

ELEN MICHELE RODRIGUES

SUPERFÍCIES COMPACTAS CONSTRUÍDAS POR GRUPOS
FUCHSIANOS ASSOCIADOS ÀS TESSELAÇÕES $\{8g-4,4\}$ E
 $\{20n-10,5\}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Mercio Botelho Faria

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal
de Viçosa - Campus Viçosa

T

R696s
2020
Rodrigues, Elen Michele, 1992-
Superfícies compactas construídas por grupos
fuchsianos associados às tesselações $\{8g-4,4\}$ e $\{20n-10,5\}$ /
Elen Michele Rodrigues. - Viçosa, MG, 2020.
133 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Mercio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 127-128.

1. Geometria hiperbólica. 2. Grupos fuchsianos.
3. Teoria dos grafos. 4. Superfícies (Matemática).
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 516.9

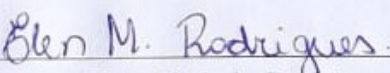
ELEN MICHELE RODRIGUES

SUPERFÍCIES COMPACTAS CONSTRUÍDAS POR GRUPOS
FUCHSIANOS ASSOCIADOS ÀS TESSELAÇÕES $\{8g-4,4\}$ E $\{20n-10,5\}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de dezembro de 2020.

Assentimento:


Elen Michele Rodrigues
Autora


Mercio Botelho Faria
Orientador

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me mostrar a luz e uma saída em todas as vezes que me via no escuro e sem direção. Por me dar forças todas as vezes que pensei não ser capaz.

Agradeço à minha família, pela presença constante em minha vida. Em especial, agradeço aos meus pais Carlos e Maria Inês, pela dedicação, apoio e por compreender a minha ausência nesses anos de estudos. Aos meus irmãos Wallace e Walisson, pelo companheirismo e por atender o chamado sempre que preciso. Esta vitória é nossa!

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, tanto da graduação quanto do mestrado pelas discussões, ajuda durante o estudo e também pela amizade e momentos de descontração. Em especial ao Bhremer pelo apoio, carinho e atenção nestes últimos meses. Ao meu grande amigo Rogério, pela sua presença diária e seus conselhos. Vocês fizeram parte da minha história e tornaram minha trajetória mais leve.

Aos meus amigos do NEU (Núcleo Espírita Universitário) e do projeto Sementes do Amanhã, pela amizade e oportunidade de trabalho e aprendizagem.

Ao professor Mercio, pela orientação e paciência durante esse trabalho.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação pelos ensinamentos e conselhos. Em especial, ao professor Rogério, pela confiança e incentivo durante a graduação e mestrado na UFV e ao professor Edson, pelo auxílio e sugestões.

Aos membros da banca examinadora dessa dissertação pela disponibilidade e sugestões para esse trabalho.

Agradeço à todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

RODRIGUES, Elen Michele, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2020. **Superfícies Compactas Construídas por Grupos Fuchsianos Associados às Tesselações $\{8g-4,4\}$ e $\{20n-10,5\}$.** Orientador: Mercio Botelho Faria.

O objetivo principal desse trabalho é a construção de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos regulares relacionados às tesselações hiperbólicas $\{8g-4,4\}$ e $\{20n-10,5\}$. Através dos grupos fuchsianos estudamos todas as isometrias do plano hiperbólico a fim de encontrarmos emparelhamentos que deem origem a superfícies compactas de gênero $g \geq 2$. O grupo das isometrias de emparelhamentos de arestas de um polígono, quando age de maneira propriamente descontínua no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$, forma um conjunto gerador para o grupo fuchsiano. Além disso, podemos representar o espaço órbita $\mathbb{H}^2/\Gamma$ por esse polígono, que é construído como domínios de Dirichlet. O meio que utilizamos para encontrar esses emparelhamentos foi estudando todos os possíveis caminhos fechados em grafos quadrivalentes imersos em uma superfície de gênero 2. Encontramos também algumas generalizações para alguns destes emparelhamentos.

Palavras-chave: Tesselação hiperbólica. Emparelhamento de arestas. Grafos quadrivalentes em superfícies.

Abstract

RODRIGUES, Elen Michele, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2020. **Compact Surfaces Built by Fuchsian Groups Associated With Tessellations $\{8g-4, 4\}$ and $\{20n-10, 5\}$** . Advisor: Mercio Botelho Faria.

The main objective of this work is the construction of regular hyperbolic polygon edge pairings related to the $\{8g - 4, 4\}$ hyperbolic tessellation. We apply Fuchsian groups to study all the isometries of the hyperbolic plane in order to find pairings that give rise to a compact surface of the genus $g \geq 2$. The group of isometric pairings of a polygon's edge matching, when acting in a discontinuous way in the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$ forms a generator set for the Fuchsian group and. In addition, we can represent the orbit space $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ for this polygon, which is built as Dirichlet domains. The means we used to find these pairings was studying all possible closed paths in quadrivalent graphs immersed in a surface of genus 2. We also found some generalizations for some of these pairings.

Keywords: Hyperbolic tessellation. Pairing edges. Quadrivalent graphs on surfaces.

Lista de Figuras

1.1	Projeção Estereográfica.	18
1.2	Inversão de um ponto em um círculo.	19
1.3	Reflexão de um ponto em uma reta.	20
1.4	Triângulos Hiperbólicos com 0, 1, 2 e 3 vértices ideias.	29
2.1	Domínio fundamental do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$	42
3.1	Construção de um polígono fundamental para um grupo fuchsiano Γ	58
4.1	Grafos K_4 no plano $\mathbb{R}^2$	63
4.2	Grafo imerso em S_1	65
5.1	Grafos que satisfazem a Proposição 5.1	69
5.2	Grafo A	70
5.3	Caminho fechado no Grafo A	71
5.4	Emparelhamento de arestas do polígono hiperbólico regular de 12 arestas relacionados ao caminho fechado dado na Figura 5.2.	72
5.5	Caminhos sobre o Grafo A	73
5.6	Caminhos sobre o Grafo A	73
5.7	Possíveis caminhos no Grafo A (caso C2).	74
5.8	Emparelhamento de arestas polígono hiperbólico 12 arestas relacionado ao caminho fechado da Figura 5.7.	74
5.9	Possíveis caminhos no Grafo A (caso C3).	75
5.10	Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado da Figura 5.9.	75
5.11	Possíveis caminhos no Grafo A (caso C4).	76
5.12	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.11.	77
5.13	Possíveis caminhos no Grafo A (caso C5).	77
5.14	Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado da Figura 5.13.	78
5.15	Possíveis caminhos no Grafo A (caso 2).	78

5.16	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D1).	79
5.17	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.16.	79
5.18	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D2).	80
5.19	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.18.	81
5.20	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D3).	82
5.21	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos dados na Figura 5.20.	83
5.22	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D4).	84
5.23	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.24	85
5.24	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D5).	86
5.25	Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado dado na Figura 5.24.	86
5.26	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D6).	87
5.27	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.26.	88
5.28	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D7).	89
5.29	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.28.	89
5.30	Possíveis caminhos no Grafo A (caso D8).	90
5.31	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.30.	90
5.32	Grafo B	91
5.33	Possíveis caminhos no Grafo B .	91
5.34	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C1).	92
5.35	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.34.	93
5.36	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C2).	94
5.37	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.36.	95
5.38	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C3).	96
5.39	Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.38.	96
5.40	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C4).	97
5.41	Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.40.	98
5.42	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C5).	99

5.43	Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.42.	100
5.44	Possíveis caminhos no Grafo B (caso C6).	101
5.45	Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.44.	101
5.46	Grafo C	102
5.47	Possíveis caminhos no Grafo C	102
5.48	Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.47.	104
5.49	Emparelhamentos de arestas do polígono de 12 arestas.	105
5.50	Grafos com cinco arestas e dois vértices.	107
5.51	Emparelhamentos de arestas do polígono de 10 arestas.	108
6.1	Polígono hiperbólico de 60 arestas com emparelhamento Φ_{60}^2	118
6.2	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^1	121
6.3	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^5	122
6.4	Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^8	123
6.5	0-célula, 1-célula, e 2-células.	131
6.6	Exemplos superfícies.	132

Sumário

1	O Plano Hiperbólico	14
1.1	Notas Históricas	14
1.2	Transformações de Möbius	17
1.2.1	Inversões	17
1.2.2	Reflexões	19
1.2.3	Transformações de Möbius	21
1.3	Geometria Hiperbólica Plana	23
1.3.1	O Modelo do Plano de Lobatchevsky	23
1.3.2	O Modelo do Disco de Poincaré	27
1.4	Polígonos Hiperbólicos	29
1.4.1	Transformações Lineares Fracionárias	30
2	Grupos Fuchsianos	34
2.0.1	Classificação dos Elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$	34
2.1	Isometrias	36
2.1.1	Isometrias Elípticas	36
2.1.2	Isometrias Parabólicas	37
2.1.3	Isometrias Hiperbólicas	37
2.2	Subgrupos Discretos	39
2.3	Domínios Fundamentais e Domínios de Dirichlet	40
3	Emparelhamento de Arestas	47
3.1	Geradores de um Grupo Fuchsiano	47
3.2	O Teorema de Poincaré	49
3.3	Grupos Geometricamente Finitos	53
3.4	Grupos Fuchsianos Co-Compactos	54
3.5	A Assinatura de um Grupo Fuchsiano	56
4	Grafos Imersos em Superfícies	60
4.1	Teoria dos Grafos	60
4.2	Sistemas de Rotação	64

5	Tesselações $\{8g-4,4\}$ e $\{20n-10,5\}$	67
5.1	Grafos Quadrivalentes Imersos em uma Superfície de Gênero 2	68
5.2	Caminhos Fechados	69
5.3	Tesselação $\{20n-10,5\}$	106
6	Emparelhamento Generalizado $\{8g-4,4\}$	109
	Considerações Finais	125
	Referências Bibliográficas	127
	Apêndice	129
6.1	Conjuntos Localmente Finitos	129
6.2	Introdução à Topologia	131

Introdução

Neste trabalho, estuda-se as isometrias do plano hiperbólico a fim de encontrar emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos no qual o quociente do plano hiperbólico por um grupo fuchsiano Γ , dê origem a superfícies compactas de gênero $g \geq 2$. O grupo das isometrias de emparelhamento de aresta de um polígono quando age de maneira propriamente descontínua no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ forma um conjunto gerador para o grupo fuchsiano. Além disso, o espaço órbita $\mathbb{H}^2 \backslash \Gamma$ pode ser representado por esse polígono, o qual é construído como domínios de Dirichlet. Este trabalho tem como objetivo principal a construção de emparelhamentos de arestas do polígono hiperbólico regular com $8g - 4$ lados e ângulos iguais a $\pi/2$, onde todos os ciclos de vértices sejam compostos por quatro ângulos congruentes e também a generalização de alguns destes emparelhamentos. O emparelhamento destes polígonos está relacionados à tesselação hiperbólica $\{8g-4, 4\}$ e esta fornece empacotamentos de esferas com boas densidades de empacotamento, próximas a densidade máxima e, desta forma, estão relacionados com a construção de códigos ótimos cuja probabilidade de erro é mínima.

Existem 8 formas de emparelhar as arestas de um polígono hiperbólico regular de $12g - 6$ arestas e ângulos internos iguais a $2\pi/3$ de forma que se obtenha uma superfície compacta de gênero 2. Isso foi descoberto por Jorgensen e Nääätänen (1982) que estudou emparelhamentos de arestas relacionados à tesselação hiperbólica $\{12g - 6, 3\}$. Utilizando métodos semelhantes ao de [8] e considerando $g = 3$, Gou Nakamura (2004), através de grafos trivalentes obteve os 927 padrões de emparelhamentos. Deduzindo formas de se obter caminhos fechados sobre grafos trivalentes citados em [8] e [12], Silva (2011) construiu exemplos e resultados para casos em que $g > 3$. Algumas generalização de emparelhamentos de polígonos hiperbólicos relacionados à tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$ foram apresentadas por Rodrigues (2017). Usaremos neste trabalho métodos parecidos para encontrar mais alguns emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos relacionados à tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$ com suas generalizações.

Um polígono hiperbólico é um conjunto fechado delimitado por segmentos geodésicos. No Capítulo 1 vamos nos dedicar ao estudo de todas as geodésicas do plano hiperbólico a fim de construir polígonos hiperbólicos. Começaremos estudando as

transformações de Möbius que são uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. A importância desse estudo está no fato de que essas transformações mantêm o plano hiperbólico invariante. Apresentamos dois modelos mais usados para a geometria hiperbólica, o Plano de Lobatchvsky $\mathbb{H}^2$ e o Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ mostrando que existe uma bijeção entre eles. Por este fato, uma vez que o grupo das transformações de Möbius age transitivamente no plano hiperbólico como isometrias, ou seja, preservando distâncias, concluímos que as geodésicas de $\mathbb{D}^2$ são os diâmetros e os arcos de círculos que intersectam perpendicularmente à fronteira do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Visto como são os polígonos de $\mathbb{D}^2$ veremos algumas condições que garantem não só a existência de um polígono hiperbólico, mas também a sua convexidade.

Para emparelhar as arestas de um polígono hiperbólico faremos um estudo das isometrias do plano hiperbólico. O grupo projetivo especial $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius que preservam orientação e este por sua vez está dentro do conjunto das isometrias do plano hiperbólico. Desta forma, poderemos estudar as isometrias do plano hiperbólico através do grupo $PSL(2, \mathbb{R})$. Neste sentido, no Capítulo 2, após uma classificação dos elementos deste grupo através da quantidade de pontos fixos pelo mesmo, trabalharemos com as isometrias hiperbólicas, pois elas não possuem pontos fixos em $\mathbb{H}^2$. Se a ação de um subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua, ou seja, a órbita de qualquer ponto for discreta e os estabilizadores forem finitos, então Γ é discreto e o chamaremos de grupos fuchsianos. Esses grupos garantem a existência de domínios de Dirichlet. Neste trabalho, consideramos os domínios poligonais. O conjunto de isometrias de emparelhamento destes geram um grupo fuchsiano.

O terceiro capítulo, será dedicado ao Teorema de Poincaré que nos dará algumas condições que o emparelhamento deve obedecer para que o conjunto gerado pelas isometrias de emparelhamento de um polígono $\mathcal{P}$ seja um grupo fuchsiano e $\mathcal{P}$ um domínio fundamental de Γ . Se esse conjunto é finito qualquer domínio poligonal convexo de γ possui finitas arestas. Temos que a recíproca é verdadeira. Estudaremos também as condições que tornam o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ compacto. Finalizaremos este verificando que toda superfície compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser modelada no plano hiperbólico, o que equivale a dizer que para todo $g > 1$ existe um grupo fuchsiano agindo em $\mathbb{H}^2$ sem pontos fixos tais que o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja uma superfície compacta de gênero g .

No Capítulo 4 veremos que se a ação de um grupo fuchsiano for propriamente descontínua então o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície. Essa superfície pode ser obtida pela colagem das arestas congruentes do polígono fundamental de Γ . Para calcularmos o gênero desta superfície usaremos a identidade de Euler.

As arestas do polígono fundamental de Γ , após a identificação das arestas pelas

isometrias de Γ , podem ser vistas na superfície como arestas de um grafo e as interseções das arestas dos polígonos, ou seja, os vértices congruentes, podem ser vistos como um vértice no grafo, formando assim um grafo conexo G .

No Capítulo 5, apresentamos novas formas de emparelhar as arestas de um polígono fundamental $\mathcal{P}_{8g-4}$ de 12 arestas. Para tanto, exibimos os grafos G associados e em seguida estudamos todos os possíveis caminhos fechados permitidos sobre eles. Através desses caminhos fechados, obtém-se 6 emparelhamentos distintos para $\mathcal{P}_{8g-4}$. Pela identificação das arestas, obtém-se uma superfície compacta orientada de gênero 2. Finalizamos este capítulo descrevendo 6 formas de emparelhar um polígono hiperbólico regular de 10 lados e ângulos medindo $2\pi/5$ de forma que as isometrias de emparelhamento geram um grupo fuchsiano Γ e o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja uma superfície compacta orientada de gênero 2.

Por fim, no Capítulo 6, apresentamos generalizações de alguns emparelhamentos de polígonos fundamentais hiperbólicos com $8g - 4$ arestas e ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$.

Capítulo 1

O Plano Hiperbólico

Neste capítulo estudaremos dois modelos da Geometria Hiperbólica plana que nos servirão de instrumentos para a construção de emparelhamentos de polígonos hiperbólicos. Mais precisamente, estudamos o modelo do semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ e o modelo disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Usaremos o grupo das transformações de Möbius para estudar todas as isometrias do plano hiperbólico, pois estas são conhecidas por manterem o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2$ invariante. Veremos dois tipos importantes de transformações de Möbius que são as inversões em um plano compatificado e as reflexões em esferas. Em seguida apresentaremos os conceitos da geometria hiperbólica plana, como distâncias, isometria, área e critérios para a existência e convexidade de polígonos hiperbólicos planos. Por fim, estudaremos a relação existente entre o grupo das transformações de Möbius que preserva orientação e grupo linear especial projetivo $PSL(2, \mathbb{R})$ que é formado pelas matrizes 2×2 com entradas reais e cujo determinante é 1. Os resultados que aqui não demonstramos e assuntos relacionados podem ser encontrados nas referências [1], [5], [9],[13], [3].

1.1 Notas Históricas

As geometrias não-euclidianas foram descobertas a partir das tentativas de provar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos restantes nove "axiomas" e "postulados" da geometria euclidiana.

O postulado das paralelas de Euclides teve vários substitutivos, embora essa alternativa particular tivesse sido usada por outros e tivesse sido enunciadas já no século V por Proclo: *Por um ponto fora de uma reta dada há uma e apenas uma paralela a essa reta*, o mais comumente usado é aquele que se tornou conhecido nos tempos modernos, enunciado pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819).

A primeira investigação realmente científica do postulado das paralelas só foi publicada em 1773 e seu autor é o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667 - 1733).

Nesse trabalho, intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Saccheri aceita as vinte e oito proposições iniciais dos *Elementos* de Euclides que não necessitam dos postulados das paralelas para sua demonstração. Com a ajuda desses teoremas, ele empreendeu o estudo de um quadrilátero $ABCD$ no qual os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são iguais. Traçando as diagonais AC e BD e usando então teoremas simples de congruência (que se encontram entre as vinte e oito proposições iniciais de Euclides), Saccheri mostrou facilmente, como poderia fazê-lo um aluno do primeiro grau, que os ângulos D e C são iguais. Há então três possibilidades: os ângulos D e C são ângulos agudos, retos ou obtusos iguais. Saccheri referiu-se a essas três possibilidades como *hipótese do ângulo agudo*, *hipótese do ângulo reto* e *hipótese do ângulo obtuso*. O plano de trabalho era mostrar que a suposição da hipótese do ângulo agudo ou a suposição da hipótese do ângulo obtuso levam a uma contradição, então, por *reductio ad absurdum*, deve valer a hipótese do ângulo reto, a qual, Saccheri mostrou, implica o postulado das paralelas. Assumindo tacitamente a infinitude da reta, Saccheri prontamente eliminou a hipótese do ângulo obtuso, mas o caso referente à hipótese do ângulo agudo mostrou-se muito mais difícil. Seu trabalho recebeu pouca consideração de seus contemporâneos e logo foi esquecido, e somente foi ressuscitado em 1889 por seu conterrâneo Eugenio Beltrami.

Trinta e três anos após a publicação da obra de Saccheri, o suíço Johann Heinrich Lambert escreveu uma investigação semelhante intitulada *Die Theorie der Parallelinien* que, porém, só foi publicada depois de sua morte. Lambert tomou um quadrilátero contendo três ângulos retos (metade de um quadrilátero de Saccheri) como figura fundamental e considerou três hipóteses conforme o quarto ângulo fosse agudo, reto ou obtuso. E foi consideravelmente além de Saccheri na dedução das proposições com as hipóteses do ângulo agudo ou do ângulo obtuso. Assim, como Saccheri, ele mostrou que para as três hipóteses a soma dos ângulos de um triângulo é menor, igual ou maior que dois ângulos retos, respectivamente, e então, indo além, que a deficiência abaixo de dois ângulos retos, na hipótese de ângulo agudo, ou o excesso de dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso, é proporcional a seu excesso esférico e conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso, é proporcional à área do triângulo. Observou a semelhança entre a geometria decorrente da hipótese do ângulo obtuso e a geometria esférica na qual a área do triângulo é proporcional a seu excesso esférico e conjecturou que a geometria decorrente da hipótese do ângulo agudo poderia talvez se verificar numa esfera de raio imaginário. A hipótese do ângulo obtuso foi eliminada, fazendo a mesma suposição tácita de Saccheri, mas suas conclusões com respeito à hipótese do ângulo agudo foram imprecisas e insatisfatórias.

Adrien-Marie Legendre (1752- 1833), analista francês do século XVIII, considerando as hipóteses de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor, igual

ou maior que dois ângulos retos e assumindo tacitamente a infinitude da reta, foi capaz de eliminar a terceira hipótese, mas, apesar de várias tentativas, não conseguiu descartar a primeira. Esses vários esforços apareceram nas sucessivas edições de seu *Éléments de Géométrie*, um texto largamente adotado, e dessa forma Legendre contribuiu muito para popularizar o problema do postulado das paralelas.

Não é de se surpreender que não se tenha encontrado nenhuma contradição sob a hipótese do ângulo agudo, pois hoje se sabe que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo um conjunto básico de axiomas crescido da hipótese do ângulo agudo é tão consistente quanto a geometria euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da hipótese do ângulo reto, isto é, o postulado das paralelas é independente dos demais postulados e devido a isso não pode ser deduzido dos demais. Os primeiros a suspeitarem desse fato foram o alemão Kade Friedrich Gauss, o húngaro Janos Bolyai (1802 - 1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobatchevsky (1793- 1856). Esses homens abordaram a questão através do postulado das paralelas na forma de Playfair, considerando as três possibilidades seguintes: Por um ponto dado pode-se traçar *mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma* paralela a uma reta dada. Essas situações equivalem, respectivamente, às hipóteses do ângulo agudo, reto e obtuso. Novamente, assumindo a infinitude da reta, elimina-se o terceiro caso facilmente. Suspeitando, a tempo, que sob a infinitude da reta, elimina-se uma geometria consistente, cada um deles, de modo independente, levou a tempo desenvolvimentos geométricos e trigonométricos ambos a partir dessa hipótese ângulo agudo).

É provável que Gauss tenha sido o primeiro a alcançar conclusões penetrantes relativas à hipótese do ângulo agudo, mas, como nunca publicou nada sobre essa matéria em toda a sua vida, a honra da descoberta dessa geometria não-euclidiana é dividida entre Bolyai e Lobatchevsky. Bolyai publicou suas primeiras descobertas em 1832 num apêndice de um livro de matemática de seu pai. Mais tarde ficou-se sabendo que Lobatchevsky havia publicado descobertas semelhantes já em 1829-1830, mas, devido às barreiras da língua e à lentidão com que as informações de novas descobertas se propagavam naqueles dias, seu trabalho permaneceu ignorado na Europa Ocidental por vários anos.

A real independência do postulado das paralelas dos outros postulados da geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente por Beltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, Henri Poincaré e outros. O método consistia em construir um modelo euclidiano para esta geometria, de modo que o desenvolvimento abstrato da hipótese do ângulo agudo pudesse ter uma interpretação concreta no espaço euclidiano. Então, qualquer inconsistência na geometria não-euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana.

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826- 1866) mostrou que, descar-

tando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não-euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso. As três geometrias, a de Bolyai e Lobatchevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

1.2 Transformações de Möbius

As transformações que mantêm o semi-espço $\mathbb{H}^2$ invariante são conhecidas como Transformações de Möbius. Introduziremos dois tipos de transformações de Möbius, as inversões e as reflexões e veremos que elas são geradoras do Grupo Geral de Möbius.

1.2.1 Inversões

Consideremos o espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ e sua compactificação por $\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, onde as vizinhanças do assim chamado *ponto ideal* ∞ são os conjuntos da forma $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup \{\infty\}$ onde A é um conjunto compacto qualquer de $\mathbb{R}^n$. Com esta topologia, $\widehat{\mathbb{R}^n}$ é homeomorfo à esfera

$$S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

De fato, considerando a imersão $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$, $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, podemos definir a projeção estereográfica

$$\pi_N : S^n \setminus N \rightarrow i(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$$

onde $N = (0, \dots, 0, 1)$ é o "polo norte" da esfera. Esta projeção é definida do seguinte modo (Figura 1.1):

Dado um ponto $x \in S^n \setminus N$, existe uma única reta determinada por x e por N . Sendo $x \neq N$, sua última coordenada é diferente de 1, logo a reta por x e por N interceptará o hiperplano $i(\mathbb{R}^n)$ em um único ponto que denotaremos por $\pi_N(x)$. É fácil verificarmos que se $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ então $\pi_N(x) = \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0)$. Mais ainda, podemos verificar diretamente π_N é um homeomorfismo. Além disto, se $(x^n)_{n=1}^\infty$ for sequência em S^n , constatamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = N \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_N(x^n)| = \infty.$$

Logo, ao adicionarmos um ponto ideal a $\mathbb{R}^n$ e definirmos suas vizinhanças como

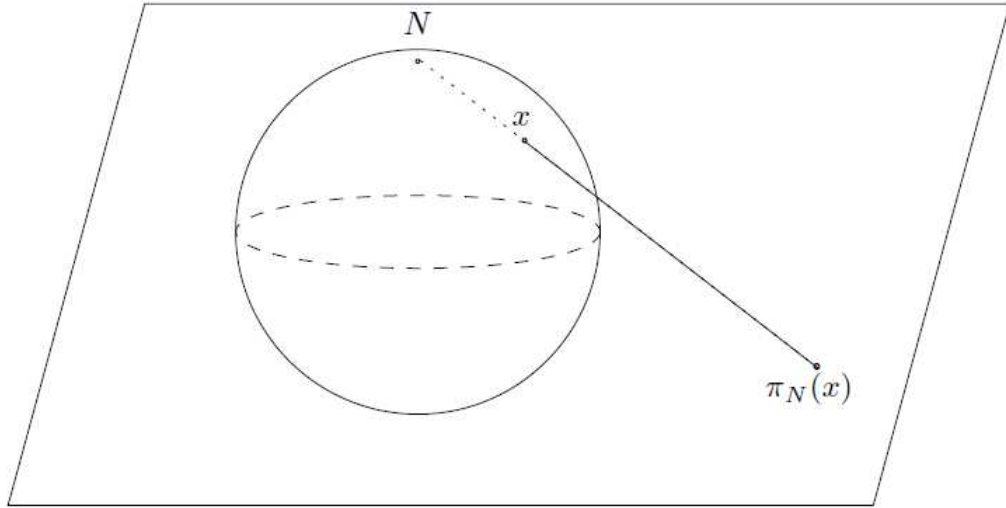


Figura 1.1: Projção Estereográfica.

acima, a projeção estereográfica se estende a um homeomorfismo $\pi : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$. Denotaremos por $S_r(a)$ a esfera de $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio r .

Com essas considerações temos condições de enunciar a definição de inversão.

Definição 1.1. Dada uma esfera $S = S_r(a)$ no espaço euclidiano a **inversão** $i_S : \widehat{\mathbb{R}^n} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^n}$ em torno de S é a aplicação tal que $i_S(a) = \infty$, $i_S(\infty) = a$ e para $x \notin \{a, \infty\}$, $i_S(x)$ é o único ponto da reta $\overleftrightarrow{ax}$ tal que $|a - x||a - i_S(x)| = r^2$.

Exemplo 1.1. (Inversão no plano euclidiano) Seja Π um plano euclidiano e seja $C = C(O, r)$ um círculo em Π de raio r e centro O . Pela definição que acabamos de ver, a inversão $i_C : \Pi - \{O\} \rightarrow \Pi - \{O\}$ em torno de C , é tal que dado $P \in \Pi, P \neq O$, $i_C(P)$ é o único ponto P' da semi-reta OP tal que

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2.$$

Observe que a inversão permuta as partes internas e externas do círculo, pois para $OP < r$ temos $OP' > r$ e para $OP > r$ temos $OP' < r$.

É importante notar que os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob a ação da inversão são os pontos sobre a própria esfera. Apresentamos a seguir uma fórmula explícita para a inversão.

Proposição 1.1. Dada a esfera $S = S_r(a)$, temos que para todo $x \neq a, \infty$,

$$i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}.$$

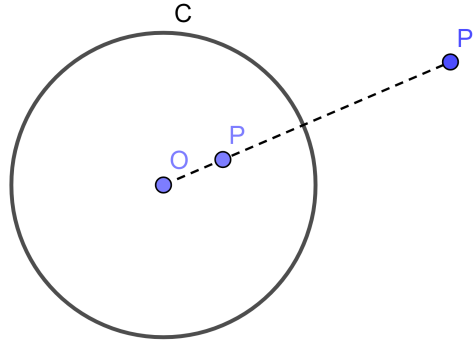


Figura 1.2: Inversão de um ponto em um círculo.

Demonstração. De fato, os pontos x , a e $a + r^2 \frac{x-a}{|x-a|^2}$ são colineares e

$$\begin{aligned} |a-x| \left| a - \left(a + r^2 \frac{x-a}{|x-a|^2} \right) \right| &= |a-x| \left| r^2 \frac{x-a}{|x-a|^2} \right| \\ &= r^2 |a-x| \left| \frac{x-a}{|x-a|^2} \right| \\ &= r^2 \end{aligned}$$

□

Enunciaremos duas propriedades importantes sobre inversões em esferas: elas são conformes e invertem a orientação de $\mathbb{R}^n$. Começamos com a definição de aplicação conforme.

Definição 1.2. Uma aplicação diferenciável $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita **conforme** se ψ preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.

Podemos enunciar agora as seguintes propriedades da aplicação inversão.

Proposição 1.2. Para toda esfera $S = S_r(a)$, a inversão i_S é uma aplicação conforme de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

Proposição 1.3. Para toda esfera $S = S_r(a)$, a inversão i_S reverte a orientação de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.

1.2.2 Reflexões

Consideremos um hiperplano compactificado $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$, onde $P_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = t \in \mathbb{R}\}$. Segue a definição de reflexão.

Definição 1.3. A reflexão i_P em P é a aplicação que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa

um ponto $i_P(x)$ tal que o segmento de reta por x e $i_P(x)$ é ortogonal a P e intercepta o plano P em seu ponto médio e $i_P(\infty) = \infty$.

Em particular, i_P mantém fixos os pontos de $P_t(a)$.

Vejamos como exemplo a reflexão no plano euclidiano.

Exemplo 1.2. Dada uma reta l de um plano euclidiano Π , como vimos, a reflexão em l é a aplicação $i_l : \Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto $x \in \Pi$ um ponto $i_l(x)$ tal que o segmento de reta por x e $i_l(x)$ é ortogonal a l e intercepta a reta l em seu ponto médio.

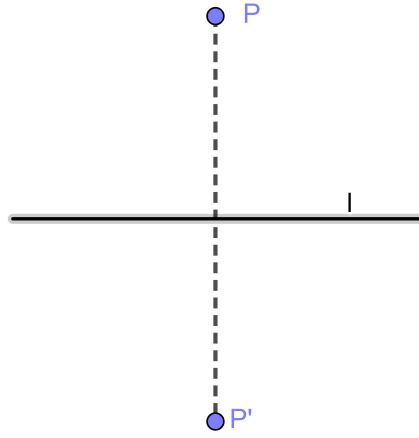


Figura 1.3: Reflexão de um ponto em uma reta.

Vejamos uma fórmula explícita para a reflexão:

Proposição 1.4. No hiperplano P , a reflexão i_P é dada por

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a$$

Demonstração. Se considerarmos π_P a projeção ortogonal em $P_t(a)$, como $x - \pi_P(x)$ é ortogonal ao hiperplano $P_0(a)$ e $\pi_P(x)$ pertencer a $P_t(a)$ temos que $\pi_P(x)$ satisfaz as equações $x - \pi_P(x) = \epsilon a$, ou seja

$$\pi_P(x) = x - \epsilon a \tag{1.1}$$

e

$$\langle \pi_P(x), a \rangle = t \tag{1.2}$$

Substituindo 1.1 em 1.2, obtemos

$$\langle x, a \rangle - \epsilon|a|^2 = t \Rightarrow \epsilon = \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}$$

Logo,

$$i_P(x) = x - 2(x - \pi_P(x)) = x - 2\epsilon a = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a$$

□

Assim como a inversão, a reflexão também é uma aplicação conforme e inverte a orientação. Além disso, a reflexão é uma isometria do espaço euclidiano, como veremos a seguir:

Teorema 1.1. Dados um hiperplano P e pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| = |i_P(x) - i_P(y)|$.

Teorema 1.2. Para todo hiperplano $P = P_t(a)$ a reflexão i_P é conforme.

Teorema 1.3. Para todo hiperplano $P = P_t(a)$ a reflexão i_P inverte a orientação.

1.2.3 Transformações de Möbius

Veremos que as inversões e as reflexões são geradores do grupo geral de Möbius. Tanto uma reflexão quanto uma inversão invertem a orientação, portanto para mantermos a orientação do espaço, devemos ter uma transformação que é uma composição de um número par de inversões e reflexões. Apresentamos agora o Grupo de Möbius, um grupo formado por transformações de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ que preservam a orientação.

Definição 1.4. Uma **transformação de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O conjunto das transformações de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ será chamado de **grupo geral de Möbius**, o qual denotamos por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Observação 1.1. $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é de fato um grupo. Pela própria definição ele é fechado para a composição e esta é associativa. Além disso, se i_S é a inversão em torno de $S = S_r(a)$ e i_P é a reflexão no plano compatificado P , então

$$i_S^2(x) = i_S(i_S(x)) = i_S \left(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right) = a + r^2 \frac{(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}) - a}{|(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}) - a|^2} = x$$

e

$$\begin{aligned}
i_P^2(x) &= i_P(i_P(x)) = i_P\left(x - 2\frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}a\right) \\
&= \left(x - 2\frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}a\right) - 2\frac{\left\langle \left(x - 2\frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}a\right), a \right\rangle - t}{|a|^2}a \\
&= \left(x - 2\frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}a\right) - \frac{2a}{|a|^2}(\langle x, a \rangle - 2\langle x, a \rangle + 2t - t) = x
\end{aligned}$$

Portanto cada gerador de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ (uma inversão ou uma reflexão) é um elemento de ordem 2, cada elemento é inverso de si mesmo.

Observação 1.2. Como as reflexões e as inversões são elementos que invertem a orientação de $\mathbb{R}^n$, temos que um elemento $\sigma \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ preservará a orientação se, e somente se, for composição de um número par de inversões e reflexões. É possível verificar que a inversa de um elemento que preserva orientação também preserva orientação, assim como a composição de dois tais elementos.

Com isso podemos definir o Grupo de Möbius.

Definição 1.5. O **Grupo de Möbius** $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ formado pelas transformações de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ que preservam a orientação.

A imersão

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0).$$

de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ em $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$, induz uma imersão de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ em $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$: ao considerarmos inversão i_S em esfera $S_r(a)$, obtemos a inversão $\hat{i}_s$ em torno da esfera $S_r(\tilde{a})$ e ao considerarmos a reflexão i_P em um plano $P = P_t(a)$ obtemos a reflexão $i_P(\tilde{a})$. Assim, para cada elemento $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ obtemos um elemento $\tilde{\Phi} \in GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$ que estende a ação de Φ , no sentido de termos

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_n, 0) = \Phi(\widetilde{x_1, \dots, x_n}) = \widetilde{\Phi(x)}.$$

Enunciaremos o próximo resultado apenas para referência futura.

Teorema 1.4. Seja $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ a imersão de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ em $GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$ definida acima. Então esta imersão é um homomorfismo de grupos. Além disso, o hiperplano

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$$

assim como os semi-espacos

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} > 0\}$$

e

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} < 0\}$$

são invariantes pela ação de $\tilde{\Phi}$, para todo $\Phi \in GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$.

1.3 Geometria Hiperbólica Plana

1.3.1 O Modelo do Plano de Lobatchevsky

Um dos modelos euclidianos mais usados para a geometria hiperbólica é o modelo do Plano de Lobatchevsky. Vamos denotar um ponto complexo $z \in \mathbb{C}$, por $z = x + iy$ cuja parte real e parte imaginária são denotadas respectivamente por $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Definição 1.6. O modelo do **plano de Lobatchevsky** ou **Semiplano Superior de Poincaré** é dado pelo conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

com fronteira

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}$$

dotado da métrica riemanniana $ds^2 = \frac{|dz|^2}{Im(z)^2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$

Denotaremos por $\overline{\mathbb{H}^2}$ quando nos referirmos ao conjunto $\{\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2\}$.

Note que podemos trabalhar com os elementos de $\mathbb{H}^2$ como números complexos ou como um ponto de $\mathbb{R}^2$. Munidos com uma métrica, podemos determinar o comprimento de curvas, a área de regiões e definir ângulos. Assim, considere as seguintes definições:

Definição 1.7. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável no semi plano superior, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Definimos o **comprimento hiperbólico** $\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}$ da curva $\gamma(I)$ por

$$\|\gamma\| = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt.$$

Definição 1.8. Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, a **distância hiperbólica** entre p e q

é dada por

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}$$

onde o ínfimo é considerado sobre todas as curvas γ unindo p e q em $\mathbb{H}^2$.

Proposição 1.5. O Plano de Lobachevsky $\mathbb{H}^2$ com a distância d é um espaço métrico $(\mathbb{H}^2, d)$.

Demonstração. Sejam p, q e $w \in \mathbb{H}^2$.

1. $d(p, q) \geq 0$ pois $\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y} \geq 0$, onde a igualdade é válida para todo $t \in [0, 1]$ se, e somente se, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, ou seja, se $p = q$.
2. $d(p, q) = d(q, p)$. De fato, se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é tal $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ então $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ é tal que $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = q$ e $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = p$. Assim, fazendo $t = 1 - s$, temos $dt = -ds$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= - \int_1^0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds}\right)^2}}{y(1-s)} ds \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy(s)}{ds}\right)^2}}{y(1-s)} ds = \|\tilde{\gamma}\| \end{aligned}$$

Portanto, $\inf \|\gamma\| = \inf \|\tilde{\gamma}\|$ ou seja, $d(p, q) = d(q, p)$.

3. $d(p, w) \geq d(p, q) + d(q, w)$. De fato, sejam os caminhos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ com $\alpha(0) = p, \alpha(1) = \beta(0) = q$ e $\beta(1) = w$, então o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = w$ e $\|\gamma\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$. De forma que

$$d(p, w) \geq d(p, q) + d(q, w).$$

□

Tendo em vista o conceito de distância podemos definir o conceito de isometria.

Definição 1.9. Uma **isometria** em $(\mathbb{H}^2, d)$ é uma transformação de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ que preserva a distância hiperbólica. O grupo formado por todas as isometrias em $\mathbb{H}^2$ é denotado por $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Dados dois pontos, queremos encontrar uma curva entre eles cujo comprimento seja o menor possível. Este é o conceito de geodésica que exibimos a seguir.

Definição 1.10. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é dita **geodésica** de $\mathbb{H}^2$ se para quaisquer pontos $s, t \in [a, b]$, com $s \neq t$ tivermos

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt,$$

ou seja, se γ minimizar a distância entre pontos de seu traço.

Uma questão que se levanta após definir geodésicas é saber quais curvas do espaço $\mathbb{H}^2$ são geodésicas. Visando isso, temos o seguinte resultado:

Lema 1.1. As semirretas ortogonais a fronteira $\partial\mathbb{H}^2$ são geodésicas de $\mathbb{H}^2$.

Demonstração. Consideremos dois pontos $x = (x, a), y = (x, b) \in \mathbb{H}^2$ com $0 < a < b$ e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes ligando estes dois pontos. Então, supondo $\gamma(t) = (x, a + t(b - a))$, temos que $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ e $\frac{dy(t)}{dt} = b - a$. Logo

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy(t)}{dt}\right|}{a + t(b - a)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{b - a}{a + t(b - a)} dt \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Como $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ é justamente comprimento hiperbólico do segmento vertical ligando x e y no plano, segue o resultado. □

O próximo resultado é de suma importância para o presente trabalho. Ele nos diz que as transformações de Möbius agem em $\mathbb{H}^2$ como isometrias, ou seja, preservam distância em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.5. A métrica riemanniana

$$dt^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{y}$$

de $\mathbb{H}^2$ é invariante pela ação de elementos de $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, ou seja,

$$GM(\widehat{\mathbb{R}^2}) \subset Isom(\mathbb{H}^2).$$

Vamos usar o grupo de isometrias de $\mathbb{H}^2$ para determinarmos todas as geodésicas de $\mathbb{H}^2$. Antes, considere o seguinte teorema.

