
APROXIMAÇÃO HARMÔNICA AUTO-CONSISTENTE

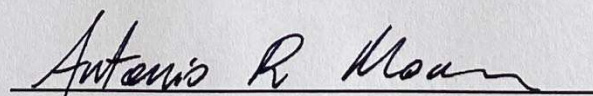
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 12 de julho de 2023.

Assentimento:


Gabriel Júnior de Sousa

Autor



Antônio Ribeiro de Moura

Orientador

Dedico aos meus pais José e Casilene, sem os quais nada teria sido possível.

Agradecimentos

Ao Uno, por quem todas as coisas são manifestas em reflexo ao Seu esplendor.

Aos meus pais, que não só me incentivaram nos estudos como também me compreenderam com extrema paciência e afabilidade.

À minha tia Elizângela, a quem atribuo a motivação inicial dessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Antônio Ribeiro, pelo amparo na pesquisa e pela assídua disponibilidade.

Aos professores Ady Cambraia e Theodore Shifrin, pelas interessantes conversas sobre geometria.

Aos demais professores que passaram pela minha vida, pela formação e eventual amizade.

Aos meus amigos, José Maria Caquito, Arthur Schulenburg, Kelly Molica, Robson Guedes, Vinicius Begnami e Jefferson Teixeira por estarem sempre presentes em momentos difíceis como ouvintes e auxiliares.

À equipe de música, Layssa, Luiz, Kayro, Pedro, Marcela, Eduardo, Samuel, Almir e Davi, por tornarem minhas tardes de fim de semana mais alegres.

À Universidade Federal de Viçosa.

Ao CNPq, à FAPEMIG, pelo apoio financeiro e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos, vinculado ao projeto nº 88887.584650/2020-00.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"As coisas nada mais são que aparências do número." - Do Hieros Logos, de Pitágoras

Resumo

SOUSA, Gabriel Júnior de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2023. **Estudo da transição BKT na pseudoesfera através da aproximação harmônica auto-consistente.** Orientador: Antônio Ribeiro de Moura.

As transições de fase apresentaram uma profunda quebra de paradigma no estudo dos materiais. Na física de baixas dimensões, há uma classe peculiar de fenômenos cuja natureza é exclusivamente topológica. Os defeitos oriundos do arranjo de cristais ou do surgimento de quasipartículas, predisõem, dentre outras possibilidades, a ocorrência de alterações nas propriedades magnéticas do sistema. Neste trabalho, investigamos a transição de fase de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) sobre uma variedade riemanniana de curvatura negativa conhecida como pseudoesfera através da aproximação harmônica auto-consistente (AHAC) com o objetivo de determinar os parâmetros termodinâmicos renormalizados introduzidos por este método. Em decorrência disto, uma primeira estimativa para a temperatura de transição é fornecida. A complexidade da geometria hiperbólica no que se refere a sua expressão no espaço euclidiano mostra-se evidente. Pensando em futuros estudos voltados a aplicações tecnológicas e em eliminar os obstáculos que esta dificuldade impõe, aplicamos parte dos nossos esforços a clarificar a literatura existente estabelecendo uma ponte entre o modelo da pseudoesfera apresentado e o espaço matemático do laboratório via isometrias.

Palavras-chave: Transição BKT. Aproximação harmônica auto-consistente. Pseudoesfera.

Abstract

SOUSA, Gabriel Júnior de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2023. **Study of the BKT transition in the pseudosphere through the self-consistent harmonic approximation.** Advisor: Antônio Ribeiro de Moura.

Phase transitions presented a profound paradigm shift in the study of materials. In low-dimensional physics, there is a peculiar class of phenomena whose nature is exclusively topological. Defects arising from the arrangement of crystals or the appearance of quasi-particles, predispose, among other possibilities, the occurrence of changes in the magnetic properties of the system. In this work, we investigate the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) phase transition over a Riemannian manifold with negative curvature known as a pseudosphere through the self-consistent harmonic approximation (AHAC) with the aim of determining the renormalized thermodynamic parameters introduced by this method. As a result, a first estimate for the transition temperature is provided. The complexity of hyperbolic geometry with regard to its expression in Euclidean space is evident. Thinking about future studies focused on technological applications and eliminating the obstacles that this difficulty imposes, we applied part of our efforts to clarify the existing literature, establishing a bridge between the presented pseudosphere model and the mathematical space of the laboratory via isometries.

Keywords: BKT Transition. Self-consistent harmonic approximation. Pseudosphere.

Sumário

I	Introdução	10
1.1	Fundamentos de Magnetismo	11
1.2	Motivação	17
II	O modelo de Heisenberg	21
III	A transição BKT no modelo XY sem curvatura ($K=0$)	27
3.1	A fenomenologia da transição de fase topológica	27
3.2	A aproximação harmônica auto-consistente (AHAC)	32
IV	Tópicos de geometria diferencial	38
4.1	O legado da geometria euclidiana e o paradigma do postulado das paralelas	38
4.2	Curvas parametrizadas	43
4.3	Superfícies	44
4.3.1	Tensor métrico	45
4.3.2	A primeira forma fundamental e o comprimento de arco	46
4.3.3	Área da superfície	46
4.3.4	Geodésicas	47
4.3.5	Paralelismo e holonomia	48
4.3.6	A curvatura e seu significado físico	50
4.3.7	Transformações isométricas e a incapacidade de se observar o espaço hiperbólico	53
4.4	A superfície da pseudoesfera	55
V	A transição BKT na pseudoesfera ($K<0$)	58
5.1	O impacto da curvatura negativa constante sobre os vórtices no modelo XY	58
5.2	A hamiltoniana quadrática da pseudoesfera	60
5.2.1	Cálculo dos harmônicos pseudoesféricos	61
5.3	Resultados clássicos	64
5.4	Resultados quânticos	65
5.5	Gráficos dos cálculos analíticos	66
VI	Considerações finais	68
	Apêndices	69
	APÊNDICE A Cálculos suplementares para o Capítulo IV	70
A.1	A geometria da hipérbole e as funções hiperbólicas	70
A.2	Equação das geodésicas	72
A.3	Outros modelos para o espaço hiperbólico bidimensional	74
A.3.1	O semiplano superior	74

A.3.2	O disco de Poincaré	76
A.4	Transformações no plano hiperbólico	78
A.5	A tractriz e sua superfície de revolução	79
A.6	A pseudoesfera como uma superfície no espaço euclidiano	83
A.7	Conexões entre os modelos para \mathbb{H}^2	85
APÊNDICE B	Complementos relativos à transição BKT	89
B.1	Homotopia e defeitos topológicos	89
B.2	Integrais gaussianas e o valor médio da função cosseno a partir de H_0 . . .	95
B.3	Das funções de correlação presentes na seção 3.1	96
B.3.1	Limite de altas temperaturas	96
B.3.2	Limite de baixas temperaturas	96
B.4	A desigualdade de Bogoliubov	98
Referências	100

I Introdução

O magnetismo é um campo de estudo de aproximadamente 3000 anos. O mais famoso relato, datado do século VI a.C., deve-se a Tales de Mileto que documentou as propriedades magnéticas da magnetita (Fe_3O_4). Nesta mesma época, o médico indiano Sushruta, embora não popularmente conhecido, registrou o uso deste material para retirar farpas metálicas de feridas em soldados. Ambas as descrições são tardias quando comparadas a escritos chineses, que já em 400 a.C. mencionavam avanços marítimos através da sua aplicação. Esse mesmo fenômeno viria a impulsionar as grandes navegações no século XVI com a adaptação da bússola aos moldes que hoje conhecemos [1].

Os primeiros trabalhos descrevendo o magnetismo, para além de crenças mistificadoras até então difundidas, foram realizados por William Gilbert na corte elisabetana, sendo o principal deles publicado em 1600, intitulado *De Magnete Magneticisque Corporibus et de Magno Magnete Tellure* (Sobre o Ímã, os Corpos magnéticos e o Grande Ímã, a Terra). Ali ele também expôs seus estudos sobre eletricidade e aventou a possibilidade da Terra ser um ímã de proporções colossais, explicando o que orientava as agulhas da bússola [2,3].

Como boa parte das teorias científicas vigentes, o magnetismo não diferiu quanto as tentativas de se explicitar sua natureza mais fundamental. Acreditava-se que um fluido invisível, chamado eflúvio, intermediava as interações eletromagnéticas.

Apesar dessa dificuldade, as descobertas continuaram e tiveram maior amplificação quando a correlação com a eletricidade se demonstrou mais assertivamente. Em 1820, Hans Christian Oersted percebeu que a manipulação de correntes elétricas criava campos magnéticos. Mais tarde, Ampère expressou matematicamente a lei relacionando a intensidade da corrente produzida e o campo gerado e tratou de maneira intuitiva o ferromagnetismo a partir de correntes internas a estes materiais.

Dez anos depois, Faraday acrescentou valiosas contribuições ao que viria a ser chamado de eletrodinâmica introduzindo a ideia de campos e linhas de força, em contraposição a hipótese dos eflúvios e verificou o fenômeno de correntes elétricas induzidas geradas por variação de fluxo de campo magnético, bem como seu efeito inverso.

O remate do eletromagnetismo se deveu à sistematização de James Clerk Maxwell, apesar deste ainda considerar a existência do éter [4]. A origem do magnetismo também ainda não estava consolidada. Isso só viria a acontecer com o desenvolvimento da teoria atômica e da mecânica quântica no século XX. Seja como for, a conjuntura destes eventos ocasionou todo o progresso na ciência dos materiais dos anos subsequentes, culminando na fabricação de dispositivos magnéticos em escala nanométrica [5].

1.1 Fundamentos de Magnetismo

O modo como os materiais reagem à presença de um campo magnético explica-se, em última instância, pelos momentos magnéticos existentes neles. Conquanto estes tenham natureza quântica, uma introdução com viés semiclássico permite extrair algumas informações sobre a fenomenologia macroscópica observada.

O estado magnético de um sistema é evidenciado principalmente pela magnetização \vec{M} , que mensura, em média, a quantidade dos momentos magnéticos $\vec{\mu}_i$ num volume V tomado pequeno o suficiente para que a propriedade em questão seja local, ou seja:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{\mu}_i}{\Delta V}. \quad (1.1)$$

Como atesta o eletromagnetismo, o campo magnético tem relação tanto a correntes elétricas quanto à disposição do meio a magnetizar-se. Esta última contribuição respectiva às origens do campo aparece na teoria de Maxwell em proporcionalidade à permeabilidade magnética do vácuo μ_0 por:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \quad (1.2)$$

O alinhamento dos momentos magnéticos do material, quando exposto ao campo externo \vec{H} configura a criação de um campo interno cujo efeito é quantificado pela magnetização. No limite de campos fracos, com a simplificação de paralelismo entre \vec{M} e \vec{H} , o comportamento é linear e

$$M = \chi H. \quad (1.3)$$

em que χ é a grandeza escalar adimensional nomeada suscetibilidade magnética, variando entre 10^{-5} para materiais magnéticos muito fracos a 10^6 para materiais fortemente magnéticos [5, 6].

Em um meio magnético distinto do vácuo, $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \equiv \mu \vec{H}$, dada a permeabilidade relativa μ_r . Segue então, das equações (1.2) e (1.3), que a permeabilidade absoluta é:

$$\mu = \mu_0(1 + \chi). \quad (1.4)$$

Correntes elétricas produzem campos magnéticos no espaço. Isso nos concede, ao menos qualitativamente, a concepção de que os elétrons em seu movimento em torno dos núcleos atômicos constituem uma fonte magnética. Imaginando que possamos utilizar a simplificação do modelo de Bohr, atrelamos aos elétrons, de carga e , um momento angular clássico \vec{L} em função do raio r da órbita e de sua velocidade angular ω , ou seja, $L = mr^2\omega$. A corrente gerada pelo elétron na circunferência orbital é $i = e\omega/2\pi$. Por conseguinte, o circuito confere ao átomo um momento de dipolo magnético $\mu = i\pi r^2$, fazendo com que ele se torne um minúsculo ímã. Imediatamente, encontramos que o momento magnético

vincula-se ao momento angular:

$$\vec{\mu}_l = -g_l \frac{e}{2m} \vec{L}, \quad (1.5)$$

com o fator orbital $g_l = 1$, m a massa do elétron, e e sua carga, de onde vem o sinal em (1.5) [7].

Em Mecânica Quântica, o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é substituído pelo operador correspondente a partir de $\vec{p} = i\hbar \vec{\nabla}$ tal que $\vec{L} = i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$. Com ele controem-se as equações de autovalor:

$$\begin{aligned} L^2 \psi_{nlm_l} &= \hbar^2 l(l+1) \psi_{nlm_l} \\ L_z \psi_{nlm_l} &= \hbar m_l \psi_{nlm_l} \end{aligned} \quad (1.6)$$

para a função de onda ψ_{nlm_l} de números quânticos n , l , m_l .

Como o elétron não é uma partícula clássica e possui momento angular intrínseco, a função de onda completa precisa incluir o spin. As autofunções dos operadores desta parte (S^2 e S_z) tem autovalores $\hbar^2 s(s+1)$ e $\hbar m_s$, respectivamente. Similar à equação (1.5), é dado o momento magnético de spin:

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S}. \quad (1.7)$$

Se a analogia do átomo de Bohr fosse boa o bastante, $g_l = g_s$ e não haveria distinção entre (1.5) e (1.7). É notável, porém, que a natureza quântica impõe limites intransponíveis a comparação entre estas equações e $g_s \approx 2$.

Pela relatividade restrita, sistemas de referência em movimento com relação àqueles em repouso demonstram a existência de campos magnéticos às custas de distribuições de carga e campos eletrostáticos. Concernente aos elétrons em derredor ao núcleo, a atuação dos campos magnéticos preditos dá origem à interação spin-órbita, que destitui as autofunções de L_z e S_z como autoestados simultâneos da hamiltoniana modificada ($H_{LS} \propto \vec{L} \cdot \vec{S}$) por este fenômeno [8]. Prescientes que H_{LS} comuta com os operadores \vec{J}^2 e J_z , sendo $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, o momento angular total, os bons números quânticos são, na verdade, a soma $m_J = m_l + m_s$. O momento magnético do átomo pode ser escrito então como

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s \equiv g\mu_B \vec{J}, \quad (1.8)$$

para $\mu_B = e\hbar/2m$ o magneton de Bohr e

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (1.9)$$

que se reduz aos valores de g_l e g_s para $S = 0$ e $L = 0$.

Vimos como a magnetização relaciona-se ao campo aplicado por meio da suscetibilidade magnética. É esta grandeza uma das principais diferenciadoras dos materiais magnéticos, a quem iremos nos dedicar muito sucintamente agora.

Os diamagnetos apresentam a mais fraca resposta magnética possível e sua característica marcante é a suscetibilidade negativa da ordem de 10^{-5} . Este comportamento, comum a todos os materiais apesar de sua baixa intensidade, advém da ausência de dipolos magnéticos atômicos formados na distribuição dos elétrons nas camadas eletrônicas. O evidente magnetismo negativo surge do desbalanço no emparelhamento destes elétrons quando um campo externo é aplicado gerando a variação do campo magnético interno. Classicamente, a lei de Lenz obriga que a velocidade dos elétrons varie fazendo surgir um campo compensador para evitar que tal variação aconteça. O resultado macroscópico é a repulsão aos campos aplicados. São exemplos de diamagnetos os gases nobres (He, Ne, Ar, Kr, Xe) e os sólidos com ligação iônica [7, 9].

De modo geral, os átomos de muitos elétrons têm, em suas muitas sutilezas, ocasionais camadas não plenamente preenchidas. Os elétrons ali encerrados, podem se combinar e efetuar um momento magnético não nulo e assim, determinar o comportamento magnético dos materiais compostos por estes átomos. Em contrapartida, a completude destas camadas requer que os números quânticos m_l e m_s tenham seus orbitais correspondentes exauridos, implicando o momento magnético nulo. Salvas exceções, o arranjo energético de alocação dos elétrons fora das camadas preenchidas é imposto pelas regras de Hund¹, válidas estritamente para estados fundamentais. As configurações que se manifestam por estas condições demandam diferentes quantidades de energia que se devem a maneira como o momento angular de spin afeta a função de onda na proporção em que o momento angular orbital afeta o movimento dos elétrons, que em conjunto alteram a resposta eletrostática destes portadores de carga.

Os elementos da tabela periódica que constituem sólidos participam de ganhos ou perdas de elétrons, tal que alguns deles adquirem o que lhes faltava para o emparelhamento. Nesta situação os íons são essencialmente diamagnéticos. Aqueles, contudo, que apresentam o desbalanço de elétrons, como os elementos de terras raras do grupo dos lantanídeos (Nd, Pm, Sm, Eu, etc.) e do grupo dos actnídeos, possuem momentos magnéticos permanentes. Isso lhes confere a predominância na formação dos materiais magnéticos na natureza.

Na categoria destes elementos com desproporcionalidade eletrônica, encontramos os paramagnetos, marcadamente identificados pela interação irrisória de seus momentos

¹ As regras de Hund podem ser sintetizadas em linhas gerais como: i) Elétrons minimizam o spin total S em conformidade ao princípio da exclusão de Pauli; ii) Os orbitais ocupados pelos elétrons são aqueles que vão resultar num máximo valor de L ; e por fim, iii) O momento angular total J tem valor $|L-S|$ quando a camada esta um pouco menos preenchida que sua metade e $|L+S|$ quando ultrapassa a metade em preenchimento [1].

magnéticos e para os quais a agitação térmica tem forte influência na orientação. Na ausência de campos magnéticos externos sua magnetização é nula, enquanto que na presença destes há o surgimento de uma pequena magnetização macroscópica na direção do campo. Esta reação implica a suscetibilidade positiva existindo no intervalo $\chi \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ de intensidade similar à dos diamagnetos, mas diferente, além de seu sinal, na dependência da temperatura. A expressão desta grandeza via tratamento quântico é dada em termos do número de momentos magnéticos por unidade de volume:

$$\chi = \frac{\mu_0 n \mu_B^2}{k_B T} \quad (1.10)$$

Os metais são um excelente exemplo de paramagnetismo pois para eles um campo externo resulta na separação das bandas de condução pelo spin do elétron, distribuindo-os em número desproporcional pela energia. Esse tipo de fenômeno é mais conhecido como paramagnetismo de Pauli [5].

Para aplicações usuais em magnetismo, os materiais que mais se destacam não são estes até agora mencionados, mas sim uma classe especial de magnetos permanentes cujo efeito macroscópico é proeminente e que tem como causa principal a forte interação entre os momentos magnéticos. Compostos de elementos de transição do grupo do ferro dispostos neles, estes se sobressaem por sua magnetização espontânea mesmo em temperatura ambiente e sem qualquer intervenção de campos. São eles os ferromagnetos e os ferrimagnetos.

O ferromagnetismo, em especial, desaparece a partir de um certo valor de temperatura, no qual é extinto todo o ordenamento existente. Esse valor crítico separa a fase paramagnética ($T > T_c$) da ferromagnética ($T < T_c$) e é conhecido como temperatura de Curie.

O enigma quanto ao entendimento da natureza dos momentos magnéticos que davam origem a todos estes comportamentos levou Pierre Weiss a propor no início do século 20 um modelo baseado numa teoria de campo médio. Supunha-se que um campo molecular estaria atrelado ao alinhamento dos momentos magnéticos vizinhos numa dada região do material, e por isso, o campo efetivo seria proporcional à magnetização ali existente, isto é,

$$\vec{B}_{\text{ef}} = \lambda_{\text{ef}} \vec{M}, \quad (1.11)$$

com a constante de proporcionalidade λ_{ef} sendo característica de cada substância. Essa ideia permitiu obter a lei de Curie-Weiss para a suscetibilidade de um ferromagneto na fase paramagnética como sendo:

$$\chi = \Xi \frac{1}{T - T_c} \quad (1.12)$$

e Ξ novamente uma constante.

As predições deste modelo a partir de valores experimentais demonstravam que λ_{ef} deveria ser da ordem de 10^3 (no caso de metais de transição do grupo ferro) e consequentemente o campo molecular da ordem de $10^6 G$ com $M \sim 10^3 G$ e $T_c \sim 10^3 K$, cuja alta magnitude era impossível de ser delucidada pelas teorias semiclássicas. Fato é que os campos moleculares são fictícios. Elétrons em ferromagnetos não sofrem a influência de campos tão altos e a interação responsável pelo alinhamento dos spins não é de natureza magnética mas eletrostática. O desafio da proposta de Weiss só foi resolvido em 1928 por Heisenberg ao descrever a interação de troca utilizando Mecânica Quântica [1, 2, 5].

Discutimos que os campos magnéticos externos são os responsáveis pelo magnetismo dos diamagnetos e paramagnetos no sentido em que, na ausência deles, eles não demonstram qualquer efeito mensurável. Nos ferromagnetos isso não ocorre pois não há linearidade na resposta com relação aos campos como nestes materiais. Isso evidencia a dependência da magnetização com a história da amostra, motivo pelo qual estes são ideais para tecnologias envolvendo gravação magnética. Esta diferença quanto a magnetização resultante divide o ferromagnetismo em basicamente duas classes: os ferromagnetos doces (ou macios) e os duros.

Os materiais ferromagnéticos macios são facilmente magnetizáveis e para campos externos fracos comportam-se de forma aproximadamente linear, de modo que a desmagnetização também é propiciada na medida do anulamento do campo. Em razão disso, sua coercividade é muito pequena e o ciclo de histerese praticamente não existe (ver Figura 1.1 a)). Suas propriedades viabilizam a aplicação em eletroímãs, núcleos de transformadores e dispositivos que demandam blindagem magnética. Já os ferromagnetos duros têm um característico comportamento não linear em sua curva $M \times H$, possuindo alta coercividade e ciclo de histerese "retangular"(Figura 1.1 b)). São usados na fabricação de ímãs permanentes, geladeiras, etc.

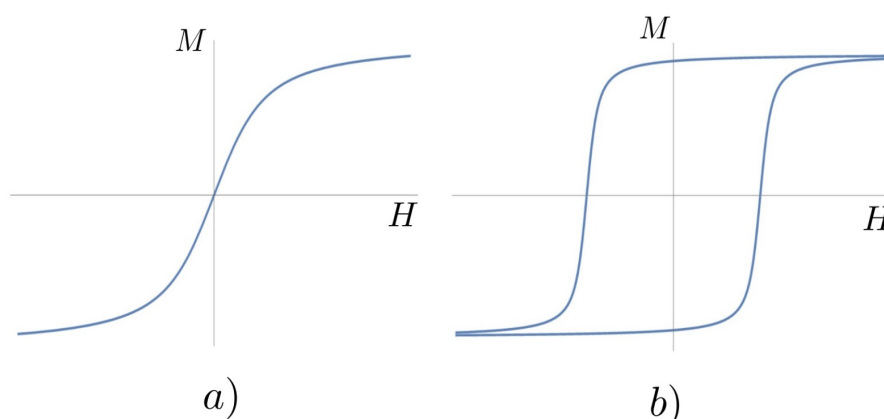


Figura 1.1 – Ciclos de histerese de a) materiais magnéticos macios; b) materiais magnéticos duros.

Contrário ao esperado de uma configuração ideal em que os momentos magnéticos estão todos alinhados numa mesma direção e portanto criando uma magnetização

espontânea apreciável, os materiais ferromagnéticos fora da presença de campos têm uma intensidade muito menor em seu magnetismo. O motivo para isso está na formação dos domínios magnéticos. Estas regiões contendo bilhões de spins orientados paralelamente ocupam dimensões da ordem de 10^{-6} a 10^{-3} m mas estão aleatoriamente distribuídas. Para curtas distâncias em que a interação de troca predomina, as interações dipolares entre os momentos magnéticos são muito pequenas e podem ser negligenciadas, no entanto, quando as distâncias no material tornam-se maiores, elas passam a ser relevantes e o paralelismo entre os spins não é mais energeticamente favorável. Para minimizar a energia livre a configuração mais eficaz é dividir o material, como observado em Figura 1.2 [7].

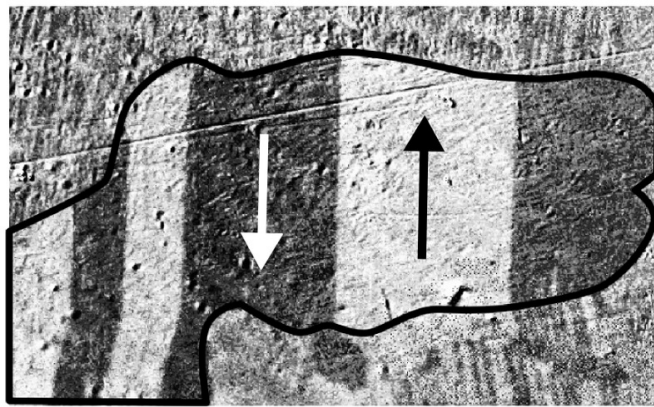


Figura 1.2 – Domínios magnéticos em aço elétrico de grão não orientado. As setas indicam a direção da magnetização em cada domínio. Todos os direitos reservados à fonte: [10]

Uma vez que as transições entre um domínio e outro envolvem quantidades muito altas de energia, as alterações na direção dos momentos magnéticos são realizadas de forma gradual nas chamadas paredes de Bloch. Na aplicação de campos externos, estas paredes se movem para favorecer o alinhamento e facilitar a histerese. Quanto maior forem estes campos, tanto maior será a magnetização adquirida pelo material, até que num dado instante um número exorbitante de spins estarão alinhados e um valor máximo é atingido, isto é, a magnetização de saturação. Após isto, mesmo que os campos externos parem de exercer sua função, a orientação dos domínios impede que o processo seja espontaneamente reversível, resultando numa magnetização remanescente. É claro que tal comportamento ocorre apenas em temperaturas abaixo da temperatura de Curie. Agitações térmicas acima deste valor desordenam completamente o sistema [6].

O antiferromagnetismo apresenta uma interação de troca entre vizinhos próximos semelhante aos ferromagnetos, mas as condições de energia que a estabelecem obrigam os momentos magnéticos a assumirem posições antiparalelas nas redes cristalinas do material de modo que macroscopicamente ele não apresente magnetismo relevante. De modo parecido, estão também os ferrimagnetos, que apesar de possuírem orientação antipara-

lela, têm tipos de íons diferentes que implicam em magnetização resultante não nula. A intensidade deste último, contudo, não se compara à dos ferromagnetos.

1.2 Motivação

Se a abrangência dos fenômenos ocasionados em magnetismo na virada do século XIX para século XX já demonstrava um potencial tecnológico avassalador, muito mais clara tal percepção se tornou ao vislumbrar o empenho que a nanotecnologia e a spintrônica facultaram à nossa era. A possibilidade de se estender estruturas bidimensionais no espaço 3D exigiu que novos tratamentos a nível de pesquisa teórica e experimental fossem realizados. As especificidades provenientes da curvatura local induzem diversos efeitos inesperados em magnetismo e compreender o acoplamento entre esta propriedade intrínseca às superfícies e os ordenamentos nelas presentes é um desafio a ser transposto.

A manufatura de nanofios e filmes finos em formatos dos mais variados ampliou o *hall* de aplicações indo de sensores de campo magnéticos em magnetofluídica, filtros de ondas de spins, dispositivos magneto-encefalográficos para diagnóstico de epilepsia, etc e a obtenção destes materiais hoje orbitam em torno de métodos físicos e químicos. As deposições eletroquímicas de camadas atômicas conseguem produzir tubos magnéticos ocos de diâmetro da ordem de 10 a 100 nm com domínios magnéticos axialmente simétricos. Já as deposições físicas fornecem camadas com baixíssima rugosidade. Os filmes finos magnéticos cuja deformação é feita por meio de substratos curvados tem propriedades bem definidas e podem ser estudados pelas técnicas usuais como magnetometria, microscopia de força magnética, de transmissão eletrônica entre outras [11].

Pesquisas envolvendo nanofios curvados demonstraram um vasto ramo de interesse pois a curvatura permite a fixação das paredes de domínio dentro destes segmentos curvilíneos e a partir disso dimanam novas lógicas magnéticas [12]. Campos magnéticos aplicados a estas geometrias fazem com que as paredes oscilem numa dada frequência e, mais recentemente, foi mostrado que este efeito em nanofitas é suscetível a curvatura local, que não apenas define a amplitude destas oscilações como também pode interferir diretamente na velocidade com que as paredes se movimentam [13]. São estes alguns exemplos do quão prolífico tem sido o uso da geometria para além das clássicas aplicações planares.

As descrições teóricas estáticas e dinâmicas destes sistemas perpassam a investigação das energias envolvidas, podendo ser exclusivamente a energia de troca ou incluindo termos como anisotropia, energia dipolar e Zeeman. A dificuldade a elas associada está na maneira como a curvatura altera a estrutura dos funcionais e automaticamente na resolução das equações derivadas. Os modelos contínuos destas contribuições em conjunto à hamiltoniana de Heisenberg trazem a novidade da topologia como ingrediente essencial para a física estudada. De fato, as excitações topológicas aparecem enquanto soluções do

modelo sigma não linear e foram massivamente abordadas na literatura. Os objetos de estudo mais comuns são cilindros [14–18], cones [19, 20], toros [21, 22] e esferas [23, 24].

Em estado fundamental os vórtices podem emergir em sistemas ferromagnéticos macios como efeitos magneto-quirais induzidos pela curvatura através da típica interação de Dzyaloshinskii-Moriya. Ao passo que em magnetos planares a magnetização é, neste estado, uniforme nas estruturas de monodomínios, o teorema de Poincaré-Brower não permite este aspecto em superfícies curvas, como podemos observar na Figura 1.3. Tais excitações no plano são energeticamente degeneradas e possuem polaridade $+1$ e -1 a depender da magnetização, o que os faz estarem orientados no sentido horário ou anti-horário. No caso de curvatura presente, esta degenerescência é amplificada e possíveis acoplamentos entre a circulação dos vórtices e sua polaridade aparecem. Para cascas esféricas magnéticas, em particular, a magnetização adquire uma componente meridional resultante da quiralidade. A topologia não trivial também se mostra significativa em fitas em forma de faixas de Möebius, cuja não orientabilidade dá origem a paredes de domínio topologicamente induzidas (Figura 1.3).

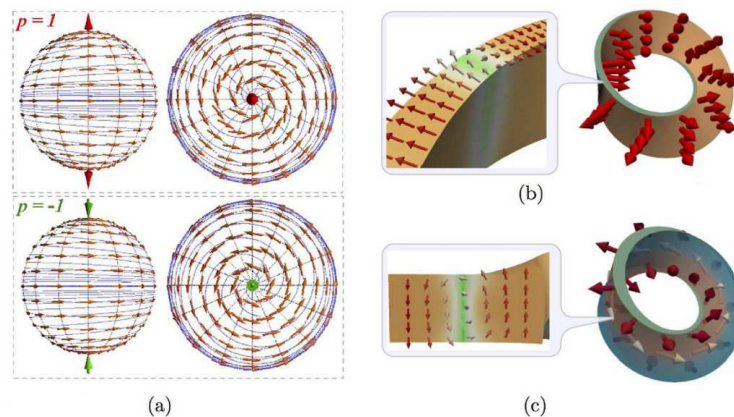


Figura 1.3 – a) Vórtice duplo topologicamente induzido em casca esférica ferromagnética macia, b) e c) Paredes de domínio topologicamente induzidas em fitas de Möebius. Figura extraída de [11].

A estabilidade dos vórtices faz deles plausíveis itens de interesse para o armazenamento de dados, a despeito da excessiva energia associada às mudanças de polarização destas excitações. A referência [25] comenta sobre a descoberta do mecanismo de reversão dinâmica do núcleo do vórtice por meio de um pulso energético que cria um anti-vórtice cuja aniquilação com o primeiro gera um vórtice com a polarização desejada. Em acréscimo, citamos novamente o exemplo das estruturas de tampas magnéticas esféricas, em que há um privilégio do sentido horário requerendo menores pulsos de campo magnético para alteração da polaridade, refletindo o impacto efetivo da curvatura [3, 11].

As transições de fase, entendidas de forma sistemática pela teoria desenvolvida por Landau, tratam de mudanças na matéria comumente associadas à quebra de simetrias contínuas, como é o caso da passagem do estado paramagnético para o ferromagnético, em que determinadas direções no espaço recebem supremacia em relação às outras [26].

Contudo, para sistemas de baixa dimensionalidade ($d \leq 2$) envolvendo interações de curto alcance em temperaturas finitas, estas transições não podem ocorrer, conforme dita o Teorema de Mermin-Wagner [27], ao qual retornaremos na Seção 3.1.

Os trabalhos de Vadim Berezinskii, John Kosterlitz e David Thouless nas décadas de 1970 e 1980 destacaram um novo tipo de transições de fase totalmente dependentes dos defeitos topológicos e que não se identificam pela quebra de simetria. Durante a aludida transição, as duas fases observadas diferem pelo comportamento da função de correlação spin-spin, sendo de decaimento algébrico no regime de baixas temperaturas, e de decaimento exponencial acima de um valor cunhado por T_{BKT} (temperatura de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless). A causa dessa brusca alteração é o desligamento de pares de vórtice-antivórtice, que abaixo dessa temperatura constituem um estado ligado e acima da qual a dissociação contribui para aumentar o grau de desordem do sistema [28].

Os muitos ferramentais teóricos em matéria condensada, usados para estudar as propriedades magnéticas, são bem-sucedidos no tratamento de excitações de spins e transições de fase em ferromagnetos e antiferromagnetos. Dentre estes, podemos citar o formalismo dos operadores bosônicos nas suas diversas representações. Abaixo da temperatura de ordenamento é conveniente empregar a representação de Holstein-Primakoff para a qual as quebras espontâneas de simetria tornam válidos os resultados da teoria linear das ondas de spin. Em fases de ordem mais alta com simetria intacta, a representação de Schwinger é mais recomendada, além de não demandar a presciência sobre a ordem magnética de longo alcance. Sua aplicabilidade torna-se mais difícil em modelos de spins com frustração.

A teoria das ondas de spin não é adequada para o estudo das fases magneticamente desordenadas e não fornece a temperatura T_{BKT} . Neste contexto, a aproximação harmônica auto-consistente (AHAC) é uma alternativa primorosa para resolver os modelos de spin no que tange sua simplicidade. Seu princípio repousa na substituição da hamiltoniana do sistema por uma hamiltoniana harmônica efetiva com a inclusão de um parâmetro de rigidez de spin dependente da temperatura que inclui indiretamente as perturbações de ordem mais alta. Este parâmetro é obtido a partir de uma equação auto-consistente e apresenta um salto, cuja existência indica uma transição de fase espúria. Tal característica é inerente à aproximação e, apesar de significar uma limitação no cálculo das propriedades críticas, não desqualifica o método como razoável para aproximar inferiormente a temperatura de transição [28–31]. A AHAC tem sido recursivamente aplicada por Pires et al. em uma gama de problemas [32–36] e nos últimos tempos ganhou novas generalizações devido a Moura [37–39].

