

WALTER ANDRADE DE FREITAS

SOLUÇÕES TIPO-VÓRTICE DE SPIN NA FITA DE  
MÖBIUS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL

2009

WALTER ANDRADE DE FREITAS

**SOLUÇÕES TIPO-VÓRTICE DE SPIN NA FITA DE  
MÖBIUS**

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa, como  
parte das exigências do Programa de  
Pós-Graduação em Física Aplicada, para  
obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 31 de março de 2009.

---

Prof. Afrânio R. Pereira  
(Coorientador)

---

Prof. Luiz Cláudio  
(Coorientador)

---

Prof. Ricardo Reis Cordeiro

---

Prof. Daniel Heber Theodoro Franco

---

Prof. Winder A. de Moura Melo  
(Orientador)

À Deus, pois sem Ele nada poderia ter sido feito. À minha esposa Cristina e ao meu filho Gustavo, e aos meus pais José e Maria (in memória) que sempre estiveram do meu lado, e aos meus amigos que sempre torceram por mim.

*Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo  
silêncio - e eis que a verdade se me revela.*

*Albert Einstein*

# Agradecimentos

- A Deus, por tudo que fez por mim.
- Aos meus pais.
- A minha esposa e ao meu filho.
- Aos profs. Winder A. Moura Melo, Luiz Claudio Pereira e Afrânio Rodrigues Pereira, pela orientação e companherismo.
- Ao doutorando Vagson Luiz Carvalho pelo auxílio, incentivo e companherismo.
- Aos profs. do departamento de física da UFV por estes anos de aprendizado e convívio.
- Aos funcionários pelo belo serviço prestado.
- Aos colegas de curso pelo apoio e ajuda nos momentos difíceis.
- A todos os meus amigos, que sempre estiveram em Viçosa quanto os que tiveram que partir de todos guardo boas lembranças e saudades.
- À Capes pelo apoio financeiro.
- À UFV pela infraestrutura que oferece aos seus alunos e funcionários.

# Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Conceitos Fundamentais . . . . .	2
1.1.1 Magnetismo . . . . .	2
1.1.2 Parâmetro de ordem e defeitos topológicos . . . . .	8
<b>2 Considerações Gerais</b>	<b>13</b>
2.1 Motivação . . . . .	13
2.2 O modelo de Heisenberg . . . . .	17
2.3 A superfície da fita de Möbius . . . . .	18
<b>3 Modelo de Heisenberg e soluções topológicas na fita de Möbius</b>	<b>23</b>
3.1 O modelo de Heisenberg na fita de Möbius . . . . .	23
3.2 Soluções tipo-vórtice no Modelo do Rotor Planar . . . . .	25
<b>4 Soluções Assintóticas para o Modelo do Rotor Planar</b>	<b>28</b>
4.1 Casos Limites . . . . .	28
4.2 Solução numérica para o MRP . . . . .	30
4.3 Casos limites - Resultados Numéricos . . . . .	32
<b>Conclusões gerais e perspectivas</b>	<b>42</b>
<b>A Aproximação contínua do modelo de Heisenberg</b>	<b>44</b>

<b>B</b>	<b>Alguns conceitos de Homotopia</b>	<b>47</b>
<b>C</b>	<b>Análise do parâmetro <math>k</math></b>	<b>50</b>
<b>D</b>	<b>Método de diferenças finitas</b>	<b>53</b>
	D.1 Soluções do MRP para a superfície toroidal . . . . .	54
	D.2 Algoritmo . . . . .	57
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>