Teorema 1.6. Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todas as semicircunferências e semirretas de $\mathbb{H}^2$ ortogonais ao eixo real. Então, $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ age transitivamente sobre $\mathcal{G}$, ou seja, dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ existe $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ tal que $\tilde{\Phi}(\gamma_1) = \gamma_2$.

Teorema 1.7. As geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são as semirretas e as semicircunferências ortogonais a $\partial\mathbb{H}^2$.

Demonstração. Conforme vimos no Lema 1.1, as semirretas ortogonais a $\partial\mathbb{H}^2$ são geodésicas. Dada uma semi-circunferência γ ortogonal a $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, sabemos pelo Teorema 1.6 que existe $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ tal que $\tilde{\Phi}(\gamma)$ é uma semirreta ortogonal a $\partial_\infty\mathbb{H}^2$, ou seja, uma geodésica. Mas como $\tilde{\Phi}$ age como isometria de $\mathbb{H}^2$ (Teorema 1.5), temos que γ também é uma geodésica. Para provarmos que estas são todas as geodésicas, consideremos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ e uma curva α ligando estes dois pontos. Seja γ o semicírculo ou semirreta ortogonal a $\partial\mathbb{H}^2$ contendo estes dois pontos. Sem perda de generalidade podemos supor que γ seja uma semirreta (caso contrário podemos levar γ a uma semirreta pela ação de algum elemento $\tilde{\Phi}$, com $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$). Nesta situação, se observarmos a demonstração do Lema 1.1, podemos constatar que α minimiza distâncias se, e somente se, $\alpha = \gamma$. $\square$

O conhecimento das geodésicas em $\mathbb{H}^2$ nos permite explicitar a função distância em $\mathbb{H}^2$.

Teorema 1.8. Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, são válidas as seguintes igualdades:

1. $d(z, w) = \ln \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right).$
2. $\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$
3. $\sinh \left(\frac{1}{2}d(z, w) \right) = \frac{|z-w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$
4. $\cosh \left(\frac{1}{2}d(z, w) \right) = \frac{|z-\bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}.$

$$5. \tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}.$$

A equivalência entre as cinco igualdades decorre por manipulação de igualdades trigonométricas hiperbólicas e a demonstração de uma delas é feita na referência [2].

1.3.2 O Modelo do Disco de Poincaré

Um outro modelo que existe para estudar a Geometria Hiperbólica plana é o modelo do disco de Poincaré. Vamos encontrar uma maneira de aproveitar o estudo feito no modelo de Lobatchevsky e usá-lo para esse modelo.

O modelo do **disco unitário** ou **disco de Poincaré** é dado por

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |(x, y)| < 1\},$$

ou seja, o conjunto dos números complexos cuja norma é menor que 1, dotado com métrica riemanniana

$$ds = \sqrt{\frac{4(dx^2 + dy^2)}{1 - (x^2 + y^2)}}.$$

Note que a fronteira de $\mathbb{D}^2$ é $\partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Com o objetivo de relacionar os dois modelos, considere as seguintes aplicações:

$$\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \text{ dada por } \eta(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

$$\varsigma : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \text{ dada por } \varsigma(z) = \frac{iz+i}{-z+1}.$$

A aplicação ς é a inversa de η . De fato,

$$\begin{aligned} \eta \circ \varsigma(z) &= \eta\left(\frac{iz+i}{-z+1}\right) = \frac{\frac{iz+i}{-z+1} - i}{\frac{iz+i}{-z+1} + i} \\ &= \frac{\frac{iz+i+zi-i}{-z+1}}{\frac{iz+i-iz-i}{-z+1}} = z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varsigma \circ \eta(z) &= \varsigma\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{i\frac{z-i}{z+i} + i}{-\frac{z-i}{z+i} + 1} \\ &= \frac{\frac{iz-i^2+zi+i^2}{z+i}}{\frac{-z+i+z+i}{z+i}} = z. \end{aligned}$$

Portanto η é uma bijeção e transforma o semiplano superior $\mathbb{H}^2$ no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, ou seja, $\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ é uma isometria entre espaços.

Considerando $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ um caminho diferenciável no disco de Poincaré temos que $\varsigma \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável no semi plano superior. O **comprimento hiperbólico** em $\mathbb{D}^2$ de α é dado por

$$\|\alpha\|_{\mathbb{D}^2} = \|\varsigma \circ \alpha\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{2}{1 - |\alpha(t)|^2} |\alpha'(t)| dt$$

Definição 1.11. A **distância** entre dois pontos z e w em $\mathbb{D}^2$ é dada por:

$$d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(\varsigma(z), \varsigma(w))$$

Uma vez definido a distância no disco hiperbólico, podemos enunciar a seguinte proposição cuja demonstração é análoga a demonstração da Proposição 1.5.

Proposição 1.6. O disco unitário $\mathbb{D}^2$ é um espaço métrico com a métrica $d_{\mathbb{D}^2}$.

Antes de estudarmos quem são as geodésicas do disco de Poincaré considere o seguinte resultado:

Proposição 1.7. Seja τ uma isometria em $\mathbb{H}^2$. Então $\eta \circ \tau \circ \varsigma$ é uma isometria em $\mathbb{D}^2$

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{D}^2$ temos que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(\eta\tau\eta^{-1}(z), \eta\tau\eta^{-1}(w)) &= d_{\mathbb{H}^2}(\tau\eta^{-1}(z), \tau\eta^{-1}(w)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(z), \eta^{-1}(w)) \\ &= d_{\mathbb{D}^2}(z, w) \end{aligned}$$

□

A aplicação η é uma isometria no plano complexo que preserva ângulo entre curvas e transforma círculos e retas em círculos e retas, então η leva o eixo real na fronteira do disco unitário $\mathbb{H}^2$. As geodésicas do disco de Poincaré são as imagens por η das geodésicas do semiplano superior $\mathbb{H}^2$. Com isso, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.9. As geodésicas no disco de Poincaré são os diâmetros do disco $\mathbb{D}^2$ e os arcos de círculos que intersectam perpendicularmente a fronteira $\partial\mathbb{D}^2$.

1.4 Polígonos Hiperbólicos

Nessa seção veremos expressões que relacionam área hiperbólica e ângulos de polígonos hiperbólicos, além de condições para convexidade de um polígono. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas em [1].

Definição 1.12. Dados três pontos $v_a, v_b, v_c \in \overline{\mathbb{H}^2}$, um **triângulo hiperbólico** Δ é formado pelas geodésicas ligando esses pontos. Os vértices que estão sobre $\partial\mathbb{H}^2$ são chamados **vértices ideais** e os que não estão situados sobre a fronteira são chamados **vértices ordinários**.

Podemos ter um ou mais vértices na fronteira $\partial\mathbb{H}^2$.

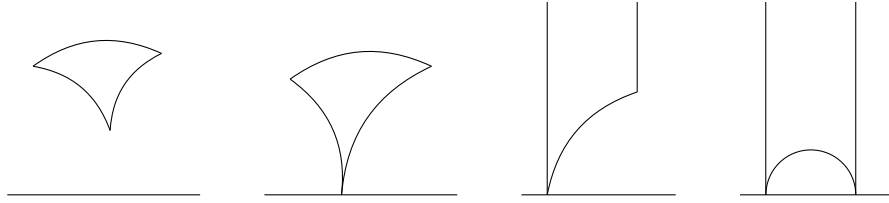


Figura 1.4: Triângulos Hiperbólicos com 0, 1, 2 e 3 vértices ideais.

Definição 1.13. Um **polígono hiperbólico** de n lados é um conjunto fechado de $\overline{\mathbb{H}^2}$ delimitado por n segmentos geodésicos hiperbólicos. Se dois segmentos se intersectam, então o ponto de interseção é chamado de vértice do polígono.

Definição 1.14. A área hiperbólica de um subconjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{H}^2$ é dada por

$$\mu(\mathcal{X}) = \int_{\mathcal{X}} \frac{dx dy}{y^2}$$

onde $z = x + yi$.

Teorema 1.10. A área hiperbólica em $\mathbb{H}^2$ é invariante sob a ação do grupo de Möbius $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

O teorema acima nos diz que dada uma transformação $T \in M(\widehat{\mathbb{R}^2})$ temos que $\mu(T(\mathcal{X})) = \mu(\mathcal{X})$.

A seguir, apresentamos uma versão simplificada do Teorema de Gauss-Bonnet, que nos diz que a área hiperbólica de um triângulo hiperbólico depende somente de seus ângulos.

Teorema 1.11 (Gaus-Bonnet). Seja Δ um triângulo hiperbólico com ângulos $\alpha, \beta,$

γ . Então

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Podemos generalizar o Teorema de Gauss-Bonnet para todo polígono fechado limitado. Como veremos no próximo resultado.

Teorema 1.12. Seja P um polígono hiperbólico fechado com vértices $v_1, \dots, v_n$. Seja α_k o ângulo interno de v_k . Então

$$\mu_{\mathbb{H}}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

A prova do teorema acima é feita decompondo o polígono hiperbólico em triângulos hiperbólicos e usando o Teorema 1.11 para calcular a área de cada triângulo da decomposição. A área do polígono é dada então pela soma das áreas dos triângulos da decomposição.

O próximo teorema nos dá uma condição para existência de um polígono hiperbólico.

Teorema 1.13. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ uma coleção de n números reais no intervalo $[0, \pi)$. Então, existe um polígono hiperbólico plano de n lados com ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se, e somente se,

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n < (n - 2)\pi.$$

Havendo uma condição para existência de um polígono hiperbólico, o nosso interesse agora é saber se esse polígono é convexo. O próximo teorema relaciona a convexidade de um polígono com seus ângulos internos e sua demonstração está feita na referência [[2]] Seção 7.16.

Teorema 1.14. Seja P um polígono hiperbólico com ângulos internos dados por $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Então P é convexo se, e somente se, para cada $k = 1, \dots, n$, $0 \leq \alpha_k \leq \pi$.

1.4.1 Transformações Lineares Fracionárias

Nessa subseção veremos que existe uma forte conexão entre transformação de Möbius e matrizes 2×2 . Estudaremos a ação de matrizes quadradas como transformações lineares fracionárias.

Definição 1.15. Uma **transformação linear fracionária** é uma transformação $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $T(\frac{-d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ se $c \neq 0$ e $T(\infty) = \infty$ se $c = 0$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Consideremos o grupo das matrizes reais 2×2 com determinante igual a 1

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}.$$

Para cada $A \in SL(2, \mathbb{R})$ consideremos a transformação linear fracionária

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

A transformação T_A é uma ação de grupo, ou seja,

$$T_{AB}(z) = T_A(T_B)(z), \quad \forall A, B \in SL(2, \mathbb{R}), z \in \mathbb{H}^2.$$

Porém, podemos ter matrizes $A \neq B$ tais que $T_A = T_B$. Para determinarmos todas as matrizes satisfazendo tal igualdade, basta determinarmos as matrizes C tais que $T_C = T_{Id} = Id$, pois se $T_A = T_B$ então $Id = T_A(T_B)^{-1} = T_A T_{B^{-1}} = T_{AB^{-1}} = T_{Id}$. Mas se considerarmos os pontos $0, i \in \mathbb{H}$ obtemos que

$$\begin{aligned} T_A(0) &= \frac{b}{d} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ T_A(i) &= \frac{ac}{c^2 + d^2} + \frac{ad}{c^2 + d^2}i = i \Rightarrow c = 0, a = d \end{aligned}$$

Considerando que $1 = ad - bc$, temos que $b = c = 0$ e $a = d = \pm 1$. Assim

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \pm Id$$

Denotamos por $PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{Id, -Id\}} = \bigcup_{A \in SL(2, \mathbb{R})} \{A, -A\}$, este é chamado grupo linear especial projetivo. Mostraremos que este grupo é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ das transformações de Möbius que preservam orientação.

Teorema 1.15. O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}^n})$ das transformações de Möbius que preservam orientação.

Demonstração. Consideremos uma inversão em uma circunferência $S = S_r(p)$. Da Proposição 1.1 temos:

$$i_S(z) = p + r^2 \frac{z - p}{|z - p|^2} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p(\overline{z-p}) + r^2}{\overline{z-p}} \\
&= \frac{p\overline{z} + r^2 - |p|^2}{\overline{z} - \overline{p}} \\
&= \frac{\frac{p}{r}\overline{z} + \frac{r^2-|p|^2}{r}}{\frac{1}{r}\overline{z} - \frac{\overline{p}}{r}}
\end{aligned}$$

se escrevermos $a = \frac{p}{r}$, $b = \frac{r^2-|p|^2}{r}$, $c = \frac{1}{r}$, $d = \frac{\overline{p}}{r}$, então $i_S(z)$ é da forma

$$\frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}, \quad ad - bc = -1 \quad (1.4)$$

De maneira similar, pode-se mostrar que a reflexão i_P em um plano $P = P_t(p)$ pode ser expressa como

$$i_P(z) = -\overline{z} + \frac{2t}{p}$$

tomando $a = -1$, $b = \frac{2t}{p}$, $c = 1$, $d = 0$ temos que $i_P(z)$ também é da forma 1.4.

Pode-se verificar que a composição de duas transformações como em 1.4 pode ser expressa de forma geral como

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Como os elementos de $M(\widehat{\mathbb{R}})$ são composições de uma quantidade par de transformações da forma 1.4 (Observação 1.2). Segue se $M(\widehat{\mathbb{R}}) \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$.

Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A \in SL(2, \mathbb{R})$ e provemos que A pode ser expressa como a composição de um número par de reflexões e inversões. Suponhamos inicialmente que $c = 0$. Então, se considerarmos que $ad - bc = ad = 1$, isto é, $\frac{1}{d} = a$, temos que

$$T_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a^2z + ab,$$

ou seja, T_A é a composição de uma dilatação com uma translação. Mas a dilatação $z \mapsto a^2z$ pode ser expressa como o produto $i_{S'} \circ i_S$ onde $S = S_r(0)$, $S' = S_{r'}(0)$ com $\left(\frac{r'}{r}\right)^2 = a$ e a translação $z \mapsto z + ab$ pode ser expressa como a composição de duas reflexões $i_{P'} \circ i_P$ onde $P' = P_{t'}(1)$, $P = P_t(1)$ com $2(t' - t) = ab$. Logo, T_A é o produto de um número par de reflexões e inversões, ou seja, $T_A \in GM(\widehat{\mathbb{R}})$.

Suponhamos agora que $c \neq 0$. Temos então que

$$S = \{z \in \mathbb{C}; |cz + d| = 1\} = \left\{z \in \mathbb{C}; \left|z - \frac{-d}{c}\right| = \frac{1}{|c|}\right\} = S_{|\frac{1}{c}|}\left(-\frac{d}{c}\right)$$

determina uma circunferência com centro real $-\frac{d}{c}$ de raio $\frac{1}{|c|}$. Se considerarmos a expressão explícita para a inversão em torno de S , obtemos:

$$i_S(z) = -\frac{d}{c} + \frac{z + \frac{d}{c}}{c^2 \left| z + \frac{d}{c} \right|^2}$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} T_A \circ i_S(z) &= \frac{ai_S(z) + b}{ci_S(z) + d} \\ &= \frac{a(ci_S(z) + d) - (ad - bc)}{c(ci_S(z) + d)} \\ &= \frac{a \left(-\frac{d}{c} + \frac{z + \frac{d}{c}}{c^2 \left| z + \frac{d}{c} \right|^2} \right) + b}{c \left(-\frac{d}{c} + \frac{z + \frac{d}{c}}{c^2 \left| z + \frac{d}{c} \right|^2} \right) + d} \\ &= \frac{-c(ad - bc) \left| z + \frac{d}{c} \right|^2 + a \left(z + \frac{d}{c} \right)}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} \\ &= \frac{\left(z + \frac{d}{c} \right) \left(a - c \left(\bar{z} + \frac{d}{c} \right) \right)}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} \\ &= -\bar{z} + \frac{a - d}{c}. \end{aligned}$$

Assim, $T_A \circ i_S$ é a composição da reflexão $z \mapsto -\bar{z}$ com a translação $z \mapsto z + \frac{a - d}{c}$. Conforme vimos anteriormente, uma translação é o produto de duas reflexões. Obtemos assim que $T_A \circ i_S$ pode ser expressa como produto de um número ímpar de reflexões e inversões. Portanto, T_A é expressa como produto de um número par de tais transformações e segue da Observação 1.2 que $T_A \in M(\widehat{\mathbb{R}})$.

□

Capítulo 2

Grupos Fuchsianos

Neste capítulo classificaremos os elementos do grupo linear especial projetivo $PSL(2, \mathbb{R})$ usando a função traço de uma matriz. Veremos os três tipos de isometrias e como elas podem ser classificadas de acordo com o número de seus pontos fixos. Para entendermos melhor a geometria da ação de um grupo Fuchsiano no semiplano superior $\mathbb{H}^2$, estudaremos os conceitos de domínio fundamental e domínio de Dirichlet. Se este último possuir um número finito de arestas então este deve ser um número par. Para mais informações veja [2], [5], [9].

2.0.1 Classificação dos Elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$

Vimos no capítulo anterior que o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo ao grupo $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$ das transformações de Möbius que preservam a orientação (Teorema 1.15) e este por sua vez está dentro do conjunto de isometrias do plano hiperbólico (Teorema 1.5). Usaremos o grupo de isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ para estudarmos o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$. Começaremos com a classificação dos elementos deste último.

Considere $tr : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ a **função traço** dada por

$$tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

Seja $Tr : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ a aplicação dada por $Tr(A) = |tr(A)| = |a + d|$. Classificamos os elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ em três tipos de acordo com o valor da função $Tr(A)$:

Definição 2.1. Dado $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ dizemos que A é:

1. Elíptica se $Tr(A) < 2$;
2. Parabólica se $Tr(A) = 2$;

3. Hiperbólica se $Tr(A) > 2$.

Observação 2.1. A classificação acima é invariante por conjugação, uma vez que o traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é, $\text{traço}(BAB^{-1}) = \text{traço}(A)$, para toda matriz A e para toda matriz $B \in GL(2, \mathbb{R})$.

Observação 2.2. A definição acima depende exclusivamente do número de autovalores reais da matriz A .

De fato, o polinômio característico de $A \in SL(2, \mathbb{R})$ é

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xId - A) \\ &= x^2 - (a + d)x + ad - bc \\ &= x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) \\ &= x^2 - \text{tr}(A)x + 1 \end{aligned}$$

onde $\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4$. Assim, temos os seguintes casos:

1. Se $\Delta > 0$, então A possui dois autovalores reais distintos e portanto A é diagonalizável. Assim, a menos de conjugação, A pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 1$ temos que $d = \frac{1}{a}$. Logo, se $a \neq \pm 1$ temos $Tr(A) = \left|a + \frac{1}{a}\right| > 2$.

2. Se $\Delta = 0$, então A possui um único autovalor real. Logo, $p_A(x) = (x - \lambda)^2$. Mas como o termo constante λ^2 deste polinômio é o determinante de A , assim $\lambda^2 = 1$, donde segue que $\lambda = \pm 1$ e $Tr(A) = |2\lambda| = 2$.
3. Se $\Delta < 0$, então A possui dois autovalores complexos conjugados λ e $\bar{\lambda}$. Seu polinômio característico deve ser da forma $p_A(x) = x^2 - 2\text{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2$, onde $|\lambda|^2 = \det(A) = 1$. E como $\lambda \neq \pm 1$, temos que $\text{Re}(\lambda) < 1$. Portanto, $Tr(A) = |\text{tr}(A)| = |2\text{Re}(\lambda)| < 2$.

Veremos os aspectos geométricos de cada tipo de isometria a partir de famílias especiais que contém representantes de cada classe de conjugação. Dentre eles o conjunto de pontos fixos. Consideremos então algumas definições e constatações elementares.

Definição 2.2. Uma permutação de um conjunto X é uma bijeção $X \rightarrow X$.

Definição 2.3. Seja G um grupo de permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$. Dado $x \in X$, chamamos de **estabilizador** de x ao subgrupo

$$G_x = \{g \in G | g(x) = x\}.$$

Observação 2.3. $G_{h(x)} = hG_xh^{-1}$, para todo $x \in X$ e $h \in G$.

De fato, seja $g \in G_{h(x)} = \{g \in G | gh(x) = h(x)\}$, então $h^{-1}gh(x) = h^{-1}h(x) = x$ e portanto $g \in hG_xh^{-1}$, considere agora $p \in hG_xh^{-1}$, então $p = hgh^{-1}$ com $g(x) = x$ donde $ph = hgh^{-1}h = hg$ e $ph(x) = hg(x) = h(x)$. Assim, $p \in hG_xh^{-1}$ e concluímos a igualdade.

Definição 2.4. Seja G um grupo de permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$. A **órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$G(x) = \{g(x) \in X | g \in G\}$$

Definição 2.5. Seja G um grupo de permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$. O conjunto de **pontos fixos** de um elemento $g \in G$ é o conjunto

$$F_g = \{x \in X | g(x) = x\}.$$

Definição 2.6. Seja G um grupo de permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$. Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é invariante por $g \in G$ se $g(A) \subset A$.

2.1 Isometrias

O nosso objetivo aqui é identificar todas as isometrias do plano hiperbólico. Antes de estudarmos os diferentes tipos de isometria, consideremos o seguinte lema que será fundamental no decorrer da seção:

Lema 2.1. Sejam $A \in SL(2, \mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{H}^2$ dois pontos fixos por T_A . Então, a geodésica β contendo x e y (incluindo o caso em que $\beta(\infty) = x$ e/ou $\beta(-\infty) = y$) é invariante por T_A . Se algum dos pontos x ou y for um ponto ordinário, $T_A = Id$.

2.1.1 Isometrias Elípticas

Consideremos a família de matrizes

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Note que, para $\theta \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, $Tr(A_\theta) = |2 \cos \theta| < 2$, ou seja, $T_\theta = T_{A_\theta}$ é de fato elíptica.

Temos que $T_\theta(i) = i$, de fato:

$$\begin{aligned} T_\theta(i) &= \frac{\cos(\theta)i + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)i + \cos(\theta)} = \frac{(\cos(\theta)i + \sin(\theta))(\sin(\theta)i + \cos(\theta))}{|-\sin(\theta)i + \cos(\theta)|^2} \\ &= \frac{(-\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta) + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)i}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = i \end{aligned}$$

Como $T_\theta \neq Id$ pelo lema anterior T_θ não possui pontos fixos ordinários. Se existisse $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $T_\theta(z) = z$ então a geodésica γ ligando os pontos i e z seria invariante por T_θ e então T_θ restrito à γ seria igual a identidade. Concluimos que i é o único ponto fixo de T_θ .

2.1.2 Isometrias Parabólicas

Consideremos então a família de matrizes

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \neq t \in \mathbb{R}.$$

Note que $Tr(A_t) = |1+1| = 2$, de modo que $T_t = T_{A_t}$ é de fato isometria parabólica. Se observarmos que

$$T_t(z) = \frac{z+t}{0z+1} = z+t,$$

podemos ver que para $z \neq \infty$, $T_t(z) \neq z$. Mas, se considerarmos a geodésica $\gamma(s) = e^s i$ com $\gamma(\infty) = \infty$, temos que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_t(\gamma(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} (e^s i + t) = \infty$$

assim $T_t(\infty) = \infty$ e T_t possui apenas um ponto fixo em $\overline{\mathbb{H}}^2$.

2.1.3 Isometrias Hiperbólicas

Consideremos agora a família de matrizes

$$A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}, \quad k \neq 0.$$

Temos que $Tr(A_k) = \sqrt{e^k} + \frac{1}{\sqrt{e^k}} > 2$ se $k \neq 0$, de modo que $T_k = T_{A_k}$ é de fato isometria hiperbólica.

Observemos ainda que

$$T_k(z) = \frac{\sqrt{e^k}z + 0}{0z + \frac{1}{\sqrt{e^k}}} = e^k z,$$

ou seja, T_k não possui pontos fixos em $\overline{\mathbb{H}}^2$ com exceção do ponto ideal $0 \in \partial\mathbb{H}^2$ e do ponto ∞ . Para constataremos que $T_k(\infty) = \infty$ basta notarmos que a geodésica $\gamma(t) = e^t i$ é invariante por T_k :

$$T_k(\gamma(t)) = e^k e^t i = e^{k+t} i = \gamma(k+t).$$

Sabemos que o traço de uma matriz é invariante por conjugação, e portanto

$$T_r(BAB^{-1}) = -\text{traço}(BAB^{-1}) = |\text{traço}(A)| = T_r(A).$$

Temos assim que as matrizes da forma $BA_\theta B^{-1}$ induzem isometrias elípticas, as matrizes da forma $BA_t B^{-1}$ induzem isometrias parabólicas e as da forma $BA_k B^{-1}$ isometrias hiperbólicas, onde $B \in GL(2, \mathbb{R})$. O próximo teorema garante que toda matriz $A \in PSL(2, \mathbb{R})$ é conjugada a alguma das matrizes da forma A_θ, A_t ou A_k , ou seja, o estudo de todas as isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ se baseia no estudo desses três tipos de isometrias.

Teorema 2.1. Dada transformação $Id \neq T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, existe $B \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ é da forma T_θ, T_t ou T_k .

Podemos resumir a discussão acima no seguinte teorema:

Teorema 2.2. Seja $T \neq Id$ uma isometria do espaço hiperbólico que preserva orientação. Então, as afirmações em cada um dos itens abaixo são equivalentes:

1.
 - T é uma isometria elíptica.
 - T é conjugada em $PSL(2, \mathbb{R})$ a T_θ , para algum $0 < \theta < 2\pi$.
 - T possui um ponto fixo ordinário p .
2.
 - T é uma isometria parabólica.
 - T é conjugada a T_t , para algum $0 \neq t \in \mathbb{R}$.
 - T possui um único ponto fixo ideal ϵ .
3.
 - T é uma isometria hiperbólica.
 - T é conjugada a T_k , para algum $k > 0$.
 - T possui dois pontos fixos ideais.

2.2 Subgrupos Discretos

Para entender melhor a geometria da ação de um grupo Γ em um espaço topológico X , veremos a definição de domínios fundamentais e domínios de Dirichlet. Esse último é construído a partir de um grupo Fuchsiano. Veremos como os domínios de Dirichlet podem ser úteis na compreensão da estrutura de grupos Fuchsianos e que são também domínios fundamentais.

Apresentamos a definição de grupos fuchsianos:

Definição 2.7. Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Note que, dado um subgrupo discreto Γ de isometrias de $\mathbb{H}^2$, temos que o subgrupo

$$\Gamma_0 = \{g \in \Gamma \mid g \text{ preserva orientação de } \mathbb{H}^2\}$$

é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$. Com isso, podemos estudar os subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$, ou seja, os grupos fuchsianos a partir dos subgrupos discretos do grupo de todas as isometrias de $\mathbb{H}^2$.

O próximo teorema nos dá uma equivalência entre um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ ser discreto e sua ação em $\mathbb{H}^2$ ser propriamente descontínua. Mas antes de enunciá-lo, começaremos com dois lemas cujas provas podem ser encontradas em [5].

Lema 2.2. Sejam $w \in \mathbb{H}^2$ e $K \subset \mathbb{H}^2$ compacto. Então, o conjunto

$$H = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(w) \in K\}$$

é compacto.

Lema 2.3. Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ grupo com ação propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Então os pontos fixos por elementos de Γ , ou seja, o conjunto

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \exists T \in \Gamma, T(z) = z\}$$

é discreto.

Teorema 2.3. Um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto, ou seja, um grupo fuchsiano se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.

Demonstração. Suponha que Γ é discreto. Então, para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e para todo compacto $K \subset \mathbb{H}^2$,

$$\{T \in \Gamma \mid T(z) \in K\} = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T(z) \in K\} \cap \Gamma.$$

O lema 2.2 garante que $\{T \in PSL(2, \mathbb{R}) | T(z) \in K\}$ é compacto, logo $\{T \in \Gamma | T(z) \in K\}$ é interseção de um conjunto compacto com outro discreto e então é finito, em particular, para $z \in K \subset \mathbb{H}^2$, $T(K) \cap K \neq \emptyset$ para um número finito de elementos $T \in \Gamma$, pela equivalência (1) e (4) do Teorema 6.2 temos que a ação de Γ é propriamente descontínua. Suponhamos agora que Γ age de modo propriamente descontínua e que Γ não seja discreto em $PSL(2, \mathbb{R})$. Seja z um ponto que não é fixo por qualquer elemento de Γ a não ser a identidade. A existência de tal ponto é garantida pelo Lema 2.3, já que o conjunto de pontos fixos por elementos de Γ é discreto. Assumindo que Γ não é discreto, temos que existe sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ de elementos distintos de Γ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = Id$. Temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z) = z$. Mas como $T_n(z) = z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência de pontos distintos de z convergindo para z , ou seja, para toda vizinhança V_z de z , existe uma infinidade de elementos $T \in \Gamma$ tal que $T(z) \in V(z)$, pela equivalência (1) e (2) do Teorema 6.2 a ação de Γ não é propriamente descontínua contradizendo a hipótese. $\square$

A próxima definição é essencial para o entendimento dos próximos assuntos.

Definição 2.8. Um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é dito grupo elementar se existe $z \in \overline{\mathbb{H}^2}$ tal que a órbita $\Gamma(z)$ é finita.

2.3 Domínios Fundamentais e Domínios de Dirichlet

Nesta seção, queremos entender melhor a geometria da ação de um grupo Fuchsiano no semiplano superior $\mathbb{H}^2$, ou seja, a ação do grupo de isometrias em subconjunto do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$. Para tanto, definiremos domínios fundamentais e domínios de Dirichlet. Esses últimos são construídos a partir de um grupo Fuchsiano e são úteis para a compreensão da estrutura desse grupo. Veremos que domínios de Dirichlet são domínios fundamentais e que se o domínio de Dirichlet centrado em um ponto que só é fixo pelo elemento identidade do grupo Fuchsiano possui um número finito de arestas, então este é necessariamente par e os elementos de Γ emparelham as arestas desse domínio de Dirichlet.

Definição 2.9. Seja X espaço métrico e Γ grupo de homeomorfismo agindo em X de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é dito **domínio fundamental** de Γ se satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X$;
- 2) $int\mathcal{D} \cap T(int\mathcal{D}) = \emptyset$, para todo $Id \neq T \in \Gamma$;

3) $\text{int}\mathcal{D} \neq \emptyset$,

Aqui, $\text{int}\mathcal{D}$ é o interior do conjunto $\mathcal{D}$.

O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} - \text{int}\mathcal{D}$ é a fronteira de $\mathcal{D}$ e a família

$$\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$$

é dita um **ladrilhamento** (ou **tesselação**) de X .

Através dos grupos Fuchsianos, podemos garantir a existência de domínios fundamentais, estes chamados de Domínios de Dirichlet.

Definição 2.10. Sejam Γ grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$ para toda $T \in \Gamma$. O **Domínio de Dirichlet** centrado em p é o conjunto definido por

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 | d(z, p) \leq d(z, T(p)), \forall T \in \Gamma\}.$$

Em outras palavras, consideramos a órbita $\Gamma(p)$ e escolhemos os pontos $z \in \mathbb{H}^2$ que estão mais próximos de p do que qualquer outro ponto da órbita $\Gamma(p)$. Como $d(z, T(p)) = d(T^{-1}(z), p)$ podemos considerar:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 | d(z, p) \leq d(T(z), p), \forall T \in \Gamma\}.$$

Observação 2.4. Na definição acima, a existência do ponto $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$ para toda $T \in \Gamma$ é garantida pois o Lema 2.3 nos garante que o conjunto dos pontos fixos por algum elemento de Γ é discreto.

Exemplo 2.1. Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ o grupo cíclico gerado por $T(z) = z + 1$. Temos então que

$$D_k = \{z \in \mathbb{H}^2 | k \leq \text{Re}(z) \leq k + 1\}$$

é domínio fundamental da ação de Γ em $\mathbb{H}^2$.

De fato, temos que $\Gamma = \{T^n(z) = z + n | n \in \mathbb{Z}\}$ e $\bigcup_{T \in \Gamma} T(D_k) \subset \mathbb{H}^2$. Agora, dado $x \in \mathbb{H}^2$, considere $z \in \mathbb{H}^2$ tal que $k \leq \text{Re}(z) \leq k + 1$ e $x - z = n \in \mathbb{Z}$. Temos que $x = z + n = T^n(z)$ com $k \leq \text{Re}(z) \leq k + 1$, logo $x \in T^n(D_k) \subset \bigcup_{T \in \Gamma} T(D_k)$. Além disso, $\text{int}(D_k) \cap T(\text{int}(D_k)) \neq \emptyset$ e $\text{int}(D_k) \neq \emptyset$ (ver Figura 2.1).

Antes de demonstrarmos que Domínios de Dirichlet são domínios fundamentais vamos considerar a seguinte definição:

Definição 2.11. Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ pontos distintos. Chamamos de **bissetor per-**

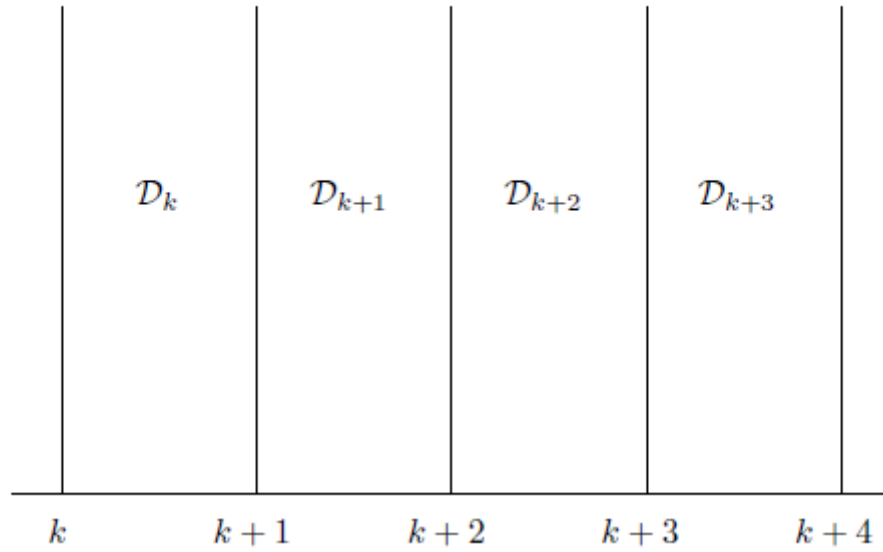


Figura 2.1: Domínio fundamental do grupo cíclico $\Gamma = \langle T(z) = z + 1 \rangle$.

perpendicular dos pontos p e q ao conjunto

$$\{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) = d(z, q)\}$$

.

Denotando por

$$L_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) = d(z, T(p))\}$$

o bissetor perpendicular de p e $T(p)$. Temos que este é a fronteira topológica de

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, p) \leq d(z, T(p))\}.$$

É imediato constatarmos que

$$D_p(\Gamma) = \bigcap_{Id \neq T \in \Gamma} H_p(T).$$

Exemplo 2.2. Seja Γ o grupo gerado cíclico gerado por $T(z) = z + 1$. Como T é parabólico, Γ não possui pontos fixos e podemos considerar $p \in \mathbb{H}^2$ qualquer. Temos então que

$$\mathcal{A}_p(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |Re(z) - Re(p)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

é domínio de Dirichlet de Γ . De fato, constatamos imediatamente que

$$H_p(T) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(p) \leq \frac{1}{2} \right\}$$

e

$$H_p(T^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(p) \geq \frac{1}{2} \right\}$$

de modo que

$$D_p \subset \mathcal{A}_p(\Gamma)$$

Mas dado $z \in \mathbb{H}^2$ com $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(p) < \frac{1}{2}$, temos que $\operatorname{Re}(T^n(z)) = \operatorname{Re}(z) + n$, logo para $|n| > 1$,

$$|\operatorname{Re}(T^n(z)) - \operatorname{Re}(p)| > \frac{1}{2}(|n| - 1) > \frac{1}{2}, \quad \forall |n| > 1,$$

ou seja, se z for ponto interior de $\mathcal{A}_p(\Gamma)$, $T^n(z)$ não o será, a menos que $T^n = Id$, de modo que $D_p(\Gamma) = \mathcal{A}_p(\Gamma)$.

O próximo resultado garante que Domínios de Dirichlet são domínios fundamentais.

Teorema 2.4. Seja Γ grupo fuchsiano e $D_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet centrado em p . Então $D_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ .

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{H}^2$, a órbita $\Gamma(z)$ é discreta, então, existe (não necessariamente único) $z_0 \in \Gamma(z)$ mais próximo de p . Temos que $d(z_0, p) \leq d(T(z_0), p)$ para todo $T \in \Gamma$, logo, $z_0 \in D_p(\Gamma)$ e obtemos que o domínio de Dirichlet contém ao menos um representante de cada órbita. O domínio $D_p(\Gamma)$ possui interior não vazio. De fato, seja $\epsilon = \min_{T \in \Gamma} \{d(p, T(p))\}$. Então a bola $B_{\frac{\epsilon}{2}}(p) \subset D_p(\Gamma)$. Mostraremos agora que dois pontos interiores de $D_p(\Gamma)$ não podem pertencer a mesma órbita. Se $d(z, p) = d(T(z), p)$ para algum $Id \neq T \in \Gamma$ então $d(z, p) = d(z, T^{-1}(p))$, de modo que $z \in L_p(T^{-1})$. Temos então que, caso pertença a $D_p(\Gamma)$, z pertence a sua fronteira, não sendo portanto ponto interior. □

Corolário 2.1. Todo domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano é geodesicamente convexo, ou seja, dados $z_1, z_2 \in D_p(\Gamma)$, o segmento geodésico $\overline{z_1 z_2} \subset D_p(\Gamma)$.

Provaremos a seguir alguns resultados que mostram como um domínio de Dirichlet pode ser útil na compreensão da estrutura de grupos. O primeiro resultado nos diz que todo subconjunto compacto do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ intercepta apenas

um número finito de imagens $T(D_p(\Gamma))$, onde $T \in \Gamma$.

Teorema 2.5. Seja Γ grupo fuchsiano e $D = D_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet. Então o ladrilhamento $\{T(D)|T \in \Gamma\}$ é localmente finito.

Demonstração. Sejam $q \in \mathbb{H}^2$, K vizinhança compacta de q e $r = \sup_{z \in K} \{d(p, z)\}$. Como K é compacto temos que $r \leq \infty$. Suponhamos que exista uma sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ de elementos distintos de Γ tal que $K \cap T_n(D) \neq \emptyset$. Existe então sequência $z_n \in D$ tal que $w_n = T_n(z_n) \in K \cap T_n(D)$. Mas

$$\begin{aligned} d(p, T_n(p)) &\leq d(p, w_n) + d(w_n, T_n(p)) \\ &= d(p, w_n) + d(z_n, p) \\ &\leq d(p, w_n) + d(w_n, p) \\ &\leq 2r. \end{aligned}$$

e como p não é fixo por qualquer elemento de Γ , a sequência $T_n(p)$ é sequência de pontos distintos contidos na bola fechada de centro p e raio $2r$, contradizendo a hipótese de as órbitas de Γ serem discretas.

□

Temos a seguinte consequência:

Corolário 2.2. Dado $z \in \partial(D_p(\Gamma))$, existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $T(z) \in \partial(D_p(\Gamma))$.

Demonstração. De fato, como o ladrilhamento $\{T(D_p(\Gamma)), T \in \Gamma\}$ é localmente finito, dado $z \in \mathbb{H}^2$ existe uma bola $B_\epsilon(z)$ e elementos $T_1, \dots, T_n \in \Gamma$ distintos tais que

$$\begin{aligned} z &\in T_1(D_p(\Gamma)) \cap \dots \cap T_n(D_p(\Gamma)) \\ B_\epsilon(z) &\in T_1(D_p(\Gamma)) \cup \dots \cup T_n(D_p(\Gamma)). \end{aligned}$$

A segunda condição acima nos garante que a sequência $T_1, \dots, T_n$ é maximal satisfazendo a primeira condição, ou seja, se $T(D_p(\Gamma)) \cap B_\epsilon(z) \neq \emptyset$ então $T = T_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Mas para $z \in \partial(D_p(\Gamma))$, tomamos $T_1 = Id$ e temos então que $n \geq 2$, pois do contrário teríamos $z \in B_\epsilon(z) \in D_p(\Gamma)$, contradizendo a hipótese de z ser ponto da fronteira de $D_p(\Gamma)$.