Havendo discorrido sobre a atuação da curvatura nos fenômenos físicos descritos e sobre a importância da dimensionalidade no âmbito das transições de fase, convém estreitar as conexões entre ambas realidades. É notável que o número de publicações tratando ambas idiosincrasias separadamente tem se precipitado com vertiginosa produtividade

[40–43] mas pouco ainda foi feito com respeito a analisar a transição BKT em variedades com métrica não euclidiana, principalmente quando a curvatura em questão é constante negativa. Em consonância aos trabalhos acerca desta geometria [44–48] e em analogia a Moura em [28], nos propomos aqui a investigar a transição BKT sobre a superfície da pseudoesfera por meio da AHAC.

Neste primeiro capítulo introduzimos o magnetismo de forma genérica, passando pelas características mais marcantes dos materiais magnéticos e apresentamos um panorama da literatura no que se refere ao estudo de curvatura e transições de fase topológicas. No segundo capítulo o modelo de Heisenberg é discutido em detalhes. Por questões didáticas, aplicamos a AHAC ao modelo XY no terceiro capítulo. No capítulo 4 são fornecidos alguns tópicos de geometria diferencial como uma preparação para a finalidade da pesquisa desenvolvida, bem como para concluir a metodologia empregada. Por fim, no capítulo 5, a pseudoesfera como superfície subjacente à transição é abordada pela técnica. Ali são explanados os resultados encontrados ao longo desta trajetória, que recebem o fechamento com a conclusão no sexto e último capítulo. Os demais assuntos, correlatos ao tema principal e de sublimine pertinência, são deixados para os apêndices.

II O modelo de Heisenberg

A hamiltoniana de Heisenberg, construída sem análogos clássicos, requer as propriedades fundamentais dos elétrons que dão ao magnetismo sua natureza quântica, a saber: o spin, a energia cinética, o princípio de exclusão de Pauli e a repulsão coulombiana [5, 49]. No intento de apresentá-la, consideremos dois átomos de um elétron, cujos núcleos se situam nas posições \vec{R}_1 e \vec{R}_2 , respectivamente (ver Figura 2.1). Para esse sistema, portanto, a hamiltoniana tem quatro contribuições:

$$H = H_1 + H_2 + H_{ion} + V, \quad (2.1)$$

em que os termos H_1 e H_2 correspondem à interação elétron-íon (mais próximo) e H_{ion} e V aos potenciais íon-íon, elétron-elétron, explicitados pelas equações a seguir:

$$H_i = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_i^2 - \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_i|^2}, \quad i = 1, 2; \quad (2.2)$$

$$H_{ion} = \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|^2}; \quad (2.3)$$

$$V = -\sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{R}_j|^2} + \frac{e^2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2}. \quad (2.4)$$

Aos dois átomos, associamos as funções de onda φ_1 e φ_2 centradas em \vec{R}_1 e \vec{R}_2 e obedecendo à equação de autovalor $H_i\varphi_i(\vec{x}_i) = \epsilon_0\varphi_i(\vec{x}_i)$ (Figura 2.1). A intersecção dessas autofunções confere ao sistema distintos comportamentos magnéticos, isto é, dada a ortogonalidade de φ_1 e φ_2 , o conjunto adquire ferromagnetismo. Em contrapartida, na existência de *overlap*, demonstra-se o antiferromagnetismo, como veremos.

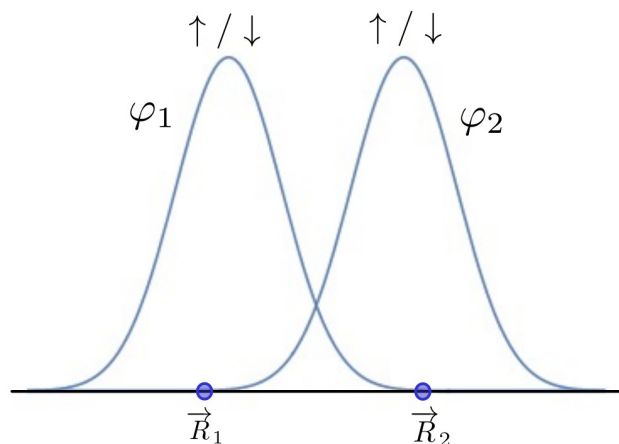


Figura 2.1 – Estados dos dois elétrons que podem se acoplar ferromagneticamente ou antiferromagneticamente a depender da simetria das autofunções.

Faria sentido questionar se não seria melhor assumir a hamiltoniana completa (2.1), para a qual poderíamos aplicar o método de perturbação com $H = H_i + \Delta H$. De fato, parece razoável, mas esse caminho introduz complicações referentes à simetria de H e ΔH na permuta do par de elétrons [50]. Assim, definimos o estado total

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \pm |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle) \equiv |\phi_{12}\rangle \pm |\phi_{21}\rangle, \quad (2.5)$$

para, por meio dele, determinar o valor esperado da energia via método variacional, que é dado por [8]:

$$\langle H \rangle = \frac{\langle \psi_{\pm} | H | \psi_{\pm} \rangle}{\langle \psi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle}. \quad (2.6)$$

O cálculo do denominador da equação (2.6) é facilitado por meio da projeção dos vetores no espaço, logo,

$$\langle \psi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle = (\langle \phi_{12} | \pm \langle \phi_{21} |)(|\phi_{12}\rangle \pm |\phi_{21}\rangle) = 1 \pm |p_{\varphi}|^2, \quad (2.7)$$

sendo $p_{\varphi} = \int d^3\vec{x} \varphi_1(\vec{x}) \varphi_2(\vec{x})$ a parte que engloba, potencialmente, a superposição dos orbitais.

Uma vez que $|\psi_{\pm}\rangle$ é composto pelo produto das autofunções φ_i , $H_i|\psi_{\pm}\rangle$ será um autoestado de H_i , fornecendo para $\langle \psi_{\pm} | H_i | \psi_{\pm} \rangle / \langle \psi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle$:

$$\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle = \epsilon_0. \quad (2.8)$$

O termo iônico é semelhante $\langle H_{ion} \rangle = \epsilon_{ion}$ e ϵ_0 e ϵ_{ion} são constantes. A contribuição realmente relevante vem da média de V :

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\pm} | V | \psi_{\pm} \rangle &= \int d^3\vec{x}_1 d^3\vec{x}_2 |\varphi_1(\vec{x}_1)|^2 V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) |\varphi_2(\vec{x}_2)|^2 \pm \\ &\pm \int d^3\vec{x}_1 d^3\vec{x}_2 \bar{\varphi}_1(\vec{x}_1) \varphi_2(\vec{x}_1) V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \varphi_1(\vec{x}_2) \bar{\varphi}_2(\vec{x}_2) = V_d \pm V_f, \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que V_d e V_f são os termos diagonais da matriz \mathbb{V}_{\pm} na equação abaixo [49]:

$$\mathbb{V}_{\pm} - (\langle H \rangle - 2\epsilon_0)\mathbb{P} = \begin{pmatrix} V_d & V_f \\ (V_f)^* & V_d \end{pmatrix} - (\langle H \rangle - 2\epsilon_0) \begin{pmatrix} 1 & p_{\varphi}^2 \\ (p_{\varphi}^*)^2 & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Unindo as expressões de (2.9) e (2.7), encontramos:

$$\langle V \rangle = \frac{V_d \pm V_f}{1 \pm p_{\varphi}^2}, \quad (2.11)$$

permitindo conceber a possibilidade de mais de um valor de energia de acordo com o

estado escolhido.

Lembremos que H deve ser invariante sob permutações, assim, as reais autofunções devem ser simétricas ou antissimétricas. Isso pode ser conseguido levando-se em consideração também a parte de spin da função de onda $\chi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ tal que

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(\vec{x}_1)\varphi_2(\vec{x}_2) \mp \varphi_1(\vec{x}_2)\varphi_2(\vec{x}_1))\chi_{\pm}. \quad (2.12)$$

Uma função espacialmente simétrica deve possuir um estado de spin singlete antissimétrico e uma função espacialmente antissimétrica deve ter correspondente estado tripleto de spin simétrico [50]. Em termos dos operadores de Pauli, $\sigma_i = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

surtem duas possíveis configurações:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 |\text{singlete}\rangle = -3 |\text{singlete}\rangle; \quad (2.13)$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 |\text{tripleto}\rangle = +1 |\text{tripleto}\rangle. \quad (2.14)$$

que são energeticamente distintas pela quantidade:

$$\Delta E = E_+ - E_- = -2 \left(\frac{p_{\varphi}^2 V_d - V_f}{1 - p_{\varphi}^4} \right) \quad (2.15)$$

Com base nisso, o termo beneficiado na equação (2.15) pressupõe uma tendência para o alinhamento ou desalinhamento dos spins, como discutiremos mais adiante.

Pelo que foi exposto, é interessante escrever a hamiltoniana efetiva

$$H_{\text{eff}} = -\frac{J}{2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad (2.16)$$

com a qual fica evidente que, para spins anti-paralelos e paralelos, nessa ordem, temos:

$$\langle \psi_+ | H_{\text{eff}} | \psi_+ \rangle = \frac{J}{2} S^2 = E_+; \quad (2.17)$$

$$\langle \psi_- | H_{\text{eff}} | \psi_- \rangle = -\frac{J}{2} S^2 = E_-. \quad (2.18)$$

A substituição das equações (2.17) e (2.18) em (2.15) identifica o valor da constante de troca J como sendo:

$$\frac{J}{2} = \frac{p_{\varphi}^2 V_d - V_f}{-1 + p_{\varphi}^4}. \quad (2.19)$$

Um breve comentário acerca da equação (2.15) precisa ser feito: a energia ali calculada deve sua emergência exclusivamente à simetria de permutação das funções de estado. Entretanto, a interação de troca resultante deste fato, não designa uma nova

interação porquanto ela é apenas a manifestação da interação coulombiana entre os dois elétrons [50].

O ferromagnetismo surge da ortogonalidade dos orbitais com mesma ocupação espacial. Daí, extrai-se que $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0 = p_\varphi$ e $V_f = J/2 > 0$. Esse alinhamento paralelo dos spins reduz, conseqüentemente, a energia da interação (ver Figura 2.2 a)). Para o antiferromagnetismo, o sinal de J é alterado pela adição da superposição dos orbitais. Com a aproximação $p_\varphi^4 \ll 1$ em (2.19), constatamos que $p_\varphi^2 V_d < V_f$ e $J < 0$. O anti-alinhamento dos spins, neste caso, reduz a energia cinética [49] (ver Figura 2.2 b)).

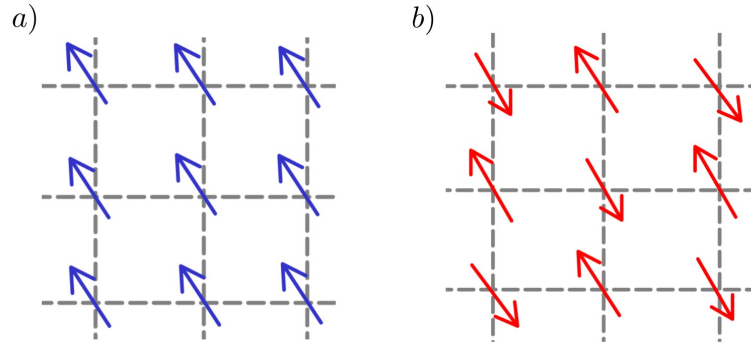


Figura 2.2 – Ordenamento de mínima energia para a) ferromagnetos e b) antiferromagnetos.

A hamiltoniana efetiva (2.16) é conhecida como a hamiltoniana de Heisenberg

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j, \quad (2.20)$$

com $\langle i, j \rangle$ indicando a interação unicamente entre os primeiros vizinhos. As componentes de spin, quando interpretadas como operadores, obedecem às relações de comutação [30]:

$$[S_j^\alpha, S_j^\beta] = i \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_j^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z). \quad (2.21)$$

Em física, a dinâmica é dada pela hamiltoniana H , que é invariante sob as transformações de um grupo de simetrias \mathcal{G} . No âmbito das transições de fase, as fases ordenadas são diferenciadas das desordenadas computando-se as médias termodinâmicas $\langle Q_a \rangle$ dos operadores Q_a , que não são preservadas perante o grupo \mathcal{G} . Estes valores esperados são os parâmetros de ordem do sistema (título que as vezes é referido aos próprios operadores representando observáveis).

A especificação completa das fases ordenadas é, assim, alcançada sondando como $\langle Q_a \rangle$ se transforma para cada elemento $g \in \mathcal{G}$, aos quais estão associados uma matriz $\mathcal{T}_{ab}(g)$ tal que $\langle Q_a \rangle \rightarrow \mathcal{T}_{ab}(g) \langle Q_b \rangle$. Para magnetos descritos pela equação (2.20) o parâmetro de ordem é a magnetização e \mathcal{G} é, sobretudo para ferromagnetos, o grupo das rotações. [51].

Performando uma rotação simultânea de todos os spins por um ângulo θ , sucede

que a energia do sistema permanece imutável. O formalismo clássico proporciona exprimir o produto interno na equação (2.20) com $S_i^a = \sum_b R^{ab}(\theta) S_i^b$, na finalidade de mostrar que

$$\vec{S}_i' \cdot \vec{S}_j' = \sum_a S_i'^a S_j'^a = \sum_b S_i'^b S_j'^b = \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (2.22)$$

para $R^{ab}(\theta) = (R^{-1})^{ba}$ desempenhando o papel da matriz ortogonal da transformação [52].

A atuação do grupo de rotações revela que a hamiltoniana de Heisenberg tem simetria global e contínua pois as operações por ele exercidas tratam todos os constituintes do sistema de forma equivalente. Apesar disso, tal invariância não acontece para rotações aplicadas individualmente aos spins. Salientamos que o gerador das rotações aqui supracitadas é o spin total. Logo, da representação de Heisenberg em Mecânica Quântica e da comutação $[\vec{S}, H] = 0$, deriva que ele é conservado [50].

Diferente da equação (2.20), a magnetização só mantém suas características sob um subgrupo de \mathcal{G} atinente à rotação em torno do eixo à ela paralelo. Suscita que a fase ordenada quebra a simetria de H . Dizemos que essa quebra é espontânea quando a hamiltoniana tem uma simetria conectada a alguma quantidade conservada e que não é compartilhada pelo estado fundamental do sistema ². Em ferromagnetos, uma única direção de alinhamento dos spins é escolhida no estado fundamental, dessa maneira, a magnetização não comuta com H e a invariância a \mathcal{G} se perde [30, 49, 51].

Alguns termos podem ser adicionados a equação (2.20) para contemplar situações físicas diversas. Dentre estes, citamos a anisotropia axial (λ), cuja notoriedade verificar-se-á neste trabalho:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + \lambda S_i^z S_j^z). \quad (2.23)$$

A depender de λ pode ou não haver um favorecimento da componente z do spin. Quanto ao sinal desse coeficiente, classificamos os regimes:

- $\lambda > 0$: a redução da energia do sistema ocorre se a componente z do spin for pequena. No limite de λ muito grande, o campo de spins retem-se totalmente ao plano. Este regime é conhecido como plano fácil.
- $\lambda < 0$: nesse caso, para minimização da energia, é adequado que a componente z seja grande. A perpendicularidade ao plano XY é, então, privilegiada e temos o

² Formalmente, dado um campo ordenador h que induz a magnetização, compreendemos ter havido quebra espontânea de simetria se, no limite termodinâmico, há magnetização remanescente mesmo na redução total de h , isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} m_q(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\mathcal{Z}} \text{Tr}(e^{\beta H} S_q^z) \neq 0,$$

para $H = H_{\text{Heisenberg}} - h S_i^z$.

regime de eixo fácil. Se, ainda, a magnitude de λ for exorbitante, a hamiltoniana aproxima (classicamente) o modelo de Ising.

- $\lambda = 0$: se na hamiltoniana estiverem presentes apenas as componentes x e y , temos o modelo XY ou do rotor planar. Ambos têm a mesma expressão para a energia expressa por H , mas se distinguem no vínculo do espaço interno dos spins. Para o rotor planar, $S^2 = S_x^2 + S_y^2$, enquanto que para o modelo XY, $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$ [3]. Estes dois modelos também se diferenciam em razão de que o rotor planar é um modelo clássico no qual as componentes de spins são vistas como campos. No modelo XY puro, e portanto quântico, os spins são associados a operadores [30].

Dos grupos contínuos mais famosos citamos o grupo bidimensional $\mathcal{O}(2)$ relacionado a rotações no plano ao qual estão associados os ferromagnetos de plano fácil. Quando $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$ a simetria é $\mathcal{O}(3)$. Sistemas com $\mathcal{O}(n)$, $n \geq 3$, são mais difíceis de serem encontrados. Estas simetrias do espaço interno dos spins, bem como a dimensionalidade deste e do espaço externo são os principais fatores responsáveis pelas soluções topológicas possíveis.

III A transição BKT no modelo XY sem curvatura (K=0)

3.1 A fenomenologia da transição de fase topológica

Após ter evidenciado como se dão as quebras de simetria contínua para a hamiltoniana de Heisenberg e havermos exteriorizado brevemente como a temperatura influencia os sistemas com estado fundamental ordenado, podemos refinar a nossa descrição dizendo que os estados termicamente excitados reduzem as correlações de spin, tal que, a medida que a temperatura aumenta, mais insignificante se torna a magnetização e isto caracteriza a transição das fases ferromagnética-paramagnética³. Em sistemas de baixa dimensionalidade isto muda drasticamente. Mermin e Wagner, inspirados pela demonstração de Hohenberg da ausência de superfluidez em temperaturas finitas para sistemas unidimensionais e bidimensionais [53], mostraram que modelos de spin com simetrias contínuas e interações de curto alcance não apresentam quebra espontânea de simetria para qualquer $T > 0$. Este resultado foi sintetizado no teorema cujo nome remete seus autores [27, 49].

Em 2016, David Thouless, Duncan Haldane e Kosterlitz foram laureados com o Nobel por seus estudos acerca de uma nova classe de materiais e transições de fase que não se encaixavam na previsão do Teorema de Mermin-Wagner. Em virtude da transição Berezinskii-Kosterlitz-Thouless ter sido descoberta teoricamente no modelo XY clássico (às vezes chamado também como rotor planar) para os spins, nos dedicaremos a ele neste capítulo.

Para os nossos fins, vamos considerar um sistema com simetria $\mathcal{O}(2)$, de modo que o espaço dos spins seja bidimensional, bem como o espaço físico. Neste caso, os spins estão restritos ao plano, governados pela hamiltoniana de Heisenberg:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \quad (3.1)$$

e de parametrização $\vec{S}_i = (S \cos \phi_i, S \sin \phi_i)$, com o ângulo $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$ em relação ao eixo x tomado a partir de sua posição na rede (Figura 3.1).

³ Quebras espontâneas de simetria podem ser investigadas através da função de correlação de dois pontos:

$$S^{\alpha\alpha}(\vec{q}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{Z}N} \text{Tr} \left[e^{-\beta H(h)} S_{\vec{q}}^{\alpha} S_{-\vec{q}}^{\alpha} \right], \quad \alpha \in \{x, y, z\}$$

que, na ausência de um campo ordenador h , são independentes da direção α . Se esse tipo de quebra de simetria estiver presente, haverá verdadeira ordem de longo alcance e

$$\lim_{|\vec{x}_i - \vec{x}_j| \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle \neq 0$$

para spin nos sítios i e j [49].

Poderíamos ter assumido uma componente z na parametrização acima, mas que não entrasse no cálculo da energia. O modo de fazer isso seria supor que, apesar de existente, S_z é pequena o bastante para manter os spins no plano. Outra alternativa, aqui adotada, é assumir que essa possibilidade não ocorre, favorecendo exclusivamente o regime do rotor planar.

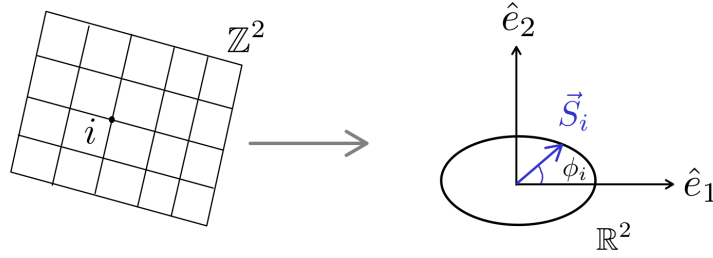


Figura 3.1 – Spins no plano correspondendo ao modelo XY. Inspirado em [52].

Por estas premissas fundamentalmente clássicas, reescrevemos a hamiltoniana (3.1) como:

$$H = -\frac{JS^2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \cos \Delta\phi_{ij}, \quad \Delta\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j. \quad (3.2)$$

Em baixas temperaturas, os desvios angulares entre os spins são pequenos e $|\phi_i - \phi_j| \ll 1$ rad, assim, expandimos o cosseno em potências de $(\phi_i - \phi_j)$:

$$H = -\frac{JS^2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[1 - \frac{1}{2}(\Delta\phi_{ij})^2 + O((\Delta\phi_{ij})^4) \right]. \quad (3.3)$$

O primeiro termo é constante e equivale à energia do estado fundamental $E_0 = -2JS^2N$ em que há completo alinhamento dos spins. N é o número total de spins no sistema e $z = 4$ o número de coordenação da rede [54]. Reparametrizando os sítios em termos da posição \vec{r} partindo da origem do sistema de coordenadas e do espaçamento de rede a , temos:

$$H = E_0 + \frac{JS^2}{4} \sum_{\vec{r}, \vec{a}} [\phi(\vec{r} + \vec{a}) - \phi(\vec{r})]^2 \approx E_0 + \frac{JS^2}{4} \int d^2r [\nabla\phi(\vec{r})]^2. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4) usamos que, para uma rede quadrada, $\vec{a} = a\hat{e}_\kappa$, $\kappa = 1, 2$ e para variações suaves em ϕ , $\phi(\vec{r} + \vec{a}) = \phi(\vec{r} + a\hat{e}_\kappa) - \phi(\vec{r}) \approx a\partial_\kappa\phi(\vec{r})$.

A expansão em termos do gradiente descreve flutuações de baixo custo energético associadas às ondas de spins. Essas configurações podem ser continuamente deformadas até o estado fundamental ($\phi(\vec{r}) = \text{constante}$) e são obtidas da hamiltoniana (3.4) através da equação $\nabla^2\phi(\vec{r}) = 0$. No entanto, existe uma categoria de soluções não triviais, separada das primeiras por uma quantidade finita de energia, que não podem ser transformadas em um estado uniformemente ordenado. Essas soluções são chamadas de defeitos topológicos (ver Apêndice B), ou mais especificamente, vórtices, notados por descreverem

múltiplos de 2π quando consideramos a orientação dos spins em relação a uma curva fechada C em seu entorno [55]. Em suma,

$$\oint_C \nabla\phi(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 2\pi\mathcal{Q}, \quad (3.5)$$

para o inteiro \mathcal{Q} designando a carga topológica. A integral em (3.5) é não nula para toda a curva que englobe um vórtice e se anula caso contrário. Quando há vórtices e antivórtices contornados por C a circulação é zero, indicando que a presença dos pares por eles constituídos tem efeito puramente local [54]. O cálculo da energia destes entes, posteriormente enunciado, confirma este fato.

Por simetria, $\nabla\phi$ tem magnitude uniforme e aponta na direção azimutal, logo,

$$\nabla\phi(\vec{r}) = \frac{\mathcal{Q}}{r} \hat{e}_z \times \hat{e}_r, \quad (3.6)$$

dados os vetores unitários \hat{e}_z e \hat{e}_r perpendicular e no plano, respectivamente. Um vórtice centrado em $\vec{r}_0 = (0, 0)$ apresentará, em vista disso, uma divergência não avaliada pela aproximação contínua.

As duas soluções discutidas podem ser estudadas isoladamente através de $\phi(\vec{r}) = \phi_s(\vec{r}) + \phi_v(\vec{r})$, estando ϕ_s relacionada às ondas de spin e ϕ_v aos vórtices. Da equação (3.5), definimos uma vorticidade $\vec{u} = \nabla\phi$ tal que

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{u} = \int d^2r \hat{e}_z \cdot \nabla \times \vec{u} \Rightarrow \nabla \times \vec{u} = 2\pi \hat{e}_z \sum_i \mathcal{Q}_i \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (3.7)$$

que resulta na equação para ϕ_v :

$$\nabla^2 \phi_v = 2\pi \sum_i \mathcal{Q}_i \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.8)$$

Antes de prosseguir com o estudo das implicações advindas dos defeitos topológicos, enfatizaremos o papel da dimensionalidade visando averiguar paralelamente a existência da ordem de longo alcance. Para tanto, consideremos o modelo XY d-dimensional com uma rede cúbica também d-dimensional. Como a magnetização é o parâmetro de ordem, vamos particularizar, sem perda de generalidade, sua projeção na direção x . Usando a transformada de Fourier (ver Apêndice B.3), portanto, temos:

$$\begin{aligned} m_x = \langle S_x \rangle &= \langle \cos \phi(\vec{r}) \rangle = \frac{\int D\phi \cos \phi(\vec{r}) e^{-\beta H}}{\int D\phi e^{-\beta H}} = \text{Re} \left[\frac{1}{\mathcal{Z}} \int e^{-\beta H + i\phi(\vec{r})} \mathcal{D}\phi \right] \\ &= \exp \left[-(\text{constante}) \underbrace{\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}}_{\mathcal{I}(L)} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A integral $\mathcal{I}(L)$ em (3.9) é finita para $d > 2$, mas para $d \leq 2$ há divergência, impedindo qualquer ordenamento em temperaturas $T \neq 0$, logo, $\langle S_x \rangle = 0$. As transições de fase usuais não acontecem nestas condições, confirmando o que já era previsto pelo Teorema de Mermin-Wagner [51].

Analogamente e em consonância a este resultado, podemos lidar com a função de correlação spin-spin, definida por:

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{0}) \rangle = \langle \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{0})) \rangle = e^{-g(\vec{r})/2} = \exp \left[(\text{constante}) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{k^2} \right], \quad (3.10)$$

com $g(r) \equiv \langle [\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{0})]^2 \rangle$. No limite assintótico ($|\vec{r}| \rightarrow \infty$) a equação (3.10) situa esta grandeza em longas distâncias, para as dimensões consideradas, como:

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(\vec{0}) \rangle = \begin{cases} \exp\left(\frac{-Tk_B}{JaS^2} r\right) \equiv \exp\left(\frac{-r}{\xi}\right), & d = 1 \\ e^{-(\text{constante})T}, & d > 2 \\ \left(\frac{r}{L}\right)^{-\eta(k_B T)/J}, & d = 2. \end{cases}$$

Da mesma forma que a magnetização persiste, as correlações entre os spins sobrevivem para $d > 2$, decaindo a uma taxa constante neste limite. Há, por conseguinte, alguma ordem de longo alcance em baixas temperaturas. Em uma dimensão, o decaimento é exponencial em relação ao comprimento de correlação $\xi \equiv JS^2 a / k_B T \rightarrow \infty$ para $T \rightarrow 0$ e estabelece o ordenamento de curto alcance [54]. No caso bidimensional, o decaimento é algébrico para todas as temperaturas, o que indica criticalidade dado o expoente contínuo em T, $\eta/(\beta J) = 1/(\pi\beta JS^2)$. No regime de altas temperaturas não devemos esperar que seja assim. De fato, o ordenamento residual deixa de existir completamente e estes resultados agora encontrados não mais descrevem com precisão a física observada. A razão da falha destas predições advém do modelo contínuo em baixas temperaturas em união à negligência das excitações de vórtice. Apesar de incoerente, ela mostra que alguma transição de fase deve ocorrer [52]. Mais detalhes sobre a função de correlação aqui apresentada são ofertados no Apêndice B.3.

Quanto à energia, temos a contribuição de um único vórtice (com $\mathcal{Q} = 1$) levando o gradiente da equação (3.5) na equação (3.4):

$$E_{vor} = E_0 + \frac{JS^2}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^L \frac{dr}{r} = E_0 + JS^2 \pi \ln\left(\frac{L}{a}\right), \quad (3.11)$$

em que L é a dimensão do sistema. Observamos que a energia diverge logarithmicamente com $L \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow 0$. Decorre que os vórtices não podem existir em equilíbrio para qualquer temperatura [52]. Para um par vórtice/anti-vórtice em \vec{r}_1 e \vec{r}_2 de distância $D = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$,

$$E_{par} \approx \ln(D/a), \quad (3.12)$$

portanto, quanto maior for a separação entre eles, mais energia eles demandam do sistema [51, 56].

A entropia de um único vórtice, presumida a rede bidimensional com as possíveis localizações do núcleo em algum dos L^2/a^2 sítios disponíveis, é $S = k_B \ln(L^2/a^2)$. Assim, a energia livre dada por $F = E - TS$ é calculada:

$$F = E_0 + (\pi JS^2 - 2k_B T) \ln\left(\frac{L}{a}\right). \quad (3.13)$$

Perceba que a dependência logarítmica com o tamanho do sistema na energia e na entropia se combinam no termo entre parênteses em (3.13), cujo sinal se altera em $k_B T_{BKT} = \pi JS^2/2$. Abaixo deste valor de temperatura não existem vórtices isolados, mas aos pares. Acima de T_{BKT} , entretanto, tais estruturas solitárias começam a aparecer, não como uma proliferação original, mas como um desacoplamento dos pares já formados no sistema quando $T \rightarrow T_{BKT}$ e destroem a ordem de quasi longo alcance (Figura 3.2). Uma vez que estes defeitos topológicos são os exclusivos causadores da transição de fase nesta temperatura, fica elucidado o fenômeno protagonista do nosso trabalho, por hora apresentado em geometria planar.

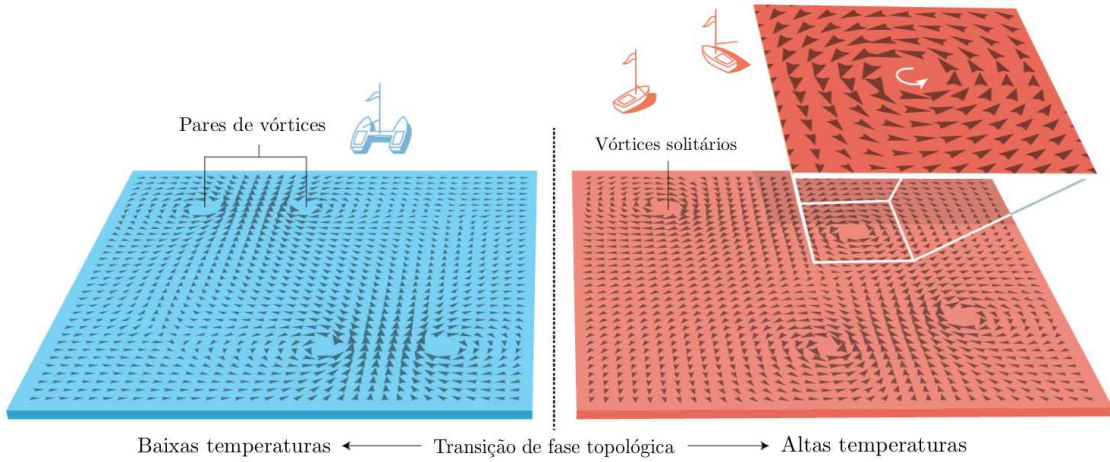


Figura 3.2 – Transição BKT no modelo XY. Imagem adaptada de [57].

A real influência dos vórtices ativados pelo aumento da temperatura é quantificada pela rigidez de spin $\rho(T)$. Este parâmetro, similar às constantes de cisalhamento dos materiais, mensura o quanto da energia livre foi dispendida na formação dos vórtices e, conseqüentemente, na deformação da fase $\phi(\vec{r})$, que agora tem as duas contribuições explícitas ϕ_s e ϕ_v . Ademais, $\rho(T)$ diferencia-se nas fases da transição BKT por:

$$\rho(T) = \begin{cases} \lim_{T' \rightarrow T_{BKT}^-} \rho(T') [1 + \text{constante}(T_{BKT} - T)^{1/2}], & T < T_{BKT} \\ 0, & T > T_{BKT}, \end{cases}$$

cuja assinatura característica fez com que se percebesse, via grupos de renormalização, que

o anulamento da rigidez de spin acima de T_{BKT} significava um salto universal [51, 58, 59] e que a expressão

$$\lim_{T' \rightarrow T_{BKT}^-} \frac{JS^2 \rho(T')}{T'} = \frac{2}{\pi} \quad (3.14)$$

é válida para todos os sistemas [30]. Em acréscimo, e finalmente, para o modelo XY o comprimento de correlação decai muito rapidamente, seguindo a exponencial:

$$\xi(T) \sim \exp\left(\frac{\text{constante}}{(T - T_{BKT})^{1/2}}\right), \quad T > T_{BKT}. \quad (3.15)$$

O fato de ρ ser uma função da temperatura e apresentar o comportamento acima discutido, permite intuir que a equação que a rege seja um meio verossímil de se encontrar diretamente o valor de T_{BKT} , até então ocultado por nossa descrição.

3.2 A aproximação harmônica auto-consistente (AHAC)

A aproximação harmônica auto-consistente foi originalmente proposta por Prokowsky e Uimin na tentativa de explicar o modelo do rotor planar bidimensional clássico [60] e tem como princípio a expansão da hamiltoniana geral de um problema (H) até a segunda ordem em ϕ e S^z . Assume-se que as demais componentes de spin são tomadas classicamente em relação ao eixo z por meio do ângulo de fase (ϕ) ao seu redor⁴. Em tese, este procedimento poderia ser adotado sem qualquer correção no cálculo da energia do espectro das ondas de spin, contudo, os resultados se mostram mais precisos quando tal retificação é feita [61]. Por isso, como as ordens mais altas são desprezadas nesta expansão, a AHAC as considera dentro do parâmetro de renormalização $\rho(T)$, que aparece na nova hamiltoniana (H_0) para melhorar a aproximação realizada na forma quadrática. O método limita-se, assim, a resolver auto-consistentemente a equação de $\rho(T)$, que em geral é de rápida convergência [37].

