

**Eduarda Dutra de Almeida**

**Conexão de Shilnikov Deslizante Em Sistemas Lineares Por Partes em  $\mathbb{R}^3$ .**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Matemática, para a obtenção do título de Magister Scientiae.

Orientador: Prof. Oscar Alexander Ramirez Céspedes

**Viçosa - Minas Gerais**

**2024**

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

A447c  
2024 Almeida, Eduarda Dutra de, 1998-  
Conexão de Shilnikov em sistemas suaves por partes em  
R<sup>3</sup> / Eduarda Dutra de Almeida. – Viçosa, MG, 2024.  
1 dissertação eletrônica (71 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Oscar Alexander Ramírez Céspedes.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,  
Departamento de Matemática, 2024.

Referências bibliográficas: f. 71.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2024.667>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Equações  
diferenciais. I. Ramírez Céspedes, Oscar Alexander, 1988-.  
II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de  
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
III. Título.

CDD 22. ed. 515.3

Eduarda Dutra de Almeida

Conexão de Shilnikov Deslizante Em Sistemas Lineares Por Partes em  $\mathbb{R}^3$ .

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Matemática, para a obtenção do título de Magister Scientiae.

APROVADA: 07 de agosto de 2024.

Assentimento:

---

Eduarda Dutra de Almeida  
Autora

---

Prof. Oscar Alexander Ramirez Cespedes  
Orientador

# Agradecimentos

A Deus, que foi minha maior força nos momentos de angústia e desespero. Obrigada, Senhor, por colocar esperança, amor e fé no meu coração.

À minha mãe, que sempre me incentivou a lutar pelos meus sonhos. Sou grata pelas palavras de apoio e por acreditar em mim. Muito obrigada, mãezinha!

Ao meu amigo e companheiro de estudo Edinaldo, por ter entrado nessa jornada comigo e me apoiado a cada passo, acreditando em mim quando nem eu mesma acreditava. Obrigada por dividir os surtos comigo; tenho certeza que sem você essa jornada teria sido bem mais maluca. Muito obrigada!

À minha amiga Ritiele, que mesmo distante se fez presente e é minha maior incentivadora. Muito obrigada por acreditar em mim e me trazer para o eixo, quando eu sempre ficava desesperada após achar que fui mal nas provas. Muito obrigada por sempre me apoiar.

Ao meu orientador, Prof. Oscar, por aceitar me orientar, por ser sempre tão paciente comigo e por me incentivar, me impulsionando a alcançar lugares que eu nem imaginava que algum dia poderia alcançar. Muito obrigada por acreditar naquela menina do interior.

A todos os professores que me acompanharam durante o mestrado e que transmitiram seus conhecimentos com tanto afinho. Muito obrigada por ajudarem a formar a futura pesquisadora que eu sou.

Por fim, agradeço aos professores da banca, Prof.<sup>a</sup> Kamila da Silva Andrade e Prof. Marco Antônio do Couto Fernandes, por aceitarem o convite para comporem a banca. Muito obrigada!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais- Fapemig - Código de Financiamento .

# Resumo

Almeida, Eduarda D. de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, outubro de 2024. **Conexão de Shilnikov Deslizante Em Sistemas Lineares Por Partes em  $\mathbb{R}^3$** . Orientador: Prof. Oscar Alexander Cespedes Ramirez.

Neste trabalho, estuda-se a conexão homoclínica deslizante de Shilnikov em sistemas suaves por partes em  $\mathbb{R}^3$ , cuja variedade de comutação é de codimensão um e cujas soluções são definidas segundo as convenções de Filippov. Além disso, determinamos as condições necessárias para a existência dessa conexão em uma família de sistemas lineares por partes. Finalmente, apresentamos um exemplo numérico que demonstra a ocorrência dessa conexão em sistemas de controle.

**Palavras-chaves:** Campos de Filippov; Conexão de Shilnikov Deslizante; Sistemas Suaves por Partes.

# Abstract

Almeida, Eduarda D. de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, October de 2024. **Sliding Shilnikov Connection in Piecewise Linear Systems in  $\mathbb{R}^3$** . Adviser: Prof. Oscar Alexander Cespedes Ramirez.

In this work, we focus on the study of a Shilnikov sliding homoclinic connection in discontinuous systems in  $\mathbb{R}^3$ , whose switching manifold is of codimension one and whose solutions are defined according to Filippov conventions. Furthermore, we determine the necessary conditions for the existence of this connection in a family of piecewise linear systems. Finally, we present a numerical example that demonstrates the occurrence of this connection in control systems.

**Keywords:** Filippov Fields; Sliding Shilnikov Connection; Piecewise Smooth Discontinuous Systems.

# Sumário

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
|            | <b>Introdução</b> . . . . .  | <b>7</b>  |
| <b>1</b>   | <b>PRELIMINARES</b> . . . . .  | <b>9</b>  |
| <b>1.1</b> | <b>Convenções de Filippov</b> . . . . .  | <b>9</b>  |
| <b>1.2</b> | <b>Sistemas Estendidos de Chebyshev</b> . . . . .  | <b>17</b> |
| <b>2</b>   | <b>CONEXÃO DE SHILNIKOV DESLIZANTE EM <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .                | <b>22</b> |
| <b>3</b>   | <b>CONEXÃO DE SHILNIKOV DESLIZANTE EM SISTEMAS DE FILIPPOV LINEARES POR PARTES</b> . . . . . | <b>30</b> |
| <b>3.1</b> | <b>Conexão de Shilnikov deslizante em uma Família de Sistemas a um Parâmetro.</b> . . . . .  | <b>30</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Demonstração do Teorema 3.1</b> . . . . .   | <b>31</b> |
| <b>4</b>   | <b>EVIDÊNCIAS NUMÉRICAS DA CONEXÃO DE SHILNIKOV DESLIZANTE EM MODELOS FÍSICOS</b> . . . . .  | <b>48</b> |
| <b>5</b>   | <b>CONCLUSÃO</b> . . . . .   | <b>70</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .   | <b>71</b> |

# Introdução

O estudo dos sistemas dinâmicos vem evoluindo ao longo dos séculos e, embora os primeiros estudos tenham começado no século XVII, com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz e o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, a primeira obra considerada da área data do século XX (BIRKHOFF, 1927). Nesse sentido, a teoria é considerada relativamente nova e, quando falamos de Campos de Filippov, os estudos são ainda mais recentes.

Os Campos de Filippov recebem esse nome em homenagem ao matemático russo Aleksei Filippov, que formalizou o rigor para o estudo dos sistemas suaves por partes em sua obra (FILIPPOV, 1988). Por ser uma teoria recente, cada vez mais pesquisadores são atraídos para essa área, visto que ainda há muito a ser desenvolvido, e os sistemas suaves por partes descrevem uma vasta gama de fenômenos em diversas áreas, como biologia, física, engenharia e economia, entre outras.

Neste trabalho, estamos interessados em estudar a conexão de Shilnikov deslizante em sistemas de equações diferenciais ordinárias suaves por partes em  $\mathbb{R}^3$ . Esse fenômeno já está bem estabelecido para o caso contínuo e, nesse sentido, muitos pesquisadores vêm dedicando sua atenção para conseguir transportar resultados já estabelecidos sobre a conexão de Shilnikov para os sistemas suaves por partes. Dessa forma, surge a definição de conexão de Shilnikov deslizante apresentada por (NOVAES; TEIXEIRA, 2019) para sistemas de Filippov.

Assim, nosso objetivo com este trabalho é realizar uma revisão bibliográfica a fim de compreender o que vem a ser a conexão de Shilnikov deslizante no contexto dos campos de Filippov, para então caracterizar e analisar a conexão de Shilnikov deslizante em uma família de sistemas lineares por partes em  $\mathbb{R}^3$ . Nesse sentido, nosso trabalho está dividido em duas partes: a primeira parte é destinada aos pré-requisitos para compreendermos os sistemas suaves por partes, com base nas convenções de Filippov e os principais resultados sobre a conexão de Shilnikov deslizante. A segunda parte é destinada a apresentar novos resultados, que não estão presentes na literatura, e por fim, na terceira parte apresentamos evidências numéricas da conexão de Shilnikov deslizante em modelos físicos.

No primeiro capítulo, introduzimos as definições e resultados que são pertinentes para o bom desenvolvimento do trabalho, baseando-nos em importantes referências sobre a temática. Nesse sentido, apresentamos como é definido um sistema de equações diferenciais suave por partes, bem como a variedade de comutação e como as convenções de Filippov dividem a variedade de comutação em quatro regiões: região de costura, região de deslize, região de escape e região de tangência. Além disso, apresentamos o campo deslizante,

que é o campo que as convenções de Filippov associam à Região de Deslize. Por fim, apresentamos como é dada a solução de um sistema de equações diferenciais suave por partes e os principais resultados a respeito da Teoria de Chebyshev, que foram necessários ao longo do trabalho.

No segundo capítulo, apresentamos o objeto principal de estudo deste trabalho, a conexão de Shilnikov deslizante em sistemas de Filippov em  $\mathbb{R}^3$ , e os resultados mais relevantes sobre o tema, baseando-nos em (NOVAES; TEIXEIRA, 2019).

No terceiro capítulo, apresentamos o principal resultado deste trabalho. O resultado em questão é novo e não está presente na literatura. Conseguimos provar que uma família de sistemas de equações diferenciais suave por partes a um parâmetro  $\mu$ ,  $Z_\mu(\mathbf{x})$ , satisfazendo algumas hipóteses, possui a conexão de Shilnikov deslizante e apresentamos um exemplo numérico de um sistema que atende às condições do nosso teorema.

No quarto capítulo, tentamos relacionar o sistema estudado no artigo (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021) com um sistema semelhante ao que estudamos no Capítulo 3. Assim, exibimos uma aplicação que relaciona esses sistemas e apresentamos um exemplo numérico de um sistema que possui a conexão de Shilnikov deslizante, apresentando evidências numéricas da conexão de Shilnikov deslizante em sistemas presentes na teoria de controle.

Por fim, no último capítulo, apresentamos a conclusão deste trabalho. Destacamos os principais resultados apresentados a respeito da conexão de Shilnikov deslizante, bem como as contribuições do nosso trabalho para o avanço da teoria.

# 1 Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados que se fazem necessários para um bom entendimento desse texto. Cabe ressaltar que assumimos que o leitor tem familiaridade com a teoria clássica de equações diferenciais suaves. Partindo desse pressuposto, nos baseamos nas seguintes referências (FILIPPOV, 1988), (NOVAES; TEIXEIRA, 2019), (GUARDIA; SEARA; TEIXEIRA, 2011), (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021) e (NOVAES; TORREGROSA, 2017) para introduzir os conceitos e resultados mais relevantes para o nosso trabalho à respeito da teoria de sistemas suaves por partes, das Convenções de Filippov e da teoria de Chebychev. Nesse sentido, foi necessário começarmos o trabalho realizando um estudo sobre algumas definições e conceitos que são importantes para o estudo dos campos lineares por partes. Posterior a isso, introduzimos a teoria de Chebychev e os principais teoremas que utilizaremos a respeito dessa teoria.

## 1.1 Convenções de Filippov

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^3$  um aberto e  $K = \bar{U}$ . Denotamos por  $\mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3)$  o conjunto de todos os campos de vetores  $X : K \rightarrow \mathbb{R}^3$  que são de classe  $\mathcal{C}^r$ , com  $r \leq 1$ .

Considere o sistema de equações diferenciais  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$ , onde  $Z(\mathbf{x})$  da seguinte forma

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

com  $X(\mathbf{x}), Y(\mathbf{x}) \in \mathcal{X}^r(K, \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $h : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $h$  de classe  $\mathcal{C}^r$ , uma função que possui o zero como valor regular. Além disso, no decorrer desse trabalho, toda vez que nos referirmos a um campo  $X$ , estamos nos referindo a um campo que está em  $\Sigma^+ = h^{-1}(0, \infty)$  e de maneira análoga, toda vez que nos referirmos a um campo  $Y$ , estamos nos referindo a um campo que está em  $\Sigma^- = h^{-1}(-\infty, 0)$ .

Dizemos que  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$  é um **sistema de equações diferenciais suave por partes**. O Campo  $Z(\mathbf{x})$  é chamado de **campo de vetores suave por parte** e denotaremos (1.1) por  $Z = (X, Y)$  e no decorrer do trabalho, toda vez que nos referirmos ao campo  $Z$ , estamos nos referindo a  $Z = (X, Y)$ .

Além disso, definimos a **variedade de comutação**  $\Sigma = h^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : h(\mathbf{x}) = 0\}$ . Dado  $Z = (X, Y)$ , a solução de (1.1) num ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  está localmente bem definida pelo campo  $X$ , quando  $h(\mathbf{x}) > 0$  e pelo Campo  $Y$ , quando  $h(\mathbf{x}) < 0$ . Entretanto, para definirmos a solução de (1.1) em um ponto de  $\Sigma$  utilizaremos as convenções de Filippov,

para mais detalhes ver ([FILIPPOV, 1988](#)), segundo a qual a variedade de comutação  $\Sigma$  é particionada em regiões, sendo elas:

1. **Região de Costura:**  $\Sigma^c = \{p \in \Sigma | Xh(p)Yh(p) > 0\}$ ,
2. **Região de Deslize:**  $\Sigma^s = \{p \in \Sigma | Xh(p) < 0 \text{ e } Yh(p) > 0\}$ ,
3. **Região de Escape:**  $\Sigma^s = \{p \in \Sigma | Xh(p) > 0 \text{ e } Yh(p) < 0\}$ ,
4. **Região de Tangência:**  $\Sigma^t = S_X \cup S_Y$ , onde:

$$S_X = \{p \in \Sigma | Xh(p) = 0\} \quad \text{e} \quad S_Y = \{p \in \Sigma | Yh(p) = 0\}.$$

onde  $Xh(p)$  e  $Yh(p)$  são as **derivadas de Lie** da função  $h$  em relação aos campos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e são dadas por

$$Xh(p) = \langle X(p), \nabla h(p) \rangle \text{ e } Yh(p) = \langle Y(p), \nabla h(p) \rangle.$$

De forma geral, as derivadas de Lie de ordem superior são dadas por

$$X^{(n)}h(p) = \langle X(p), \nabla X^{(n-1)}h(p) \rangle \text{ e } Y^{(n)}h(p) = \langle Y(p), \nabla Y^{(n-1)}h(p) \rangle,$$

com  $n \in \mathbb{N}$ , com  $X^{(0)}h(p) = X$  e  $Y^{(0)}h(p) = Y$ .

Cabe destacar que, de forma genérica, a região de tangência é a fronteira das demais regiões e denotaremos por  $\partial\Sigma^c$ ,  $\partial\Sigma^e$  e  $\partial\Sigma^s$  as fronteiras das regiões de  $\Sigma^c$ ,  $\Sigma^e$  e  $\Sigma^s$ , respectivamente. A seguir podemos ver nas Figuras 1 e 2, o comportamento na região de costura, escape e deslize, respectivamente.

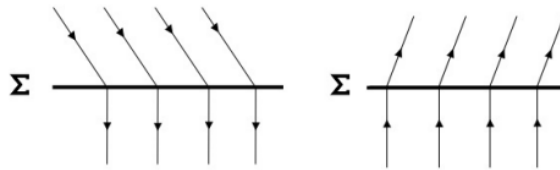


Figura 1 – Região de Costura



Figura 2 – Região de escape e deslize, respectivamente.

Vale ressaltar que, quando as soluções do sistema  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$  são dadas de acordo com as **convenções de Filippov**, dizemos que o campo  $Z = (X, Y)$  é um **campo de**

**Filippov.** Na sequência, apresentamos as regiões associadas com as convenções de Filippov para um sistema particular.

**Exemplo 1.1.** Considere o sistema  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$ , onde o campo  $Z(\mathbf{x})$  é dado por

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\rho x + \alpha y - \omega(z - \nu) \\ \lambda y \\ x\omega + \beta y - \rho(z - \nu) \end{pmatrix} & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0, \end{cases}$$

onde  $h(\mathbf{x}) = z$  e  $u_1, u_2, u_3, \alpha, \omega, \beta, \rho, \nu \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \rho < \lambda$  e  $\nu, \lambda, \rho, \omega, \alpha, \beta, u_3 > 0$ . A variedade de comutação é  $\Sigma = h^{-1}(0)$ , o gradiente da função  $h$  é  $\nabla h(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  e as derivadas de Lie da função  $h$  com relação aos campos  $X$  e  $Y$  são  $Xh(\mathbf{x}) = x\omega + \beta y - \rho(z - \nu)$  e  $Yh(\mathbf{x}) = u_3$ , respectivamente. Assim, segue que:

1. **Região de Costura:**  $\Sigma^c = \{(x, y, 0) \in \Sigma \mid x\omega + \beta y + \rho\nu > 0\}$ ,
2. **Região de Escape:**  $\Sigma^e = \emptyset$ ,
3. **Região de Deslize:**  $\Sigma^s = \{(x, y, 0) \in \Sigma \mid x\omega + \beta y + \rho\nu < 0\}$ ,
4. **Região de Tangência:**  $\Sigma^t = \{(x, y, 0) \in \Sigma \mid x\omega + \beta y + \rho\nu = 0\} = S_X$ ,

Note que,  $Yh(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , uma vez que  $u_3 > 0$  e portanto, o conjunto de tangência do campo  $Y$  é vazio, isto é,  $S_Y = \emptyset$ . Sendo assim, a variedade de comutação não possui região de escape. Além disso, as demais regiões ficam definidas a partir da deriva de Lie da função  $h$  com relação ao campo  $X$ . Vamos olhar com um pouco mais de atenção para a região de tangência de um campo de Filippov. Os pontos pertencentes à essa região é o que chamamos de pontos de tangência. Os pontos de tangência podem ser distinguidos com relação aos tipos de tangência dos campos suaves  $X$  e  $Y$  com a variedade  $\Sigma$ , dependendo do modo como se dá o contato entre eles. Vamos ressaltar dois tipos de tangências entre um campo e uma variedade, que são as tangências quadráticas e cúbicas.

**Definição 1.1.1** (Ponto de dobra). *Um campo vetorial suave  $X$  (resp.  $Y$ ) possui uma dobra ou uma tangência quadrática com  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xh(p) = 0$  e  $X^2h(p) \neq 0$  (resp.  $Yh(p) = 0$  e  $Y^2h(p) \neq 0$ ). Em particular, dizemos que  $p \in \Sigma^t$  é um ponto de dobra visível de  $X$  (resp.  $Y$ ) se  $X^2h(p) > 0$  (resp.  $Y^2h(p) < 0$ ) e invisível se  $X^2h(p) < 0$  (resp.  $Y^2h(p) > 0$ ).*

**Definição 1.1.2** (Ponto de cúspide não degenerada). *Um campo vetorial suave  $X$  (resp.  $Y$ ) possui uma cúspide ou tangência cúbica com  $\Sigma$  em um ponto  $p \in \Sigma$  se  $Xh(p) =$*

$X^2h(p) = 0$ ,  $X^3h(p) \neq 0$  e  $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p)\}$  (resp.  $Yh(p) = Y^2h(p) = 0$ ,  $Y^3h(p) \neq 0$  e  $\{\nabla h(p), \nabla Yh(p), \nabla Y^2h(p)\}$ ) é linearmente independente.

Observe que, verificar se o conjunto  $\{\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p)\}$  é linearmente independente em  $\mathbb{R}^3$  é equivalente a  $\det(A) \neq 0$ , com a matriz  $A$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} \nabla h(p) & \nabla Xh(p) & \nabla X^2h(p) \end{bmatrix},$$

onde as colunas da matriz  $A$  são os vetores  $\nabla h(p), \nabla Xh(p), \nabla X^2h(p)$ , respectivamente.

Nas Figuras 3 e 4, podemos pontos de dobra visível e invisível, respectivamente.

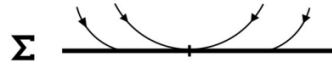


Figura 3 – Ponto de dobra visível de  $X$ .



Figura 4 – Ponto de dobra invisível de  $X$ .

Se  $p \in \Sigma^t$ , então podemos ter que o campo  $X$  ou o campo  $Y$  tem uma tangência ou é um ponto singular em  $p$ . Portanto, podemos ter diversos tipos de comportamento dependendo do tipo de contato dos campos  $X$  ou  $Y$  com  $\Sigma$ , como por exemplo:

1.  $p$  é um ponto regular para o campo  $X$  (ou  $Y$ ) e uma dobra para o campo  $Y$ . Nesse caso,  $p$  é dito um ponto do tipo regular-dobra do campo  $Z$ .
2.  $p$  é um ponto regular para o campo  $Y$  e uma dobra para o campo  $X$ . Nesse caso,  $p$  é dito um ponto do tipo dobra-regular do campo  $Z$ .
3.  $p$  é um ponto de dobra para o campo  $X$  e para o campo  $Y$ , simultaneamente. Nesse caso, dizemos que  $p$  é um ponto do tipo dobra-dobra do campo  $Z$ .
4.  $p$  é um ponto de cúspide para o campo  $X$  e um ponto regular do campo  $Y$ . Nesse caso, dizemos que  $p$  é um ponto do tipo cúspide-regular do campo  $Z$ .
5.  $p$  é um ponto singular do campo  $X$  e regular do campo  $Y$ . Nesse caso, dizemos que  $p$  é um ponto do tipo singular-regular do campo  $Z$ .

Na Figura 5, é possível visualizar o comportamento do campo  $Z = (X, Y)$  no ponto  $p_0 \in \Sigma$  para três tipos de contatos, sendo eles: (a) dobra-regular, (b) cúspide-regular e (c) dobra-dobra, respectivamente.

A seguir, vamos identificar alguns pontos de tangência para o Exemplo 1.1.

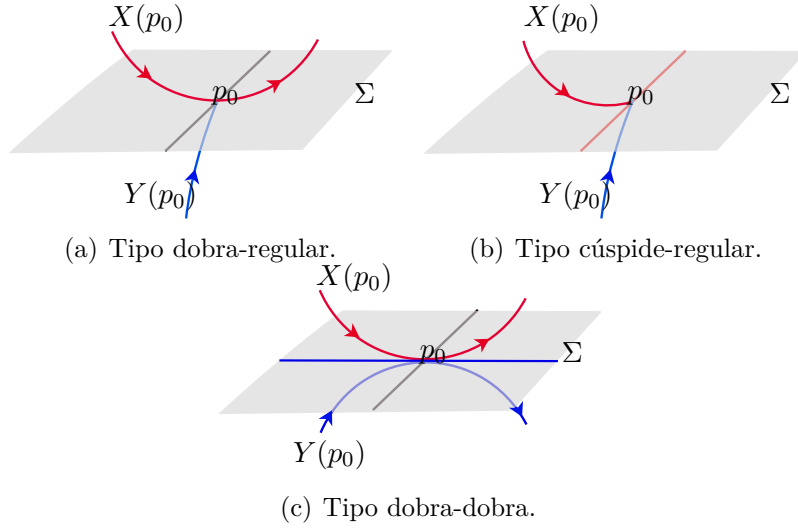


Figura 5 – (a) apresenta um contato do tipo dobra-regular para o campo  $Z$ , o (b) apresenta um contato do tipo cúspide-regular e o (c) apresenta um contato do tipo dobra-dobra.