# Lista de Figuras

1.1	Material diamagnético . . . . .	4
1.2	Material paramagnético . . . . .	4
1.3	<b>a)</b> Representação de um cristal com magnetização resultante nula,embora; cada domínio esteja magnetizado (Fonte: Belo, Andrade, 2007,p. 3); <b>b)</b> Imagens de domínios magnéticos gerados por Microscopia de Força Magnética(MFM)	6
1.4	Representação dos arranjos espaciais dos spins atômicos nos casos: ferromagnético; antiferromagnético; e ferrimagnético, à direita. (Retirado de <a href="http://www.geocities.com/castanhola2000/figura.htm">http://www.geocities.com/castanhola2000/figura.htm</a> ) . . . . .	7
1.5	Remoção de uma singularidade matemática por um corte na origem do material (Chaikin, (195),p.496) . . . . .	9
1.6	Vórtice com carga topológica $Q = +1$ (Fonte: Belo, Andrade,2007,p.28). . . . .	10
1.7	Spins planares em duas dimensões com carga topológica <b>a)</b> -1 <b>b)</b> +2 <b>c)</b> -2 (Fonte: Chaikin, (195), p.497). . . . .	10
1.8	Sóliton com carga topológica $Q = +1$ (Fonte: Belo, Andrade, 2007,p.23). . . . .	12
2.1	Uma parede de domínio de $180^\circ$ , separando dois domínios cujas magnetizações têm sentidos opostos. Essas paredes têm espessura da ordem de 100 a 1000 nanômetros (Fonte:Belo, Andrade,2007,p.3). . . . .	13
2.2	Fibras de $NbSe_3$ sintetizadas em três tipos de topologia . . . . .	15
2.3	<b>a)</b> O retângulo $ABCD$ pode ser unido de maneira a formar a fita de Möbius. Quando o lado $AB$ é identificado com o lado $CD$ , nós obtemos a superfície de Möbius como mostrado em <b>b)</b> . . . . .	19
2.4	Deslocamento do segmento $AB$ em torno do eixo $z$ , com uma rotação de $\frac{\phi}{2}$ quando o segmento descreve um ângulo de $\phi$ em torno de $z$ , também obtemos a fita de Möbius. . . . .	19
2.5	Gráfico de $k$ em função de $r$ x $\phi$ com $L = 8, R = 10$ . . . . .	22

3.1	a) Simulação para a fita de Möbius ferromagnética. b) Parede de domínio no estado ferromagnético. c) Eixo de coordenadas local [21]. . . . .	27
4.1	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ para soluções tipo-vórtice $\Phi(\phi) = \phi$ e para o caso da solução Elíptica. Note que a solução Elíptica difere por um termo adicional em $A \sin \phi$ . . . . .	30
4.2	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ . O resultado linear (linha contínua) é o gráfico para solução tipo-vórtice dada por $\Phi(\phi) = \phi + \pi/2$ e os pontos o resultado numérico para uma fita de largura muito pequena, nesse caso, $L = 0.1$ e $R = 10$ . . . . .	32
4.3	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ . O resultado linear (linha contínua) é o gráfico para solução tipo-vórtice dada por $\Phi(\phi) = \phi + \pi/2$ e os pontos o resultado numérico para uma fita de raio muito grande, nesse caso, $L = 6$ e $R = 10^4$ . . . . .	33
4.4	Configuração de vórtice sobre a fita de Möbius para o caso de raio grande, nesse caso $L = 6$ e $R = 10^4$ . . . . .	33
4.5	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ para soluções tipo-vórtice através de análise numérica. O gráfico linear é o caso $\Phi(\phi) = \phi$ e os pontos o resultado numérico para $r$ variando de $-1000$ a $1000$ esse intervalo foi dividido em 800 partes . . . . .	34
4.6	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ , o gráfico linear (linha preta) é o caso para solução-tipo vórtice a curva em azul é o gráfico para função elíptica e os pontos são resultados numéricos com $r$ variando de $-1000$ à $1000$ esse intervalo foi dividido em 800 partes, a escala do gráfico foi alterada para melhor visualização. . . . .	35
4.7	Gráfico de $\Phi(\phi) \times \phi$ para soluções tipo-vórtice. O gráfico linear é o caso $\Phi(\phi) = \phi$ e os pontos, os resultados numéricos para $r$ variando de $-3$ a $3$ e $R = 7$ . . . . .	36
4.8	Análise da variação de $\Phi(\phi)$ para os casos de uma fita com $L = 15$ e $R =$ a) 8, b) 12 e c) 20 respectivamente. à medida que o raio aumenta temos uma solução mais próxima da solução tipo-vórtice. . . . .	37