Seguindo o protocolo descrito, retomemos um sistema de rede quadrada 2-D com interação de troca apenas entre primeiros vizinhos representada pela hamiltoniana de Heisenberg (2.23), adicionada do termo de anisotropia ($0 \leq \lambda < 1$). Nela, adotaremos \vec{S}_i como um campo clássico adimensional, cujas componentes num dado sítio i são

$$\vec{S}_i = \left(\sqrt{S^2 - (S_i^z)^2} \cos \phi_i, \sqrt{S^2 - (S_i^z)^2} \sin \phi_i, S_i^z \right), \quad (3.16)$$

tal que a hamiltoniana H é reescrita como:

$$H = -\frac{JS^2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\sqrt{(1 - (S_i^z)^2)(1 - (S_j^z)^2)} \cos(\phi_i - \phi_j) + \lambda S_i^z S_j^z \right]. \quad (3.17)$$

⁴ Na abordagem clássica, tanto S^z quanto ϕ são considerados variáveis canonicamente conjugadas obedecendo ao parênteses de Poisson $\{\phi_i, S_j^z\}$. Na quantização, os campos são trocados por operadores sujeitos à relação de comutação $[\phi_i, S_j^z] = i\delta_{ij}$, com $\hbar \equiv 1$.

O próximo passo é executar a expansão em termos de S^z e $\Delta\phi = \phi_i - \phi_j$ na equação (3.17) acima:

$$H_0 = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\frac{\rho S^2}{2} (\phi_i - \phi_j)^2 + (S_i^z)^2 - \lambda S_i^z S_j^z \right]. \quad (3.18)$$

Enfatizamos que a rigidez de spin já introduzida se faz necessária devido ao comportamento de \dot{S}_i^z associada à diferença $\Delta\phi$. Sua ausência nos termos de S^z explica-se pelo fato da derivada temporal de ϕ_i não ser distinta em relação às hamiltonianas H e H_0 , não carecendo, portanto, de um fator corretivo [28]. A expressão do parâmetro imposto, é determinada pelo princípio variacional de Bogoliubov em que usamos a desigualdade homônima $F \leq F_0 - \langle H_0 \rangle_0 + \langle H \rangle_0 = \Gamma(\rho)$, arrazoada no Apêndice B.4.

Em preparação para trazer à luz a forma de ρ , aproveitamos a simetria translacional da rede, diagonalizando a equação (3.18) com a ajuda da transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \phi_q, \\ S_i^z &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} S_q^z. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para $\vec{r}_j = \vec{r}_i + \vec{a}$, sendo a a constante de rede, é fácil mostrar que H_0 se torna:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_q [h_q^\phi \phi_{-q} \phi_q + h_q^z S_q^z S_{-q}^z] \equiv H_0^\phi + H_0^z \quad (3.20)$$

somando sobre a primeira zona de Brillouin e assinalando, respectivamente, $h_q^\phi = Jz\rho S^2(1 - \gamma_q)$ e $h_q^z = Jz(1 - \lambda\gamma_q)$, para os quais o fator de estrutura é definido por $\gamma_q = (1/z) \sum_r e^{i\vec{q}\cdot\Delta\vec{r}}$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Conhecida a hamiltoniana de teste $H_0(\rho)$, o princípio variacional consiste na minimização de $\Gamma(\rho)$ com respeito a ρ , isto é, $\partial\Gamma/\partial\rho = 0$ [39].

Numa abordagem semiclássica, a equação (3.20) permite separar as partes quadráticas em ϕ e S^z , tal que, pelo teorema da equipartição, o valor esperado de ambas contribuições calculado com respeito a H_0 é:

$$\langle H_0 \rangle_0 = \langle H_0^\phi + H_0^z \rangle_0 = \mathcal{N}k_B T. \quad (3.21)$$

Sendo os campos ϕ e S^z independentes, as funções de partição de H_0^ϕ e H_0^z são destarte:

$$\mathcal{Z}_0^\phi = \int \mathcal{D}\phi_q e^{-\beta H_0^\phi} = \prod_q \sqrt{\frac{2\pi}{\beta S^2 z J \rho (1 - \gamma_q)}}; \quad (3.22)$$

$$\mathcal{Z}_0^z = \int \mathcal{D}S_q^z e^{-\beta H_0^z} = \prod_q \sqrt{\frac{2\pi}{\beta z J (1 - \lambda\gamma_q)}}, \quad (3.23)$$

resultando na energia livre

$$F_0(\rho) = -k_B T \ln \mathcal{Z}_0 = -k_B T \ln(\mathcal{Z}_0^y \mathcal{Z}_0^z) = \frac{\mathcal{N}k_B T}{2} \ln \rho + (\text{termos constantes}). \quad (3.24)$$

Já a média $\langle H \rangle_0$ é facilmente obtida rememorando-se a expressão (B.9) e expandindo a raiz quadrada envolvendo S^z na equação (3.17), enquanto a parte em ϕ é mantida intacta [28]:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_0 &\approx -\frac{JS^2}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \cos \Delta\phi \rangle_0 \left\langle 1 - \frac{(S_i^z)^2}{S^2} \right\rangle_0 \\ &= -\frac{JS^2 \mathcal{N}z}{2} \left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{S^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Levando as expressões (3.21), (3.24) e (3.25) à $\Gamma(\rho)$ em (B.28), encontramos:

$$\Gamma(\rho) = \frac{\mathcal{N}k_B T}{2} \ln \rho - \mathcal{N}k_B T - \frac{J\mathcal{N}zS^2}{2} \left(1 - \frac{\langle (S^z)^2 \rangle_0}{S^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0}, \quad (3.26)$$

que, sob a condição de minimização, advém a equação para o parâmetro ρ :

$$\rho = \left(1 - \frac{\langle (S_i^z)^2 \rangle_0}{S^2} \right) e^{-\frac{1}{2} \langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0}, \quad (3.27)$$

com o requerimento da obtenção das médias $\langle (S_i^z)^2 \rangle_0$ e $\langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0$.

Aproximando $S_q^y \approx S\phi_q$, conseguimos explicitar as componentes longitudinais de spin em H_0 [37], isto é:

$$H_0 = \sum_q [h_q^\phi S_q^y S_{-q}^y + h_q^z S_q^z S_{-q}^z]. \quad (3.28)$$

A partir disso, a dinâmica de ondas de spin, na abordagem semiclássica, é especificada pelas equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \hbar \dot{S}_q^z &= \frac{\partial H_0}{\partial \phi_q} = -2h_q^\phi S_q^y, \\ \hbar \dot{S}_q^y &= S \frac{\partial H_0}{\partial S_q^z} = 2h_q^z S_q^z, \end{aligned} \quad (3.29)$$

que, assumindo soluções com dependência temporal $e^{i\omega t}$ fornecem a energia das ondas de spin:

$$\begin{pmatrix} i\hbar\omega & -2h_q^z \\ 2h_q^\phi & i\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_q^y \\ S_q^z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E_q = \hbar\omega_q = 2\sqrt{h_q^\phi h_q^z}. \quad (3.30)$$

Pelo teorema da equipartição da energia em (3.20) as médias estatísticas são facilmente encontradas:

$$\langle \phi_q \phi_{-q} \rangle_0 = \frac{1}{\beta h_q^\phi} = \frac{4k_B T h_q^z}{E_q^2}, \quad (3.31)$$

$$\langle S_q^z S_{-q}^z \rangle_0 = \frac{1}{\beta h_q^z} = \frac{4k_B T h_q^\phi}{E_q^2}, \quad (3.32)$$

e, no espaço real, designam as funções de correlação estáticas através das integrais [62]:

$$\frac{1}{2} \langle (\Delta \phi)^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle \phi_q \phi_{-q} \rangle_0 (1 - \gamma_q) d^2 q = \frac{k_B T}{4S^2 J \rho} \equiv \frac{t}{\rho}, \quad (3.33)$$

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \langle S_q S_{-q} \rangle_0 d^2 q = \frac{k_B T}{4J} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{1 - \lambda \gamma_q} d^2 q \equiv \frac{k_B T}{4J} I(\lambda). \quad (3.34)$$

A equação auto-consistente, considerando-se a substituição de (3.33) e (3.34) em (3.27), é, deste modo:

$$\rho = (1 - tI(\lambda))e^{-t/\rho}, \quad (3.35)$$

variável a depender da física vinculada aos valores de λ . Como $\lambda = 0$ no modelo XY, a integral $I(\lambda = 0) = 1$. No rotor planar, contudo, a possibilidade de componentes fora do plano é inconcebível, assim, $I(\lambda) = 0$ invariavelmente [33]. O gráfico de $\rho \times T$ é mostrado na Figura 3.3 e apresenta um salto abrupto similar ao esperado durante a transição BKT [28]. Contrário à expectativa, este comportamento é consequência da anarmonicidade da hamiltoniana original (2.23) e é demarcado por uma temperatura crítica $T_c > T_{BKT}$, valorada por:

$$\left. \frac{dt}{d(e^{-t/\rho})} \right|_{t_c} \rightarrow 0 \Rightarrow T_c = \frac{4JS^2}{e + I(\lambda)} \quad (3.36)$$

estimada quando (3.35) não admite soluções além da trivial $\rho = 0$. De (3.36) verificamos que para o modelo XY clássico, $T_c = 1,076JS^2$ e para o rotor planar $T_c = 1,47JS^2$ [35,63]. O anulamento de ρ nesta temperatura indica que a aproximação harmônica está sugerindo uma transição de fase de primeira ordem (com inclinação infinita na magnetização) em T_c . É certo que tal previsão não é verdadeira. Simulações de Monte Carlo atestam que, na presença de interações exclusivamente oriundas de ondas de spin, não há transição alguma [29]. Apesar disto, Ariosa e Beck apontaram que o método descreve corretamente flutuações de baixa amplitude para $T < T_c$ [64]. O erro no atingimento da temperatura acontece em razão da rigidez de spins na AHAC não incorporar o efeito da polarização dos pares ligados de vórtices, fazendo com que ela superestime o custo energético a eles

associados e não seja capaz de abranger o salto universal (3.14). A correção devido aos defeitos topológicos, esboçada na seção 3.1, pressupõe uma saída para se avaliar T_{BKT} intersectando-se as curvas $\rho(T)$ e $\rho = 2T/\pi JS^2$. Este método fornece com sucesso o valor $T_{BKT} = 0,83JS^2$ para o modelo XY (ver Figura 3.3) corroborado pela literatura [33, 65, 66].

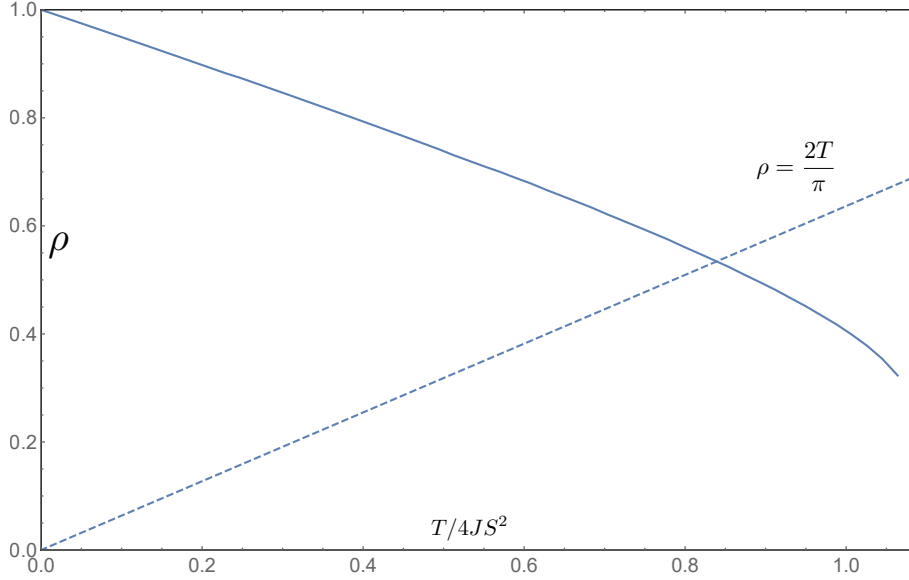


Figura 3.3 – Curva da rigidez de spin para o modelo XY interseccionada pela reta $2T/\pi$.

Ariosa e Beck também propuseram uma alternativa para a inclusão das excitações de vórtice, cujo argumento aqui reproduzimos. No cálculo de $\langle(\phi_i - \phi_j)^2\rangle_0$ considerou-se uma distribuição de probabilidade local $P_0(\Delta\phi)$ de um único ressalto em $\Delta\phi = 0$, quando na realidade, $\Delta\phi$ deveria ser periódico com ressaltos em cada $\Delta\phi_n = 2\pi n$. Adotar a configuração correta para a distribuição de probabilidade significa substituir P_0 por $P(\Delta\phi) = (1 - p)P_0(\Delta\phi) + \frac{1}{2}p[P_0(\Delta\phi - 2\pi) + P_0(\Delta\phi + 2\pi)]$, sendo

$$p = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{J\pi^2\rho}{4T}}\right) \quad (3.37)$$

a probabilidade da fase estar fora de $[-\pi, \pi]$ e $\operatorname{erf}(\dots)$ a função erro. A média $\langle(\Delta\phi)^2\rangle_0$ modificada passa a ser, portanto $\langle(\Delta\phi)^2\rangle = \langle(\Delta\phi)^2\rangle_0 + 4\pi^2p$ [28, 35, 67].

A quantização da hamiltoniana é simples. Obedecendo à comutação $[\phi_q, S_q^z] = i\delta_{qq'}$, definem-se convenientemente os operadores bosônicos a_q , tal que as antigas variáveis canônicas sejam agora substituídas por:

$$\phi_q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar_q^z}{\hbar_q^\phi} \right)^{1/4} (a_q^\dagger + a_{-q}), \quad (3.38)$$

$$S_q^z = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar_q^\phi}{\hbar_q^z} \right)^{1/4} (a_q^\dagger - a_{-q}). \quad (3.39)$$

Deste modo, (3.20) é diagonalizada

$$H_0 = \sum_q \hbar\omega_q \left(a_q^\dagger a_q + \frac{1}{2} \right), \quad (3.40)$$

e a energia E_q é novamente dada pela equação (3.30), sujeita à troca $S \rightarrow \tilde{S} = \sqrt{S(S+1)}$. A rigidez de spin continua possuindo a forma (3.27) mas as médias são calculadas por intermédio de (3.40):

$$\langle \phi_q \phi_{-q} \rangle_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_q^z}{h_q^\phi}} \coth\left(\frac{\beta\omega_q}{2}\right), \quad (3.41)$$

$$\langle S_q^z S_{-q}^z \rangle_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_q^\phi}{h_q^z}} \coth\left(\frac{\beta\omega_q}{2}\right) \quad (3.42)$$

que, no limite de baixa energia, $\beta E_q \ll 1$, $\coth(\beta E_q/2) \approx 2/\beta E_q$, reduzindo (3.41) e (3.42) à (3.31) e (3.32) [37]. A aproximação harmônica aplicada ao modelo XY quântico bidimensional (para $S = 1/2$) é melhor aprofundada em [29,68]. O nosso foco nesta seção concentrou-se em apresentar a AHAC tendo o modelo XY clássico como protótipo para seu uso e validação.

IV Tópicos de geometria diferencial

Aqui selecionamos alguns assuntos referentes à geometria não euclidiana que permitirão o entendimento geral da pseudoesfera, superfície na qual estudaremos a transição BKT. Este capítulo, portanto, cobrirá desde a parametrização e obtenção da métrica, bem como suas propriedades mais imediatas. É demonstrada a grandeza do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 a partir de considerações sobre a curvatura gaussiana e justifica-se a sua não imersividade no espaço euclidiano tridimensional. A última seção é dedicada exclusivamente ao modelo do hiperbolóide de duas folhas no espaço de Minkowski.

4.1 O legado da geometria euclidiana e o paradigma do postulado das paralelas

Apesar da incerteza quanto a origem da geometria, os registros apontam para áreas do Oriente Antigo em que sua aplicação principal era de cunho prático, voltado para a agricultura, irrigação e divisão geográfica. Não por acaso, a etimologia da palavra “geometria” seja justamente “medida de terras” [69]. As razões para tal desenvolvimento ocorrer nessa região são muito provavelmente fruto das cheias recorrentes nas áreas entre rios, que demandavam redefinições contínuas dos terrenos [70, 71].

O ápice desta ciência aconteceu na Grécia por volta dos anos 300 a.C. com Euclides e seu aclamado livro “Os Elementos” que sintetiza de forma axiomática toda a geometria demonstrativa desde Tales de Mileto [70].

No primeiro livro dos treze que compõem a obra, Euclides estabelece os 5 postulados básicos, a partir dos quais ele construirá o corpus da geometria que levaria seu nome. A tradução destes enunciados pode ser colocada nas seguintes palavras [72]:

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta (t), caindo sobre duas retas (p e q), faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos ($\alpha + \tilde{\alpha} < \pi$), sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (ver Figura 4.1 a)).

6. (Equivalência de 5, devido a Playfair) Através de um ponto fora de uma linha reta infinitamente longa há apenas uma linha reta infinitamente longa que não intersecta a primeira linha [73](ver Figura 4.1 b)).

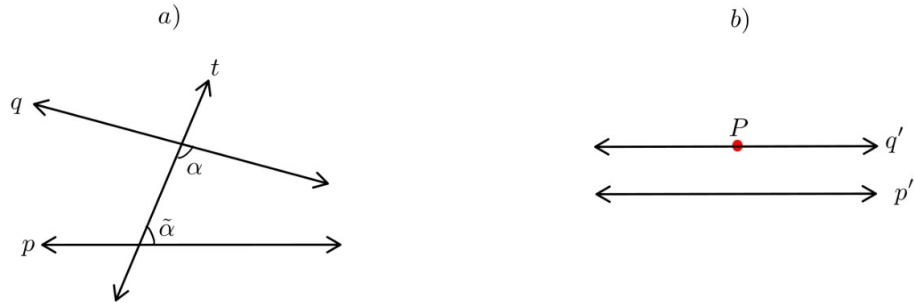


Figura 4.1 – O quinto postulado de Euclides em suas duas formulações mais conhecidas.

Notavelmente, Euclides utilizou apenas os 4 primeiros postulados nas provas das 28 proposições seguintes [74]. Esse fato chamou a atenção de muitos geômetras posteriores, como por exemplo, o filósofo neoplatônico Proclo, que escreveu um comentário ao primeiro livro dos Elementos e constatou que o quinto postulado não só deveria ser retirado do conjunto dos demais, como também carecia de uma demonstração, dada sua similaridade com um teorema [75]. A partir dessa crítica, uma miríade de matemáticos tentou, sem sucesso, demonstra-lo como uma consequência lógica dos quatro primeiros axiomas.

Em 1733, Girolamo Saccheri se enveredou nessa empreitada e publicou o livro “Euclides livre de toda mancha” (Euclides ab omni naevo vindicatus), no qual tentou estabelecer uma demonstração da geometria euclidiana através de um argumento por absurdo [70]. Seu raciocínio consistiu em assumir a existência de um quadrilátero $ABCD$ com dois ângulos retos (\hat{A}, \hat{B}) e dois lados iguais ($AC = BD$) (ver Figura 4.2).

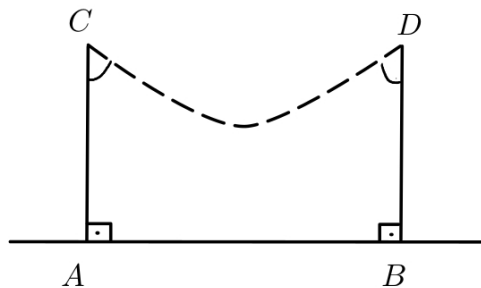


Figura 4.2 – O quadrilátero de Saccheri.

A partir disso, foram consideradas três possibilidades para os ângulos \hat{C} e \hat{D} , a saber: ambos como sendo iguais e retos, ambos iguais e agudos e por fim, iguais e obtusos. A primeira significa dizer que um retângulo existe e é consequência direta do postulado das paralelas. Essa escolha para a disposição dos ângulos no quadrilátero implica afirmar

também que a geometria euclidiana privilegia a reta como a menor distância entre dois pontos e tem como mensuração de comprimento o teorema de Pitágoras, cuja equivalência ao quinto postulado pode ser demonstrada [76].

Esse resultado não trouxe novidades. Para essa configuração, segue igualmente que a soma dos ângulos internos de um triângulo S_{Δ} é igual a π [72]. A surpresa embaraçosa veio das outras duas alternativas. Saccheri percebeu que, nesse caso, ao abandonar a exigência dos ângulos retos, a reta seria uma impossibilidade. Além disso que, o excesso angular, $\varepsilon = S_{\Delta} - \pi$ tinha valor não nulo, contrariando o esperado. Para ângulos agudos, $\varepsilon < 0$ e para ângulos obtusos, $\varepsilon > 0$ [77](ver Figura 4.3).

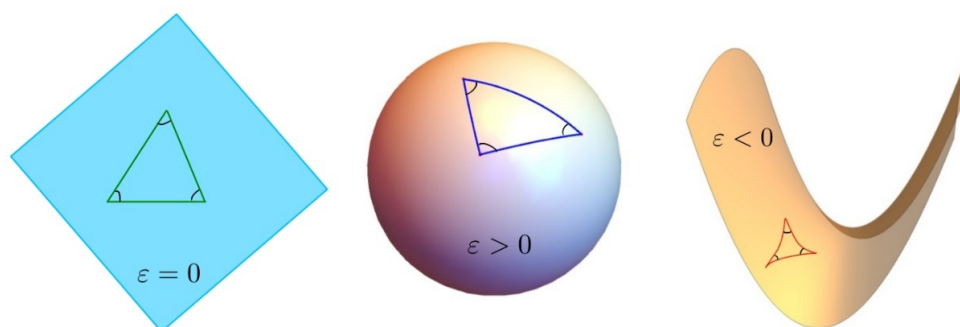


Figura 4.3 – Possíveis geometrias emergentes da flexibilização do postulado das paralelas.

Tais distinções advindas da hipótese de não validade do quinto postulado deliberam duas formas de geometria, respectivamente: a hiperbólica e a elíptica. Como o objetivo de Saccheri era encontrar contradições, ele não percebeu que a geometria absoluta, alicerçada sobre os quatro primeiros postulados que ele utilizou, abria caminho para uma revolução na matemática. Entretanto, ele conseguiu contornar a problemática da geometria dos ângulos obtusos, pois em primeira instância, ela também invalidava o segundo postulado que pressupunha ser possível prolongar indefinidamente uma linha. Seus esforços em relação à geometria dos ângulos agudos, contudo, não foram suficientes, e mesmo sua solução acerca da geometria elíptica mostrou-se inconclusiva mais tarde [73, 78].

As discussões acerca da geometria não euclidiana não se restringem apenas ao domínio da matemática mas se inserem também no debate sobre a plausibilidade da existência do espaço físico para além de um recurso operacional para descrever a natureza.

O sucesso da mecânica newtoniana foi inquestionável até o século XIX e, apesar dos críticos à filosofia desse sistema de pensamento, a absolutez do espaço foi gradativamente sendo aceito como premissa fundamental.

Foi Euler quem inicialmente formulou a ideia de espaço absoluto nos termos do Principia de Newton considerando-o como uma generalização do conceito de lugar, concernente ao modo como os objetos se organizam mutuamente, e deixando sua existência real para o campo das especulações. Anos mais tarde, ele mudou seu posicionamento e concluiu que tanto o tempo quanto o espaço admitidos pelos matemáticos eram realidades

essenciais para determinar a dinâmica dos corpos. O argumento adotado por ele consistia sobretudo do princípio de inércia [74].

É interessante notar que Kant também teve papel crucial para a questão. Na juventude, ele se dedicou à relatividade do espaço, conjecturando ser impossível dizer com respeito a que algo se move ou permanece em repouso. A distinção entre espaço matemático e espaço físico se tornaria, por esse viés, definida pois um sistema de coordenadas qualquer não teria pontos de referência materiais para discernir a diferenciação do movimento.

Certamente foi por influência de Euler que Kant assimilou o espaço absoluto, e, para justificá-lo, ele partiu da distinção entre direita e esquerda, cujo contraste segundo ele só poderia ser explicada por meio de um referencial privilegiado [74].

A disparidade entre a física e a filosofia de Kant provinha de sua teoria do conhecimento pautada na intuição, que por sua vez, enrijeceu sua maneira de enxergar a geometria. Como o espaço dependia da experiência para ser acessado, ele certamente estaria conectado às impressões do observador.

Kant, conquanto tenha entrevisto a razoabilidade de espaços com dimensões diferentes das três contempladas por Euclides, se apegou a esta última descrição em decorrência da lei da gravitação universal de Newton que a pressupunha. Outro motivo para a estima com a geometria euclidiana vêm da compatibilidade da mesma com a doutrina apriorística desenvolvida por ele [79].

O espaço ser absoluto ou não teve pouca importância no avanço da mecânica clássica, de modo que Ludwig Lange decidiria, em 1885, por um fim a essa dificuldade prática introduzindo os referenciais inerciais, para os quais a lei da inércia vale e vice-versa. A não verificação do espaço absoluto também designava sua inutilidade, como viria a ser constatada com a interpretação de Einstein sobre o experimento de Michelson-Morley [74]

Tendo sido abolido o espaço absoluto, restava ainda uma de suas características: a natureza euclidiana (ou agora, pseudo-euclidiana de Minkowski na relatividade especial). Isso só se tornou questionável quando começaram a emergir os frutos do trabalho de Saccheri.

Gauss foi um dos pioneiros a reconhecer e sistematizar uma geometria não euclidiana, mas por medo da pressão de seus pares e por gozar de grande prestígio em sua época decidiu não publicá-la [80]. As razões pelas quais ele se empenhou nessa descoberta vieram de um estudo de triangulação em montanhas alemãs usando um instrumento de medições topográficas. A ideia era verificar o ângulo de excesso ε a partir dos vértices formados. O resultado foi inconclusivo, fazendo com que Gauss atribuísse planicidade ao espaço físico, salvo a limitação da medida.

Em 1829, Nikolai Lobachevski publicou um artigo no qual obtinha rigorosamente a geometria hiperbólica tendo como alternativa ao quinto postulado de Euclides a possibilidade de existirem infinitas retas paralelas passando por um ponto acima de uma reta

dada. Essa mesma formulação seria encontrada independentemente por János Bolyai na mesma época. A atitude adotada por ambos representou um marco na história da matemática pois demonstrou que o axioma das paralelas não era uma necessidade lógica dos quatro anteriores [81].

Lobachevski, que era da mesma opinião de Gauss quanto a verificação da geometria do espaço físico, decidiu abordar o assunto via observações astronômicas, que obviamente forneciam dados em escalas maiores. Para isso, ele usou um triângulo com vértice superior na estrela Sirius e a base sendo o diâmetro da órbita terrestre. O seu cálculo, embora errado, forneceu uma paralaxe de $1,24''$, em favor da geometria hiperbólica. O valor corrigido resultaria em $0,40''$, a partir do qual Lobachevski concluiria que a nova geometria não tinha aplicabilidade real [74, 79].

O quão tangível era a nova geometria foi uma dificuldade a ser eliminada. De fato, as noções de paralelismo eram estranhas à ortodoxia das definições anteriores, e a ausência de modelos visuais que a sustentassem trouxe rejeição, a ponto de Lobachevski nomeá-la como “geometria imaginária”.

O fortalecimento da geometria não euclidiana se estabeleceu de modo incontestável com os trabalhos de Eugene Beltrami, que não só ampliou a biblioteca dos modelos da geometria hiperbólica como também mostrou que esta admitia uma representação parcial própria equiparável às da geometria euclidiana usuais. Nesse intuito ele estudou o comportamento das geodésicas do tractóide, cujas propriedades são as mesmas descritas por Lobachevski [81].

A teoria geral de superfícies devido à Gauss e as alternativas ao postulado das paralelas receberam seu coroamento com a contribuição de Bernhard Riemann, que além de estudar as curvaturas positivas, generalizou as três geometrias introduzindo a noção de variedades diferenciáveis.

Ao contemplar o alcance de suas ideias para compreender a geometria do espaço físico, Riemann lidou com o problema da homogeneidade do espaço e a quantidade de matéria nele existente. Em razão disso, ele concluiu que as relações métricas envolvidas deveriam ser buscadas nas interações atuantes e não puramente na geometria observada. Esse insight, junto de todo o ferramental matemático que ele desenvolveu, constituiu a base do que mais tarde seria conhecido como a Relatividade Geral de Einstein.

Na virada do século XX, Poincaré objetou que a verificação da geometria do espaço físico não era relevante, ou sequer acessível, uma vez que as medidas que fazemos não se dão sobre o espaço e sim sobre os objetos ou eventos nele distribuídos. Por essa razão, ficou claro que a refutação ou confirmação de qualquer geometria não poderia ser garantida pelos experimentos [74]. Apesar disso, as tentativas prosseguiram e em 2021 novas medidas astronômicas foram feitas. Até o momento, nenhum desvio da geometria euclidiana foi encontrado [82].

Do que expusemos, é imprescindível ressaltar o papel das teorias físicas como um

estimulador para a evolução da geometria não euclidiana. A ação mútua dessas duas áreas possibilitou diversas aplicações para além de suas próprias fronteiras.

4.2 Curvas parametrizadas

Definimos uma curva paramétrica $\gamma(t)$ como sendo um mapeamento diferenciável levando um intervalo I em \mathbb{R} em pontos de \mathbb{R}^3 [83], ou seja:

$$\gamma(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

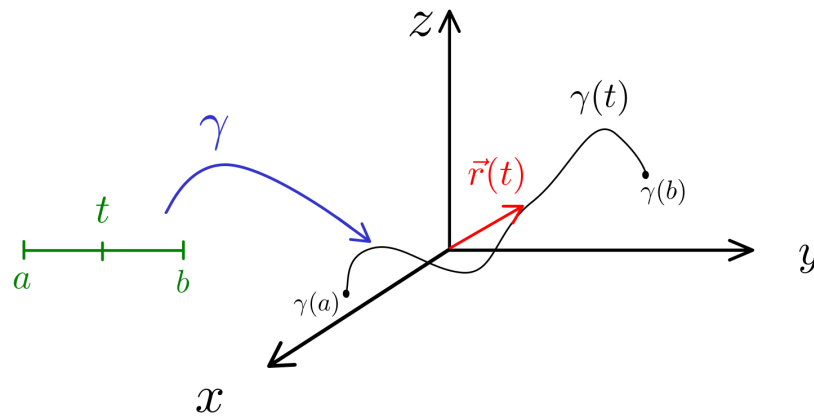


Figura 4.4 – Curva em \mathbb{R}^3

Dado o vetor posição $\vec{r}(t)$, os vetores tangentes a $\gamma(t)$ são obtidos a partir de $d\vec{r}(t)/dt$. Quando é possível escrever $|d\vec{r}(t)/dt| = 1$ ao longo da curva, dizemos que γ foi parametrizada pelo comprimento de arco. Isso equivale a percorrer a curva com velocidade unitária. Para esse tipo de parametrização, em especial, a distância entre dois pontos a e b é simplesmente [84]:

$$L(\gamma) = \int_a^b dt \|\dot{\vec{r}}(t)\| = |t_2 - t_1|,$$

em que $r(t_1) = a$ e $r(t_2) = b$.

Além dessas propriedades básicas no estudo de curvas, é importante assinalar que curvas planas são aquelas cuja alocação num plano é realizada sem alteração de sua estrutura por deformações; e que uma família de curvas ortogonais tem perpendicularidade em seus pontos de intersecção [85]. A medida que o texto segue vamos aplicar esses e outros conceitos, sem os quais, nosso objetivo não seria tão bem esclarecido.

4.3 Superfícies

Uma superfície regular S pode ser aproximadamente pensada como uma coleção de pedaços de planos unidos e deformados evitando-se imperfeições como arestas e bicos [86].

Formalmente S é um conjunto de pontos em \mathbb{R}^3 cujas coordenadas são $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e u, v pertencentes ao subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 . Na Figura 4.5 abaixo, $\hat{e}_1 = (1, 0)$ e $\hat{e}_2 = (0, 1)$, $\hat{f}_1 = (1, 0, 0)$, $\hat{f}_2 = (0, 1, 0)$ e $\hat{f}_3 = (0, 0, 1)$.

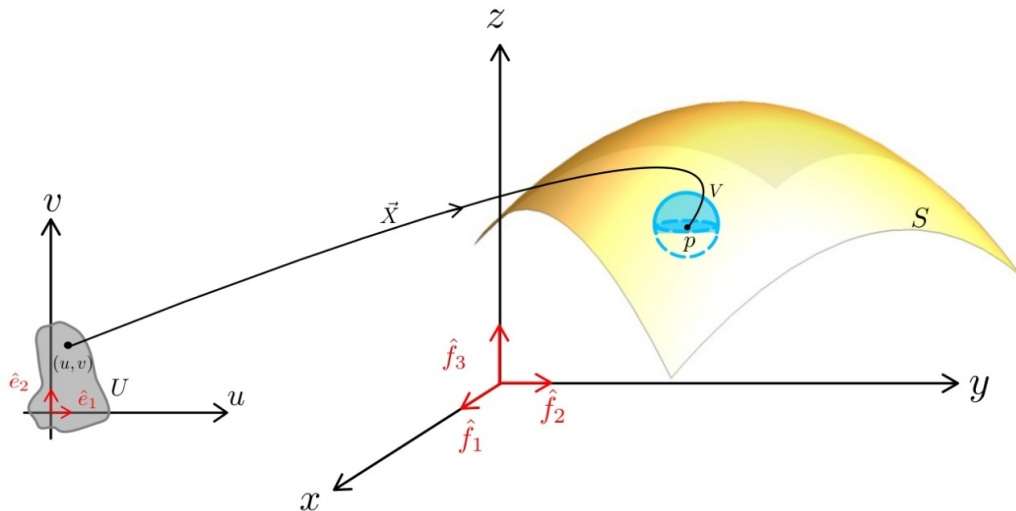


Figura 4.5 – Aplicação no aberto U em \mathbb{R}^2 que parametriza S .

A representação paramétrica da superfície é denotada por:

$$\vec{X}(u, v) = x(u, v)\hat{f}_1 + y(u, v)\hat{f}_2 + z(u, v)\hat{f}_3 \quad (4.1)$$

e definirá um sistema de coordenadas locais numa vizinhança V de p com x, y, z funções diferenciáveis. Além disso, \vec{X} possui inversa e, dado qualquer ponto $q \in U$, é possível atribuir uma diferencial $d\vec{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Em outras palavras, as curvas nas direções \hat{e}_1 e \hat{e}_2 obtidas mantendo-se fixas as coordenadas u_0 e v_0 são mapeadas em S pelas imagens $u \mapsto (u, v_0)$ e $v \mapsto (u_0, v)$ (ver Figura 4.6), para as quais os vetores tangentes são [86]:

$$\begin{aligned} d\vec{X}_q(\hat{e}_1) &= \partial_u \vec{X} \equiv \vec{X}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ d\vec{X}_q(\hat{e}_2) &= \partial_v \vec{X} \equiv \vec{X}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Em notação tensorial:

$$x^i_{\mu} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{\mu}},$$

em que $\mu = 1, 2$, $(u^1, u^2) = (u, v)$ e $i = 1, 2, 3$.