**Exemplo 1.2.** Para o sistema do Exemplo 1.1, vimos que a região de tangência é dada por

$$\Sigma^t = \{(x, y, 0) \in \Sigma \mid x\omega + \beta y + \rho\nu = 0\} = S_X,$$

e  $S_Y = \emptyset$ . Logo, o campo  $Y$  não tangencia a variedade de comutação. Com relação ao campo  $X$ , os pontos de tangência estão sobre a reta  $r(x) = \left(x, -\frac{\rho\nu + x\omega}{\beta}, 0\right)$ .

Agora, vamos identificar o tipo de contato entre  $X$  e  $\Sigma$ . Com esse propósito, analisamos a segunda derivada de Lie de  $h$  em relação a  $X$ , que é dada por

$$X^2h(\mathbf{x}) = \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2 + x(-\alpha\omega^2 - \beta\lambda\omega - \beta\rho\omega)}{\beta}$$

Logo, os pontos de dobra visíveis( $D_v$ ), os pontos de dobra invisíveis( $D_i$ ) e o ponto de cúspide são caracterizados da seguinte forma

$$\begin{aligned} X^2h(\mathbf{x}) > 0 & \text{ se } x < \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_v, \\ X^2h(\mathbf{x}) < 0 & \text{ se } x > \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_i \\ X^2h(\mathbf{x}) = 0 & \text{ se } x = \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} = c, \end{aligned}$$

onde

$$c = \left( \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega}, -\frac{\nu(\rho^2 + \omega^2)}{\alpha\omega + \beta(\lambda + \rho)}, 0 \right)$$

Assim, o conjunto de pontos de dobra visível e invisível do campo  $X$  são dados por

$$D_v = \left\{ \left( x, \frac{\rho\nu + x\omega}{\beta}, 0 \right) \in \Sigma \mid x < \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega} \right\}$$

e

$$D_i = \left\{ \left( x, \frac{\rho\nu + x\omega}{\beta}, 0 \right) \in \Sigma \mid x > \frac{-\alpha\nu\rho\omega - \beta\lambda\nu\rho + \beta\nu\omega^2}{\alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega} \right\}.$$

respectivamente. Portanto, se  $p \in D_v$ , então  $p$  é um ponto de dobra visível-regular para o campo  $Z$ , e se  $p \in D_i$ , então  $p$  é um ponto de dobra invisível-regular para o campo  $Z$ . Além disso, temos:

1.  $Xh(c) = X^2h(c) = 0$  e  $X^3h(c) = -\lambda\nu(\rho^2 + \omega^2) \neq 0$ .
2.  $\nabla h(c) = (0, 0, 1)$ ,  $\nabla Xh(c) = (\omega, \beta, -\rho)$  e  $\nabla X^2h(c) = (-\rho\omega, \alpha\omega + \beta\lambda, 0)$  são linearmente independentes, uma vez que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \omega & -\rho\omega \\ 0 & \beta & \alpha\omega + \beta\lambda \\ 1 & -\rho & 0 \end{pmatrix} = \alpha\omega^2 + \beta\lambda\omega + \beta\rho\omega \neq 0.$$

Logo, o ponto  $c$  é um ponto de cúspide de  $X$ , o que implica que  $p$  é um ponto de cúspide-regular do campo  $Z$ .

Ao olharmos para as regiões definidas em  $\Sigma$ , é possível perceber que as órbitas de pontos na região de costura ficam bem definida apenas pelos campos  $X$  e  $Y$ , porém quando analisamos a região de deslize (ou escape) existem diversas possibilidades para o comportamento das órbitas no futuro (ou passado), tornando-se assim difícil de prever o comportamento. Em particular, na região de deslize, as convenções de Filippov associam ao sistema (1.1) um campo vetorial em  $\Sigma$  chamado **campo deslizante**,  $\tilde{Z}$ , para determinar as órbitas no futuro (ou passado) em  $p \in \Sigma^s$  (ou  $\Sigma^e$ ). Na Figura 6, temos a representação que descreve o comportamento na região de deslize, onde as órbitas dos campos  $X$  e  $Y$  se encontram se “deslizam” pela variedade  $\Sigma$ .

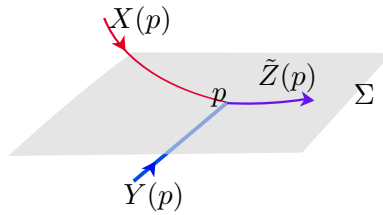


Figura 6 – Representação do que pode ser o comportamento na região de deslize.

**Definição 1.1.3.** Seja  $Z = (X, Y)$  um campo vetorial suave por partes dado como em (1.1). O campo vetorial deslizante, denotado por  $\tilde{Z}$ , para  $p \in \Sigma^s$  é dado por uma combinação linear convexa de  $X(p)$  e de  $Y(p)$  de modo que  $\tilde{Z}(p)$  seja tangente à  $\Sigma$  em  $p$ . Isto é,  $\tilde{Z}$  é definido por

$$\tilde{Z}(p) = \frac{Yh(p)X(p) - Xh(p)Y(p)}{Yh(p) - Xh(p)},$$

onde  $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ .

Note que o campo  $Z$  não necessariamente está definido em  $\partial(\Sigma^s \cup \Sigma^e)$ , pois existe a possibilidade de que  $Xh(p) = Yh(p) = 0$ . Reparametrizando o tempo de forma conveniente, é possível “eliminar” o denominador, o que permite “estender” o campo deslizando até as fronteiras da região deslizando. Esse campo resultante é conhecido como **campo deslizando normalizado**, denotado por  $\hat{Z}$ , e é expresso por

$$\hat{Z}(p) = Yh(p)X(p) - Xh(p)Y(p).$$

É importante observar que o campo deslizando normalizado é um campo suave, de classe  $C^r$  e está bem definido nas fronteiras da região de deslize e inclusive na região de costura.

**Exemplo 1.3.** Para o campo  $Z = (X, Y)$  definido no Exemplo 1.1 o campo deslizando associado é dado por

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \left( \frac{u_1(\nu\rho + x\omega + \beta y) - u_3(\nu\omega - \rho x + \alpha y)}{\nu\rho - u_3 + x\omega + \beta y}, \frac{u_3(u_2 - \lambda y)}{\nu\rho - u_3 + x\omega + \beta y} + u_2, 0 \right)$$

e o campo deslizando normalizado é dado por

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = (-\nu\rho u_1 - u_1 x\omega - \beta u_1 y + \nu u_3 \omega - \rho u_3 x + \alpha u_3 y, -\nu\rho u_2 - u_2 x\omega + \beta(-u_2)y + \lambda u_3 y, 0),$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y, 0) \in \Sigma^s$  e  $u_1, u_2, u_3, \alpha, \omega, \beta, \rho, \nu \in \mathbb{R}$ , com  $0 < \rho < \lambda$  e  $\nu, \lambda, \rho, \omega, \alpha, \beta, u_3 > 0$ .

Uma consequência interessante de associar esse novo campo de vetores ao campo  $Z$  é o aparecimento de novos pontos de equilíbrio, ou seja, pontos em  $\Sigma^s \cup \Sigma^e$  tais que  $\tilde{Z}(p) = 0$ . Esses pontos são chamados de pseudo-equilíbrios do campo  $Z$ . Formalmente,

**Definição 1.1.4.** Dizemos que um ponto  $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$  tal que  $\tilde{Z}(p) = 0$  é um **pseudo-equilíbrio** do campo  $Z$ . Em particular, se  $p$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de  $\tilde{Z}$ , chamamos  $p$  de um **pseudo-equilíbrio hiperbólico** do campo  $Z$ .

Podemos ter diferentes tipos de pseudo-equilíbrios, dependendo se o ponto está na região de deslize ou de escape e do comportamento do campo deslizando nesse ponto. Por exemplo:

1. Se  $p \in \Sigma^s$  (resp.  $p \in \Sigma^e$ ) e  $p$  é um foco hiperbólico repulsor (resp. atrator) do campo de deslize, dizemos que  $p$  é uma pseudo sela-foco hiperbólico.
2. Se  $p \in \Sigma^e$  (resp.  $p \in \Sigma^s$ ) e  $p$  é um foco hiperbólico repulsor (resp. atrator) do campo de deslize, dizemos que  $p$  é uma pseudo fonte-foco hiperbólico.

Na Figura 7, é possível observar as duas configurações de pseudo-equilíbrios definidas acima.

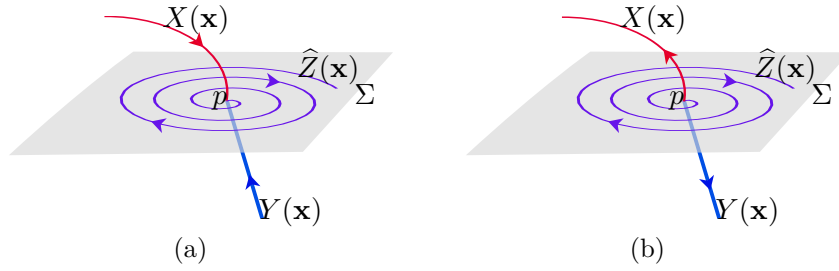


Figura 7 – No item (a) apresentamos a representação de uma pseudo sela-foco hiperbólico e no (b) uma pseudo fonte-foco hiperbólico.

Portanto, basicamente, a dinâmica de um campo de Filippov  $Z = (X, Y)$  é determinada pela dinâmica de três campos de vetores suaves:  $X$ ,  $Y$  e o campo deslizante  $\tilde{Z}$ . Na sequência, apresentamos uma definição para órbita, trajetória e ponto singular de um campo de Filippov. Para isso precisaremos, lembrar da definição de trajetória para um sistema suave

**Definição 1.1.5.** (SOTOMAYOR, 1979) *Seja  $f : \Omega \rightarrow E \subset \mathbb{R}^n$  aberto, com  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Uma função diferenciável  $\psi : I \rightarrow E$  chama-se solução da equação*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(t, \mathbf{x})$$

no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  se :

- i) o gráfico de  $\psi$  em  $I$ , isto é,  $\{(t, \psi(t)) : t \in I\} \subset \Omega$  e
- ii)  $\frac{d\psi(t)}{dt} = f(t, \psi(t))$  para todo  $t \in I$ .

**Definição 1.1.6.** *Seja  $X$  um campo vetorial suave. A trajetória  $\psi_X(t, p)$ , com  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , que passa pelo ponto  $p$  é tal que:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_X(t, p) = X(\psi_X(t, p)), \\ \psi_X(0, p) = p. \end{cases}$$

para  $t \in I$ .

Agora, conseguimos os elementos necessários para definir formalmente o que é uma trajetória de um campo de Filippov.

**Definição 1.1.7.** *A trajetória de um sistema de Filippov da forma  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$ , com  $Z(\mathbf{x})$  definido como em (1.1) passando por  $p \in \mathbb{R}^3$  em um tempo  $t_0 \in I_p \subset \mathbb{R}$ , denotada por  $\psi_Z(t, p)$ , é definida da seguinte forma:*

- Para  $p \in \mathbb{R}^3$  tal que  $h(p) > 0$  (respectivamente  $h(p) < 0$ ), a trajetória é dada por  $\psi_Z(t, p) = \psi_X(t, p)$  se  $h(\psi_X(t, p)) > 0$  ( $\psi_Z(t, p) = \psi_Y(t, p)$ ), para  $t \in I_p$ .

- Para  $p \in \Sigma^c$  tal que  $Xh(p), Yh(p) > 0$  (respectivamente  $Xh(p), Yh(p) < 0$ ), a órbita que tem como condição inicial o ponto  $p$  é definida por  $\psi_Z(t, p) = \psi_Y(t, p)$ , se  $t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \leq 0\}$  ( $t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ ) e  $\psi_Z(t, p) = \psi_X(t, p)$ , se  $(t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\})$  ( $t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \leq 0\}$ ).
- Para  $p \in \Sigma^s$  tem-se  $\psi_Z(t, p) = \psi_{\bar{Z}}(t, p)$ , com  $t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$  e  $\psi_Z(t, p)$  pode ser igual a  $\psi_X(t, p)$ ,  $\psi_Y(t, p)$  ou  $\psi_{\bar{Z}}(t, p)$  para  $t \in I_p \cap \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$ . Caso  $p \in \Sigma^e$  temos a mesma definição, mas com o tempo revertido.
- Para  $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$  tal que as definições de trajetórias para pontos em  $\Sigma$  por ambos os lados de  $p$  pode ser estendida para  $p$  e coincidam. A trajetória passando por  $p$  é esta trajetória.

Definido o que entende-se por trajetória em um sistema de Filippov, conseguimos definir o que vem a ser uma órbita.

**Definição 1.1.8.** Dado  $p \in U \subset \mathbb{R}^3$ , definimos a órbita local do ponto  $p$  como

$$\gamma(p) = \{\psi_Z(t, p) | t \in I_p\}.$$

Agora, vamos definir as **singularidades** do campo  $Z$ .

**Definição 1.1.9.** Dizemos que  $p \in U$  é ponto singular do campo  $Z = (X, Y)$ , se  $p$  verifica alguma das propriedades a seguir:

1. Os pontos singulares do campo  $X$  (resp.  $Y$ ) tais que  $p \in U \cap \{h(p) > 0\}$  (resp.  $p \in U \cap \{h(p) < 0\}$ ), ou seja, os pontos onde  $X(p) = 0$  (resp.  $Y(p) = 0$ ), com  $h(p) > 0$  (resp.  $h(p) < 0$ ).
2. Os pontos de tangência de  $X$  ou  $Y$ , isto é, os pontos onde  $Xh(p) = 0$  ou  $Yh(p) = 0$ .
3. Os pontos de equilíbrio do campo  $\tilde{Z}$ , ou seja, os pseudo-equilíbrios de  $Z$ .

Todos os demais pontos são ditos pontos regulares do campo  $Z$ .

**Definição 1.1.10.** Sejam  $X, Y \in \Omega^r$ . Dizemos que  $X$  e  $Y$  são  $\Sigma$ -equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : U \rightarrow U$  satisfazendo  $h(\Sigma_X) = \Sigma_Y$  e que leva órbitas de  $X$  em órbitas de  $Y$ .

## 1.2 Sistemas Estendidos de Chebyshev

Seja  $\mathcal{G} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  um conjunto ordenado de  $n + 1$  funções reais de classe  $\mathcal{C}^r$ , com  $r \geq n$ , no intervalo fechado  $[a, b]$ . Considere  $Span(\mathcal{G})$ , o espaço das funções

geradas por combinações lineares das funções de  $\mathcal{G}$  e denote por  $Z(\mathcal{G})$  o número máximo de zeros contando as multiplicidades que uma função não trivial pertencente a  $\text{Span}(\mathcal{G})$  pode ter. Isto é, dado  $f \in \text{Span}(\mathcal{G})$ , tal que  $f(x) = \sum_{i=0}^n b_i f_0(x)$ , onde  $b_i \in \mathbb{R}$  para todo  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e algum  $b_i \neq 0$ , tem-se no intervalo  $[a, b]$  que  $f$  possui no máximo  $Z(\mathcal{G})$  zeros, incluindo as multiplicidades. Essa teoria é amplamente utilizada no estudo de zeros de funções, sendo uma ferramenta clássica nessa área. Nesta teoria, quando  $Z(\mathcal{G}) \leq n$ , dizemos que o conjunto  $\mathcal{G}$  é um **sistema estendido de Chebychev** no intervalo  $[a, b]$ . Além disso, dizemos que  $\mathcal{G}$  é um **sistema estendido completo de Chebychev** se, e somente se, para todo  $k$ , com  $0 \leq k \leq n$ , tem-se que  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k\}$  é um sistema estendido de Chebychev.

**Teorema 1.1.** *Seja  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  um conjunto ordenado de funções reais, tal que  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{C}^n[a, b]$ . Então  $\mathcal{G} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  é um sistema estendido completo de Chebychev se, e somente se, qualquer  $F \in \text{Span}(\mathcal{G})$  não trivial possui no máximo  $n$  zeros, contando as multiplicidades, i.e.  $Z(\mathcal{G}) = n$ .*

A seguir apresentaremos a definição de Wronskiano.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  um conjunto ordenado de  $n+1$  funções. Defina-se wronskiano das funções  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  por*

$$W_n(t) = W(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)(t) = \det(M(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)(t)),$$

onde

$$M(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)(t) = \begin{pmatrix} f_0(t) & f_1 & \cdots & f_n(t) \\ f_0'(t) & f_1' & \cdots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_0^{(n)}(t) & f_1^{(n)}(t) & \cdots & f_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

É possível caracterizar um sistema estendido completo de Chebychev a partir dos Wronskianos das funções que o compõem. Sendo assim, apresentamos o seguinte resultado.

**Teorema 1.2.** *Seja  $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  um conjunto de funções reais, tal que as funções  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{C}^n[a, b]$ . Então  $\mathcal{G} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  é um sistema estendido completo de Chebychev se, e somente se, para todo  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  e todo  $t \in [a, b]$ , temos  $W_k(t) \neq 0$ .*

Recentemente, em (GUARDIA; SEARA; TEIXEIRA, 2011), os autores conseguiram obter uma cota superior para  $Z(\mathcal{G})$  se algum dos Wronskianos da família possui algum zero isolado. Nesse sentido, surge o seguinte resultado.

**Teorema 1.3.** *Seja  $\mathcal{G} = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  seja um conjunto ordenado de funções reais em  $[a, b]$ . Suponha que todos os wronskianos  $W_s(t) \neq 0$ ,  $s = 0, 1, \dots, n-1$ , exceto  $W_n(t)$ , que tem exatamente um zero em  $(a, b)$  e este zero é simples. Então, o número de zeros isolados para cada elemento de  $\text{Span}(\mathcal{G})$  não excede  $n+1$ . Além disso, para qualquer configuração de  $m \leq n+1$  zeros existe  $F \in \text{Span}(\mathcal{G})$  satisfazendo isso.*

Para os leitores que tiverem interesse em se aprofundar na teoria podem consultar (NOVAES; TEIXEIRA, 2019) e (KARLIN; STUDDEN, 1966). Não é o intuito do nosso trabalho demonstrar os resultados apresentados a respeito da Teoria de Chebyshev. No entanto, apresentaremos a seguir um exemplo para ilustrar a aplicação dos resultados apresentados.

**Exemplo 1.4.** *Considere as funções reais  $f_0(t) = e^{\lambda_1 t}$ ,  $f_1(t) = e^{\lambda_2 t}$ ,  $f_2(t) = e^{\lambda_3 t}$  definidas no intervalo  $[0, c]$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Defina o conjunto ordenado de funções*

$$\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2\}.$$

Observe que:

- As funções  $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^r[0, c]$ , para qualquer  $r, c \in \mathbb{R}$ .
- Os Wronskianos do conjunto  $\mathcal{F}$  são dado por:

$$\begin{aligned} W_0(t) &= e^{\lambda_1 t} \\ W_1(t) &= (\lambda_2 - \lambda_1)e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ W_2(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \left( -e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \right). \end{aligned}$$

Deste modo, para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \neq \lambda_3$  os Wronskianos são não nulos para todo  $k$ , com  $0 \leq k \leq 2$ , então pelos Teoremas 1.1 e 1.2,  $\mathcal{F}$  é um sistema estendido completo de chebychev em  $[0, c]$  temos os wronskianos não nulos e  $Z(G)$  é no máximo 2, nesse intervalo, contando as multiplicidades.

**Exemplo 1.5.** *Considere as funções reais  $f_0(t) = 1$ ,  $f_1 = e^{\lambda_1 t}$ ,  $f_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ ,  $f_3(t) = e^{\lambda_3 t}$  definidas no intervalo  $[0, c]$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Defina o conjunto ordenado de funções*

$$\mathcal{F} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}.$$

Observe que:

- As funções  $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^r[0, c]$ , para qualquer  $r, c \in \mathbb{R}$ .
- Os Wronskianos do conjunto  $\mathcal{F}$  são dado por:

$$\begin{aligned} W_0(t) &= 1 \\ W_1(t) &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \\ W_2(t) &= (\lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2) e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)} \\ W_3(t) &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2) e^{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}. \end{aligned}$$

Deste modo, para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \neq \lambda_3$  os Wronskianos são não nulos para todo  $k$ , com  $0 \leq k \leq 3$ , então pelos Teoremas 1.1 e 1.2,  $\mathcal{F}$  é um sistema estendido completo de chebychev em  $[0, c]$  temos os wronskianos não nulos e  $Z(G)$  é no máximo 3, nesse intervalo, contando as multiplicidades.

**Exemplo 1.6.** Considere as funções reais  $f_0(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)}$ ,  $f_1(t) = e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)}$ ,  $f_2(t) = e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)}$ ,  $f_3(t) = e^{\lambda_2 t}$  e  $f_4(t) = e^{\lambda_3 t}$  definidas no intervalo  $[0, c]$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Defina o conjunto ordenado de funções

$$G = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4\}.$$

Observe que:

- As funções  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{C}^r[0, c]$ , para quaisquer  $r, c \in \mathbb{R}$ .
- Os Wronskianos do conjunto  $G$  são dados por:

$$\begin{aligned} W_0(t) &= e^{\lambda_1 t} + e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} \neq 0; \\ W_1(t) &= e^{t(\lambda_1 + \lambda_3)} \left( (\lambda_1 - \lambda_2)e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} + \lambda_3 e^{\lambda_1 t} \right); \\ W_2(t) &= (\lambda_2 - \lambda_3)e^{t(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \left( \lambda_2 \lambda_3 e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} \right); \\ W_3(t) &= a\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)e^{t(2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3)} \left( (\lambda_1 - \lambda_3)e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} + \lambda_2 e^{\lambda_1 t} \right); \\ W_4(t) &= -ab\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)^2 e^{2t(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \left( e^{\lambda_1 t} + e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} \right). \end{aligned}$$

onde  $a = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$  e  $b = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$ .