□

Definição 2.12. Seja $\mathcal{P}$ um polígono convexo de $\mathbb{H}^2$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é um **polígono fundamental** de um grupo fuchsiano Γ quando $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental localmente finito de Γ .

A fronteira de um Domínio de Dirichlet é formada pela união de geodésicas, raios geodésicos ou segmentos geodésicos. A cada uma destas geodésicas (raios ou segmentos) chamaremos de aresta ordinária. Diremos que um ponto da fronteira de um domínio de Dirichlet é um vértice ordinário se este for a interseção de duas arestas ordinárias distintas de $D_p(\Gamma)$. O próximo resultado garante que cada aresta de um domínio de Dirichlet está contida na imagem de $T(D_p(\Gamma))$ para alguma $T \in \Gamma$ e que um vértice ordinário é também imagem de duas transformações distintas de Γ .

Teorema 2.6. 1. Seja A aresta de $D_p(\Gamma)$. Então existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $A \subseteq D_p(\Gamma) \cap T(D_p(\Gamma))$.

2. Seja V vértice de $D_p(\Gamma)$. Então V é vértice ordinário se, e somente se, existem elementos distintos $Id \neq T_1, T_2 \in \Gamma$ tais que $V = D_p(\Gamma) \cap T_1(D_p(\Gamma)) \cap T_2(D_p(\Gamma))$.

Demonstração. 1. Seja $z \in A$ um ponto que não é vértice. Conforme vimos no corolário, existe $T^{-1} \in \Gamma$ tal que $w = T^{-1}(z) \in \partial(D_p(\Gamma))$. Temos então que $A \subseteq D_p(\Gamma) \cap T(D_p(\Gamma))$.

2. Consideremos V vértice de $D_p(\Gamma)$. Sejam A_1 e A_2 arestas de $D_p(\Gamma)$ tais que $V = A_1 \cap A_2$. Sejam T_1 e T_2 como acima tais que $A_i = D_p(\Gamma) \cap T_i(D_p(\Gamma))$, $i = 1, 2$. Temos então que $V = D_p(\Gamma) \cap T_1(D_p(\Gamma)) \cap T_2(D_p(\Gamma))$. Além disto, temos que $T_1 = T_2$ se e somente se V for ponto interior de aresta ordinária, ou seja, se e somente se V for vértice singular. □

Dois pontos de $\mathbb{H}^2$ são ditos congruentes se pertencerem à mesma Γ -órbita. Esta é uma relação de equivalência e é claro, a partir da definição de domínio fundamental, que dois pontos congruentes de um domínio fundamental devem estar contidos em sua fronteira. A restrição da relação de congruência tanto ao conjunto dos vértices como ao conjunto das arestas de um domínio de Dirichlet também define uma relação de equivalência. Começamos estudando as classes de equivalência de arestas de $D_p(\Gamma)$.

Teorema 2.7. Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet $D_p(\Gamma)$ contém exatamente dois elementos.

Demonstração. Seja Γ tal que $A \subseteq D_p(\Gamma) \cup T(D_p(\Gamma))$, conforme constatamos no teorema precedente. Temos então que $T^{-1}(A)$ é aresta de $D_p(\Gamma)$, logo existe ao menos uma aresta equivalente a A e distinta desta.

Dado A_i na classe de equivalência de A , temos que existe $T_i \in \Gamma$ tal que

$$A = T_i(A) \subseteq T_i(D_p(\Gamma) \cap T(D_p(\Gamma))).$$

Logo, se tivermos $A_1 e A_2$ na mesma classe de equivalência de A teremos que

$$\begin{aligned} A &\subseteq D_p(\Gamma) \cap T_1^{-1}T(D_p(\Gamma)) \cap D(\Gamma) \cap T_2^{-1}T(D_p(\Gamma)) \\ &= D_p(\Gamma) \cap T_1^{-1}T(D_p(\Gamma)) \cap T_2^{-1}T(D_p(\Gamma)). \end{aligned}$$

Mas, se $T_1 = T_2$ o teorema precedente nos garante que A é um vértice de $D_p(\Gamma)$. Logo $T_1 = T_2$ e temos que a classe de equivalência de uma aresta possui no máximo dois elementos.

□

Desta forma, se $D_p(\Gamma)$ possui um número finito de arestas, este é necessariamente um número par. Veremos no capítulo seguinte que dada uma aresta α existe uma única aresta $\alpha' \neq \alpha$ e um único elemento $T \in \Gamma$ tal que $T(\alpha) = \alpha'$. Dizemos neste caso que $\{\alpha, \alpha'\}$ é um par de arestas congruentes e que T relaciona o par, ou então que T emparelha as arestas. Veremos também que se T relaciona o par $\{\alpha, \alpha'\}$, então T^{-1} também o relaciona.

Capítulo 3

Emparelhamento de Arestas

Neste capítulo veremos a definição de emparelhamento de arestas. Ao emparelharmos as arestas obtemos ciclos de vértices, que são os vértices equivalentes. Dizemos que o vértice v_1 é equivalente ao vértice v_2 se existir uma isometria de emparelhamento Γ tal que $\gamma(v_2) = v_1$. Demonstraremos o Teorema de Poincaré, que nos dá algumas condições que o emparelhamento deve obedecer para que o grupo Γ gerado pelas isometrias de emparelhamento de um polígono $\mathcal{P}$ seja um grupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e o $\mathcal{P}$ seja domínio fundamental de Γ . Se a ação de Γ em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua então Γ é um grupo fuchsiano e é gerado pelo conjunto das isometrias de emparelhamento de arestas de um polígono. Veremos que um grupo fuchsiano Γ é finitamente gerado se, e só se, qualquer domínio poligonal convexo de γ possuir finitas arestas.

No próximo capítulo veremos que em algumas condições o espaço das órbitas de $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície, estudaremos neste capítulo condições que garantem a compacidade do quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$. As principais referências para este capítulo são: [2], [5], [9].

3.1 Geradores de um Grupo Fuchsiano

Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico e $\mathcal{A}$ o conjunto de arestas de $\mathcal{P}$. A seguir definimos um emparelhamento de arestas para o polígono hiperbólico.

Definição 3.1. Um **emparelhamento de arestas** para o polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ é um conjunto $\rho = \{T_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\alpha \in \mathcal{A}$:

1. Existe uma aresta $\alpha' \in \mathcal{A}$; com $T(\alpha) = \alpha'$.
2. As isometrias T_α e $T_{\alpha'}$ satisfazem a relação $(T_\alpha)^{-1} = T_{\alpha'}$;
3. Se α for aresta de $\mathcal{P}$, então $\alpha' = \mathcal{P} \cap (T_\alpha)^{-1}(\mathcal{P})$.

Ao emparelhar as arestas de um polígono obtemos os ciclos de vértices:

Definição 3.2. Seja Γ um grupo fuchsiano e $D = D_p(\Gamma)$ um domínio de Dirichlet de Γ . Definimos um **ciclo de vértices** como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como sendo um conjunto da forma

$$\{T(z) \mid T \in \Gamma, z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } D_p(\Gamma)\}.$$

Notemos que sendo o ladrilhamento $\{T(D_p(\Gamma)) \mid T \in \Gamma\}$ localmente finito (Teorema 2.5) temos que os ciclos são finitos.

O próximo resultado nos diz quem são os geradores de um grupo fuchsiano ao emparelharmos as arestas de um polígono hiperbólico.

Teorema 3.1. Seja $D = D_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ . Considere o conjunto $\{T_i \mid i \in I\}$ de elementos de Γ que relacionam arestas distintas de D . Então, $\{T_i \mid i \in I\}$ é um conjunto de geradores de Γ .

Demonstração. Seja $\Lambda = \langle T_i \rangle$, o conjunto gerado pelos elementos de Γ que relacionam arestas de D e definamos:

$$X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(D), Y = \bigcup_{S \in \Gamma/\Lambda} S(D)$$

É evidente que $X \cup Y = \mathbb{H}^2$ e $X \neq \emptyset$ pois D é um domínio de Dirichlet, logo, um domínio fundamental. Sendo $\mathbb{H}^2$ conexo, se demonstrarmos que X e Y são fechados, teremos que $X \cap Y = \emptyset$ é equivalente a termos $Y = \emptyset$, ou seja, a termos $\Lambda = \Gamma$.

Seja então $Z = \bigcup_{i \in I} S_i(D)$, união qualquer de imagens de D por elementos de Γ e consideremos sequência $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de Z , convergindo para algum ponto z_0 . Como D é domínio fundamental, existe $T \in \Gamma$ tal que $z_0 \in T(D)$. Mas como o ladrilhamento por D é localmente finito, em particular existe vizinhança de z_0 que intercepta apenas um número finito de elementos da família $\{S_i(D) \mid i \in I\}$. Logo, algum destes elementos, digamos $S_k(D)$ contém uma subsequência de z_n convergindo para z_0 . Mas $S_k(D)$ é fechado, e obtemos que $z_0 \in S_k(D) \subseteq Z$. Como tomamos Z união arbitrária de ladrilhos, temos que em particular X e Y são fechados e consequentemente $\Lambda = \Gamma$ se, e somente se, $X \cap Y \neq \emptyset$.

Consideremos então $T \in \Lambda$ e $S_1 \in \Gamma$ tais que $T(D)$ e $S_1(D)$ tenham uma aresta em comum. Teremos que $T^{-1}S_1(D)$ tem aresta em comum com D , de modo que $T^{-1}S_1(D) = T_j(D)$ para algum T_j gerador de Λ . Mas como $S_1 = TT_j$, temos que $S_1 \in \Lambda$, pois ambos T e T_j pertence a Λ . Suponhamos então que para $S_2 \in \Gamma$, tenhamos que $T(D)$ e $S_2(D)$ tenham um vértice em comum. Então $T^{-1}S_2(D)$ tem um vértice, digamos $v_1 = T^{-1}S_2(v)$, em comum com D . Mas o ladrilhamento $\{S(D) \mid S \in \Gamma\}$ é localmente finito, logo existe apenas um número finito de arestas

que tem v_1 como vértice e temos que D e $T^{-1}S_2(D)$ podem ser conectadas por uma sequência finita de ladrilhos, cada um possuindo uma aresta em comum com o anterior. Logo, aplicando o raciocínio feito anteriormente para este número finito de ladrilhos obtemos que $S_2 \in \Gamma$.

Obtemos assim que apenas as imagens de D por Λ podem interceptar X . Em outras palavras, $X \cap Y = \emptyset$. Mas conforme mencionamos anteriormente, a conexidade de $\mathbb{H}^2$ garante que termos $\Gamma = \Lambda$ é equivalente a termos $X \cap Y = \emptyset$, ou seja,

$$X = \bigcup_{S \in \Lambda} S(D) = \mathbb{H}^2$$

e consequentemente $\Lambda = \langle T_i \rangle = \Gamma$.

□

Observação 3.1. A um domínio de Dirichlet $D = D_p(\Gamma)$ de um grupo fuchsiano podemos associar um grafo $Gr(\Gamma)$ que pode ser imerso em $\mathbb{H}^2$. Os vértices do grafo serão os pontos da órbita $\Gamma(p)$. Observemos que como p não é fixo por qualquer elemento de Γ , temos uma relação bijetora entre os elementos de Γ e os vértices de $Gr(\Gamma)$. Dados dois vértices $T(p)$ e $S(p)$, estes serão ligados por uma aresta se, e somente se, os ladrilhos $T(D)$ e $S(D)$ tiverem uma aresta em comum, o que equivale a dizer que D e $T^{-1}S(D)$ tem uma aresta A em comum. Mas A é uma aresta em comum a D e $T^{-1}S(D)$ se, e somente se, existe transformação de emparelhamento T_A tal que $T_A(D) = T^{-1}S(D)$, ou seja, $T_A = T^{-1}S$. Resumindo, dois vértices $T(p)$ e $S(p)$ são unidos por uma aresta se, e somente se, $T^{-1}S$ for transformação de parelhamento. Obtemos com isto um grafo, conhecido como grafo de Coxeter da apresentação de Γ definida pelas transformações de emparelhamento.

3.2 O Teorema de Poincaré

Uma questão que surge de maneira natural é estabelecer condições para podermos determinar um grupo discreto de isometrias (grupos fuchsianos) a partir de um domínio dado. Considere então D um domínio poligonal fechado (com interior não vazio) em $\mathbb{H}^2$, ou seja, estamos supondo que $\partial(D) = D \setminus D^\circ$ seja união de geodésicas (ou segmentos ou raios) chamados de arestas de D . Consideremos $A = \{\alpha; \alpha \text{ é aresta de } D\}$ o conjunto das arestas e suponhamos que exista um emparelhamento de arestas. Se denotarmos por Γ o grupo gerado pelas isometrias T_α , buscamos condições sobre D que possam garantir ser Γ um grupo discreto com domínio fundamental D . Podemos encontrar condições adequadas em uma situação bem mais genérica:

Seja X espaço métrico, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ \cup \partial(\mathcal{P}) \subset X$ um polígono convexo com interior não vazio e conjunto A de arestas emparelhadas por isometrias de X , de modo que

$T_\alpha(\alpha) = \alpha'$ e $T_{\alpha'} = (T_\alpha)^{-1}$. Denotemos por Γ o grupo de isometrias de X gerado por $\{T_\alpha | \alpha \in A\}$. Seja o conjunto $\Gamma \times \mathcal{P} = \{(T, x) | T \in \Gamma \text{ e } x \in \mathcal{P}\}$

E considere sobre $\Gamma \times \mathcal{P}$ a relação $\sim$ definida por

$$(T, x) \sim (S, y) \iff [T = S \text{ e } x = y] \text{ ou } [x \in \alpha, y = T_\alpha(x) \text{ e } T = ST_\alpha].$$

1. A relação $\sim$ é **reflexiva**: $(T, x) \sim (T, x)$ pois $T = T$ e $x = x$
2. Também temos que $\sim$ é **simétrica**: $(T, x) \sim (S, y)$ então $T = S$ e $x = y$ ou se $x \in \alpha, y = T_\alpha(x)$ e $T = ST_\alpha$ que podemos escrever: $S = T$ e $y = x$ ou se $y \in T_\alpha(\alpha) = \alpha', x = T_\alpha^{-1} = T'_\alpha(\alpha')$ e $S = TT_\alpha^{-1} = T_{\alpha'}$
3. Mas não é **transitiva**. Suponhamos que seja, e consideremos $(T, x), (S, y), (R, z) \in \Gamma \times \mathcal{P}$ de modo que T, S, R seja dois a dois disjuntos e x, y, z dois a dois distintos. Suponhamos que $(T, x) \sim (S, y) \sim (R, z)$, como estamos supondo $\sim$ transitiva deveríamos ter $(T, x) \sim (R, z)$. Assim, teríamos $T = R$ e $x = z$ um absurdo ou teríamos $x \in \alpha, T_\alpha(x) = z$ e $T = ST_\alpha$. Mas como $(T, x) \sim (S, y)$ temos, se $x \in \alpha, T_\alpha(x) = y$ e $T = ST_\alpha$. Daí teríamos $y = T_\alpha(x) = z$, ou seja, $y = z$ e $ST_\alpha = T = RT_\alpha$, isto é $S = R$ que também é um absurdo.

Para torná-la transitiva, e portanto uma relação de equivalência, estenderemos a definição de $\sim$ considerando:

$$(T, x) * (S, y)$$

se, e somente se, existir uma sequência finita de elementos em $\Gamma \times \mathcal{P}_{8g-4}$ satisfazendo

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y).$$

De fato, sejam $(T, x), (S, y), (R, z) \in \Gamma \times \mathcal{P}$. Assim, se $(T, x) * (S, y)$ então, existe uma sequência finita (T_j, x_j) , com $j = 1, \dots, n$ tal que

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y).$$

E se $(S, y) * (R, z)$ então, existe uma sequência finita (T_k, x_k) com $k = 1, \dots, m$ tal que

$$(S, y) = (S_1, x_1) \sim \dots \sim (S_m, y_m) = (R, z).$$

Logo,

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y) = (S_1, x_1) \sim \dots \sim (S_m, y_m) = (R, z)$$

Portanto, $(T, x) * (R, z)$. A simetria e reflexão em $*$ é herdada por $\sim$. Assim, $*$ é uma **relação de equivalência**.

Denotaremos por $[T, x]$ a classe de equivalência determinada por (T, x) e X^* o conjunto das classes de equivalência.

Consideremos as aplicações:

$$\Psi : \Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow X^* \text{ dada por } \Psi(T, x) = [T, x].$$

$$\Phi : \Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow X \text{ dada por } \Phi(T, x) = T(x).$$

$$\Omega : X^* \rightarrow X \text{ dada por } \Omega([T, x]) = T(x).$$

A aplicação Ω está bem definida, de fato, se $[T, x] = [S, y]$, então $T = S$ e $x = y$ ou $x \in \alpha$, $y = T_\alpha(x)$ e $T = ST_\alpha$. Em ambos os casos, temos

$$\Omega([T, x]) = T(x) = ST_\alpha(x) = S(y) = \Omega([S, y]).$$

O diagrama abaixo é comutativo, pois $\Omega \circ \Psi(T, x) = \Omega([T, x]) = T(x) = \Phi(T, x)$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\Psi} & X^* \\ & \searrow \Phi & \downarrow \Omega \\ & & X \end{array}$$

Devemos notar que estamos considerando em Γ uma topologia discreta, em $\Gamma \times \mathcal{P}$ a topologia produto e em X^* a topologia quociente.

Lema 3.1. As aplicações Φ, Ω, Ψ dadas acima são contínuas.

Demonstração. Note que Ψ é uma aplicação contínua e aberta pela forma que a definimos e por ela induzir a topologia quociente de X^* .

Mostraremos que Φ é contínua. Para isso considere $A \subset X$ aberto, temos que

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup_{T \in \Gamma} (\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}(\mathcal{P}))),$$

como a topologia em Γ é a topologia discreta, $\{T\}$ é aberto. Logo $\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}(\mathcal{P}))$ é aberto em $\Gamma \times \mathcal{P}$ e portanto $\phi^{-1}(A) = \bigcup_{T \in \Gamma} (\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}(\mathcal{P})))$ é aberto, ou seja, Φ é contínua. Agora, como $\Phi = \Psi \circ \Omega \Rightarrow \Phi^{-1} = \Omega^{-1} \circ \Psi^{-1}$, então $\Phi^{-1}(A) = \Psi^{-1}(\Omega^{-1}(A))$ e $\Psi(\Phi^{-1}(A)) = \Omega^{-1}(A)$ e como Ψ é aberta e Φ é contínua, segue Ω é contínua. $\square$

Proposição 3.1. Sejam $X, X^*, \mathcal{P}, \Gamma$ e Ω como acima. Então,

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = X$$

se Ω for sobrejetora, e para $T, S \in \Gamma$ distintos

$$T(\text{int}(\mathcal{P})) \cap S(\text{int}(\mathcal{P})) = \emptyset$$

se Ω for injetora.

Demonstração. Como o diagrama visto acima comuta, temos que $T(\mathcal{P}) = \Phi(T, \mathcal{P}) = \Omega(\Psi(T, \mathcal{P})) = \Omega([T, \mathcal{P}])$, dessa forma temos que

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = \bigcup_{T \in \Gamma} \Omega([T, \mathcal{P}]).$$

Supondo Ω sobrejetora e sabendo que ela é contínua, temos

$$\bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} (T(\mathcal{P})) = \bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} \Omega([T, \mathcal{P}]) = \Omega\left(\bigcup_{S \in \Gamma \setminus \Lambda} [T, \mathcal{P}]\right) = \Omega(X^*) = X$$

demonstrando a primeira igualdade da proposição. Agora, supondo Ω injetiva, temos que

$$\begin{aligned} T(int\mathcal{P}) \cap S(int\mathcal{P}) &= \Omega([T, int\mathcal{P}]) \cap \Omega([S, int\mathcal{P}]) \\ &= \Omega([T, int\mathcal{P}]) \cap ([S, int\mathcal{P}]) \\ &= \Omega(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Isto demonstra a segunda igualdade da proposição. □

A proposição acima nos fornece uma situação semelhante à existência de um domínio fundamental, ou seja, se Γ for um grupo fuchsiano, a proposição nos garante que $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental, desde que Ω seja bijetora.

Para que Ω seja sobrejetora, devemos garantir para pontos na fronteira de $\mathcal{P}$ que alguma vizinhança seja coberta por imagens de $\mathcal{P}$ e que esta cobertura seja consistente com a relação $*$. Se x for ponto interior de alguma aresta α de $\mathcal{P}$, podemos constatar que a classe de equivalência $[Id, x]$ contém apenas os elementos (Id, x) e $((T_\alpha)^{-1}, T_\alpha(x))$ e que $\mathcal{P} \cap (T_\alpha)^{-1}(\mathcal{P})$ contém uma vizinhança de x . se x for vértice de $\mathcal{P}$ deveremos expressar essa situação com a condição:

Condição C_1 : Dado um vértice $x \in \mathcal{P}$, consideremos a classe de equivalência $[Id, x] = \{(T_1, x_1), \dots, (T_n, x_n)\}$. Então, a família $T_j(int\mathcal{P})$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} T_j(\mathcal{P})$ e $T_{j+1} = T_j \circ T_\alpha$, onde α é aresta de $\mathcal{P}$.

No caso em que temos $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$, onde a noção de ângulo é bem definida, a condição acima pode ser substituída pela condição:

Condição C_1^* Dado um vértice V de $\mathcal{P}$, sejam $V = V_1, \dots, V_r$ os vértices de $\mathcal{P}$ tais que $T_i(V_i) = V$, para algum $T_i \in \Gamma$ e sejam $\theta_1, \dots, \theta_r$ os ângulos internos nos

respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem de Γ_V , $\theta_1 + \dots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}$.

Proposição 3.2. Se $\mathcal{P}$ satisfazer a **Condição** C_1^* , então X^* será um espaço de Hausdorff conexo e $\Omega : X^* \rightarrow X$ um homeomorfismo local.

Estamos interessados em tornar a aplicação $\Omega : X^* \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Feito isto, se considerarmos o caso em que $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{S}^2$, todos simplesmente conexos, sendo X^* conexo, obteremos que α , além de sobrejetora, também será injetora, e então, pelo Lema 3.1 temos que o par $(\Gamma, \mathcal{P})$ é tal que $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = \mathbb{H}^2$ e $T(int\mathcal{P}) \cap int\mathcal{P} \neq \emptyset \Rightarrow T = Id$. Nessas condições temos Γ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{P}$ um domínio fundamental de Γ .

O motivo pela qual Ω possa deixar de ser aplicação de recobrimento está no fato de as constantes ε_x determinadas na demonstração da Proposição 3.2 não serem necessariamente limitadas inferiormente. Para garantir que Ω seja uma aplicação de recobrimento exigimos a seguinte condição:

Condição C_2 : A constante $\varepsilon > 0$ da **Condição** C_1 pode ser escolhida independentemente do ponto x .

Esta condição é satisfeita se o polígono $\mathcal{P}$ tiver um número finito de arestas e vértices, bastando tomar ε como o mínimo do comprimento das arestas de $\mathcal{P}$.

Através deste estudo temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2 (Teorema de Poincaré). Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico com um emparelhamento ρ satisfazendo as condições C_1^* e C_2 . Então o grupo Γ gerado pelas isometrias de emparelhamento é um grupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $\mathcal{P}$ um domínio fundamental de Γ .

3.3 Grupos Geometricamente Finitos

Conforme visto no Teorema 3.1, um grupo fuchsiano que possua um domínio de Dirichlet com número finito de arestas é finitamente gerado. Estamos interessados em entender melhor a relação entre grupos finitamente gerados e grupos geometricamente finitos. Veremos que qualquer domínio poligonal convexo de um grupo fuchsiano Γ possui finitas arestas se, e somente se, Γ é finitamente gerado.

Definição 3.3. Um grupo fuchsiano Γ é dito geometricamente finito se existir algum domínio fundamental poligonal convexo com número finito de arestas.

O próximo teorema nos dá a relação entre grupos finitamente gerados e grupos geometricamente finitos.

Teorema 3.3. Seja Γ um grupo fuchsiano não elementar. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Γ é geometricamente finito, isto é, Γ possui polígono fundamental convexo com finitas arestas.
2. Γ é finitamente gerado.

Observação 3.2. É possível tornar o Teorema 3.3 mais forte, substituindo o item 1 pela seguinte afirmação:

- 1'. Qualquer domínio poligonal convexo de Γ possui finitas arestas.

3.4 Grupos Fuchsianos Co-Compactly

Veremos nesta subseção condições para que o quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ seja compacto. Seja Γ um grupo fuchsiano de $PSL(2, \mathbb{R})$ agindo de maneira propriamente descontínua sobre $\mathbb{H}^2$. Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, definimos

$$z \sim w \Leftrightarrow \text{existe } T \in \Gamma \text{ tal que } w = T(z).$$

Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{H}^2$. Onde as classes de equivalência

$$[z] = \{w \in \mathbb{H}^2 | w \sim z\} = \{T(z) | T \in \Gamma\}$$

é a órbita $\Gamma(z)$ de z . Assim, obtemos a partição de $\mathbb{H}^2 = \bigcup_{z \in \mathbb{H}^2} \Gamma(z)$.

Neste caso, o espaço das órbitas

$$\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma} = \frac{\mathbb{H}^2}{\sim} = \{\Gamma(z) | z \in \mathbb{H}^2\}$$

é um espaço topológico com a topologia induzida pela projeção

$$\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}.$$

Definição 3.4. Um grupo fuchsiano Γ é dito co-compacto se o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ for compacto.

Observação 3.3. Se Γ possuir domínio fundamental compacto $\mathcal{D}$, como a restrição de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{D}$ é sobrejetora, então Γ é compacto. A recíproca também é válida, como veremos a seguir.

Teorema 3.4. Seja Γ um grupo fuchsiano e suponha que Γ possua domínio fundamental convexo não compacto. Então $\mathbb{H}^2/\Gamma$ não é compacto.

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ domínio fundamental convexo não compacto. Como $\mathcal{D}$ é fechado e não compacto, existe sequência ilimitada $(z_n)_{n=1}$ de pontos de $\mathcal{D}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que z_n converge para um ponto $a \in \partial\mathbb{H}^2$. Dado p ponto interior de $\mathcal{D}$, a sequência dos segmentos geodésicos ligando p à z_n converge para um raio γ geodésico ligando p à a . Mas como $\mathcal{D}$ é convexo e p ponto interior, temos que γ está contido no interior de $\mathcal{D}$. Logo, se tomarmos uma cobertura de γ que não possua subcobertura finita por abertos suficientemente pequenos, estes se projetarão homeomorficamente sobre sua imagem, e obteremos uma cobertura por abertos para $\mathbb{H}^2/\Gamma$ que não admite subcobertura finita e portanto $\mathbb{H}^2/\Gamma$ não é compacto. □

Como consequência temos o seguinte resultado:

Corolário 3.1. Um grupo Fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Dirichlet de Γ for compacto.

O seguinte resultado nos dá uma relação entre co-compactidade e a inexistência de elementos parabólicos.

Teorema 3.5. Seja Γ um grupo Fuchsiano co-compacto. Então Γ não possui elementos parabólicos.

O próximo resultado tem como consequência uma informação muito interessante, que nos diz que se um grupo Fuchsiano não possui elementos parabólicos, então ele é co-compacto.

Teorema 3.6. Seja Γ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = D_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet não compacto mas com área finita. Então:

- (i) Cada ponto $\epsilon \in \partial_\infty \mathcal{D}$ é ponto fixo de algum elemento parabólico $T \in \Gamma$
- (ii) Se $\eta \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é ponto fixo por algum elemento parabólico de Γ , existe $S \in \Gamma$ tal que $S(\eta) \in \partial_\infty \mathcal{D}$.

Corolário 3.2. Um grupo Fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, não possuir elementos parabólicos e $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$

Demonstração. Se Γ for co-compacto então obviamente $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ e pelo teorema 3.5, Γ não possui elementos parabólicos. Agora o teorema 3.6 nos garante que se $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ e Γ não possuir elementos parabólicos, então qualquer domínio de Dirichlet $\mathcal{D}$ de Γ não possuirá pontos ideais. Mas sendo $\mathcal{D}$ convexo, temos que $\mathcal{D}$ é limitado e assim sendo, o corolário 3.1 nos garante que Γ é co-compacto. □

3.5 A Assinatura de um Grupo Fuchsiano

O principal resultado dessa seção é que toda superfície compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser modelada pelo plano hiperbólico, isso quer dizer que para todo inteiro $g > 1$ existe um grupo discreto de isometrias (grupo fuchsiano) agindo no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ tal que o conjunto das órbitas $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ de Γ é uma superfície. Para mais informações indicamos [5] e [9].

Seja Γ um grupo fuchsiano co-compacto. Vimos pelo Corolário 3.1 que todo domínio de Dirichlet de Γ é compacto e sabemos portanto (Teorema 3.3) que Γ é geometricamente finito, ou seja, qualquer polígono fundamental de Γ possui um número finito de arestas. Ao emparelharmos as arestas deste polígono por isometrias hiperbólicas, não teremos pontos fixos ordinários e o grupo Γ será co-compacto. Vimos (Teorema 3.1) que essas isometrias de emparelhamento de arestas são os geradores do grupo fuchsiano Γ , através dela, veremos aqui uma representação para um grupo fuchsiano hiperbólico, ou seja, seus elementos são isometrias hiperbólicas, cuja superfície dada pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ tenha gênero g .

Os estabilizadores dos vértices são conjugados, ou seja, se $T(v_i) = v_j$ então $\Gamma_{v_i} = T^{-1}\Gamma_{v_j}T$, como vimos na Observação 2.3, de modo que os estabilizadores em Γ de qualquer um dos vértices de um ciclo têm sempre a mesma ordem.

Podemos então falar da ordem de um ciclo. Considere $\mathcal{D}$ domínio de Dirichlet de Γ . Sejam $m_1, \dots, m_r$ as ordens dos distintos ciclos elípticos de $\mathcal{D}$. Notemos que pela definição de domínio fundamental os pontos fixos de elementos elípticos devem estar contidos na fronteira de qualquer domínio fundamental, de modo que cada ciclo é representado na fronteira de qualquer domínio fundamental. Temos então que os números $m_1, \dots, m_r$ não dependem de $\mathcal{D}$ mas apenas de Γ .

Se Γ não possuir elementos elípticos, então T não possui pontos fixos ordinários, para toda $T \in \Gamma$ e assim a ação de Γ em $\mathbb{H}^2$ é livre, isto é, a única isometria que fixa elementos do plano hiperbólico é a identidade. Como Γ é um grupo fuchsiano (subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$), então sua ação em $\mathbb{H}^2$ é propriamente descontínua (Teorema 2.3) e portanto a projeção $P : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento (Teorema 6.4).

Temos então que $\mathcal{D}/\Gamma$ é superfície compacta (Teorema 3.1), orientável (pois o quociente foi feito por isometrias que preservam orientação), de gênero g (veremos mais a frente), com r pontos $p_1, \dots, p_r$ diferenciados, a imagem dos r distintos ciclos elípticos de Γ . Além disto, Γ age como grupo de isometrias de $\mathcal{D}/\Gamma$ e cada um dos p_k é fixo por $n_k m_k$ elementos distintos de Γ , onde n_k é o número de pontos distintos de $\mathcal{D}$ contidos no mesmo ciclo.

Definição 3.5. Nas condições acima, chamamos de assinatura de Γ ao conjunto ordenado de inteiros $(g; m_1, \dots, m_r)$. Caso o grupo fuchsiano Γ não possua elementos

elípticos, sua assinatura é $(g; 0, \dots, 0)$, ou simplesmente, $(g; -)$.

O próximo resultado nos garante uma fórmula explícita para calcular a área de uma superfície compacta proveniente de um grupo fuchsiano através da assinatura do mesmo.

Teorema 3.7. Seja Γ grupo fuchsiano co-compacto e $(g; m_1, \dots, m_r)$ sua assinatura. Então

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi \left[(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) \right].$$

Vale a recíproca deste teorema, como veremos a seguir:

Teorema 3.8. Dados inteiros $g \geq 0, r \geq 0, m_k \geq 2 (1 \leq k \leq r)$, tais que

$$(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) > 0, \quad (3.1)$$

existe grupo fuchsiano co-compacto com assinatura $(g; m_1, \dots, m_r)$.

Como o nosso interesse está somente nos grupos fuchsianos Γ cujas isometrias são hiperbólicas, faremos a demonstração de um caso particular deste teorema, o caso em que o grupo Γ não fixa elemento algum do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ e portanto não contenha elementos elípticos. Neste caso, $r = 0$ e para que a inequação seja satisfeita devemos considerar $g \geq 2$. O próximo resultado nos diz que toda superfície pode ser modelada no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

Corolário 3.3. Para todo inteiro $g > 1$ existe um grupo fuchsiano agindo em $\mathbb{H}^2$ sem pontos fixos tais que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície de gênero g .

Demonstração. Vamos usar o modelo do disco unitário $\mathbb{D}^2$ da geometria hiperbólica. Para o centro de $\mathbb{D}^2$ desenhe $(4g)$ raios com ângulos iguais, ou seja, cada ângulo entre dois raios tem medida $\frac{2\pi}{4g}$. Seja $0 < t < 1$ e escolha pontos sobre esses raios tais que a distancia euclidiana deles até o centro seja t . Vamos juntar esses sucessivos pontos por geodésicas e obtermos um polígono hiperbólico regular $M(t)$ de $4g$ lados. Chamaremos esses lados de $\alpha_1, \beta'_1, \alpha'_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta'_g, \alpha'_g, \beta_g$ e orientar como indica a Figura 3.5. Se $t \rightarrow 0$, $\mu(M(t)) \rightarrow 0$. Se $t \rightarrow 1$, esse polígono pode ser visto como união de $4g$ triângulos, cada um com ângulos internos medindo $\frac{2\pi}{4g}, 0, 0$. Utilizando o Teorema de Gauss-Bonnet, obtemos que a área de cada um destes triângulos é $\pi - \frac{2\pi}{4g}$, disto temos que:

congruente (via A_g^{-1}) ao final de α'_g que vamos chamar de v_3 . O vértice v_3 é também o final de β'_g que é congruente (via B_g) ao final de β_g que chamaremos de v_4 . O vértice v_4 é também o início de α'_g que é congruente (via A_g) ao início de α_g e este é por sua vez o início de β_{g-1} . Continuando esse processo, vemos que todos os vértices do polígono $M(t_0)$ pertence ao mesmo ciclo de vértice. Disto concluímos que

$$B_1 A_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}(v_1) = v_1.$$

Chamaremos de Σ a soma dos ângulos internos do polígono $M(t_0)$. Como a área de $M(t_0)$ é $2\pi(2g - 2)$ pela fórmula de Gauss-Bonnet temos que

$$\mu(M(t_0)) = (n - 2)\pi - \Sigma \Rightarrow \Sigma(4g - 2)\pi - (2\pi(2g - 2)) \Rightarrow \Sigma = 2\pi.$$

Seja Γ o grupo gerado por $\{A_i, B_j | i, j = 1, \dots, g\}$. Como as isometrias são hiperbólicas, então são livres, assim a ordem do estabilizador Γ_V de qualquer vértice V é 1. portanto a condição C_1^* é satisfeita e como o polígono possui um número finito de arestas, a condição C_2 é satisfeita, pelo teorema de Poincaré o grupo Γ é um grupo discreto de $Isom(\mathbb{H}^2)$ e $M(t_0)$ é um polígono fundamental para Γ . A órbita de cada ponto de $\mathbb{D}^2$ é um conjunto discreto e portanto a ação de Γ em $\mathbb{H}^2$ é propriamente descontínua e Γ é um grupo fuchsiano.

Como Γ é finitamente gerado, então qualquer polígono convexo fundamental de Γ possui finitas arestas. Sendo assim, todo polígono fundamental de Γ é co-compacto, ou seja, $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície compacta.

O espaço quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é decomposto em 1 vértice, $2g$ arestas e 1 face, pela identidade de Euler, o gênero h de $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ satisfaz:

$$2 - 2h = 1 - 2g + 1 \Rightarrow h = g$$

Concluímos que a assinatura de Γ é $(g; -)$.

□

Temos algumas consequências deste resultado, como veremos a seguir.

Corolário 3.4. Seja Γ grupo fuchsiano com assinatura $(g; m_1, \dots, m_r)$. Então

$$\langle A_1, B_1, \dots, A_g, B_g; A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = Id \rangle$$

é uma apresentação de Γ .

Demonstração. Segue da demonstração do corolário que este conjunto é conjunto de geradores. A relação é exatamente o elemento de Γ que mantém cada o ciclo $v_1, \dots, v_{4g}$ invariante. □

Capítulo 4

Grafos Imersos em Superfícies

Vimos que as isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ que emparelham um polígono hiperbólico $\mathcal{P}$ geram um grupo fuchsiano Γ quando estas satisfazem as condições do Teorema de Poincaré, e ainda, $\mathcal{P}$ é um domínio fundamental para o grupo fuchsiano Γ . Veremos nesta seção que, se essas isometrias satisfazem algumas condições o espaço das órbitas dado pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície. Pode se pensar nessa superfície como sendo obtida pela colagem das arestas equivalentes do polígono fundamental $\mathcal{P}$. As arestas deste polígono, após a identificação das arestas pelas isometrias de Γ podem ser vistas na superfície como arestas de um grafo e as interseções das arestas dos polígonos, ou seja, os vértices congruentes, podem ser vistos como um vértice no grafo, formando assim um grafo conexo G . Faremos uma breve exposição dos conceitos de grafos e quando estes podem ser ditos imersos em uma superfície. E por último definiremos um sistema de rotação de um grafo, pois é através dele que obteremos caminhos sobre o grafo. Para maiores detalhes ver [6], [7], [10], [11],[16], [17] e [18].

4.1 Teoria dos Grafos

Veremos nessa seção definições e resultados básicos da teoria de grafos necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho. Definindo uma rotação para um grafo G obtemos um caminho no grafo. Se a rotação é tal que o caminho é fechado, o grafo é conexo e está imerso em uma superfície compacta S , cortando S ao longo do grafo G obtemos um polígono com um emparelhamento associado a esse caminho fechado.

Definição 4.1. Um **grafo** G é uma tripla que consiste de um conjunto $V(G)$ de vértices, um conjunto $A(G)$ de arestas e uma relação que associa cada aresta a dois vértices (não necessariamente distintos) chamados extremos.

Quando u e v são pontos extremos de uma aresta a escrevemos $a = uv$ (ou $a = vu$). Além disso, dizemos que u e v são adjacentes e são também vizinhos.

Definição 4.2. 1. Um **laço** é uma aresta do tipo $a = uu$, ou seja, possui vértices finais iguais.

2. **Arestas múltiplas** (ou **paralelas**) são arestas distintas contendo o mesmo par de vértices finais.

3. Uma aresta é dita **dirigida** (ou **orientada**) se é formada por um par ordenado (u, v) de vértices distintos, onde o vértice u é a cauda e o vértice v é a cabeça da aresta $(u, v) = uv$. Os dois vértices são os extremos da aresta. Neste caso, $uv \neq vu$.

4. Um grafo é dito ser **dirigido** (ou **orientado**) se possui todas as arestas dirigidas. Este também é denominado **digrafo**.

Neste trabalho, utilizaremos caminhos fechados em grafos conexos quadrivalentes para gerar emparelhamentos de arestas de um polígono hiperbólico. Considere as seguintes definições.

Definição 4.3. 1. O **grau** (ou **valência**) g de um vértice v é o número de arestas (cada laço conta duas vezes) incidentes a ele, ou seja,

$$g(v) = \#\{a \in A(G) | v \text{ é extremo de } a\}.$$

2. Um vértice de grau 0 é um vértice **isolado**.

3. Um grafo G onde cada vértice tem o mesmo grau k é um **grafo k-regular**.

4. Um grafo 3-regular é chamado **trivalente**.

5. Um grafo 4-regular é chamado **quadrivalente**.

Definição 4.4. Um **caminho** C em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas, iniciando e terminando com vértices, digamos

$$C = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, \dots, a_n, v_n$$

onde $a_i = (v_{i-1}, v_i)$, $0 < i < n$. Dizemos que C é um caminho de v_0 a v_n e neste caso, v_0 e v_n são os extremos do caminho C . O **comprimento** de um caminho é o número de arestas (não necessariamente distintas) que este possui. Se $v_0 = v_n$, o caminho é dito ser **fechado**.