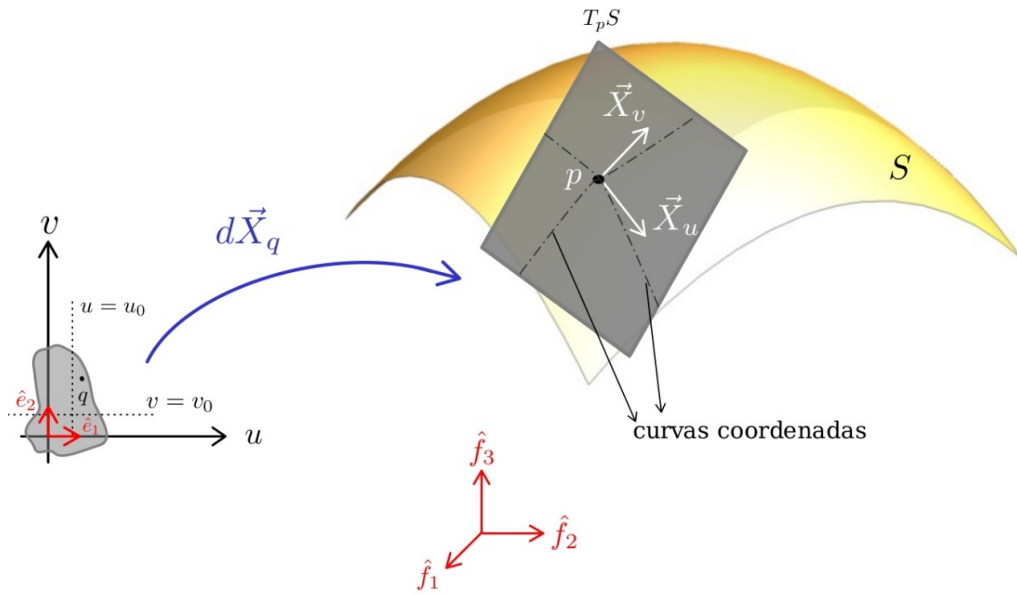


Figura 4.6 – Plano tangente definido pela diferencial da aplicação \vec{X} num ponto de S .

A condição de suavidade e regularidade da superfície requer que $|\vec{X}_u \times \vec{X}_v| \neq 0$ garantindo que \vec{X}_u e \vec{X}_v sejam linearmente independentes. Pontos que não se adequam a essa categoria configuram singularidades, que podem ter origem puramente geométrica ou serem fruto da parametrização escolhida. Para este último tipo, o problema é solucionado mudando-se a parametrização [81, 85].

Na prática esses vetores tangentes às curvas coordenadas no ponto p geram o plano tangente ($T_p S$) à S e constituem uma base $\{\vec{X}_u, \vec{X}_v\}$ para os vetores deste subespaço de \mathbb{R}^3 .

4.3.1 Tensor métrico

Presumindo ser S uma superfície bidimensional dentro do espaço euclidiano tridimensional (\mathbb{E}^3), definimos o tensor métrico como

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \vec{X}_\mu \cdot \vec{X}_\nu = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial u^\nu}, \quad (4.3)$$

em que $g_{ij} = \delta_{ij}$; $\mu, \nu = 1, 2$ e $i, j = 1, 2, 3$ [85]. Assim,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu} \frac{\partial x^j}{\partial u^\nu} \quad (4.4)$$

Apesar de não havermos iniciado nossa discussão partindo do conceito de variedades riemannianas, as extensões são inevitáveis. Neste caso, a métrica do espaço ambiente difere da identidade. Logo, o tensor métrico da superfície será descrito pela equação (4.3) com os índices μ, ν, i, j adaptados para as dimensões apropriadas. Obviamente essa generalização não faz mais referência ao produto interno que se adéqua ao \mathbb{E}^3 . Em superfícies abstratas, é necessário redefinir o produto para que a geometria seja consistente [83]. A

distinção dos espaços \mathbb{E}^n e \mathbb{R}^n procede do fato que \mathbb{E}^n é \mathbb{R}^n imbuído de uma métrica euclidiana [87].

Em notação matricial, a forma covariante de $\bar{g}_{\mu\nu}$ é:

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \vec{X}_u \cdot \vec{X}_u & \vec{X}_u \cdot \vec{X}_v \\ \vec{X}_v \cdot \vec{X}_u & \vec{X}_v \cdot \vec{X}_v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Sua forma contravariante é:

$$\bar{g}^{\mu\nu} = (\bar{g}_{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{g}_{\mu\nu})} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

4.3.2 A primeira forma fundamental e o comprimento de arco

A primeira forma fundamental contém em si toda a informação necessária acerca da geometria intrínseca da superfície e é determinada por [81, 85]:

$$\begin{aligned} I_S &= (ds)^2 = (\vec{X}_u du + \vec{X}_v dv) \cdot (\vec{X}_u du + \vec{X}_v dv) = \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou:

$$I_S = \bar{g}_{\mu\nu} du^\mu du^\nu, \mu, \nu = 1, 2. \quad (4.8)$$

A equação (4.7) nos permite estudar as propriedades de S sem “sair” da superfície mas também comunica o modo como S herda a métrica do espaço no qual ela se insere [86]. I_S é sempre positiva definida e obedece às condições do critério de Sylvester [81, 85]:

- i. $\vec{X}_u \cdot \vec{X}_u > 0$;
- ii. $(\vec{X}_u \cdot \vec{X}_v)^2 - |\vec{X}_u|^2 |\vec{X}_v|^2 = |\vec{X}_u \times \vec{X}_v|^2 > 0$.

Conhecendo-se uma curva $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, em S o comprimento de arco é:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (4.9)$$

Havendo intersecção entre duas curvas coordenadas com vetores tangentes \vec{X}_u e \vec{X}_v , notamos que $\vec{X}_u \cdot \vec{X}_v = |\vec{X}_u| |\vec{X}_v| \cos \omega$ sendo ω o ângulo entre elas. Se $\omega = \pi/2$, o sistema de coordenadas local sobre a superfície é ortogonal e $F = 0$ [77].

4.3.3 Área da superfície

Dada a parametrização $\vec{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e uma região Σ_Q em S , imagem de uma região limitada Q de U em \mathbb{R}^2 (ver Figura 4.7), calculamos a área de um elemento

infinitesimal da superfície como [81, 86]:

$$dA = |\vec{X}_u \times \vec{X}_v| dudv. \quad (4.10)$$

A área total de Σ_Q é, então:

$$A(\Sigma_Q) = \int_Q \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_Q \sqrt{\det(\bar{g}_{\mu\nu})} dudv, \quad (4.11)$$

em que usamos o item ii) do critério de Sylvester. Pode ser mostrado que $A(\Sigma_Q)$ independe da parametrização adotada [83].

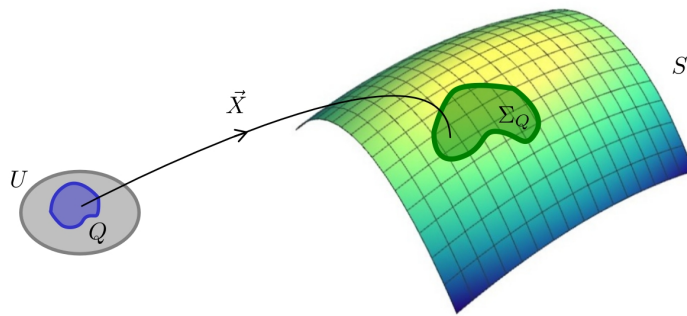


Figura 4.7 – Região Σ_Q em S .

4.3.4 Geodésicas

Tendo ampliado o horizonte do quinto postulado de Euclides para outras geometrias possíveis, expandimos também a concepção de linha reta. A definição mais abrangente, válida também para variedades riemannianas, é uma curva entre dois pontos que minimize a distância entre eles. Estamos diante de um problema de extremização, portanto [88].

Dado o comprimento de arco, de (4.9)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\bar{g}_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{dt} \frac{du^\nu}{dt}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\bar{g}_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu} dt, \quad (4.12)$$

tomamos o integrando ao quadrado, por ser mais simples, e aplicamos o cálculo variacional:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \bar{g}_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu dt = 0$$

que resulta na equação da geodésica:

$$\ddot{u}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu = 0 \quad (4.13)$$

sendo os $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ os símbolos de Christoffel calculados no Apêndice A.2. Igualmente ali são encontrados os passos intermediários de (4.13).

Algumas observações devem ser feitas com respeito às soluções da equação (4.13): a definição de distância mínima entre dois pontos é global, mas a extremização pelo cálculo variacional não garante essa exigência senão localmente. Pode acontecer de curvas encontradas não terem menor comprimento, como é o caso de grandes círculos numa esfera. O que se pode afirmar para pequenas distâncias, neste exemplo, é que os arcos de círculo são minimizadores. Em outras palavras, caminhos mínimos são geodésicas, mas nem toda geodésica satisfaz a condição de mínimo [84].

Ademais, a solução de (4.13) é única para $u^\kappa(0)$ e $\dot{u}^\kappa(0)$, o que implica na existência de apenas uma geodésica passando por um ponto numa direção especificada [88].

Essa curva tem a característica de ser uma reta no espaço em que ela se encontra, tal que, se fosse factível achatá-la num plano a aparência que ela possuiria seria exatamente assim. Isso quer dizer que, intrinsecamente, qualquer curva não geodésica apresentará um desvio em relação à reta, que pode ser quantificado pela curvatura geodésica $\kappa_g \neq 0$ [85].

Uma parametrização para o plano euclidiano é $\vec{X}(u, v) = (u, v)$, tal que as curvas nele presentes tem a equação do tipo $\gamma(t) = (u(t), v(t))$. Segue que os símbolos de Christoffel são identicamente nulos em razão das derivadas da métrica. Das equações (4.13), $\ddot{u} = 0$ e $\ddot{v} = 0$, cujas soluções são retas, como esperado.

Em superfícies de revolução, tanto meridianos quanto arcos de círculo paralelos correspondentes a pontos estacionários da curva geratriz são geodésicas [83] (Apêndice A.2).

4.3.5 Paralelismo e holonomia

Em espaços euclidianos, nomeadamente planos, temos o paralelismo como uma propriedade absoluta, cuja determinação é consequente do quinto postulado de Euclides. O exemplo mais intuitivo dessa noção geométrica é a soma vetorial [89]. Dois vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 unidos (Figura 4.8a)) numa origem comum \mathcal{O} podem ser transladados paralelamente um em relação ao outro mantendo sua orientação espacial e isto também se verifica para as derivadas vetoriais em configuração semelhante. Para espaços curvos essa invariância não se verifica.

Vejamos o que ocorre a um vetor \vec{B} sobre uma esfera quando o transportamos paralelamente ao longo de um triângulo geodésico pqr (ver figura 4.8b)).

O trajeto $p \rightarrow r$ nos oferece o vetor \vec{C} , já o trajeto $p \rightarrow q$, o vetor \vec{A} . Tanto \vec{A} quanto \vec{C} são variações do vetor \vec{B} causadas pela forma da superfície esférica evidenciada pelo caminho geodésico.

Essa diferença nos vetores quando transportados por trajetórias distintas recebe o nome de holonomia (\mathcal{R}) e quantifica a rotação líquida de \vec{B} no circuito escolhido. Em particular, pela Figura 4.8b), $\mathcal{R}(\Delta) = \Theta$.

Apesar de parecer um resultado sem muita importância imediata, o conceito de holonomia traz a ideia primitiva de curvatura e, de fato, pode ser mostrado que

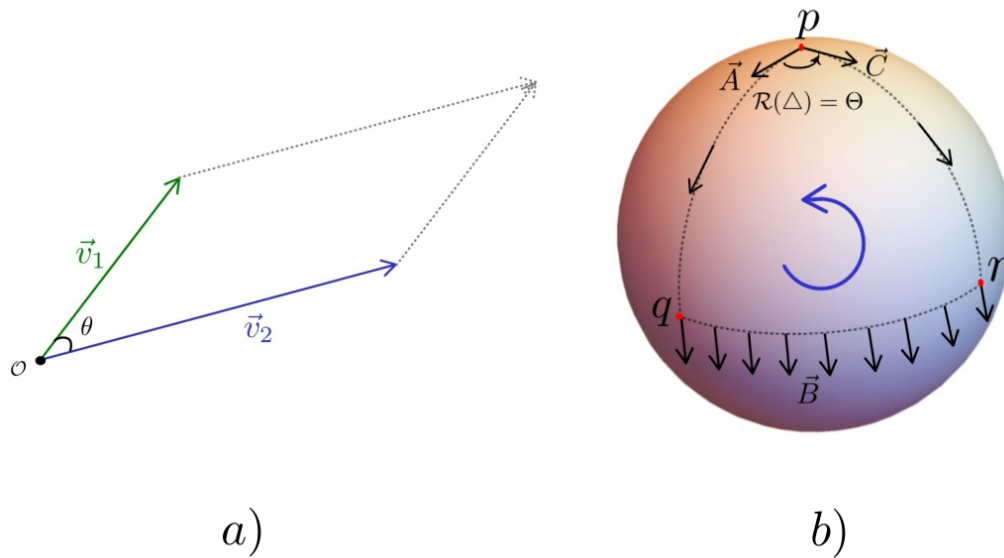


Figura 4.8 – Transporte paralelo no plano (a) e na superfície esférica (b) (inspirado em [77]).

$$\mathcal{R}(\Delta) = \mathcal{K}(\Delta),$$

cujas validade se estende para qualquer superfície e curva fechada arbitrários [77]. $\mathcal{K}(\Delta)$ é a curvatura total $\mathcal{K}(\Delta) = \int K dA$ na vizinhança de um ponto interior ao circuito e K é a curvatura gaussiana de S .

Notemos ainda que na Figura (4.8b), a soma dos ângulos internos ao triângulo geodésico é:

$$\Theta + 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \Theta + \pi$$

indicando que, em relação ao caso euclidiano, há um excesso angular ε de Θ . Dito isto, concluímos que:

$$\varepsilon(\Delta) = \mathcal{K}(\Delta). \tag{4.14}$$

A equação (4.14) também se mostra geral e surpreendentemente remonta às origens da geometria não-euclidiana [77].

A geometria intrínseca vai mais além e nos informa o método de obtenção da curvatura gaussiana K a partir da primeira forma fundamental I_S (4.7) (para uma parametrização ortogonal com $F = 0$):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\partial_v \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_u \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right]. \tag{4.15}$$

Esta, no que lhe toca, exprime o conteúdo do Teorema Egregium de Gauss da geometria diferencial, de demonstração transcendente ao nosso propósito. A condição de planicidade (necessária e suficiente) para o caso bidimensional requer que $K = 0$. Em variedades

riemannianas n -dimensionais, contudo, a curvatura deve ser avaliada considerando-se o tensor de Riemann, para o qual o anulamento definirá o espaço plano. O leitor ávido por estes pormenores pode consultar [83, 86, 90].

4.3.6 A curvatura e seu significado físico

Apesar da ideia geométrica de curvatura ser naturalmente interessante e útil, é possível extrair dela um sentido físico surpreendente ao entendê-la como uma espécie de “força” entre curvas geodésicas nas superfícies. Enxerga-se essa sutileza mais facilmente em curvaturas constantes, mas a validade do resultado é verdadeira para demais curvaturas [77].

Em essência, K exerce um papel de afiuente ou divergente de geodésicas próximas a depender do seu sinal. Pode ocorrer, contudo, que mesmo havendo “movimento” entre tais curvas, o efeito não seja devido a quaisquer “forças”. Tomemos o exemplo do caso plano.

Uma situação mais genérica será considerar que duas retas g_1 e g_2 emanam de uma origem comum \mathcal{O} , da qual partem partículas hipotéticas com velocidade de módulo unitário (ver Figura 4.9).

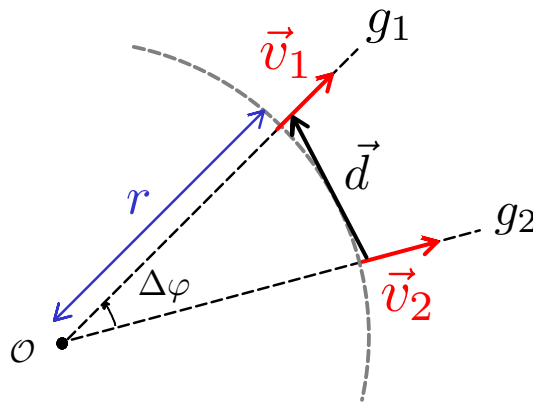


Figura 4.9 – Representação do movimento de partículas com velocidade unitária em geodésicas euclidianas partindo de um ponto comum (imagem inspirada em [77]).

Para um afastamento angular a uma taxa constante $\Delta\varphi$ entre g_1 e g_2 , com \vec{d} sendo o vetor de separação entre as posições das partículas num dado instante de tempo, temos que a velocidade relativa é $\Delta\vec{v} = \dot{\vec{d}}$. Além disso, decorre do esquema: $|\vec{d}| \approx r\Delta\varphi$.

A aplicação da segunda lei de Newton requer a derivada segunda de \vec{d} , assim,

$$|\dot{\vec{d}}| \approx \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=1} \Delta\varphi + r \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Delta\varphi \implies |\ddot{\vec{d}}| = 0.$$

A nulidade da aceleração relativa não é fruto do acaso. Isso decorre da premissa $K = 0$, como ficará óbvio na apresentação da equação geral [77]. Neste propósito, usamos o conceito de coordenadas polares geodésicas (τ, φ) , que pode ser definido informalmente como o conjunto de pontos descritos pelo trajeto da partícula num tempo τ na direção φ quando ela percorre uma distância r sobre a geodésica. A característica principal dessas coordenadas, garantida pelo Lema de Gauss, será demarcar um círculo com raio r sobre a superfície que seccione as geodésicas em ângulos retos [86]. A Figura 4.10 ilustra essa propriedade para uma esfera, cujas geodésicas são conhecidamente grandes círculos.

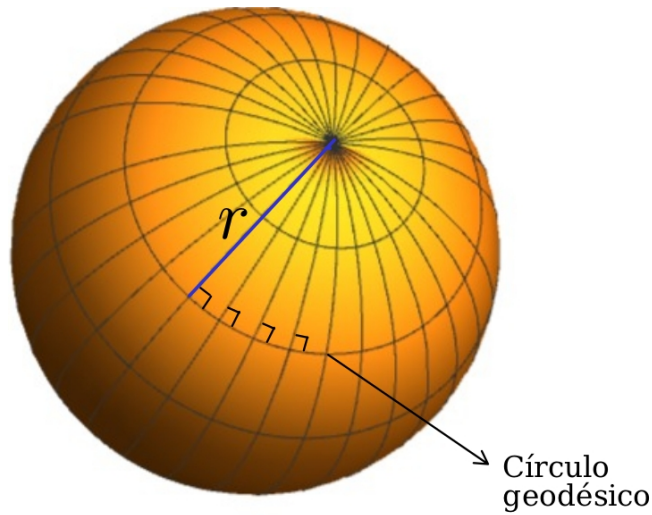


Figura 4.10 – Círculo geodésico na esfera.

Através da ortogonalidade providenciada pelo Lema de Gauss, a métrica para uma superfície qualquer tomará a forma:

$$I = d\tau^2 + (\zeta(\tau, \varphi))^2 d\varphi^2 \tag{4.16}$$

Se $\Delta\varphi$ é novamente a separação angular entre geodésicas vizinhas e de origem comum, $|\vec{d}| \approx \zeta \Delta\varphi \implies |\dot{\vec{d}}| \approx \dot{\zeta} \Delta\varphi$. Conseqüentemente, pela equação da curvatura (4.15), $K = -\frac{1}{\zeta} (\partial_\tau^2 \zeta)$. Essa é a equação de Jacobi:

$$\ddot{\vec{d}} = -K \vec{d}, \tag{4.17}$$

que tem exatamente a mesma estrutura da equação para o oscilador harmônico! Observe que deste resultado, prevê-se com maestria o comportamento das geodésicas. Quando a curvatura é constante e positiva, como é o caso da esfera de raio R ($K = 1/R^2$), grandes círculos partem de um dos pólos, se afastam, mas tendem a se encontrar novamente

no pólo antípoda devido a uma “força atrativa”. Ao passo que para a pseudoesfera de Beltrami (ver Apêndice A.5), $K = -1/R^2$ e as geodésicas jamais se encontrarão pelo caráter “repulsivo” advindo da curvatura negativa [77]. É importante ressaltar aqui que estamos sempre falando de curvas tomadas na mesma direção, caso contrário, o argumento poderia falhar.

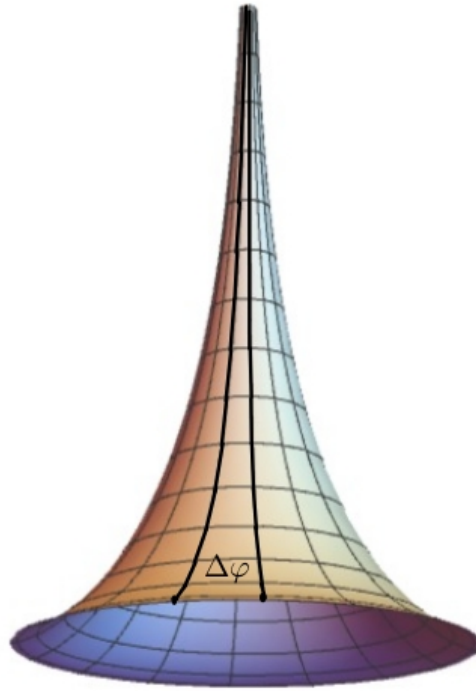


Figura 4.11 – Duas geodésicas próximas sobre a pseudoesfera de Beltrami.

Aproveitando a ocasião em que aplicamos as coordenadas polares geodésicas, podemos expandir ainda mais a abrangência deste artifício para obter uma equação muito geral para a curvatura em termos do comprimento de circunferências sobre as superfícies [77].

Se as geodésicas mencionadas distam por um ângulo $\Delta\varphi$ (Figura 4.11) e partem da direção φ_0 , a separação entre ambas pode ser escrita como:

$$d(r) \approx \zeta(\varphi_0, r)\Delta\varphi, \quad (4.18)$$

em que $\zeta(\varphi_0, r)$ é uma função associada à distância radial que, ao ser expandida em uma série de Maclaurin é:

$$\zeta(r) = r + \frac{1}{2}\zeta''(0)r^2 + \frac{1}{6}\zeta'''(0)r^3 + \dots$$

Da equação de Jacobi (4.17), $\zeta''(0) = -K\zeta(0) = 0$, tal que,

$$\zeta(r) = r + \frac{-K(0)r^3}{6} + \dots \quad (4.19)$$

Sabendo que na geometria euclidiana um círculo tem comprimento dado por

$C_{eucl}(r) = 2\pi r$, reescrevemos (4.19) como um desvio desse valor:

$$C(r) \approx 2\pi\zeta(r) = 2\pi r - \frac{2\pi r}{6}K(0), \quad (4.20)$$

que fornece, finalmente:

$$K \approx \frac{3}{\pi} \left[\frac{2\pi r - C(r)}{r^3} \right]. \quad (4.21)$$

Perceba o detalhe curioso que, para curvaturas negativas, $C(r) > 2\pi r$ e para curvaturas positivas, $C(r) < 2\pi r$ (ver Figura 4.12).

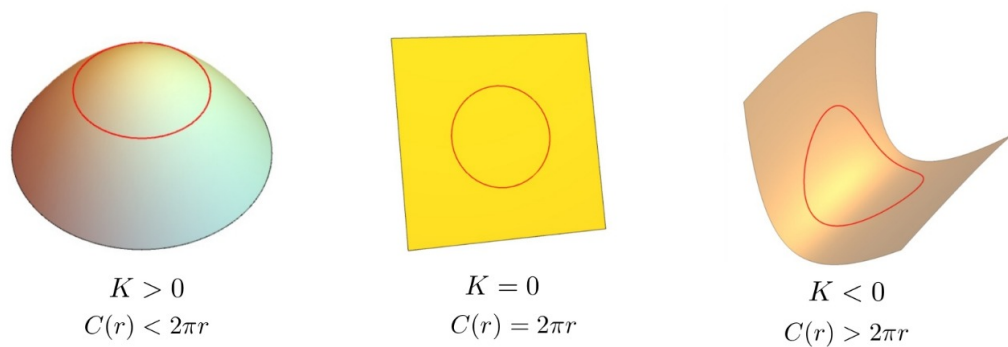


Figura 4.12 – Círculos nas geometrias elíptica, euclidiana e hiperbólica, respectivamente.

Talvez a maior implicação da equação (4.21) seja indicar que o espaço hiperbólico, a ser explanado na seção 4.4, é maior que o espaço euclidiano. Esse fato acrescenta inúmeras peculiaridades à geometria correspondente.

4.3.7 Transformações isométricas e a incapacidade de se observar o espaço hiperbólico

A vastidão que o assunto de isometrias representa dentro da Matemática torna inglória qualquer tentativa de exaurir o tópico numa brevíssima seção. Para nós, a introdução por hora apresentada terá o intuito de justificar o modelo do espaço hiperbólico adotado, acrescentando à literatura um argumento mais claro e explícito que o comumente aceito. Os apêndices A.6 e A.7 usam de forma prática o que aqui se dará apenas conceitualmente.

Embora isometrias possam se referir a pontos, no contexto que abordaremos estamos mais interessados na sua atuação entre superfícies e variedades. A grosso modo, dadas aplicações entre quaisquer duas superfícies, digamos S e \bar{S} , dizemos ter uma isometria quando as respectivas primeiras formas fundamentais são equivalentes, ou seja:

$$ds_S^2 = ds_{\bar{S}}^2. \quad (4.22)$$

Pode ocorrer dessa transformação não ser global, mas a definição acima permanece para a vizinhança de pontos sobre as superfícies consideradas.

Decorre dessa definição que as isometrias são contínuas, bem como suas inversas e que geodésicas são levadas a geodésicas preservando o comprimento, salvo as devidas deformações necessárias para que isso ocorra [86]. Tudo isso é afirmativamente necessário pois é a geometria intrínseca a responsável por todos esses elementos da geometria em análise e a garantia está em (4.22).

Como o problema que nos propusemos a estudar pressupõe um apelo físico enquanto descrição de um fenômeno natural, é de se supor que, ao menos potencialmente, haja alguma maneira de acessar o espaço hiperbólico no ambiente do laboratório (considerando a manufatura de superfícies bidimensionais com características deste espaço). A nossa pergunta então deve ser formulada nos seguintes moldes: em quais casos é possível encontrar em \mathbb{E}^3 um subconjunto bidimensional cuja geometria intrínseca coincida com a do espaço hiperbólico [81]?

Essa questão abrange o conceito de imersão isométrica, cuja essência garante que se um tal mapa existe, seu efeito será induzir a métrica do espaço em que ocorre a imersão (no nosso caso, o \mathbb{E}^3) sobre a variedade assumindo o caráter de superfície imersa (que gostaríamos de encontrar) [90].

Uma resposta definitiva é dada pelo teorema de Hilbert (1901), que afirma a inexistência de uma imersão isométrica do plano hiperbólico de forma completa e sem singularidades em \mathbb{E}^3 , bem como um modelo do mesmo na forma de uma superfície regular. Entretanto, essa restrição não é tão rigorosa para dimensões euclidianas $n \geq 4$ [86].

Apesar do resultado desse teorema oferecer uma barreira na descrição de superfícies com curvatura constante negativa em \mathbb{E}^3 , ele não impede que parte do plano hiperbólico tenha imersão. De fato, existe uma classe de superfícies satisfazendo essa prerrogativa, como foi mostrado por Minding em 1839 e por Beltrami em 1868 [81]. O exemplo mais famoso, devido a Beltrami, é o tractóide, uma superfície de revolução gerada pela rotação da tratriz em torno do seu eixo (ver apêndice A.5).

Tendo visto a impossibilidade relativa ao espaço euclidiano, uma alternativa viável é considerar uma imersão no espaço de Minkowski tridimensional, que já traz consigo uma métrica adequada para o nosso objetivo [91]. Esse artifício dá origem ao modelo do hiperboloide de duas folhas, que será utilizado em todo o resto deste trabalho e que é detalhado na seção a seguir. A conexão deste modelo ao tractóide também é demonstrada no apêndice A.7, preenchendo a lacuna da dificuldade de se intuir palpavelmente a geometria de Lobachevsky.

4.4 A superfície da pseudoesfera

Apesar do nome da superfície ser ambíguo na literatura, ora sendo associado ao modelo do plano hiperbólico, ora a uma superfície de revolução específica, vamos adotá-lo como contemplando ambos os casos, respeitando os limites que a linguagem impõe ao buscar reduzir as possíveis confusões na descrição.

No estudo da geografia é um processo padrão investigar a superfície terrestre planificada a partir da projeção estereográfica, por exemplo. Muitos modelos da geometria hiperbólica raramente partem dessa noção intuitiva, preferindo adotar os modelos planos como forma de introdução. Entretanto, há um análogo à projeção estereográfica para o plano hiperbólico. Tal modelo, descrito por Killing e Poincaré em 1880, é um hiperbolóide de duas folhas no espaço de Minkowski tridimensional, e que chamaremos \mathbb{H}_{hip}^2 .

O espaço de Minkowski é o espaço vetorial pseudo-euclidiano $\mathbb{M}^n = \mathbb{R}_1^n$ para o qual vale o produto interno:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n, \quad (4.23)$$

com $n \geq 2$.

Se um dado vetor \vec{v} é pertencente deste espaço, ele pode ser classificado em três categorias [83]:

- i. tipo espacial, se $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_1 > 0$ ou $\vec{v} = 0$;
- ii. tipo temporal, se $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_1 < 0$;
- iii. tipo luminoso, se $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_1 \neq 0$ ou $\vec{v} = 0$;

Em \mathbb{M}^3 , especialmente, todos os vetores obedecem à função de valores reais:

$$q(\vec{v}) = q(x_i f_i) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \varepsilon_i x_i^2, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.24)$$

para uma base (f_1, f_2, f_3) e $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, -1)$, tendo usado a notação da soma de Einstein. Quando $q(x_i f_i) = x_i^2$, recaímos no espaço euclidiano, com q exercendo o papel de função distância [92, 93].

O cone $\{q(\vec{v}) < 0\}$ divide o espaço de Minkowski tridimensional nos dois subconjuntos possíveis (ver figura 4.13 a):

$$\{x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\} \cup \{x_3 < -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}.$$

O hiperbolóide surge da consideração de que em \mathbb{M}^3 , \mathbb{H}_{hip}^2 equivale ao lugar dos pontos equidistantes à origem, restritos a

$$q(x_i f_i) = -R^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -R^2 \quad (4.25)$$

para a folha superior [93]. Pontos sobre o hiperboloide com raio maior que zero estão dentro do cone, enquanto raios nulos coincidem com o vértice do cone e raios imaginários estão fora dele [94].

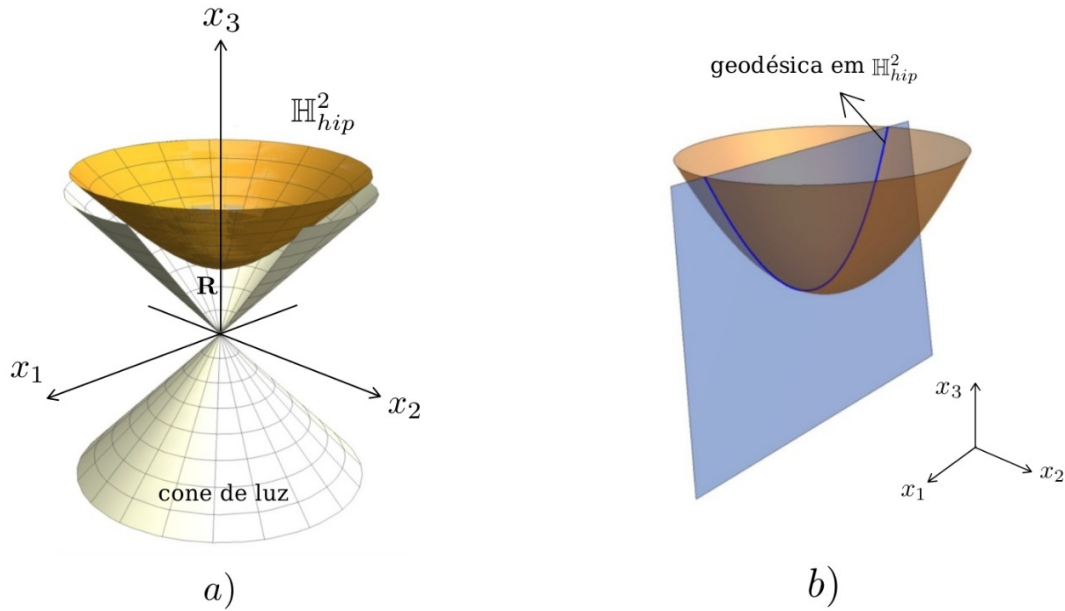


Figura 4.13 – a) A pseudoesfera como um hiperboloide no espaço de Minkowski e o cone de luz; b) Geodésicas em \mathbb{H}_{hip}^2 .

O fato de havermos escolhido $x_3 > 0$ não é uma imposição tão rigorosa, já que qualquer uma das duas folhas do hiperbolóide modela uma superfície infinita tipo espacial, sem fronteira e de curvatura gaussiana negativa, sendo portanto uma pseudoesfera genérica [91].

A parametrização da superfície é construída assumindo-se uma hipérbole no plano x_1x_3 , $\gamma(\tau) = (R \sinh \tau, R \cosh \tau)$, rotacionada em torno do seu eixo (Apêndices A.1 e A.2). Assim,

$$\vec{X}(\tau, \varphi) = (R \sinh \tau \cos \varphi, R \sinh \tau \sin \varphi, R \cosh \tau), \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (4.26)$$

Os vetores tangentes, calculados através das equações (4.2) e (4.26) são, consequentemente:

$$\vec{X}_\tau = (R \cosh \tau \cos \varphi, R \cosh \tau \sin \varphi, R \sinh \tau); \quad (4.27)$$

$$\vec{X}_\varphi = (-R \sinh \tau \sin \varphi, R \sinh \tau \cos \varphi, 0), \quad (4.28)$$

com os quais somos capazes de escrever a primeira forma fundamental:

$$ds^2 = \langle \vec{X}_\tau, \vec{X}_\tau \rangle_1 d\tau^2 + \langle \vec{X}_\varphi, \vec{X}_\varphi \rangle_1 d\varphi^2 + 2\langle \vec{X}_\tau, \vec{X}_\varphi \rangle_1 d\tau d\varphi = R^2(d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2). \quad (4.29)$$

Sem grandes percalços, avalia-se a curvatura inerente à ds^2 em (4.29) pela intervenção da equação (4.15), ao que se deriva ser $K = -1/R^2$. Perceba, complementarmente, que o novo produto interno trouxe consigo a marca do espaço ambiente, cuja matriz da métrica é

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

confirmando que a métrica de \mathbb{H}_{hip}^2 é dada pela equação (4.3), como sugerimos na subsecção 4.3.1, ao citar as variedades riemannianas.