Deste modo, segue que para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_3$  e  $\lambda_2 \neq \lambda_3$  os Wronskianos são não nulos para todo  $k$ , com  $0 \leq k \leq 4$ , então pelos Teoremas 1.1 e 1.2,  $G$  é um sistema estendido completo de Chebychev em  $[0, c]$  e  $Z(G)$  é no máximo 4, nesse intervalo, contando as multiplicidades. Caso contrário,  $G$  não é um sistema estendido completo de Chebychev em  $[0, c]$ .

A seguir apresentamos um exemplo de um conjunto ordenado de funções que não é um sistema estendido completo de Chebychev.

**Exemplo 1.7.** Considere as funções reais  $f_0(t) = 1$ ,  $f_1(t) = \sin t$  e  $f_2(t) = \cos t$  definidas no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Defina o conjunto de funções

$$G = \{f_0, f_1, f_2\}.$$

Observe que:

- As funções  $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^r[0, \pi]$ , para qualquer  $r \in \mathbb{R}$ .

- Os Wronskianos do conjunto  $G$  são dados por:

$$W_0(t) = 1;$$

$$W_1(t) = \cos t;$$

$$W_2(t) = -1.$$

Note que,  $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$  e  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Logo, para  $t = \frac{\pi}{2}$  temos  $W_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e portanto,  $G$  não é um sistema estendido completo de Chebychev.

## 2 Conexão de Shilnikov Deslizante em $\mathbb{R}^3$

Nesse capítulo, apresentamos o nosso objeto principal de estudo, a **conexão de Shilnikov deslizante** em sistemas de Filippov em  $\mathbb{R}^3$  e resultados relevantes a respeito da temática, para isso estamos nos baseando em (NOVAES; TEIXEIRA, 2019). Nesse sentido, introduzimos a seguir a definição de conexão de Shilnikov deslizante em um campo vetorial suave por partes.

**Definição 2.0.1 ( Conexão de Shilnikov Deslizante).** *Seja  $Z = (X, Y)$  um campo vetorial de Filippov na forma (1.1), que tenha um pseudo sela-foco hiperbólico  $p \in \Sigma^s$  e seja  $q \in \partial\Sigma^s$  um ponto de dobra regular visível de  $Z$  tal que:*

- *A trajetória passada (resp. futura) de  $Z$  começando em  $q$  segue o vetor do campo deslizante  $Z^s$  e converge para  $p$  no tempo passado (resp. no tempo futuro ),*
- *a trajetória futura (resp. passada) de  $Z$  começando em  $q$  intercepta a superfície de descontinuidade apenas em um ponto e atinge  $p$  em um tempo finito  $t_0 > 0$  (resp.  $t_0 < 0$ ).*

*Então, entre  $p$  e  $q$ , um loop deslizante  $\Gamma$  é facilmente caracterizado. Chamamos  $\Gamma$  de **órbita deslizante de Shilnikov** ou **conexão de Shilnikov deslizante** (ver Figura 8).*

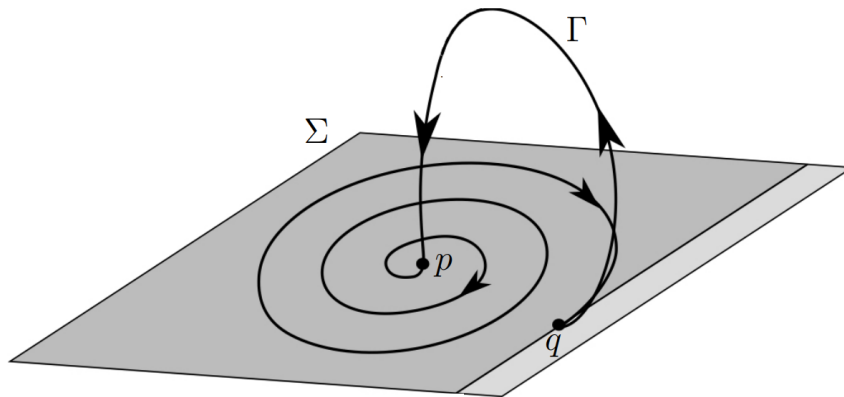


Figura 8 – Conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma$  conectando um pseudo sela-foco hiperbólico  $p$  a si mesmo.

Apresentaremos os dois principais resultados sobre a conexão de Shilnikov deslizante, que se encontram em (NOVAES; TEIXEIRA, 2019). Para a demonstração dos resultados que

apresentaremos a seguir, precisaremos de duas proposições, nas quais assumiremos que o campo  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  possui uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  conectando os pontos  $q_0 \in \partial\Sigma^s$  e  $p_0 \in \Sigma^s$ , onde  $q_0$  pseudo sela-foco hiperbólico e  $p_0$  é uma dobra visível regular de  $Z_0$ . Além disso, sem perda de generalidade, é possível assumir que  $h(x, y, z) = z$ . Temos as seguintes proposições.

**Proposição 2.1.** *Seja  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  um campo de vetores, como definido em (1.1), que possui uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  conectando os pontos  $q_0 \in \partial\Sigma^s$  e  $p_0 \in \Sigma^s$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Então ocorre que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno pode-se definir a região  $\gamma_\epsilon = \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap \partial\Sigma^s$  tal que a trajetória passada de  $\widehat{Z}_0$  começando em qualquer ponto de  $\gamma_\epsilon$  converge para  $p_0$ .*

Para demonstrarmos a proposição precisamos da definição de bacia de atração e do Teorema de Hartman-Grobman.

**Definição 2.0.2** (Bacia de Atração de um campo vetorial). *Sejam  $\zeta_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do campo  $X \in C^1(U)$  e  $\psi : \Omega \rightarrow U$  o fluxo de  $X$ . Uma bacia de atração de  $\zeta_0$ ,  $A(\zeta_0)$ , é o conjunto*

$$A(\zeta_0) = \left\{ \zeta \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, \zeta) = \zeta_0 \right\}.$$

**Teorema 2.1** (Hartman-Grobman). *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças  $V$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X$  restrito a  $V$  é topologicamente conjugado a  $dX(p)$  restrito a  $W$ .*

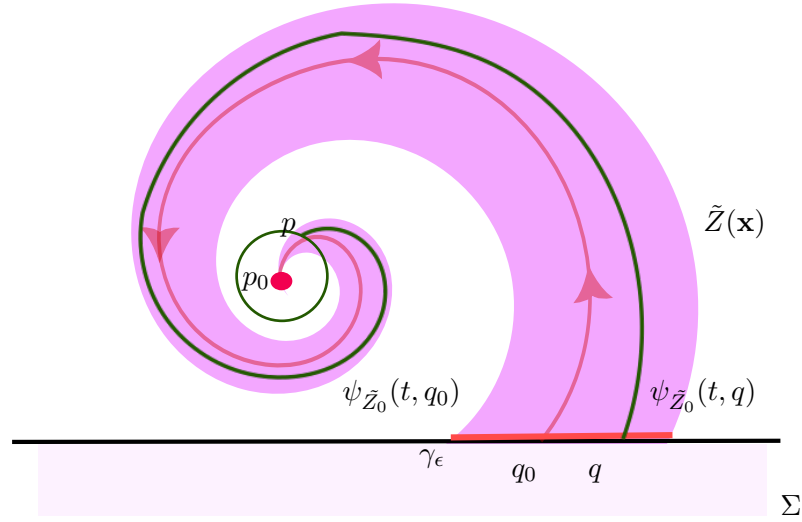
Em posse desses dois resultados vamos à demonstração da proposição.

*Demonstração.* Como  $h(x, y, z) = z$ , segue que o campo deslizante normalizado  $\widehat{Z}_0$  associado ao campo  $Z_0$  é um campo de vetores definido sobre o plano  $z = 0$ . Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\widehat{Z}_0$  é um campo de vetores em  $\mathbb{R}^2$ , desconsiderando a última coordenada, que será identicamente zero. Reparametrizando o tempo por  $t \rightarrow -t$ , obtemos o campo  $\widetilde{Z}_0 = -\widehat{Z}_0$ , que é orbitalmente equivalente a  $\widehat{Z}_0$ , alterando apenas a orientação das órbitas. Como  $p_0$  é um foco hiperbólico repulsor do campo  $\widehat{Z}_0$ , segue que  $p_0$  é um tipo foco atrator de  $\widetilde{Z}_0$ . E já que o campo  $Z_0$  exibe uma conexão de Shilnikov deslizante conectando  $p_0$  com  $q_0$ , segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{\widetilde{Z}_0}(t, q_0) = p_0,$$

ou seja,  $q_0$  está na bacia de atração de  $p_0$  para  $\widetilde{Z}_0$ , i.e.,  $q_0 \in A(p_0)$ . A Figura 10, ilustra graficamente o que seria a imagem do seguimento  $\gamma_\epsilon$  entrando na bacia de atração.

Pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^2$  de  $p_0$  tal que o campo  $\widetilde{Z}_0$  é transversal à fronteira de  $V$ ,  $\partial V$ . Mais ainda, é possível assumir que


 Figura 9 – Representação da imagem de  $\gamma_\epsilon$  por  $\psi_{\tilde{Z}_0}$ .

$V \cup \partial V \subset \Sigma^s$ . Como  $q_0 \in A(p_0)$  existe  $t(q_0) \in \mathbb{R}$ , com  $t(q_0) > 0$  tal que  $\psi_{\tilde{Z}_0}(t(q_0), q_0) \in \partial V$ . Assim pelo Teorema da Função Implícita e usando o fato de que o campo  $\tilde{Z}_0$  é transversal a: (i)  $\partial V$  em  $\psi_{\tilde{Z}_0}(t(q_0), q_0)$  e (ii)  $S_X = \partial \Sigma^s$  em  $p_0$ , segue que existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $q \in \gamma_\epsilon = \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap \partial \Sigma^s$ , existe  $t(q) \in \mathbb{R}$ , com  $t(q) > 0$ , satisfazendo  $p = \psi_{\tilde{Z}_0}(t(q), q) \in \partial V$  e  $\tilde{Z}_0$  é transversal a  $\partial V$  em  $p \in \partial V$ . Assim, cada órbita do campo  $\tilde{Z}_0$  começando em  $\gamma_\epsilon = \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap \partial \Sigma^s$  intersecta transversalmente a fronteira de  $V$  e, já que o campo deslizante é transversal à fronteira de  $V$  e  $p_0$  está na bacia de atração, segue que cada uma dessas trajetórias é atraída a  $p_0$ , ou seja, está na bacia de atração de  $p_0$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 2.2.** *Seja  $Z_0 = (X_0, Y_0)$  um campo de vetores, como definido em (1.1) que possui uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  conectando os pontos  $q_0 \in \partial \Sigma^s$  e  $p_0 \in \Sigma^s$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Então, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno pode-se definir a região  $\gamma_\epsilon = \overline{B_\epsilon(q_0)} \cap \partial \Sigma^s$  tal que a trajetória de  $X_0$  saindo de um ponto em  $\gamma_\epsilon$  chega transversalmente em  $\Sigma$  em uma curva  $\nu_\epsilon$ .*

Para demonstrarmos a proposição precisamos recapitular o Teorema da Função Implícita.

**Teorema 2.2** (Teorema da Função Implícita). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Se um ponto  $p = (x_0, y_0) \in U$  é tal que  $f(p) = c$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ , então existem uma bola aberta  $B = B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$  e um intervalo  $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$  tais que  $f^{-1}(c) \cap (B \times J)$  é o gráfico de uma função  $\eta : B \rightarrow J$ , de*

classe  $C^k$ . Para todo  $x \in B$ , tem-se

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \eta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta(x))},$$

com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Agora, temos a ferramenta necessária para prosseguir com a demonstração.

*Demonstração.* Para demonstrar a proposição, utilizaremos o Teorema da Função Implícita. Dito isso, defina a função  $g$  dada por:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \gamma_\epsilon &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto g(t, x) = h(\psi_{X_0}(t, x)), \end{aligned}$$

onde  $h(x, y, z) = z$  e  $\psi_{X_0}(t, x)$  é a trajetória do campo  $X_0$  passando pelo ponto  $x \in \gamma_\epsilon$ . Cabe ressaltar que a função  $g$  é de classe  $C^1$ , uma vez que  $h, \psi_{X_0} \in C^1$ . Além disso, observe que existe um  $t_0 > 0$  finito, tal que  $\psi_{X_0}(t_0, q_0) = p_0$ , pois o campo  $Z_0$  admite uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  conectando os pontos  $q_0 \in \partial\Sigma^s$  e  $p_0 \in \Sigma^s$ .

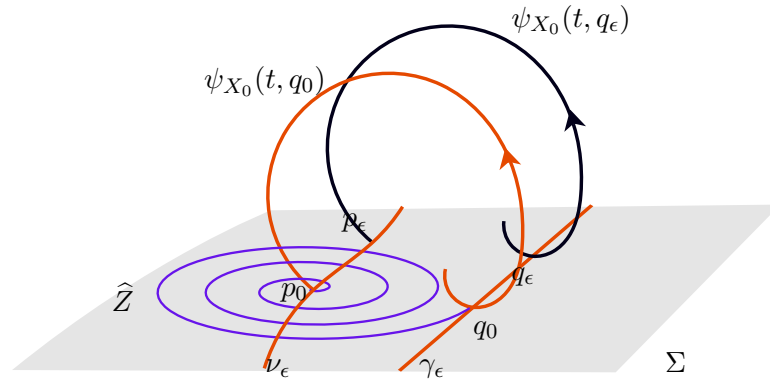


Figura 10 – Representação da bacia de atração.

Assim, temos:

$$g(t_0, q_0) = h(\psi_{X_0}(t_0, q_0)) = h(p_0) = 0$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, q_0) = \langle \nabla h(\psi_{X_0}(t_0, q_0)), X_0(\psi_{X_0}(t_0, q_0)) \rangle = \langle \nabla h(p_0), X_0(p_0) \rangle \neq 0,$$

pois  $p_0 \notin \Sigma^t$ .

Deste modo, segue que:

$$\begin{cases} g(t_0, q_0) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial t}(t_0, q_0) \neq 0. \end{cases}$$

Portanto,  $g$  está nas condições do Teorema da Função Implícita. Sendo assim, existem  $V \subset \mathbb{R}$  e  $W \subset \mathbb{R}^n$  vizinhanças abertas de  $t_0$  e  $q_0$ , respectivamente, e uma aplicação  $\alpha$ , tais que existe:

$$\begin{aligned} \alpha : W &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto \alpha(x) = t, \end{aligned}$$

Assim, temos  $g(\alpha(x), x) = h(\psi_{X_0}(\alpha(x), x)) = 0$ . Logo, para um tempo futuro, a trajetória de  $X_0$  começando em  $\gamma_\epsilon$  está em  $\Sigma$ . Assim, conseguimos construir a curva  $\nu_\epsilon$  em  $\Sigma$ , que será dada por  $\nu_\epsilon = \{\psi_{X_0}(\alpha(x), x) : x \in W\}$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

**Teorema 2.3.** *Assuma que  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r$ , com  $r \geq 1$  tenha uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  e seja  $W \subset \Omega^r$  uma vizinhança de  $Z_0$ . Então, existe uma função de classe  $C^1$ ,  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  tendo 0 como valor regular tal que  $Z \in W$  tem uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma$  se, e somente se,  $g(Z) = 0$ . Além disso, qualquer vizinhança  $W \in \Omega^r$  de  $Z_0$  contém infinitas classes de  $\Sigma$ -equivalência de campos de vetores de Filippov.*

*Demonstração.* Queremos mostrar que existe uma função

$$g : W \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que  $g \in C^1$  e 0 é um valor regular de  $g$  de modo que  $Z \in W$  tem uma conexão de Shilnikov deslizante se, e somente se,  $g(Z) = 0$ .

Assumindo que em um sistema de coordenadas local adequado  $(x, y)$  em torno de  $p_0 \in \Sigma^s$ ,  $\nu_\epsilon$  é expresso pelo gráfico de  $y = 0$ , isto é,  $\nu_\epsilon = \{(x, 0, 0) : -\epsilon \leq x \leq \epsilon\}$ . Então para  $Z \in W$ , tem-se  $\nu_\epsilon^Z = \{(x, y, 0) : -\epsilon \leq x \leq \epsilon\}$ , onde  $y = k_Z(x) = a_0^Z + a_1^Z x + \mathcal{O}_2(x)$ , com  $a_0^Z$  e  $a_1^Z$  parâmetros satisfazendo  $a_0^{Z_0} = a_1^{Z_0} = 0$ . Denotaremos o pseudo-equilíbrio de  $Z$  por  $p_Z = (x_Z, y_Z, 0)$ .

Dito isso, defina

$$\begin{aligned} g : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Z &\longmapsto k_Z(x_Z) - y_Z. \end{aligned}$$

Pela definição de  $g$ , temos  $g \in C^1$  e  $g(Z_0) = 0$ . Vamos provar que o 0 é um valor regular de  $g$ . Seja  $Z \in W$  tal que  $g(Z) = 0$ . Tome  $Z(v) \subset \Omega^r$  uma curva suave com  $p_{Z(v)} = (0, 0, 0)$  e satisfazendo

$$\begin{cases} Z'(0) = V; \\ Z(0) = Z; \end{cases}$$

com  $V \in \Omega^r$ . Assim, temos

$$\frac{d}{dv}g(Z(0)) = g'(Z(0)) \cdot Z'(0)$$

e

$$\frac{d}{dv}g(Z(0)) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{g(Z(v)) - g(Z(0))}{v}.$$

Note que,  $k_{Z(v)}(x_{Z(v)}) = a_0^{Z(v)}$ , pois  $x_{Z(v)} = 0$  e podemos tomar  $a_0^{Z(v)} = v$  e como  $Z(0) = Z$ ,  $g(Z) = 0$ , então temos

$$\frac{d}{dv}g(Z(0)) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{g(Z(v))}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v}{v} = 1.$$

Portanto, 0 é um valor regular de  $g$ .

Por fim, seja  $Z_\mu$  uma curva geradora da conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$ . Como o pseudo-equilíbrio  $p_{Z_\mu}$  não está em  $v_\epsilon^{Z_\mu}$  para  $\mu \neq 0$  temos  $\cup \{\psi_{Z_0}(-t, x) : x \in \gamma_\epsilon^\mu\}$  intersepta  $v_\epsilon^\mu$  um número  $N(\mu)$  de intervalos disjuntos. Se dados dois campos  $Z_1$  e  $Z_2$  são topologicamente equivalentes, então  $\gamma_\epsilon^{Z_1}$  e  $v_\epsilon^{Z_1}$  são enviados em  $\gamma_\epsilon^{Z_2}$  e  $v_\epsilon^{Z_2}$ , respectivamente. Logo, se  $Z_1$  e  $Z_2$  são equivalentes, então  $N(\mu_1) = N(\mu_2)$ . Além disso, quando  $\mu \rightarrow 0$ , tem-se  $N(\mu) \rightarrow \infty$ , o que prova a existência de infinitas classes de  $\Sigma$ -equivalência de campos de vetores de Filippov.  $\square$

**Teorema 2.4.** *Assuma que  $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega^r$ , com  $r \geq 1$  tenha uma conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  e seja  $Z_\mu = (X_\mu, Y_\mu) \in \Omega^r$  a curva geradora de  $\Gamma_0$ . Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

- a) *Para  $\mu = 0$ , toda vizinhança  $G \subset \mathbb{R}^3$  de  $\Gamma_0$  contém infinitas órbitas 1-periódicas de  $Z_0$ .*
- b) *Seja  $G \subset \mathbb{R}^3$  uma vizinhança suficientemente pequena de  $\Gamma_0$ . Então, para cada  $|\mu| \neq 0$  suficientemente pequeno,  $G$  contém pelo menos um número finito  $N(\mu) > 0$  de órbitas 1-periódicas de  $Z_\mu$ . Além disso,  $N(\mu) \rightarrow \infty$ , quando  $\mu \rightarrow 0$ .*

Antes de demonstrarmos o teorema precisamos resgatar o Teorema do Ponto Fixo de Brower e a definição de saturação.

**Definição 2.0.3.** *Seja  $f : D \rightarrow Y$  uma função e  $C \subset D$  um subconjunto qualquer do domínio. Dizemos que  $C$  é  $f$ -saturado caso satisfaça uma das seguintes equivalências:*

- $C = f^{-1}(f(C))$ ;
- Se  $c \in C$  e  $x \in D$  satisfazem  $f(x) = f(c)$ , então  $x \in C$ ;
- Se  $y \in Y$  é tal que  $f^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset$ , então  $f^{-1}(y) \subseteq C$ .

Para campos vetoriais, defini-se a saturação de um conjunto  $C$  como sendo a reunião de todas as órbitas que intersectam o conjunto  $C$ . Podemos definir saturação passada e saturação futura de um conjunto como podemos observar na seguinte definição:

**Definição 2.0.4.** *Sejam  $Z$  um campo de vetores e  $\phi$  seu fluxo. Se  $C$  é um subconjunto do domínio de  $Z$ , então*

a) a saturação futura do subconjunto  $C$  é o conjunto  $\bigcup_{t \geq 0} \{\phi(t, x) : x \in C\}$ .

b) a saturação passada do subconjunto  $C$  é o conjunto  $\bigcup_{t \leq 0} \{\phi(t, x) : x \in C\}$ .

**Definição 2.0.5** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). *Seja  $S$  uma bola unitária fechada no  $\mathbb{R}^n$ , com  $n > 1$ . Então qualquer função contínua  $f : S \rightarrow S$  possui ao menos um ponto fixo.*

*Demonstração.* Começaremos demonstrando o item (a). Para isso assumiremos  $\mu = 0$  e mostraremos que existem infinitas órbitas periódicas de  $Z_0$ . Seja  $S_\epsilon$  a saturação passada dos pontos de  $\gamma_\epsilon^{Z_0^s}$  pelo campo deslizante,  $Z_0^s$ . Como, no passado, as órbitas do campo deslizante são atraídas para o foco  $p_0$ , então podemos definir

$$S_\epsilon \cap \nu_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,$$

onde cada  $I_i$  representa um intervalo no qual  $S_\epsilon$  interceptou  $\nu_\epsilon$  e satisfazem  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ . Caso contrário, existiria  $p \in I_i \cap I_j$ , daí existiria  $x \in \gamma_\epsilon^{Z_0^s}$  e tempos positivos  $t_i$  e  $t_j$  tais que  $\psi_{Z_0^s}(t_i, x) = p$  e  $\psi_{Z_0^s}(t_j, x) = p$ . Podemos supor que  $t_j < t_i$ , uma vez que  $i \neq j$ . Assim, segue que  $\psi_{Z_0^s}(t_j - t_i, p) = p$ . Logo,  $p$  pertence a uma órbita periódica ou  $p$  é um ponto singular, ambas as possibilidades não ocorrem. Portanto, temos  $I_i \cap I_j = \emptyset$ . Pela Proposição 2.1, os intervalos  $I_i$  se acumulam entorno do ponto  $p_0$ , visto que os pontos de  $\gamma_\epsilon^{Z_0^s}$  tendem a  $p_0$  no passado. Além disso, cada intervalo  $I_i$  é compacto. Seja  $S_{\epsilon(I_i)}$  a saturação passada de  $I_i$  pelo campo  $X$ . Assim, podemos definir

$$S_{\epsilon(I_i)} \cap \gamma_\epsilon = J_i,$$

onde cada  $J_i$  representa uma vez que  $S_{\epsilon(I_i)}$  interceptou  $\gamma_\epsilon$  e satisfazem  $J_i \cap J_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , isso é consequência de  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  e  $J_i \rightarrow q_0$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Vamos construir uma sequência de aplicações  $(\phi_i)_{i=1}^{\infty}$ , tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$  tem-se  $\phi_i : J_i \rightarrow J_i$ .