Definição 4.5. Um grafo G é **conexo** se, para qualquer par, u e v , de vértices de G existe um caminho com extremos u e v . Caso contrário, G é **desconexo**.

Definição 4.6. A ordem de um grafo G é o número de vértices de G .

Veremos agora o grupo de permutação de um grafo G , conceito necessário para definir um sistema de rotação no grafo.

Definição 4.7. Uma bijeção de um conjunto finito sobre ele mesmo é chamada uma permutação. Um **Grupo de Permutação** é o grupo cujos elementos são todas as permutações agindo no mesmo conjunto finito, chamado conjunto objeto.

Uma permutação P particiona o conjunto objeto pela relação de equivalência

$$x \equiv y \text{ se, e somente se, } P^k(x) = y \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 4.8. As classes de equivalência são chamadas de **órbitas de X** sobre a ação de P .

Veremos mais adiante o conceito de rotação em um grafo, esta dá origem a um caminho orientado no grafo. Estamos interessados em caminhos fechados em um grafo conexo em superfícies compactas orientadas. Definiremos agora uma imersão ou encaixe de um grafo em uma superfície.

Observação 4.1. Um arco em M é uma imagem homeomorfa de $[0, 1]$; um arco aberto é um arco menos seus pontos finais, as imagens de 0 e 1.

Definição 4.9. Seja G um grafo, com $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $A(G) = \{x_1, \dots, x_q\}$. Seja M uma bi-variedade. Uma **imersão** (ou encaixe) de G em M é um subespaço $G(M)$ de M tal que

$$G(M) = \bigcup_{i=1}^p v_i(M) \cup \bigcup_{j=1}^q x_j(M)$$

onde

- i) $v_1(M), \dots, v_p(M)$ são pontos distintos de M .
- ii) $x_1(M), \dots, x_q(M)$ são arcos abertos disjuntos dois a dois em M .
- iii) $x_j(M) \cap v_i(M) = \emptyset, i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$.
- iv) se $s_j = \{v_{j1}, v_{j2}\}$ então o arco aberto $x_j(M)$ tem $v_{j1}(M)$ e $v_{j2}(M)$ como pontos finais, $j = 1, \dots, q$.

Em outras palavras, um grafo é dito ser imerso em uma superfície M se pode ser “desenhado” em M de tal forma que as arestas se intersectam somente nos vértices comuns.

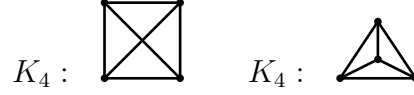


Figura 4.1: Grafos K_4 no plano $\mathbb{R}^2$.

A Figura 4.1 mostra dois desenhos de K_4 no plano, mas somente o segundo é imersão.

Definição 4.10. Seja um grafo G imerso em uma superfície M . As componentes de $M - G$ são chamadas **regiões**(ou faces) de imersão.

Por exemplo, a imersão de K_4 na Figura 4.1 possui quatro regiões.

A próxima definição é de suma importância para o entendimento do próximo assunto.

Definição 4.11. Uma região de imersão de um grafo G em uma superfície M é dita ser uma **bi-célula** se é homeomorfa ao disco unitário aberto. Se toda região de uma imersão é uma bi-célula, a imersão é dita ser **imersão bi-célula**.

O próximo teorema, fornece a identidade de Euler, que é um dos resultados mais importantes de toda teoria topológica de grafos. A partir daqui, chamaremos um k -toro de S_k .

Teorema 4.1. Seja G um grafo conexo, com um encaixe bi-célula em S_k , com p vértices, q arestas e r regiões. Então

$$p - q + r = 2 - 2k$$

Observação 4.2. O número $2 - 2k$ é chamado característica de Euler da superfície S_k . Notação: $\mathcal{X}(S_k) = 2 - 2k$.

Veremos agora o conceito de gênero de um grafo.

Definição 4.12. O **gênero**, $\gamma(G)$, de um grafo G é o gênero mínimo dentre todas as superfícies na qual G pode ser imerso.

Por exemplo, se $\gamma(G) = k, k > 0$, então G pode ser imerso em S_k , mas não em S_h , para $h < k$. Além disso, G pode ser imerso em S_m , para todo $m \geq k$, basta

adicionar $m - k$ alças à imersão de G em S_k . É claro que todo grafo G possui um gênero. Se G possui q arestas, então coloque os vértices de G na esfera e adicione uma alça para cada aresta. Temos então que $\gamma(G) \leq q$.

Definição 4.13. Uma imersão de um grafo G em uma superfície S_k é dito ser uma **imersão mínima** se $\gamma(G) = k$.

O próximo resultado é extremamente útil, pois nos diz que a identidade de Euler se aplica a qualquer imersão mínima de um grafo conexo.

Teorema 4.2. Se um grafo conexo G é imersão mínima em uma superfície, então a imersão é uma imersão bi-célula.

Uma consequência imediata é dada por:

Corolário 4.1. Se a imersão de um grafo conexo G é uma imersão mínima em S_k , com p vértices, q arestas e r faces, então

$$p - q + r = 2 - 2k.$$

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 4.1 e do Teorema 4.2. □

O próximo resultado, que será muito importante para os próximos capítulos, nos dá uma condição para o número de círculos disjuntos de um grafo imerso em uma superfície de forma que o seu complemento S/G seja conexo.

Teorema 4.3. Seja S uma superfície orientável de gênero g . Então existe g círculos disjuntos em S cujo complemento é conexo, mas qualquer $g + 1$ círculos disjuntos desconecta S .

4.2 Sistemas de Rotação

Um dos interesses nosso neste trabalho é encontrar novos emparelhamentos para um polígono hiperbólico. Nesta seção apresentaremos como encontrar os possíveis caminhos fechados em um grafo conexo e isto equivale a encontrar um sistema de rotação no grafo. Cada sistema de rotação dá origem em um grafo orientado imerso na superfície. Antes de introduzir a teoria de grafos imersos e com problemas específicos de encaixe de grafos em superfície vamos apresentar uma ferramenta poderosa para resolver tais problemas: a técnica de permutação de Edmonds. Isto é equivalente a uma descrição algébrica, para todo encaixe bi-célula de um grafo G .

Denote o conjunto de vértices de um grafo conexo G por $V(G) = \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in V(G)$, considere $V(i) = \{k \in V(G) | \{i, k\} \in A(G)\}$. Seja $p_i : V(i) \rightarrow V(i)$

uma permutação cíclica em $V(i)$, de tamanho $n_i = |V(i)|$; A aplicação p_i é chamada rotação de i . O conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de rotações é chamado um sistema de rotação. Existe uma bijeção entre uma imersão bi-celular de G e o sistema de rotação para G , dada por:

Teorema 4.4. Cada escolha $\{p_1, \dots, p_n\}$ determina uma imersão bi-celular $G(M)$ de G em uma superfície M , tal que existe uma orientação em M a qual induz uma ordem cíclica de arestas $\{i, k\}$ em i o qual o sucessor imediato de $\{i, k\}$ é $\{i, p_i(k)\}$, $i = 1, \dots, n$.

Observação 4.3. Dado $\{p_1, \dots, p_n\}$, existe um algoritmo que produz a determinada imersão. Por outro lado, dada uma imersão bi-celular $G(M)$ numa superfície M com uma dada orientação, existe uma correspondência $\{p_1, \dots, p_n\}$ determinando um grafo imerso.

Exemplo 4.1. Considere o encaixe de um grafo G na esfera S_1 como na Figura 4.2. Seja $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com $V(1) = V(2) = V(3) = \{4, 5, 6\}$; $V(4) = V(5) = V(6) = \{1, 2, 3\}$. Então

$$\begin{array}{ll} p_1 : (4, 5, 6) & p_4 : (1, 2, 3) \\ p_2 : (4, 5, 6) & p_5 : (1, 2, 3) \\ p_3 : (4, 5, 6) & p_6 : (1, 2, 3) \end{array}$$

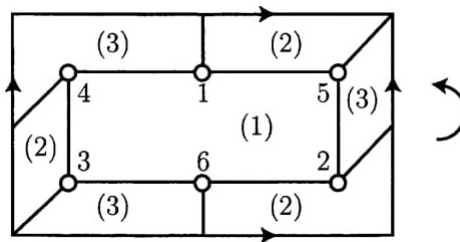


Figura 4.2: Grafo imerso em S_1 .

descreve esse encaixe. As órbitas sobre o conjunto das permutações P^* do conjunto $D^* = \{(a, b) \mid (a, b) \text{ é aresta direcionada de } G\}$ são:

$$(1) (1, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 3), (3, 4), (4, 1)$$

$$(2) (5, 1), (1, 6), (6, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 5)$$

$$(3) (2, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 1), (1, 4), (4, 2)$$

Considere $p^* : D^* \rightarrow D^*$, definida por $p^*(a, b) = (b, p_b(a))$. Temos que $p^*(4, 1) = (1, 5)$; $p^*(3, 5) = (5, 1)$; $p^*(4, 2) = (2, 5)$; Como abuso de notação vamos denotar uma órbita como em (1) por $1 - 5 - 2 - 6 - 3 - 4$. Isto implica que $p_4(3) = 1$ e $p_1(4) = 4$

O gênero de um grafo conexo pode ser computado, selecionando dentre as $\prod_{i=1}^n (n_i - 1)!$ possíveis permutações P^* (isto é, sistema de rotação), uma que fornece o número máximo de órbitas e portanto, determina o gênero do grafo.

A dificuldade em se aplicar esse procedimento é que selecionar uma P^* adequada nos dá um grande número de possíveis n -uplas ordenadas de rotações p_i .

Capítulo 5

Tesselações $\{8g-4,4\}$ e $\{20n-10,5\}$

Uma tesselação regular no plano hiperbólico é uma partição deste plano em polígonos regulares isométricos não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos a restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice. A notação $\{p, q\}$ indica um polígono regular com p lados, que tessela o plano hiperbólico, de forma que em cada vértice da tesselação existem q outros polígonos.

Existem 8 formas distintas de emparelhar as arestas de um polígono hiperbólico regular de $12g - 6$ arestas e ângulos internos iguais a $\frac{2\pi}{3}$ de forma que se obtenha uma superfície compacta de gênero 2, [8]. Neste capítulo mostraremos que existem 6 formas essencialmente diferentes de emparelhar as arestas de um polígono fundamental $\mathcal{P}$ de 12 arestas de forma que se obtenha uma superfície compacta orientada de gênero 2. Para isso, primeiramente exibimos os grafos G associados e em seguida estudamos os possíveis caminhos fechados permitidos sobre eles. Jorgensen e Näätänen(1982) abordaram grafos trivalentes, isto é, cada vértice do grafo possuía três arestas incidentes, era possível definir uma rotação no grafo de uma forma muito simplificada para se obter caminhos fechados. Ao chegar em um determinado vértice por uma aresta, havia apenas outras duas arestas a se seguir, assim denotando o vértice por bola fechada que indica que devemos seguir a aresta à esquerda ou por bola aberta indicando que devia seguir pela aresta à direita da aresta que chegamos ao vértice se obtinha os caminhos fechados sobre os grafos. No presente trabalho, por se tratar de grafos quadrivalente, ou seja, chegando em um vértice por uma aresta temos outras 3 possibilidades para seguir. Não conseguimos uma notação simplificada para os vértices do grafo, como no caso de Jorgensen e Näätänen para obter os caminhos fechados. Porém, sabendo que é através de caminhos fechados, que obtém-se emparelhamentos distintos para um polígono $\mathcal{P}$, calculamos todos os possíveis caminhos fechados sob o grafo. Cada caminho fechado dá origem à um emparelhamento do polígono de 12 arestas e ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$. Tais polígonos

podem ser vistos como domínios de Dirichlet. Daí pela identificação das arestas e usando o Teorema de Poincaré, obtém-se uma superfície compacta orientada de gênero 2.

5.1 Grafos Quadrivalentes Imersos em uma Superfície de Gênero 2

Seja Γ um grupo fuchsiano agindo de maneira propriamente descontínua e sem pontos fixos em $\mathbb{H}^2$. Podemos representar o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ por um polígono fundamental $\mathcal{P}$. Segue do Teorema 3.1 que o conjunto das isometrias que emparelham as arestas de $\mathcal{P}$ geram o grupo Γ e que (Teorema 6.4) o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície compacta. Buscamos novos emparelhamentos relacionados a tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$. Encontramos isometrias do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ que emparelham um polígono hiperbólico regular de 12 lados e ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$ que são domínios de Dirichlet da superfície $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ compacta de gênero $g = 2$, onde Γ é gerado pelas isometrias que emparelham as arestas do polígono.

Pensando nessa superfície como sendo obtida pela colagem das arestas equivalentes do polígono fundamental $\mathcal{P}$, as arestas deste polígono, após a identificação das arestas pelas isometrias de Γ podem ser vistas na superfície como arestas de um grafo e as interseções das arestas dos polígonos, ou seja, os vértices congruentes, podem ser vistos como um vértice no grafo, formando assim um grafo conexo G . O complemento deste grafo sobre a superfície é uma única componente conexa, que corresponde ao polígono $\mathcal{P}$. Percorrer as arestas deste polígono, corresponde a um caminho fechado em G , onde cada aresta é atravessada uma única vez em cada sentido.

Seja G um grafo quadrivalente imerso em uma superfície fechada de gênero 2 de forma que $S \setminus G$ tenha uma única componente conexa correspondente a um polígono $\mathcal{P}$, ou seja, de tal forma com que G possua uma única região de encaixe e que essa região seja bi-célula. Sejam a o número de aresta de G e v o número de vértices de G . Pela identidade de Euler, para $g = 2$ temos

$$2 - 2g = v - a + f \Rightarrow a = v + 3$$

Considerando que o gênero da superfície é $g = 2$, temos que $p = 8g - 4 = 12$. Como as arestas são emparelhadas aos pares, ou seja, cada aresta do grafo corresponde a dois lados do polígono, temos que G possui 6 arestas e considerando as informações acima temos que G possui 3 vértices. Como S é orientável de gênero 2, pelo Teorema 4.3 quaisquer 3 círculos desconectam S , portanto, estamos interessados em grafos com no máximo dois círculos disjuntos. Com as observações acima,

podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 5.1. Existem 3 grafos G que satisfazem as condições:

- (a) G tem 3 vértices e 6 arestas.
- (b) Cada vértice de G possui exatamente 4 arestas incidentes.
- (c) G contém no máximo 2 círculos disjuntos.

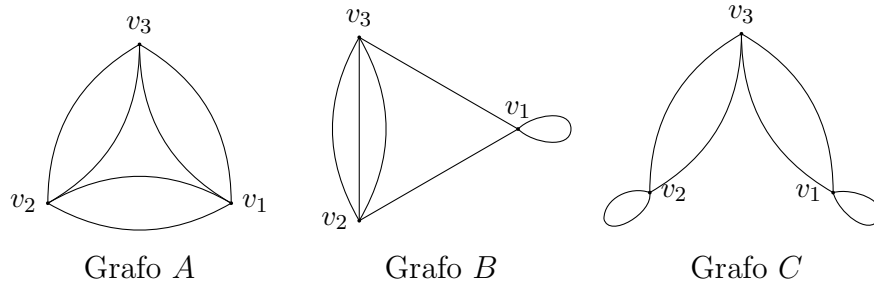


Figura 5.1: Grafos que satisfazem a Proposição 5.1

Demonstração. Se G não possui laços, só existe o Grafo A da Figura 5.1 satisfazendo as três condições. Se G possui somente um laço então só existe uma possibilidade que é o **Grafo B** da Figura 5.1 e se G possui dois laços, a única possibilidade é o Grafo C da Figura 5.1. $\square$

5.2 Caminhos Fechados

Considere os grafos dados na Proposição 5.1 imersos em uma superfície S de forma que $S \setminus G$ é conexo. Se cortarmos S ao longo de G obtemos um polígono de 12 lados com um emparelhamento associado. Percorrer ao redor da fronteira do polígono $\mathcal{P}$ uma vez, corresponde no grafo G à um caminho fechado onde todas as arestas são percorridas uma vez em cada sentido. Tais caminhos devem obedecer as seguintes condições:

- (I) Não voltaremos imediatamente pela aresta que percorremos;
- (II) Não caminharemos pela aresta mais de uma vez em cada sentido;
- (III) Retornaremos ao vértice inicial por uma outra direção diferente da que partimos;

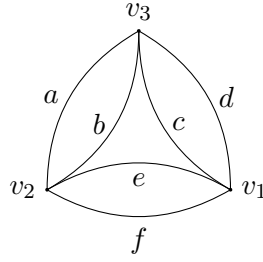


Figura 5.2: Grafo A .

Se tomarmos no caminho um outro ponto de partida veremos que o item (III) é equivalente ao item (I). Não podemos voltar imediatamente pela aresta que percorremos pois isso significaria uma correspondência entre duas arestas consecutivas no polígono e daí teríamos uma isometria de emparelhamento fixando um ponto. Como as isometrias de emparelhamento formam o grupo Γ , teríamos que a ação de Γ no plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ não é livre e assim não teríamos a garantia de que o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja superfície. O nosso interesse são apenas nas isometrias hiperbólicas.

Como nosso interesse é encontrar um polígono $\mathcal{P}$ e isometrias que emparelham suas arestas de forma que $\mathcal{P}$ seja domínio de Dirichlet para o grupo Γ gerado pelas funções de emparelhamento, pelo Teorema 2.7 a classe de equivalência de um domínio de Dirichlet contém dois elementos. Percorrer um caminho fechado no grafo equivale percorrer a fronteira do polígono fundamental. Como cada aresta do grafo pode ser vista como uma “colagem” de duas arestas do polígono, ao percorrermos um caminho no grafo devemos atravessar a aresta uma única vez em cada sentido e por isso a condição (II) deve ser satisfeita.

Vamos encontrar todos os possíveis caminhos fechados em cada grafo da Proposição 5.1, assim encontraremos os diferentes emparelhamentos de arestas para $\mathcal{P}$.

Proposição 5.2. Caminhos fechados sobre os grafos A , B e C tais que as condições (I), (II) e (III) são satisfeitas dão origens a 6 formas diferentes de emparelhamento de arestas do polígono de 12 arestas e ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$.

Demonstração. Encontraremos todos os possíveis caminhos fechados sobre os grafos A , B e C .

Faremos uma descrição mais detalhada de como encontrar um caminho fechado no Grafo A , pois a compreensão do método é de suma importância para o nosso trabalho. Considere o Grafo A da Figura 5.1.

Rotule as arestas do Grafo A por $a, b, \dots, f$ como na Figura 5.2. Sairemos do vértice v_2 em direção a aresta a e numeraremos esta com o número 1 (para contar

o caminho). Ao chegar no vértice v_3 , como não podemos retornar pela aresta a (condição I), podemos seguir pelas arestas b, c , ou d . Neste caso, seguiremos pela aresta b e numeraremos por 2. No decorrer desse trabalho analisaremos os outros casos, ou seja seguindo pelas arestas c ou d . Chegamos ao vértice de partida v_2 . Não podemos seguir pelas arestas a (condição II) e b (condição I). Devemos seguir pelas arestas e ou f . Como estamos interessados nos pares de comprimentos de uma aresta, isto é, o comprimento para irmos e o comprimento para voltarmos pela aresta, e as arestas e e f ainda não foram percorrida em nenhum sentido, percorrer a aresta e é equivalente a percorrer a aresta f . Vamos seguir pela aresta f e enumerá-la por 3. Chegamos ao vértice v_1 e não podemos retornar pela aresta f . Podemos seguir pelas arestas c, d e e . Escolha a aresta e e enumere-a por 4. Voltamos ao vértice v_2 . Não podemos seguir pelas arestas a e f (condição II) e e (condição I). Obrigatoriamente seguiremos pela aresta b e enumeraremos por 5. Retornamos ao vértice 3 e podemos seguir por a, c ou d . Escolha a aresta c e rotule-a por 6. Voltamos ao vértice v_1 e não podemos seguir pela aresta e (condição II). Escolha a aresta d e enumere-a por 7. Retornamos ao vértice v_3 e obrigatoriamente devemos seguir pela aresta a (condições I e II) e rotulá-la por 8. Voltamos ao vértice v_2 e obrigatoriamente devemos seguir pela aresta e (condição II) e enumerá-la por 9. Chegamos ao vértice v_1 . Note que podemos seguir por f e c somente, mas se seguirmos pela aresta f ao chegarmos no vértice v_2 , pela condição II, não teríamos por onde seguir com o caminho e conseguiríamos um caminho fechado onde algumas arestas do grafo (c e d) não foram percorridas uma vez em cada direção. Logo, ao chegar no vértice v_1 seguiremos pela aresta c e a rotulemos por 10. Chegando ao vértice v_3 só podemos seguir pela arestas d (condição II) e enumerá-la por 11 e em seguida seguir pela aresta f (condição II) e rotulá-la por 12, fechando assim um caminho de comprimento 12.

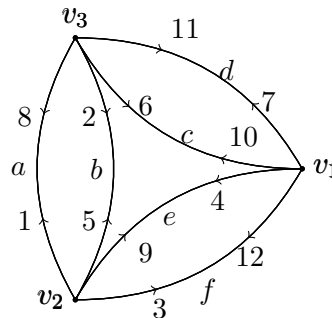


Figura 5.3: Caminho fechado no Grafo A.

A este caminho podemos associar um emparelhamento de aresta de um polígono hiperbólico de 12 lados. Após encontrar um caminho fechado sobre o Grafo A

cada aresta y do grafo foi rotulada com dois números, digamos n_y e m_y , indicando o comprimento do caminho no sentido de ida e volta da aresta. Enumerando as arestas do polígono de 12 lados como mostra a Figura 5.2 vamos associar a aresta τ_{n_y} a aresta τ_{m_y} . No caminho dado pela Figura 5.2, a aresta a foi rotulada pelos números 1 e 8 então vamos associar no polígono, a aresta τ_1 com a aresta τ_8 do polígono. A aresta b foi rotulada com os números 2 e 5, então associaremos a aresta τ_2 com a aresta τ_5 . Assim, o emparelhamento de aresta relacionado ao caminho fechado da Figura 5.2 é dado por:

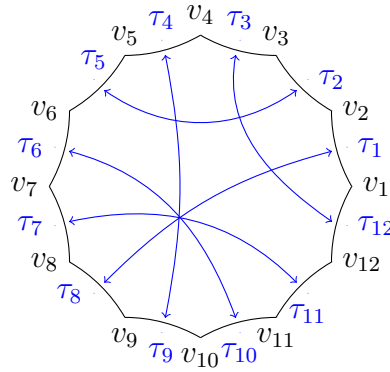


Figura 5.4: Emparelhamento de arestas do polígono hiperbólico regular de 12 arestas relacionados ao caminho fechado dado na Figura 5.2.

Os ciclos de vértices são dados por

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_9, v_5, v_3\} \\ C_2 &= \{v_2, v_6, v_{11}, v_8\} \\ C_3 &= \{v_4, v_{10}, v_7, v_{12}\} \end{aligned}$$

Se considerarmos no Grafo A a rotação $\{p_1, p_2, p_3\}$ com

$$p_1 = (ecdf)$$

$$p_2 = (aebf)$$

$$p_3 = (abcd)$$

obtemos o caminho fechado indicado na Figura 5.2.

Sabendo então como encontrar um caminho fechado, vamos agora encontrar todos os possíveis caminhos fechados sobre os grafos A, B e C .

Partiremos, em todos os casos, do vértice v_2 na direção da aresta a . Analisaremos primeiro o Grafo A . Partindo de v_1 , na direção da aresta a , ao chegarmos no vértice v_3 temos duas possibilidades para continuar o caminho, a aresta b (que retorna ao

vértice de origem) ou a aresta c (ou d). Como estamos interessados nos pares de "comprimentos" do caminho em cada aresta, seguir por c ou d nos dará caminhos equivalentes. Temos então dois casos:

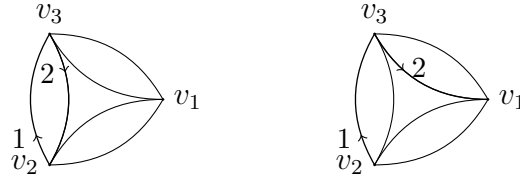


Figura 5.5: Caminhos sobre o Grafo A .

Analisaremos primeiro o caso 1. Para o terceiro passo, como não podemos retornar novamente pela aresta a , pois esta já foi percorrida no sentido de v_3 , temos duas arestas a serem escolhidas, a aresta e e a aresta f . Pelo mesmo critério da escolha da aresta c , vamos escolher a aresta f .

Para o quarto passo podemos retornar pelo vértice de partida v_2 percorrendo a aresta e ou podemos ir para o vértice v_3 pela aresta c (ou d). Calcularemos a partir de agora todos os caminhos possíveis, sem descrever os passos, apenas analisando as arestas pelas quais podemos seguir obedecendo as regras (I), (II) e (III). Temos:

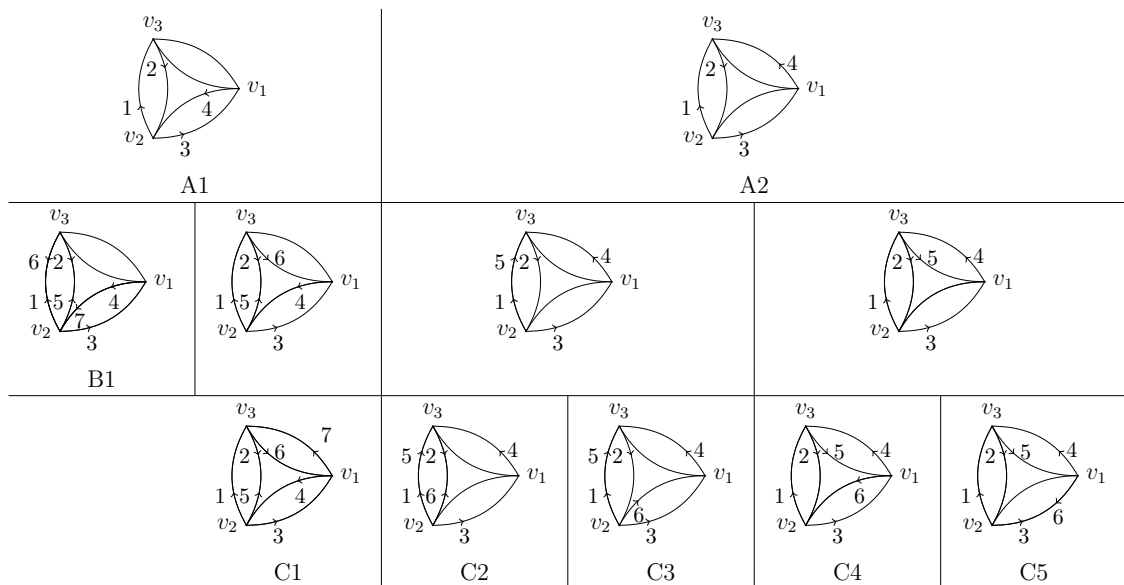


Figura 5.6: Caminhos sobre o Grafo A .

Note que a Figura B1 não fecha nenhum caminho. O caso da Figura C1 é o caminho que computamos anteriormente.

Para o caso C2, temos os possíveis caminhos:

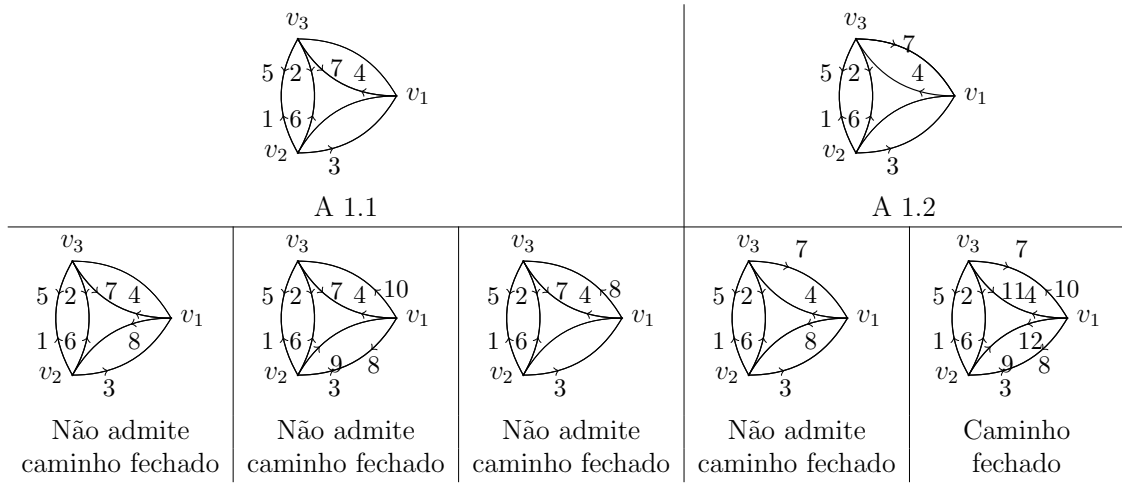


Figura 5.7: Possíveis caminhos no Grafo A (caso C2).

O emparelhamento relacionado ao caminho fechado citado acima é dado por:

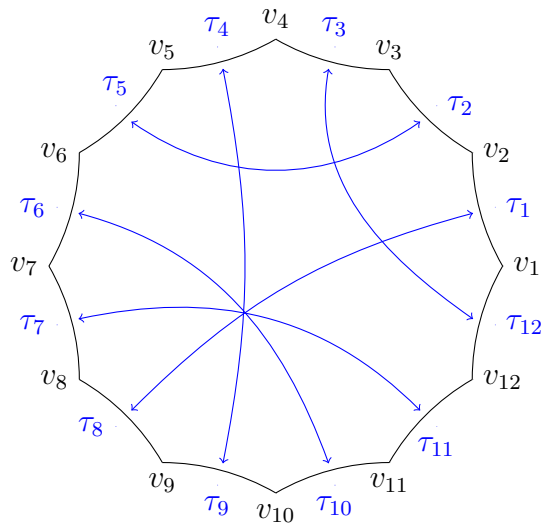


Figura 5.8: Emparelhamento de arestas polígono hiperbólico 12 arestas relacionado ao caminho fechado da Figura 5.7.

Para o caminho em C3, temos:

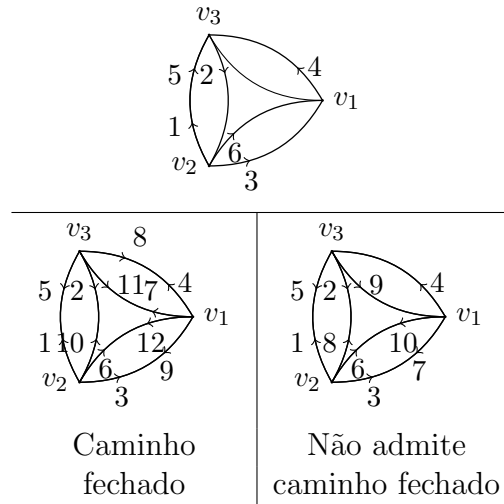


Figura 5.9: Possíveis caminhos no Grafo A (caso C3).

Temos um caminho fechado e o emparelhamento de aresta a qual ele dá origem é dado por:

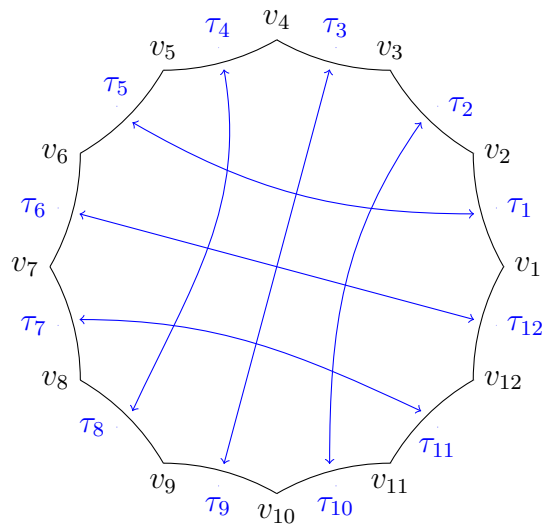


Figura 5.10: Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado da Figura 5.9.

Este não é 4-regular, pois seus ciclos de vértices são:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{v_1, v_6\}; \\
C_2 &= \{v_2, v_{11}, v_8, v_5\}; \\
C_3 &= \{v_3, v_{10}\}; \\
C_4 &= \{v_4, v_9\}; \\
C_5 &= \{v_7, v_{12}\}.
\end{aligned}$$

Portanto este emparelhamento não dá origem a uma superfície de gênero 2, pois, as arestas consecutivas τ_{11}, τ_{12} e τ_1 que são emparelhadas com as arestas consecutivas τ_7, τ_6 e τ_5 podem ser vistas como duas arestas emparelhadas. Assim como as arestas consecutivas τ_2, τ_3 e τ_4 emparelhadas com as arestas consecutivas τ_{10}, τ_9 e τ_8 . Assim, tal emparelhamento do polígono pode ser visto como emparelhamento de um polígono hiperbólico de 4 lados. Daqui em diante, por esta razão, vamos considerar apenas os emparelhamentos que são 4-regular.

Para o caminho em C4 temos:

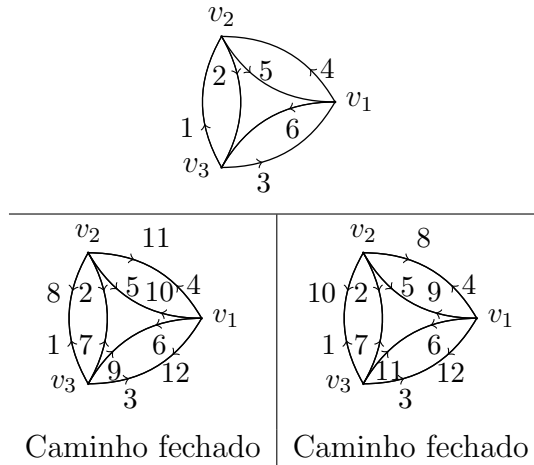
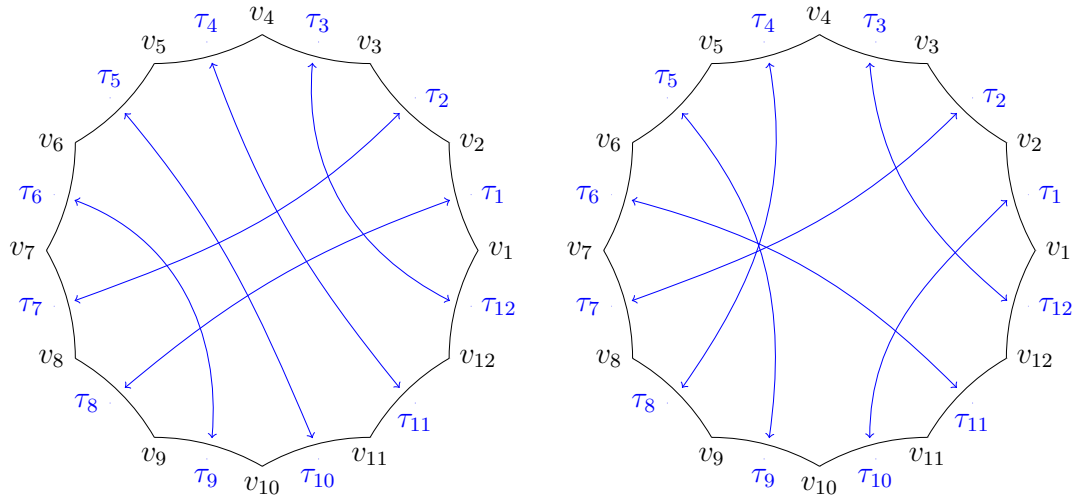


Figura 5.11: Possíveis caminhos no Grafo A (caso C4).

Temos dois caminhos fechados que dão origem aos seguintes emparelhamentos:



Ciclos de vértices:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_5\} \\ C_2 &= \{v_2, v_4, v_8, v_{10}\} \\ C_3 &= \{v_6, v_{12}\} \\ C_5 &= \{v_7, v_{11}\} \end{aligned}$$

Ciclos de vértices:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_{11}, v_7, v_3\} \\ C_2 &= \{v_2, v_5, v_8, v_{10}\} \\ C_3 &= \{v_4, v_9, v_6, v_{12}\} \end{aligned}$$

Figura 5.12: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.11.

Note que o primeiro emparelhamento não é 4-regular.

Para o caminho em C5, temos:

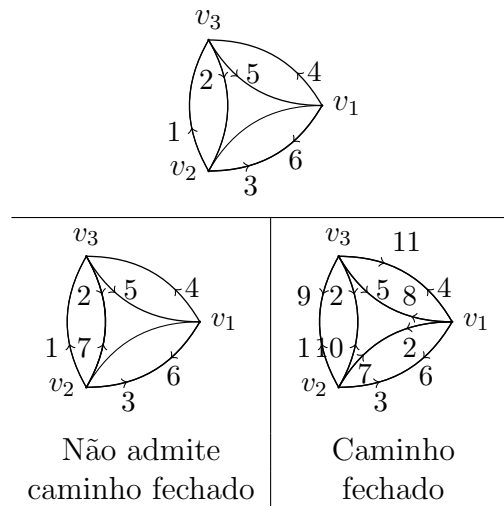


Figura 5.13: Possíveis caminhos no Grafo A (caso C5).

O caminho fechado dá origem ao seguinte emparelhamento:

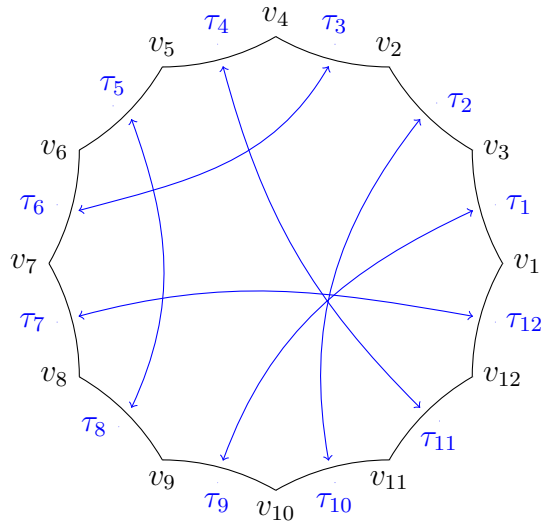


Figura 5.14: Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado da Figura 5.13.

Ciclos de vértices:

$$C_1 = \{v_1, v_{10}, v_3, v_7\},$$

$$C_2 = \{v_2, v_{11}, v_5, v_9\},$$

$$C_3 = \{v_4, v_{12}, v_8, v_6\}.$$

Vamos analisar agora o caso 2:

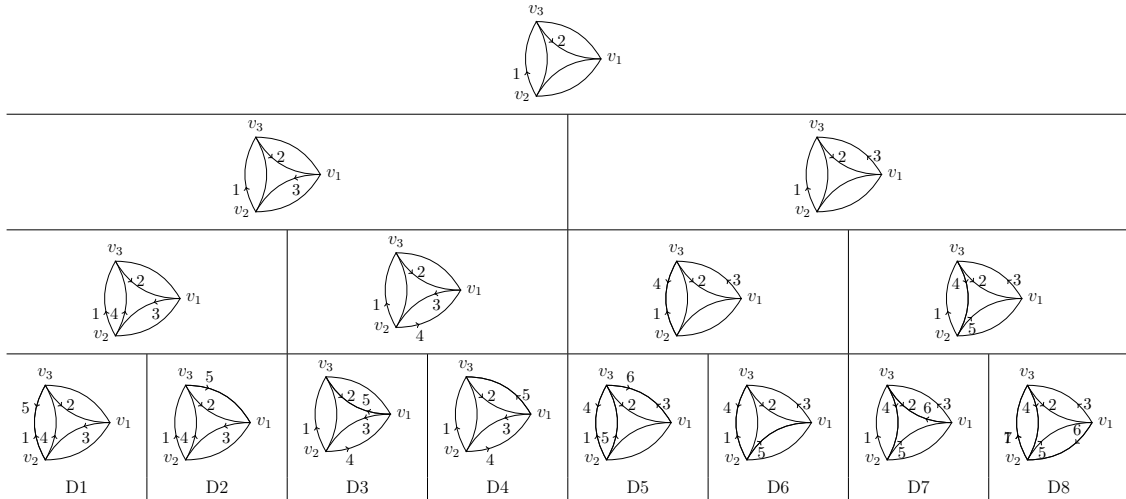


Figura 5.15: Possíveis caminhos no Grafo A (caso 2).