4.9	Análise da variação de $\Phi(\phi)$ para os casos de uma fita com $L = 15$ e <b>a)</b> $R = 8$ , <b>b)</b> $R = 12$ e <b>c)</b> $R = 20$ respectivamente, Os gráficos foram ampliados para melhor análise da variação de $\Phi$ com $r$ , o gráfico linear e para solução tipo-vórtice. à medida que o raio aumenta temos uma solução mais próxima da solução tipo-vórtice. O que fica muito claro quando comparado o gráfico <b>(a)</b> com o <b>(c)</b> . . . . .	38
4.10	Configuração de vórtice para os casos de uma fita com $L = 15$ e <b>a)</b> $R = 8$ , <b>b)</b> $R = 12$ e <b>c)</b> $R = 20$ respectivamente. . . . .	39
4.11	Análise da variação da energia para os casos <b>a)</b> Energia para a fita de Möbius quando a razão $R/r = 1$ <b>b)</b> Energia variando com raio da fita de Möbius <b>c)</b> Energia variando com a largura da fita. . . . .	41
4.12	Variação da energia com a Largura para diferentes raios da fita de Möbius <b>a)</b> (Verde) $R = 8$ , <b>b)</b> (Azul) $R = 18$ , <b>c)</b> (Amarelo) $R = 28$ , <b>d)</b> (Vermelho) $R = 38$ . . . . .	41
A.1	Rede quadrada de spins indicando os quatro sítios que interagem com o sítio genérico $i$ . . . . .	44
C.1	<b>a)</b> Gráfico de $k$ em função de $rx\phi$ com $L = 8, R = 10$ . <b>b)</b> Gráfico de $\frac{1}{\sqrt{k}}$ em função de $rx\phi$ com $L = 8, R = 10$ . . . . .	50
C.2	<b>a)</b> Variação do parâmetro $k$ em função de $r$ e de $\phi$ para $R = 8000$ . <b>b)</b> Variação de $1/\sqrt{k}$ em função de $r$ e $\phi$ para $R = 8000$ . . . . .	51
C.3	<b>a)</b> Variação do parâmetro $1/\sqrt{k}$ em função de $r$ . <b>b)</b> Variação do parâmetro $1/\sqrt{k}$ em função de $\phi$ . Em <b>(a)</b> foram atribuídos vários valores para $\phi$ em seguida plotados os gráficos de $1/\sqrt{k}xr$ . Em <b>(b)</b> foram atribuídos vários valores de $r$ e plotado o valor de $1/\sqrt{k}x\phi$ . . . . .	52
D.1	Parametrização do toro em termos de $\theta$ e $\phi$ com $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ . . . . .	55
D.2	Variação de $\Phi$ em função de $\phi$ para o caso toroidal. . . . .	56
D.3	Configuração de spins na superfície toroidal. . . . .	56

# Resumo

FREITAS, Walter Andrade de, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Março de 2009. **Soluções tipo-vórtice de spins na fita de Möbius.** Orientador: Winder Alexander de Moura-Melo. Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Luiz Cláudio Pereira

O modelo de Heisenberg, descrevendo a interação de troca entre spins clássicos, é investigado na superfície da fita de Möbius. Excitações do tipo-vórtice, caracterizadas por cargas topológicas não-triviais, são estudadas como soluções estáticas no regime de rotor planar. Além da carga, discute-se também a energética associada a tal solução.

# Abstract

FREITAS, Walter Andrade de, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2009.  
**Spin vortex-like solutions on a Möbius Strip.** Adviser: Winder Alexander de Moura-Melo. Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Luís Cláudio Pereira

We consider the classical version of the Heisenberg exchange model on the surface of a Möbius strip. Vortex-like excitations, carrying non-trivial charge (topological winding number), are shown to emerge as static solutions in the planar rotator regime. Besides such a charge, attention is also paid to discuss about its energetics.

# Capítulo 1

## Introdução

Na abordagem do problema de sistemas magnéticos de baixas dimensões (1D, 2D) um modelo amplamente utilizado é o modelo sigma não-linear de Heisenberg ( $NLSM$ ) que trata das interações de troca entre os spins. Este modelo permite o estudo das configurações de equilíbrio de spins em geometrias não-triviais, tais como cilindros, elipsóides, toros entre outras. De maneira sucinta o modelo é construído levando em conta a interação de troca de spins eletrônicos entre os primeiros vizinhos dos sítios de uma rede de átomos. No limite contínuo da rede, considerando-se o limite onde os espaçamentos entre vizinhos tendam a zero, para átomos de spins grandes (maior que  $5/2$ ) obtemos o modelo sigma não-linear, que permite estudar essas configurações de spins como campos definidos sobre uma dada geometria.

Neste trabalho, vamos estudar o modelo de Heisenberg numa geometria bastante interessante, com característica de ser não-orientável, que é a fita (ou superfície) de Möbius. Para tanto, este trabalho será organizado como segue: no capítulo 1, faremos uma breve revisão sobre conceitos fundamentais de magnetismo e topologia, aplicada a sistemas físicos. No capítulo 2, faremos uma descrição da superfície de Möbius, explicitando algumas de suas propriedades geométricas e topológicas, em especial aquelas úteis e importantes ao nosso estudo bem como, uma revisão bibliográfica, abordando resultados recentes. No capítulo 3, estudaremos o modelo de Heisenberg (anisotrópico) e sua aplicação para o suporte em questão, derivando as equações de movimento para o campo de spins. Já no capítulo 4, abordaremos as soluções analíticas encontradas, juntamente com os resultados numéricos propostos para o problema. O capítulo 5 é dedicado às conclusões e perspectivas. Na sequência, encontram-se alguns apêndices, os quais procuram abordar temas mais técnicos, que podem ser suprimidos por leitores(as) que conhecem as técnicas ali descritas.