Estamos interessados nos pontos fixos de cada  $\phi_i$ . Para isso, considere  $\xi \in J_i$ , daí existem  $t_i^s(\xi) < 0$  e  $t_i^X(\xi) < 0$  tais que  $\xi_i(\xi) = \psi_{Z_0^s}(t_i^s(\xi), \xi) \in I_i$  e  $\psi_X(t_i^X(\xi), \xi_i(\xi)) \in J_i$ . Assim, podemos definir  $\phi_i(\xi) = \psi_X(t_i^X(\xi), \xi_i(\xi))$ . Deste modo, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , tem-se  $\phi_i(\xi) = \psi_X(t_i^X(\xi), \xi_i(\xi))$  é uma função  $C^r$ , com  $r \leq 1$ , pois  $\psi_X$  e  $\psi_{Z_0^s}$  são de classe  $C^r$ , com  $r \leq 1$ . Como  $\phi_i$  é contínua e  $J_i$  é compacto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer,  $\phi_i$

admite um ponto fixo em  $J_i$ . Isto é, existe  $q_i \in J_i$  tal que  $\phi_i(q_i) = q_i$ . Deste modo, podemos construir uma sequência de pontos  $(q_i)_{i=1}^\infty$ , tais que  $\psi_i(q_i) = q_i$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Além disso, os pontos fixos de  $\phi_i$  descrevem as órbitas do campo  $Z_0^s$ . Sendo assim, concluímos que  $Z_0$  possui infinitas órbitas deslizantes periódicas e concluímos a demonstração do item (a). Observe que, para  $\mu \neq 0$  não temos a conexão, em outras palavras, o pseudo-equilíbrio  $p_\mu \notin \nu_\epsilon^\mu$ . Seja  $G$  uma vizinhança suficientemente pequena de  $\Gamma_0$ . Daí,  $S_\epsilon$  intercepta  $\nu_\epsilon^\mu \cap G$  uma quantidade finita de vezes,  $N(\mu)$ . Assim, segue que

$$S_\epsilon \cap \nu_\epsilon \cap G = \bigcup_{i=1}^{N(\mu)} I_i,$$

onde  $I_i \cap I_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , com  $i \in \{1, \dots, N(\mu)\}$ . Análogo a construção do item (a), teremos

$$S_{\epsilon(I_i)} \cap \gamma_\epsilon^\mu \cap G = J_i,$$

com  $i \in \{1, \dots, N(\mu)\}$ . Assim, realizando a mesma análise que fizemos para o item (a), segue que a quantidade de pontos fixos de  $\phi_i$  é finita, sendo dada pela sequência  $(q_i)_{i=1}^{N(\mu)}$ . Isso é consequência do fato de  $N(\mu) > 0$  ser finito. Logo, para  $\mu \neq 0$ ,  $G$  possui pelo menos uma quantidade finita,  $N(\mu)$ , de órbitas periódicas de  $Z_\mu$ .  $\square$

### 3 Conexão de Shilnikov Deslizante em Sistemas de Filippov Lineares por Partes

Nesse capítulo, apresentaremos o principal resultado deste trabalho, que consiste em provar que uma família de sistemas  $Z_\mu(\mathbf{x})$ , possui a conexão de Shilnikov deslizante. Cabe ressaltar que, esse é um resultado novo fruto desse trabalho. Além disso, apresentamos um exemplo numérico de um sistema que se enquadra nas hipóteses do nosso teorema.

#### 3.1 Conexão de Shilnikov deslizante em uma Família de Sistemas a um Parâmetro.

Considere um sistema de equações diferenciais suave por partes em  $\mathbb{R}^3$  da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = Z_\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x}^\top = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $h_\mu(\mathbf{x}) = z - \mu$ ,

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{e } Y(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

com  $c_1, c_2, c_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_3$ . Observe que a variedade de comutação do sistema (3.1) é  $\Sigma_\mu = \{(x, y, \mu) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Hipótese H1** Os parâmetros  $c_1, c_2, c_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  verificam as seguintes propriedades:

- $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_2 > 0, c_3 > 0$ ;
- $-\frac{(c_3(\lambda_1 - \lambda_2) + c_2(\lambda_3 - \lambda_1))^2}{4c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} < c_1 < \frac{c_3\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) + c_2(\lambda_1 - 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$ ;
- $\frac{c_3(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_3} < c_2 < \frac{c_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3}$ .

**Hipótese H2** A função  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  está bem definida

e possui um zero positivo, onde

$$f_1(t) = \frac{c_1 \lambda_1 \lambda_3}{-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_2 t} (\lambda_3 + \lambda_1 (e^{\lambda_3 t} - 1) - \lambda_3 e^{\lambda_1 t})}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t}}$$

e

$$f_2(t) = \frac{c_1 \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2)} + \frac{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3)(-e^{t(\lambda_1 + \lambda_3)}) + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)((\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t})} + \frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} + \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)}}{(\lambda_1 - \lambda_3)((\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t})} + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)((\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t})}.$$

**Teorema 3.1.** *Se o sistema (3.1) satisfaz as hipóteses (H1) e (H2), então para  $\mu > 0$ , o campo  $Z_\mu(\mathbf{x})$  admite uma conexão de Shilnikov deslizante.*

## 3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Para demonstrar o Teorema 3.1, é necessário apresentar alguns resultados e proposições auxiliares. Nesse contexto, a próxima proposição aborda a configuração as regiões de Filippov associadas à variedade de comutação  $\Sigma_\mu$  do sistema (3.1).

**Proposição 3.1** (Regiões de Filippov). *Para  $\mu \in \mathbb{R}$ , as regiões na variedade de comutação  $\Sigma_\mu$  associadas à convenção de Filippov para o sistema (3.1) são dadas por:*

1. **Região de Costura:**  $\Sigma_\mu^c = \left\{ (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu \mid y > \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\};$
2. **Região de Escape:**  $\Sigma_\mu^e = \emptyset;$
3. **Região de Deslize:**  $\Sigma_\mu^s = \left\{ (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu \mid y < \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\};$
4. **Região de Tangência:**  $\Sigma_\mu^t = S_X = \left\{ \left( x, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right) \in \Sigma_\mu \right\}.$

*Demonstração.* Considerando o sistema (3.1) e a função  $h_\mu(\mathbf{x}) = z + \mu$ , as derivadas de Lie da função  $h_\mu$  ao longo dos campos  $X$  e  $Y$  são dadas por

$$Xh_\mu(\mathbf{x}) = \langle X(\mathbf{x}), \nabla h_\mu(\mathbf{x}) \rangle \quad \text{e} \quad Yh_\mu(\mathbf{x}) = \langle Y(\mathbf{x}), \nabla h_\mu(\mathbf{x}) \rangle,$$

onde  $\nabla h(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$ . Para  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$ , temos:

$$\begin{aligned} Xh_\mu(\mathbf{x}) &= \langle X(\mathbf{x}), \nabla h_\mu(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \left\langle \left( \lambda_2 x, -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)} x + \lambda_1 y, (\lambda_1 - \lambda_3)y + \lambda_3 \mu \right), (0, 0, 1) \right\rangle \\ &= (\lambda_1 - \lambda_3)y - \lambda_3 \mu, \\ Yh_\mu(\mathbf{x}) &= \langle Y(\mathbf{x}), \nabla h_\mu(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle (c_1, c_2, c_3), (0, 0, 1) \rangle \\ &= c_3. \end{aligned}$$

Desta forma, estabelecemos as seguintes relações para  $Xh_\mu(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} Xh_\mu(\mathbf{x}) > 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma_\mu \mid y > \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}, \\ Xh_\mu(\mathbf{x}) < 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma_\mu \mid y < \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}, \\ Xh_\mu(\mathbf{x}) = 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma_\mu \mid y = \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}. \end{aligned}$$

Como  $Yh_\mu(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$ , então a região de costura  $\Sigma_\mu^c$ , a região de deslize  $\Sigma_\mu^s$  e a região de tangência  $\Sigma_\mu^t$  são definidas como segue:

$$\begin{aligned} \Sigma_\mu^c &= \left\{ (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu \mid y > \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}, \\ \Sigma_\mu^s &= \left\{ (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu \mid y < \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}, \\ \Sigma_\mu^t &= S_X = \left\{ (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu \mid y = \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} \right\}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração da proposição.  $\square$

No próximo resultado, determinamos os tipos de tangência do sistema (3.1).

**Proposição 3.2** (Pontos de Tangência Regular). *Se o sistema (3.1) satisfaz a Hipótese **H1**, então para  $\mu \in \mathbb{R}$ , a região de tangência pode ser expressa como*

$$\Sigma_\mu^t = S_X = D_v^\mu \cup D_i^\mu \cup \{c(\mu)\},$$

onde

$$\begin{aligned} D_v^\mu &= \left\{ \left( x, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right) \in \Sigma_\mu : x > \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right\}, \\ D_i^\mu &= \left\{ \left( x, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right) \in \Sigma_\mu : x < \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right\}, \end{aligned}$$

e

$$c(\mu) = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right).$$

Além disso, temos que

1. Se  $\mathbf{x} \in D_v^\mu$ , então  $\mathbf{x}$  é um ponto de dobra visível regular do sistema (3.1).
2. Se  $\mathbf{x} \in D_i^\mu$ , então  $\mathbf{x}$  é um ponto de dobra invisível regular do sistema (3.1).
3. Se  $\mu = 0$ ,  $c(\mu)$  é um ponto singular regular. Caso contrário, ou seja, se  $\mu \neq 0$ , então  $c(\mu)$  é um ponto de cúspide regular.

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2, temos que

$$\Sigma_\mu^t = S_X = \left\{ \left( x, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Logo, é evidente que  $D_v^\mu \cup D_i^\mu \cup \{c(\mu)\}$  é uma partição de  $\Sigma_\mu^t$ . Para provar os itens, observemos que as derivadas de Lie de ordem superior  $X^2 h_\mu$  e  $X^3 h_\mu$  em  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$  são expressas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} X^2 h_\mu(\mathbf{x}) &= (\lambda_1 - \lambda_3) \left( \lambda_1 y - \frac{x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} \right) + \lambda_3 (y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3 \mu), \\ X^3 h_\mu(\mathbf{x}) &= -\lambda_2 x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)) \\ &\quad \left( \lambda_1 y - \frac{x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} \right) + \lambda_3^2 (y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3 \mu). \end{aligned}$$

Em particular, dado  $\mathbf{x} \in S_X^\mu$ , segue que  $\mathbf{x} = \left( x, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right)$ . Assim, temos

$$X^2 h_\mu(\mathbf{x}) = -x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_1 \lambda_3 \mu,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} X^2 h_\mu(\mathbf{x}) &> 0 \text{ se } x > \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_v^\mu, \\ X^2 h_\mu(\mathbf{x}) &< 0 \text{ se } x < \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_i^\mu \\ X^2 h_\mu(\mathbf{x}) &= 0 \text{ se } x = \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} = c(\mu). \end{aligned}$$

Pela hipótese **H1(a)**, garantimos que  $Y h_\mu(\mathbf{x}) > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , isto é,  $S_Y = \emptyset$ . Assim, se  $\mathbf{x} \in D_v^\mu$ , é uma dobra visível regular, e se  $\mathbf{x} \in D_i^\mu$ , é um ponto de dobra invisível. Isso prova os itens (1) e (2).

Agora, observe que se  $\mu = 0$ ,  $X(c(\mu)) = 0$ . Logo, nesse caso,  $c(\mu)$  é um ponto singular regular do campo (3.1). Se  $\mu \neq 0$ ,  $X h_\mu(c(\mu)) = X^2 h_\mu(c(\mu)) = 0$  e

$$\begin{aligned} X^3 h_\mu(c(\mu)) &= -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu \\ &\quad + (\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3) + \lambda_3(\lambda_1 - \lambda_3)) \left( \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_3)} \right) + \lambda_3^2 (\lambda_3 \mu - \lambda_3 \mu) \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu, \end{aligned}$$

pela hipótese **H1(a,b)**, temos  $X^3 h_\mu(c(\mu)) = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu \neq 0$ , para  $\mu \neq 0$ . Além disso, o conjunto

$$\{\nabla h_\mu(c(\mu)), \nabla X h_\mu(c(\mu)), \nabla X^2 h_\mu(c(\mu))\},$$

com

$$\begin{cases} \nabla h_\mu(c(\mu)) = (0, 0, 1); \\ \nabla X h_\mu(c(\mu)) = (0, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_3); \\ \nabla X^2 h_\mu(c(\mu)) = (-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3), \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_3, \lambda_3^2); \end{cases}$$

é linearmente independente, uma vez que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_3)\lambda_3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3),$$

e  $(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0$  pela hipótese **H1(a)**. Logo, o determinante é não nulo e, portanto, o ponto

$$c(\mu) = \left( \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right)$$

é um ponto de cúspide regular, para  $\mu \neq 0$ , que prova o item (c).  $\square$

Após determinarmos a configuração das regiões de Filippov na variedade de comutação  $\Sigma_\mu$  e identificarmos os tipos de tangência, vamos agora estudar a estrutura do campo deslizante associado ao sistema (3.1).

**Proposição 3.3.** *Assumindo que o sistema (3.1) verifica as hipóteses **H1** e **H2**, dado  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$ , os campos deslizante  $\tilde{Z}_\mu(\mathbf{x})$  e deslizante normalizado  $\hat{Z}_\mu(\mathbf{x})$  associados ao sistema (3.1) são dados por:*

$$\tilde{Z}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3 + \lambda_3 \mu - \lambda_1 y + \lambda_3 y} \left( \hat{P}_\mu(x, y), \hat{Q}_\mu(x, y), 0 \right) \quad e \quad (3.2)$$

$$\hat{Z}_\mu(\mathbf{x}) = \left( \hat{P}_\mu(x, y), \hat{Q}_\mu(x, y), 0 \right), \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu(x, y) &= c_1 \lambda_3 \mu + c_1 y (\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_2 x, \\ \hat{Q}_\mu(x, y) &= c_2 \lambda_3 \mu + c_2 y (\lambda_3 - \lambda_1) - \frac{c_3 x (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} + c_3 \lambda_1 y. \end{aligned}$$

Além disso, a projeção do campo deslizante normalizado (3.2) em  $\mathbb{R}^2$  possui um único equilíbrio, que é do tipo foco hiperbólico repulsor, localizado em

$$P_{e\mu} = \left( P_{e\mu_x}, P_{e\mu_y} \right),$$

onde

$$P_{e\mu_x} = \frac{c_1\lambda_1\lambda_3\mu}{c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_2(c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_1)},$$

$$P_{e\mu_y} = \frac{\lambda_3\mu(c_2\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) - c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3))}{(\lambda_1 - \lambda_3)(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_1\lambda_2)}.$$

Portanto, o sistema (3.1) tem um pseudo foco hiperbólico repulsor em  $(P_{e\mu_x}, P_{e\mu_y}, -\mu) \in \Sigma_\mu^s$ .

*Demonstração.* Por definição, o campo deslizante  $\tilde{Z}(\mathbf{x})$  é dado por

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \frac{Yh_\mu(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh_\mu(\mathbf{x})Y(\mathbf{x})}{Yh_\mu(\mathbf{x}) - Xh_\mu(\mathbf{x})},$$

enquanto o campo deslizante normalizado  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  é dado por

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = Yh_\mu(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh_\mu(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}),$$

com  $\mathbf{x}^\top = (x, y, -\mu) \in \Sigma_\mu$ . Observe que,

$$\begin{cases} Yh_\mu(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) = \left( c_3\lambda_2x, c_3\lambda_1y - \frac{c_3x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3}, c_3(y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3\mu) \right) \\ Xh_\mu(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}) = (c_1(y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3\mu), c_2(y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3\mu), c_3(y(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_3\mu)) \\ Yh_\mu(\mathbf{x}) - Xh_\mu(\mathbf{x}) = c_3 + \lambda_3\mu + y(\lambda_3 - \lambda_1). \end{cases}$$

Sendo assim, segue que o campo deslizante é dado por

$$\tilde{Z}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{c_3 + \lambda_3\mu - \lambda_1y + \lambda_3y} \left( \hat{P}_\mu(x, y), \hat{Q}_\mu(x, y), 0 \right),$$

e o campo deslizante normalizado é dado por

$$\hat{Z}_\mu(\mathbf{x}) = \left( \hat{P}_\mu(x, y), \hat{Q}_\mu(x, y), 0 \right),$$

onde

$$\hat{P}_\mu(x, y) = c_1\lambda_3\mu + c_1y(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_2x,$$

$$\hat{Q}_\mu(x, y) = c_2\lambda_3\mu + c_2y(\lambda_3 - \lambda_1) - \frac{c_3x(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} + c_3\lambda_1y.$$

Além disso, sabemos que o ponto de equilíbrio do campo deslizante normalizado é dado por  $P_{e\mu} = (x_0, y_0, -\mu)$  tal que  $\hat{Z}_\mu(x_0, y_0, -\mu) = (0, 0, 0)$ , isto é, que  $\hat{P}_\mu(x_0, y_0) = 0$  e  $\hat{Q}_\mu(x_0, y_0) = 0$ . Assim, para determinarmos o ponto de equilíbrio, basta resolvermos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} c_1\lambda_3\mu + c_1y_0(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_2x_0 = 0, \\ c_2\lambda_3\mu + y_0(c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_1) - \frac{c_3x_0(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} = 0. \end{cases}$$

Deste modo, segue que

$$\begin{cases} x_0 = \frac{c_1 \lambda_1 \lambda_3 \mu}{c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_2(c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1)}, \\ y_0 = \frac{\lambda_3 \mu (c_2 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) - c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3))}{(\lambda_1 - \lambda_3)(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2)}. \end{cases}$$

Denotando  $P_{e\mu_x} = x_0$  e  $P_{e\mu_y} = y_0$ , segue que  $P_{e\mu} = (P_{e\mu_x}, P_{e\mu_y}, -\mu)$  é o ponto de equilíbrio do campo  $\widehat{Z}_\mu(\mathbf{x})$ . Por fim, vamos demonstrar que a projeção do ponto de equilíbrio do campo deslizante normalizado é um pseudo foco hiperbólico repulsor do sistema (3.1). Considere  $Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})$ , a projeção do campo deslizante normalizado em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que, a matriz Jacobiana de  $Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})$  é dada por

$$J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})) = \begin{pmatrix} c_3 \lambda_2 & c_1(\lambda_3 - \lambda_1) \\ -\frac{c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)} & c_3 \lambda_1 + c_2(\lambda_3 - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

onde o traço e o determinante são dados por

$$tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) = c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 + c_3 \lambda_2$$

e

$$\det(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) = c_3(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2),$$

respectivamente. Sabemos que os autovalores da matriz  $J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))$  são

$$\beta_{1,2} = \frac{tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) \pm \sqrt{tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})))^2 - 4 \det(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})))}}{2}$$

e

$$\begin{aligned} tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})))^2 - 4 \det(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) &= (c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2))^2 \\ &\quad - 4c_3(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2). \end{aligned}$$

Pelas hipóteses **H1(c,d)**, temos

$$-\frac{(c_3(\lambda_1 - \lambda_2) + c_2(\lambda_3 - \lambda_1))^2}{4c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} < c_1 < \frac{c_3 \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1) + c_2(\lambda_1 - 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$$

e

$$\frac{c_3(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_3} < c_2 < \frac{c_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) &= c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &> \frac{c_3(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_3}(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= -c_3(\lambda_2 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &= 2c_3 \lambda_1 > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))^2 - 4 \det(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) = (c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2))^2 \\
& - 4c_3(-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3\lambda_1\lambda_2) \\
& < \left( \frac{c_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3}(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2) \right)^2 - 4c_3^2\lambda_1\lambda_2 - \\
& 4c_3 \left( \frac{c_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_3} \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) \right) + 4c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) \left( \frac{c_3\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right) \\
& + 4c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) \frac{c_3(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)} \\
& = (-c_3(\lambda_1 + \lambda_2) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2))^2 - 4c_3^2\lambda_1\lambda_2 + 4c_3^2\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) \\
& + 4c_3 \left( \frac{c_3\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 2\lambda_2)}{2} \right) \\
& = 4c_3^2\lambda_2^2 + 4c_3 \left( \frac{-2c_3\lambda_2^2}{2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Deste modo, temos  $tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})) > 0$  e  $tr(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))^2 - 4 \det(J(Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x}))) < 0$ , ou seja, os autovalores de  $Proj(\widehat{Z}_\mu \mathbf{x})$  são complexos com a parte real positiva. Assim, temos um foco repulsor no ponto de equilíbrio da projeção do campo deslizante normalizado e consequentemente, temos um foco repulsor no campo deslizante normalizado.  $\square$

Para determinar a possível existência de uma conexão deslizante de Shilnikov para o campo (3.1), é necessário analisar detalhadamente o comportamento do fluxo tanto do campo  $X$  quanto do campo deslizante normalizado  $\widehat{Z}_\mu$ . Dado que ambos os campos são lineares, suas soluções podem ser facilmente determinadas. Essas soluções serão apresentadas na seguinte proposição, cuja demonstração será omitida.