Ao analisar o caminho em D1, temos:

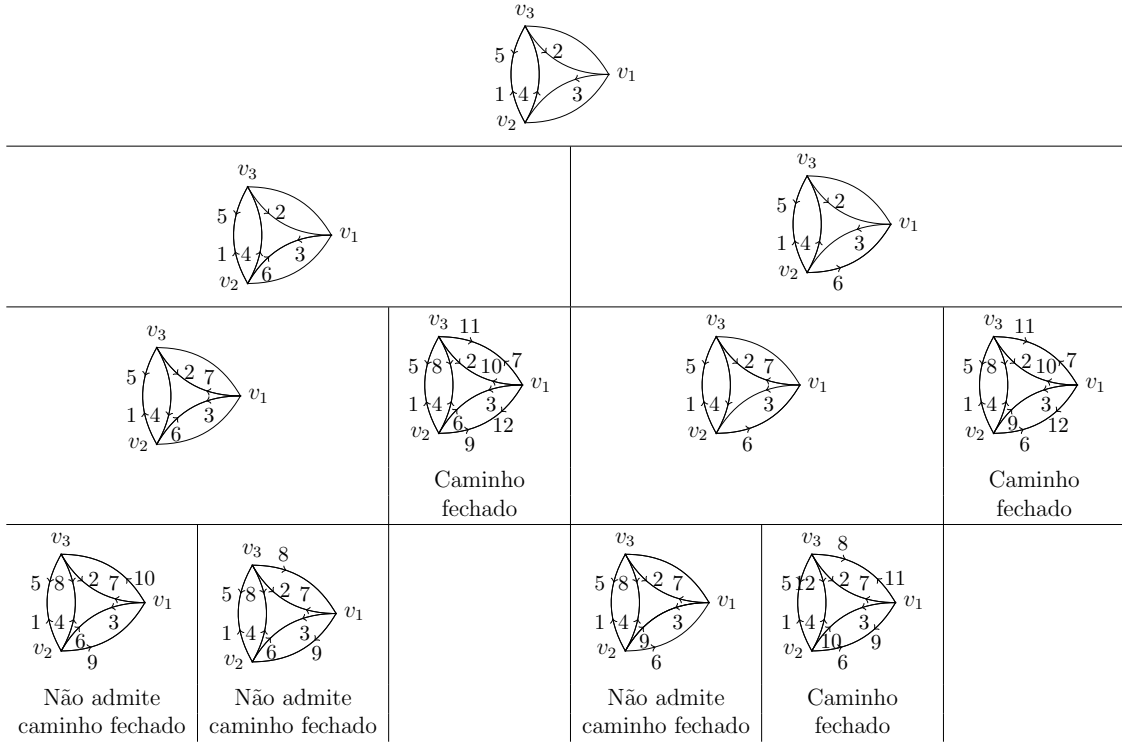


Figura 5.16: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D1).

Para este caso temos dois caminhos fechados e seus respectivos emparelhamentos, junto com os ciclos de vértices são dados por:

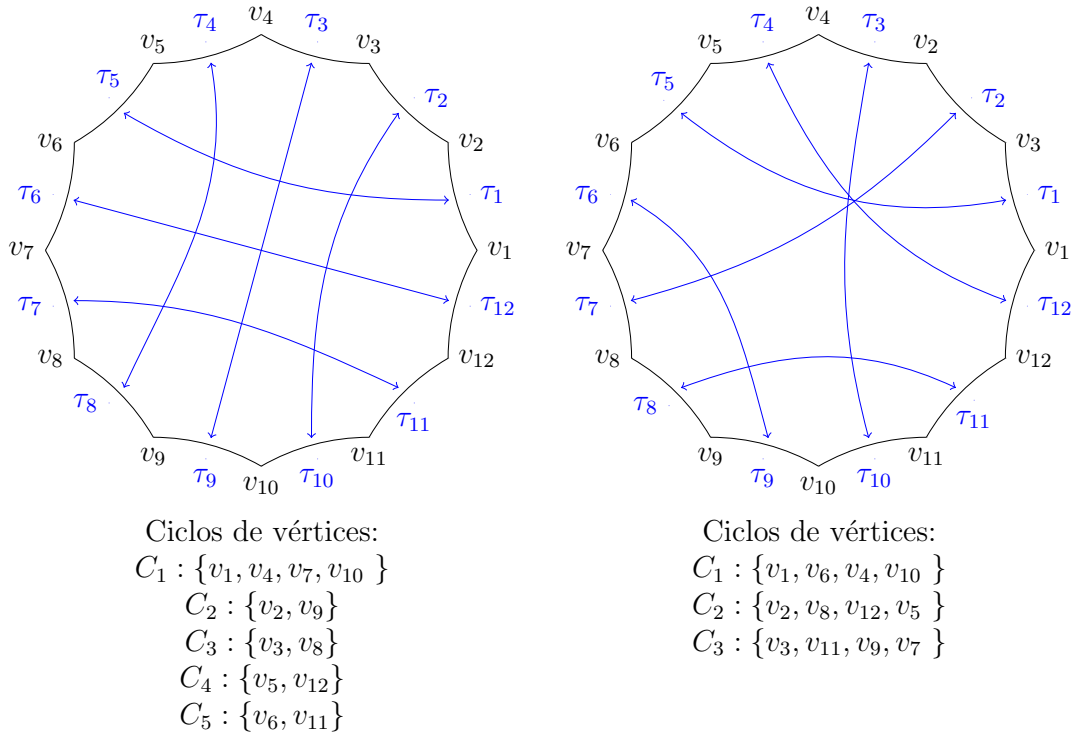


Figura 5.17: Emparelhamentos de arestas relacionados ao caminhos fechados dados na Figura 5.16.

Note que o primeiro emparelhamento acima não é 4-regular.

Para o caminho D2 temos:

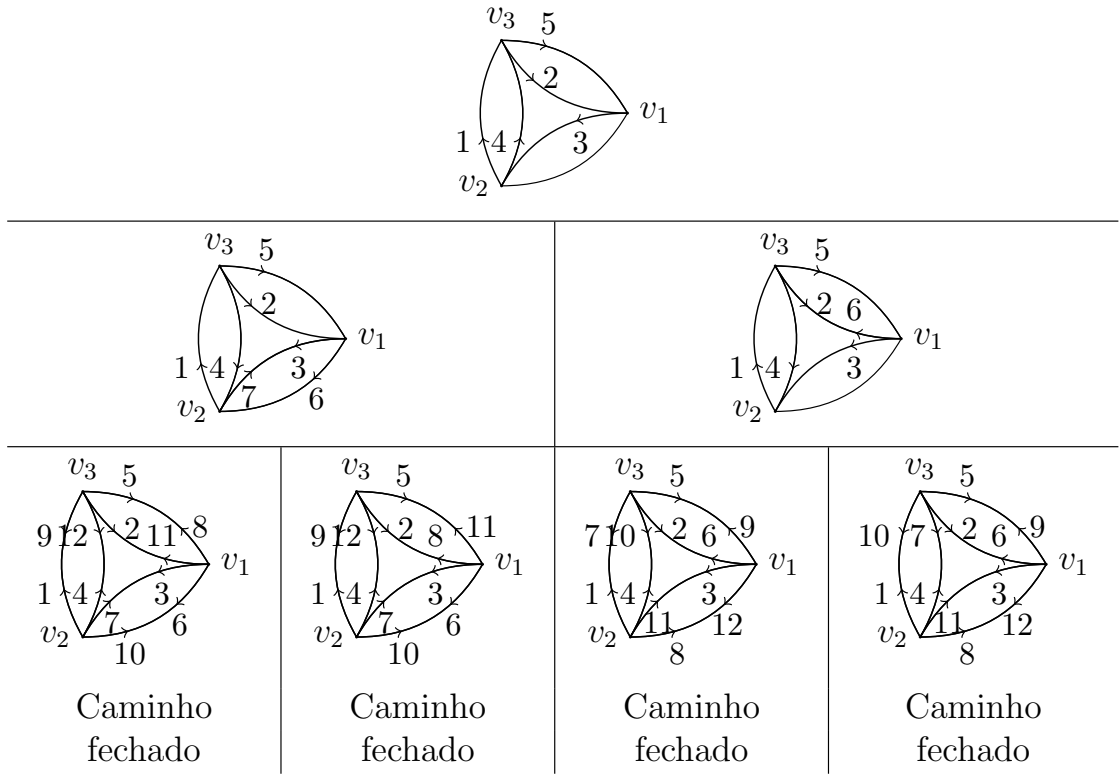
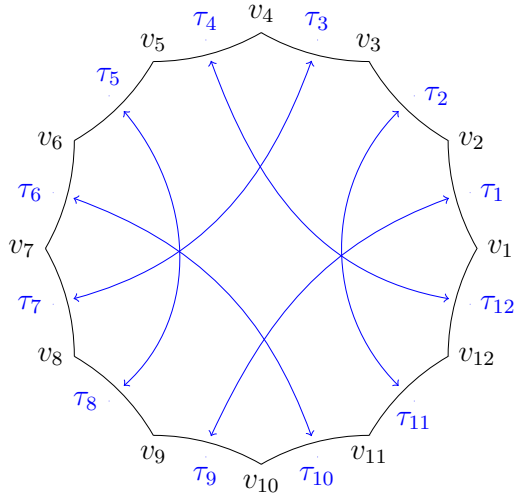


Figura 5.18: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D2).

Para este caso temos 4 caminhos fechados e seus respectivos emparelhamento são dados por:

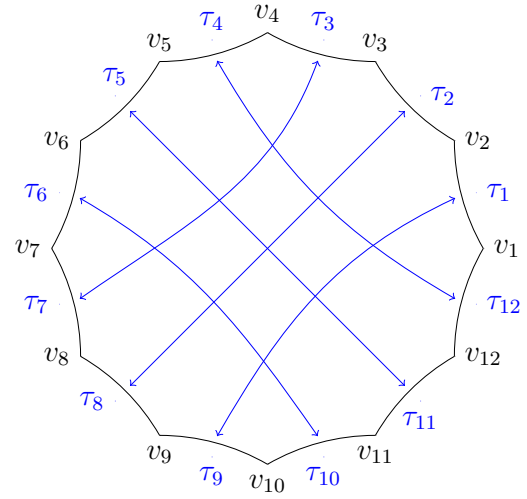


Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_{12}, v_9, v_5\}$$

$$C_3 : \{v_3, v_8, v_6, v_{11}\}$$



Ciclos de vértices:

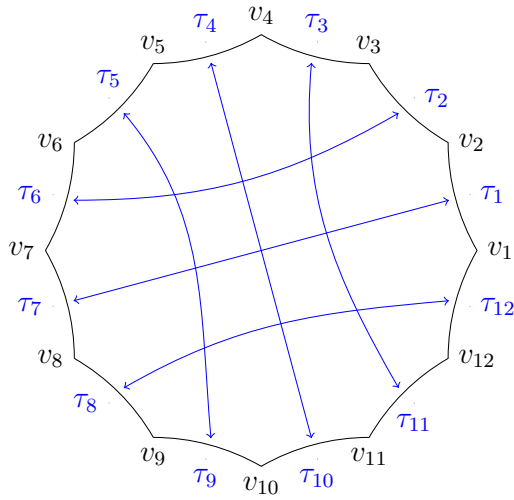
$$C_1 : \{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_9\}$$

$$C_3 : \{v_3, v_8\}$$

$$C_4 : \{v_5, v_{12}\}$$

$$C_5 : \{v_6, v_{11}\}$$



Ciclos de vértices:

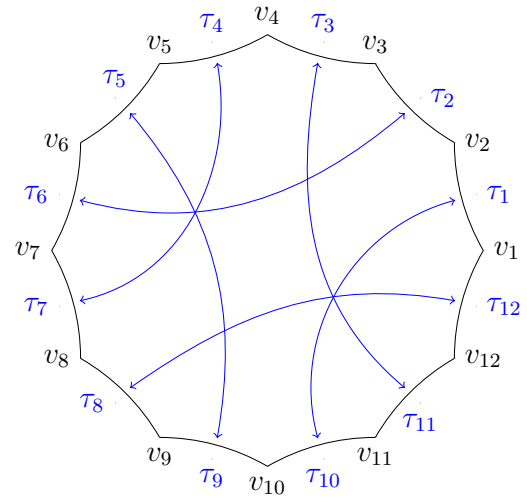
$$C_1 : \{v_1, v_8\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_3, v_6, v_9, v_{12}\}$$

$$C_4 : \{v_4, v_{11}\}$$

$$C_5 : \{v_5, v_{10}\}$$



Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_8, v_4, v_{11}\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_{10}, v_5, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_3, v_6, v_9, v_{12}\}$$

Figura 5.19: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.18.

Para o caminho em D3, temos:

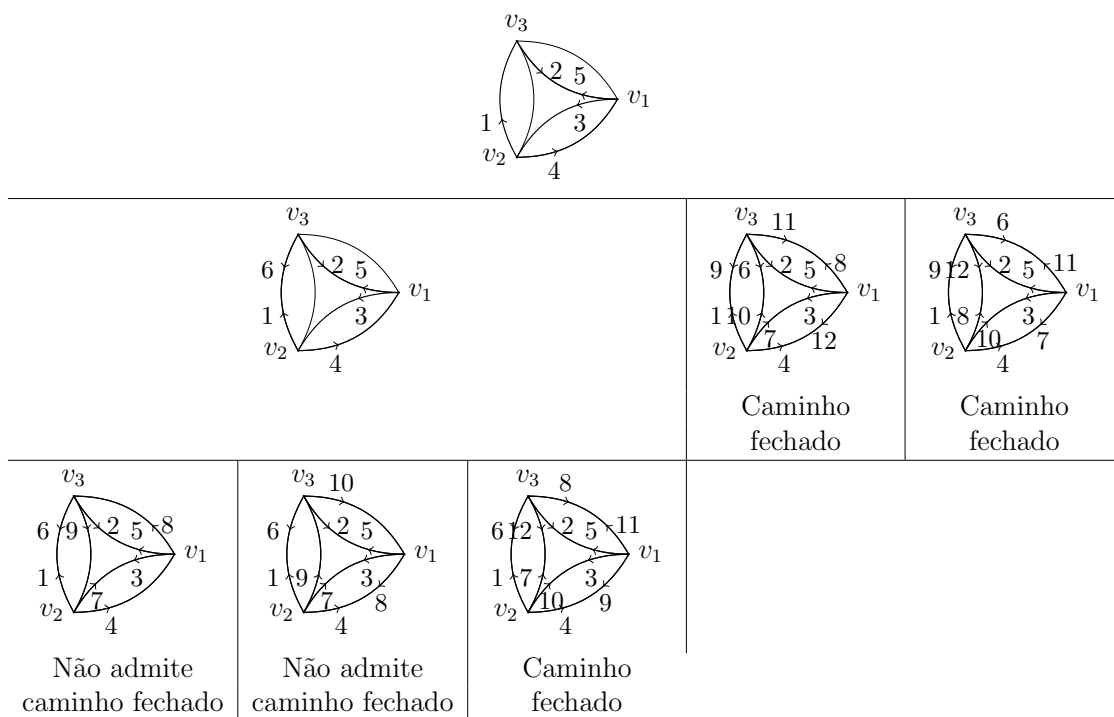


Figura 5.20: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D3).

Para este caso, temos 3 caminhos fechados e seus respectivos emparelhamentos juntamente com seus ciclos de vértices são dados por:

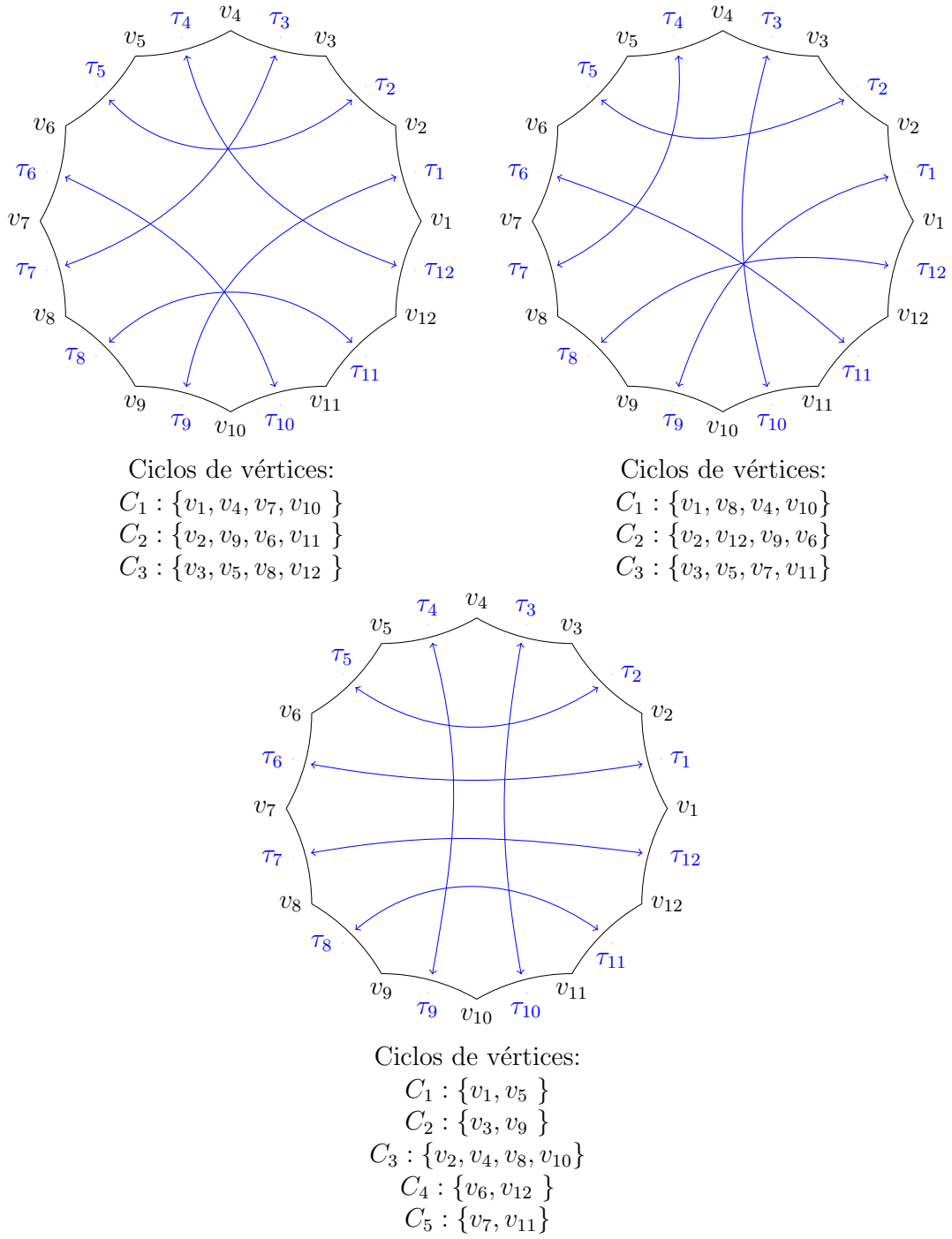


Figura 5.21: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos dados na Figura 5.20.

O último emparelhamento também não é 4-regular.

Para o caminho em D4, temos:

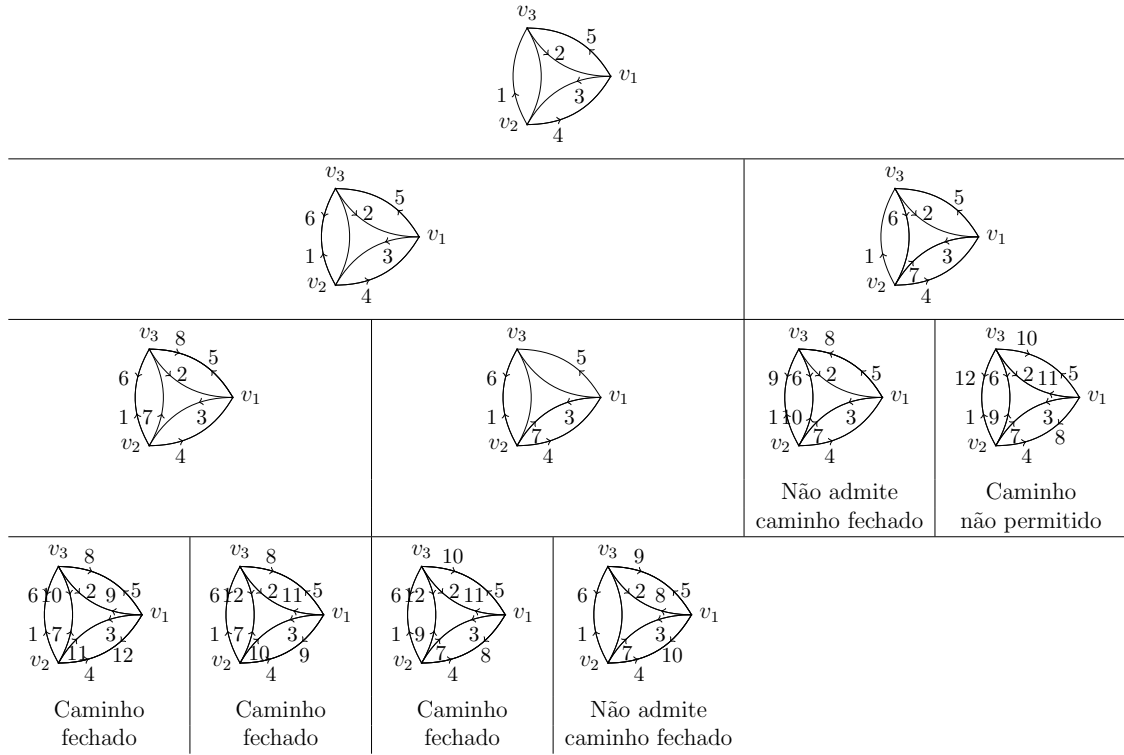


Figura 5.22: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D4).

Temos 3 caminhos fechados e seus respectivos emparelhamentos com seus ciclos de vértices são dados por:

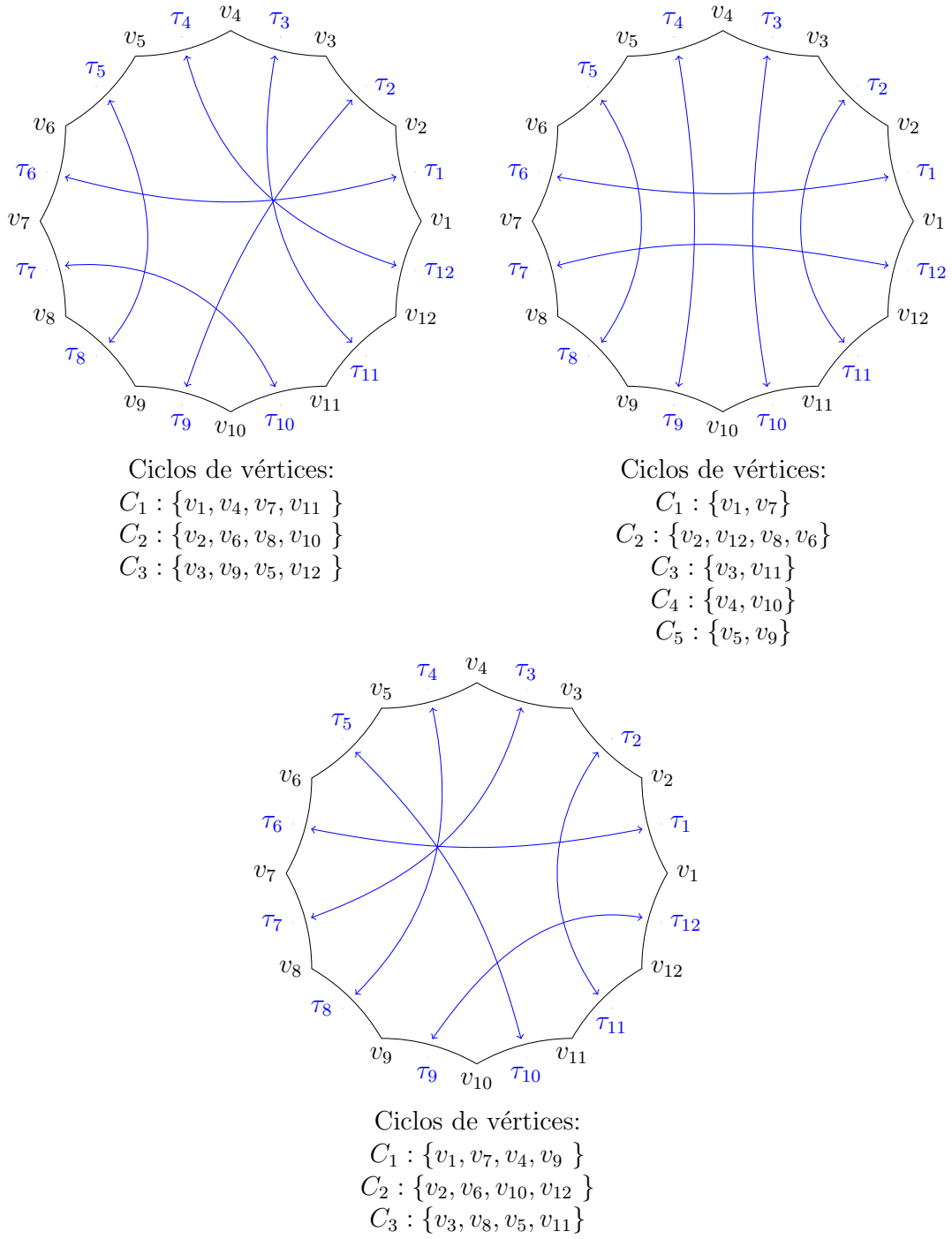


Figura 5.23: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.24

Para o caminho D5, temos:

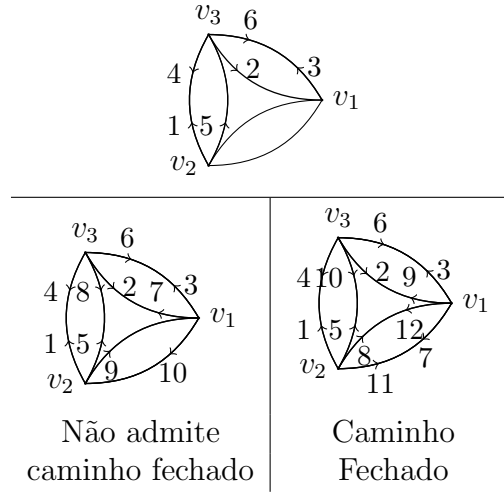
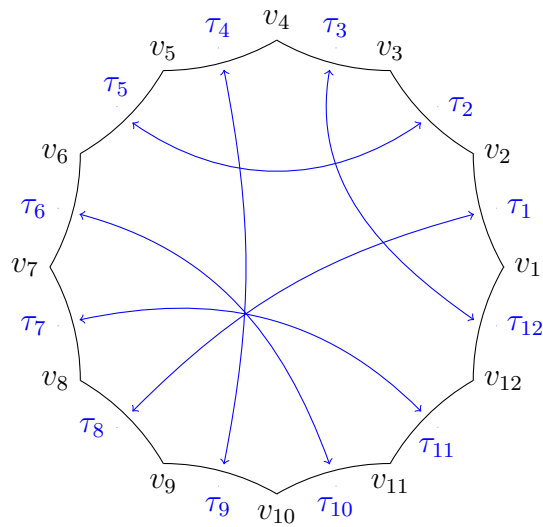


Figura 5.24: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D5).

O caminho fechado dado acima, dá origem ao seguinte emparelhamento:



Ciclos de vértices:

$$C_1 = \{v_1, v_9, v_5, v_3\},$$

$$C_2 = \{v_2, v_6, v_{11}, v_8\},$$

$$C_3 = \{v_4, v_{10}, v_7, v_{12}\}.$$

Figura 5.25: Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico de 12 lados relacionado ao caminho fechado dado na Figura 5.24.

Para o caminho em D6 temos:

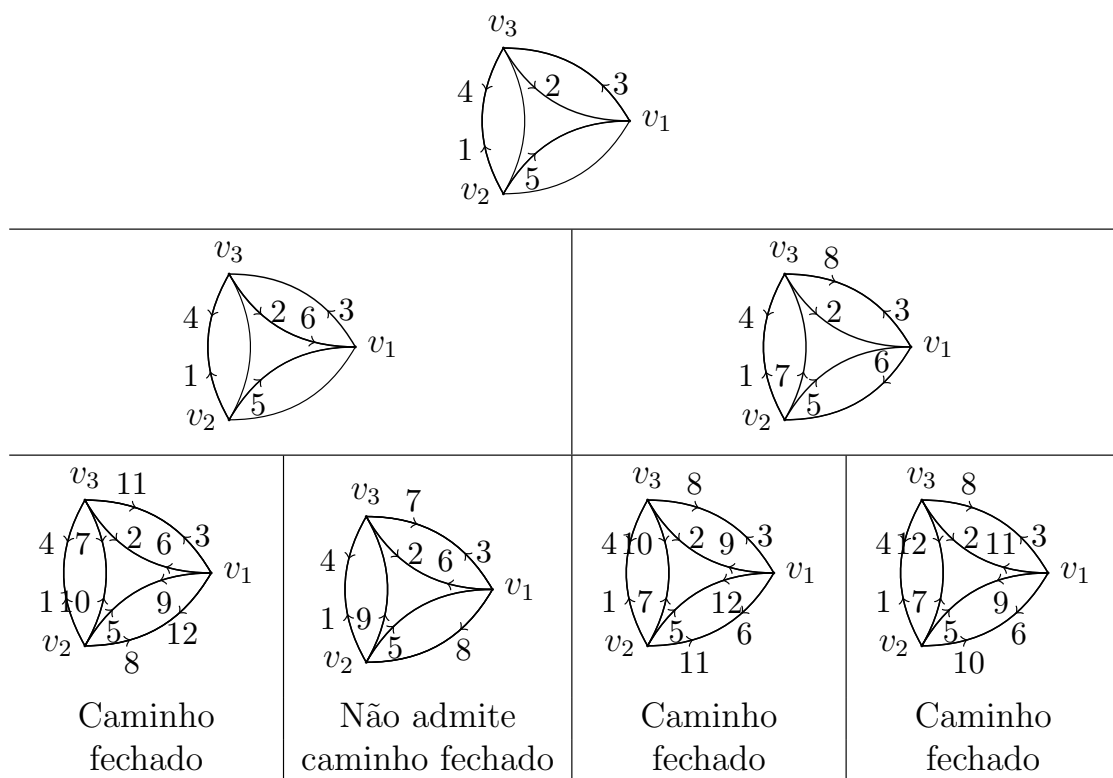


Figura 5.26: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D6).

Para este caso, temos 3 caminhos fechados e seus emparelhamentos são dados por:

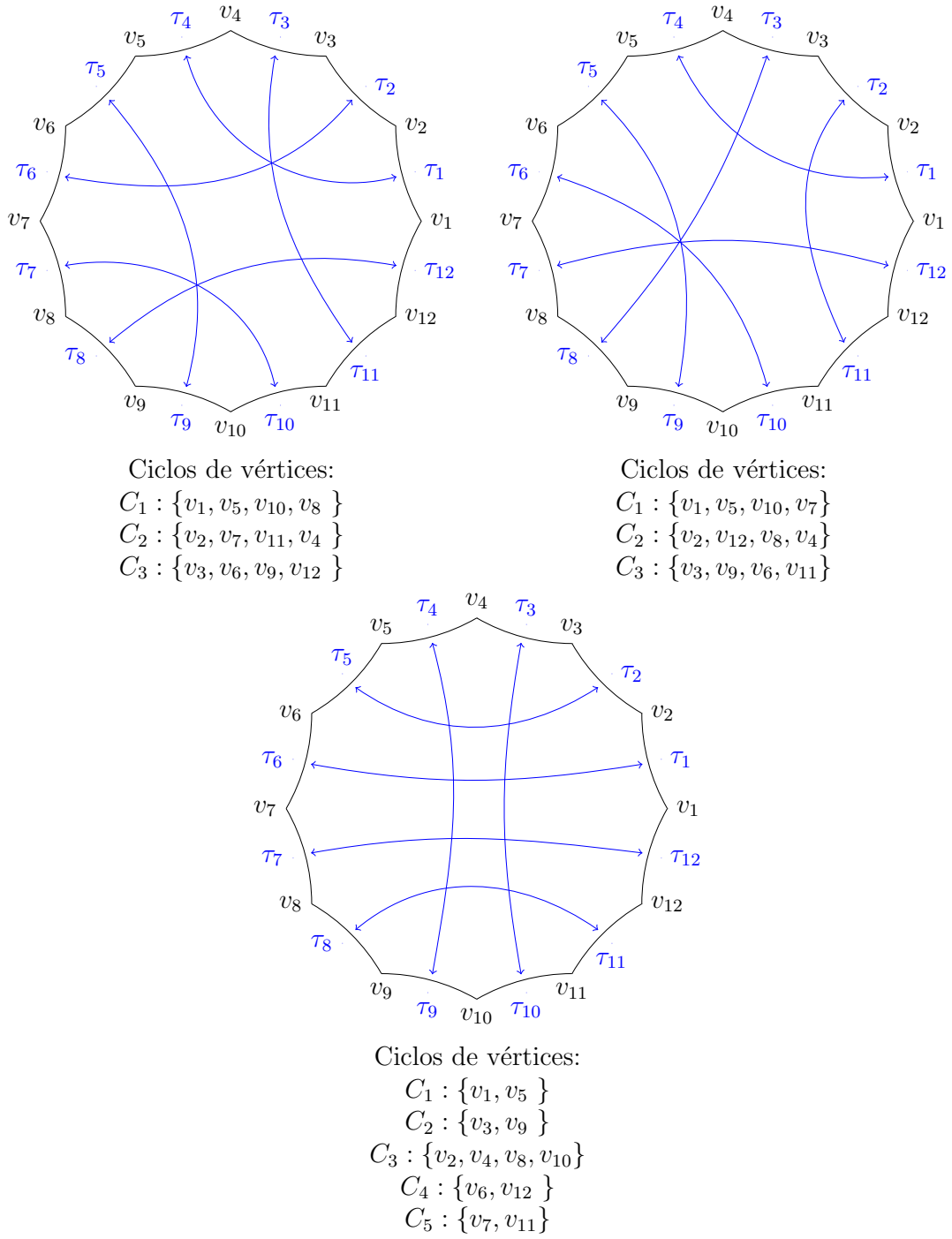


Figura 5.27: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.26.

Note que esse último emparelhamento não é 4-regular.

Analisando o caminho em D7, temos:

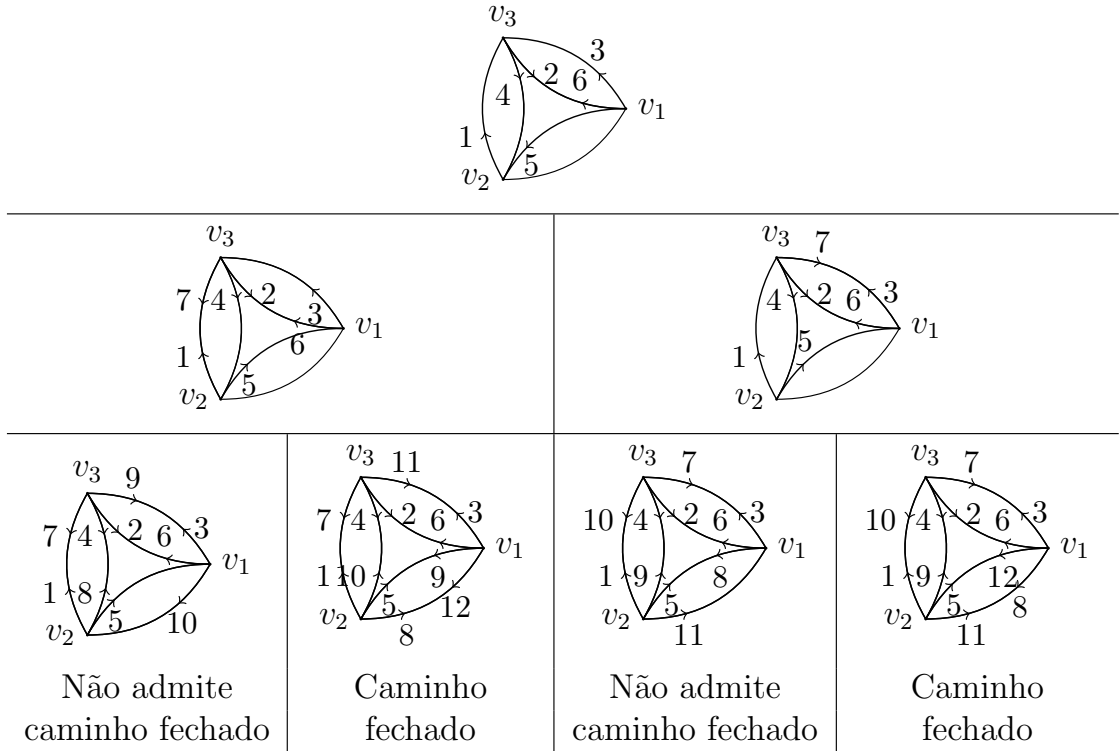


Figura 5.28: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D7).

Para este caso temos 2 caminhos fechados e seus respectivos emparelhamento são dados por:

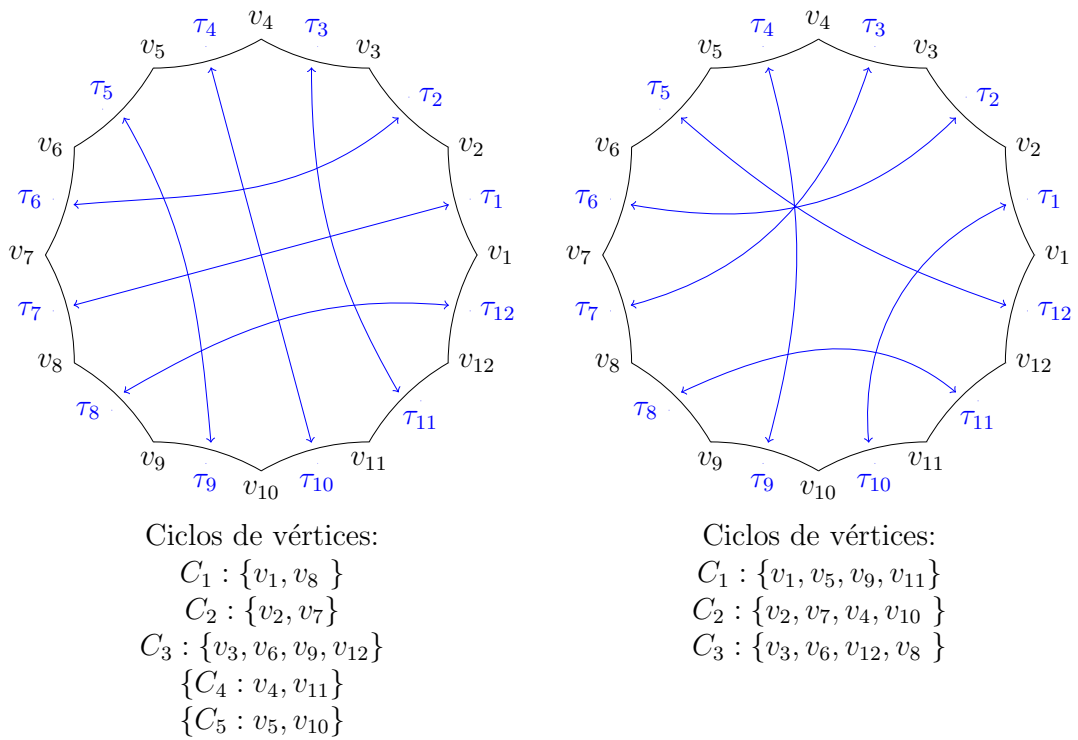


Figura 5.29: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.28.

Onde esse primeiro não é 4-regular.