As geodésicas nesta geometria são hipérbolas, uma vez que elas são as curvas geratrizes da superfície. Para ver isso, basta considerar a intersecção de planos verticais passando pela origem com o hiperbolóide (ver Figura 4.13 b)).

A distância entre dois pontos quaisquer, P e Q sobre o hiperbolóide, representados pelos vetores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , é dada por [93]:

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \cosh d(P, Q) \Rightarrow d(P, Q) = \cosh^{-1}(-\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) \quad (4.31)$$

A redefinição de variáveis $x_1 \rightarrow ix'_1$, $x_2 \rightarrow ix'_2$, $x_3 \rightarrow x'_3$ e $\tau \rightarrow i\theta$ faz com que $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = R^2$ e $ds^2 = i^2 R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2) = (ids_{esfera}^2)$, em que ds_{esfera}^2 é o elemento de linha esférico. Esse é o motivo por eventualmente associar-se o espaço hiperbólico a uma "esfera de raio imaginário" [91, 92].

O vínculo do modelo do hiperboloide ao que comentamos sobre projeção estereográfica no início desta seção é dado pelo modelo do disco de Poincaré, no qual os pontos de \mathbb{H}_{hip}^2 são imageados no plano (x_1, x_2) . Ver apêndices A.3.2 e A.7.

V A transição BKT na pseudoesfera ($K < 0$)

Neste capítulo aplicamos a aproximação harmônica auto-consistente à pseudoesfera representada pelo modelo do hiperbolóide no espaço de Minkowski. A hamiltoniana anisotrópica de Heisenberg é escrita na geometria adotada e, a partir dela, construímos a equação para a rigidez de spins. Compoendo parte dos resultados obtidos temos também as soluções numéricas, como fizemos na seção 3.2. Para iniciar, discutiremos algumas novidades à física das transições de fase emergentes da curvatura.

5.1 O impacto da curvatura negativa constante sobre os vórtices no modelo XY

Na seção 3.1 foi calculada a energia dos vórtices no modelo XY planar e observamos haver uma divergência logarítmica para grandes distâncias, expressa pela equação (3.11). A análise da entropia concluiu que o balanço da energia livre privilegiava um valor de temperatura a partir da qual, a transição de fase topológica, marcada pela disseminação de vórtices livres no sistema, acontece com as funções de correlação adquirindo um comportamento exponencial. Quando se adiciona a curvatura ao problema, o cenário é diferente. Considerando-se o gradiente em coordenadas hiperbólicas [95]:

$$\nabla = \frac{\hat{\tau}}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hat{\phi}}{R \sinh \tau} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (5.1)$$

temos que, para uma configuração de vórtice $\phi(\vec{r}) = \mathcal{Q}\varphi(\vec{r})$, a equação (3.4) proporciona:

$$\begin{aligned} E_v &= 2\pi J \int_{\tau_\alpha}^{\tau_L} |\nabla \phi(\vec{r})|^2 \sinh \tau' d\tau' = 2\pi J \mathcal{Q}^2 \int_{\tau_\alpha}^{\tau_L} \frac{d\tau'}{\sinh \tau'} \\ &= 2\pi J \mathcal{Q}^2 \ln \left(\frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_\alpha/2)} \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

em que τ_α e τ_L são, respectivamente, parâmetros associados ao núcleo do vórtice e à região externa à excitação topológica, introduzidos como um corte possuindo os valores $\alpha = R\tau_\alpha/2$ e $L = R\tau_L/2$. Diferente do modelo XY usual, o limite $\tau_L \rightarrow \infty$ resulta na finitude de E_v em (5.2):

$$E_v = 2\pi J \mathcal{Q}^2 \ln \coth \left(\frac{\alpha}{2} \right) > 0, \quad (5.3)$$

mostrando que a divergência infravermelha é sanada pela geometria da pseudoesfera com $K < 0$. É direto ver que para distâncias $\tau \ll R$ recobramos a energia dada pela equação (3.11).

A entropia é definida pela equação de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$, com o número de

estados possíveis (Ω) estabelecido pela razão da área de uma região da superfície pela área do núcleo do vórtice (ver Equação (4.11)). Dito de outra forma:

$$S = k_B \ln \left(\frac{\cosh \tau_L - 1}{\cosh \tau_\alpha - 1} \right), \quad (5.4)$$

cuja união com a equação (5.2) constitui a energia livre

$$F = E - TS = 2\pi J Q^2 \ln \left(\frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_\alpha/2)} \right) - k_B T \ln \left(\frac{\cosh \tau_L - 1}{\cosh \tau_\alpha - 1} \right). \quad (5.5)$$

Novamente nos deparamos com uma característica inédita própria da curvatura negativa, pois, o segundo termo de F em (5.5) é dominante para todas as constantes e distâncias termodinamicamente aceitáveis, favorecendo a formação de vórtices em quaisquer temperaturas finitas e acarretando sobrelevada desordem. Com base na literatura, podemos tecer alguns comentários sobre este argumento.

Até onde sabemos esta conclusão foi primeiro afirmada por Curtis Callan e Frank Wilczek [44] a partir do cálculo da energia, similar ao da equação (5.3). Nesta referência, assume-se que as interações entre os vórtices são de curto alcance de modo a fazer com que o sistema seja suficientemente diluído para poder ser tratado como um gás não interagente a baixas temperaturas. Em seguida é estimada a ordem de longo alcance, que aparece como inexistente sempre, independente da densidade do gás.

Srinandan Dasmahapatra [45] asseverou a questão, expondo o mesmo percurso que mediadamente leva à equação (5.5). Em complemento, o trabalho aplica a teoria de Kosterlitz e Thouless usando grupos de renormalização. De posse destas duas últimas citações, os autores de [43] endossaram estes resultados ao declarar que, apesar da transição BKT permanecer inalterada para curvaturas positivas, o mesmo não ocorre com a pseudoesfera, na qual a temperatura crítica é reduzida a zero devido à geometria. Por este motivo, e para evitar possíveis impasses, tal referência preferiu adotar superfícies moldadas como relevos gaussianos (tipo sino), que possuem regiões curvadas positiva e negativamente e então utilizar simulações de Monte Carlo para estudar o fenômeno.

Por uma via distinta e concorde aos seus pares, os autores de [48] obtiveram explicitamente o potencial de ligação de dois vórtices centrados em $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$:

$$V_{12} = 2\pi Q_1 Q_2 J \ln \left(\frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_d/2)} \right), \quad (5.6)$$

para a distância $\tau_d = (2d/R) \geq 2\tau_\alpha$ medida ao longo de uma geodésica entre os vórtices. Do comportamento da função (5.6), observamos que $V_{12} \rightarrow 0$ quando $\tau_d \rightarrow \infty$. Face a isso, os vórtices se movem sem interação apreciável quando distam muito uns dos outros, propiciando que quaisquer excitações térmicas os dissociem. Malgrado, a referência [56],

inspirada na publicação [48] mencionada, prevê que haverá transição BKT para o modelo XY na temperatura:

$$T_{BKT} = \frac{2\pi J Q^2}{k_B} \frac{\ln \left[\frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_\alpha/2)} \right]}{\ln \left[\frac{\cosh(\tau_L)-1}{\cosh(\tau_\alpha)-1} \right]}, \quad (5.7)$$

supondo ser possível a competição entre a energia livre e a entropia na equação (5.5).

A única contradição incisiva a tudo o que foi falado até agora, ao menos de que temos conhecimento, se deve a Seung Ki Baek [47, 96]. Mais especificamente em [47] enfatiza-se a ambiguidade em relação à interação mútua dos vórtices e à forma como ocorre sua dependência das distâncias no espaço hiperbólico. O autor atribui a distinção de sua abordagem às anteriores à exclusão (ou inclusão) da curvatura como termo fonte na lei de Gauss:

$$\oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\mathcal{V}} \sigma d\mathcal{V}, \quad (5.8)$$

dada a densidade σ . Porquanto um círculo nesta geometria cresce exponencialmente com o raio (ver subseção 4.3.6 e seção 4.4), uma quantidade finita de defeitos atuando como fontes contribuirá com um campo de forças de decaimento também exponencial. Mas se a curvatura cooperar na lei de Gauss (5.8), esta equação designará uma disputa entre o volume e a área da superfície, resultando num campo de forças jamais nulo, independente do afastamento do núcleo dos vórtices. Baek reforça este segundo cenário ao certificar que a energia da interação é linear com a distância hiperbólica entre as excitações topológicas, ao que ele concluiu ser uma evidência do requisito de uma temperatura diferente de zero para ocorrer a transição de fase. As alternativas conflitantes sinalizam que este estudo é amplo e demanda de novas investigações. No tocante aos nossos resultados, ficará evidente a importância desta discussão.

5.2 A hamiltoniana quadrática da pseudoesfera

Em correspondência à apresentação da AHAC na seção 3.2, o nosso ponto de partida será a hamiltoniana (3.18). Nesta equação, expandimos j em torno de i :

$$H_0 = \frac{J}{2} \sum_{i\eta} \left[\frac{\rho S^2}{2} (\vec{\eta} \cdot \vec{\nabla} \phi_i)^2 + (1 - \lambda) (S_i^z)^2 - \lambda \left(S_i^z (\vec{\eta} \cdot \vec{\nabla}) S_i^z + \frac{1}{2} S_i^z (\vec{\eta} \cdot \vec{\nabla})^2 S_i^z \right) \right], \quad (5.9)$$

tendo rotulado os primeiros vizinhos com a posição $\vec{\eta}$. Então, reescrevemos (5.9) para uma estrutura de rede quadrada de constante de rede a :

$$H_0 = \frac{Jz}{2} \sum_i \left[\frac{\rho S^2 a^2}{4} (\nabla \phi_i)^2 + (1 - \lambda) (S_i^z)^2 - \frac{\lambda}{4} a^2 S_i^z \nabla^2 S_i^z \right], \quad (5.10)$$

agora colocada na forma apropriada para a representação contínua, fundamental para a implementação dos efeitos de curvatura [28]. A soma em H_0 , mediante a densidade superficial de sítios $\sigma = 1/a^2$, é substituída no limite contínuo pela integral

$$\sum_i \rightarrow \int \sigma dA \equiv \int \sigma R^2 d\Omega, \quad (5.11)$$

com $d\Omega = \sqrt{g} d\tau d\varphi = \sinh \tau d\tau d\varphi$ (ver Equações (4.10), (4.27) e (4.28)).

Supondo que ϕ decai mais rápido que $e^{-\frac{\tau}{2}}$ quando $\tau \rightarrow \infty$ (ver equação (5.25)), a integração por partes com respeito ao primeiro termo em (5.10) resulta em $\int (\nabla\phi)^2 d\Omega = -\int \phi \nabla^2 \phi d\Omega$. Assim,

$$H_0 = \frac{Jz}{2} \int dA \left[-\frac{a^2 \rho S^2}{4} \phi \nabla^2 \phi - \frac{a^2 \lambda}{4} S^z \nabla^2 S^z + (1 - \lambda)(S^z)^2 \right]. \quad (5.12)$$

Aqui os campos ϕ e S^z tem dimensão de inverso de comprimento pois redefinimos $\phi_i \rightarrow \sqrt{\sigma} \tilde{\phi} \equiv \phi$ e $S_i^z \rightarrow \sqrt{\sigma} \tilde{S}^z \equiv S$. A estas mesmas variáveis atribuiremos uma nova base, mais favorável de acordo com a geometria empregada, portanto, antes de prosseguir, vamos obter os harmônicos pseudoesféricos $Y_{m\xi}$.

5.2.1 Cálculo dos harmônicos pseudoesféricos

O operador laplaciano escrito de forma a incluir a curvatura do espaço é dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f), \quad (5.13)$$

em que f é uma função escalar qualquer [95]. Para a pseudoesfera, especificada pela métrica (4.29), infere-se logo que:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R^2 \sinh \tau} \partial_\tau (\sinh \tau \partial_\tau f) + \frac{1}{R^2 \sinh^2 \tau} \partial_\varphi^2 f. \quad (5.14)$$

A equação (5.14) também poderia ser vista como sendo a parte pseudo-angular do operador d'Alembertiano a partir das coordenadas polares pseudoesféricas [91].

Semelhante ao que é feito para o caso esférico, os harmônicos são extraídos do cálculo das autofunções do laplaciano, assim, precisamos resolver:

$$\nabla^2 \psi = -\Lambda \psi, \quad (5.15)$$

oportunamente posta em unidades de R .

A abordagem padrão para lidar com equações diferenciais parciais mais usada em física é realizar a separação de variáveis, em que imputamos às dependências de ψ funções decorrelacionadas, isto é:

$$\psi(\tau, \varphi) = u(\tau)w(\varphi). \quad (5.16)$$

A inserção da solução hipotética (5.16) em (5.15) traz, para a parte angular:

$$w(\varphi) = e^{im\varphi}, m \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

Inevitavelmente, resta-nos para a parte em τ :

$$\left[\frac{1}{\sinh \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\sinh \tau \frac{d}{d\tau} \right) - \frac{m^2}{\sinh^2 \tau} \right] u(\tau) = -\Lambda u(\tau), \quad (5.18)$$

de estrutura $\mathcal{L}u(\tau) = -\Lambda u(\tau)$, definindo-se o operador \mathcal{L} como a expressão entre colchetes.

É proveitoso reconfigurar a equação (5.18) com a substituição $z = \cosh \tau$. Isso permitirá identificar $u(\tau)$ como solução da equação de Legendre associada. De fato, a mudança mencionada assume a forma:

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' - \left(\Lambda + \frac{m^2}{1 - z^2} \right) u = 0, \quad (5.19)$$

que admite as funções de Legendre associadas $u(\tau) = P_l^m(z)$ para $\Lambda = -l(l+1)$ com um corte no plano complexo $-1 < \Lambda < 1$.

Para o nosso objetivo, $z > 1$, logo, Λ é imaginário. Diante dessa restrição, escrevemos:

$$\xi^2 = \Lambda - \frac{1}{4} \Rightarrow l = -\frac{1}{2} \pm i\xi, \quad (5.20)$$

com ξ variando entre $(-\infty, \infty)$.

Nesse momento, o sinal de ξ não é importante pois as soluções para $\xi < 0$ e $\xi > 0$ estão relacionadas, já que $P_l^m = P_{-l-1}^m$ [91]. Isso é consequência da equação diferencial (5.19) ser invariante às trocas: $l \rightarrow -l - 1$ e $i\xi \rightarrow -i\xi$.

A construção das autofunções ψ , da maneira como fizemos, pode ser colocada em termos da combinação linear

$$\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m P_l^m(\cosh \tau) e^{im\varphi}, \quad (5.21)$$

com os a_m sendo os coeficientes da expansão determinados em [91]. Como o nosso propósito tem foco nas funções de base, é preferível usar a seguinte normalização para os P_l^m :

$$\begin{aligned} \wp_m^l(\cosh \tau) &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+m+1)} P_l^m(\cosh \tau) \\ \Rightarrow P_l^m(\cosh \tau) &= \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)} \wp_m^l(\cosh \tau), \end{aligned} \quad (5.22)$$

com $\Gamma(z)$ sendo a função gama:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (5.23)$$

A escolha dos \wp_m^l acima não é arbitrária mas traz consigo a vantagem de possuir relações de ortogonalidade e representações integrais mais simples. Diferente das funções de Legendre anteriores, contudo, agora o sinal de ξ tem relevância e, pela imposição de z feita anteriormente, tomaremos $l = -1/2 + i\xi$.

Uma das formas integrais dos \wp_m^l é:

$$\wp_m^l(\cosh \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cosh \tau + \sinh \tau \cos \theta)^l e^{im\theta} d\theta, \quad (5.24)$$

que tem decaimento exponencial no limite $\tau \gg 1$:

$$\wp_l^m(\cosh \tau) \sim e^{-\tau/2} e^{i\xi\tau} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left(\frac{\cos \theta}{2} \right)^{2i\xi-1} e^{im\theta}. \quad (5.25)$$

Conforme comentamos, este resultado é de particular importância na aproximação de longos comprimentos de onda na hamiltoniana (5.12). Ademais, a relação de ortogonalidade obedecida pelos \wp_m^l é:

$$\int_0^\infty \overline{\wp_l^m} \wp_{l'}^m \sinh \tau d\tau = \frac{\xi \tanh(\pi\xi)}{4\pi^2} \delta(\xi - \xi'). \quad (5.26)$$

Na conjuntura das equações (5.22) e (5.26), as funções de base são encontradas:

$$Y_{\xi m}(\tau, \varphi) = C_N \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+1)} e^{im\varphi} \wp_l^m(\cosh \tau), \quad (5.27)$$

para C_N a constante de normalização condicionada a

$$\int_0^\infty d\tau \int_0^{2\pi} \overline{Y_{m'\xi'}} Y_{m\xi} \sinh \tau d\varphi = \delta_{mm'} \delta(\xi - \xi'). \quad (5.28)$$

O cálculo de C_N conclui finalmente:

$$Y_{m\xi}(\tau, \varphi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi \tanh(\pi\xi)}} \wp_{-1/2+i\xi}^m(\cosh \tau) e^{im\varphi}, \quad (5.29)$$

que é o harmônico pseudoesférico desejado.

Dispondo agora deste crucial recurso, retornamos ao foco primordial da seção, expandindo ϕ e S_z por intermédio dos $Y_{m\xi}(\tau, \varphi)$:

$$\phi(\tau, \varphi) = \sum_m \int \phi_{m\xi} Y_{m\xi}(\tau, \varphi) d\xi \equiv \sum_\gamma \phi_\gamma Y_\gamma(\tau, \varphi); \quad (5.30)$$

$$S^z(\tau, \varphi) = \sum_m \int S_{m\xi}^z Y_{m\xi}(\tau, \varphi) d\xi \equiv \sum_\gamma S_\gamma^z Y_\gamma(\tau, \varphi). \quad (5.31)$$

A hamiltoniana (5.12) é então expressa como:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\gamma \left(h_\gamma^\phi \phi_\gamma \phi_{-\gamma} + h_\gamma^z S_{-\gamma}^z S_\gamma^z \right), \quad (5.32)$$

nomeados $h_\gamma^\phi = (zJ\rho a^2 S^2/4)(\xi^2 + 1/4)$ e $h_\gamma^z = zJ \left[\frac{a^2 \lambda}{4} (\xi^2 + 1/4) + R^2(1 - \lambda) \right]$. Adicionalmente, nos valem os autovalores do laplaciano quando aplicado às autofunções $P_l^m(\cosh \tau)$, de modo a satisfazer (5.15).

5.3 Resultados clássicos

As médias constituintes da rigidez de spins (3.27), válidas para qualquer regime, são efetuadas em virtude da condição de normalização (5.28) e das equações (5.30) e (5.31):

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \langle (S_i^z)^2 \rangle_0 = \frac{1}{\mathcal{N}} \int dA \langle S^z(\tau, \varphi) S^z(\tau, \varphi) \rangle_0 = \frac{R^2}{\mathcal{N}} \sum_\gamma \langle S_\gamma^z S_{-\gamma}^z \rangle_0; \quad (5.33)$$

$$\langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0 = \frac{1}{z\mathcal{N}} \sum_{i\eta} \langle [(\vec{\eta} \cdot \nabla)\phi]^2 \rangle_0 = -\frac{2}{z\mathcal{N}} \int dA \langle \phi \nabla^2 \phi \rangle_0 = \frac{2R^2}{z\mathcal{N}} \sum_\gamma \left(\xi^2 + \frac{1}{4} \right) \langle \phi_\gamma \phi_{-\gamma} \rangle_0, \quad (5.34)$$

que, ao serem conhecidos os valores esperados no limite clássico $\langle \phi_\gamma \phi_{-\gamma} \rangle_0 = 1/\beta h_\phi$ e $\langle S_\gamma^z S_{-\gamma}^z \rangle_0 = 1/\beta h_\gamma^z$, similar ao que foi feito em (3.31) e (3.32), chegam à sua finalidade:

$$\langle (S^z)^2 \rangle_0 = \frac{1}{\beta J z S_L} \sum_\gamma \frac{1}{\frac{\lambda}{4} \left(\xi^2 + \frac{1}{4} \right) + \sigma R^2 (1 - \lambda)}; \quad (5.35)$$

$$\langle (\Delta\phi)^2 \rangle_0 = \frac{8R^2 \sigma}{J z \beta \rho S^2}, \quad (5.36)$$

definido o valor de \mathcal{N} pela integral (5.11) e $S_L \equiv 2\pi \int_0^L \sinh \tau d\tau$.

5.4 Resultados quânticos

A estratégia de quantização segue o que dissemos na seção 3.2. Para este propósito, especificamos os operadores bosônicos

$$\phi_i = \frac{a_i^\dagger + a_i}{\sqrt{2}} \quad (5.37)$$

$$S_i^z = i \left(\frac{a_i^\dagger - a_i}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.38)$$

e, conseqüentemente, o número de mágnons $N_m = \sum_i \langle a_i^\dagger a_i \rangle = \int \sigma \langle a^\dagger a \rangle dA$. Vamos reescalar os operadores tal que $\mathbf{a} = \sqrt{\sigma} a$. Dessa forma,

$$[\mathbf{a}(\tau, \varphi), \mathbf{a}^\dagger(\tau', \varphi')] = \frac{\delta(\cosh \tau - \cosh \tau') \delta(\varphi - \varphi')}{R^2}. \quad (5.39)$$

Expandindo os $\mathbf{a}(\tau, \varphi)$ em termos de \mathbf{a}_γ por meio dos harmônicos pseudoesféricos (5.29), temos:

$$\mathbf{a}(\tau, \varphi) = \frac{1}{R} \sum_\gamma \mathbf{a}_\gamma Y_\gamma(\tau, \varphi). \quad (5.40)$$

Graças a isto, N_m , adaptado à absorção do fator de densidade σ , é determinado como

$$N_m = \int dA \sum_{\gamma\gamma'} \frac{\langle \mathbf{a}_\gamma^\dagger \mathbf{a}_{\gamma'} \rangle}{R^2} \bar{Y}_\gamma(\tau, \varphi) Y_{\gamma'}(\tau, \varphi) = \sum_\gamma \langle \mathbf{a}_\gamma^\dagger \mathbf{a}_\gamma \rangle, \quad (5.41)$$

garantindo a preservação no número de modos bosônicos em ambas as bases.

Procede da incorporação dos novos operadores à hamiltoniana (5.32) que:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\gamma \left[A_\gamma (\mathbf{a}_\gamma^\dagger \mathbf{a}_\gamma + \mathbf{a}_\gamma \mathbf{a}_\gamma^\dagger) + B_\gamma (\mathbf{a}_\gamma^\dagger \mathbf{a}_\gamma^\dagger + \mathbf{a}_{-\gamma} \mathbf{a}_\gamma) \right], \quad (5.42)$$

abreviada pelos coeficientes A_γ e B_γ :

$$A_\gamma = \frac{Jz}{32} \left[(\rho S^2 + \lambda)(4\xi^2 + 1) + 16R^2 \sigma(1 - \lambda) \right]; \quad (5.43)$$

$$B_\gamma = \frac{Jz}{32} \left[(\rho S^2 - \lambda)(4\xi^2 + 1) - 16R^2 \sigma(1 - \lambda) \right]. \quad (5.44)$$

É visível que (5.42) envolve termos indesejados (do tipo $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger$, por exemplo). Para diagonalizá-la, evocamos a transformação de Bogoliubov [49, 97] definindo o operador de onda de spin b_γ que salvguarde as relações de comutação e as propriedades bosônicas até então pressupostas:

$$\mathbf{a}_\gamma = \cosh \nu_\gamma b_\gamma + \sinh \nu_\gamma b_{-\gamma}^\dagger. \quad (5.45)$$

Os termos anômalos $\mathbf{a}_\gamma^\dagger \mathbf{a}_\gamma^\dagger$ e $\mathbf{a}_{-\gamma} \mathbf{a}_\gamma$ são eliminados impondo que ν_γ esteja sujeito a $\tanh 2\nu_\gamma = -B_\gamma/A_\gamma$. Assim, de (5.45) em (5.42):

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_\gamma [(A_\gamma \cosh 2\nu_\gamma + B_\gamma \sinh 2\nu_\gamma)(b_\gamma^\dagger b_\gamma + b_{-\gamma} b_{-\gamma}^\dagger) + (B_\gamma \cosh 2\nu_\gamma + A_\gamma \sinh 2\nu_\gamma)(b_\gamma^\dagger b_\gamma^\dagger + b_{-\gamma} b_{-\gamma}^\dagger)] \equiv \sum_\gamma E_\gamma \left(b_\gamma^\dagger b_\gamma + \frac{1}{2} \right), \quad (5.46)$$

sendo a energia $E_\gamma = \sqrt{A_\gamma^2 - B_\gamma^2}$.

Uma vez equacionadas no regime quântico todas as quantidades necessárias, recalculamos os valores esperados:

$$\begin{aligned} \langle S_\gamma^z S_{-\gamma}^z \rangle_0 &= \frac{1}{2} (\cosh 2\nu_\gamma - \sinh 2\nu_\gamma) (\langle b_\gamma^\dagger b_\gamma \rangle_0 + \langle b_\gamma b_{-\gamma}^\dagger \rangle_0) \\ &= \frac{A_\gamma + B_\gamma}{2E_\gamma} \coth \left(\frac{\beta E_\gamma}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_\gamma^z \phi_{-\gamma}^z \rangle_0 &= \frac{1}{2} (\cosh 2\nu_\gamma + \sinh 2\nu_\gamma) (\langle b_\gamma^\dagger b_\gamma \rangle_0 + \langle b_\gamma b_{-\gamma}^\dagger \rangle_0) \\ &= \frac{A_\gamma - B_\gamma}{2E_\gamma} \coth \left(\frac{\beta E_\gamma}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.48)$$

em que $\langle b_\gamma^\dagger b_\gamma \rangle_0$ é dada pela distribuição de Bose.

A inserção das equações (5.47) e (5.48) em (5.33) e (5.34), respectivamente, conduz às médias essenciais para a resolução de ρ , de cujas formas são retornadas as equações clássicas ((5.35) e (5.36)) em baixas energias ($\beta E_\gamma \ll 1$).

5.5 Gráficos dos cálculos analíticos

A Figura 5.1 a) apresenta o gráfico da rigidez de spins em função da temperatura como solução da equação auto-consistente para ρ . Encontram-se comparadas as curvas para os resultados clássicos e quânticos, assumindo $\lambda = 0$ e $S = 1$. Observa-se que há um salto abrupto à zero em $T_c = 0,839J$ (na abordagem clássica) e $T_c = 0,44J$ (na abordagem quântica). Estes valores encontrados são uma primeira aproximação para T_{BKT} fornecida pela AHAC. Já a Figura 5.1 b) mostra o gráfico da temperatura crítica para diferentes intensidades de anisotropia, mais especificamente $0 \leq \lambda \leq 1$.

Embora não haja trabalhos acerca da validade da correção recomendada por Ariosa e Beck (Equação (3.37)) para sistemas com curvatura, seu princípio mostra-se muito geral, uma vez que ela introduz uma nova distribuição de probabilidades, sem restrições de caráter geométrico. A Figura 5.1 a) leva em consideração este resultado, mostrando a rigidez de spins recalculada numericamente. As temperaturas de transição (clássica e quântica) para $\lambda = 0$, em sequência, são $T_{BKT} = 0,40J$ e $T_{BKT} = 0,26J$. Ao lado

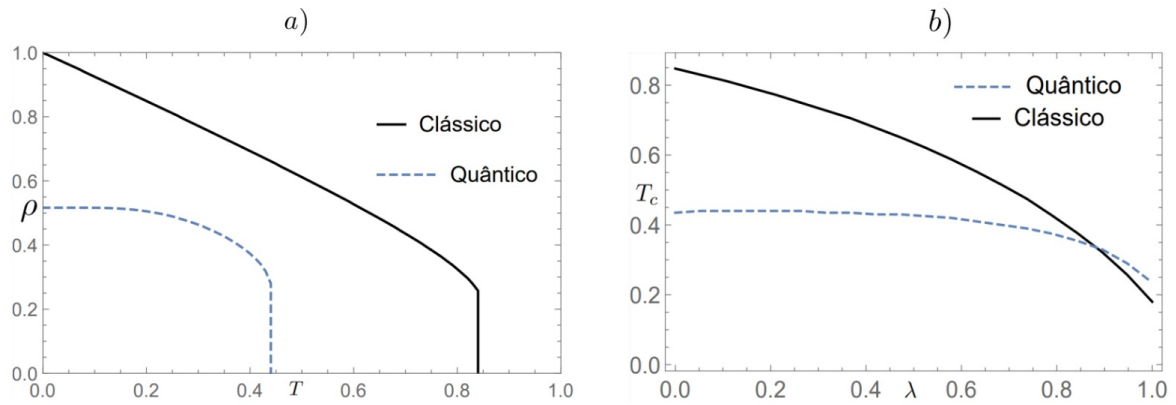


Figura 5.1 – a) Curva de $\rho(T)$ (em unidades de J) para as abordagens semiclássica e quântica. b) Curva de $T_c(\lambda)$.

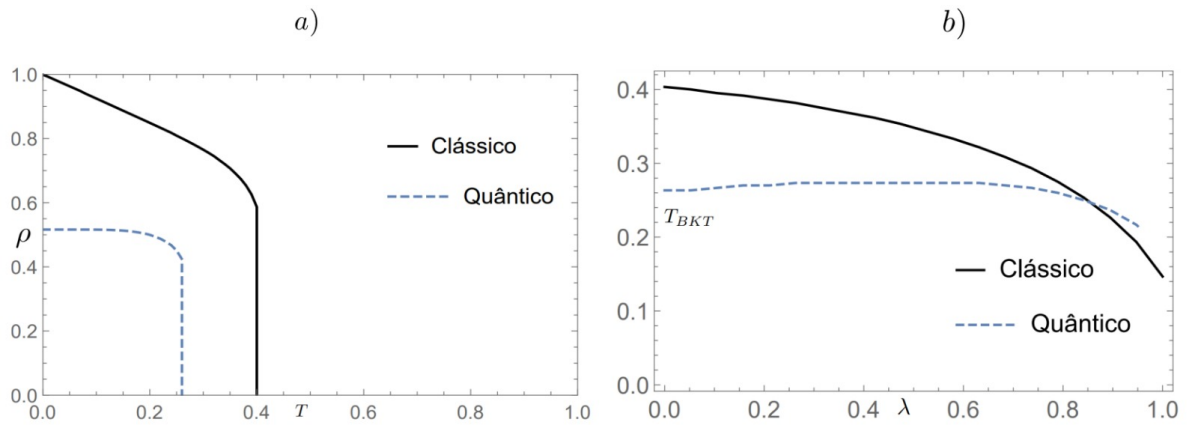


Figura 5.2 – a) Curva de $\rho(T)$ (em unidades de J) para as abordagens semiclássica e quântica. b) Curva de $T_{BKT}(\lambda)$. Ambas agora incluem o fator de correção de Ariosa e Beck.

(Figura 5.1 b)) esta quantidade é exibida variando-se λ . A análise quanto a precisão, e possível melhoria, ocasionada pela adição deste ajuste em nossas equações é um problema em aberto. Esperamos que isto impulse verificações de modo a corroborar ou reparar o modelo aqui defendido.

VI Considerações finais

Neste trabalho nos dedicamos ao estudo da transição de fase BKT sobre o modelo ferromagnético anisotrópico de Heisenberg na pseudoesfera, notavelmente reputada por sua curvatura negativa. Ao explorar este sistema peculiar, ampliamos o que há na literatura a respeito deste fenômeno, uma vez que ainda existem poucos estudos que vão ao encontro destas geometrias não usuais.

Como dito anteriormente, superfícies com formatos variados são potencialmente ricas em aplicações no campo da nanotecnologia e fabricação de dispositivos. Para o caso da pseudoesfera, em particular, não é diferente. Dada a importância de se estabelecer vínculos entre a teoria e experimentação, extraímos da geometria hiperbólica os modelos equivalentes para a construção do espaço matemático considerado e os conectamos a uma superfície tridimensional, em princípio exequível do ponto de vista técnico. Futuros esforços poderão validar a abrangência do nosso empenho.

A referida transição de fase é característica por não ocorrer devido a quebras de simetria contínua. Ao contrário do que se esperaria, sua causa é de origem puramente topológica. Pares de vórtices distribuídos no sistema se dissociam para um valor especial de temperatura, e desordenam ainda mais o sistema ao tornarem-se isolados. Em razão do insucesso em abordá-la pelos métodos padrões utilizamos a aproximação harmônica auto-consistente (AHAC), capaz de determinar a rigidez de spins renormalizada, corrigindo a hamiltoniana quadrática. Num primeiro momento, a AHAC foi aplicada ao modelo XY planar, comprovando sua eficácia em comparação às referências já conhecidas. Na sequência, escrevemos nosso modelo de modo a anexar a geometria da pseudoesfera e, obtivemos os gráficos de ρ em função da temperatura. No salto típico desta configuração, identificamos os valores críticos que aproximam T_{BKT} tanto no regime clássico ($T_c = 0,839J$) quanto no limite quântico ($T_c = 0,44J$). Em seguida, estas temperaturas foram coletadas para distintas anisotropias (λ) e plotadas. Além disso, incluímos o termo de correção devido a Ariosa e Beck, associado às excitações de vórtice, o que nos legou as temperaturas de transição $T_{BKT} = 0,40J$ e $T_{BKT} = 0,26J$, clássica e quântica, nesta ordem.