**Proposição 3.4.** *Se o sistema (3.1) satisfaz as hipóteses **H1** e **H2**, então:*

1. *A solução do campo  $X$ , com condição inicial  $(x_0, y_0, z_0)$  em  $t = 0$  é dada por*

$$\psi_X(t, (x_0, y_0, z_0)) = (E(t, x_0, y_0, z_0), F(t, x_0, y_0, z_0), G(t, x_0, y_0, z_0)),$$

onde

$$\begin{aligned}
E(t, x_0, y_0, z_0) &= x_0 e^{\lambda_2 t}, \\
F(t, x_0, y_0, z_0) &= \frac{x_0(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t}(x_0(\lambda_3 - \lambda_2) + y_0(\lambda_1 - \lambda_3))}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\
G(t, x_0, y_0, z_0) &= \frac{x_0(\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t}(x_0(\lambda_3 - \lambda_2) + y_0(\lambda_1 - \lambda_3))}{\lambda_1 - \lambda_3} \\
&\quad + \frac{e^{\lambda_3 t}(x_0(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_1 - \lambda_3)(y_0 - z_0))}{\lambda_1 - \lambda_3}.
\end{aligned}$$

2. *A solução do campo  $\widehat{Z}_\mu(\mathbf{x})$ , com condição inicial  $\mathbf{x} = (x_0, y_0, -\mu)$  para  $t = 0$  é dada por*

$$\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \mathbf{x}) = (P(t, x_0, y_0), Q(t, x_0, y_0), -\mu),$$

onde

$$\begin{cases} P(t, x_0, y_0) = e^{\alpha t} \left( \frac{\sin(\beta t)}{\beta} \left( \frac{y_0(\lambda_1 - \lambda_3)(\alpha^2 + \beta^2 + c_3^2 \lambda_2^2 - 2\alpha c_3 \lambda_2)}{c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} + x_0(c_3 \lambda_2 - \alpha) \right) + x_0 \cos(\beta t) \right) \\ Q(t, x_0, y_0) = e^{\alpha t} \left( \frac{\sin(\beta t)(y_0(\lambda_1)(\alpha - c_3 \lambda_2) - c_3 x_0(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3))}{\beta(\lambda_1 - \lambda_3)} + y_0 \cos(\beta t) \right); \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \alpha = \frac{c_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}, \\ \beta = \frac{\sqrt{-c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(4c_1(\lambda_2 - \lambda_3) + c_3(\lambda_1 - \lambda_2)) - c_2^2(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + 2c_2c_3(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}}{2}. \end{cases}$$

Agora vamos demonstrar que se o campo (3.1) satisfaz as hipóteses **H1** e **H2**, então para  $\mu > 0$  existe um conjunto de condições iniciais  $\Omega_\mu$  em  $\Sigma_\mu^t$  que possuem as seguintes propriedades:

1. O diâmetro de  $\Omega_\mu$  tende a zero conforme  $\mu \rightarrow 0$ ;
2. A trajetória positiva do campo  $X$  associada com  $p \in \Omega_\mu$  está bem definida e intersecta a variedade de comutação na região de deslize;
3. A trajetória negativa do campo deslizante normalizado associada com  $p \in \Omega_\mu$  está completamente contida na região de deslize.

É importante notar que as propriedades (2) e (3) são requisitos fundamentais para a possibilidade de existência da conexão deslizante de Shilnikov. Na sequência, vamos definir  $\Omega_\mu$  como a imagem da curva  $\gamma_\mu(t) = (\gamma_{1_\mu}(t), \gamma_{2_\mu}(t), \gamma_{3_\mu}(t))$  com

$$\begin{aligned} \gamma_{1_\mu}(t) &= \frac{\mu \left( \lambda_1 + \lambda_1 \left( -e^{\lambda_3 t} \right) + \lambda_3 \left( e^{\lambda_1 t} - 1 \right) \right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t} + (\lambda_3 - \lambda_1)e^{\lambda_2 t}}; \\ \gamma_{2_\mu}(t) &= \frac{\mu \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}; \\ \gamma_{3_\mu}(t) &= -\mu. \end{aligned}$$

que está bem definida se  $\lambda_1 > \lambda_3 > \lambda_2 > 0$ .

**Proposição 3.5.** *Assuma que o sistema (3.1) satisfaz as hipóteses **H1** e **H2**. Seja  $\Omega_\mu = \gamma_\mu((0, \infty))$ , onde*

$$\gamma_\mu : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde  $\gamma_\mu(t) = (\gamma_{1_\mu}(t), \gamma_{2_\mu}(t), \gamma_{3_\mu}(t))$  com

$$\begin{aligned}\gamma_{1_\mu}(t) &= \frac{\mu \left( \lambda_1 + \lambda_1 \left( -e^{\lambda_3 t} \right) + \lambda_3 \left( e^{\lambda_1 t} - 1 \right) \right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t} + (\lambda_3 - \lambda_1)e^{\lambda_2 t}}; \\ \gamma_{2_\mu}(t) &= \frac{\mu \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}; \\ \gamma_{3_\mu}(t) &= -\mu;\end{aligned}$$

A curva  $\gamma_\mu$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\gamma_\mu$  é injetora e  $\gamma_{1_\mu}(t) \in \left( \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_3 \mu}{\lambda_2 - \lambda_3} \right)$ .
2.  $(h_\mu \circ \gamma_\mu)(t) = 0$  para todo  $t > 0$ , isto é,  $\gamma_\mu(t) \in \Sigma_\mu$  para todo  $t > 0$ ;
3.  $Xh_\mu(\gamma_\mu(t)) = 0$  para todo  $t > 0$ , isto é,  $\gamma_\mu(t) \in \Sigma_\mu^t$  para todo  $t > 0$ ;
4.  $X^2 h_\mu(\gamma_\mu(t)), Y h_\mu(\gamma_\mu(t)) > 0$  para todo  $t > 0$ , isto é,  $\gamma_\mu(t)$  é ponto de dobra visível regular para todo  $t > 0$ ;
5.  $h_\mu(\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau))) > 0$  para todo  $t \in (0, \tau)$ , com  $\tau \in (0, \infty)$  fixo, isto é,  $\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau))$  está completamente contida em  $\{\mathbf{x} : h(\mathbf{x}) > 0\}$  para todo  $t \in (0, \tau)$ , com  $\tau \in (0, \infty)$  fixo;
6.  $\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau)) \in \Sigma_\mu^s$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau)) = P_{e_\mu}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que para provar que  $\gamma_\mu(t)$  é injetora, é suficiente mostrar que  $\gamma_{1_\mu}(t)$  é injetora. Para isso, demonstraremos que  $\frac{d\gamma_{1_\mu}}{dt}(t) > 0$ . Derivando em relação a  $t$ , obtemos:

$$\frac{d\gamma_{1_\mu}}{dt}(t) = V_1(t)V_2(t)$$

onde

$$V_1(t) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{((\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 t})^2}$$

e

$$V_2(t) = a_0 \left( e^{\lambda_1 t} + e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} \right) + a_1 e^{t(\lambda_1 + \lambda_3)} + a_2 e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)} + a_3 e^{\lambda_2 t} + a_4 e^{\lambda_3 t}$$

com  $a_0 = \lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)$ ,  $a_1 = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3)$ ,  $a_2 = -\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1)$ ,  $a_3 = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3)$  e  $a_4 = -\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)$ . Note que  $V_1(t) > 0$  para  $t \in (0, \infty)$ . Logo, o sinal de  $\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)$  é determinado pelo sinal de  $V_2(t)$ . Observa-se que  $V_2(t)$  é uma combinação linear dos elementos do conjunto ordenado

$$G = \left\{ e^{\lambda_1 t} + e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)}, e^{t(\lambda_1 + \lambda_3)}, e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \right\}.$$

Pelo Exemplo 1.6 e pela hipótese **H1(a)**, sabemos que  $G$  é um sistema estendido completo de Chebychev em qualquer intervalo fechado contido em  $[0, \infty)$ . Isso implica que  $V_2(t)$  tem no máximo 4 zeros não negativos, contando multiplicidades. Adicionalmente, temos que

$$\begin{cases} V_2(0) = \frac{dV_2}{dt}(0) = \frac{d^2V_2}{dt^2}(0) = \frac{d^3V_2}{dt^3}(0) = 0, \\ \frac{d^4V_2}{dt^4}(0) = -2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\mu(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3). \end{cases}$$

Pela hipótese **H1(a)**, temos que  $\frac{d^4V_2}{dt^4}(0) > 0$ , logo 0 é um zero de multiplicidade 4. Já que  $V_2(t)$  é uma função de classe  $C^\infty$ , segue que  $V_2(t) > 0$ , e conseqüentemente  $\frac{d\gamma_{1\mu}}{dt}(t) > 0$ , para  $t > 0$ . Isso implica que  $\gamma_{1\mu}(t)$  é crescente e conseqüentemente,  $\gamma_\mu(t)$  é injetora. Além disso, note que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_\mu(t) = \left( \frac{\lambda_1\lambda_3\mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_3\mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\mu(t) = \left( \frac{\lambda_3\mu}{\lambda_2 - \lambda_3}, \frac{\lambda_3\mu}{\lambda_1 - \lambda_3}, -\mu \right).$$

Portanto,  $\gamma_{1\mu}(t) \in \left( \frac{\lambda_1\lambda_3\mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}, \frac{\lambda_3\mu}{\lambda_2 - \lambda_3} \right)$  e assim concluímos a demonstração do item (1) da proposição.

Agora, observe que  $(h_\mu \circ \gamma_\mu)(t) = \gamma_{3\mu}(t) + \mu = 0$  e

$$Xh_\mu(\gamma_\mu)(t) = (\lambda_1 - \lambda_3)\gamma_{2\mu}(t) - \lambda_3\mu = 0$$

para todo  $t \in (0, \infty)$ . Assim, provamos os itens (2) e (3) da proposição. Usando a Proposição 3.2, segue que  $\gamma_\mu(t)$  é um ponto de dobra invisível do campo  $X$ . Além disso, basta notar que  $Yh_\mu(x, y, z)$  é constante, igual a  $c_3$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , e por **H1(b)**, segue que  $c_3 > 0$ . Em particular,  $Yh_\mu(\gamma_\mu(t)) = c_3 > 0$ , provando assim o item (4).

Para demonstrar o item 5, é necessário provar que  $h_\mu(\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau))) > 0$  para todo  $t \in (0, \tau)$ , onde  $\tau \in (0, \infty)$ . Para isso, mostraremos que a função  $\tau \mapsto h_\mu(\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau)))$  é injetora para um  $t$  fixo em  $(0, \infty)$  e verificaremos que  $h_\mu(\psi_X(\tau, \gamma_\mu(\tau))) = 0$  para  $\tau > 0$ . Portanto, o segmento de órbita  $\psi_X(\tau, \gamma_\mu(\tau))$  está contido completamente em um dos subconjuntos  $\{x : h(x) > 0\}$  ou  $\{x : h(x) \leq 0\}$ . Caso contrário, haveria uma contradição. Suponha que existe um  $\tau_0$  tal que  $t_1 > 0$  e  $t_1 \neq \tau_0$  onde  $h_\mu(\psi_X(t_1, \gamma_\mu(\tau_0))) = 0$ . Além disso,  $h_\mu(\psi_X(t_1, \gamma_\mu(t_1))) = 0$ , o que implicaria que  $t_1 = \tau_0$ , o que é contraditório. Finalmente, pelo item (4) temos que  $\gamma_\mu(\tau)$  é um ponto de dobra visível do campo  $X$ , assim podemos concluir que  $\psi_X(\tau, \gamma_\mu(\tau))$  está contido completamente em  $\{x : h(x) > 0\}$  isso provaria o item (5).

Primeiramente, observe que:

$$\begin{aligned}
 h_\mu(\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau))) &= \frac{\mu \left( (\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t} + (\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t} + (\lambda_3 - \lambda_1)e^{\lambda_2 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t + \lambda_3 \tau} \right)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 \tau} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 \tau} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 \tau}} \\
 &+ \frac{\mu \left( -\lambda_1 e^{\lambda_3 t + \lambda_2 \tau} + \lambda_2 e^{\lambda_3 t + \lambda_1 \tau} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t + \lambda_3 \tau} - \lambda_3 e^{\lambda_2 t + \lambda_1 \tau} \right)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 \tau} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 \tau} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 \tau}} \\
 &+ \frac{\mu \left( \lambda_3 e^{\lambda_1 t + \lambda_2 \tau} + (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 \tau} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 \tau} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 \tau} \right)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_3 \tau} + (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\lambda_2 \tau} + (\lambda_3 - \lambda_2)e^{\lambda_1 \tau}} \\
 &= s_\mu(\tau) \left( -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{\lambda_2 t} \right) \\
 &+ \mu + \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 \mu e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu e^{\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)},
 \end{aligned}$$

onde  $s_\mu(\tau) = \gamma_{1_\mu}(\tau) - \frac{\lambda_1 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$ . Sabemos que  $\gamma_{1_\mu}$  é uma função crescente e, portanto, injetora. Isso implica que  $s_\mu(\tau)$  também é crescente para  $\tau \in (0, \infty)$ . Além disso, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow 0} s_\mu(\tau) &= 0 \quad \text{e} \\
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} s_\mu(\tau) &= -\frac{\lambda_2 \lambda_3 \mu}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} > 0.
 \end{aligned}$$

Deste modo, temos  $s_\mu(\tau) \in (0, s_{0\mu})$ . Na sequência, mostraremos que fixando  $t$ , a função  $h_\mu(\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau)))$  é injetora. Isto é, para  $t_0 \in (0, \infty)$  fixo, considere  $\tau_1, \tau_2 \in (0, \infty)$  arbitrários, tais que  $h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_1))) = h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_2)))$ , queremos mostrar que  $\tau_1 = \tau_2$ . Segue do fato que  $h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_1))) = h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_2)))$ , então  $h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_1))) - h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau_2))) = 0$ . O que implica que

$$(s_\mu(\tau_1) - s_\mu(\tau_2)) \left( -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{\lambda_2 t_0} \right) = 0.$$

Assim, segue que

$$(s_\mu(\tau_1) - s_\mu(\tau_2)) = 0 \quad \text{ou} \quad \left( -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{\lambda_2 t_0} \right) = 0.$$

Pelo Exemplo 1.4, segue que a função

$$p(t) = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{\lambda_2 t}$$

possui no máximo duas raízes, contando multiplicidades, no intervalo  $[0, c]$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $p(0) = p'(0) = 0$ . Portanto, a origem é o único zero de  $p(t)$  no intervalo  $[0, c]$  em consequência

$$p(t_0) = \left( -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 t_0}}{\lambda_1 - \lambda_3} + e^{\lambda_2 t_0} \right) \neq 0.$$

Logo,  $s_\mu(\tau_1) = s_\mu(\tau_2)$  e portanto, a função  $h_\mu(\psi_X(t_0, \gamma_\mu(\tau)))$  é injetora para  $t_0$  fixo. Além disso  $h_\mu(\psi_X(\tau, \gamma_\mu(\tau))) = 0$ .

Para demonstrarmos o item 6 da proposição, precisamos mostrar que

$$\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau)) \in \Sigma_\mu^s,$$

o que é equivalente a provar que para  $\tau \in (0, \infty)$  fixo e  $t \in (-\infty, 0)$ , a função

$$Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau))) \quad (3.4)$$

assume valor negativo. Observe que provar que a função (3.4) é negativa para  $t < 0$  é equivalente a provar que

$$Xh_\mu\left(\psi_{\widehat{Z}_\mu}\left(\frac{-t}{\beta}, \gamma_\mu(\tau)\right)\right) \quad (3.5)$$

assume valores negativos para  $t > 0$  e  $\beta > 0$ . Dito isso, trabalharemos com a função (3.5) e associamos a ela uma função auxiliar

$$k_\mu(t, \tau) = u^{-1} \cdot Xh_\mu\left(\psi_{\widehat{Z}_\mu}\left(\frac{-t}{\beta}, \gamma_\mu(\tau)\right)\right),$$

onde  $u = \frac{c_3^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu}{\alpha^2 + \beta^2}$  é um número real positivo, pelas hipóteses **H1(a,b)**. Desta maneira, o sinal de  $k_\mu(t, \tau)$  coincide com o sinal da função (3.5). Provaremos que  $k_\mu(t, \tau)$  possui pontos críticos da forma  $t = t_2(n, \tau) = n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$  e, conseqüentemente, existem infinitos valores de  $t > 0$  que são pontos críticos de  $k_\mu(t, \tau)$ . Além disso, provaremos que  $k_\mu(0, \tau) = 0$  e  $k_\mu(t_2(n, \tau), \tau) < 0$  para qualquer  $t_2(n, \tau) > 0$  (inclusive, os que são pontos de máximo e mínimo). Com essas informações, o Teorema do Valor Intermediário nos permite concluir que  $k_\mu(t, \tau) < 0$ , para todo  $t \in (0, \infty)$  e conseqüentemente, que a função (3.5) é negativa.

Dito isso, a função  $k_\mu(t, \tau)$  é expressa por

$$k_\mu(t, \tau) = e^{-\frac{\alpha t}{\beta}} \left( \sin(t) \frac{(\alpha c_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu + s_\mu(\tau) (\alpha^2 + \beta^2) (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3))}{\beta c_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu} + \cos(t) \right) - 1$$

e pode ser reescrita como

$$k_\mu(t, \tau) = \sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t}{\beta}} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + t\right) - 1,$$

onde  $B(\tau) = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{s_\mu(\tau)(\alpha^2 + \beta^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\beta c_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu}$ . Note que,  $B(\tau)$  é uma função afim decrescente e  $B(s_1) = 0$  implica  $s_1 = -\frac{\alpha c_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \mu}{(\alpha^2 + \beta^2)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}$ . Como  $s_\mu(\tau) \in (0, s_0)$  para todo  $\tau \in (0, \infty)$ , então as hipóteses **H1(a,b)**, garantem que  $s_1 > s_0$ . Além disso, como  $s_\mu(\tau) > 0$ , então  $B(\tau) > 0$  para todo  $\tau \in (0, \infty)$ . Logo,  $k_\mu(t, \tau)$  está bem definida.

Seja  $\tau \in (0, \infty)$  fixo e  $t \in [0, \tau]$ , daí segue que:

1.  $k_\mu(0, \tau) = 0$ ;
2.  $k_\mu(t_1(n, \tau), \tau) = -1$ , onde  $t_1(n, \tau) = n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\frac{\partial k_\mu}{\partial t}(t, \tau) = 0 \iff t = t_2(n, \tau) = n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

De fato, observe que:

$$\begin{aligned} k_\mu(0, \tau) &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right)\right) - 1 \\ &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{B(\tau)^2} B(\tau)}} - 1 \end{aligned}$$

Como  $B(\tau) > 0$ , para todo  $\tau \in (0, \infty)$ , então segue que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + B(\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{B(\tau)^2} B(\tau)}},$$

e consequentemente,  $k(0, \tau) = 0$  e

$$\begin{aligned} k(t_1(n, \tau), \tau) &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t_1(n, \tau)}{\beta}} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + t_1(n, \tau)\right) - 1 \\ &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t_1(n, \tau)}{\beta}} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right)\right) - 1 \\ &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t_1(n, \tau)}{\beta}} \sin(n\pi) - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t}(t, \tau) &= \frac{\sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t}{\beta}} \left(\beta \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + t\right) - \alpha \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + t\right)\right)}{\beta} \\ &= \sqrt{B(\tau)^2 + 1} e^{-\frac{\alpha t}{\beta}} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \sin\left(t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right). \end{aligned}$$

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t}(t, \tau) = 0 &\iff \sin\left(t + \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) = 0 \\ &\iff t = t_2(n, \tau) = n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{B(\tau)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Além disso, se  $t_2(n, \tau) > 0$ , segue que

$$k(t_2(n, \tau), \tau) = -1 + (-1)^n \frac{\beta \sqrt{B(\tau)^2 + 1}}{\alpha \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}} e^{-\frac{\alpha t_2(n, \tau)}{\beta}} < 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

pois pela hipótese **H1**, temos  $\frac{\beta\sqrt{B(\tau)^2+1}}{\alpha\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}}} \in (0,1)$ . Deste modo,  $k(t_2(n,\tau),\tau)$  assume valores negativos para todo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, para todos  $t_2(n,\tau) \in [0,\tau]$  tais que  $\frac{\partial k_\mu}{\partial t}(t_2(n,\tau),\tau) = 0$ , temos  $k(t_2(n,\tau),\tau) < 0$ . Dessa maneira, podemos concluir que para  $t \in (0,\tau)$  todos os possíveis pontos de máximos e mínimos possuem imagem negativa.

Conseqüentemente, as curvas soluções do campo deslizante  $\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau))$ , para todo  $\tau \in (0, \infty)$  fixo e  $t \in (0, \tau)$  estão completamente contidas na região de deslize e como o equilíbrio do deslizante é um foco repulsor, então

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, \gamma_\mu(\tau)) = P_{e_\mu}.$$

Portanto, vale o item (6) da proposição e concluimos a demonstração.  $\square$

Por fim, conseguimos as ferramentas necessárias para demonstrar o principal resultado desse trabalho, sendo ele o Teorema 3.1.

*Demonstração do Teorema 3.1.* Primeiramente, observe que, para o sistema 3.1 ter a conexão de Shilnikov deslizante, precisamos mostrar que existe um ponto  $q(\mu) \in \Sigma_\mu^t$ , um ponto  $p(\mu) \in \Sigma_\mu^s$  e  $t_0(\mu) > 0$ , satisfazendo:

1.  $q(\mu)$  é um ponto de dobra visível regular do sistema 3.1.
2.  $p(\mu)$  é um pseudo-foco repulsor do campo deslizante normalizado.
3. A trajetória  $X$  associada a  $q(\mu)$ ,  $\psi_X(t, q(\mu))$ , está contida no conjunto  $\{\mathbf{x} : h_\mu(\mathbf{x}) > 0\}$  para  $t \in (0, t_0(\mu))$  e  $\psi_X(t_0(\mu), q(\mu)) = p(\mu)$ .
4. A trajetória do campo deslizante com condição inicial em  $q(\mu)$  converge para o pseudo-equilíbrio quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))$  está contida na região deslizante para  $t < 0$ .