Para o caminho em D8, temos:

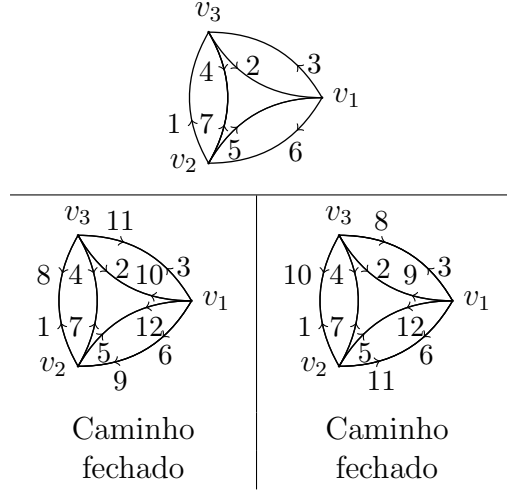


Figura 5.30: Possíveis caminhos no Grafo A (caso D8).

Para este caso, temos 2 caminhos fechados e seus emparelhamentos são:

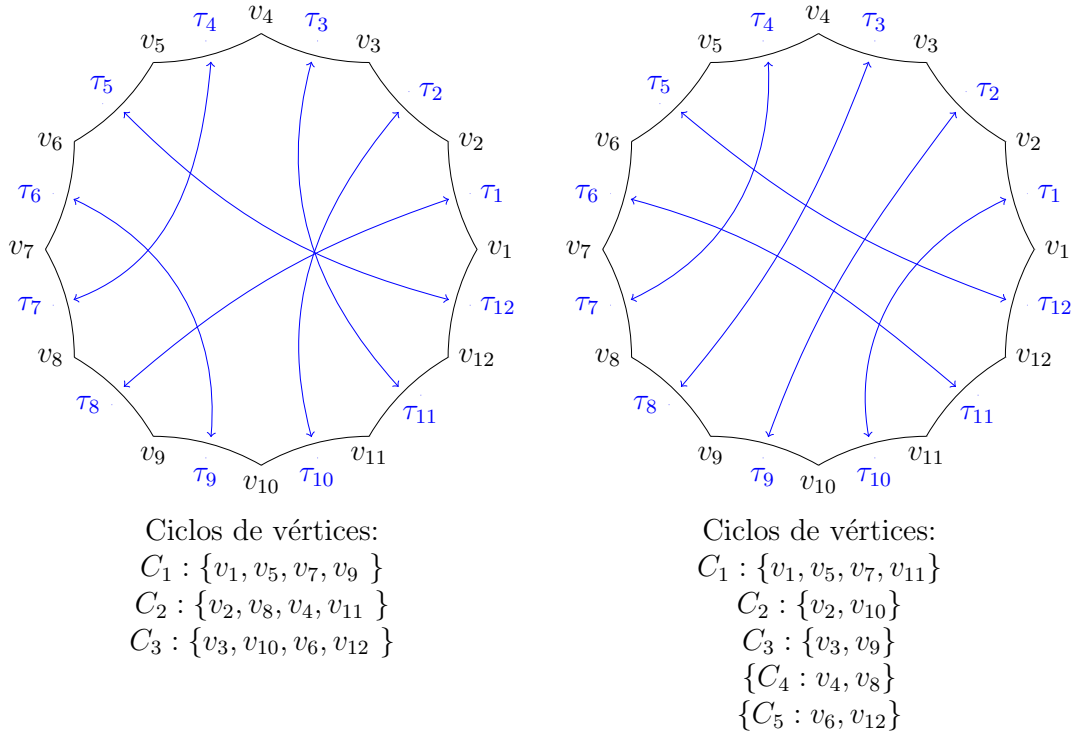


Figura 5.31: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.30.

Esse último também não é 4-regular.

Vamos agora encontrar todos os possíveis caminhos fechados sob o Grafo B . Observe que ao chegar no vértice v_1 por qualquer das arestas d ou c , devemos seguir pela aresta f para que o caminho possa fechar.

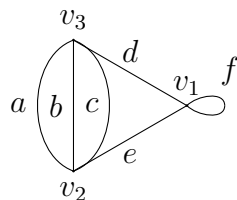


Figura 5.32: Grafo B

Temos:

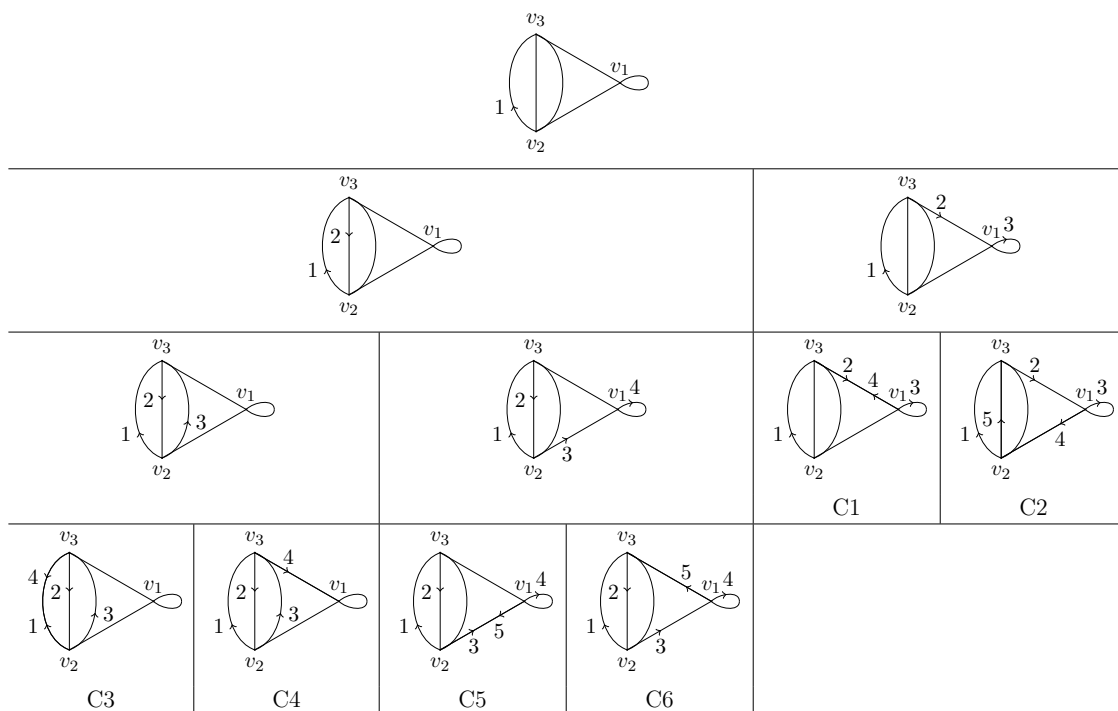


Figura 5.33: Possíveis caminhos no Grafo B .

Para o caminho em C1, temos:

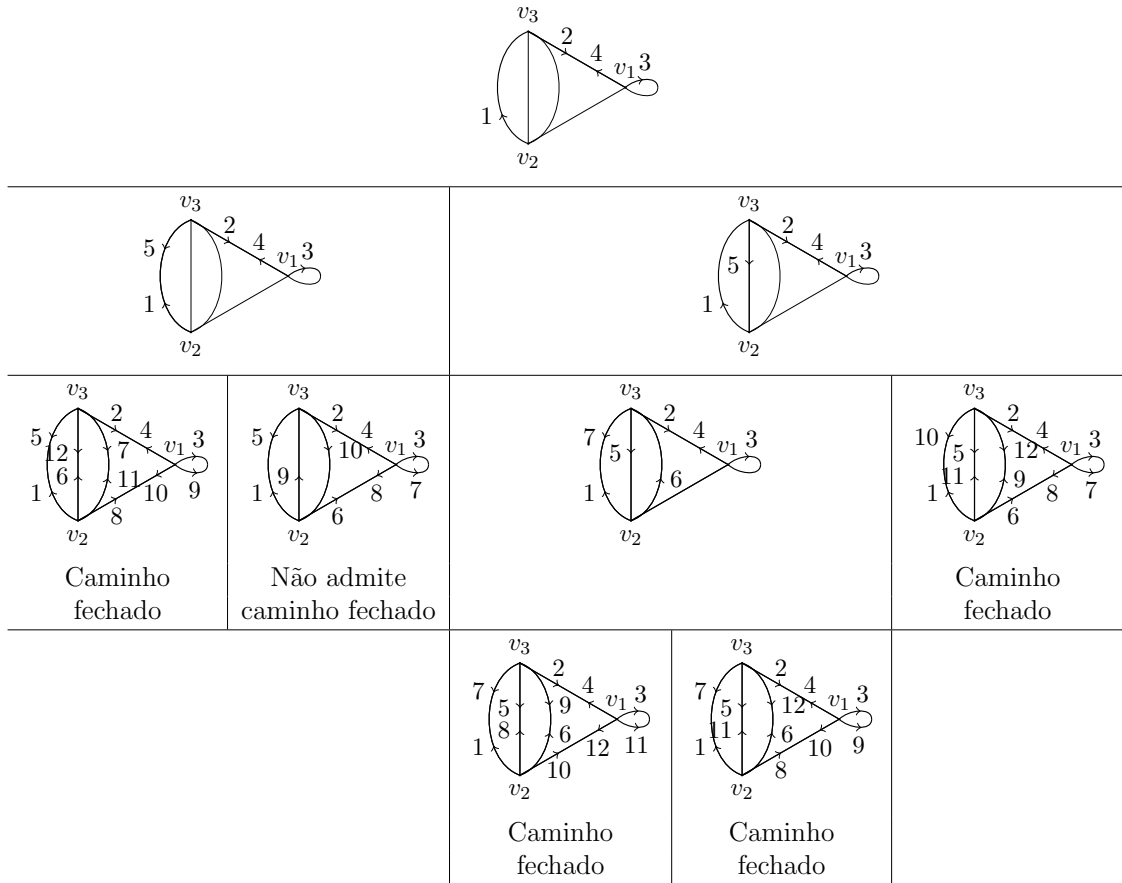


Figura 5.34: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C1).

Temos então quatro caminhos fechados e o emparelhamento relacionado a cada um é dado por:

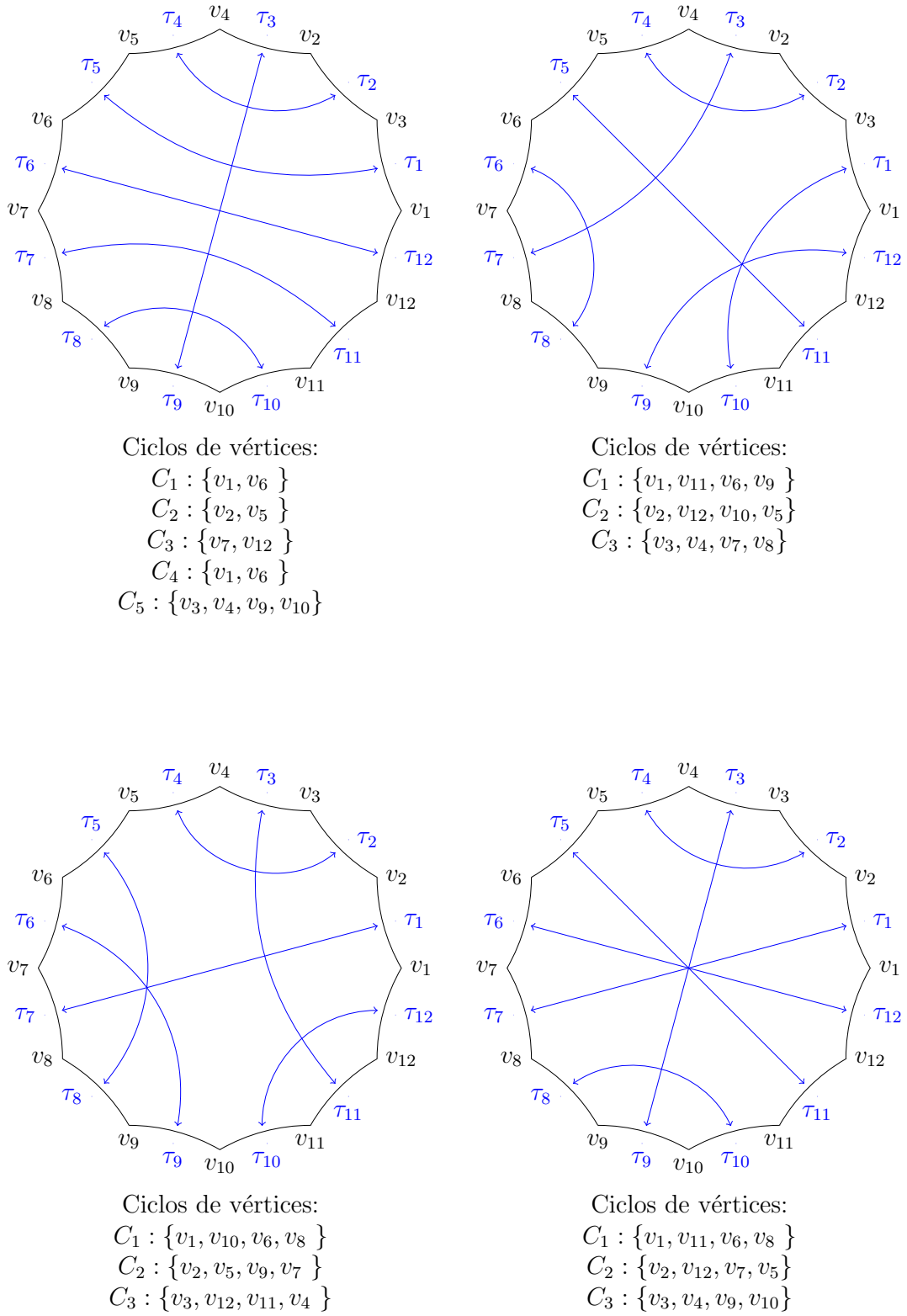


Figura 5.35: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.34.

Para o caminho em C_2 , temos:

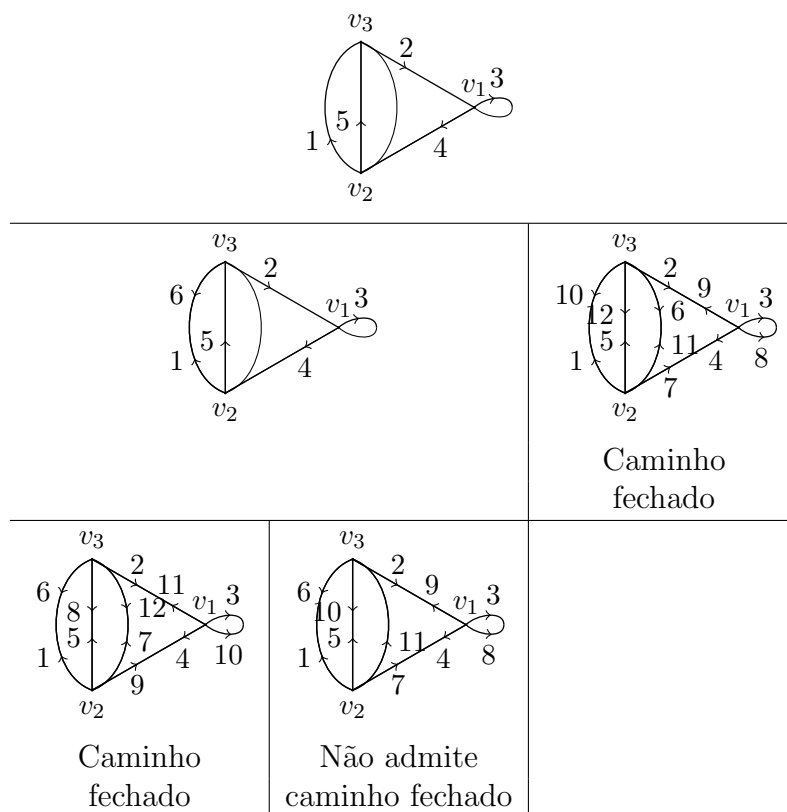


Figura 5.36: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C2).

Para este caso, temos dois caminhos fechados e os emparelhamentos relacionados a eles são dados por:

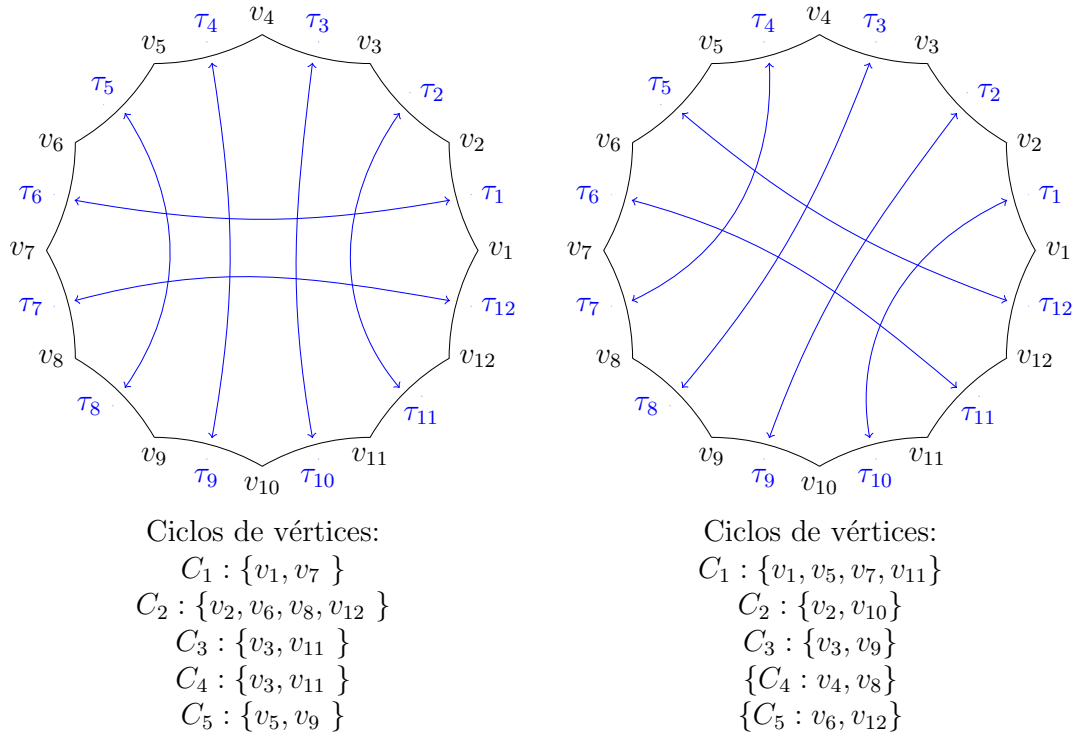


Figura 5.37: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.36.

Os dois emparelhamentos acima não são 4-regular.

Para o caminho em C3, temos:

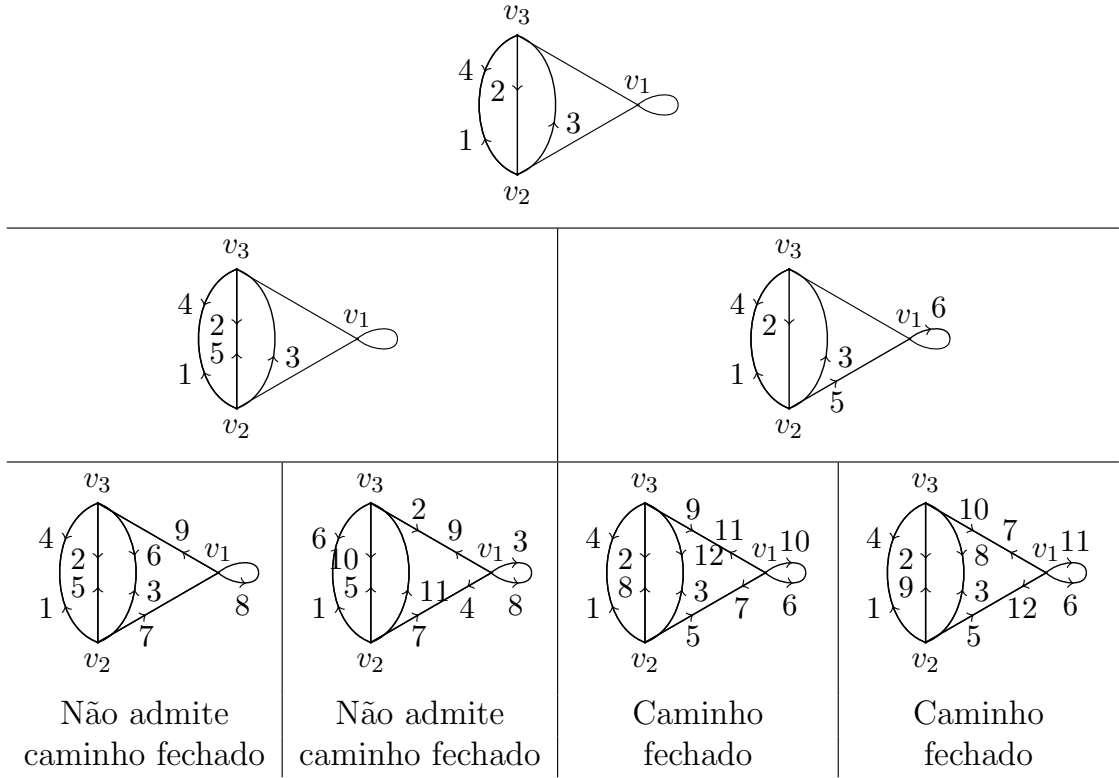


Figura 5.38: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C3).

Temos dois caminhos fechados e os emparelhamentos relacionados a eles são dados por:

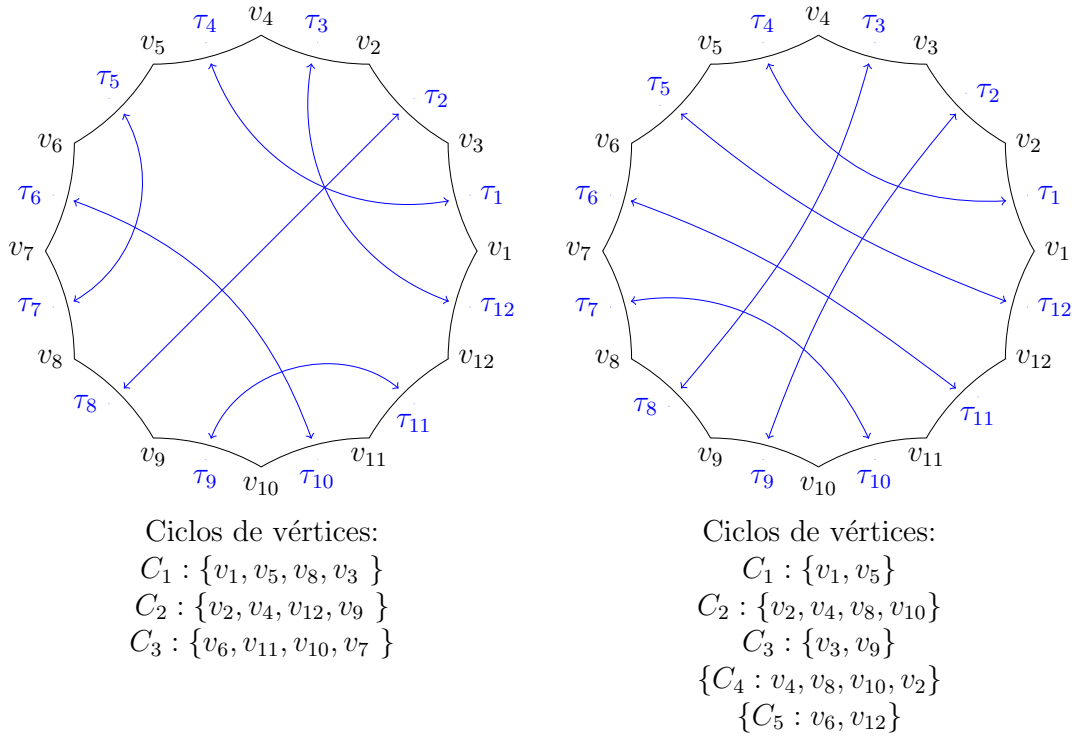


Figura 5.39: Emparelhamentos de arestas relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.38.

Como podemos ver, o último não é 4-regular.

Para o caminho em C4, temos:

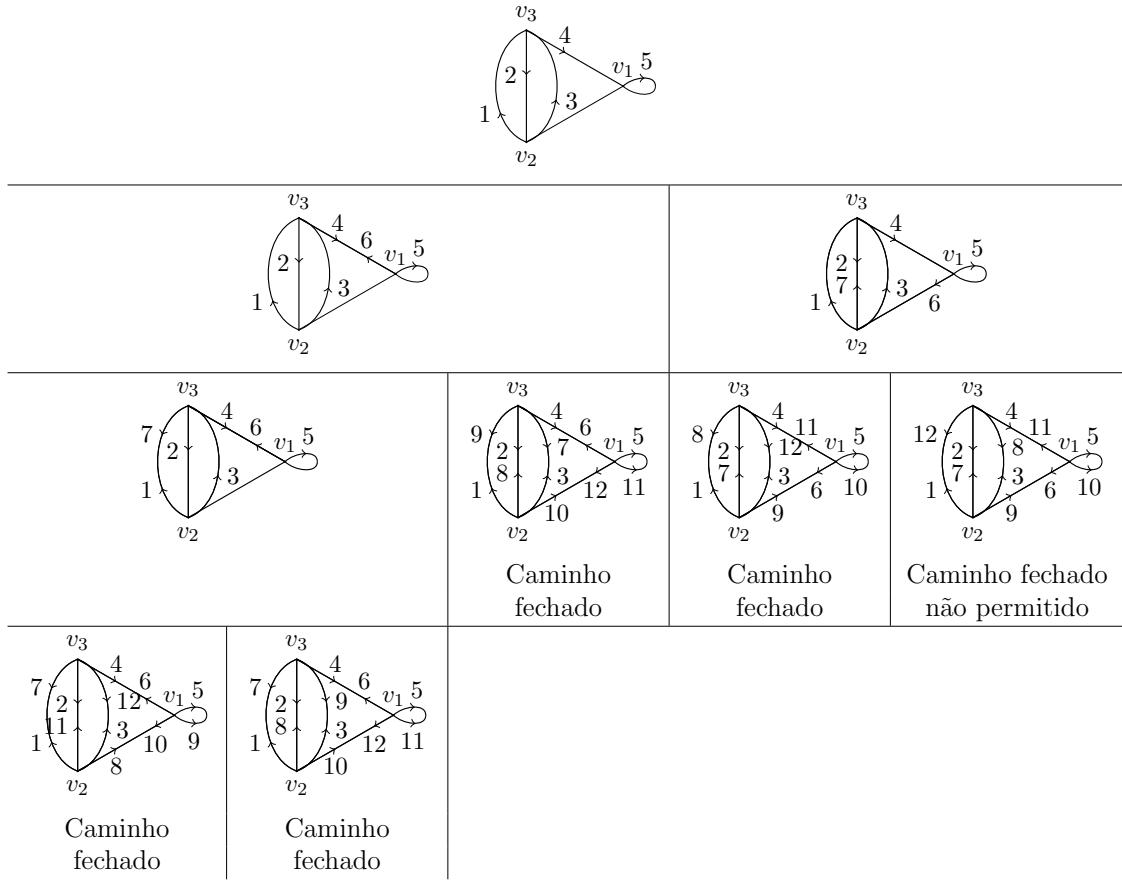
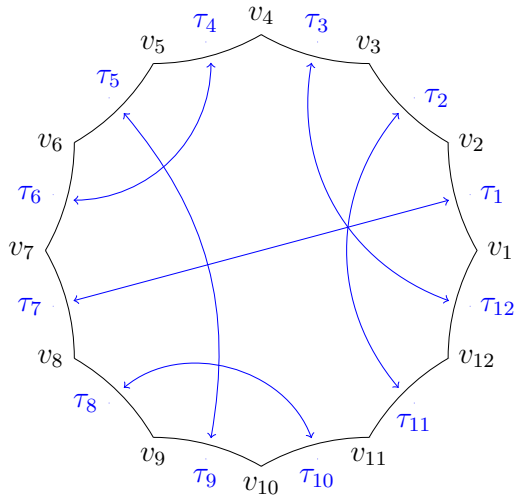


Figura 5.40: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C4).

Temos 4 caminhos fechados e os emparelhamentos relacionados a eles são dados por:

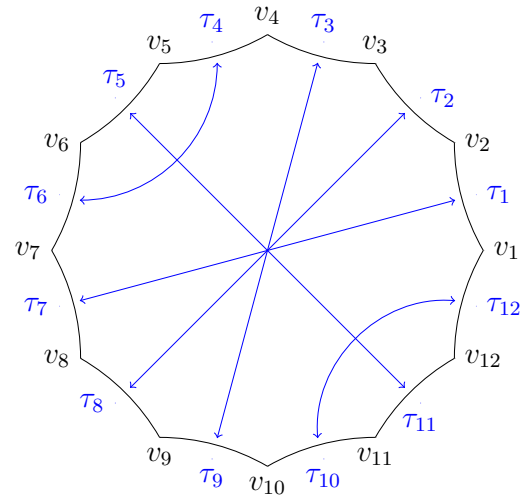


Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_3, v_{11}, v_8\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_{12}, v_4, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_5, v_{10}, v_9, v_6\}$$

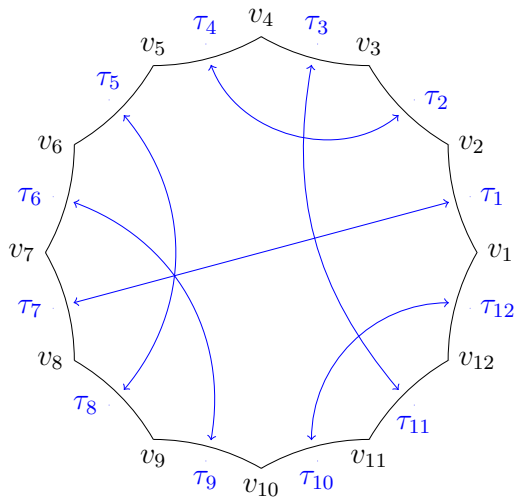


Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_{10}, v_3, v_8\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_9, v_4, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_5, v_6, v_{11}, v_{12}\}$$

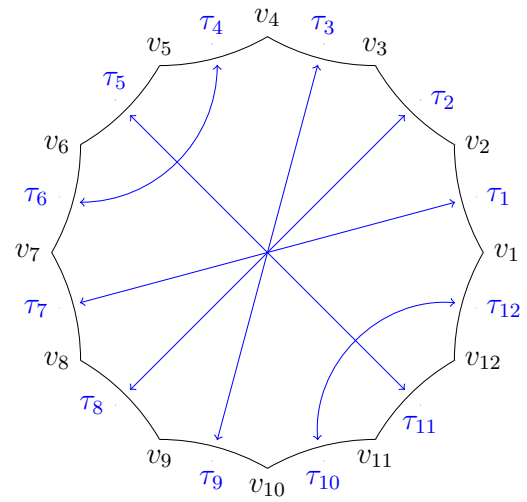


Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_{10}, v_6, v_8\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_5, v_9, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_3, v_{12}, v_{11}, v_4\}$$



Ciclos de vértices:

$$C_1 : \{v_1, v_{10}, v_3, v_8\}$$

$$C_2 : \{v_2, v_9, v_4, v_7\}$$

$$C_3 : \{v_5, v_6, v_{11}, v_{12}\}$$

Figura 5.41: Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.40.

Para o caminho em C5, temos:

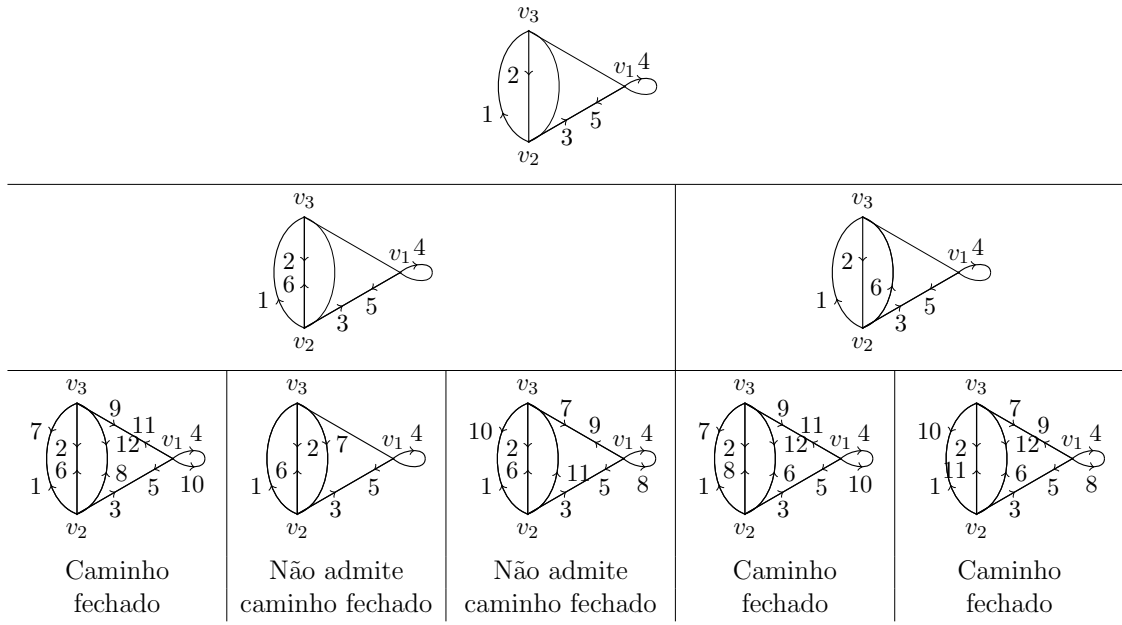


Figura 5.42: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C5).

Temos 3 caminhos fechados e os emparelhamentos relacionados a eles são dados por:

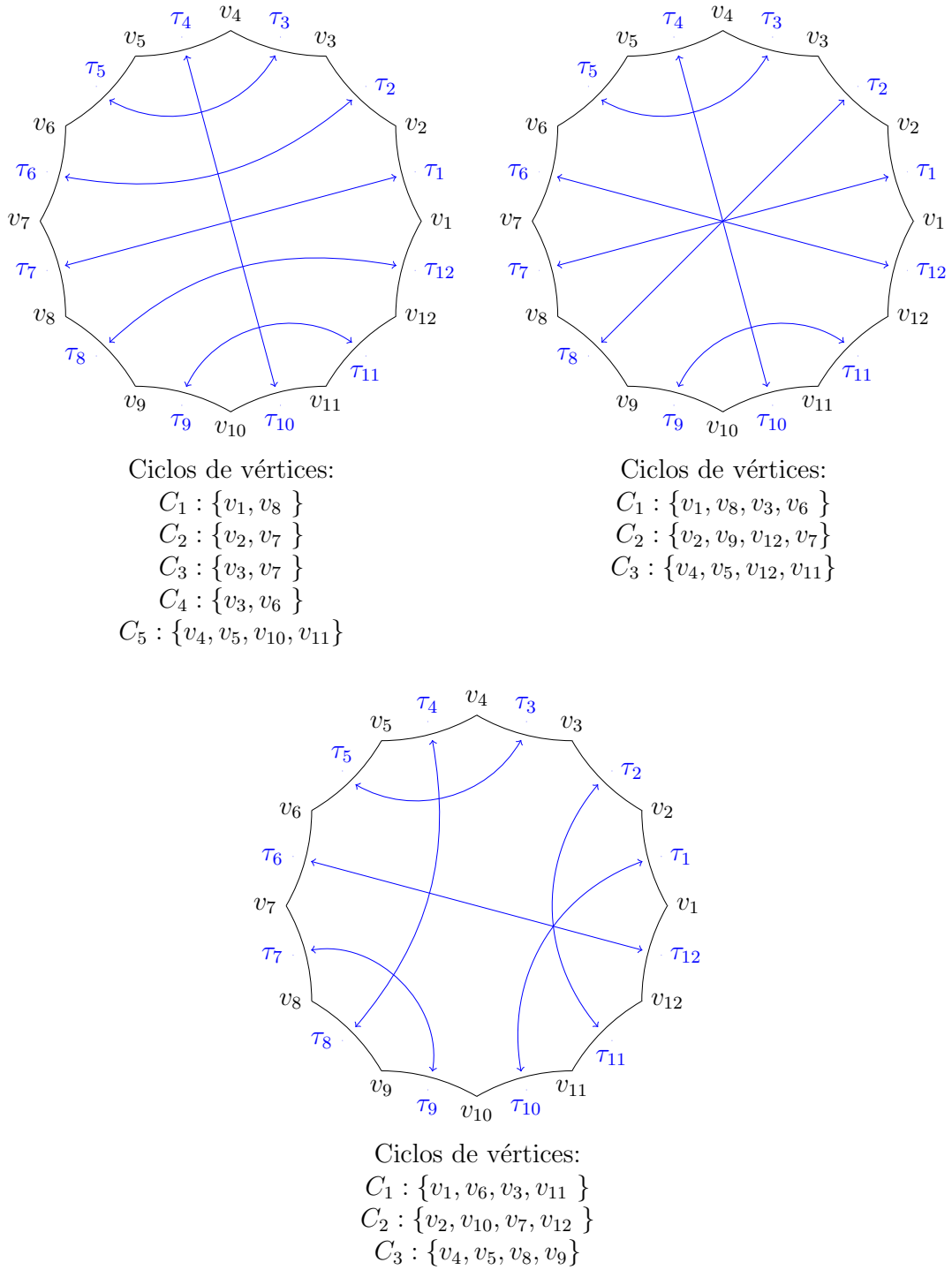


Figura 5.43: Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.42.

Para o caminho C6, temos:

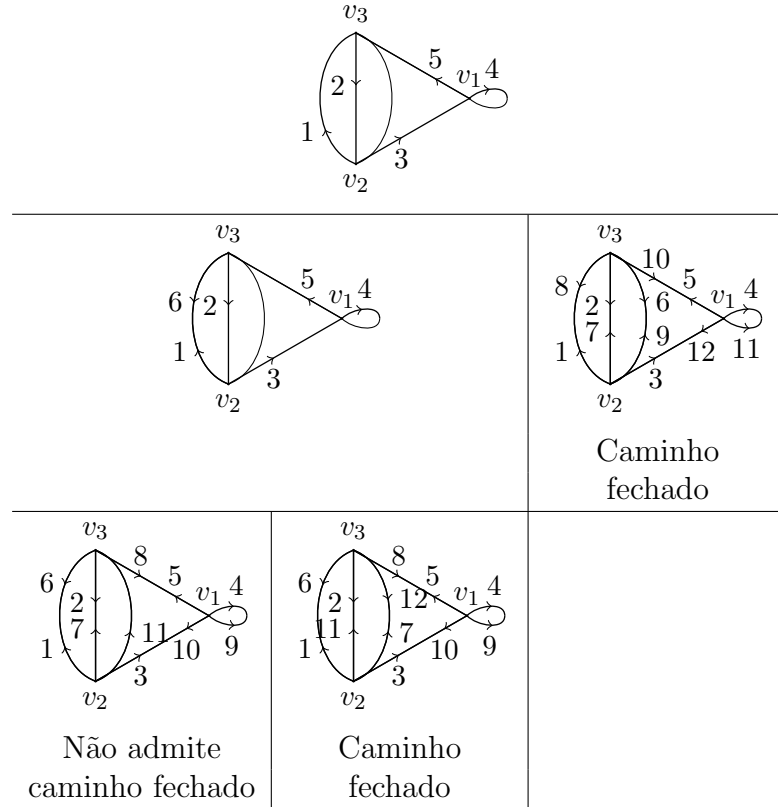


Figura 5.44: Possíveis caminhos no Grafo B (caso C6).