# 1.1 Conceitos Fundamentais

## 1.1.1 Magnetismo

No estudo de fenômenos magnéticos existem três quantidades importantes que devem ser analisadas: o campo magnético  $\vec{H}$ , a indução magnética  $\vec{B}$  e a magnetização  $\vec{M}$  e, no caso de estruturas finitas, a energia magnetostática será relevante. No vácuo, a indução magnética é diretamente proporcional ao campo magnético, ou seja,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1.1)$$

onde a constante de proporcionalidade,  $\mu_0$ , é a permeabilidade magnética do vácuo. No vácuo, as quantidades  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  estão relacionadas com a densidade de corrente  $\vec{J}$ . As intensidades dessas quantidades podem ser obtidas pela relação de Biot-Savart (no regime não-relativístico:  $v/c \ll 1$ ):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x', \quad (1.2)$$

onde a integração é feita sobre toda a região da corrente.

Na presença de um meio magnético, o meio responde à presença do campo magnético com uma magnetização,  $\vec{M}$ , que contribui tanto para  $\vec{B}$  quanto para  $\vec{H}$ . Microscopicamente, a magnetização tem origem no momento magnético associado ao momento angular intrínseco dos elétrons (spin) e é dada por:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{\mu}_i. \quad (1.3)$$

Pode-se notar que, para haver magnetização é necessário que existam momentos magnéticos  $\vec{\mu}_i$  e que na média, apontem na mesma direção. Isso ocorre no regime de baixas temperaturas ou, se um campo externo atuar sobre o sistema[1]. A altas temperaturas a energia do sistema magnético é minimizada para o sistema em um estado desordenado uma vez que maximizando a entropia do sistema iremos minimizar a energia livre ( $F = \langle H \rangle - TS$ ). A temperatura crítica em que o sistema passa de um estado ordenado para um estado desordenado é chamada de temperatura de Curie ( $T_c$ )

O momento magnético de um átomo livre é obtido a partir de três fontes principais: o spin do elétron, seus momentos angulares orbitais e a mudança no momento induzido por um campo magnético externo aplicado [2]. A relação entre o momento angular orbital e o momento magnético  $\vec{L}$  é dada por

$$\vec{\mu}_l = -g_l \frac{e}{2m} \vec{L}. \quad (1.4)$$

De maneira análoga, a relação entre o momento magnético intrínseco e o spin  $\vec{S}$  é dada por

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S}. \quad (1.5)$$

Na equação (1.4), tem-se a relação com o momento angular, onde  $g_l = 1$  é o fator  $g$  orbital e na equação (1.5), tem-se a relação com o momento angular intrínseco (*vetor de spin*), e  $g_s \approx 2$  é o fator  $g$  de spin. Nota-se que o momento de dipolo magnético de spin em relação ao momento angular de spin é duas vezes maior do que o momento de dipolo magnético orbital em relação ao momento angular orbital. De fato, os momentos angular e de spin formam o chamado momento angular total, que é dado por:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (1.6)$$

A relação entre  $\vec{J}$  e  $\vec{\mu}$  é dada por:

$$\vec{\mu} = g\mu_B \vec{J}, \quad (1.7)$$

onde  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  é uma unidade usual de momento magnético, chamada *magneton de Bohr*,  $m$  é a massa do elétron e  $g$  é o *fator de Landé*, dado por:

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (1.8)$$

Os materiais respondem de maneira diferente à aplicação de um campo magnético externo. A resposta a esse campo externo é medida pela suscetibilidade magnética por unidade de volume, denominada por  $\chi$ , que é uma grandeza adimensional definida como:

$$\chi = \frac{\mu_0 |\vec{M}|}{|\vec{B}|}. \quad (1.9)$$

De acordo com essa resposta, os materiais podem ser classificados como: diamagnéticos, paramagnéticos, antiferromagnéticos, ferromagnéticos e ferrimagnéticos.