Já que identificamos todos os elementos necessários, podemos proceder com a demonstração. Pela hipótese **H1** e a Proposição 3.3, segue que o sistema (3.1) possui um pseudo-equilíbrio do tipo foco-sela no repulsor localizado em  $P_{e_\mu} \in \Sigma_\mu^s$ . Além disso, decorre da Proposição 3.5, item 4, que qualquer ponto da forma  $\gamma_\mu(\tau)$ , onde

$$\gamma_\mu(\tau) = (\gamma_{1_\mu}(\tau), \gamma_{2_\mu}(\tau), \gamma_{3_\mu}(\tau)),$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_{1_\mu}(\tau) &= \frac{\mu \left( \lambda_1 + \lambda_1 \left( -e^{\lambda_3 \tau} \right) + \lambda_3 \left( e^{\lambda_1 \tau} - 1 \right) \right)}{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_3 \tau} + (\lambda_2 - \lambda_3)e^{\lambda_1 \tau} + (\lambda_3 - \lambda_1)e^{\lambda_2 \tau}}, \\ \gamma_{2_\mu}(\tau) &= \frac{\mu \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \\ \gamma_{3_\mu}(\tau) &= -\mu, \end{aligned}$$

é um ponto de dobra visível regular do campo deslizante, e as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. Pelo item 5, da Proposição 3.5, a trajetória  $\psi_X(t, \gamma_\mu(\tau))$  está contida no conjunto determinado por  $\{\mathbf{x} : h_\mu(\mathbf{x}) > 0\}$  para  $t \in (0, \tau)$  e  $\tau \in (0, \infty)$  fixo.
2. Pelo item 5, da Proposição 3.5, a trajetória  $\psi_{\widehat{Z}}(t, \gamma_\mu(\tau))$  está na região deslizante para  $t < 0$  e converge para o pseudo-equilíbrio quando  $t \rightarrow -\infty$ .

Portanto, para  $\mu > 0$ , o sistema exibe uma conexão de Shilnikov deslizante se existir  $t_0(\mu) > 0$  tal que  $\psi_X(t, \gamma_\mu(t)) = P_{e_\mu}$ , ou, equivalentemente, se  $r_\mu(t_0(\mu)) = 0$ , onde

$$r_\mu(t) = \psi_X(t, \gamma_\mu(t)) - P_{e_\mu}.$$

Usando a Proposição 3.4, obtemos que

$$r_\mu(t) = \mu(r_1(t), r_2(t), 0),$$

onde

$$r_1(t) = \frac{c_1 \lambda_1 \lambda_3}{-c_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2} + \frac{e^{\lambda_2 t} (\lambda_3 + \lambda_1 (e^{\lambda_3 t} - 1) - \lambda_3 e^{\lambda_1 t})}{(\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2) e^{\lambda_1 t}}$$

e

$$r_2(t) = \frac{c_1 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3) (-c_1 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_2 - \lambda_3) + c_2 \lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) + c_3 \lambda_1 \lambda_2)} + \frac{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_3) (-e^{t(\lambda_1 + \lambda_3)}) + (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3) ((\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2) e^{\lambda_1 t})} + \frac{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) e^{t(\lambda_2 + \lambda_3)} + \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) e^{t(\lambda_1 + \lambda_2)}}{(\lambda_1 - \lambda_3) ((\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2) e^{\lambda_1 t})} + \frac{(\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_2 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3) ((\lambda_2 - \lambda_1) e^{\lambda_3 t} + (\lambda_1 - \lambda_3) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_3 - \lambda_2) e^{\lambda_1 t})}.$$

Note que,  $(r_1(t), r_2(t))$  é exatamente a função definida na hipótese **H2**. Portanto,  $r_\mu(t) = 0$  se  $f(t) = 0$ . Usando a hipótese **H2**, sabemos que existe um  $t_0(\mu)$  positivo tal que  $f(t_0(\mu)) = 0$ , e, portanto,  $r(t_0(\mu)) = 0$ . Logo, o sistema exibe uma conexão de Shilnikov deslizante se verificar as hipóteses **H1** e **H2**. Assim, concluímos a demonstração.  $\square$

A seguir apresentamos um exemplo numérico da conexão de Shilnikov deslizante.

**Exemplo 3.1.** Um exemplo explícito da conexão de Shilnikov deslizante no sistema (3.1) é obtido ao considerarmos o conjunto de parâmetros

$$P_\mu = \left\{ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, c_1 = \frac{1 + 2e^2}{(-1 + e^2)^2}, c_2 = \frac{1 + 3e^2}{(-1 + e^2)}, c_3 = 1, \mu > 0, t = 2 \right\},$$

onde a conexão é exibida na Figura 4.9. Utilizando o conjunto de parâmetros  $P_\mu$ , temos o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = Z_\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{x}^\top = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $h_\mu(\mathbf{x}) = z + \mu$ ,

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad e \quad Y(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2e^2}{(-1 + e^2)^2} \\ \frac{1 + 3e^2}{(-1 + e^2)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que, o sistema (3.6) satisfaz as condições da hipótese **H1**, visto que

- a)  $3 > 2 > 1 > 0$  e  $1 > 0$ ;
- b)  $\frac{(3 + e^2)^2}{8(-1 + e^2)^2} < \frac{1 + 2e^2}{(-1 + e^2)^2} < \frac{-5 + 9e^2}{4(-1 + e^2)}$ ;
- c)  $-2 < \frac{1 + 3e^2}{-1 + e^2} < 4$ .

Além disso, para o conjunto de parâmetros  $P_\mu$  a função  $f(t)$  é expressa por

$$f(t) = (2e^2 - 2e^t, 2e^t - e^{2t} - 2e^2 + e^4)$$

e  $f(2) = 0$ . Sendo assim, o sistema (3.6) satisfaz as hipóteses **H1** e **H2** e portanto pelo Teorema 3.1, como  $\mu > 0$ , o sistema (3.6) possui a Conexão de Shilnikov deslizante, que pode ser vista na Figura 4.9.

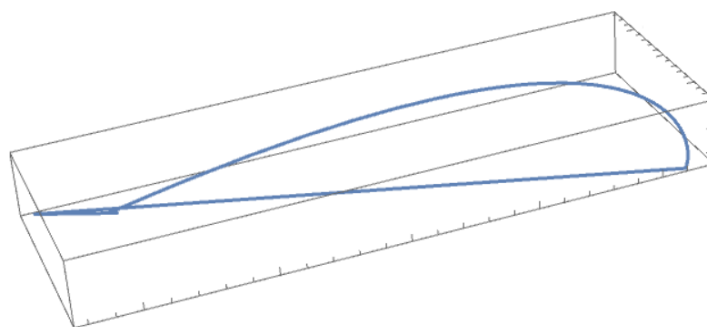


Figura 11 – Conexão de Shilnikov deslizante para o sistema (3.6).

## 4 Evidências Numéricas da Conexão de Shilnikov Deslizante em Modelos Físicos

Neste capítulo, dedicamo-nos ao estudo dos sistemas lineares por partes, conforme apresentado no artigo (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021). Nesse sentido, determinamos a configuração dos conjuntos de Filippov e demonstramos que, sob determinadas hipóteses, esses tipos de sistemas apresentam duas características: os conjuntos de tangência em relação à variedade de comutação são retas paralelas e o campo deslizante normalizado, caso exista, é linear. Além disso, apresentamos um exemplo numérico desse tipo de sistema que admite a conexão de Shilnikov deslizante, mostrando assim que sistemas reais, na teoria de controle, podem admitir essa Conexão.

Feita essa breve introdução, considere um sistema de equações diferenciais da forma  $\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x})$  com

$$Z(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} + n^+, & \text{se } h(x, y, z) > 0, \\ Y(\mathbf{x}) = P\mathbf{x} + n^-, & \text{se } h(x, y, z) < 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $h(x, y, z) = z$ ,  $\mathbf{x}^T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , e

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad n^\pm = \begin{pmatrix} n_1^\pm \\ n_2^\pm \\ n_3^\pm \end{pmatrix}.$$

Em (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021), os autores estudaram a ocorrência de bifurcações do tipo Hopf em sistemas da forma (4.1) que verificam as seguintes hipóteses:

**H3:**  $p_{31}^2 + p_{32}^2 \neq 0$ .

**H4:**  $\det(M) \neq 0$ , onde

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ p_{21}p_{32} + p_{31}(p_{11} + p_{33}) & p_{12}p_{31} + p_{32}(p_{22} + p_{33}) & p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32} + p_{33}^2 \end{pmatrix}.$$

**H5:**  $\det(R) \neq 0$ , onde

$$R = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & n_1^+ - n_1^- \\ p_{21} & p_{22} & n_2^+ - n_2^- \\ p_{31} & p_{32} & n_3^+ - n_3^- \end{pmatrix}.$$

Além disso, os autores mostraram como essa classe de sistema é amplamente utilizada para descrever e estudar diversos modelos físicos. Para mais detalhes, consulte o artigo (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021) e suas referências. Na sequência, vamos apresentar três desses exemplos:

**Exemplo 4.1. Modelo Tridimensional do Conversor Buck Controlado por um SMC-Washout** O modelo tridimensional do conversor Buck controlado por um SMC-Washout é descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = uV_{in} - r_L i_L - v_c, \\ C \frac{dv_c}{dt} = i_L - \frac{v_c}{R}, \\ \frac{dz_F}{dt} = \omega_F (i_L - z_F), \end{cases}$$

onde  $v_c > 0$ ,  $i_L > 0$ ,  $z_F$  e  $u$  pertencem a  $\{0, 1\}$ . Essas variáveis representam a tensão instantânea do capacitor, a corrente do indutor, a variável auxiliar do filtro e a variável de controle, respectivamente. Os parâmetros  $R > 0$ ,  $L > 0$ ,  $C > 0$ ,  $r_L \leq 0$ ,  $V_{in}$  e  $\omega_F$  correspondem à carga resistiva, à indutância, à capacitância, à resistência do indutor, à fonte de tensão e à frequência do filtro de corte, respectivamente. Além disso, a lei de controle é definida por:

$$u = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(H)) \quad \text{com} \quad H(i_L, v_c, z_F) = v_c - V_{ref} + K(i_L - z_F).$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \frac{i_L}{V_{in}} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ y = \frac{v_c}{V_{in}}, \\ z = \frac{H(i_L, v_c, z_F)}{V_{in}}, \\ \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

e fazendo a seguinte mudança de parâmetros:

$$\left\{ a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, b = r_L \sqrt{\frac{C}{L}}, \omega = \omega_F \sqrt{LC}, y_r = \frac{V_{ref}}{V_{in}}, k = K \sqrt{\frac{C}{L}} \right\},$$

o sistema pode ser escrito na forma (4.1) com:

$$P = \begin{pmatrix} -b & -1 & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 1 - bk & \omega - a - k & -\omega \end{pmatrix}, \quad n^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega y_r \end{pmatrix}, \quad n^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k - \omega y_r \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.2. O SMC de segunda ordem com controle de modo deslizante** O SMC de segunda ordem pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay + u, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $(x, y) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de estado e  $u = u(t)$  é a variável de controle, com  $a, b \in \mathbb{R}$  positivos. Em (CRISTIANO; TONON; VELTER, 2021), é assumida uma estratégia de controle de modo deslizante definida pela lei de controle  $u(t) = -\text{sgn}(\theta(x(t)))$  e a função de controle  $\theta(x(t)) = x(t) - x_r + k \int (x(t) - x_r) dt$ , onde  $x_r$  é a referência de saída e  $k$  é o parâmetro de controle.

Considerando  $(x, y, z) = (x(t), y(t), \theta(x(t)))$ , o sistema (4.2) pode ser escrito na forma (4.1) com

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & -a & 0 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -kx_r \end{pmatrix} \quad e \quad n^- = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -kx_r \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 4.3. Sistema de Feedback Relé** Um Sistema de Feedback Relé com entrada única e saída única pode ser descrito por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu, \\ y = C\mathbf{x}, \\ u = -\text{sgn}(y), \end{cases}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  são matrizes constantes,  $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , com  $n \geq 1$ , enquanto a entrada  $u$  e a saída  $y$  são funções escalares. Em particular, se  $n = 3$  e

$$A = \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\gamma\omega) & 1 & 0 \\ -\omega(2\gamma\lambda + \omega) & 0 & 1 \\ \lambda\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2k\theta\rho \\ k\rho^2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Observe que,  $y = C\mathbf{x} = x_1$  e sendo assim, podemos considerar  $h(\mathbf{x}) = x_1$ . Aplicando a mudança de coordenadas  $\mathbf{x} = T\mathbf{u}$ , onde

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o sistema pode ser escrito na forma (4.1), com

$$P = \begin{pmatrix} \lambda\omega^2 & 0 & 0 \\ -\omega(2\gamma\lambda + \omega) & 0 & 1 \\ -(\lambda + 2\gamma\omega) & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n^+ = \begin{pmatrix} k \\ 2k\theta\rho \\ k\rho^2 \end{pmatrix} \quad e \quad n^- = \begin{pmatrix} -k \\ -2k\theta\rho \\ -k\rho^2 \end{pmatrix}.$$

Os campos associados com o sistema (4.1) têm três características relevantes: o conjunto de tangência é composto por duas linhas paralelas, possuem no máximo dois pontos de cúspide regulares e o campo deslizante normalizado é linear, caso exista. Na sequência, provaremos esses fatos.

**Proposição 4.1** (Regiões de Filippov). *As regiões na variedade de comutação  $\Sigma$  associadas à convenção de Filippov para o campo (4.1) são dadas por:*

$$1. \text{ **Região de Costura: } \Sigma^c = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y < \frac{-n_3^\pm - p_{31}x}{p_{32}} \text{ ou } y > \frac{-n_3^\pm - p_{31}x}{p_{32}} \right\};**$$

$$2. \text{ **Região de Escape: } \Sigma^e = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} < y < \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\};**$$

$$3. \text{ **Região de Deslize: } \Sigma^s = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} < y < \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\};**$$

$$4. \text{ **Região de Tangência: } \Sigma^t = S_X \cup S_Y;**$$

onde

$$S_X = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y = \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\} \quad e \quad S_Y = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y = \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}.$$

*Demonstração.* Considerando o sistema (4.1) e a função  $h(\mathbf{x}) = z$ , as derivadas de Lie da função  $h$  ao longo dos campos  $X$  e  $Y$  são dadas por

$$Xh(\mathbf{x}) = \langle X(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}) \rangle \quad e \quad Yh(\mathbf{x}) = \langle Y(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}) \rangle,$$

onde  $\nabla h(\mathbf{x}) = (0, 0, 1)$ . Para  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , temos:

$$\begin{aligned} Xh(\mathbf{x}) &= \langle X(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= n_3^+ + p_{31}x + p_{32}y, \\ Yh(\mathbf{x}) &= \langle Y(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}) \rangle \\ &= n_3^- + p_{31}x + p_{32}y. \end{aligned}$$

Desta forma, estabelecemos as seguintes relações para  $Xh(\mathbf{x})$  e  $Yh(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} Xh(\mathbf{x}) > 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y > \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\ Xh(\mathbf{x}) < 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y < \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Xh(\mathbf{x}) = 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y = \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
Yh(\mathbf{x}) > 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y > \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
Yh(\mathbf{x}) < 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y < \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
Yh(\mathbf{x}) = 0 &\iff \left\{ \mathbf{x} \in \Sigma : y = \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}.
\end{aligned}$$

Desta maneira a região de costura  $\Sigma^c$ , a região de escape  $\Sigma^e$ , a região de deslize  $\Sigma^s$  e a região de tangência  $\Sigma^t$  são definidas como segue:

$$\begin{aligned}
\Sigma^c &= \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y < \frac{-n_3^\pm - p_{31}x}{p_{32}} \text{ ou } y > \frac{-n_3^\pm - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
\Sigma^e &= \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} < y < \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
\Sigma^s &= \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} < y < \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\}, \\
\Sigma^t &= S_X \cup S_Y = \Sigma^t = \{(x, y, z) \in \Sigma : p_{31}x + p_{32}y + n_3^\pm = 0\},
\end{aligned}$$

onde

$$S_X = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y = \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}} \right\} \quad \text{e} \quad S_Y = \left\{ (x, y, 0) \in \Sigma : y = \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}} \right\}.$$

Assim, concluímos a demonstração da proposição.  $\square$

Observe que, a hipótese **(H3)** garante a existência de duas linhas de tangência, dadas por

$$p_{31}x + p_{32}y + n_3^\pm = 0,$$

onde essas linhas são paralelas se  $n_3^+ \neq n_3^-$  ou coincidentes se  $n_3^+ = n_3^-$ . Além disso, para  $n_3^+ \neq n_3^-$ , a hipótese **H4** garante a existência de dois pontos de cúspide, onde cada um deles pertence a uma linha de tangência. Nesse sentido, apresentamos o seguinte resultado a respeito dos tipos de tangências do sistema (4.1).

**Proposição 4.2** (Pontos de Tangência Regular). *Se o campo (4.1) satisfaz as hipóteses **(H3)** e **(H4)**, então a região de tangência pode ser expressa como*

$$\Sigma^t = D_v \cup D_i \cup \{c^+, c^-\},$$

onde  $D_v = D_{v_X} \cup D_{v_Y}$  e  $D_i = D_{i_X} \cup D_{i_Y}$ , com

$$\begin{aligned} D_{v_X} &= \left\{ \left( x, \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right) \in \Sigma : x > \frac{n_1^+ p_{31} p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12} p_{31} - n_3^+ p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}} \right\}, \\ D_{v_Y} &= \left\{ \left( x, \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right) \in \Sigma : x > \frac{n_1^- p_{31} p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12} p_{31} - n_3^- p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}} \right\}, \\ D_{i_X} &= \left\{ \left( x, \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right) \in \Sigma : x < \frac{n_1^+ p_{31} p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12} p_{31} - n_3^+ p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}} \right\}, \\ D_{i_Y} &= \left\{ \left( x, \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right) \in \Sigma : x < \frac{n_1^- p_{31} p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12} p_{31} - n_3^- p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}} \right\}, \end{aligned}$$

e

$$c^\pm = (x_c^\pm, y_c^\pm, 0),$$

com

$$\begin{aligned} x_c^\pm &= \frac{n_1^\pm p_{31} p_{32} + n_2^\pm p_{32}^2 - n_3^\pm p_{12} p_{31} - n_3^\pm p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}}, \\ y_c^\pm &= (-n_3^\pm - p_{31}) \left( \frac{n_1^\pm p_{31} + n_2^\pm p_{32} - n_3^\pm p_{12} p_{31}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}} - \frac{n_3^\pm p_{22}}{p_{32}} \right). \end{aligned}$$

Além disso, temos que

1. Se  $\mathbf{x} \in D_v$ , então  $\mathbf{x}$  é um ponto de dobra visível regular do sistema (3.1).
2. Se  $\mathbf{x} \in D_i$ , então  $\mathbf{x}$  é um ponto de dobra invisível regular do sistema (3.1).
3.  $c^\pm$  são os pontos de cúspide regular.

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1, temos que

$$\Sigma^t = S_X \cup S_Y = \Sigma_\pm^t = \{(x, y, z) \in \Sigma : p_{31}x + p_{32}y + n_3^\pm = 0\}.$$

Para provar os itens, observemos que as derivadas de Lie de ordem superior  $X^2h$ ,  $Y^2h$ ,  $X^3h$  e  $Y^3h$  em  $\mathbf{x} \in \Sigma$  são expressas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} X^2h(\mathbf{x}) &= p_{31}(n_1^+ + p_{11}x + p_{12}y) + p_{32}(n_2^+ + p_{21}x + p_{22}y), \\ Y^2h(\mathbf{x}) &= p_{31}(n_1^- + p_{11}x + p_{12}y) + p_{32}(n_2^- + p_{21}x + p_{22}y), \\ X^3h(\mathbf{x}) &= (p_{11}p_{31} + p_{21}p_{32})(n_1^+ + p_{11}x + p_{12}y) + (p_{12}p_{31} + p_{22}p_{32})(n_2^+ + p_{21}x + p_{22}y), \\ Y^3h(\mathbf{x}) &= (p_{11}p_{31} + p_{21}p_{32})(n_1^- + p_{11}x + p_{12}y) + (p_{12}p_{31} + p_{22}p_{32})(n_2^- + p_{21}x + p_{22}y). \end{aligned}$$

Em particular, dado  $\mathbf{x} \in S_X$ , segue que  $\mathbf{x} = \left( x, \frac{-n_3^+ - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right)$ . Assim, temos

$$X^2h(\mathbf{x}) = n_1^+ p_{31} + n_2^+ p_{32} - p_{22}(n_3^+ + p_{31}x) + p_{11}p_{31}x + p_{21}p_{32}x - \frac{p_{12}p_{31}(n_3^+ + p_{31}x)}{p_{32}},$$

e pela hipótese **H4**, temos

$$\det(M) = -p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32} \neq 0,$$

o que implica que

$$X^2h(\mathbf{x}) > 0 \text{ se } x > \frac{n_1^+ p_{31}p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12}p_{31} - n_3^+ p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_{v_X},$$

$$X^2h(\mathbf{x}) < 0 \text{ se } x < \frac{n_1^+ p_{31}p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12}p_{31} - n_3^+ p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_{i_X},$$

$$X^2h(\mathbf{x}) = 0 \text{ se } x = \frac{n_1^+ p_{31}p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12}p_{31} - n_3^+ p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} = c^+.$$

De maneira análoga, dado  $\mathbf{x} \in S_Y$ , segue que  $\mathbf{x} = \left( x, \frac{-n_3^- - p_{31}x}{p_{32}}, 0 \right)$ . Assim, temos

$$Y^2h(\mathbf{x}) = \frac{n_1^- p_{31}p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12}p_{31} - n_3^- p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}},$$

o que implica que

$$Y^2h(\mathbf{x}) > 0 \text{ se } x > \frac{n_1^- p_{31}p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12}p_{31} - n_3^- p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_{v_Y},$$

$$Y^2h(\mathbf{x}) < 0 \text{ se } x < \frac{n_1^- p_{31}p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12}p_{31} - n_3^- p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} \in D_{i_Y},$$

$$Y^2h(\mathbf{x}) = 0 \text{ se } x = \frac{n_1^- p_{31}p_{32} + n_2^- p_{32}^2 - n_3^- p_{12}p_{31} - n_3^- p_{22}p_{32}}{-p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32}}, \text{ ou seja, } \mathbf{x} = c^-.$$

Observe que,  $Xh(c^+) = X^2h(c^+) = 0$  e

$$X^3h(c^+) = n_1(p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31}) + n_2(p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32}) + n_3(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}),$$

e o conjunto

$$\left\{ \nabla h(c^+), \nabla Xh(c^+), \nabla X^2h(c^+) \right\},$$

com

$$\begin{cases} \nabla h(c^+) = (0, 0, 1); \\ \nabla Xh(c^+) = (p_{31}, p_{32}, p_{33}); \\ \nabla X^2h(c^+) = (p_{21}p_{32} + p_{31}(p_{11} + p_{33}), p_{12}p_{31} + p_{32}(p_{22} + p_{33}), p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32} + p_{33}^2); \end{cases}$$

é linearmente independente pela hipótese **H4**, uma vez que

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ p_{21}p_{32} + p_{31}(p_{11} + p_{33}) & p_{12}p_{31} + p_{32}(p_{22} + p_{33}) & p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32} + p_{33}^2 \end{pmatrix} = \det(M),$$

onde  $\det(M) = -p_{11}p_{31}p_{32} + p_{12}p_{31}^2 - p_{21}p_{32}^2 + p_{22}p_{31}p_{32} \neq 0$ . Logo, o determinante é não nulo e, portanto, o ponto

$$c^+ = \left( \frac{n_1^+ p_{31} p_{32} + n_2^+ p_{32}^2 - n_3^+ p_{12} p_{31} - n_3^+ p_{22} p_{32}}{-p_{11} p_{31} p_{32} + p_{12} p_{31}^2 - p_{21} p_{32}^2 + p_{22} p_{31} p_{32}}, \frac{-n_3^+ - p_{31} x}{p_{32}}, 0 \right)$$

é um ponto de cúspide regular. Análogo para o ponto  $c^-$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

**Proposição 4.3.** *Assumindo que o sistema (4.1) verifica as hipóteses (H3), (H4), (H5) e  $n_3^+ \neq n_3^-$ , dado  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , os campos deslizante  $\tilde{Z}(\mathbf{x})$  e deslizante normalizado  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  associados ao sistema (4.1) são dados por:*

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_3^- - n_3^+} \left( \widehat{F}_1(x, y), \widehat{F}_2(x, y), 0 \right), \quad (4.4)$$

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = \left( \widehat{F}_1(x, y), \widehat{F}_2(x, y), 0 \right), \quad (4.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(x, y) &= (n_3^- + p_{31}x + p_{32}y)(n_1 + p_{11}x + p_{12}y) - (m_1 + p_{11}x + p_{12}y)(n_3 + p_{31}x + p_{32}y), \\ \widehat{F}_2(x, y) &= (m_3 + p_{31}x + p_{32}y)(n_2 + p_{21}x + p_{22}y) - (m_2 + p_{21}x + p_{22}y)(n_3 + p_{31}x + p_{32}y). \end{aligned}$$

Além disso, a projeção do campo deslizante normalizado (4.5) em  $\mathbb{R}^2$  possui um único equilíbrio localizado em

$$P_e = (P_{e_x}, P_{e_y}),$$

onde

$$\begin{aligned} P_{e_x} &= \frac{p_{32}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{22}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{12}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{-\det(R)}, \\ P_{e_y} &= \frac{p_{31}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{21}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{11}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{\det(R)}, \end{aligned}$$

com

$$\det(R) = (n_1^+ - n_1^-)(p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31}) + (n_2^+ - n_2^-)(p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32}) + (n_3^+ - n_3^-)(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}).$$

Portanto, o campo (4.1) tem um pseudo equilíbrio em  $(P_{e_x}, P_{e_y}, 0) \in \Sigma$ .