Temos dois caminhos fechados e os emparelhamentos relacionados a eles são dados por:

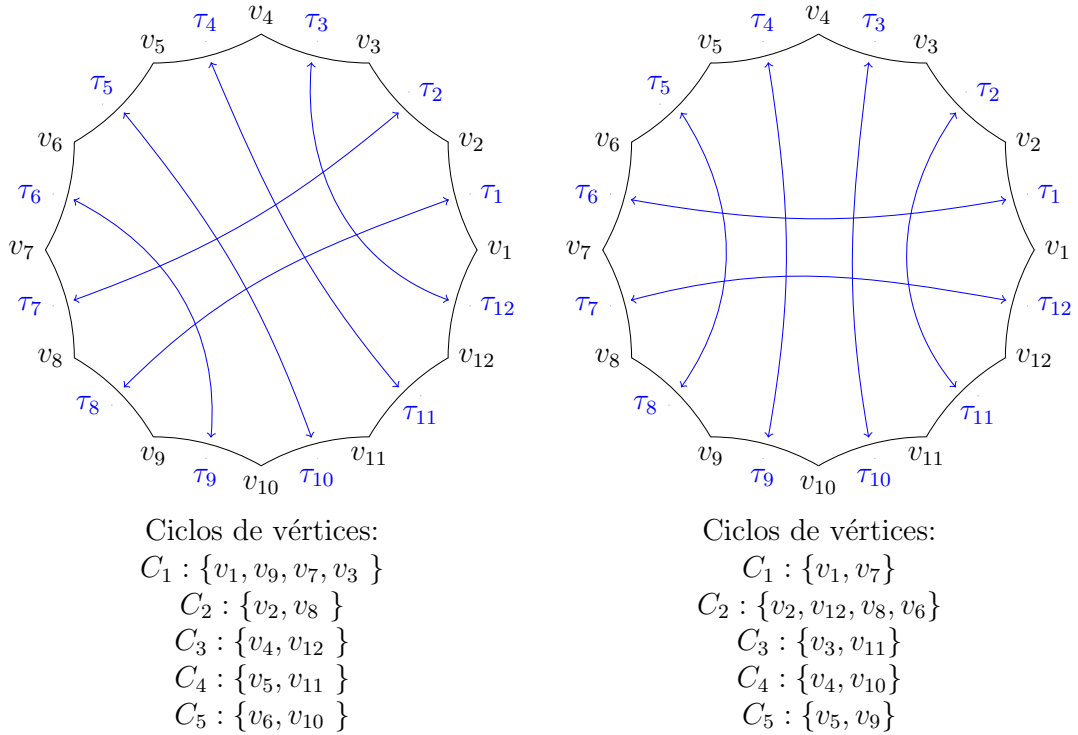


Figura 5.45: Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.44.

Vamos agora encontrar todos os possíveis caminhos fechados sob o Grafo C .

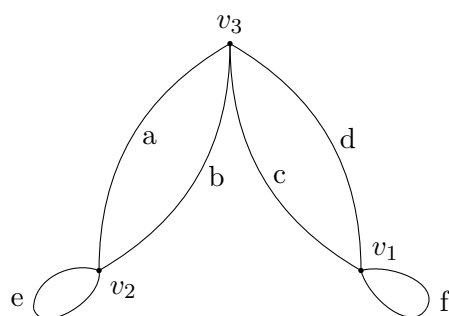


Figura 5.46: Grafo C

Note que chegando no vértice v_2 por qualquer aresta a ou b , é necessário seguir pela aresta e , para que o caminho se feche. O mesmo ocorre com o vértice v_1 . Temos:

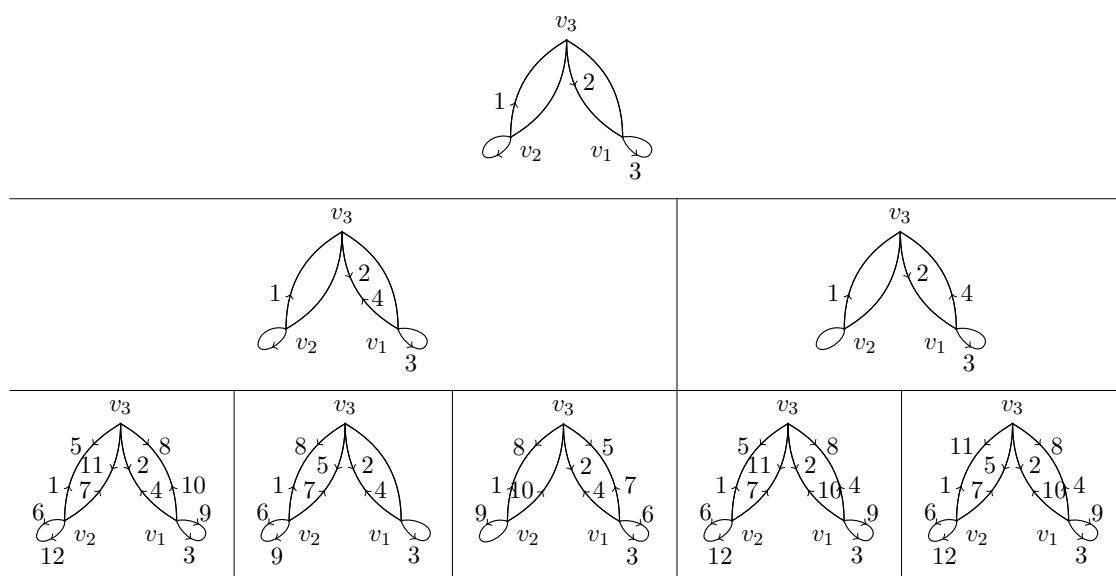
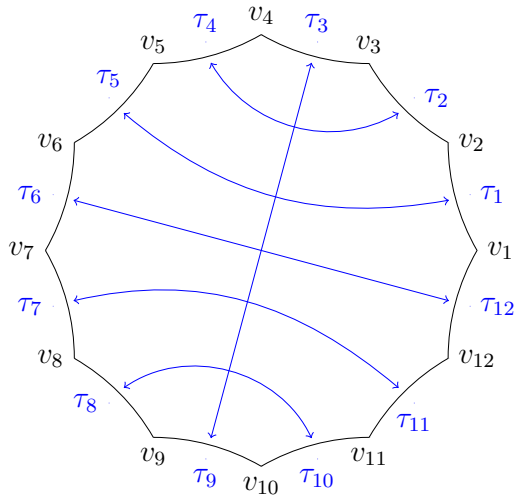


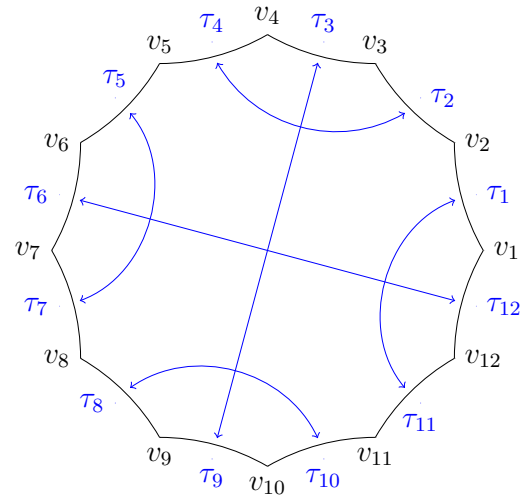
Figura 5.47: Possíveis caminhos no Grafo C .

Temos 5 caminhos fechados. Os emparelhamentos relacionados a eles são:



Ciclos de vértices:

- $C_1 : \{v_1, v_6\}$
- $C_2 : \{v_2, v_5\}$
- $C_3 : \{v_7, v_{12}\}$
- $C_4 : \{v_1, v_6\}$
- $C_5 : \{v_3, v_4, v_9, v_{10}\}$



Ciclos de vértices:

- $C_1 : \{v_1, v_{12}, v_7, v_6\}$
- $C_2 : \{v_2, v_{11}, v_8, v_5\}$
- $C_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_{10}\}$

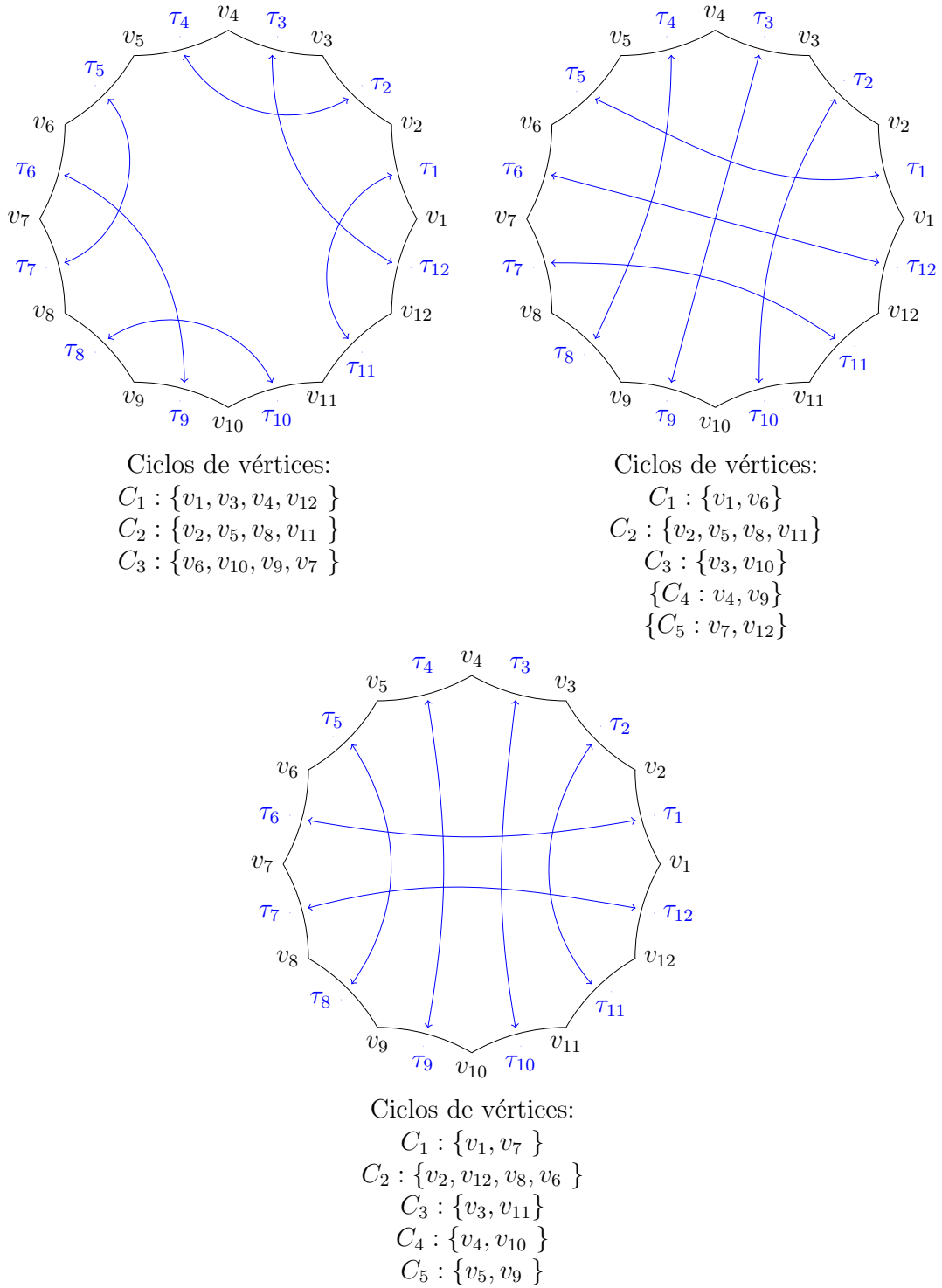


Figura 5.48: Emparelhamentos relacionados aos caminhos fechados dados na Figura 5.47.

Concluimos que os possíveis emparelhamentos de um polígono de 12 lados que dão origem a uma superfície de gênero 2 são:

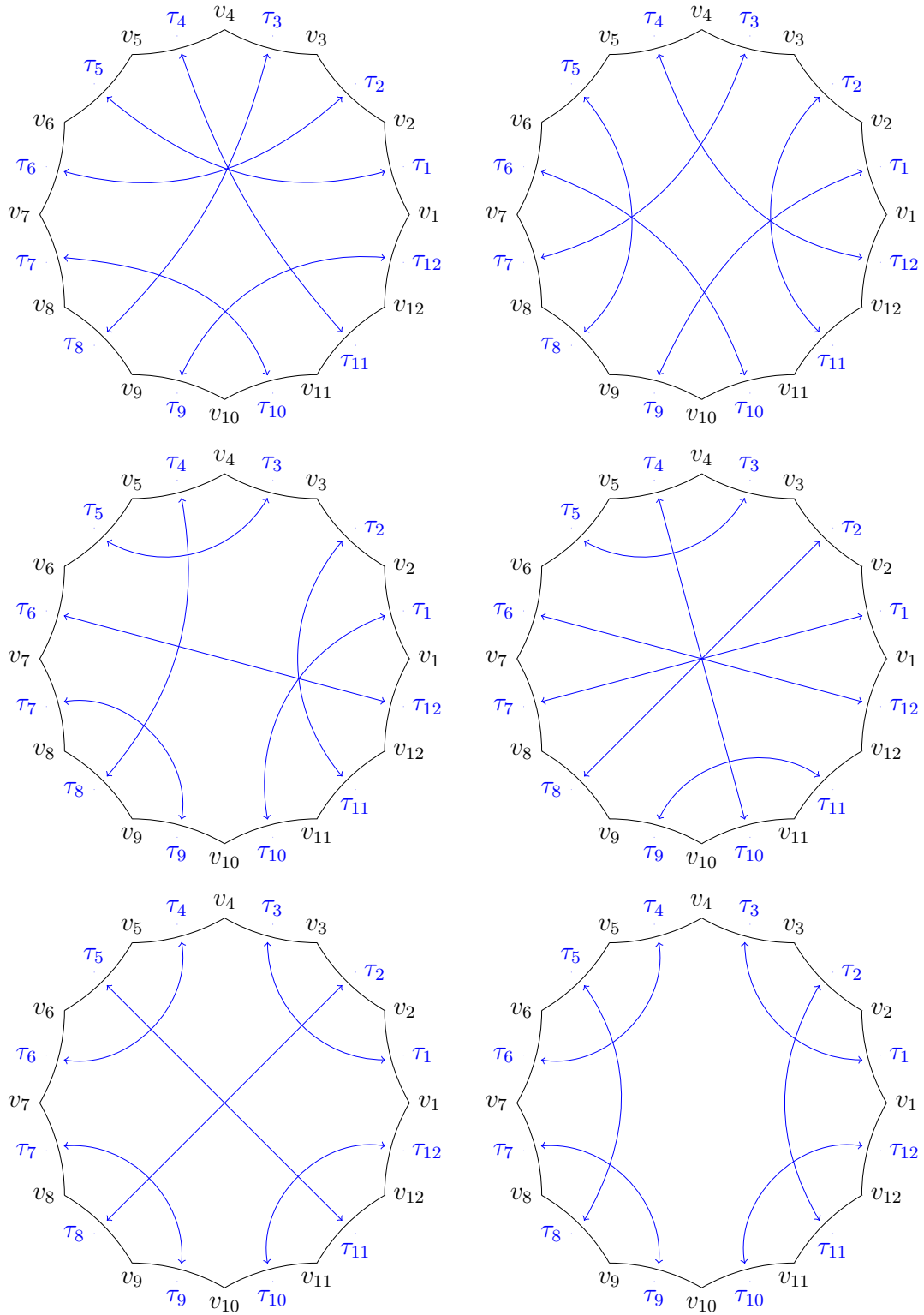


Figura 5.49: Emparelhamentos de arestas do polígono de 12 arestas.

□

Observação 5.1. Os emparelhamentos dados na Figura 5.49 dão origem a uma superfície compacta orientada de gênero 2.

De fato, em cada um dos emparelhamentos dados na Figura 5.49 todos os ciclos são homogêneos com quatro vértices cada e cada vértice do polígono possui ângulo interno medindo $\pi/2$, então a soma dos ângulos de cada ciclo de vértices é igual a 2π . Tendo em vista que consideramos apenas isometrias hiperbólicas, ou seja, não temos pontos fixados por nenhum elemento γ_j , a não ser a identidade, conclui-se que a ordem do estabilizador Γ_V de qualquer vértice é 1. Portanto qualquer um dos seis emparelhamento satisfaz condição C_1^* (3.2). O polígono possui número finito de arestas e satisfaz a condição C_2 (??). Pelo Teorema de Poincaré, cada regra de emparelhamento gera um grupo Γ de isometrias de $\mathbb{H}^2$ e $\mathcal{P}$ é um polígono fundamental para Γ . Mas as órbitas $\Gamma(x)$ são discretas e os estabilizadores G_x são finitos, ou seja, Γ age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Assim, o grupo Γ que é gerado pelas isometrias de emparelhamento é um grupo fuchsiano e o espaço órbita dado pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície.

Como Γ é finitamente gerado, então qualquer polígono convexo fundamental de Γ possui finitas arestas. Sendo assim, todo polígono fundamental de Γ é compacto e Γ é co-compacto, ou seja, $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é uma superfície compacta.

Γ é subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ e este por sua vez é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius que preservam a orientação, daí temos que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é orientável.

Pela identidade de Euler temos que

$$3 - 6 + 1 = 2 - 2g \Rightarrow -2 = 2 - 2g \Rightarrow g = 2$$

5.3 Tesselação {20n-10,5}

Buscamos tesselações do tipo $\{p, 5\}$. Suponhamos que $p = an + k$. Estamos interessados em grafos 5-regular associados ao emparelhamento de arestas de um polígono com p lados. Tal grafo possui $\frac{p}{2}$ aresta e $\frac{p}{5}$ vértices e deve estar imerso em uma superfície de gênero g de forma que S/G seja o polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}$ de p arestas e ângulos iguais a $\frac{2\pi}{5}$, que pode ser visto como um domínio de Dirichlet. Daí, o número de face da relação de Euler deve ser igual a 1. A relação de Euler nos garante que:

$$V - A + F = 2 - 2g$$

Substituindo os valores e reorganizando a equação, temos que:

$$g = \frac{3an}{20} + \frac{3k + 10}{20}$$

Como $g \in \mathbb{Z}$, então $a = 20$ e $k = -10$ ou $k = 10$.

Para $n = 1$, $a = 20$ e $k = -10$, temos, $p = 10$ e $q = 5$. Os possíveis grafos 5-

regular associados ao emparelhamento de arestas de um polígono com $p = 10$ lados contém $\frac{10}{2} = 5$ arestas e $\frac{10}{5} = 2$ vértices, logo os possíveis grafos são:

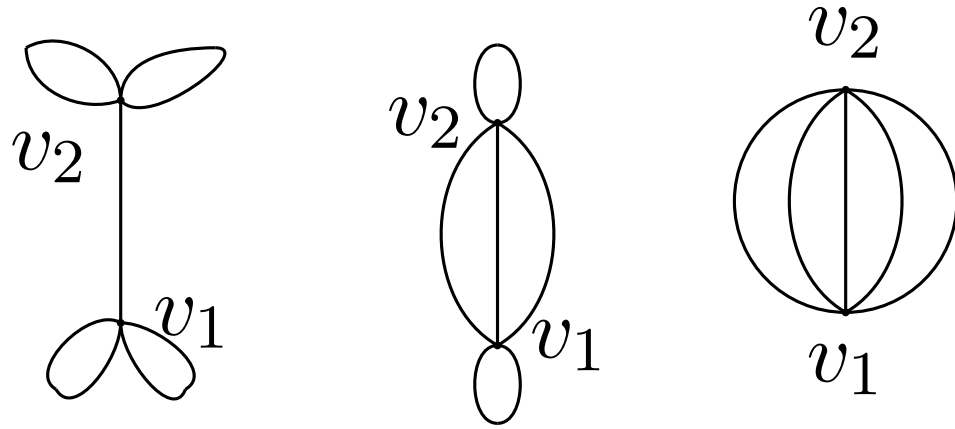


Figura 5.50: Grafos com cinco arestas e dois vértices.

Nas mesmas condições do caso anterior, encontrando todos os caminhos fechados sobre os grafos dados na Figura 5.50, temos formas distintas de emparelhar um polígono hiperbólico regular de 10 lados.

Não descreveremos aqui, pois a maneira de se encontrar tais caminhos é análogo ao caso anterior.

Existem seis formas distintas de emparelhar um polígono hiperbólico regular de 10 lados e ângulos medindo $2\pi/5$ de forma que as isometrias de emparelhamento geram um grupo fuchsiano Γ e o espaço órbita $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja uma superfície compacta orientada de gênero 2. Elas são dadas por:

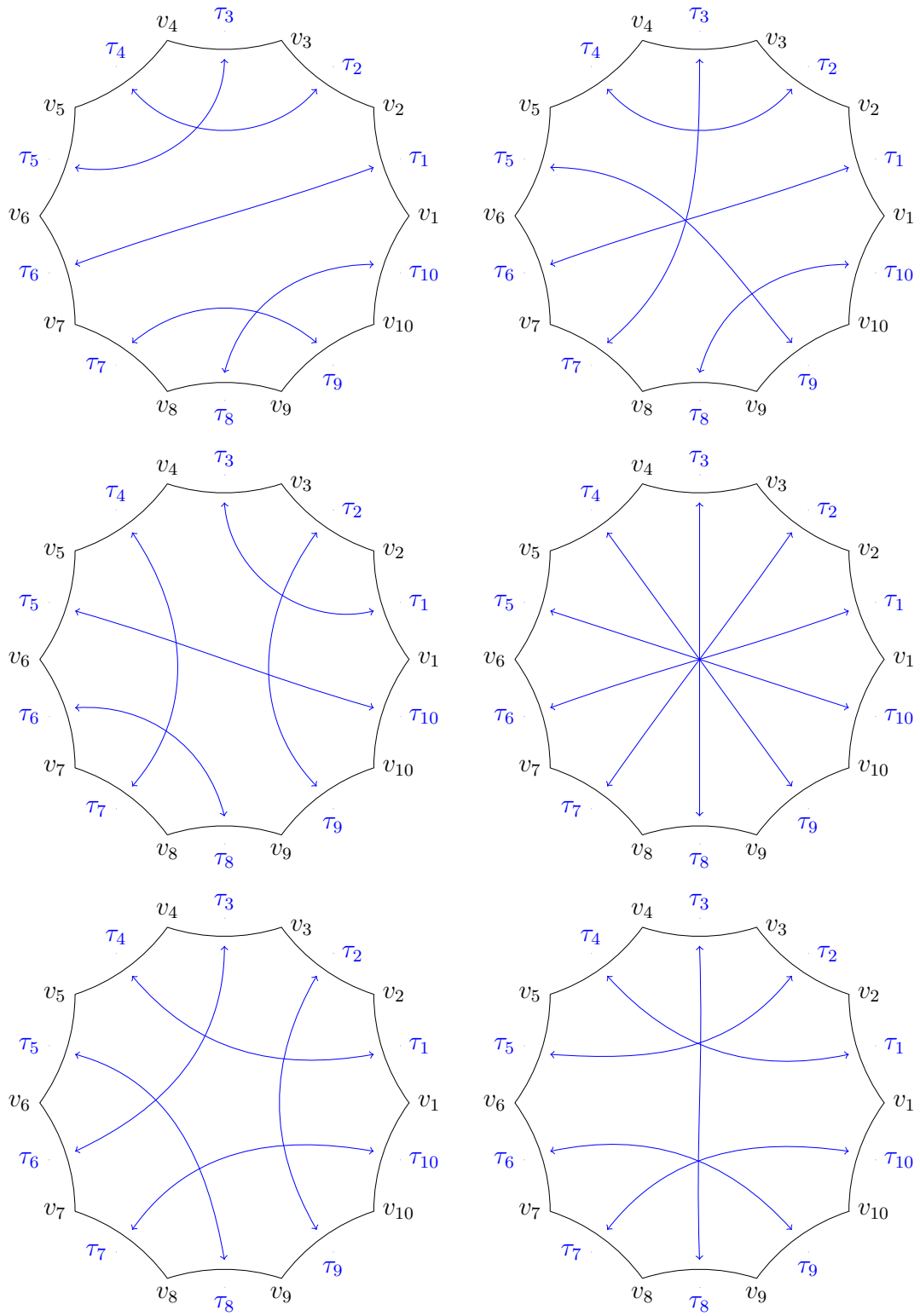


Figura 5.51: Emparelhamentos de arestas do polígono de 10 arestas.

Capítulo 6

Emparelhamento Generalizado $\{8g-4, 4\}$

Considerando alguns dos emparelhamentos de arestas de um polígono hiperbólico regular com 12 arestas e ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$ vistos no capítulo anterior, apresentamos algumas generalizações de emparelhamento para polígonos hiperbólicos regulares com $8g - 4$ arestas e ângulos internos iguais a $\frac{\pi}{2}$ de modo que obtém-se uma superfície compacta orientada de gênero g .

Seja $\mathcal{P}_{8g-4}$ um polígono hiperbólico com $8g - 4$ lados e ângulos internos medindo $\pi/2$.

Observação 6.1. $\mathcal{P}_{8g-4}$ existe e é convexo. De fato, como estamos supondo que todos os ângulos internos de cada vértice é $\pi/2$, somando todos os seus ângulos internos, para $g \geq 2$, temos

$$(8g - 4)\pi/2 = (4g - 2)\pi < (8g - 6)\pi = [(8g - 4) - 2]\pi$$

satisfazendo o Teorema 1.13. Como os seus ângulos internos medem $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$ segue pelo Teorema 1.14 que $\mathcal{P}_{8g-4}$ é convexo.

Criamos 12 regras de emparelhamento que identifica as arestas de $\mathcal{P}_{8g-4}$ para emparelhar as arestas desse polígono e vamos denotar cada uma delas por $\mathcal{K}_{\{8g-4\}}^k$, onde $k \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

Seja $n = 8g - 4$ o número de arestas. Definiu-se as seguintes identificações de arestas:

$$\begin{aligned}
\gamma_{3+3j}(\tau_{3+3j}) &= \tau_{4g-1-j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{1+3j}(\tau_{1+3j}) &= \tau_{8g-3j-4}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j+2}(\tau_{3j+2}) &= \tau_{8g-3j-5}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{4g+j}(\tau_{4g+j}) &= \tau_{8g-5-3j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{5g-1} \\
\gamma_2(\tau_2) &= \tau_{3g-1} \\
\gamma_{3g}(\tau_{3g}) &= \tau_{5g}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

A regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^1$ nos fornece um emparelhamento denotado por Φ_{8g-4}^1 .

Considere a segunda regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g-4$ arestas, Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1-3j}(\tau_{1-3j}) &= \tau_{3g+j-2}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j+3}(\tau_{3j+3}) &= \tau_{5g-j-4}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j+4}(\tau_{3j+4}) &= \tau_{8g-3j-8}, & 0 \leq j \leq g-3 \\
\gamma_{3j+5}(\tau_{3j+5}) &= \tau_{8g-3j-7}, & 0 \leq j \leq g-3 \\
\gamma_{8g-4}(\tau_{8g-4}) &= \tau_{5g-2}, \\
\gamma_{8g-5}(\tau_{8g-5}) &= \tau_{5g-3}, \\
\gamma_2(\tau_2) &= \tau_{5g-1}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^2$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^2 .

Considere a terceira regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g-4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1+j}(\tau_{1+j}) &= \tau_{8g-3j-6}, & 0 \leq j \leq 2g-3 \\
\gamma_{3j-4g+10}(\tau_{3j-4g+10}) &= \tau_{14g-3j-14}, & 2g-2 \leq j \leq 3g-5 \\
\gamma_{-j+11g-8}(\tau_{-j+11g-8}) &= \tau_{3j-7g-9}, & 3g-4 \leq j \leq 3g-3 \\
\gamma_{-g+j+2}(\tau_{-g+j+2}) &= \tau_{3j-4g+2}, & 3g-2 \leq j \leq 3g-1 \\
\gamma_{14g-4-3j}(\tau_{14g-4-3j}) &= \tau_{-4g+3j+2}, & 3g \leq j \leq 4g-3
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^3$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^3 .

Considere a quarta regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g-4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1+j}(\tau_{1+j}) &= \tau_{4g-3j-2}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{j+3}(\tau_{j+3}) &= \tau_{11g-3j-11}, & g-1 \leq j \leq 2g-3 \\
\gamma_{3j-4g+8}(\tau_{3j-4g+8}) &= \tau_{3j-g+5}, & 2g-2 \leq j \leq 3g-5 \\
\gamma_{2g+j+2}(\tau_{2g+j+2}) &= \tau_{30g-7j-31}, & 3g-4 \leq j \leq 3g-3 \\
\gamma_{8g-4}(\tau_{8g-4}) &= \tau_{8g-3}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^4$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^4 .

Considere a quinta regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{3j+3}(\tau_{3j+3}) &= \tau_{-j+4g}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j+4}(\tau_{3j+4}) &= \tau_{4g+2+3j}, & 0 \leq j \leq g-3 \\
\gamma_{3j+5}(\tau_{3j+5}) &= \tau_{4g+3+3j}, & 0 \leq j \leq g-3 \\
\gamma_{-j+8g-4}(\tau_{-j+8g-4}) &= \tau_{1+4g+3j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{-j+7g-3}(\tau_{-j+7g-5}) &= \tau_{3g-2+3j}, & 0 \leq j \leq 1 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{3g-1} \\
\gamma_2(\tau_2) &= \tau_{3g},
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^5$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^5 .

Considere a sexta regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos: Para

$$\begin{aligned}
\gamma_{2+j}(\tau_{2+j}) &= \tau_{4g-3-3j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{1+3j-2g}(\tau_{1+3j-2g}) &= \tau_{1+g+3j}, & g \leq j \leq 2g-3 \\
\gamma_{3j-5g+11}(\tau_{3j-5g+11}) &= \tau_{-2g+8+3j}, & 2g-2 \leq j \leq 3g-5 \\
\gamma_{-j+11g-7}(\tau_{-j+11g-7}) &= \tau_{-5g+12+3j}, & 3g-4 \leq j \leq 4g-6 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{7g-5}, \\
\gamma_{1+g}(\tau_{1+g}) &= \tau_{4g-1}, \\
\gamma_{4g-2}(\tau_{4g-2}) &= \tau_{7g-4}, \\
\gamma_{8g-4}(\tau_{8g-4}) &= \tau_{g+2}.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^6$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^6 .

Considere a sétima regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1+3j}(\tau_{1+3j}) &= \tau_{5g-5-j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j-3g+5}(\tau_{3j-3g+5}) &= \tau_{11g-13-3j}, & g-1 \leq j \leq 2g-4 \\
\gamma_{3j-6g+12}(\tau_{3j-6g+12}) &= \tau_{14g-18-3j}, & 2g-3 \leq j \leq 3g-6 \\
\gamma_{3g-4}(\tau_{3g-4}) &= \tau_{8g-4}, \\
\gamma_{5g-3}(\tau_{5g-3}) &= \tau_{8g-5}, \\
\gamma_{1+j}(\tau_{1+j}) &= \tau_{-4g+3j-11}, & 3g-3 \leq j \leq 4g-5 \\
\gamma_{8g-4}(\tau_{8g-4}) &= \tau_{8g-7},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^7$ nos fornece um emparelhamento de arestas do

polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^7 .

Considere a oitava regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_j(\tau_j) &= \tau_{5g-2-3j}, & 1 \leq j \leq g-1 \\
\gamma_j(\tau_j) &= \tau_{11g-10-3j}, & g \leq j \leq 2g-2 \\
\gamma_{3j-g+5}(\tau_{3j-g+5}) &= \tau_{14g-15-3j}, & 2g-1 \leq j \leq 3g-4 \\
\gamma_{3j-g+6}(\tau_{3j-g+6}) &= \tau_{14g-3j-14}, & 2g-1 \leq j \leq 3g-4 \\
\gamma_{8g-4}(\tau_{8g-4}) &= \tau_{8g-7}, \\
\gamma_{8g-6}(\tau_{8g-6}) &= \tau_{8g-9}, \\
\gamma_{2g-1}(\tau_{2g-1}) &= \tau_{8g-8}, \\
\gamma_{2g}(\tau_{2g}) &= \tau_{8g-5},
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^8$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^8 .

Considere a nona regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{2+j}(\tau_{2+j}) &= \tau_{4g-3j-3}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{5g+j-6}(\tau_{5g+j-6}) &= \tau_{8g-6-3j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{4g-2-3j}(\tau_{4g-2-3j}) &= \tau_{8g-5-3j}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{4g-1-3j}(\tau_{4g-1-3j}) &= \tau_{8g-4-3j}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{5g-1} \\
\gamma_{1+g}(\tau_{1+g}) &= \tau_{5g-3}, \\
\gamma_{2+g}(\tau_{2+g}) &= \tau_{8g-4},
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^9$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^9 .

Considere a décima regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1+3j}(\tau_{1+3j}) &= \tau_{7g-3j-5}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j-3g+8}(\tau_{3j-3g+8}) &= \tau_{10g-10-3j}, & g-1 \leq j \leq 2g-4 \\
\gamma_{6g-11-3j}(\tau_{6g-11-3j}) &= \tau_{10g-11-3j}, & 2g-3 \leq j \leq 3g-5 \\
\gamma_{11g-j-8}(\tau_{11g-j-8}) &= \tau_{-5g+3j+12}, & 3g-4 \leq j \leq 4g-6 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{3g-2}, \\
\gamma_{1-2+3g}(\tau_{1-2+3g}) &= \tau_{7g-4}, \\
\gamma_{4g-2}(\tau_{4g-2}) &= \tau_{7g-3}.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^{10}$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^{10} .

Considere a décima primeira regra de emparelhamento das arestas de um polígono

$\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{2+3j}(\tau_{2+3j}) &= \tau_{4g-2-j}, & 0 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{3j-3g+6}(\tau_{3j-3g+6}) &= \tau_{5g+6+3j}, & g-1 \leq j \leq 2g-4 \\
\gamma_{3j-3g+7}(\tau_{3j-3g+7}) &= \tau_{5g+7+3j}, & g-1 \leq j \leq 2g-4 \\
\gamma_{j+2g+3}(\tau_{j+2g+3}) &= \tau_{14g-13-3j}, & g-1 \leq j \leq 2g-4 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{3g-1}, \\
\gamma_{3g-2}(\tau_{3g-2}) &= \tau_{1+5g}, \\
\gamma_{3g-3}(\tau_{3g-3}) &= \tau_{4g}, \\
\gamma_{4g-1}(\tau_{4g-1}) &= \tau_{5g}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^{11}$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^{11} .

Considere a décima segunda regra de emparelhamento das arestas de um polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ com $8g - 4$ arestas. Temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{2+j}(\tau_{2+j}) &= \tau_{5g-8+3j}, & 1 \leq j \leq g-1 \\
\gamma_{j+g}(\tau_{j+g}) &= \tau_{8g-3j-6}, & 1 \leq j \leq g-1 \\
\gamma_{-3j+5g-4}(\tau_{-3j+5g-4}) &= \tau_{5g-5+3j}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_{-3j+5g-5}(\tau_{-3j+5g-5}) &= \tau_{5g-4+3j}, & 1 \leq j \leq g-2 \\
\gamma_1(\tau_1) &= \tau_{8g-7}, \\
\gamma_{2g}(\tau_{2g}) &= \tau_{8g-4}, \\
\gamma_{8g-5}(\tau_{8g-5}) &= \tau_{8g-8}, \\
\gamma_{8g-6}(\tau_{8g-6}) &= \tau_{5g-4}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Portanto, a regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^{12}$ nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ que denotaremos por Φ_{8g-4}^{12} .

Com isso, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.1. Seja $\mathcal{P}_{8g-4}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e Φ_{8g-4}^k o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8g-4}$ obtido pela regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^k$. Então, Φ_{8g-4}^k gera um grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}^k tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^k}$ é uma superfície compacta orientada de gênero g , para todo $k \in \{1, 2, \dots, 12\}$.

Demonstração. O emparelhamento Φ_{8g-4}^k que identifica as arestas do polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_{8g-4}$, obtido pela regra $\mathcal{K}_{\{8g-4,4\}}^k$ nos dá $c = \frac{8g-4}{4} = 2g-1$ ciclos de vértices. Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^1 vemos que os ciclos de vértices são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{5g}, V_{1+3g}, V_{3g-2}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{3g}, V_{1+5g}, V_{5g-1}\}$$

$$C_{V3} = \{V_3, V_{4g}, V_{8g-4}, V_{3g-1}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+3j}, V_{8g-3j-3}, V_{3j+3}, V_{4g-j}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{3j+2}, V_{-3j+8g-2}, V_{j+4g}, V_{8g-3j-4}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^2 temos os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{5g-2}, V_{8g-5}, V_{3g-1}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{3g-2}, V_{4g-2}, V_{5g}\}$$

$$C_{V3} = \{V_3, V_{5g-1}, V_{8g-4}, V_{5g-3}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+3j}, V_{5g-j-3}, V_{3j+3}, V_{8g-3j-4}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{3j+2}, V_{8g-3j-5}, V_{3g+j-1}, V_{8g-3j-3}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Pelo emparelhamento Φ_{8g-4}^3 , os ciclos de vértices são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{2g-1}, V_{12g+3}, V_{8g-5}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_g, V_{5g}, V_{1+2g}, V_{5g-2}\}$$

$$C_{V3} = \{V_{2g}, V_{8g-4}, V_{2g+2}, V_{5g-1}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+j}, V_{8g-3j-3}, V_{3j+2g+2}, V_{8g-3j-5}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-j+2g-1}, V_{2g+3j+3}, V_{8g-3j-4}, V_{1+2g+3j}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^4 vemos que os ciclos de vértices são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{5g-4}, V_{g+2}, V_{8g-7}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_g, V_{8g-4}, V_{5g-4}, V_{1+2g}\}$$

$$C_{V3} = \{V_{1+g}, V_{5g-3}, V_{8g-4}, V_{8g-6}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+j}, V_{5g-3j-2}, V_{-3j+8g+2}, V_{i+5g-3j-4}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{j+g+2}, V_{8g-3j-7}, V_{5g-3j-3}, V_{8g-3j-5}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^5 temos os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{1+4g}, V_3, V_{3g}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{3g-1}, V_{g-3}, V_{1+3g}\}$$

$$C_{V3} = \{V_{1+3g}, V_{3g+2}, V_{7g-4}, V_{7g-2}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+3j}, V_{1+4g-j}, V_{3j+3}, V_{4g+3j}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-3j+2}, V_{4g+3j-1}, V_{7g-j}, V_{1+4g+3j}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

Já o emparelhamento Φ_{8g-4}^6 nos dá os ciclos de vértices que são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{g+2}, V_{4g-1}, V_{7g-4}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{7g-5}, V_{7g-3}, V_{4g-2}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{1+g}, V_{g+3}, V_{8g-4}, V_{4g}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{+3j+g+2}, V_{4g+3j-2}, V_{-j+8g-4}, V_{-3g+4g+6}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{1-j+g}, V_{g+3j+3}, V_{4g+3j-1}, V_{1+g+3j}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

Pelo emparelhamento Φ_{8g-4}^7 obtemos os ciclos de vértices, que são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{3g-2}, V_{5g-4}, V_{8g-7}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_{3g-3}, V_{5g-3}, V_{8g-6}, V_{8g-4}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{3g-4}, V_{5g-2}, V_{4g-3}, V_{8g-4}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{-3j+3g-2}, V_{4g+j-3}, V_{-3j+3g-4}, V_{5g+3j-3}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-3-3j+3g}, V_{5g+3j-4}, V_{3g-j-4}, V_{-2+5g+3j}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^8 temos que os ciclos de vértices são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{5g-4}, V_{2g-1}, V_{8g-7}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_g, V_{8g-9}, V_{8g-4}, V_{1+2g}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{2g}, V_{8g-4}, V_{8g-6}, V_{8g-8}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+j}, V_{5g-3j-4}, V_{3j+5g-5}, V_{5g-3j-2}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-j+2g-1}, V_{5g+3j-6}, V_{5g-3j-3}, V_{5g+3j-4}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

O emparelhamento Φ_{8g-4}^9 nos dá os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{5g}, V_{5g-3}, V_{g+2}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{4g-2}, V_{8g-5}, V_{5g-1}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{1+g}, V_{5g-2}, V_{8g-4}, V_{g+3}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{j+2}, V_{4g-3j-2}, V_{-3j+8g-4}, V_{4g-3j}\}, \quad se \ 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-3j+4g-1}, V_{8g-3j-3}, V_{5g+j-5}, V_{8g-3j-5}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^{10} vemos que os ciclos de vértices são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{3g-1}, V_{7g-3}, V_{4g-2}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{7g-4}, V_{3g}, V_{3g-2}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{1+2}, V_{4g-1}, V_{7g-2}, V_{7g-5}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+3j}, V_{7g-3j-4}, V_{3j+3}, V_{4g-j-1}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{3j+2}, V_{7g-3j-3}, V_{7g+j-2}, V_{7g-3j-5}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Pelo emparelhamento Φ_{8g-4}^{11} temos que os ciclos de vértices são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{3g}, V_{3g-3}, V_{1+4g}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{1+3g}, V_{1+5g}, V_{3g-1}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{3g-2}, V_{8g-4}, V_{5g}, V_{4g}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{1+3j}, V_{i+5g+3j+1}, V_{-j+5g}, V_{5g+3j}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{3j}, V_{5g+4j}, V_{3j+3}, V_{4g-j-1}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

por fim, o emparelhamento Φ_{8g-4}^{12} nos dá os ciclos de vértices que são dados por:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{8g-6}, V_{5g-3}, V_{2g}\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_{8g-7}, V_{8g-5}, V_{5g-4}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_{1+g}, V_{8g-8}, V_{8g-4}, V_{1+2g}\}$$

$$C_{V_{2j+2}} = \{V_{j+2}, V_{5g-3j-4}, V_{3j+5g-4}, V_{5g-3j-2}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

$$C_{V_{2j+3}} = \{V_{-j+2g}, V_{5g+3j-5}, V_{5g-3j-3}, V_{5g+3j-3}\}, \quad \text{se } 1 \leq j \leq g-2$$

Como todos os ciclos são homogêneos com quatro vértices cada e cada vértice do polígono possui ângulo interno medindo $\pi/2$, então a soma dos ângulos de cada ciclo de vértices é igual a 2π . Como consideramos apenas isometrias hiperbólicas, ou seja, não temos pontos fixados por nenhum elemento γ_j , a não ser a identidade, temos que a ordem do estabilizador Γ_V de qualquer vértice é 1. Portanto o emparelhamento Φ_{8g-4} satisfaz condição C_1^* . O polígono possui $8g-4$ arestas, ou seja, um número finito de arestas e satisfaz a condição C_2 . Pelo Teorema de Poincaré, Φ_{8g-4} gera um grupo Γ_{8g-4} de isometrias de $\mathbb{H}^2$ e $\mathcal{P}_{8g-4}$ é um polígono fundamental para Γ_{8g-4} . Γ_{8g-4} age de maneira propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Assim, o grupo Γ_{8g-4} é gerado por

Φ_{8g-4} , ou seja, pelas isometrias de emparelhamento é um grupo fuchsiano e o espaço órbita dado pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}}$ é uma superfície compacta .