Os materiais diamagnéticos apresentam suscetibilidade negativa e relativamente pequena. Todos os átomos são diamagnéticos, no entanto, tal diamagnetismo é camuflado nos casos em que existem dipolos magnéticos permanentes, ou seja, nos casos em que

alguma das "camadas" não esteja completamente preenchida. Alguns exemplos desses materiais são os gases nobres, He, Ne, Ar, Kr, Xe, e alguns sólidos como NaCl, KBr e LiF. Uma explicação clássica para o diamagnetismo pode ser obtida através da lei de Lenz: uma variação de campo magnético resulta numa corrente elétrica induzida que tende a se opor a esta variação, criando um campo oposto ao aplicado [3].

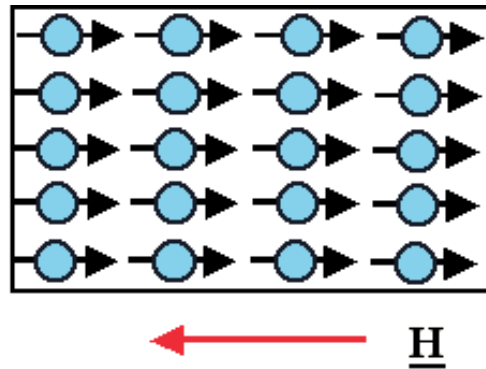


Figura 1.1: Material diamagnético na presença de campo externo, (Fonte: Belo, Andrade, 2007, p. 3)

Os materiais paramagnéticos são caracterizados por uma suscetibilidade positiva, que varia linearmente com o inverso da temperatura. Quando temos um meio magnético cujos átomos possuem elétrons desemparelhados pode ocorrer o aparecimento do paramagnetismo, já que os momentos de dipolos intrínsecos dos elétrons podem se orientar no sentido do campo magnético externo aplicado. Esta orientação, em geral, não é perfeita, uma vez que ela sofre a influência da temperatura do sistema, que tende a destruir o alinhamento. Materiais paramagnéticos não apresentam uma magnetização espontânea porque colisões térmicas tendem a desalinhar a ordem, tornando os momentos magnéticos atômicos distribuídos aleatoriamente [4].

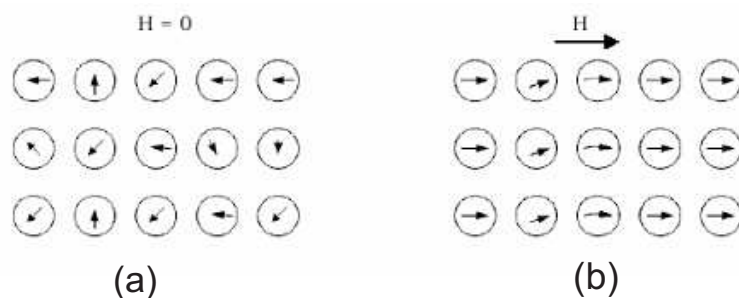


Figura 1.2: Material paramagnético. Em **a)**  $\vec{H} = 0$ . Em **b)**  $\vec{H} \neq 0$ , (Fonte: Belo, Andrade, 2007, p.3).

Na Figura (1.2), pode-se ver a diferença entre o comportamento de um material para-

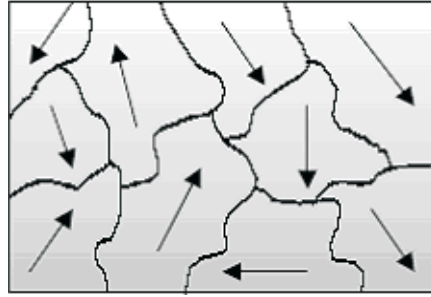
magnético na ausência e na presença de um campo magnético externo.

Materiais ferromagnéticos são materiais altamente utilizados pela indústria com inúmeras aplicações tecnológicas esses materiais apresentam alta magnetização quando submetidos a pequenos campos magnéticos e por isso a sua vasta utilização, por exemplo, na fabricação de produtos de gravação de dados. Esses materiais também possuem uma temperatura de transição ou temperatura crítica (temperatura de Curie), acima da qual assumem magnetização nula, uma vez que a energia de agitação térmica predomina sobre a energia de ordenamento, de modo que esse material passa a ter o comportamento de um paramagneto na ausência de um campo externo. Existem dois tipos de materiais ferromagnéticos: os doces, que apresentam uma magnetização que se comporta de forma praticamente linear com o campo externo (para campos fracos e moderados), e, quando o campo externo é desligado a magnetização também se anula; já os duros, retêm magnetização residual mesmo quando o campo externo é retirado. Tal retenção está intimamente ligada ao comportamento não-linear da magnetização com o campo externo nesses materiais. O nome dado a essa propriedade é histerese magnética, de grande relevância teórica e aplicada.