O fato de havermos encontrado tais valores de temperatura, indicando a existência da transição BKT na pseudoesfera para $\lambda = 0$, contesta a maior parte das referências que se debruçaram sobre a mesma [43–45]. Ao mesmo tempo, corroboramos a previsão de Seung Baek [47, 96] ao descrever a necessidade de uma temperatura a partir da qual ocorrem as separações dos pares de vórtices. Apesar de úteis para a compreensão da termodinâmica e das transições de fase topológicas sobre variedades riemannianas, nossos resultados poderão ser melhor entendidos e mesmo confirmados através de simulações computacionais, escassas para esta geometria.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos suplementares para o Capítulo IV

A.1 A geometria da hipérbole e as funções hiperbólicas

Definimos uma hipérbole como sendo o lugar geométrico de um ponto no plano cujas propriedades satisfazem a condição de que o valor absoluto da diferença de suas distâncias a pontos fixos no plano (F, F') chamados focos, é invariavelmente igual a uma constante positiva maior que a distância entre os focos [98], isto é:

$$\left| |\overline{FP}| - |\overline{F'P}| \right| = 2a > 2c. \quad (\text{A.1})$$

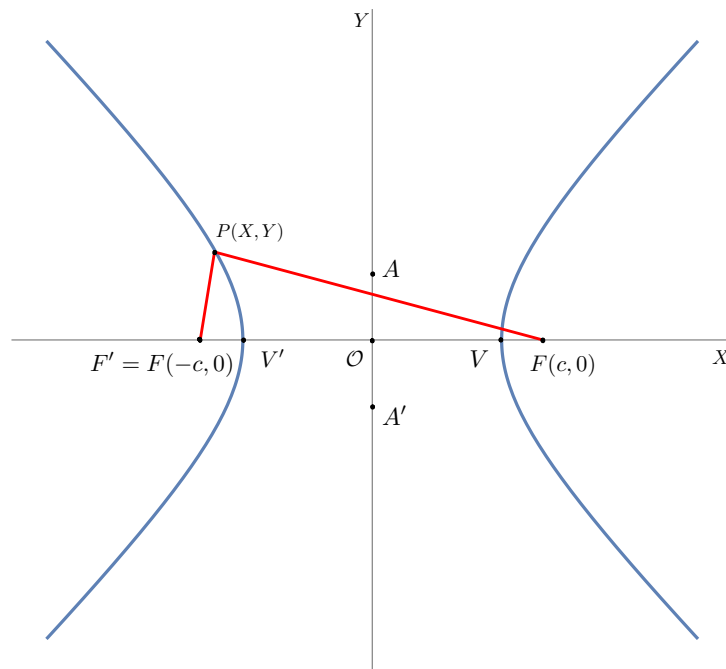


Figura A.1 – Hipérbole no plano XY .

X é o eixo focal da hipérbole, Y é o eixo normal e as retas FP e $F'P$ a partir dos pontos sobre a hipérbole são os raios focais. V e V' são os vértices (ver Figura A.1). Dessa definição, deduz-se facilmente a equação canônica da hipérbole:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{A.2})$$

cuja solução para Y é:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X \sqrt{1 - \frac{a^2}{X^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Se o ponto P é permitido mover-se infinitamente, Y assume dois possíveis valores nesse limite:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X, \tag{A.4}$$

que são as expressões das retas assintóticas à curva.

De modo a obter as funções hiperbólicas, consideremos a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ ilustrada na Figura A.2 abaixo [99].

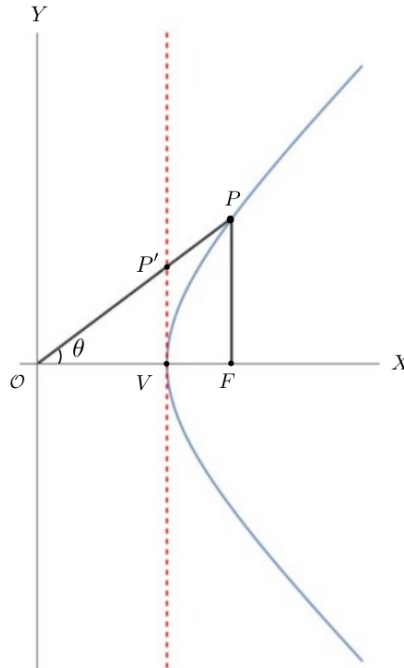


Figura A.2 – Construção das funções hiperbólicas e parametrização da hipérbole.

O ponto P sobre a curva é tal que o eixo focal é dado pelo segmento FP e subtende um ângulo θ com o eixo focal. VP' é a tangente à hipérbole.

Similar às funções trigonométricas, definimos: $\cosh \theta = OF$, $\sinh \theta = FP$ e $\tanh \theta = VP'$.

Decorre naturalmente que

$$\coth \theta = \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta}, \quad \operatorname{sech} \theta = \frac{1}{\cosh \theta}, \quad \operatorname{csch} \theta = \frac{1}{\sinh \theta}. \tag{A.5}$$

A identidade hiperbólica fundamental é, então:

$$X^2 - Y^2 = 1 \Rightarrow (OF)^2 - (FP)^2 = 1 \iff \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1. \tag{A.6}$$

As funções $\sinh \theta$ e $\cosh \theta$ satisfazem ainda:

$$\begin{aligned} \sinh \theta &= \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}; \\ \cosh \theta &= \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

Fica evidente que, quanto a paridade, $\sinh \theta = -\sinh(-\theta)$ e $\cosh \theta = \cosh(-\theta)$. Além disso, vemos que estas não são funções periódicas.

São úteis também as identidades [100]:

1. $1 - \tanh^2 \theta = \operatorname{sech}^2 \theta$;
2. $\coth^2 \theta - 1 = \operatorname{csch}^2 \theta$;
3. $\cosh(\theta + \tau) = \sinh \theta \sinh \tau + \cosh \theta \cosh \tau$;
4. $\sinh(\theta + \tau) = \cosh \theta \sinh \tau + \sinh \theta \cosh \tau$;
5. $\cosh^{-1} \theta = \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})$, $\theta \geq 1$;
6. $\operatorname{sech}^{-1} \theta = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{\theta}\right)$;
7. $\sinh^{-1} \theta = \ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2})$;
8. $\tanh^{-1} \theta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$, $-1 \leq \theta < 1$;
9. $\cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cosh \theta}{2}}$;
10. $\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh \theta - 1}{2}}$;
11. $\tanh\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta}$.

A.2 Equação das geodésicas

Antes de obter as equações diferenciais que resolvem as geodésicas, enfatizamos que a discussão a seguir apresenta algum grau de generalidade para além das superfícies no espaço euclidiano tridimensional. De fato, qualquer superfície geométrica (e portanto uma variedade diferenciável 2-D) satisfará os resultados demonstrados [83].

Consideremos a métrica riemanniana $\bar{g}_{\mu\nu}$ apresentada na seção 4.3.1. Executando o que foi dito na subseção 4.3.4, tendo como base a referência [88], extremizamos:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \bar{g}_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta(\bar{g}_{\mu\nu}) \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu + \bar{g}_{\mu\nu} (\delta \dot{u}^\mu) \dot{u}^\nu + \bar{g}_{\mu\nu} \dot{u}^\mu (\delta \dot{u}^\nu) \right\} dt = 0. \quad (\text{A.8})$$

Como $\delta(\bar{g}_{\mu\nu}) = \partial_\kappa \bar{g}_{\mu\nu} \delta u^\kappa$,

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \underbrace{(\bar{g}_{\mu\nu})_\kappa \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu \delta u^\kappa}_I + \underbrace{\bar{g}_{\mu\nu} (\delta \dot{u}^\mu) \dot{u}^\nu}_I + \underbrace{\bar{g}_{\mu\nu} \dot{u}^\mu (\delta \dot{u}^\nu)}_{II} \right\} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Uma integração por partes em I e II permite escrever:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ (\bar{g}^{\mu\nu})_\kappa \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu - ((\bar{g}_{\kappa\nu})_\mu \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu + \bar{g}_{\kappa\nu} \ddot{u}^\nu) - ((\bar{g}_{\mu\nu})_\nu \dot{u}^\nu \dot{u}^\mu + \bar{g}_{\nu\kappa} \ddot{u}^\mu) \right\} \delta u^\kappa = 0. \quad (\text{A.10})$$

Dada a arbitrariedade dos δu^κ e usando a elevação dos índices pela inversa da métrica $\bar{g}^{\nu\kappa}$, encontramos finalmente:

$$\ddot{u}^\kappa + \frac{\bar{g}^{\kappa r}}{2}((\bar{g}_{\mu\kappa})_\nu + (\bar{g}_{\kappa\nu})_\mu - (\bar{g}_{\mu\nu})_r) \equiv \ddot{u}^\kappa + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu = 0. \quad (\text{A.11})$$

As superfícies de revolução em \mathbb{E}^3 são essencialmente superfícies produzidas pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo [101]. Se essa curva for representada no plano $z = 0$, ou seja, $\gamma(x) = (x, f(x), 0)$, S é parametrizada por

$$\vec{X}(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta), \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi], f(x) > 0. \quad (\text{A.12})$$

À medida que θ varia, os pontos da geratriz descrevem círculos nomeados paralelos e, quando θ é constante, estes pontos formam os meridianos da superfície de revolução (ver figura A.3).

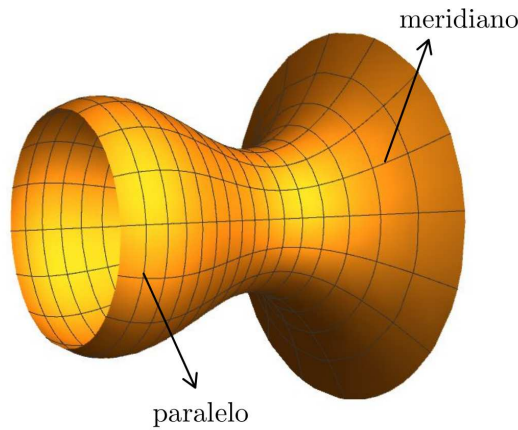


Figura A.3 – Superfície de revolução.

Nessa parametrização, as equações da geodésica se reduzem a [102]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1 + (f'(x))^2 \dot{x}) &= f'(x)(f''(x)\dot{x}^2 + f(x)\dot{\theta}^2), \\ \frac{d}{dt}((f(x))^2 \dot{\theta}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

sendo t um parâmetro como o comprimento de arco, por exemplo.

É fácil ver que os meridianos são geodésicas, pois para eles: $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{x} = (1 + (f'(x))^2)^{-1/2}$, que tornam as equações (A.13) identidades válidas sempre. Quanto aos paralelos, eles são geodésicas restritos à condição $f'(x) = 0$.

A.3 Outros modelos para o espaço hiperbólico bidimensional

A.3.1 O semiplano superior

O modelo do semiplano superior (ou semiplano de Poincaré) é aquele cujos pontos no plano $\tilde{x}\tilde{y}$ obedecem à [90]:

$$\mathbb{H}_{sp}^2 = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2; \tilde{y} > 0\}$$

de fronteira demarcada pela reta $\tilde{y} = 0$, também chamada de absoluto ou bordo assintótico.

A primeira forma fundamental para \mathbb{H}_{sp}^2 é:

$$I_{\mathbb{H}_{sp}^2} = \frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2} \quad (\text{A.14})$$

Uma vez que $F = 0$, os símbolos de Christoffel para esta métrica são:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\tilde{x}} & \Gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^{\tilde{x}} & \Gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}^{\tilde{x}} \\ \Gamma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\tilde{y}} & \Gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^{\tilde{y}} & \Gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}^{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\tilde{y}} & 0 \\ \frac{1}{\tilde{y}} & 0 & -\frac{1}{\tilde{y}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

As geodésicas podem ser obtidas das equações

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + 2\Gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^{\tilde{x}}\dot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}} &= 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{x}} - \frac{2}{\tilde{y}}\dot{\tilde{x}}\dot{\tilde{y}} = 0; \\ \ddot{\tilde{y}} + \Gamma_{\tilde{x}\tilde{x}}^{\tilde{y}}(\dot{\tilde{x}})^2 + \Gamma_{\tilde{y}\tilde{y}}^{\tilde{y}}(\dot{\tilde{y}})^2 &= 0 \Rightarrow \ddot{\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{y}}(\dot{\tilde{x}}^2 - \dot{\tilde{y}}^2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Note que $\tilde{x} = \text{constante}$ é necessariamente uma solução, indicando que semirretas verticais configuram geodésicas. Para $\dot{\tilde{x}} \neq 0$, prosseguimos com a segunda equação, em (A.16), escrevendo:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}}{dt} \frac{dt}{d\tilde{x}} = \frac{\dot{\tilde{y}}}{\dot{\tilde{x}}} \quad (\text{A.17})$$

assim, de (A.16) e (A.17),

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{x}^2} = \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\frac{\dot{\tilde{y}}}{\dot{\tilde{x}}} \right) = \frac{\ddot{\tilde{y}}\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{y}}\ddot{\tilde{x}}}{(\dot{\tilde{x}})^3} = -\frac{1}{\tilde{y}} \left(1 + \left(\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right)^2 \right) \Rightarrow \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\tilde{y} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} \right) = -1 \quad (\text{A.18})$$

Integrando (A.18) em \tilde{x} de ambos os lados, encontramos:

$$\tilde{y}^2 + \left(\tilde{x} - \frac{a_1}{2} \right)^2 = \left(\sqrt{b_1 + \frac{a_1^2}{4}} \right)^2 \quad (\text{A.19})$$

para a_1 e b_1 constantes advindas da integração. Como $\tilde{y} > 0$, essa equação define um

semicírculo no semiplano superior cujo centro está em $(a_1/2, 0)$ e o raio é $\sqrt{b_1 + a_1^2/4}$ (ver Figura A.4a)).

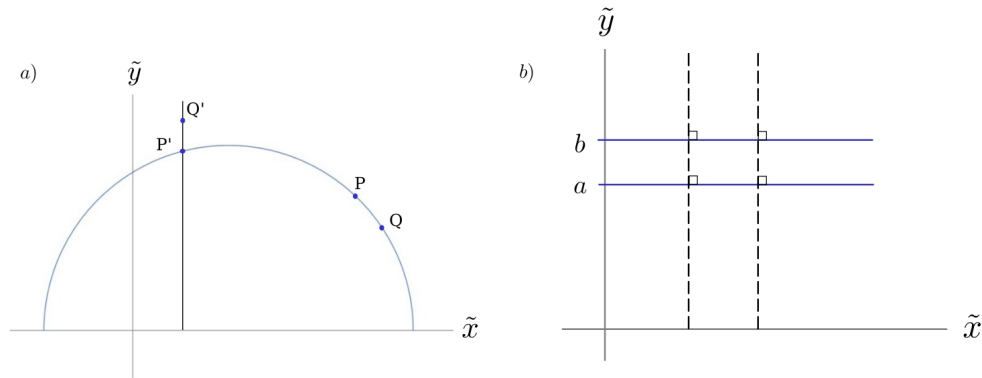


Figura A.4 – Geodésicas (a) horociclos no semiplano superior (b).

Observamos que para as geodésicas no semiplano superior, há apenas uma intersecção possível de modo que entre quaisquer pares de pontos $(P$ e Q, P' e $Q')$, só passará uma geodésica [84].

Se os pontos P' e Q' forem descritos como (\tilde{x}_0, a) e (\tilde{x}_0, b) , para \tilde{x}_0 constante e $b > a$, respectivamente, temos que a distância entre eles é dada pelo comprimento de arco (4.9):

$$d(P', Q') = \int_a^b \sqrt{E\dot{\tilde{x}}^2 + G\dot{\tilde{y}}^2} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{(\dot{\tilde{x}}_0^2 + t^2)}{t^2}} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{A.20})$$

com o segmento unindo ambos os pontos sendo parametrizado por $c(t) = (\tilde{x}_0, t), t \in [a, b]$.

Fica nítida a distinção desta geometria em relação à euclidiana: se P' for aproximado de $\tilde{y} = 0$ mantendo-se a posição de Q' , $d(P', Q')$ diverge.

Além disso, se retas forem traçadas em $\tilde{y} = a$ e $\tilde{y} = b$, a distância dessas retas é constante e elas são ortogonais às geodésicas verticais (ver na Figura A.4b)). Estas são os horociclos de \mathbb{H}_{sp}^2 . Para pontos Q' no infinito ($\tilde{y} = 0$), estas curvas são círculos tangentes a \tilde{x} (ver na Figura A.5) [84].

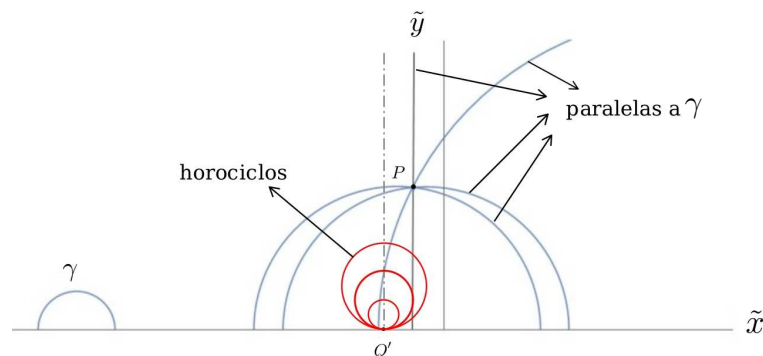


Figura A.5 – Horociclos tangentes a pontos no absoluto e paralelas no semiplano superior.

A não validade do quinto postulado de Euclides também se demonstra [86]: por um ponto P fora de uma geodésica γ podem passar infinitas paralelas que não a intersectam. Também por isso, um triângulo formado por arcos de círculos ortogonais ao absoluto no semiplano apresentam a soma dos ângulos internos menor que π (ver figura A.6).

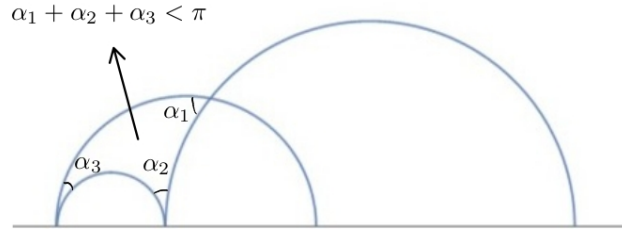


Figura A.6 – Soma dos ângulos internos num triângulo geodésico no semiplano de Poincaré.

A.3.2 O disco de Poincaré

Este modelo é o disco definido por $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ cuja fronteira $\mathbb{B} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ não é incluída [73]. A métrica é dada por

$$I_{\mathbb{D}_p^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Se utilizarmos a notação do plano complexo, parametrizando a curva unindo dois pontos quaisquer por $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t|z|, 0)$, $t \in [0, 1]$, calculamos a distância no disco de Poincaré através de:

$$d = \int_0^1 \sqrt{E\dot{x}^2 + G\dot{y}^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{4|z|^2}{(1 - t|z|^2)^2}} dt = 2 \operatorname{arctanh}(|z|) \quad (\text{A.22})$$

com $z = x + iy$.

A Figura A.7a) mostra a distância (A.22) em comparação à calculada pela geometria euclidiana. Para valores próximos à origem, ambos apresentam pouca diferença, mas o desvio se acentua infinitamente quando nos dirigimos para a borda do disco [73]. Esse comportamento é padrão da geometria hiperbólica e também foi verificado para a métrica do semiplano superior.

As geodésicas em \mathbb{D}^2 são arcos de círculos ortogonais ao bordo assintótico \mathbb{B} ou segmentos de reta passando pela origem compreendendo diâmetros ou raios do próprio disco (ver Figura A.7b)). Aqueles cujos círculos não se encontram virtualmente na fronteira do disco são chamados ultraparalelas (l_1, l_2 na Figura A.7b)). Havendo um ponto de encontro entre linhas em \mathbb{B} , elas são ditas serem paralelas. A rigor, esse encontro nunca acontece pois, como vimos, essa fronteira não faz parte do disco (ver l_3, l_4 na Figura A.8).

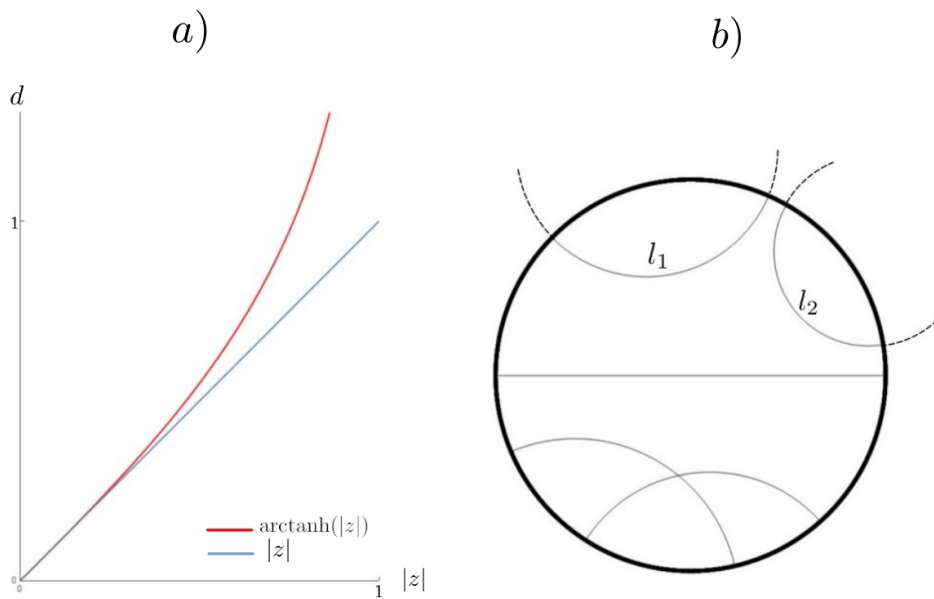


Figura A.7 – a) Comparação entre as distâncias calculadas no plano euclidiano e no disco de Poincaré. Aqui o fator de 2 na equação (A.22) foi absorvido para uma análise puramente qualitativa, uma vez que seu efeito fornece apenas uma reescala métrica, conforme exposto em [73]. b) Linhas ultraparalelas no disco de Poincaré.

Uma maneira de vislumbrar tais geodésicas no disco de Poincaré é considerar a projeção ocasionada em \mathbb{R}^2 pelos pontos do hiperbolóide em consequência de suas intersecções com planos (ver Figura A.8) [103].

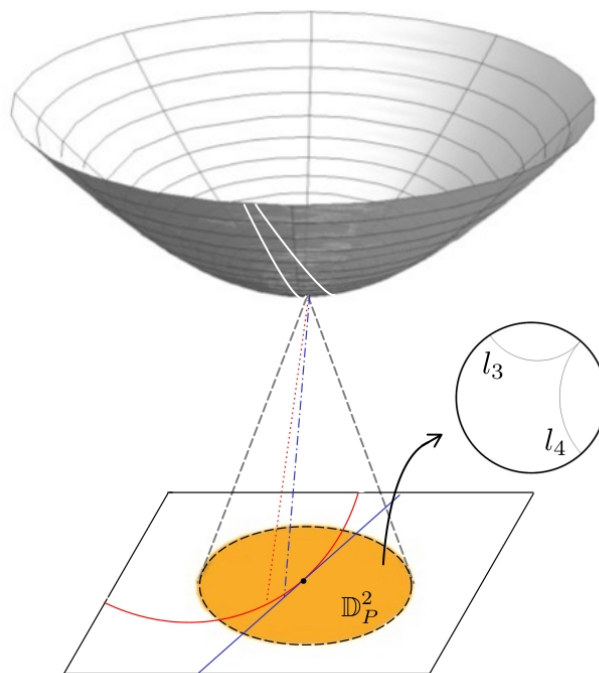


Figura A.8 – Projeção do hiperbolóide no plano dando origem às geodésicas no disco de Poincaré.

A.4 Transformações no plano hiperbólico

No contexto das isometrias dissemos que elas são responsáveis pela conservação de distâncias, e como as propriedades métricas subsequentes permanecem, geodésicas são levadas em geodésicas. Havendo conformalidade entre as variedades em questão, pode haver também a preservação de ângulos. Em razão disso, as métricas correlatas são subsequentes [86].

Pode ser mostrado que o conjunto dessas isometrias constituem um grupo completo e, em particular, para as três geometrias de curvatura constante (hiperbólica, elíptica e euclidiana) elas são extraídas das transformações de Möebius no plano complexo [77]:

$$z \mapsto M(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}, \quad (\text{A.23})$$

em que $a', b', c', d' \in \mathbb{C}$.

Não é difícil perceber que $M(z)$ descreve operações que já eram conhecidas no caso euclidiano, a saber, translações, rotações e reflexões. De fato, verifica-se que $z \mapsto z + d'/c'$ e $z \mapsto z + a'/c'$ definem uma translação, a depender das relações entre as constantes a', b', c', d' .

Um exemplo mais sutil e pouco intuitivo, todavia, é a inversão de um círculo $z \mapsto h(z) = 1/z$. Para um círculo da forma, $|z - r_0|^2 = r^2$, temos [77, 104]:

$$|z - r_0|^2 = r^2 \Rightarrow \left| 1 - \frac{r_0}{z} \right|^2 = \frac{r^2}{|z|^2} \iff (1 - r_0 h(z))(1 - \overline{r_0 h(z)}) = r^2 |h(z)|^2 \quad (\text{A.24})$$

Fazendo $h(z) = x + iy$, encontramos:

$$(x + iy)(\bar{x} - i\bar{y})(|r_0|^2 - r^2) - r_0(x + iy) - \bar{r}_0(\bar{x} - i\bar{y}) + 1 = 0 \quad (\text{A.25})$$

Uma manipulação simples conduz à:

$$(|r_0|^2 - r^2)(x^2 + y^2) + Cx + Dy + 1 = 0, \quad (\text{A.26})$$

com $C = -r_0 + \bar{r}_0$ e $D = (\bar{r}_0 - r_0)i$.

A equação (A.26) pode representar tanto uma reta quanto um círculo para $r = |r_0|$ ou não, respectivamente. Esse é um detalhe importante pois remete ao modelo do semiplano superior, cujas geodésicas eram justamente essas curvas para $y > 0$.

Em verdade, $z \mapsto M(z)$ é uma isometria de \mathbb{H}_{sp}^2 [90] pois, dado $z = x + iy$, a

imagem $M(z) = \tilde{x} + i\tilde{y}$ fornece:

$$\begin{aligned} \frac{a'z + b'}{c'z + d'} &= \frac{a'z + b'}{|c'z + d'|^2}(c'z + d') = \frac{c'a'|z|^2 + a'd'z + b'c'\bar{z} + b'd'}{|c'z + d'|^2} \\ &= \frac{[a'c'(x^2 + y^2) + (a'd' + bc')x + bd] + i[a'd' - b'c']y}{|c'z + d'|^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Logo, $\tilde{y} = y/|c'z + d'|^2$, tendo usado que $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ e $(a'd' - b'c') = 1$ condições específicas para a geometria hiperbólica.

Das equações de Cauchy-Riemann [95],

$$i\partial_x M(z) = \partial_y M(z) \Rightarrow \partial_x(\tilde{x} + i\tilde{y}) = -i\partial_y(\tilde{x} + i\tilde{y}) \Rightarrow M'(z) = \frac{a'd' - b'c'}{(c'z + d')^2}, \quad (\text{A.28})$$

ou, simplesmente:

$$M'(z) = \frac{1}{(c'z + d')^2}. \quad (\text{A.29})$$

A primeira forma fundamental (A.14) nos permite escrever, portanto [84]:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{x}_x^2 + \tilde{y}_y^2}{\tilde{y}^2} = \frac{|M'(z)|^2}{\tilde{y}^2} = \frac{1}{\tilde{y}^2(c'z + d')^4} = \frac{1}{y^2} = E. \quad (\text{A.30})$$

De maneira análoga,

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{x}_x^2 + \tilde{y}_y^2}{\tilde{y}^2} = \frac{1}{y^2} = G, \quad (\text{A.31})$$

e, por fim,

$$\tilde{F} = \frac{\partial_x \tilde{x} \partial_x \tilde{y} + \partial_y \tilde{x} \partial_y \tilde{y}}{y^2} = \frac{\partial_x \tilde{x} (-\partial_y \tilde{x}) + \partial_y \tilde{x} \partial_x \tilde{x}}{y^2} = 0 = F, \quad (\text{A.32})$$

em que usamos novamente as equações de Cauchy-Riemann.

Observamos com este cálculo que

$$\frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad (\text{A.33})$$

indicando a preservação da métrica de \mathbb{H}_{sp}^2 perante o mapeamento $z \mapsto M(z)$.

A aplicação da transformação de Möebius vai além dos próprios modelos mas permite estabelecer relações entre eles, como veremos no Apêndice A.7.

A.5 A tractriz e sua superfície de revolução

A tractriz é uma curva plana cuja característica fundamental é ter um segmento de reta tangente com comprimento constante a partir do seu eixo [81].

Historicamente essa curva foi estudada por Leibniz em 1670 quando o arquiteto Claude Perrault lhe propôs o problema de descobrir a trajetória formada por um relógio de bolso em uma mesa quando puxado pela extremidade de sua corrente. Outros ma-

temáticos famosos como Newton (em 1676) e Bernoulli (em 1691) também abordaram variantes do mesmo desafio [77, 105].

Para obter a parametrização da tractriz, consideremos o problema como se segue [106]:

Uma partícula A sobre o eixo horizontal x é arrastada de sua posição por meio de uma corda AB com comprimento $R > 0$ quando esticada ao máximo. À medida que a partícula se desloca a extremidade da corda responsável pelo movimento se inclina na vertical em relação ao eixo y . A geometria descrita acima é apresentada na Figura A.9 abaixo:

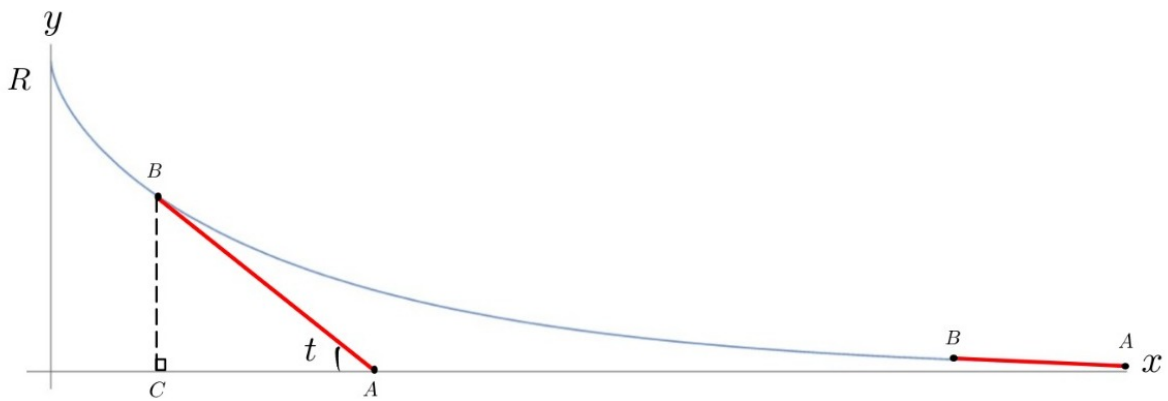


Figura A.9 – A curva tractriz.

A partícula se movimenta na horizontal, logo suas coordenadas são: $(x_A, 0)$. Além disso, a função $y = f(x)$, representada pela trajetória visualizada, tem seu máximo quando A está na origem e B em $(0, R)$.

Dados os pontos $A = (x_A, 0)$ e $B = (x_B, y_B)$, respectivamente, temos a equação da reta:

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A) = f'(x)(x_B - x_A) \tag{A.34}$$

em que $f'(x)$ é a usual tangente à curva e, por construção, $y_A = 0$.

Da Figura A.9 extraímos as informações:

- i. $\overline{BC} = y_B$;
- ii. $\overline{AB} = R$;
- iii. $x_C = x_B$, $\overline{AC} = x_A - x_B$;
- iv. $y = R \sin t$.

Usando adicionalmente o teorema de Pitágoras, temos

$$y = f'(x)\sqrt{R^2 - y^2}, \tag{A.35}$$

mas, assumindo que o movimento ocorra apenas para x positivo, $f'(x) < 0$. Portanto, a equação diferencial da curva é:

$$y = -f'(x)\sqrt{R^2 - y^2} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \quad (\text{A.36})$$

com a condição $y(0) = R$ ($t = \pi/2$ e $x = 0$).

A solução de (A.36), correspondente a $y = f(x)$ é dada por:

$$x = R \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{R^2 - y^2}, \quad y \in (0, R]. \quad (\text{A.37})$$

Com o auxílio da propriedade 6 do Apêndice A.1, a equação (A.37) pode ser escrita como:

$$x = R \operatorname{sech}^{-1} \left(\frac{y}{R} \right) - \sqrt{R^2 - y^2}, \quad (\text{A.38})$$

que, sendo expressa em termos do ângulo t , equivale à seguinte parametrização para a tractriz:

$$\alpha(t) = \left(-R \left[\ln \left(\tan \frac{t}{2} \right) + \cos t \right], R \operatorname{sen} t \right) \quad (\text{A.39})$$

Considerando que a curva está no plano xy , suponha que a rotacionemos em torno do eixo x . Ao fazer isto, geramos a superfície conhecida como tractóide ou pseudoesfera de Beltrami (veja Figura A.10).

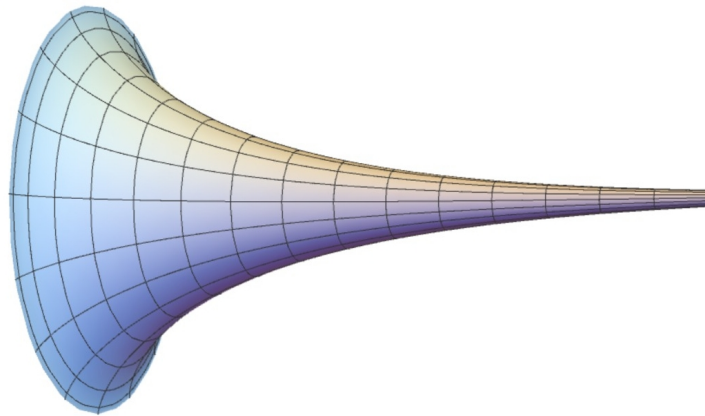


Figura A.10 – O tractóide.

O conseguimento da primeira forma fundamental para essa superfície terá como passo intermediário escrever o plano yz em coordenadas polares [77](ver Figura A.11). Esse procedimento só tem sua razão de ser pelo desejo de explicitar o papel do espaço ambiente, mas poderíamos executá-lo por outro caminho [83]. Assim,

$$I_{trac} = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dx^2 = R^2 [\cot^2 t dt^2 + \operatorname{sen}^2 t d\theta^2], \quad (\text{A.40})$$

tendo identificado $\rho = R \sin t$ via (A.39).

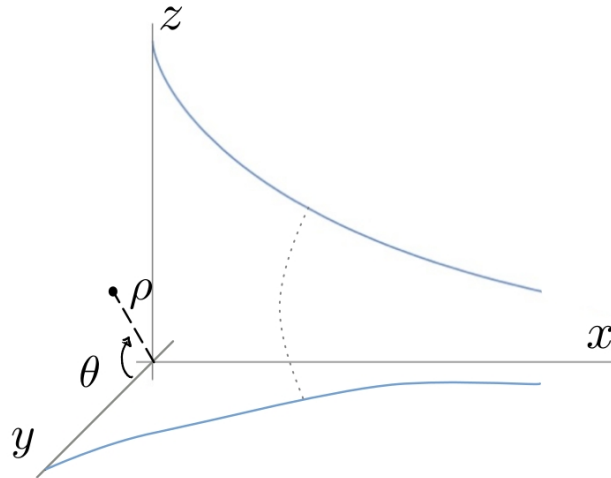


Figura A.11 – Plano yz em coordenadas polares para obtenção da primeira forma fundamental do tractóide.