Γ_{8g-4} é subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ e este por sua vez é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius que preservam a orientação, daí temos que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}}$ é orientável.

Ao emparelharmos as arestas, ou seja, ao “colarmos” duas a duas, teremos sobre a superfície um grafo onde o número de ciclos de vértices me dará o número de vértices e o número arestas do grafo é a metade do número de lados do polígono.

Se g' é o gênero da superfície compacta orientável vinda da identificação das arestas do polígono, pela identidade de Euler temos que

$$\begin{aligned} \frac{8g-4}{4} - \frac{8g-4}{2} + 1 &= 2 - 2g' \Rightarrow (2g-4) - (4g-2) + 1 = 2 - 2g' \Rightarrow -2g + 2 = 2 - 2g' \\ &\Rightarrow g' = g \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Vejamos alguns exemplos que construímos para polígonos com 60, 36, 20 e 12 arestas.

Exemplo 6.1. Considere um polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{60}$ com arestas $\tau_1, \dots, \tau_{20}$ e vértices $v_1, \dots, v_{20}$. O emparelhamento Φ_{60}^2 gera uma superfície compacta orientável de gênero 8. De fato, pela expressão 6.2 temos que

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau_1) &= \tau_{22}, \gamma_{58}(\tau_{58}) = \tau_{23}, \gamma_{55}(\tau_{55}) = \tau_{24}, \gamma_{52}(\tau_{52}) = \tau_{25}, \\ \gamma_{49}(\tau_{49}) &= \tau_{26}, \gamma_{46}(\tau_{46}) = \tau_{27}, \gamma_{43}(\tau_{43}) = \tau_{28}, \gamma_{40}(\tau_{40}) = \tau_{29}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(\tau_3) &= \tau_{36}, \gamma_6(\tau_6) = \tau_{35}, \gamma_9(\tau_9) = \tau_{34}, \\ \gamma_{12}(\tau_{12}) &= \tau_{33}, \gamma_{15}(\tau_{15}) = \tau_{32}, \gamma_{18}(\tau_{18}) = \tau_{31}, \gamma_{21}(\tau_{21}) = \tau_{30}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4(\tau_4) &= \tau_{56}, \gamma_7(\tau_7) = \tau_{53}, \gamma_{10}(\tau_{10}) = \tau_{50}, \\ \gamma_{13}(\tau_{13}) &= \tau_{47}, \gamma_{16}(\tau_{16}) = \tau_{44}, \gamma_{19}(\tau_{19}) = \tau_{41}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_5(\tau_5) &= \tau_{57}, \gamma_8(\tau_8) = \tau_{54}, \gamma_{11}(\tau_{11}) = \tau_{51}, \\ \gamma_{14}(\tau_{14}) &= \tau_{48}, \gamma_{17}(\tau_{17}) = \tau_{45}, \gamma_{20}(\tau_{20}) = \tau_{42}. \end{aligned}$$

$$\gamma_{60}(\tau_{60}) = \tau_{38}$$

$$\gamma_{59}(\tau_{59}) = \tau_{37}$$

$$\gamma_2(\tau_2) = \tau_{39}$$

Obtemos assim os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{22}\}, \{\tau_{58}, \tau_{23}\}, \{\tau_{55}, \tau_{24}\}, \{\tau_{52}, \tau_{25}\}, \{\tau_{49}, \tau_{26}\}, \{\tau_{46}, \tau_{27}\}, \{\tau_{43}, \tau_{28}\}, \{\tau_{40}, \tau_{29}\}, \\ &\{\tau_3, \tau_{36}\}, \{\tau_6, \tau_{35}\}, \{\tau_9, \tau_{34}\}, \{\tau_{12}, \tau_{33}\}, \{\tau_{15}, \tau_{32}\}, \{\tau_{18}, \tau_{31}\}, \{\tau_{21}, \tau_{30}\}, \{\tau_4, \tau_{56}\}, \\ &\{\tau_7, \tau_{53}\}, \{\tau_{10}, \tau_{50}\}, \{\tau_{13}, \tau_{47}\}, \{\tau_{16}, \tau_{44}\}, \{\tau_{19}, \tau_{41}\}, \{\tau_5, \tau_{57}\}, \{\tau_8, \tau_{54}\}, \{\tau_{11}, \tau_{51}\} \\ &\{\tau_{14}, \tau_{48}\}, \{\tau_{17}, \tau_{45}\}, \{\tau_{20}, \tau_{42}\}, \{\tau_{60}, \tau_{38}\}, \{\tau_{59}, \tau_{37}\}, \{\tau_2, \tau_{39}\} \end{aligned}$$

(Figura 6.1)

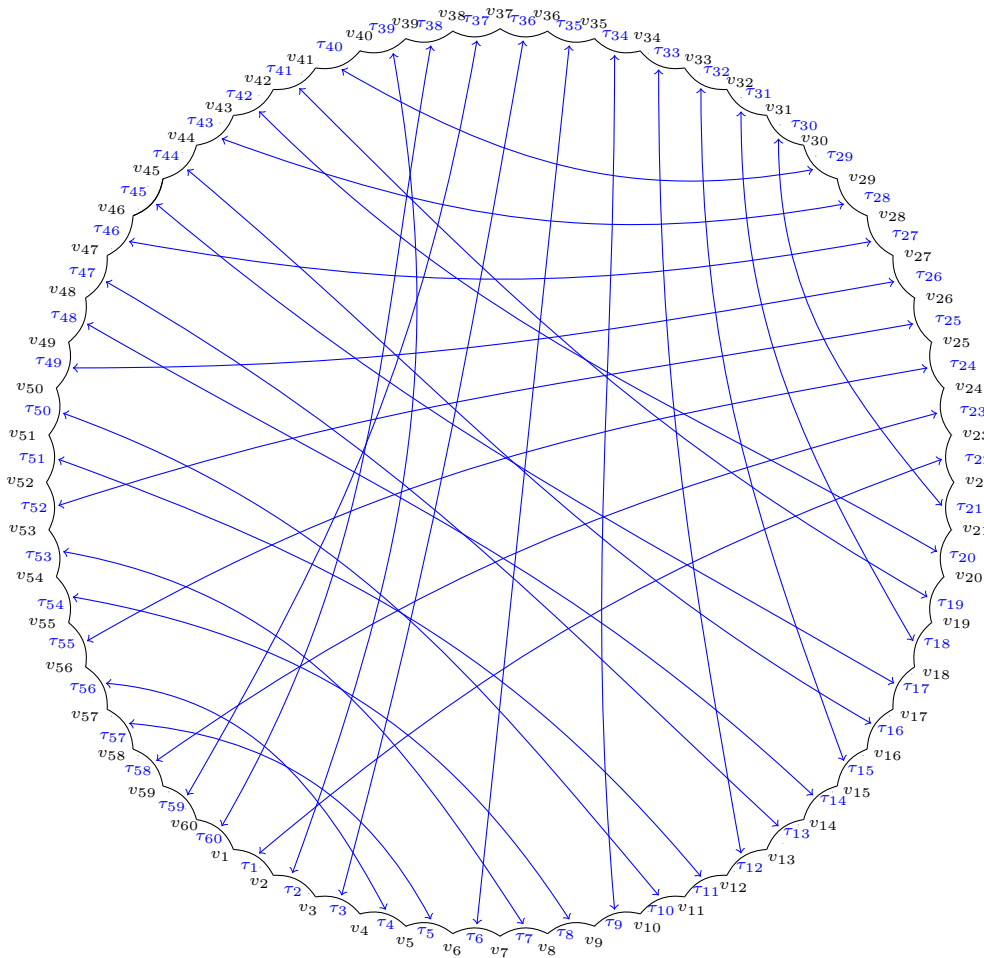


Figura 6.1: Polígono hiperbólico de 60 arestas com emparelhamento Φ_{60}^2 .

Dessa forma, temos o emparelhamento

$$\begin{aligned} \Phi_{60}^2 = & \{ \gamma_1, \gamma_{58}, \gamma_{55}, \gamma_{52}, \gamma_{49}, \gamma_{46}, \gamma_{43}, \gamma_{40}, \gamma_3, \gamma_6, \gamma_9, \gamma_{12}, \gamma_{15}, \gamma_{18}, \\ & \gamma_{21}, \gamma_4, \gamma_7, \gamma_{10}, \gamma_{13}, \gamma_{16}, \gamma_{19}, \gamma_5, \gamma_8, \gamma_{11}, \gamma_{17}, \gamma_{20}, \gamma_{60}, \gamma_{59}, \gamma_2 \} \end{aligned}$$

formado pelas identificações de arestas do polígono $\mathcal{P}_{60}$, que foram obtidas pela regra $\mathcal{K}_{8g-4}^2$.

Tal emparelhamento nos fornecem os seguintes ciclos de vértices:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{v_1, v_{38}, v_{59}, v_{23}\} \\ C_2 &= \{v_2, v_{22}, v_{30}, v_{40}\} \\ C_3 &= \{v_3, v_{39}, v_{60}, v_{37}\} \\ C_4 &= \{v_4, v_{36}, v_6, v_{57}\} \\ C_6 &= \{v_7, v_{35}, v_9, v_{54}\} \\ C_8 &= \{v_{10}, v_{34}, v_{12}, v_{51}\} \\ C_{10} &= \{v_{13}, v_{33}, v_{15}, v_{48}\} \\ C_{12} &= \{v_{16}, v_{32}, v_{18}, v_{45}\} \\ C_{14} &= \{v_{19}, v_{31}, v_{21}, v_{42}\} \\ C_5 &= \{v_5, v_{56}, v_{24}, v_{58}\} \\ C_7 &= \{v_8, v_{53}, v_{25}, v_{55}\} \\ C_9 &= \{v_{11}, v_{50}, v_{26}, v_{52}\} \\ C_{11} &= \{v_{14}, v_{47}, v_{27}, v_{49}\} \\ C_{13} &= \{v_{17}, v_{44}, v_{28}, v_{46}\} \\ C_{15} &= \{v_{20}, v_{41}, v_{29}, v_{43}\} \end{aligned}$$

Exemplo 6.2. Seja $\mathcal{P}_{36}$ um polígono hiperbólico com arestas $\tau_1, \dots, \tau_{36}$ e vértices $v_1, \dots, v_{36}$. O emparelhamento Φ_{36}^1 gera uma superfície compacta orientável de gênero 5. De fato, pela expressão 6.1 temos que

$$\gamma_1(\tau_1) = \tau_{34}, \gamma_2(\tau_2) = \tau_{31}, \gamma_3(\tau_3) = \tau_{28}, \gamma_4(\tau_4) = \tau_{25},$$

$$\gamma_5(\tau_5) = \tau_{22}, \gamma_6(\tau_6) = \tau_{19}, \gamma_7(\tau_7) = \tau_{16}, \gamma_8(\tau_8) = \tau_{13}.$$

$$\gamma_{20}(\tau_{20}) = \tau_{26}, \gamma_{17}(\tau_{17}) = \tau_{29}, \gamma_{14}(\tau_{14}) = \tau_{32},$$

$$\gamma_{21}(\tau_{21}) = \tau_{27}, \gamma_{18}(\tau_{18}) = \tau_{30}, \gamma_{15}(\tau_{15}) = \tau_{33},$$

$$\gamma_{36}(\tau_{36}) = \tau_9, \gamma_{35}(\tau_{35}) = \tau_{12},$$

$$\gamma_{10}(\tau_{10}) = \tau_{23}$$

$$\gamma_{11}(\tau_{11}) = \tau_{24}$$

Obtemos assim os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{34}\}, \{\tau_2, \tau_{31}\}, \{\tau_3, \tau_{28}\}, \{\tau_4, \tau_{25}\}, \{\tau_5, \tau_{22}\}, \{\tau_6, \tau_{19}\}, \{\tau_7, \tau_{16}\}, \{\tau_8, \tau_{13}\}, \\ & \{\tau_{20}, \tau_{26}\}, \{\tau_{17}, \tau_{29}\}, \{\tau_{14}, \tau_{32}\}, \{\tau_{21}, \tau_{27}\}, \{\tau_{18}, \tau_{30}\}, \{\tau_{15}, \tau_{33}\}, \{\tau_{36}, \tau_9\}, \{\tau_{35}, \tau_{12}\}, \\ & \{\tau_{10}, \tau_{23}\}, \{\tau_{11}, \tau_{24}\} \end{aligned}$$

(Figura 6.2)

Dessa forma, temos o emparelhamento

$$\Phi_{36}^2 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_{20}, \gamma_{17}, \gamma_{14}, \gamma_{21}, \gamma_{18}, \gamma_{15}, \gamma_{35}, \gamma_{35}, \gamma_{10}, \gamma_{11}\}$$

formado pelas identificações de arestas do polígono $\mathcal{P}_{36}$, que foram obtidas pela regra $\mathcal{K}_{8g-4}^1$.

Tal emparelhamento nos fornecem os seguintes ciclos de vértices:

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{25}, V_{16}, V_7\} \\ C_{V_2} &= \{V_2, V_{15}, V_{26}, V_{24}\} \\ C_{V_3} &= \{V_3, V_{20}, V_{36}, V_{14}\} \\ C_{V_4} &= \{V_4, V_{34}, V_6, V_{19}\} \\ C_{V_6} &= \{V_7, V_{31}, V_9, V_{18}\} \\ C_{V_8} &= \{V_{10}, V_{28}, V_{12}, V_{17}\} \\ C_{V_5} &= \{V_5, V_{35}, V_{21}, V_{33}\} \\ C_{V_7} &= \{V_8, V_{32}, V_{22}, V_{30}\} \\ C_{V_9} &= \{V_{11}, V_{29}, V_{23}, V_{27}\} \end{aligned}$$

Exemplo 6.3. Seja $\mathcal{P}_{20}$ um polígono hiperbólico com arestas $\tau_1, \dots, \tau_{20}$ e vértices $v_1, \dots, v_{20}$. O emparelhamento Φ_{20}^5 gera uma superfície compacta orientável de gênero 3. De fato, pela expressão 6.5 temos que

$$\gamma_3(\tau_3) = \tau_{12}, \quad \gamma_6(\tau_6) = \tau_{11},$$

$$\gamma_4(\tau_4) = \tau_{14},$$

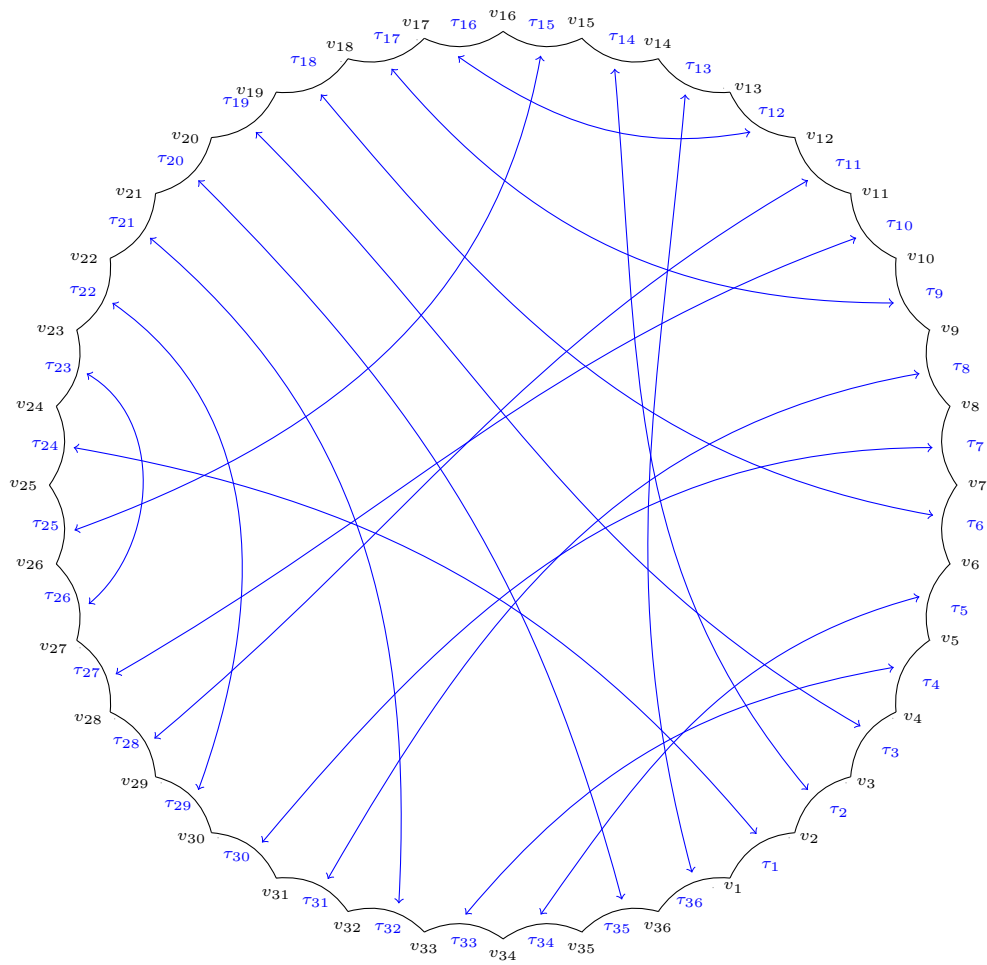


Figura 6.2: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^1 .

$$\gamma_5(\tau_5) = \tau_{15} ,$$

$$\gamma_{20}(\tau_{20}) = \tau_{13} , \gamma_{19}(\tau_{19}) = \tau_{16} ,$$

$$\gamma_{18}(\tau_{18}) = \tau_7 , \gamma_{17}(\tau_{17}) = \tau_{10} ,$$

$$\gamma_1(\tau_1) = \tau_8 , \gamma_2(\tau_2) = \tau_9 ,$$

Obtemos assim os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$\{\tau_1, \tau_8\}, \{\tau_2, \tau_9\}, \{\tau_3, \tau_{12}\}, \{\tau_4, \tau_{14}\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_6, \tau_{11}\}, \{\tau_{20}, \tau_{13}\}, \{\tau_{19}, \tau_{16}\}, \{\tau_{18}, \tau_7\}, \{\tau_{17}, \tau_{10}\}$
(Figura 6.3)

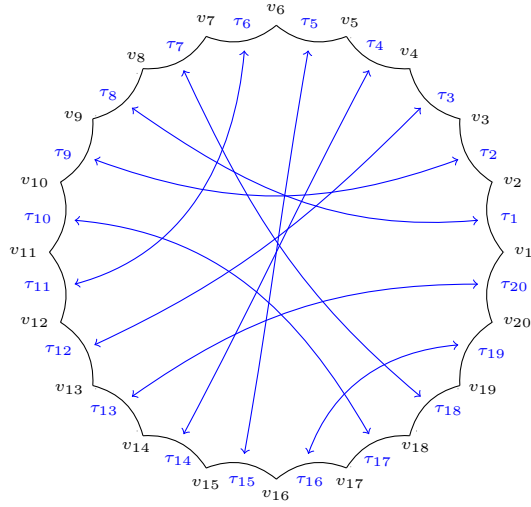


Figura 6.3: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^5 .

Dessa forma, temos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^5 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_{20}, \gamma_{19}, \gamma_{18}, \gamma_{17}\}$$

formado pelas identificações de arestas do polígono $\mathcal{P}_{20}$, que foram obtidas pela regra $\mathcal{K}_{20}^5$.

Tal emparelhamento nos fornecem os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{13}, V_3, V_9\}$$

$$C_{V_2} = \{V_2, V_8, V_{18}, V_{10}\}$$

$$C_{V_3} = \{V_7, V_{11}, V_{17}, V_{19}\}$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{12}, V_6, V_{15}\}$$

$$C_{V_6} = \{V_5, V_{14}, V_{20}, V_{16}\}$$

Exemplo 6.4. Considere um polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{12}$ com arestas $\tau_1, \dots, \tau_{12}$ e vértices $v_1, \dots, v_{12}$. O emparelhamento Φ_{12}^8 gera uma superfície compacta orientável de gênero 2. De fato, pela expressão 6.8 temos que

$$\gamma_1(\tau_1) = \tau_5 ,$$

$$\gamma_2(\tau_2) = \tau_6 ,$$

$$\gamma_{12}(\tau_{12}) = \tau_9 ,$$

$$\gamma_{10}(\tau_{10}) = \tau_7 ,$$

$$\gamma_3(\tau_3) = \tau_8 ,$$

$$\gamma_4(\tau_4) = \tau_{11} ,$$

Obtemos com isso os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$\{\tau_1, \tau_5\}, \{\tau_2, \tau_6\}, \{\tau_{12}, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_7\}, \{\tau_3, \tau_8\}, \{\tau_4, \tau_{11}\}$ (Figura 6.4)

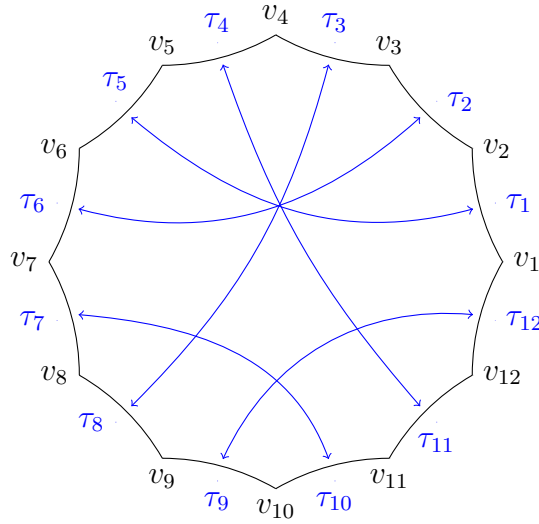


Figura 6.4: Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^8 .

Portanto, temos o emparelhamento

$$\Phi_{12}^8 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_{10}, \gamma_{12}\}$$

formado pelas identificações de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12}$, que foram obtidas pela regra $\mathcal{K}_{12}^8$.

Esse emparelhamento nos fornece os seguintes ciclos de vértices:

$$\begin{aligned}
C_{V_1} &= \{V_1, V_6, V_3, V_9\} \\
C_{V_2} &= \{V_2, V_7, V_{11}, V_5\} \\
C_{V_3} &= \{V_4, V_{12}, V_{10}, V_8\}
\end{aligned}$$

Considerações Finais

No presente trabalho obtemos novos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólico regulares com 12 arestas e ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$ e de polígonos hiperbólico regulares com 10 arestas e ângulos iguais a $\frac{2\pi}{5}$, relacionados às tesselações $\{8g - 4, 4\}$ e $\{20n - 10, 5\}$, respectivamente. Tais emparelhamentos dão origens a superfícies compactas orientadas de gênero g . Para o polígono hiperbólico de 12 arestas os emparelhamentos são construídos através dos caminhos fechados possíveis nos grafos quadrivalentes de 3 vértices e 6 arestas e no caso dos polígonos hiperbólicos de 10 lados, os emparelhamentos são obtidos dos caminhos fechados em grafos 5-valentes de 2 vértices e 5 arestas.

Na busca desses caminhos fechados, impomos três condições a se seguir

- (I) Não voltaremos imediatamente pela aresta que percorremos;
- (II) Não caminharemos pela aresta mais de uma vez em cada sentido;
- (III) Não fecharemos o caminho pela aresta que partimos inicialmente;

Nas etapas finais deste trabalho, percebemos que, se além dessas três condições considerarmos a seguinte condição;

- (IV) Se percorrermos duas arestas consecutivas não podemos retornar caminhando novamente (em sentido contrário) por estas mesmas arestas consecutivas;

evitaremos os casos dos emparelhamentos que não são 4-regulares.

Concluimos que existem 6 formas distintas de emparelhar as arestas de um polígono hiperbólico de 12 arestas e 6 formas distintas de emparelhar as arestas de um polígono de 10 arestas de forma que se obtenha uma superfície compacta orientada de gênero $g = 2$.

Apresentamos algumas generalizações de emparelhamentos de polígonos hiperbólicos regulares com $8g - 4$ arestas e ângulos iguais a $\frac{\pi}{2}$ vistos no Capítulo 6. Uma forma de se encontrar tais generalizações, é considerar uma “ponte” no grafo A , adicionando $2(g - 2)$ vértices e $4(g - 2)$ arestas para grafo A e o mesmo “padrão” de rotação do grafo, ou seja, a mesma maneira de percorrer o grafo para encontrar um caminho

fechado. É possível encontrar outras generalizações de emparelhamentos considerando a “ponte” nos grafos B e C e também, considerando uma rotação diferente na “ponte”. Para o polígono de $20n - 10$ arestas, considerando o caso em que $n = 1$, obtemos uma superfície de gênero $g = 2$. Considerando o $n = 2$, o gênero da superfície obtida passa a ser $g = 5$ e para $n = 3$, o gênero é $g = 11$. O que dificulta a generalização dos emparelhamentos para este caso.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, JAMES W. **Hyperbolic geometry**. 2.ed.[S.I.]:Springer Science & Business Media, 2005. 276 p.
- [2] BEARDON, ALAN F. **The geometry of discrete groups**. 1.ed. New York:Springer Science & Business Media, 1983. 340 p.
- [3] EVES, HOWARD. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas, SP. Editora Unicamp. 2011. 848 p.
- [4] FARIA, MERCIO BOTELHO. **Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos**. 93 p. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, 2001.
- [5] FIRER, Marcelo. **Grupos fuchsianos**. UNICAMP, Notas de Aulas, 2003. 173 p.
- [6] FULTON, WILLIAM. **Algebraic topology: a first course**. New York:Springer Science & Business Media, 2013. 430 p.
- [7] HIRSCH, MORRIS W. **Differential topology**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. 222 p.
- [8] JØRGENSEN, TROELS; NÄÄTÄNEN, MARJATTA. Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons. **The Quarterly Journal of Mathematics**, [S.I.], v. 33, n. 4, p. 451-461, April, 1982.
- [9] KATOK, SVETLANA. **Fuchsian groups**. University of Chicago press, [S.I.]. 1992. 175 p.
- [10] KINSEY, L. CHRISTINE. **Topology of surfaces**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. 281 p.
- [11] MUNKRES, JAMES R.. **Topology**. 2.ed.[S.I.]: Prentice Hall, 1999. 537 p.

- [12] NAKAMURA, Gou. Generic fundamental polygons for surfaces of genus three. **Kodai Mathematical Journal**, v. 27, n. 1, p. 88-104, 2004.
- [13] RAMSAY, ARLAN; RICHTMYER, ROBERT D. **Introduction to hyperbolic geometry**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. 288 p.
- [14] RODRIGUES, ANDERSON ARMANDO DE SOUZA. **Emparelhamentos de arestas do polígono hiperbólico associado à tesselação $8g-4$** , 4. 2017. 101 p. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2017.
- [15] SILVA, GHEYZA FERREIRA DA. **Emparelhamento de arestas de polígonos gerados por grafos**. 2011. 108 p. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2011.
- [16] THURSTON, WILLIAM P. **The geometry and topology of three-manifolds**; Lecture Notes from Princeton University 1978-80. Princeton University, 1979. 502 p.
- [17] WEST, DOUGLAS BRENT. **Introduction to graph theory**. 2.ed. Prentice hall. 2017. 588 p.
- [18] WHITE, ARTHUR T. **Graphs of groups on surfaces: interactions and models**. 1.ed. New York: Saul Lubkin. 2001. 363 p.

Apêndice

6.1 Conjuntos Localmente Finitos

Definição 6.1. Um subgrupo $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ é dito **discreto** se for um subespaço topológico com a topologia discreta.

Definição 6.2. Uma família $X_\alpha | \alpha \in A$ de subconjuntos de um espaço métrico X é dita **localmente finita** se para todo compacto $K \subseteq X$ o conjunto

$$\{\alpha \in A | X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

for finito.

Definição 6.3. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X . Dizemos que a ação de Γ é **propriamente descontínua** se para todo $x \in X$ a família $\{\{g(x)\} | g \in \Gamma\}$ for localmente finita.

O próximo resultado é válido para qualquer espaço topológico localmente compacto, ou seja, para espaços X tais que para todo $x \in X$ existe um compacto K com $x \in \text{int}(K)$. Para X localmente compacto a ação de Γ é propriamente descontínua se e somente se as órbitas $\Gamma(x)$ forem discretas e os estabilizadores γ_x forem finitos, como veremos a seguir:

Teorema 6.2. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X localmente compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A ação de Γ é propriamente descontínua.
2. Para todo $x \in X$ existe vizinhança coberta V_x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.
3. Todo ponto $x \in X$ possui vizinhança U_x tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica que $g(x) = x$.
4. Dado $K \subseteq X$ compacto, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.

Demonstração. (1 $\Rightarrow$ 2) Sendo a ação de Γ propriamente descontínua e X localmente compacto, as órbitas $\Gamma(x)$ são discretas e o estabilizador Γ_x de cada ponto é finito. Logo, dado $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola $B_\epsilon(x)$ não contém outro ponto da órbita $\Gamma(x)$. Logo, se tomarmos $V \in B_\epsilon/2(x)$ temos que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ implica que $g \in \Gamma$, e sendo este finito, isto só pode ocorrer para um número finito de elementos.

(2 $\Rightarrow$ 3) Sejam $x \in X$ e V_x vizinhança de x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$. Sejam $g_1, \dots, g_n \in \Gamma$ os elementos para os quais $g_i(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$. Seja $h_1, \dots, h_m = g_1, \dots, g_n \in \Gamma_x$ e consideremos o conjunto de pontos $h_1(x), \dots, h_n(x)$. Consideremos então $U_x \subset V_x$ tal que $U_x \cap h_1(x), \dots, h_n(x) = \emptyset$. Temos então que se $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica que $g(x) = x$.

(3 $\Rightarrow$ 4) A demonstração será feita por absurdo. Suponha que exista compacto K e sequência $(g_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de Γ tal que $g_n(K) \cap K \neq \emptyset$. Seja então $(x_n)_{n=1}^\infty$ sequência de elementos de X tal que $x_n \in K$ e $g_n x_n \in K$. Por propriedade de convergência a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge, digamos para x . Seja y ponto de acumulação da sequência $(g_n x)_{n=1}^\infty$. Seja então $\epsilon > 0$ e consideremos as bolas $B_\epsilon(x)$ e $B_{\epsilon/2}(y)$. Existem N_x e N_y inteiros tais que $x_n \in B_\epsilon(x)$ para $n > N_x$ e $g_n x \in B_{\epsilon/2}(y)$ para $n > N_y$. Tomemos então $N = \max N_x, N_y$ e temos que $g_N^{-1} g_n(x) \in B_\epsilon(x)$, para todo $n \leq N$.

(4 $\Rightarrow$ 1) Assumindo 4 devemos demonstrar que as órbitas de Γ são discretas e os estabilizadores finitos. Os estabilizadores são finitos pois os conjuntos $K_x = x$ são compactos e $g(K_x) \cap K_x = \{x\}$ é equivalente a termos $g \in \Gamma_x$. Para provarmos que as órbitas são discretas, consideremos um ponto $x \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B_\epsilon(x)}$ seja compacta. Temos então que existe apenas um número finito de elementos $g_1, \dots, g_n$ de Γ tais que $g_i(\overline{B_\epsilon(x)}) \cap \overline{B_\epsilon(x)} \neq \emptyset$. Em particular existe apenas um número finito dentre estes, digamos $h_1, \dots, h_m$ para os quais $h_i(x) \in B_\epsilon(x)$ e $h_i(x) \neq x$, para $i = 1, \dots, m$. Podemos então separar $x, h_1(x), \dots, h_m(x)$ simultaneamente, ou seja, existem vizinhanças $V_0, V_1, \dots, V_m$ disjuntas entre si, cada uma delas contida em $B_\epsilon(x)$ tais que $x \in V_0, h_1(x) \in V_1, \dots, h_m(x) \in V_m$. Escolhemos agora $g \in \Gamma$ tal que $g(x) \notin B_\epsilon(x)$ e fazemos a mesma construção, tomando o cuidado de escolher bola fechada centrada em $g(x)$ que seja ao mesmo tempo compacta e não intercepte a bola $B_\epsilon(x)$ e assim sucessivamente construímos vizinhanças disjuntas entre si de cada ponto da órbita de x .

□

Observação 6.2. Com a equivalência dos itens 1 e 3 do teorema acima temos que Γ age de forma propriamente descontínua se e somente se a órbita de qualquer ponto for discreta.

6.2 Introdução à Topologia

Nesta seção veremos algumas definições e resultados de topologia necessárias para entendermos os próximos capítulos. Dois resultados importantes que veremos é a identidade de Euler, que nos dará condições para calcular o gênero de uma superfície compacta, e que o espaço quociente $\frac{X}{\Gamma}$ é uma superfície sempre que a ação de Γ for livre e propriamente descontínua. Começaremos com uma série de definições.

Definição 6.4. Uma n -célula é um conjunto cujo interior é homeomorfo ao disco n dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| < 1\}$ com a propriedade adicional de que sua vizinhança ou fronteira deve ser dividida em um número de células de dimensão menor, chamadas faces na n -célula. Escrevemos $\sigma < \tau$ se σ é uma face de τ .

1. Uma 0-célula é homeomorfo a um ponto A .
2. Uma 1-célula é homeomorfo a um segmento de reta $a = AB$, se $A < a, B < a$.
3. Uma 2-célula é homeomorfo a um polígono (frequentemente um triângulo), tal que $\sigma = \triangle ABC$, e então $AB, BC, AC < \sigma$. Note que $A < AB < \sigma$, e portanto $A < \sigma$.
4. Uma 3-célula é homeomorfo a um poliedro (frequentemente um tetraedro), tendo polígonos, arestas, e vértices como faces.

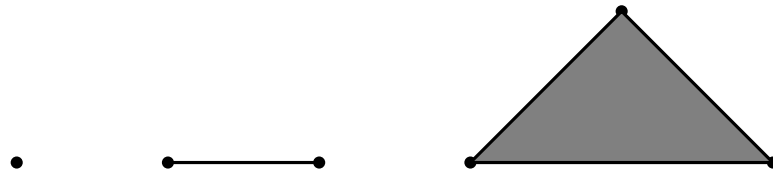


Figura 6.5: 0-célula, 1-célula, e 2-células.

Note que as faces de uma n -célula são células de dimensão menor: os pontos de uma 1-célula ou aresta são 0-células, a fronteira de uma 2-célula de um polígono consiste de arestas (1-células) e vértices (0-células), etc (Ver Figura 6.2). A união destas células forma um complexo.

Definição 6.5. Seja K um complexo. A **característica de Euler** de K é

$$\mathcal{X}(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-célula}) - \#(3\text{-célula}) \pm \dots$$

Para um 2-complexo, seja $f = \#\{\text{faces}\}$, $a = \#\{\text{arestas}\}$ e $v = \#\{\text{vértices}\}$ então a característica de Euler pode ser escrita como

$$\mathcal{X}(K) = v - a + f.$$

Definição 6.6. Uma **bi-variedade** é um espaço topológico conexo na qual todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um disco unitário aberto do $\mathbb{R}^2$. Tal vizinhança é chamada uma bi-célula.

Definição 6.7. Uma **superfície** é uma bi-variedade conexa.

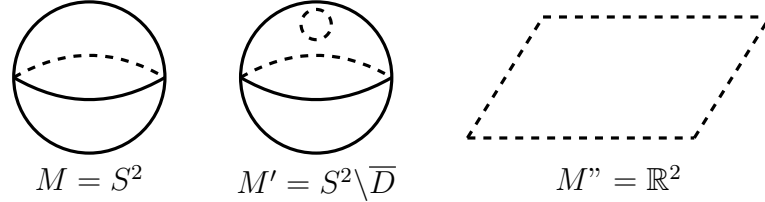


Figura 6.6: Exemplos superfícies.

Definição 6.8. Seja M uma bi-variedade. M é dito ser **orientável** se, todo caminho (curva fechada e simples) C em M , preserva um sentido horário de rotação quando caminhamos sobre C , isto é, se for possível escolher um vetor normal unitário n em cada ponto de M de modo que n varie continuamente sobre M . Caso contrário, M é não-orientável.

Existe uma relação entre a característica de Euler e o gênero de uma superfície, quando esta é compacta e orientável, como veremos a seguir

Teorema 6.3. Seja M uma superfície compacta orientável, então $\chi(M) = 2 - 2g$.

Com isto, conseguimos então calcular o gênero de uma superfície sabendo a característica de Euler dela.

Veremos agora algumas definições e resultados que nos garantem que o espaço quociente X/Γ é uma superfície sempre que a ação de Γ for livre e propriamente descontínua.

Definição 6.9. Considere a ação

$$\begin{aligned} \Gamma \times X &\rightarrow X \\ (T, x) &\mapsto T(x) \end{aligned}$$

de um grupo Γ de homeomorfismos de um espaço topológico X . Diremos que a ação de Γ é **livre** se $T(x) = x$ para algum $x \in X$ se, e somente se, $T = Id$.

Definição 6.10. Uma aplicação contínua $P : \tilde{X} \rightarrow X$ entre espaços topológicos conexos por caminhos é uma **aplicação de recobrimento** se todo ponto $x \in X$

possuir vizinhança aberta U tal que $P^{-1}(U)$ seja união disjunta de abertos conexos, cada um deles homeomorfo a U . Neste caso, chamamos $\tilde{X}$ de espaço de recobrimento.

Definição 6.11. Um espaço topológico X é **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e toda aplicação $f : S^1 \rightarrow X$ estende-se continuamente ao disco $D = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$.

Definição 6.12. Um **recobrimento universal** é um recobrimento $p : X \rightarrow Y$ com X simplesmente conexo.

Observação 6.3. Um recobrimento universal cobre qualquer outro recobrimento.

Podemos então enunciar o teorema que garante, sob algumas condições, a equivalência da projeção $P : X \rightarrow X/\Gamma$ ser aplicação de recobrimento com a ação de Γ ser livre e propriamente descontínua.

Teorema 6.4. Seja X uma variedade Hausdorff e Γ um grupo agindo em X como homeomorfismos. Então, o espaço quociente X/Γ é uma variedade Hausdorff e a projeção $P : X \rightarrow X/\Gamma$ é uma aplicação de recobrimento se, e somente se, a ação de Γ em X for livre e propriamente descontínua.