*Demonstração.* Sabemos que o campo deslizante  $\tilde{Z}(\mathbf{x})$  é dado por

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \frac{Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x})}{Yh(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})},$$

enquanto o campo deslizante normalizado  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  é dado por

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}),$$

com  $\mathbf{x}^\top = (x, y, 0) \in \Sigma$ .

Observe que,

$$\begin{cases} Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) = (b_1, b_2, b_3); \\ Xh_\mu(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}) = (b_4, b_5, b_6); \\ Yh_\mu(\mathbf{x}) - Xh_\mu(\mathbf{x}) = n_3^- - n_3^+; \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} b_1 = (n_3^- + p_{31}x + p_{32}y)(n_1^+ + p_{11}x + p_{12}y); \\ b_2 = (n_3^- + p_{31}x + p_{32}y)(n_2^+ + p_{21}x + p_{22}y); \\ b_3 = (n_3^- + p_{31}x + p_{32}y)(n_3^+ + p_{31}x + p_{32}y); \\ b_4 = (n_3^+ + p_{31}x + p_{32}y)(n_1^- + p_{11}x + p_{12}y); \\ b_5 = (n_3^+ + p_{31}x + p_{32}y)(n_2^- + p_{21}x + p_{22}y); \\ b_6 = (n_3^+ + p_{31}x + p_{32}y)(n_3^- + p_{31}x + p_{32}y). \end{cases}$$

Sendo assim, segue que o campo deslizante é dado por

$$\tilde{Z}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{n_3^- - n_3^+} (\widehat{F}_1(x, y), \widehat{F}_2(x, y), 0),$$

e o campo deslizante normalizado é dado por

$$\widehat{Z}_\mu(\mathbf{x}) = (\widehat{F}_1(x, y), \widehat{F}_2(x, y), 0),$$

onde

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(x, y) &= (n_3^- + p_{31}x + p_{32}y)(n_1 + p_{11}x + p_{12}y) - (m_1 + p_{11}x + p_{12}y)(n_3 + p_{31}x + p_{32}y), \\ \widehat{F}_2(x, y) &= (m_3 + p_{31}x + p_{32}y)(n_2 + p_{21}x + p_{22}y) - (m_2 + p_{21}x + p_{22}y)(n_3 + p_{31}x + p_{32}y). \end{aligned}$$

Além disso, sabemos que o ponto de equilíbrio do campo deslizante normalizado é dado por  $P_e = (x_0, y_0, 0)$  tal que  $\widehat{Z}(x_0, y_0, 0) = (0, 0, 0)$ , isto é, que  $\widehat{F}_1(x_0, y_0) = 0$  e  $\widehat{F}_2(x_0, y_0) = 0$ . Assim, para determinarmos o ponto de equilíbrio, basta resolvermos o seguinte sistema linear

$$\begin{aligned} (n_3^- + p_{31}x_0 + p_{32}y_0)(n_1 + p_{11}x_0 + p_{12}y_0) - (m_1 + p_{11}x_0 + p_{12}y_0)(n_3 + p_{31}x_0 + p_{32}y_0) &= 0, \\ (m_3 + p_{31}x_0 + p_{32}y_0)(n_2 + p_{21}x_0 + p_{22}y_0) - (m_2 + p_{21}x_0 + p_{22}y_0)(n_3 + p_{31}x_0 + p_{32}y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Deste modo, segue que

$$\begin{cases} x_0 = \frac{p_{32}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{22}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{12}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{-\det(R)}, \\ y_0 = \frac{p_{31}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{21}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{11}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{\det(R)}, \end{cases}$$

onde

$$\det(R) = (n_1^+ - n_1^-)(p_{21}p_{32} - p_{22}p_{31}) + (n_2^+ - n_2^-)(p_{12}p_{31} - p_{11}p_{32}) + (n_3^+ - n_3^-)(p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}).$$

Denotando  $P_{e_x} = x_0$  e  $P_{e_y} = y_0$ , segue que  $P_e = (P_{e_x}, P_{e_y}, 0)$  é o ponto de equilíbrio do campo  $\widehat{Z}(\mathbf{x})$ , onde

$$P_{e_x} = \frac{p_{32}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{22}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{12}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{-\det(R)},$$

$$P_{e_y} = \frac{p_{31}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{21}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{11}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)}{\det(R)},$$

Considere  $Proj(\widehat{Z}\mathbf{x})$ , a projeção do campo deslizante normalizado em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que, a matriz jacobiana de  $Proj(\widehat{Z}\mathbf{x})$  é dada por

$$J(Proj(\widehat{Z}\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} (n_3^- - n_3^+)p_{11} + (n_1^+ - n_1^-)p_{31} & (n_3^- - n_3^+)p_{12} + (n_1^+ - n_1^-)p_{32} \\ (n_3^- - n_3^+)p_{21} + (n_2^+ - n_2^-)p_{31} & (n_3^- - n_3^+)p_{22} + (n_2^+ - n_2^-)p_{32} \end{pmatrix}.$$

Por fim, assumindo a hipótese **H5** conseguimos garantir que existe apenas um ponto no qual o campo deslizante se anula. Isso decorre do fato que o determinante da matriz jacobiana da projeção do campo deslizante, denotada por  $J(Proj(\widehat{Z}\mathbf{x}))$ , é um múltiplo escalar do determinante da matriz  $R$ . A saber,

$$J(Proj(\widehat{Z}\mathbf{x})) = -(n_3^- - n_3^+) \det(R)$$

Assim, assumindo  $\det(R) \neq 0$  e  $n_3^+ \neq n_3^-$ , isto implica que  $\det(J) \neq 0$ .  $\square$

Observe que, se considerarmos as matrizes  $G_1$  e  $G_2$ , com

$$G_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & n_1^- & n_1^+ \\ p_{21} & n_2^- & n_2^+ \\ p_{31} & n_3^- & n_3^+ \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = \begin{pmatrix} p_{12} & n_1^- & n_1^+ \\ p_{22} & n_2^- & n_2^+ \\ p_{32} & n_3^- & n_3^+ \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{cases} \det(G_1) &= -(p_{31}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{21}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{11}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)), \\ \det(G_2) &= -(p_{32}(n_2^- n_1^+ - n_1^- n_2^+) + p_{22}(n_1^- n_3^+ - n_3^- n_1^+) + p_{12}(n_3^- n_2^+ - n_2^- n_3^+)). \end{cases}$$

Assim, conseguimos escrever o ponto de pseudo equilíbrio da seguinte forma

$$P_e = \left( \frac{\det(G_2)}{\det(R)}, -\frac{\det(G_1)}{\det(R)}, 0 \right).$$

A seguir apresentaremos um resultado que nos auxiliará a relacionar o sistema (4.1) com o sistema (3.1) e no decorrer da demonstração utilizaremos a escrita do pseudo equilíbrio que acabamos de apresentar.

**Proposição 4.4.** *Assumindo **H3**, **H4** e **H5**, conseguimos escrever o sistema (4.1) da seguinte forma*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} T\mathbf{x} + (\alpha - 1)b, & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0, \\ T\mathbf{x} + \alpha b, & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde a função  $h(\mathbf{x}) = z$ ,  $\mathbf{x}^T = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix},$$

com  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \nu, \beta, \rho \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Assumindo a hipótese **H3**, podemos supor  $p_{32} \neq 0$  e utilizar a seguinte mudança de coordenada

$$\mathbf{y} = S(\mathbf{x} - P_e),$$

onde  $\mathbf{x}$  é a coordenada usual do sistema (4.1) e  $S = S_2 S_1$ , onde

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad S_2 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com

$$\begin{cases} r_{11} &= (p_{11} - p_{22})p_{31} + p_{21}p_{32} - \frac{p_{12}p_{31}^2}{p_{32}}, \\ r_{12} &= p_{22} + p_{33} + \frac{p_{12}p_{31}}{p_{32}}, \\ r_{13} &= p_{13}p_{31} + p_{32}p_{23} - (p_{12}p_{31} + p_{22}p_{32})\frac{p_{33}}{p_{32}}, \\ P_e &= \frac{1}{\det(R)}(\det(G_1), -\det(G_2), 0). \end{cases}$$

Note que, a variedade  $\Sigma$  permanece a mesma do sistema (4.1), uma vez que a mudança de coordenadas não altera a função  $h$ . Sendo assim, ao aplicarmos a mudança de coordenadas, temos

$$\dot{\mathbf{y}} = S(\dot{\mathbf{x}}).$$

Deste modo, segue que

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{cases} X(\mathbf{y}), & \text{se } h(\mathbf{y}) > 0, \\ Y(\mathbf{y}), & \text{se } h(\mathbf{y}) < 0, \end{cases}$$

onde temos

$$\begin{cases} X(\mathbf{y}) = S(P(S^{-1}(\mathbf{y}) + P_e) + n^+) = SPS^{-1}\mathbf{y} + S(P(P_e) + n^+) \\ Y(\mathbf{y}) = S(P(S^{-1}(\mathbf{y}) + P_e) + n^-) = SPS^{-1}\mathbf{y} + S(P(P_e) + n^-). \end{cases}$$

Observe que,

$$SPS^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S(P(P_e) + n^-) = \alpha \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S(P(P_e) + n^+) = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix},$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = p_{11} + p_{22} + p_{33}; \\ a_{12} = -p_{11}(p_{22} + p_{33}) + p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} - p_{22}p_{33} + p_{23}p_{32}; \\ a_{13} = p_{11}p_{22}p_{33} - p_{11}p_{23}p_{32} - p_{12}p_{21}p_{33} + p_{12}p_{23}p_{31} + p_{13}p_{21}p_{32} - p_{13}p_{22}p_{31}; \\ \alpha = \frac{Yh(P_e)}{Yh(P_e) - Xh(P_e)}; \\ \nu = \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} n_1^- - n_1^+ \\ n_2^- - n_2^+ \\ n_3^- - n_3^+ \end{pmatrix}; \\ \beta = p_{31}(n_1^- - n_1^+) + p_{32}(n_2^- - n_2^+) + p_{33}(n_3^- - n_3^+) \\ \rho = Yh(P_e) - Xh(P_e) = n_3^- - n_3^+ \end{array} \right.$$

Observe que,  $a_{11} = \text{tr}(P)$ ,  $a_{12} = -\text{tr}(\text{Adj}(P))$  e  $a_{13} = \det(P)$ . Deste modo, denotando  $T = SPS^{-1}$  e

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ \beta \\ \rho \end{pmatrix},$$

segue que

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{cases} X(\mathbf{y}) = T(\mathbf{y}) + (\alpha - 1)\mathbf{b}, & \text{se } h(\mathbf{y}) > 0, \\ Y(\mathbf{y}) = T(\mathbf{y}) + \alpha\mathbf{b}, & \text{se } h(\mathbf{y}) < 0. \end{cases}$$

O que conclui a demonstração.  $\square$

A seguir mostraremos que se  $T$  possui autovalores reais e distintos conseguimos uma mudança de coordenadas de forma que o campo  $X(\mathbf{y})$  é levado em um campo com a mesma estrutura do campo  $X(\mathbf{x})$  estudado no Capítulo 3.

**Teorema 4.1.** *Se campo (4.6) satisfaz a hipótese  $\mathbf{H1}(\mathbf{a})$ , então existe uma aplicação  $Q(\mathbf{x}) = K\mathbf{x} + L$  que leva o sistema (4.6) em um sistema da forma*

$$\dot{\theta} = \begin{cases} KTK^{-1}\theta, & \text{se } \theta_3 > z_c, \\ KTK^{-1}\theta - K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 < z_c. \end{cases} \quad (4.7)$$

*Demonstração.* Para demonstrar este resultado, vamos mostrar que existe uma aplicação que faz com que o sistema (4.1) fique da na forma do sistema (4.7). Pela Proposição 4.4, sabemos que existe uma transformação  $T$ , tal que leva o sistema (4.1) no sistema (4.6). Considerando o sistema (4.6), o ponto crítico do campo  $X(\mathbf{y})$  será denotado por

$$\mathbf{y}_c = (x_c, y_c, z_c) = (1 - \alpha)T^{-1}\mathbf{b}.$$

Vamos realizar uma mudança de variável para levar o ponto crítico do campo  $X(\mathbf{y})$  para a origem. Dito isso, considere a mudança de variável  $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_c$ . Assim, temos o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} X(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}), & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Supondo que o sistema (4.6) satisfaz a hipótese **H1(a)**, sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  os autovalores distintos de  $T$ , daí sabemos que  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda + a_{13}.$$

Além disso as relações de Girard associam os coeficientes da equação polinomial de terceiro grau com as raízes por meio das seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a_{11} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \\ a_{12} &= -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3); \\ a_{13} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Deste modo, os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são  $v_1 = (\lambda_1^2, \lambda_1, 1)$ ,  $v_2 = (\lambda_2^2, \lambda_2, 1)$  e  $v_3 = (\lambda_3^2, \lambda_3, 1)$ , respectivamente. Como os autovalores são distintos, então  $\{v_1, v_2, v_3\}$  forma uma base para o autoespaço de  $T$ . Desta maneira, considere a matriz  $H$  dada por

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, utilizando a mudança  $\mathbf{x}_1 = H^{-1}\mathbf{x}$ , conseguimos escrever o sistema (4.6) da forma

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{cases} H^{-1}TH\mathbf{x}_1, & \text{se } h(\mathbf{x}_1) > 0, \\ H^{-1}TH\mathbf{x}_1 + H^{-1}\mathbf{b}, & \text{se } h(\mathbf{x}_1) < 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$  e  $h(\mathbf{x}_1) = x_1 + y_1 + z_1 + z_c$ . Agora, considere a mudança de variável  $P_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ , onde  $\mathbf{u} = (x_2, y_2, z_2)$  e  $P_1$  é dada por

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao utilizar essa mudança de variável, conseguimos fazer com que a função  $h$  esteja na forma do sistema (3.1), uma vez que  $h(\mathbf{u}) = z_2 + z_c$  e o sistema (4.8) pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{cases} P_1(H^{-1}TH)P_1^{-1}\mathbf{u}, & \text{se } z_2 > -z_c, \\ P_1(H^{-1}TH)P_1^{-1}\mathbf{u} + P_1H^{-1}b, & \text{se } z_2 < -z_c. \end{cases} \quad (4.9)$$

Por fim, para que o sistema (4.9) esteja na forma do sistema (3.1), basta existir uma matriz  $P_2$  que satisfaça

$$P_2(P_1(H^{-1}TH)P_1^{-1}) = AP_2, \quad (4.10)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_1 - \lambda_3} & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Como a função  $h$  já está da forma que queremos, precisamos que a matriz  $P_2$  não altere a terceira coordenada na mudança de variável, daí  $P_2$  precisa ser da forma

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando a equação (4.10), temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} a_{11}(\lambda_1 - \lambda_2) + a_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) = 0; \\ a_{13}(\lambda_2 - \lambda_3) = 0; \\ a_{23}(\lambda_3 - \lambda_1) = 0; \\ \frac{a_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)} - a_{22}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = 0; \\ -(a_{21} - 1)(\lambda_1 - \lambda_3) = 0; \\ (\lambda_3 - \lambda_1)a_{22} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0; \end{cases}$$

cuja a solução é dada por

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = 1 \\ a_{13} = 0 \\ a_{21} = 1 \\ a_{22} = -\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} \\ a_{23} = 0. \end{cases}$$

Sendo assim, considere a mudança de variável  $P_2\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , com  $\mathbf{v} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ . Daí, conseguimos escrever o sistema (4.9) da forma

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{cases} A\mathbf{v}, & \text{se } h(\mathbf{v}) > 0, \\ A\mathbf{v} + P_2H^{-1}\mathbf{b}, & \text{se } h(\mathbf{v}) < 0, \end{cases}$$

com  $h(\mathbf{v}) = z_3 + z_c$ . Portanto, se (4.6), satisfaz **H1(a)**, então existe a transformação é dada por  $Q(\mathbf{x}) = K\mathbf{x} + L$ , onde

$$K = P_2P_1H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} & -\frac{\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} & -\frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$L = (\alpha - 1)KT^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{(\alpha - 1)(a_{13}\gamma(\lambda_1 + \lambda_3) - a_{13}\beta + \lambda_1\lambda_3(a_{12}\rho + a_{11}\beta - \nu))}{a_{13}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \frac{(\alpha - 1)(a_{13}\gamma + \lambda_3(a_{12}\rho + a_{11}\beta - \nu))}{a_{13}\lambda_1 - \lambda_3} \\ -\frac{(\alpha - 1)(a_{12}\rho + a_{11}\beta - \nu)}{a_{13}} \end{pmatrix},$$

tal que a aplicação  $Q$  leva o sistema (4.6) no sistema da forma do sistema (4.7). O fato do sistema (4.6) satisfazer a hipótese **H1(a)** foi fortemente utilizado na diagonalização da matriz  $T$  e assim conseguimos garantir a existência da aplicação  $Q$ . Além disso, observe que a mudança é dada por  $\theta = K\mathbf{x} + L$ , isto é,  $\mathbf{x} = K^{-1}(\theta - L)$ , onde  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ . Donde, temos

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= h(K^{-1}(\theta - L)) \\ &= h(K^{-1}\theta - K^{-1}((\alpha - 1)KT^{-1}\mathbf{b})) \\ &= h(K^{-1}\theta - (\alpha - 1)T^{-1}\mathbf{b}) \\ &= h(K^{-1}\theta + \mathbf{y}_c) \\ &= \theta_3 + z_c. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\dot{\theta} = \begin{cases} K(TK^{-1}(\theta - L) + (\alpha - 1)\mathbf{b}), & \text{se } \theta_3 > z_c, \\ K(TK^{-1}(\theta - L) + \alpha\mathbf{b}), & \text{se } \theta_3 < z_c, \end{cases}$$

simplificando temos

$$\dot{\theta} = \begin{cases} KTK^{-1}\theta - KTK^{-1}((\alpha - 1)KT^{-1}\mathbf{b}) + (\alpha - 1)K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 > z_c, \\ KTK^{-1}\theta - KTK^{-1}((\alpha - 1)KT^{-1}\mathbf{b}) + \alpha K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 < z_c. \end{cases}$$

Dessa maneira, segue que

$$\dot{\theta} = \begin{cases} KTK^{-1}\theta - (\alpha - 1)K\mathbf{b} + (\alpha - 1)K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 > z_c, \\ KTK^{-1}\theta - K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 < z_c, \end{cases}$$

o que implica que

$$\dot{\theta} = \begin{cases} KTK^{-1}\theta, & \text{se } \theta_3 > z_c, \\ KTK^{-1}\theta - K\mathbf{b}, & \text{se } \theta_3 < z_c. \end{cases}$$

Assim, concluímos a demonstração.  $\square$

A seguir apresentamos um exemplo numérico da conexão de Shilnikov deslizante em sistemas da forma (4.7).

**Exemplo 4.4.** *Um exemplo explícito da conexão de Shilnikov deslizante no sistema (4.7) é obtido ao considerarmos o conjunto de parâmetros*

$$P_\mu = \left\{ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, c_1 = \frac{1 + 2e^2}{(-1 + e^2)^2}, c_2 = \frac{1 + 3e^2}{(-1 + e^2)}, c_3 = 1, \mu > 0, t = 2 \right\},$$

onde a conexão é exibida na Figura 12. Utilizando o conjunto de parâmetros  $P_\mu$ , temos o seguinte sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = Z_\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} X(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) > 0, \\ Y(\mathbf{x}), & \text{se } h_\mu(\mathbf{x}) < 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{x}^\top = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $h_\mu(\mathbf{x}) = z + \mu$ ,

$$X(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad e \quad Y(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1 + 2e^2}{(-1 + e^2)^2} \\ \frac{1 + 3e^2}{(-1 + e^2)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que o sistema (4.11) possui a conexão de Shilnikov deslizante. Para isso precisamos mostrar que existe um ponto  $q(\mu) \in \Sigma_\mu^t$ , um ponto  $p(\mu) \in \Sigma_\mu^s$  e  $t_0(\mu) > 0$ , satisfazendo:

1.  $q(\mu)$  é um ponto de dobra visível regular do campo.
2.  $p(\mu)$  é um pseudo-foco repulsor do campo deslizante normalizado.
3. A trajetória  $X$  associada a  $q(\mu)$ ,  $\psi_X(t, q(\mu))$ , está contida no conjunto  $\{\mathbf{x} : h_\mu(\mathbf{x}) > 0\}$  para  $t \in (0, t_0(\mu))$  e  $\psi_X(t_0(\mu), q(\mu)) = p(\mu)$ .
4. A trajetória do campo deslizante com condição inicial em  $q(\mu)$  converge para o pseudo-equilíbrio quando  $t \rightarrow -\infty$  e  $\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))$  está contida na região deslizante para  $t < 0$ .