Entretanto, é conveniente escrever I_{trac} a partir do elemento de linha sobre a superfície. Dessa maneira, relembramos que, para $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ [86]:

$$\left(\frac{d\mathcal{S}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = R^2 \cot^2 t \quad (\text{A.41})$$

Logo,

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = -R \cot t, \quad (\text{A.42})$$

em que o sinal negativo decorre do crescimento de t ser inversamente proporcional ao comprimento de arco \mathcal{S} .

Em consequência da derivada (A.42), $\sin t = e^{-\mathcal{S}/R}$, cujo efeito em (A.40) é explicitar o comprimento dos meridianos ($\theta = \text{constante}$) e a localização dos paralelos ($\mathcal{S} = \text{constante}$) ao longo da pseudoesfera [102]:

$$I_{trac} = d\mathcal{S}^2 + R^2 e^{-2\mathcal{S}/R} d\theta^2. \quad (\text{A.43})$$

O cálculo da curvatura do tractóide, utilizando os coeficientes da primeira forma fundamental (A.43), a partir da equação (4.15), conduz a:

$$K = -\frac{1}{R e^{-\mathcal{S}/R}} \partial_{\mathcal{S}}^2 (R e^{-\mathcal{S}/R}) = -\frac{1}{R^2}. \quad (\text{A.44})$$

Esse é um forte indício de que essa superfície talvez tenha alguma relação com o espaço hiperbólico, e como veremos, não é por mero acaso.

A.6 A pseudoesfera como uma superfície no espaço euclidiano

Como discutimos, é natural e até desejável que busquemos alguma maneira de expressar o espaço hiperbólico no espaço euclidiano para melhor compreender suas propriedades. Esse problema de imersão isométrica consiste necessariamente na procura de um mapa suave $f : U \rightarrow \mathbb{E}^3$, em que U é um domínio contido em \mathbb{R}^2 , com métrica $ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} du^\mu du^\nu$ em \mathbb{E}^3 .

Os pontos da superfície $S \subset \mathbb{E}^3$ satisfazem as relações $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$, para u e v sendo coordenadas genéricas de algum U , exatamente como definimos as superfícies parametrizadas na seção 4.3.

Uma vez que o espaço \mathbb{E}^3 é aquele no qual está a imagem do mapeamento, ele induzirá em S a métrica euclidiana $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, que, em termos de u e v , conduz à primeira forma:

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 = \bar{g}_{\mu\nu} du^\mu du^\nu, \quad (\text{A.45})$$

relativa à métrica da variedade original [81].

Já demonstramos que a métrica do espaço euclidiano, dada a curva da tractriz, conduz ao tractóide e que a curvatura dessa superfície é negativa. Para concluir a constatação de que ela está relacionada ao plano hiperbólico, basta-nos encontrar alguma isometria que preserve sua geometria intrínseca.

Seja, portanto, a métrica do tractóide (A.43), encontrada em A.5. Assumindo a simples mudança de parâmetros: $\theta \rightarrow \tilde{x}$, $e^{S/R} \rightarrow \tilde{y}$, observamos que

$$I_{trac} = R^2 \left(\frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2} \right) = R^2 I_{\mathbb{H}_{sp}^2}. \quad (\text{A.46})$$

que é justamente a métrica conforme do semiplano superior $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) | \tilde{y} > 0\}$ (A.14) com $R = 1$. Isso significa que, ao menos localmente, o tractóide é isométrico à variedade bidimensional \mathbb{H}^2 , mesmo habitando no espaço de \mathbb{E}^3 . Para verificar o mesmo resultado por outro método, conferir [83].

Um fato notável é que a reparametrização adotada vincula grandezas mensuráveis S e θ a variáveis não mensuráveis \tilde{x} , \tilde{y} , e envolve funções univaloradas bem comportadas e suaves, abrindo um caminho para investigações de natureza experimental [107, 108].

Apesar de já haveremos comentado, é preciso enfatizar que a igualdade das métricas não nos concede a liberdade de tratarmos ambas as variedades de forma indiscriminadamente equivalente. O teorema de Hilbert nos impõe a limitação de não ser possível imbuir completamente \mathbb{H}^2 em \mathbb{E}^3 , tal que só podemos representar uma pequena parcela do plano de Lobachevsky no espaço euclidiano tridimensional, mais especificamente, uma região horocíclica [77].

A Figura A.12 ilustra o que acabamos de descrever. De todo o plano hiperbólico,

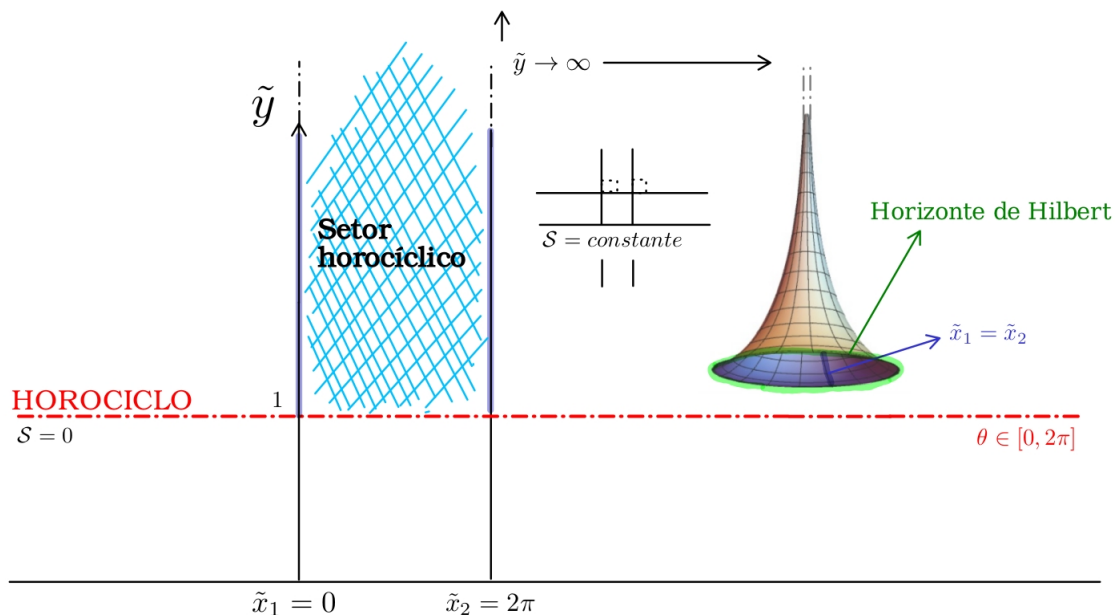


Figura A.12 – Região no semiplano superior correspondente ao tractóide.

apenas a parcela hachurada corresponde à superfície mostrada à direita. O círculo máximo é levado a uma linha horizontal (em vermelho) no semiplano, respectiva aos horociclos. Os demais paralelos também são representados por linhas horizontais. A borda circular do tractóide (em verde) designa uma singularidade (chamada horizonte de Hilbert), a partir da qual os valores do eixo de rotação x escrito como função do comprimento de arco, tornam-se imaginários [107].

Quando visualizado por meio do disco de Poincaré o setor horocíclico é convertido em um triângulo cujos vértices se encontram no horizonte de Hilbert, como mostra a Figura A.13 [109].

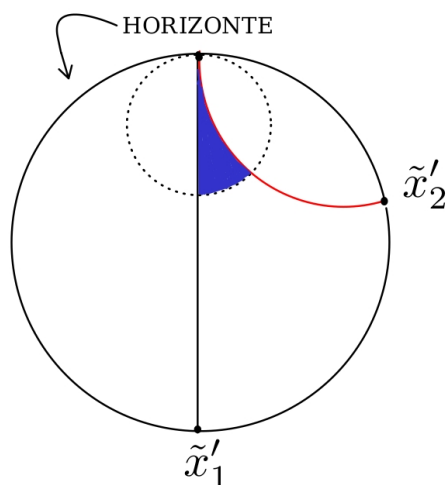


Figura A.13 – Região no disco de Poincaré correspondente ao tractóide. \tilde{x}'_1 e \tilde{x}'_2 representam as duas geodésicas na pseudoesfera de Beltrami e as duas verticais no semiplano superior indicadas na Figura A.12 convertidas para \mathbb{D}^2 .

O tractóide consiste de uma das várias superfícies de revolução que carregam consigo essas propriedades. Ela é a mais famosa pelo fato de ter sido identificada primeiro no decurso do desenvolvimento da geometria não euclidiana. Para mais detalhes, ver [81, 107, 109].

A.7 Conexões entre os modelos para \mathbb{H}^2

Há que se verificar ainda como o modelo do semiplano faz a ponte entre o tractóide e o hiperbolóide, de maneira indireta. Prosseguiremos nessa tarefa com $R = 1$, tal que as distâncias sejam adimensionais [91].

Na seção 4.4 expusemos a parametrização $X(\tau, \varphi)$ para o hiperboloide, na qual $x_1 = x(\tau, \varphi) = \sinh \tau \cos \varphi$, $x_2 = y(\tau, \varphi) = \sinh \tau \sin \varphi$ e $x_3 = z(\tau, \varphi) = \cosh \tau$. A partir dela, encontramos a métrica $ds_{hip}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} du^\mu du^\nu = d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2$.

Consideremos agora um mapa F , cuja estrutura seja [83]:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{z-y}, \frac{1}{z-y} \right). \quad (\text{A.47})$$

A escrita de (A.47) em termos das coordenadas do hiperbolóide faz com que

$$F(x, y, z) = F((\tilde{x}(\tau, \varphi), \tilde{y}(\tau, \varphi))) = \left(\frac{\sinh \tau \cos \varphi}{\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi}, \frac{1}{\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi} \right) \quad (\text{A.48})$$

Calculando as diferenciais totais de \tilde{x} e \tilde{y} em (A.48), temos:

$$\begin{aligned} d\tilde{x} &= \frac{\cos \varphi}{(\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi)^2} d\tau + \frac{\sinh \tau (\sinh \tau - \cosh \tau \sin \varphi)}{(\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi)^2} d\varphi; \\ d\tilde{y} &= \frac{(\cosh \tau \sin \varphi - \sinh \tau)}{(\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi)^2} d\tau + \frac{(\sinh \tau \cos \varphi)}{(\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi)^2} d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

que, quando substituídas na primeira forma fundamental para o modelo do semiplano superior (A.14),

$$\left(\frac{d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2} \right) = \frac{(d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2) [\cos^2 \varphi + (\sinh \tau - \cosh \tau \sin \varphi)^2]}{(\cosh \tau - \sinh \tau \sin \varphi)^2}, \quad (\text{A.50})$$

estabelecem a equivalência $I_{\mathbb{H}_{sp}^2} = I_{\mathbb{H}_{hip}^2}$.

A F escolhida é uma isometria tal que $F : \mathbb{H}_{sp}^2 \rightarrow \mathbb{H}_{hip}^2$. Todavia, nada impede que seja tomada a inversa F^{-1} , levando a métrica de destino à métrica de partida.

Em princípio, nosso argumento finaliza aqui: mostramos que é possível vislumbrar um pouco da imensidão do espaço hiperbólico por meio do tractóide em \mathbb{E}^3 , tendo como representação de \mathbb{H}^2 o modelo do semiplano superior. Em seguida, evidenciamos que

tanto este modelo quanto o do hiperbolóide no espaço de Minkowski são isométricos. Isso nos permite estudar teoricamente os fenômenos físicos em qualquer um destes modelos. A escolha de \mathbb{H}_{hip}^2 teve sua razão de ser pela sua simplicidade e analogia com o caso esférico.

Certamente o trajeto implícito executado pela isometria (A.47) demanda de alguma intuição geométrica para além da relação apresentada. De fato, ela é um atalho sutil entre os modelos de Minkowski e do semiplano superior passando primeiro pela projeção do hiperbolóide sobre o disco de Poincaré e, em seguida, aplicando uma nova transformação aos pontos deste último. Tendo como referência o ponto $C = (0, 0, -1)$ e prolongando uma reta a partir dele, encontramos duas intersecções associadas à distância: uma no disco de Poincaré (r) e outra no hiperbolóide a configurar o segmento $\overline{AA'}$. A Figura A.14 representa um corte seccional passando pela origem e ilustra a geometria requerida.

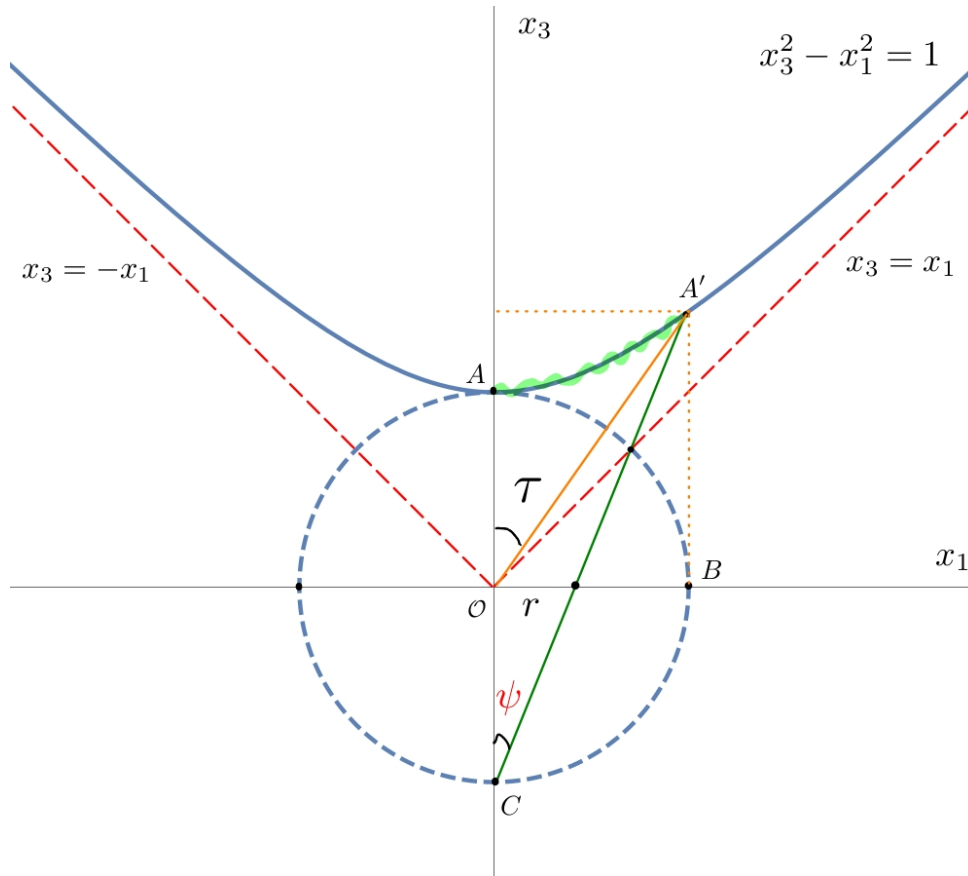


Figura A.14 – Secção reta do hiperbolóide no plano x_1x_3 .

De acordo com o apêndice A.1, pontos sobre a hipérbole $x_3^2 - x_1^2 = 1$ podem ser parametrizados pela curva $\gamma(\tau) = (\sinh \tau, \cosh \tau)$. Unindo isso ao arranjo da Figura A.14, conseguimos:

$$r = \tan \psi = \frac{\sinh \tau}{1 + \cosh \tau} = \tanh \left(\frac{\tau}{2} \right), \quad (\text{A.51})$$

em que usamos a equação (11) de A.1.

As coordenadas sobre o disco de Poincaré, para pontos distando de r da origem,

são dadas por:

$$(x_1, x_2) = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \left(\tanh \left(\frac{\tau}{2} \right) \cos \varphi, \tanh \left(\frac{\tau}{2} \right) \sin \varphi \right), \quad (\text{A.52})$$

que, expressa em variáveis complexas, tornam-se: $v = re^{i\varphi}$.

É direto ver que a métrica (A.21) reformulada como:

$$I_{\mathbb{D}_p^2} = \frac{4dv d\bar{v}}{(1 - |v|^2)^2}, \quad (\text{A.53})$$

é levada em $I_{\mathbb{H}_{hip}^2}$ (4.29) através de

$$dv = \frac{e^{i\varphi}}{1 + \cosh \tau} (d\tau + i \sinh \tau d\varphi); \quad (\text{A.54})$$

$$d\bar{v} = \frac{e^{-i\varphi}}{1 + \cosh \tau} (d\tau - i \sinh \tau d\varphi). \quad (\text{A.55})$$

A ligação entre o semiplano superior e o disco de Poincaré é viabilizada pela transformação $\Psi : \mathbb{D}_p^2 \rightarrow \mathbb{H}_{sp}^2$ [73]:

$$\Psi(z) = \frac{iz - 1}{-z + i}. \quad (\text{A.56})$$

Com $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, (A.56) pode ser explicitada como:

$$\Psi(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} \right) + i \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y-1)^2} \right) \quad (\text{A.57})$$

Consequentemente, o mapeamento transporta pontos (x, y) a pontos (\tilde{x}, \tilde{y}) tal que:

$$(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{2x}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y-1)^2} \right).$$

Semelhante ao que já fizemos, calculamos as diferenciais:

$$d\tilde{x} = \left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} dy \right) = 2 \frac{(y-1)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2} dx - 4 \frac{x(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} dy, \quad (\text{A.58})$$

$$d\tilde{y} = \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} dy \right) = 4 \frac{x(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} dx + 2 \frac{(y-1)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2} dy, \quad (\text{A.59})$$

cuja inserção em (A.14) conclui a igualdade entre $I_{\mathbb{D}_p^2}$ (A.21) e $I_{\mathbb{H}_{sp}^2}$.

Dados pontos em um hemisfério da esfera de Riemann e pontos sobre o equador da mesma, podemos projetá-los no plano de forma a representar o disco de Poincaré [110] (ver Figura A.15).

Em virtude disso, a expressão para Ψ faz-se inteligível. De fato, a propriedade

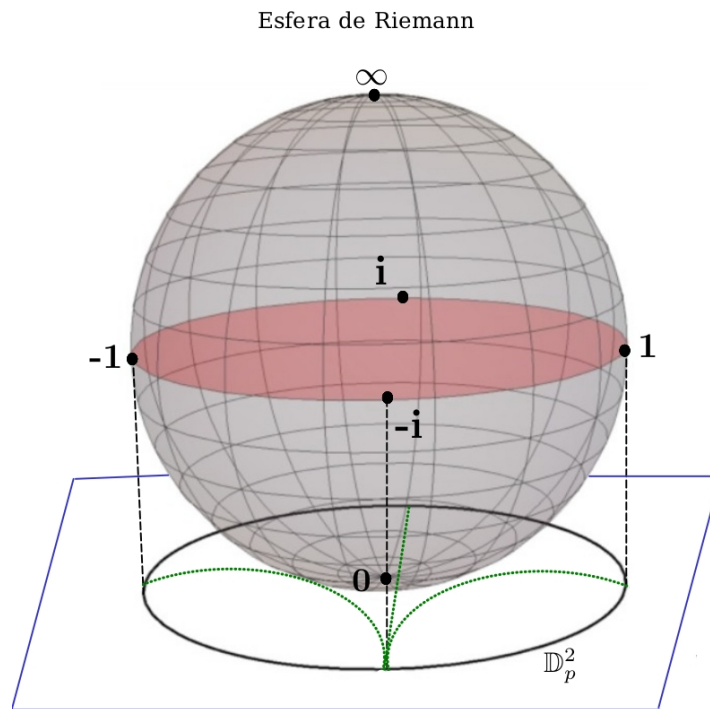


Figura A.15 – Esfera de Riemann e o disco de Poincaré.

da transformação de Möbius $M(z)$, relativa a preservação de círculos e retas, dá a ela o papel de mapa entre \mathbb{D}^2 e \mathbb{H}_{sp}^2 . A imposição de $M(-i) = 0$, $M(1) = 1$, $M(-1) = -1$, $M(i) = \infty$ na equação (A.23) garante que as imagens dos pontos indicados no grande círculo em destaque em A.15 sejam remetidos a região $\tilde{y} > 0$. Além disso, a borda do disco de Poincaré é endereçada ao absoluto do semiplano [83]. Tais exigências limitam as possíveis escolhas para a' , b' , c' e d' , tal que $\Psi(z)$, conforme a definimos, é naturalmente obtida de (A.23). As linhas correspondentes entre ambos os modelos são mostradas na Figura A.16.

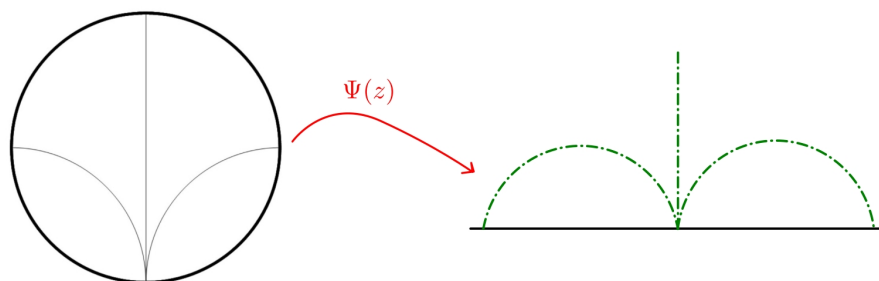


Figura A.16 – Resultado da transformação de Möbius $\Psi(z)$.

APÊNDICE B – Complementos relativos à transição BKT

B.1 Homotopia e defeitos topológicos

Nesta seção teceremos algumas breves e despreziosas considerações sobre topologia para compreender a natureza dos vórtices. Recomendamos ao leitor as referências [3, 51, 111, 112], utilizadas sumariamente aqui, para maior detalhamento.

Em geometria o interesse se volta, como pudemos perceber em toda a discussão das isometrias do espaço hiperbólico, a relações métricas, ângulos, etc. Por força disso, as propriedades equivalentes entre objetos geométricos irão instar nessas características.

O esquema da topologia, porém, lida com uma inspeção mais qualitativa, em que algumas similaridades entre objetos são fruto de deformações contínuas executadas por compressão ou estiramento sem os alterar com rasuras ou cortes. O exemplo mais clássico é o da xícara e do toro (Figuras a) e b) em B.1), que são ditos topologicamente equivalentes. O mesmo não pode ser estabelecido para a xícara e o toro duplo por causa do número de *genus* (buracos) distinto entre ambos (Figura B.1 c)).

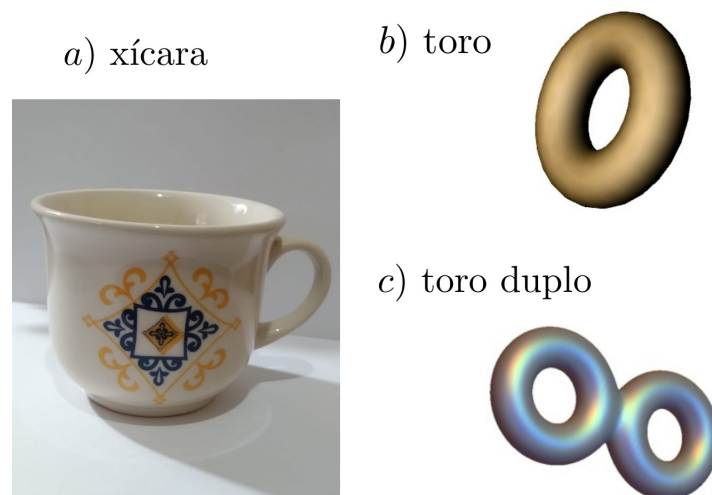


Figura B.1 – a) Xícara, b) Toro, c) Toro duplo.

Já que distâncias não importam para a topologia, as definições internas a ela partem da noção de conjunto, que em suma, é uma coleção de objetos. Os elementos presentes nessas coleções podem, por sua vez, ser agrupados para formar subconjuntos. Sucede, então, que elementos fora de um subconjunto ainda estão dentro do conjunto maior no que denominamos complemento. Em linguagem matemática, se A for o subconjunto, x o elemento e A_0 o conjunto, um elemento y não pertencente a A está em $A^C = \{x \in A_0 | x \notin A\}$.

A topologia é gerada neste conjunto A_0 através de uma coletânea de subconjuntos \mathcal{T} condicionada a conter o elemento vazio \emptyset e o próprio conjunto A_0 , bem como possuir a união e a intersecção dos elementos dos subconjuntos. Quando esses predicados são satisfeitos, o conjunto A_0 estrutura um espaço topológico. Como exemplo ilustrativo, seja $A_0 = \{a, b, c\}$. Das várias topologias possíveis, temos a mais intuitiva $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, A_0\}$ (Figura B.2 a)). Por outro lado, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ (Figura B.2 b)) não é considerada topologia de A_0 pois $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_2$.

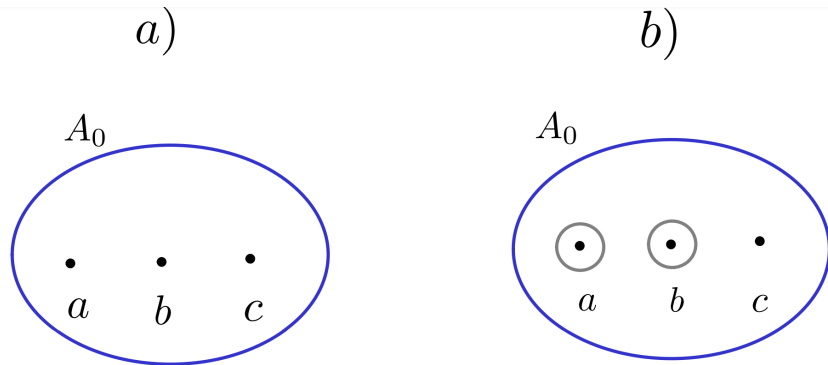


Figura B.2 – a) \mathcal{T}_1 , b) \mathcal{T}_2 .

A vizinhança de um elemento x qualquer no conjunto de A_0 é demarcada pelo subconjunto aberto U ao redor de x (Figura B.3 a)) tal que $U \subseteq N$ em A_0 . No plano isso significa que, dado um ponto p , é sempre possível contorná-lo por um círculo para V em torno desse ponto (Figura B.3 b)).

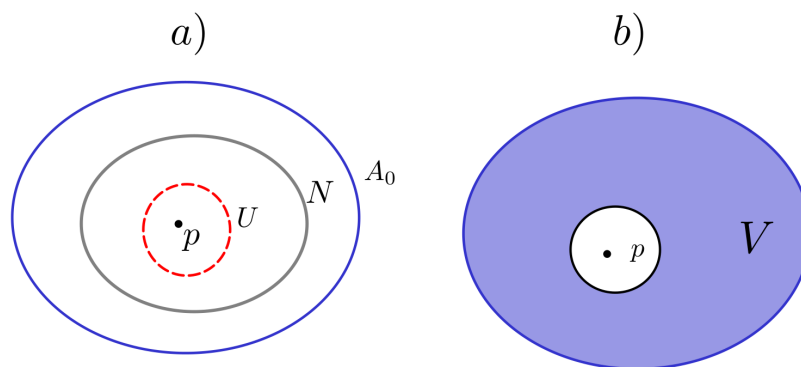


Figura B.3 – a) Vizinhança em torno de um elemento de A_0 , b) Vizinhança de um ponto p no plano.

Diz-se que um espaço topológico é de Hausdorff se para dois pontos diferentes p e q em A_0 , há uma vizinhança entre eles que não os envolve, ou seja, existem dois conjuntos disjuntos U e V , aos quais p e q pertencem respectivamente, com $U \cap V = \emptyset$ (Figura B.4 a)).

No caso de haverem dois espaços topológicos A_0 e A_1 , um mapa que os relacione, $\phi : A_0 \rightarrow A_1$, é contínuo se $\phi^{-1}(U) \subset A_0$. Ademais, se esse mapa tiver bijeção e sua continuidade se estender também para sua inversa, ϕ é um homeomorfismo (Figura B.4

b)). Essas definições são fundamentos cruciais para a discussão de espaços topológicos equivalentes por deformações contínuas.

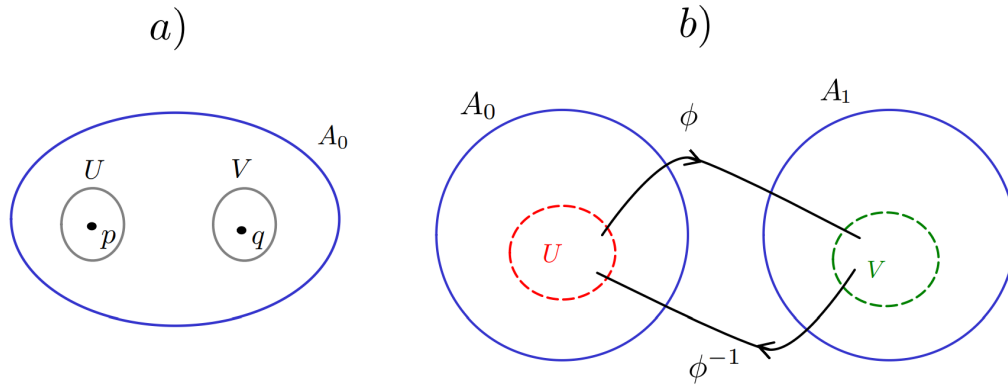


Figura B.4 – a) Espaço topológico de Hausdorff. b) Mapa ϕ entre A_0 e A_1 .

Outro tópico relevante é o de variedade topológica que, em linhas gerais, é um espaço topológico de Hausdorff que se parece com \mathbb{R}^n em cada ponto. Mais formalmente, é aquele em que a vizinhança de um ponto p num conjunto A_0 é homeomorfa a \mathbb{R}^n . Esse conceito faz o coroamento do que apresentamos na seção 4.3, quando dissemos que superfícies poderiam ser pensadas como a junção de pedaços de planos. De fato, esses objetos nada mais são que variedades topológicas para $n = 2$.

As classes de equivalência entre espaços topológicos sempre podem ser encontradas a partir de homeomorfismos subsequentes, isto é, se um espaço A_0 é homeomorfo a A_1 e A_1 a A_3 , é verdadeiro que A_0 e A_3 são também homeomorfos. E, se na realização desses homeomorfismos existirem propriedades relativas a estes espaços que permaneçam inalteradas, elas definem o que intitulamos invariantes topológicos.

Uma variedade A_0 é conectada por caminhos quando nela podemos unir dois pontos p_1 e p_2 por uma curva C . Quando estes mesmos pontos, mantidos fixos, forem interligados por duas curvas distintas C' e C'' tal que a elas seja associada uma função contínua que as transforme uma na outra, a referida variedade é simplesmente conectada. As curvas que assim se comportarem são homotópicas, e seu conjunto formam as classes de homotopia (Figura B.5).

Desejando tornar a explicação mais robusta através de um exemplo, tomemos duas variedades, sendo uma delas a esfera n -dimensional S^n em \mathbb{R}^{n+1} e a outra uma variedade A arbitrária. Todas as classes de equivalência topológica em relação ao mapa $f : S^n \rightarrow A$ designam o grupo $\Pi_n(A)$, $n \geq 1$, ou seja, $\Pi_n(A)$ é o conjunto de mapas $\{f_1, f_2, \dots\}$ cuja homotopia é garantida pelo mapa dependente do parâmetro contínuo $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \tilde{f} : S^n \times [0, 1] &\rightarrow A, \\ (z, t) &\rightarrow \tilde{f}(z, t), \end{aligned} \tag{B.1}$$

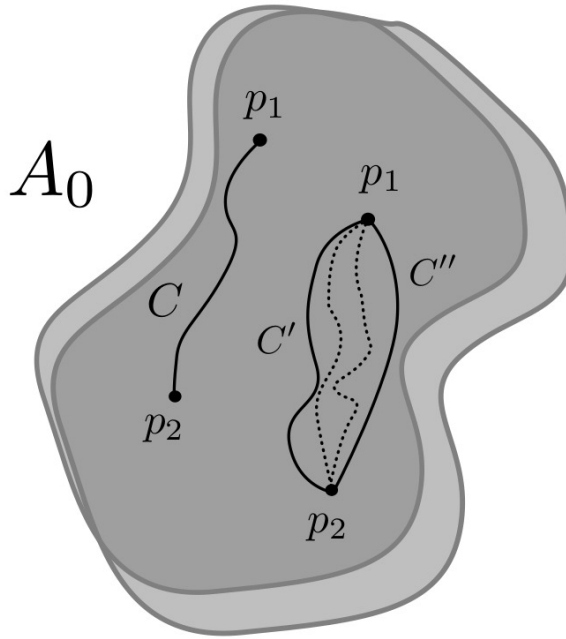


Figura B.5 – Variedade conectada por caminhos.

de modo que $\tilde{f}(\cdot, 0) = f_1$, $\tilde{f}(\cdot, 1) = f_2$ são dois mapas homotópicos do grupo e $\tilde{f}_0(z_0) = a_0 \in A$, $z_0 \in S^n$, para a_0 e z_0 como os pontos fixos ou de base.

O mapa f com $n = 1$, $f : S^1 \rightarrow A$, representa um caminho fechado (*loop*). Se o mapa for constante, $S^1 \rightarrow a_0$, ele será um elemento do grupo fundamental $\Pi_1(A)$. A conexidade de A faz com que $\Pi_1(A) = I$, com I o elemento identidade. Isso implica que em A todo *loop* possa ser deformado continuamente a um ponto (A é simplesmente conexa).

A contração característica desse mapa na linguagem do mapa B.1 pode ser obtida através de um parâmetro angular $\theta \in [0, 2\pi]$ junto da função $\tilde{f}(\theta, t) = (1 - t)f_1(\theta)$, da qual observa-se que $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ nos extremos de $[0, 1]$ para $f_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tendo a origem como ponto fixo.

O plano euclidiano \mathbb{E}^2 é uma variedade simplesmente conexa e possui apenas uma classe de homotopia, dado que qualquer *loop* pode ser deformado a qualquer ponto deste espaço. A situação mais drástica aparece quando A não é mais simplesmente conexa. Suponhamos que o ponto $(0, 0)$ não esteja mais acessível em \mathbb{E}^2 por um corte feito ali (Figura B.6).