Sabemos que  $\Sigma_\mu = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : h_\mu(\mathbf{x}) = 0\}$ , considere  $q(\mu) = \left( \left( -2 - \frac{1}{e^2} \right) \mu, 2\mu, -\mu \right)$ . Vamos mostrar que ele é um ponto de dobra visível regular para o sistema (4.11), para isso basta mostrar que  $q(\mu)$  é um ponto de dobra visível para o campo  $X(\mathbf{x})$  e que  $Yh_\mu(q(\mu)) > 0$ . Observe que, as derivadas de Lie da função  $h$  ao longo dos campos  $X(\mathbf{x})$  e  $Y(\mathbf{x})$  são dadas por

$$Xh_\mu(\mathbf{x}) = y - 2\mu \quad e \quad Yh_\mu(\mathbf{x}) = 1 + y - 2\mu,$$

com  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$ . Deste modo, para  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$  temos

$$S_{X_\mu} = \{(x, 2\mu, -\mu) \in \Sigma_\mu\} \quad e \quad Yh_\mu(\mathbf{x}) > 0, \quad se \quad y > 2\mu - 1,$$

onde  $S_{X_\mu}$  é a região de tangência do campo  $X(\mathbf{x})$ . Sendo assim,  $q(\mu) \in S_X$  e observe que a derivada de Lie de ordem superior  $X^2h_\mu$  em  $\mathbf{x} \in \Sigma_\mu$  é expressa por

$$X^2h_\mu(\mathbf{x}) = 2x + 6\mu,$$

o que implica que

$$X^2h_\mu(\mathbf{x}) > 0 \quad se \quad x > -3\mu.$$

Assim, segue que dado  $\mathbf{x} \in S_X$  é um ponto de dobra visível para o campo  $X(\mathbf{x})$  se  $x > -3\mu$ . Note que,  $\left( -2 - \frac{1}{e^2} \right) \mu > -3\mu$  e portanto,  $q(\mu) = \left( \left( -2 - \frac{1}{e^2} \right) \mu, 2\mu, -\mu \right)$  é um ponto de dobra visível para o campo  $X(\mathbf{x})$  e além disso,  $Yh_\mu(q(\mu)) > 0$ , o que implica que o ponto

$$q(\mu) = \left( \left( -2 - \frac{1}{e^2} \right) \mu, 2\mu, -\mu \right)$$

é um ponto de dobra visível regular para o campo (4.11). Note que, o campo deslizante normalizado associado ao campo (4.11) em  $\mathbf{x} \in \Sigma^s$  é expresso por

$$\widehat{Z}(\mathbf{x}) = \left( x - \frac{(1 + 2e^2)(y - 2\mu)}{(e^2 - 1)^2}, \frac{2(3e^2\mu + \mu + (e^2 - 1)x - 2y)}{e^2 - 1}, 0 \right)$$

e conseqüentemente, o pseudo equilíbrio do campo deslizante normalizado é dado por  $P_{e_\mu} = \left( -\left( (1 + 2e^2) \mu \right), (1 + 2e^2 - e^4) \mu, -\mu \right)$ , precisamos verificar que o pseudo equilíbrio está na região de deslize, para isso vamos avaliar  $Xh_\mu$  e  $Yh_\mu$  em  $P_{e_\mu}$ . Sendo assim, temos

$$\begin{cases} Xh_\mu(P_{e_\mu}) = -e^4\mu + 2e^2\mu - \mu; \\ Yh_\mu(P_{e_\mu}) = -e^4\mu + 2e^2\mu - \mu + 1. \end{cases}$$

Como  $0 < \mu < \frac{1}{1 - 2e^2 + e^4}$ , então segue que  $Xh_\mu(P_{e_\mu}) < 0$  e  $Yh_\mu(P_{e_\mu}) > 0$  e, portanto, o pseudo equilíbrio está na região de deslize. Observe que, a projeção do campo deslizante normalizado em  $\mathbb{R}^2$  é dada por

$$\text{Proj}(\widehat{Z}(\mathbf{x})) = \left( x - \frac{(1 + 2e^2)(y - 2\mu)}{(e^2 - 1)^2}, \frac{2(3e^2\mu + \mu + (e^2 - 1)x - 2y)}{e^2 - 1} \right),$$

cuja matriz Jacobiana é dada por

$$J(\text{Proj}(\widehat{Z}(\mathbf{x}))) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1 + 2e^2}{(e^2 - 1)^2} \\ 2 & -\frac{4}{e^2 - 1} \end{pmatrix}$$

e sabemos que os autovalores da matriz  $J(\text{Proj}(\widehat{Z}_\mu(\mathbf{x})))$  são

$$\beta_{1,2} = \frac{e^4 - 6e^2 + 5 \pm i\sqrt{-1 + 12e^2 - 22e^4 + 12e^6 - e^8}}{2(e^2 - 1)^2}.$$

Deste modo, conseguimos garantir que os autovalores são complexos com parte real positiva. Assim, segue que o ponto de equilíbrio da projeção do campo deslizante normalizado é um foco repulsor e portanto, o ponto de equilíbrio do campo deslizante normalizado é um foco repulsor e desta maneira, consideraremos  $p(\mu) = P_{e_\mu}$ . Desta forma, provamos os dois primeiros itens que devem ser satisfeitos, resta provar os itens (3) e (4). Cabe destacar que, a solução do campo  $X(\mathbf{x})$  é dada por

$$\psi_X(t, q(\mu)) = \mu \left( \left( -2 - \frac{1}{e^2} \right) e^t, e^{t-2} (-e^{2t} + 1 + 2e^2), (-e^{t-2}) (-2e^t + e^{2t} - e^{t+2} + 1 + 2e^2) \right)$$

e a solução do campo deslizante normalizado com condição inicial em  $q(\mu)$  é dada por

$$\psi_{\widehat{Z}_\mu}(t, q(\mu)) = (P(t)\mu, Q(t)\mu, -\mu),$$

onde

$$\begin{cases} P(t) = (1 + 2e^2) \mu \left( \frac{(e^2 - 1)ve^{bt} \cos(tu) + (3 - 4e^2 + e^4)e^{bt} \sin(tu)}{e^2v} - 1 \right), \\ Q(t) = \mu \left( \frac{(e^2 - 1)^2 e^{bt-2} (e^2v \cos(tu) + (-4 - 5e^2 + e^4) \sin(tu))}{v} - e^4 + 2e^2 + 1 \right), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{-1 + 10e^2 - e^4}}{2 - 2e^2}; \\ v = \sqrt{-1 + 10e^2 - e^4}; \\ b = \frac{e^2 - 5}{2(e^2 - 1)}. \end{cases}$$

Para provarmos o item (3) precisamos garantir que  $\psi_X(t, q(\mu))$ , está contida no conjunto  $\{\mathbf{x} : h_\mu(\mathbf{x}) > 0\}$  para  $t \in (0, t_0(\mu))$  e  $\psi_X(t_0(\mu), q(\mu)) = p(\mu)$ . Observe que,

$$\psi_X(2, q(\mu)) = \left( -\left(1 + 2e^2\right)\mu, \left(1 + 2e^2 - e^4\right)\mu, -\mu \right) = p(\mu).$$

Sendo assim, vamos provar que  $h_\mu(\psi_X(t, q(\mu))) > 0$  para todo  $t \in (0, 2)$ . Note que,

$$h_\mu(\psi_X(t, q(\mu))) = \mu \left( 1 + e^t(-e^{-2} - 2) + e^{2t}(1 + 2e^{-2}) - e^{-2}e^{3t} \right)$$

é uma combinação linear das funções  $\{1, e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$  e portanto, pelo Exemplo 1.5,  $h_\mu(\psi_X(t, q(\mu)))$  possui no máximo 3 zeros positivos no intervalo  $[0, 2]$  e é fácil ver que

$$h_\mu(\psi_X(0, q(\mu))) = h_\mu(\psi_X(2, q(\mu))) = 0.$$

Além disso, temos

$$\begin{cases} \frac{dh_\mu(\psi_X(t, q(\mu)))}{dt} &= -2\mu e^t + 2\mu e^{2t} + 4\mu e^{2t-2} - 3\mu e^{3t-2} - \mu e^{t-2}, \\ \frac{d^2h_\mu(\psi_X(t, q(\mu)))}{dt^2} &= -2\mu e^t + 4\mu e^{2t} + 8\mu e^{2t-2} - 9\mu e^{3t-2} - \mu e^{t-2}. \end{cases}$$

Daí, segue que

$$\begin{cases} \frac{dh_\mu(\psi_X(0, q(\mu)))}{dt} &= 0, \\ \frac{d^2h_\mu(\psi_X(0, q(\mu)))}{dt^2} &= 2\mu - \frac{2\mu}{e^2}. \end{cases}$$

Deste modo,  $t = 0$  tem multiplicidade 2 e, portanto,  $t = 0$  e  $t = 2$  são os únicos zeros positivos da função  $C^\infty$   $h_\mu(\psi_X(t, q(\mu)))$  e como  $\frac{d^2h_\mu(\psi_X(0, q(\mu)))}{dt^2} = 2\mu - \frac{2\mu}{e^2} > 0$  e  $q(\mu)$  é um ponto de dobra visível, então segue que  $h_\mu(\psi_X(t, q(\mu))) > 0$  para todo  $t \in (0, 2)$ . Por fim, resta provar que  $\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))$  está contida na região deslizante para  $t < 0$ , pois como  $p(\mu)$  é um foco repulsor então para  $t \rightarrow -\infty$ , temos  $\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu)) \rightarrow p(\mu)$ .

Sendo assim, para provarmos o item (4), precisamos provar que  $Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) < 0$  e  $Yh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) > 0$ , para todo  $t < 0$ . Observe que,

$$\begin{cases} Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) = 2\mu \left( e^{bt} \left( \frac{a \sin(tu)}{e^2 \sqrt{-1+10e^2-e^4}} + \cos(tu) \right) - 1 \right), \\ Yh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) = 2\mu e^{bt} \left( \frac{a \sin(tu)}{e^2 \sqrt{-1+10e^2-e^4}} + \cos(tu) \right) - 2\mu + 1, \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{-1+10e^2-e^4}}{2-2e^2}, \\ a = -2 + e^2 + 5e^4, \\ b = \frac{e^2 - 5}{2(e^2 - 1)}. \end{cases}$$

Como as funções  $Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu)))$  e  $Yh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu)))$  possuem combinações lineares de senos e cossenos, conseguimos reescrevê-las como

$$\begin{cases} Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) = 2\mu \left( \omega e^{bt} \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) + tu \right) - 1 \right), \\ Yh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu))) = 1 + 2\mu \left( \omega e^{bt} \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) + tu \right) - 1 \right), \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{(-2+e^2+5e^4)^2}{(e^2\sqrt{-1+10e^2-e^4})^2} + 1}, \\ v = e^2\sqrt{-1+10e^2-e^4}. \end{cases}$$

Começaremos analisando o sinal da função  $g_1(t) = Xh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu)))$ . Note que, a função  $g_1(t)$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} g_1(0) = 0; \\ g_1(t_1(n)) = -2\mu, \quad \text{onde } t_1(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right)}{u}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}; \\ \frac{dg}{dt}(t) = 2\mu\omega e^{bt} \sqrt{\frac{b^2}{u^2} + 1} \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{u}{b} \right) + tu \right) = 0 \iff t = t_2(n); \\ g_1(t_2(n)) = 2\mu \left( -\frac{(-1)^n u \omega e^{bt_2(n)}}{b\sqrt{\frac{u^2}{b^2} + 1}} - 1 \right); \end{cases}$$

onde  $t_2(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{u}{b} \right)}{u}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, a função  $g_2(t) = Yh_\mu(\psi_{\widehat{Z}}(t, q(\mu)))$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} g_2(0) = 1; \\ g_2(t_1(n)) = -2\mu + 1, \quad \text{onde } t_1(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right)}{u}, \quad \text{com } n \in \mathbb{N}; \\ \frac{dg}{dt}(t) = 2\mu\omega e^{bt} \sqrt{\frac{b^2}{u^2} + 1} \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{u}{b} \right) + tu \right) = 0 \iff t = t_2(n); \\ g_2(t_2(n)) = -\frac{2\mu(-1)^n u \omega e^{bt_2(n)}}{b\sqrt{\frac{u^2}{b^2} + 1}} - 2\mu + 1 \end{cases}$$

onde  $t_2(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1} \left( \frac{v}{a} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{u}{b} \right)}{u}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . outra tentativa:

Note que, o campo deslizante está definido entre as retas  $y = 2\mu$  e  $y = 2\mu - 1$ , então mostrar que a solução do deslizante está contida na região de deslize é equivalente a mostrar que  $\mu Q(t)$  está limitada entre as retas, isto é,  $2\mu - 1 < \mu Q(t) < 2\mu$ . Observe que,  $\mu Q(t)$  pode ser escrito como

$$\mu Q(t) = \mu \left( \frac{(e^2 - 1)^2 \omega e^{bt-2} \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{e^2 v}{a} \right) + tu \right)}{v} - e^4 + 2e^2 + 1 \right),$$

onde

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{-1 + 10e^2 - e^4}}{2 - 2e^2}; \\ \omega = 2\sqrt{4 + 10e^2 + 4e^4}; \\ v = \sqrt{-1 + 10e^2 - e^4}; \\ a = -4 - 5e^2 + e^4; \\ b = \frac{e^2 - 5}{2(e^2 - 1)}. \end{cases}$$

Vamos mostrar que a função  $g(t) = \frac{1}{(e^2 - 1)^2 \mu} (\mu Q(t) - 2\mu)$  é negativa para  $t < 0$ , fazendo uma reparametrização do tempo para  $t = s/u$ , isto é equivalente a mostrar que

$$g(s) = \frac{e^{-\frac{(e^2-5)s}{\sqrt{-1+10e^2-e^4}}-2} \omega \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{e^2v}{a}\right) + s\right)}{v} - 1 < 0,$$

para  $s > 0$ . Além disso, observe que  $g(s)$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $g(0) = 0$ ;
- $g(s_1(n)) = -1$ , onde  $s_1(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{e^2v}{a}\right)}{u}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ;
- $\frac{dg}{ds}(t) = \frac{2(e^2 - 1)k\mu e^{\frac{bs}{u}-2} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{e^2v}{a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{u}{b}\right) + s\right)}{1 - 10e^2 + e^4} = 0 \iff s = s_2(n)$ , onde  $s_2(n) = \frac{n\pi - \tan^{-1}\left(\frac{e^2v}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{u}{b}\right)}{u}$  e  $k = 4\sqrt{6 + 15e^2 + 6e^4}$ ;
- $g(s_2(n)) = -1 + \frac{(-1)^n e^{-\frac{(e^2-5)s_2(n)}{\sqrt{-1+10e^2-e^4}}-2} \omega \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{b}\right)\right)}{v}$ .

Como estamos interessados em avaliar  $g$  em  $s$  positivo, então considere  $n_0 \in \mathbb{N}$  o primeiro natural tal que  $s_2(n)$  é positivo para todo  $n > n_0$ . Assim, para  $s_2(n) > 0$ , temos  $e^{-\frac{(e^2-5)s_2(n)}{\sqrt{-1+10e^2-e^4}}-2} < 1$ . Deste modo, resta garantir que  $\frac{e^{-2}\omega \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{b}\right)\right)}{v} < 1$ . Substituindo os devidos valores das constantes  $\omega, u, b$  e  $v$ , temos

$$\frac{e^{-2}\omega \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{b}\right)\right)}{v} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{3}(2 + 5e^2 + 2e^4)}}{e^2} < 1.$$

Logo,  $g(s) < 0$  para todo  $s > 0$  e portanto,  $Q(t) < 2\mu$ . Deste modo, pela continuidade de  $\mu Q(t)$ , para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno, temos  $2\mu - 1 < \mu Q(t) < 2\mu$ . Assim, concluímos o exemplo garantindo a existência da conexão de Shilnikov deslizante, que pode ser vista na Figura 12 exibida abaixo.

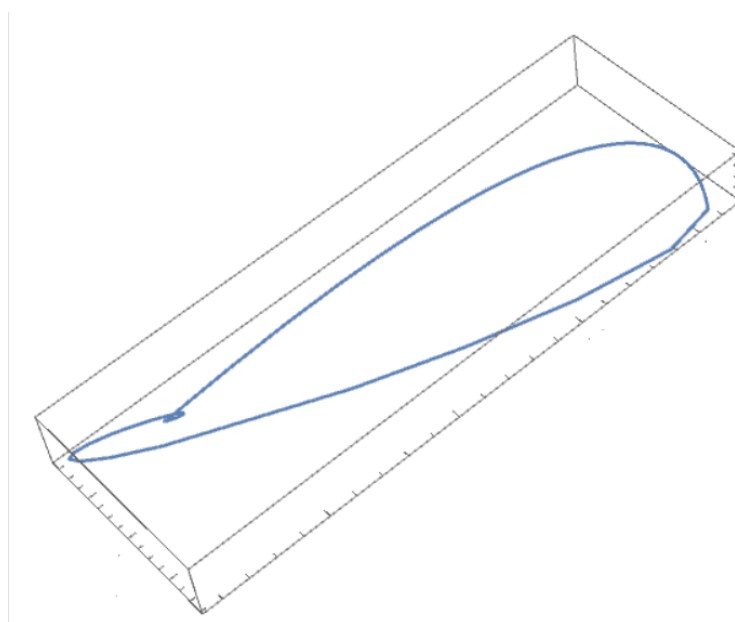


Figura 12 – Conexão de Shilnikov deslizante para o sistema (4.11).

## 5 Conclusão

No presente trabalho, investigamos a conexão de Shilnikov deslizante em sistemas lineares por partes no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Nosso principal objetivo foi explorar a dinâmica complexa associada a essas conexões e entender as condições sob as quais ocorrem. Utilizando a teoria dos Campos de Filippov, conseguimos modelar e analisar os comportamentos deslizantes que surgem em superfícies de descontinuidade.

Sendo assim, apresentamos os principais resultados de (NOVAES; TEIXEIRA, 2019), que garante se  $Z = (X, Y) \in \Omega^r$  possui a conexão de Shilnikov deslizante, então para qualquer vizinhança  $W \subset \Omega^r$  de  $Z = (X, Y)$  contém infinitas classes de  $\Sigma$ -equivalência de campos de Filippov e o outro resultado garante que  $Z_0 = (X, Y) \in \Omega^r$  possui a conexão de Shilnikov deslizante, então, para  $\mu = 0$ , toda vizinhança da conexão de Shilnikov deslizante  $\Gamma_0$  possui infinitas órbitas 1-periódicas de  $Z_0$  e para  $\mu \neq 0$  existe pelo menos uma quantidade finita.

Além de apresentarmos um resultado novo, demonstrando que, sob certas condições, sistemas lineares por partes podem apresentar conexões de Shilnikov deslizantes. Essas condições foram rigorosamente formuladas e provadas. Esse resultado garante a existência da conexão de Shilnikov deslizante em uma família a um parâmetro  $\mu$  de sistemas de equações diferenciais ordinárias suaves por partes em  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, exibimos um exemplo numérico de um sistema que satisfaz o principal resultado desse trabalhos.

Por fim, exibimos evidências numéricas da conexão de Shilnikov deslizante em sistemas que modelam fenômenos físicos, na teoria de controle. Isso mostra que, modelos físicos reais podem apresentar a conexão de Shilnikov deslizante, que pode ser um mecanismo para auxiliar a compreensão desses modelos, visto que esse fenômeno é um indicador para a presença de caos, daí a sua importância.

Este estudo contribui significativamente para a teoria dos sistemas dinâmicos descontínuos ao expandir o entendimento sobre conexões de Shilnikov em contextos deslizantes. A análise detalhada das condições e dos comportamentos dinâmicos associados oferece uma base teórica sólida que pode ser utilizada em diversas aplicações práticas, como na engenharia de controle, biologia matemática e economia. As contribuições teóricas e metodológicas fornecem uma base para futuras investigações e aplicações em diversos campos. Esperamos que este estudo incentive mais pesquisas e avanços na área, contribuindo para o desenvolvimento de sistemas dinâmicos mais robustos e compreensíveis.

## Referências

- BIRKHOFF, G. D. *Dynamical systems*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1927. v. 9. [7](#)
- CRISTIANO, R.; TONON, D. J.; VELTER, M. Q. Hopf-like bifurcations and asymptotic stability in a class of 3d piecewise linear systems with applications. *Journal of Nonlinear Science*, Springer, v. 31, n. 4, p. 65, 2021. [8](#), [9](#), [48](#), [49](#), [50](#)
- FILIPPOV, A. F. Equations with the right-hand side continuous in  $x$  and discontinuous in  $t$ . In: \_\_\_\_\_. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1988. p. 3–47. ISBN 978-94-015-7793-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-015-7793-9_2). [7](#), [9](#), [10](#)
- GLENDINNING, P. A. Shilnikov chaos, filippov sliding and boundary equilibrium bifurcations. *European Journal of Applied Mathematics*, Cambridge University Press, v. 29, n. 5, p. 757–777, 2018.
- GUARDIA, M.; SEARA, T.; TEIXEIRA, M. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. *Journal of Differential Equations*, v. 250, n. 4, p. 1967–2023, 2011. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039610004456>. [9](#), [18](#)
- KARLIN, S.; STUDDEN, W. J. Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics. (*No Title*), 1966. [19](#)
- NOVAES, D. D.; TEIXEIRA, M. A. Shilnikov problem in filippov dynamical systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 29, n. 6, p. 063110, 2019. [7](#), [8](#), [9](#), [19](#), [22](#), [70](#)
- NOVAES, D. D.; TORREGROSA, J. On extended chebyshev systems with positive accuracy. *Journal of mathematical analysis and applications*, Elsevier, v. 448, n. 1, p. 171–186, 2017. [9](#)
- SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979. v. 11. [16](#)