Agora nem todo *loop* é contráctil — caminhos circundando $(0, 0)$ não são mapeados num ponto e são classificados distintamente por meio do número de vezes que contornam este buraco. Tal número, portanto, rotula as classes de homotopias oriundas dos diferentes mapeamentos e o seu conjunto admite as mesmas leis de adição que os inteiros, assim,

$$\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}. \tag{B.2}$$

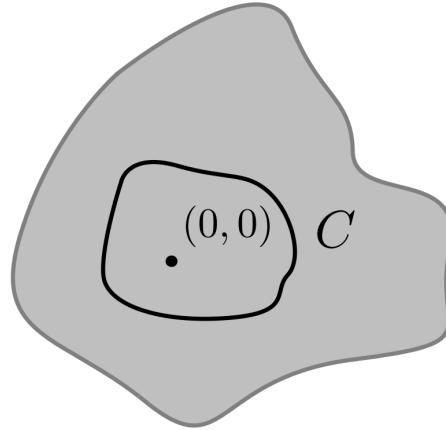


Figura B.6 – Corte em $(0,0)$ excluindo-o de \mathbb{E}^2 .

No caso mais geral,

$$\begin{aligned} \Pi_n(S^n) &= \mathbb{Z}, \\ \Pi_n(S^m) &= 0, \quad n < m, \\ \Pi_n(S^1) &= 0, \quad n > 1, \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\tag{B.4}$$

em que enfatizamos o exemplo de $\Pi_1(S^2) = 0$ cujo conteúdo essencial afirma que pela esfera S^2 ser simplesmente conexa, qualquer círculo nela é deformável a um ponto.

Em magnetismo, que é o nosso foco principal, as variedades estão relacionadas a meios ordenados aos quais associamos um parâmetro de ordem variável ou não. Os paramagnetos e os ferromagnetos são bons protótipos do que acabamos de dizer.

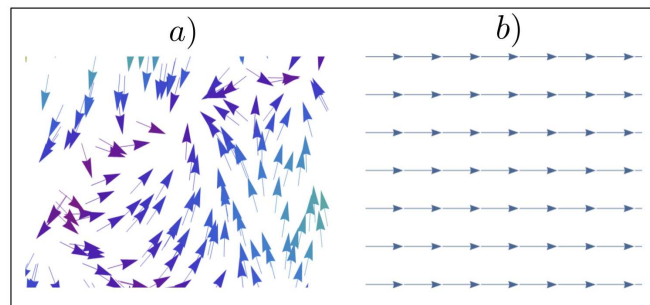


Figura B.7 – a) Paramagneto. b) Ferromagneto ideal

No limite ideal, os ferromagnetos numa superfície plana como a da figura B.7 apresentam um parâmetro de ordem constante dado pelo alinhamento dos spins resultando na magnetização macroscópica. Já os paramagnetos têm, na ausência de campos magnéticos externos, aleatoriedade dos spins tal que o parâmetro de ordem varia espacialmente.

Sistemas com quebras de simetria contínua, porventura, demonstram distorções das configurações (de spins em sistemas magnéticos) de estado fundamental chamados

defeitos topológicos. Estes fenômenos emergentes são caracterizados como regiões nucleadas de baixas dimensões em relação ao espaço em que aparecem com destruição da ordem local. No núcleo o parâmetro de ordem diverge mas fora dele ele varia lentamente.

Uma variável angular e contínua em duas dimensões do tipo $\phi(\vec{x}) = \mathcal{Q}\varphi + \varphi_0$, $\varphi_0 =$ constante e existente em toda parte, torna o parâmetro de ordem dela dependente também contínuo. Sua derivada, para $\varphi = \arctan(y/x)$ é $\vec{\nabla}\varphi = 1/r \hat{\varphi}$, que é finita exceto na origem. Essa singularidade matemática pode ser removida isolando-a por um corte de raio ξ_0 nessa região no material ou atribuindo valor nulo ao parâmetro de ordem em $\vec{x} = \vec{0}$ — fazendo com que φ fique não definido nesse ponto — e mantendo um suave crescimento ao seu valor de equilíbrio a partir de ξ_0 .

Os vórtices são configurações de spins com exatamente essas características. φ define a direção do parâmetro de ordem, que se altera por 2π quando uma volta completa é realizada ao redor do núcleo do vórtice. O número inteiro \mathcal{Q} acompanha o vórtice e dá ao parâmetro de ordem sua periodicidade no transcurso da circulação do núcleo recebendo comumente o nome "número de enrolamento" (*winding number*).

Ao afirmar que o conjunto dos inteiros rotulava as classes de homotopia dos mapeamentos, estávamos premeditando a introdução dos vórtices como defeitos topológicos. De fato, eles se encaixam no grupo Π_1 e detêm estabilidade por não poderem ser aniquilados por uma ordinária deformação contínua dos spins. Apesar da estabilidade topológica e a estabilidade física não serem idênticas, elas estão correlacionadas, pois para estas estruturas, em geral, estão associadas quantidades razoáveis de energia. A indestrutibilidade dos vórtices se verifica, por exemplo, quando $\mathcal{Q} = 1$, em que os spins distribuem-se circularmente ao núcleo (Figura B.8).

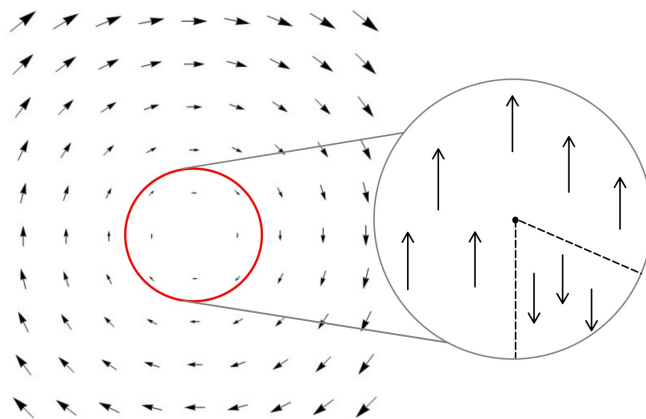


Figura B.8 – Vórtice magnético com $\mathcal{Q} = 1$ e a tentativa de eliminá-lo alterando a direção dos spins.

Nesta figura, também é mostrado o processo de alinhamento dos spins de maneira a eliminar o defeito. Note que as rotações feitas não foram capazes de torná-los paralelos. A zona delimitada pelos segmentos tracejados demandaria que os spins ali dispostos girassem por um ângulo de π . Essa configuração é, todavia, energeticamente difícil de con-

seguir. Desse modo, flutuações estatísticas de energia não são suficientes para rearranjar o sistema.

B.2 Integrais gaussianas e o valor médio da função cosseno a partir de H_0

Sendo H_0 uma hamiltoniana harmônica, podemos usar distribuições gaussianas para obtenção das médias de quaisquer grandezas desejadas [63].

Escrevendo a função exponencial e^{ix} como expansão de Taylor [95], temos:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\nu}}{(2\nu)!} + \frac{(ix)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \cos(x) + i \sin x, \quad (\text{B.5})$$

cujo valor médio em relação a H_0 é $\langle e^{ix} \rangle_0 = \langle \cos x \rangle_0 + i \langle \sin x \rangle_0$.

Posto que a função seno é ímpar, $\langle \sin x \rangle_0 = 0$. Desse modo,

$$\langle e^{ix} \rangle_0 = \langle \cos x \rangle_0. \quad (\text{B.6})$$

O lado esquerdo de (B.6) é explicitamente:

$$\langle e^{ix} \rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} e^{-\beta x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx} = \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[- \left(\sqrt{\beta} x - \frac{i}{2\sqrt{\beta}} \right)^2 - \frac{1}{4\beta} \right] dx \quad (\text{B.7})$$

na qual usamos o resultado tabelado para a integral gaussiana [95] e completamos quadrados no expoente do integrando no numerador.

Uma simples redefinição de variáveis mostra que (B.7) equivale a

$$\langle e^{ix} \rangle_0 = e^{\frac{-1}{4\beta}} = e^{-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle_0}, \quad (\text{B.8})$$

sabendo de antemão que $\langle x^2 \rangle_0 = 1/2\beta$ [113].

Concluimos a demonstração desejada, retornando em (B.6):

$$\langle \cos x \rangle_0 = e^{-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle_0} \quad (\text{B.9})$$

B.3 Das funções de correlação presentes na seção 3.1

B.3.1 Limite de altas temperaturas

Dada a hamiltoniana (3.2) vamos reescrevê-la como $-\beta H = K \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\Delta\phi_{ij})$ para $K \equiv \beta JS^2/2$. Com isso, a função de partição em altas temperaturas ($\beta \ll 1$) é [55]:

$$\mathcal{Z} = \int_0^{2\pi} \prod_i \frac{d\phi_i}{2\pi} e^{-\beta H} \approx \int_0^{2\pi} \prod_i \frac{d\phi_i}{2\pi} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + K \cos \Delta\phi_{ij}). \quad (\text{B.10})$$

A função de correlação, neste limite, é portanto:

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(0) \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \prod_i \frac{d\phi_i}{2\pi} \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(0)) \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + K \cos \Delta\phi_{ij})}{\int_0^{2\pi} \prod_i \frac{d\phi_i}{2\pi} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + K \cos \Delta\phi_{ij})}. \quad (\text{B.11})$$

O produtório envolvendo os spins vizinhos na equação (B.11) é tal que a interação entre sítios consecutivos contribui na integral por um fator de 1 ou por $\cos \Delta\phi_{ij}$. Quando o spin possui apenas uma "ligação" de sítio, $\int_0^{2\pi} (d\phi_i/2\pi) \cos \Delta\phi_{ij} = 0$. Já na presença de duas interações entre os spins, $\int_0^{2\pi} (d\phi_i/2\pi) \int_0^{2\pi} \cos \Delta\phi_{ij} \cos \Delta\phi_{jk} = (1/2) \cos \Delta\phi_{ik}$. Deste modo, o numerador da função de correlação acima é reduzido a:

$$\int_0^{2\pi} \prod_r \frac{d\phi_r}{2\pi} \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(0)) [K \cos(\phi_0 - \phi_1)] \cdots [K \cos(\phi_{r-1} - \phi_r)], \quad (\text{B.12})$$

considerando o r -ésimo spin na posição \vec{r} [114].

Feitas as observações a respeito das integrais dos cossenos, é fácil ver que resta apenas o termo conectando os sítios inicial e final, 0 e r . Assim,

$$\langle \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(0)) \rangle = K^r \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi_0 d\phi_r}{2\pi} \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(0)) \cos(\phi_0 - \phi_r)}_{1/2}. \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, definido o comprimento de correlação $\xi'^{-1} = -\ln(K/2)$, chegamos ao decaimento exponencial:

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(0) \rangle \propto e^{-r/\xi'}. \quad (\text{B.14})$$

B.3.2 Limite de baixas temperaturas

Para baixas temperaturas, usamos a aproximação contínua da hamiltoniana (3.4), que, em d -dimensões é:

$$H \approx \frac{JS^2 a^{2-d}}{4} \int d^d r (\nabla\phi)^2 \quad (\text{B.15})$$

Aplicando a transformada de Fourier $\phi(\vec{r}) = (1/(2\pi)^d) \int d^d k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \phi(\vec{k})$ à equação (B.15), com $\phi(-\vec{k}) = (\phi(\vec{k}))^*$, temos:

$$H = \frac{JS^2 a^{2-d}}{4} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k}) k^2, \quad (\text{B.16})$$

da qual extraímos

$$\langle \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{-\beta H} \phi(\vec{k}) \phi(-\vec{k})}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\beta H}} = \frac{4\delta(\vec{k} + \vec{k}')}{a^{2-d} \beta JS^2 k^2} \equiv \frac{\delta(\vec{k} + \vec{k}')}{K' k^2}. \quad (\text{B.17})$$

Negligenciando efeitos de natureza topológica e assumindo apenas flutuações harmônicas, calculamos a função de correlação spin-spin através da propriedade (B.8) [55]:

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \cdot \vec{S}(0) \rangle = \text{Re} \langle e^{i(\phi(\vec{r}) - \phi(0))} \rangle = \text{Re} \left[e^{-\langle (\phi(\vec{r}) - \phi(0))^2 \rangle / 2} \right], \quad (\text{B.18})$$

cujos expoente no espaço k é, dada a expressão (B.17), colocado nos seguintes termos:

$$\begin{aligned} \langle (\phi(\vec{r}) - \phi(0))^2 \rangle &= \int \frac{d^d k d^d k'}{(2\pi)^d} (e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - 1) (e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} - 1) \langle \phi(\vec{k}) \phi(\vec{k}') \rangle \\ &= \frac{1}{K'} \int_{1^{\text{aBZ}}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1 - e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})}{k^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

A integral (B.19), acima, pode ser computada estrategicamente lembrando que

$$V(\vec{r}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1 - e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})}{k^2} \quad (\text{B.20})$$

é o potencial coulombiano d -dimensional de uma carga unitária na origem [52, 95]. Por sucessão, a equação de Poisson nos permite escrever, através do Teorema de Gauss:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 V(r) d^d = \int_{\partial\mathcal{V}} \nabla V \cdot d\vec{A} = 1 \Rightarrow V(r) = \int \frac{1}{A_d r^{d-1}} dr, \quad (\text{B.21})$$

sendo $A_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ a área da hipersfera. Com isso, chegamos à conclusão que:

$$\langle (\phi(\vec{r}) - \phi(0))^2 \rangle = \frac{2k_B T}{a^{2-d} \tilde{J} S^2} \begin{cases} r/2, & d = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \ln(r/L), & d = 2 \\ \frac{A_d}{(d-2)} (\pi/L)^{d-2}, & d > 2, \end{cases}$$

com $\tilde{J} \equiv J/2$.

B.4 A desigualdade de Bogoliubov

Sistemas com hamiltonianas e, conseqüentemente, funções de partição complicadas amplificam em demasia a dificuldade de se lograr as possíveis soluções, quando estas existem. Movidos por esse inconveniente, somos impelidos a adotar métodos aproximados que nos permitam partir de modelos solúveis. Nesse espírito, apresentamos a seguir a desigualdade de Bogoliubov [115].

Uma das etapas intermerdiárias é considerar a convexidade da função

$$f(x) = \ln(x) + 1 - x, \quad (\text{B.22})$$

para a qual vale $f(x) \leq 0, \forall x > 0$. De fato, $f(x)$ comporta-se como descrito pois $f'(x) = 1/x - 1 \Rightarrow f'(1) = 0$. Sendo $x = 1$ um valor crítico, $f(1) = 0$ e $f''(1) = -1 < 0$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (Figura (B.9)).

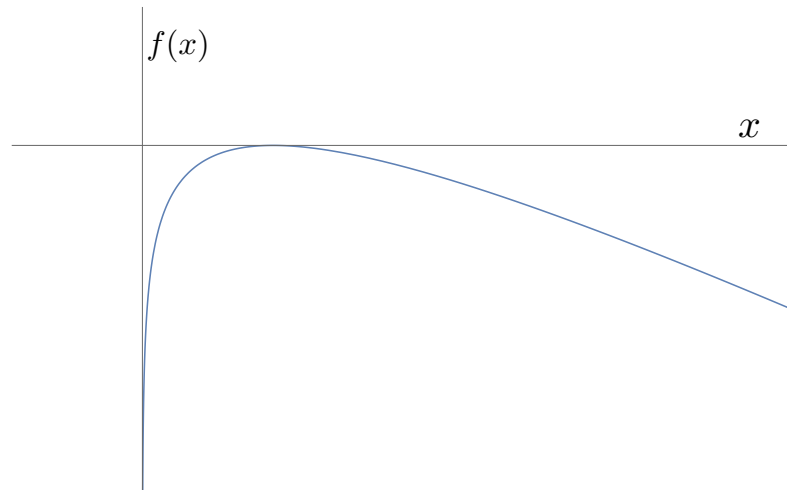


Figura B.9 – Gráfico de (B.22)

Isto posto, seja H a hamiltoniana original e $H_0(\rho)$ aquela que melhor se aproxima de H , dependente de um parâmetro livre ρ . Se a probabilidade de um autoestado arbitrário $|\psi_i^0\rangle$ de H_0 for p_i^0 e a probabilidade respectiva dos autoestados $|\psi_i\rangle$ de H equivalentes a estes primeiros for p_i , tal que $|\psi_i\rangle = |\psi_i^0\rangle$, podemos escrever (B.22) como:

$$\ln\left(\frac{p_i}{p_i^0}\right) + 1 - \frac{p_i}{p_i^0} \leq 0, \quad (\text{B.23})$$

com a identificação $x = p_i/p_i^0$.

Multiplicando (B.23) por $(-p_i^0)$ e somando sobre os autoestados de H_0 , temos:

$$-\sum_i p_i^0 \ln\left(\frac{p_i}{p_i^0}\right) \geq \sum_i (p_i^0 - p_i) = 0 \Rightarrow -\sum_i p_i^0 \ln p_i^0 \leq -\sum_i p_i^0 \ln p_i \quad (\text{B.24})$$

Dada a expressão do ensemble canônico para a probabilidade [116]:

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{\mathcal{Z}}; \quad (\text{B.25})$$

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (\text{B.26})$$

temos, de (B.24):

$$\sum_i \left\{ (-\beta E_i^0) \frac{e^{-\beta E_i^0}}{\mathcal{Z}_0} + \beta \left[\frac{e^{-\beta E_i^0}}{\mathcal{Z}_0} \left(-\frac{\ln \mathcal{Z}_0}{\beta} \right) \right] \right\} \leq \sum_i \left\{ (-\beta E_i) \frac{e^{-\beta E_i}}{\mathcal{Z}} + \beta \left[\frac{e^{-\beta E_i}}{\mathcal{Z}} \left(-\frac{\ln \mathcal{Z}}{\beta} \right) \right] \right\} \quad (\text{B.27})$$

que pode ser reescrita como:

$$F \leq F_0 - \langle H_0 \rangle_0 + \langle H \rangle_0 \equiv \Gamma(\rho), \quad (\text{B.28})$$

para a energia livre de Helmholtz $F = -k_B T \ln \mathcal{Z}$. A equação (B.28) é a relação procurada.

Referências

- [1] Stephen Blundell. Magnetism in condensed matter, 2003.
- [2] Navinder Singh and Arun M. Jayannavar. A brief history of magnetism, 2019.
- [3] Vagson Luiz de Carvalho. Soluções topológicas de spins no toro. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.
- [4] William Bynum. *Uma breve história da ciência*. L&PM Editores, 2014.
- [5] S.M. Rezende. *Introduction to Electronic Materials and Devices*. Springer International Publishing, 2022.
- [6] Kleber Daum Machado. Eletromagnetismo. *Ponta Grossa: Toda palavra editora*, 2012.
- [7] Rubens N Faria and Luis FCP Lima. *Introdução ao magnetismo dos materiais*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [8] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [9] Charles Kittel. Introduction to solid state physics eighth edition. 2021.
- [10] *Magnetic domain with arrows by Zureks.png*. Wikimedia, 2008.
- [11] Robert Streubel, Peter Fischer, Florian Kronast, Volodymyr P Kravchuk, Denis D Sheka, Yuri Gaididei, Oliver G Schmidt, and Denys Makarov. Magnetism in curved geometries. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 49(36):363001, aug 2016.
- [12] D. A. Allwood, Gang Xiong, M. D. Cooke, C. C. Faulkner, D. Atkinson, N. Vernier, and R. P. Cowburn. Submicrometer ferromagnetic not gate and shift register. *Science*, 296(5575):2003–2006, 2002.
- [13] G. H. R. Bittencourt, R. Moreno, R. Cacilhas, S. Castillo-Sepúlveda, O. Chubykalo-Fesenko, D. Altbir, and V. L. Carvalho-Santos. Curvature-induced emergence of a second critical field for domain wall dynamics in bent nanostripes. *Applied Physics Letters*, 118(14), 04 2021.
- [14] Dandoloff, R. and Saxena, A. Skyrmions on an elastic cylinder. *Eur. Phys. J. B*, 29(2):265–267, 2002.
- [15] A. Saxena and R. Dandoloff. Heisenberg spins on a cylinder in an axial magnetic field. *Phys. Rev. B*, 58:R563–R566, Jul 1998.

-
- [16] R. Dandoloff, S. Villain-Guillot, A. Saxena, and A. R. Bishop. Violation of self-duality for topological solitons due to soliton-soliton interaction on a cylindrical geometry. *Phys. Rev. Lett.*, 74:813–815, Jan 1995.
- [17] Simon Villain-Guillot, Rossen Dandoloff, and Avadh Saxena. Heisenberg spins on an infinite cylinder: a geometrical effect of anisotropy. *Physics Letters A*, 188(4):343–346, 1994.
- [18] A. Saxena, R. Dandoloff, and T. Lookman. Deformable curved magnetic surfaces. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 261(1):13–25, 1998.
- [19] W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, L.A.S. Mól, and A.S.T. Pires. Geometrical pinning of magnetic vortices induced by a deficit angle on a surface: Anisotropic spins on a conic space background. *Physics Letters A*, 360(3):472–480, 2007.
- [20] Walter A. Freitas, Winder A. Moura-Melo, and A.R. Pereira. Heisenberg spins on a cone: an interplay between geometry and magnetism. *Physics Letters A*, 336(4):412–422, 2005.
- [21] V. L. Carvalho-Santos, A. R. Moura, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira. Topological spin excitations on a rigid torus. *Phys. Rev. B*, 77:134450, Apr 2008.
- [22] V. L. Carvalho-Santos, W. A. Moura-Melo, and A. R. Pereira. Miniaturization of vortex-comprising system using ferromagnetic nanotori. *Journal of Applied Physics*, 108(9):094310, 2010.
- [23] Volodymyr P. Kravchuk, Denis D. Sheka, Robert Streubel, Denys Makarov, Oliver G. Schmidt, and Yuri Gaididei. Out-of-surface vortices in spherical shells. *Phys. Rev. B*, 85:144433, Apr 2012.
- [24] G.S. Milagre and Winder A. Moura-Melo. Magnetic vortex-like excitations on a sphere. *Physics Letters A*, 368(1):155–163, 2007.
- [25] Bartel Van Waeyenberge, A Puzic, H Stoll, KW Chou, T Tylliszczak, R Hertel, M Fähnle, H Brückl, Karsten Rott, Günter Reiss, et al. Magnetic vortex core reversal by excitation with short bursts of an alternating field. *Nature*, 444(7118):461–464, 2006.
- [26] Yan Levin. Prêmio nobel de física 2016, 2016.
- [27] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17:1133–1136, Nov 1966.
- [28] A.R. Moura. Bkt transition of the xxz ferromagnetic model on the spherical surface. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 513:167254, 2020.

-
- [29] A. S. T. Pires. Low-temperature thermodynamic study of the xy model using a self-consistent harmonic approximation. *Phys. Rev. B*, 53:235–239, Jan 1996.
- [30] Antônio Sérgio Teixeira Pires. Theoretical tools for spin models in magnetic systems. 2021.
- [31] AST Pires, AR Pereira, and ME Gouvêa. Low-temperature static and dynamic behavior of the layered classical xy ferromagnet. *Physical Review B*, 49(14):9663, 1994.
- [32] A. S. T. Pires. Kosterlitz-thouless transition in a two-dimensional isotropic antiferromagnet in a uniform field. *Phys. Rev. B*, 50:9592–9594, Oct 1994.
- [33] AST Pires and ME Gouvea. Phase transition and spin dynamics in the two-dimensional easy-plane ferromagnet. *Physical Review B*, 48(17):12698, 1993.
- [34] S.L. Menezes, M.E. Gouvêa, and A.S.T. Pires. Calculation of the spin stiffness for 2d easy-plane magnets. *Physics Letters A*, 166(5):330–334, 1992.
- [35] L.M Castro, A.S.T Pires, and J.A Plascak. Low-temperature thermodynamic study of the diluted planar rotator model using a self-consistent harmonic approximation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 248(1):62–67, 2002.
- [36] A.S.T. Pires. A quantum self-consistent harmonic approximation. *Solid State Communications*, 104(12):771–773, 1997.
- [37] A.R. Moura. Effectiveness of the self-consistent harmonic approximation in ferromagnets with dipolar interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 562:169778, 2022.
- [38] A.R. Moura. Phase transitions in the two-dimensional single-ion anisotropic heisenberg model with long-range interactions. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 369:62–68, 2014.
- [39] A.R. Moura and R.J.C. Lopes. On coherent states and the self-consistent harmonic approximation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 472:1–6, 2019.
- [40] Denis D Sheka, Volodymyr P Kravchuk, and Yuri Gaididei. Curvature effects in statics and dynamics of low dimensional magnets. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(12):125202, mar 2015.
- [41] Yuri Gaididei, Volodymyr P. Kravchuk, and Denis D. Sheka. Curvature effects in thin magnetic shells. *Phys. Rev. Lett.*, 112:257203, Jun 2014.
- [42] Ari M. Turner, Vincenzo Vitelli, and David R. Nelson. Vortices on curved surfaces. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1301–1348, Apr 2010.

-
- [43] Leopoldo R Gómez, Nicolás A García, Daniel A Vega, and José Lorenzana. Thermal properties of vortices on curved surfaces. *Physical Review E*, 97(1):012117, 2018.
- [44] Curtis G. Callan and Frank Wilczek. Infrared behavior at negative curvature. *Nuclear Physics B*, 340(2):366–386, 1990.
- [45] SRINANDAN DASMAHAPATRA. The xy-model on a pseudo-sphere: A renormalization group analysis. *Modern Physics Letters B*, 04(20):1273–1279, 1990.
- [46] B Jancovici and G Téllez. Two-dimensional coulomb systems on a surface of constant negative curvature. *Journal of statistical physics*, 91:953–977, 1998.
- [47] Seung Ki Baek. Vortex interaction on curved surfaces. *Phys. Rev. E*, 86:056603, Nov 2012.
- [48] L.R.A. Belo, N.M. Oliveira-Neto, W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, and E. Ercolessi. Heisenberg model on a space with negative curvature: Topological spin textures on the pseudosphere. *Physics Letters A*, 365(5):463–468, 2007.
- [49] Assa Auerbach. *Interacting electrons and quantum magnetism*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [50] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific, 1998.
- [51] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [52] Leticia F Cugliandolo. *Advanced statistical physics: Phase transitions*. 2017.
- [53] P. C. Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.*, 158:383–386, Jun 1967.
- [54] S Ahamed, S Cooper, V Pathak, and W Reeves. The berezinskii-kosterlitz-thouless transition.
- [55] A. Altland and B.D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge books online. Cambridge University Press, 2010.
- [56] Leandro Ribeiro Andrade Belo. Modelo de heisenberg em um espaço com curvatura negativa: excitações topológicas de spin na pseudo-esfera. 2007.
- [57] Eric Jacob. Topological phase transitions (bkt).
- [58] J Michael Kosterlitz. Kosterlitz–thouless physics: a review of key issues. *Reports on Progress in Physics*, 79(2):026001, 2016.

- [59] David R Nelson and JM Kosterlitz. Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids. *Physical Review Letters*, 39(19):1201, 1977.
- [60] A. S. T. Pires, B. V. Costa, and R. A. Dias. Phase diagram of the antiferromagnetic xy model in two dimensions in a magnetic field. *Phys. Rev. B*, 78:212408, Dec 2008.
- [61] A. R. Moura. Theoretical analysis of fmr-driven spin pumping current and its properties via the self-consistent harmonic approximation. *Phys. Rev. B*, 106:054313, Aug 2022.
- [62] J Villain. Quantum theory of one-and two-dimensional ferro-and antiferromagnets with an easy magnetization plane. i. ideal 1-d or 2-d lattices without in-plane anisotropy. *Journal de Physique*, 35(1):27–47, 1974.
- [63] Diego da Cunha Carvalho. Estudo analítico de modelos xy tridimensionais puros e diluídos via princípio variacional de bogoliubov. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.
- [64] AST Pires. Classical two-dimensional xxz model: A test of a generalized self-consistent harmonic approximation. *Physical Review B*, 54(9):6081, 1996.
- [65] DV Spirin and Yu A Fridman. 2d ferromagnetic models with symmetry-breaking interactions: self-consistent harmonic approximation. *Physica B: Condensed Matter*, 325:410–416, 2003.
- [66] ME Gouvêa and AST Pires. The two dimensional classical anisotropic heisenberg ferromagnetic model with nearest-and next-nearest neighbor interactions. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 25:147–153, 2002.
- [67] D Ariosa and H Beck. Vortex correction to the scha in the 2d- xy model. *Helvetica Physica Acta;(Switzerland)*, 65(2/3), 1992.
- [68] Kenji Harada and Naoki Kawashima. Kosterlitz-thouless transition of quantum xy model in two dimensions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 67(8):2768–2776, 1998.
- [69] J. Donald. *Chambers’s Etymological Dictionary of the English Language*. W. and R. Chambers, 1867.
- [70] H.W. Eves and H.H. Domingues. *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, 2004.
- [71] Henry Lyons. Two notes on land-measurement in egypt. *The Journal of Egyptian Archaeology*, 12(3/4):242–244, 1926.

- [72] I. Bicudo. *Os elementos*. Unesp.
- [73] S Jonker. *Hyperbolic Geometry: Four similarities, one big difference*. Tese de doutorado, Faculty of Science and Engineering, 2012.
- [74] M. Jammer. *Conceitos De Espaço: A história das Teorias do Espaço na Física*. Contraponto Editora.
- [75] Proclus and G.R. Morrow. *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Classics/History of mathematics. Princeton University Press, 1992.
- [76] E.C. Wallace and S.F. West. *Roads to Geometry*. Waveland Press, 2004.
- [77] T. Needham. *Visual Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts*. Princeton University Press, 2021.
- [78] Eugenio Urdapilleta, Francesca Troiani, Federico Stella, and Alessandro Treves. Can rodents conceive hyperbolic spaces? *Journal of the Royal Society, Interface / the Royal Society*, 12, 02 2015.
- [79] S. COEN. *Mathematicians in Bologna 1861–1960*. Springer Basel, 2012.
- [80] Gracielle Simões de Carvalho. Geometrias não euclidianas: uma proposta de inserção da geometria esférica no ensino básico. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2017.
- [81] A. Popov and A. Iacob. *Lobachevsky Geometry and Modern Nonlinear Problems*. Springer International Publishing, 2016.
- [82] Simone Aiola, Erminia Calabrese, Loïc Maurin, Sigurd Naess, Benjamin L Schmitt, Maximilian H Abitbol, Graeme E Addison, Peter AR Ade, David Alonso, Mandana Amiri, et al. The atacama cosmology telescope: Dr4 maps and cosmological parameters. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(12):047, 2020.
- [83] I.T. Couto and A. Lymberopoulos. *Introduction to Lorentz Geometry: Curves and Surfaces*. CRC Press, 2021.
- [84] Theodore Shifrin. *Differential geometry: a first course in curves and surfaces*. University of Georgia, 2015.
- [85] Taha Sochi. *Principles of differential geometry*, 2016.
- [86] M.P. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciencias médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [87] A.S.T. Pires. *Geometria Diferencial Para Fisicos*. LIVRARIA DA FISICA.

- [88] Markus Deserno. Notes on differential geometry, 2004.
- [89] R.G.G. Amorim, S. Ulhoa, P.M.M. Rocha, and R.A.S. Paiva. Elementos de geometria riemanniana: Análise da esfera s_2 . *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 37(Rev. Bras. Ensino Fís., 2015 37(2)), Apr 2015.
- [90] M.P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [91] NL Balazs and A Voros. Chaos on the pseudosphere. *Physics reports*, 143(3):109–240, 1986.
- [92] William F. Reynolds. Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *The American Mathematical Monthly*, 100(5):442–455, 1993.
- [93] Miles Reid and Balazs Szendroi. *Geometry and topology*. Cambridge University Press, 2005.
- [94] Howard S. Cohl. Fundamental solution of laplace's equation in hyperspherical geometry. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, nov 2011.
- [95] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2012.
- [96] Seung Ki Baek, Hiroyuki Shima, and Beom Jun Kim. Curvature-induced frustration in the xy model on hyperbolic surfaces. *Phys. Rev. E*, 79:060106, Jun 2009.
- [97] Antônio Ribeiro de Moura. Estudo analítico de sistemas de heisenberg bidimensionais dopados e com acoplamentos anisotrópico e biquadrático. 2011.
- [98] C.H. Lehmann. *Geometría analítica*. Limusa, 1984.
- [99] Maria do Bom Conselho da Silva Beserra. As funções hiperbólicas e suas aplicações. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.
- [100] Zachery S. Lane Solheim. The hyperboloid model of hyperbolic geometry. Dissertação de mestrado, Eastern Washington University, Cheney, 2012.
- [101] Diomara Pinto and Maria Cândida Ferreira Morgado. *Cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis*. UFRJ, 2009.
- [102] R. Earl. *a2 geometry: the local theory of curves and surfaces*. Mathematical Institute, 1998.
- [103] Charles Delman and Gregory Galperin. A tale of three circles. *Mathematics Magazine*, 76:15 – 32, 2003.

-
- [104] Rania BM Amer et al. Lecture notes of möbuis transformation in hyperbolic plane. *Applied Mathematics*, 5(15):2216, 2014.
- [105] Geniffer Pereira de Souza Luz et al. Curvas parametrizadas diferenciáveis: Parametrização de curvas planas e um teorema geral de classificação. 2016.
- [106] Delair Bavaresco, Leonardo Veit, and Sandra Stroschein. Tractriz: uma abordagem na perspectiva da geometria dos rastros. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 6:1–16, 04 2020.
- [107] Alfredo Iorio and Gaetano Lambiase. Quantum field theory in curved graphene spacetimes, lobachevsky geometry, weyl symmetry, hawking effect, and all that. *Physical Review D*, 90(2):025006, 2014.
- [108] Eugenio Urdapilleta, Francesca Troiani, Federico Stella, and Alessandro Treves. Can rodents conceive hyperbolic spaces? *Journal of the Royal Society Interface*, 12(107):20141214, 2015.
- [109] Elena Mirela Babalic and Calin Iuliu Lazaroiu. Generalized-attractor models from elementary hyperbolic surfaces. *Advances in Mathematical Physics*, 2018.
- [110] Binbin Xu. Introduction to hyperbolic geometry (part i). 2021.
- [111] Antonio Sergio Teixeira Pires. *A Brief Introduction to Topology and Differential Geometry in Condensed Matter Physics*. 2053-2571. Morgan and Claypool Publishers, 2019.
- [112] André Mandolesi. Introdução às variedades topológicas, 08 2018.
- [113] S.J. Blundell and K.M. Blundell. *Concepts in Thermal Physics*. OUP Oxford, 2010.
- [114] Avinash Rustagi. Berezinskii-kosterlitz-thouless (bkt) - department of physics.
- [115] Carlos Alberto Lopes. Desigualdade de bogoliubov na mecânica estatística não extensiva: Um estudo comparativo. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2003.
- [116] S.R.A. Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. EDUSP, 1997.