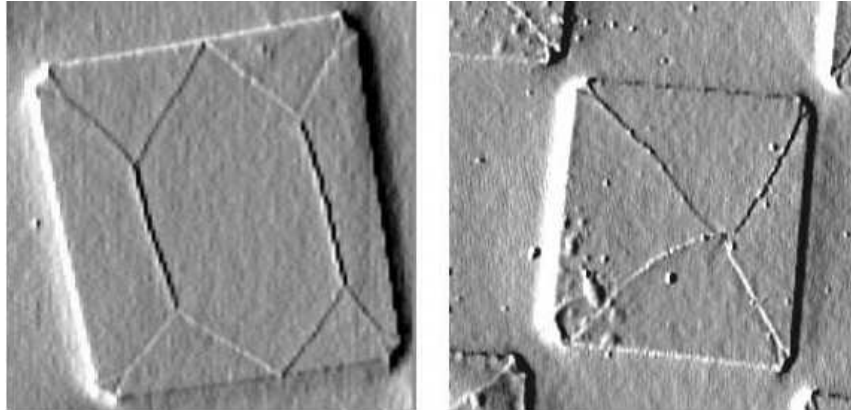
O mecanismo responsável pelo aparecimento do ferromagnetismo são as fortes interações eletrostáticas de origem quântica, chamadas interações de troca, que existem entre os elétrons do material [5]. No caso do ferro, por exemplo, dois elétrons na camada 3d tendem a ficar mais afastado se seus spins forem paralelos.

Nos materiais ferromagnéticos o favorecimento da situação em que os spins estão alinhados produz no material o aparecimento de regiões chamadas de domínios magnéticos. Essas regiões contêm um número muito grande de átomos nos quais os spins estão preferencialmente orientados numa certa direção, de modo que existe um momento magnético resultante. No entanto, a orientação dos domínios dentro do material são aleatórias, o que faz com que a magnetização macroscópica seja muito pequena, ou até mesmo nula antes de um campo magnético ser aplicado.

Quando um campo magnético externo é aplicado, os dipolos intrínsecos dos elétrons tendem a se orientar na direção e sentido do campo. No entanto, nas regiões internas dos domínios as interações quânticas entre os dipolos são muito fortes tornando muito difícil girar esses dipolos. Já nas fronteiras entre os domínios, conhecidas como paredes de domínios, os dipolos vizinhos não estão necessariamente paralelos, e as interações entre os dipolos nessas regiões são menores, o que permite que eles possam sofrer alterações em



(a)



(b)

Figura 1.3: **a)** Representação de um cristal com magnetização resultante nula, embora; cada domínio esteja magnetizado (Fonte: Belo, Andrade, 2007, p. 3); **b)** Imagens de domínios magnéticos gerados por Microscopia de Força Magnética (MFM)

seu alinhamento, o que faz com que os domínios orientados na direção e sentido do campo cresçam, incorporando spins dos domínios adjacentes, cuja orientação é desfavorável. Isso faz com que o material adquira uma magnetização apreciável, que depende do campo aplicado, até que se atinja certo valor máximo, chamado de magnetização de saturação. Por sua vez, o efeito de histerese está relacionado ao fato de que quando o campo magnético externo é retirado, os limites das paredes de domínio não retornam todos à sua posição de origem, o que pode ser ocasionado por imperfeições na rede cristalina, tais como impurezas e tensões. É importante notar que a temperatura do sistema influencia essa orientação, tornando-a mais aleatória com o aumento daquela. Ao se atingir a temperatura de Curie o ferromagneto passa a se comportar como paramagneto.

Já nos materiais ferrimagnéticos, os spins dos elétrons adjacentes se orientam antiparalelamente, contudo há uma magnetização residual, uma vez que os spins possuem magnitudes diferentes, como pode ser visto na figura (1.4) De qualquer modo, à temperaturas suficientemente altas, esses materiais perdem a “ímantação”, tornando-se paramagnéticos.

Os materiais antiferromagnéticos, também se caracterizam pela ausência de magnetização espontânea, não devendo ser confundidos, no entanto, com o caso paramagnético. A temperatura acima da qual não se aprecia o antiferromagnetismo se chama temperatura de Neel ( $T_N$ ). Acima desta, os materiais são tipicamente paramagnéticos.

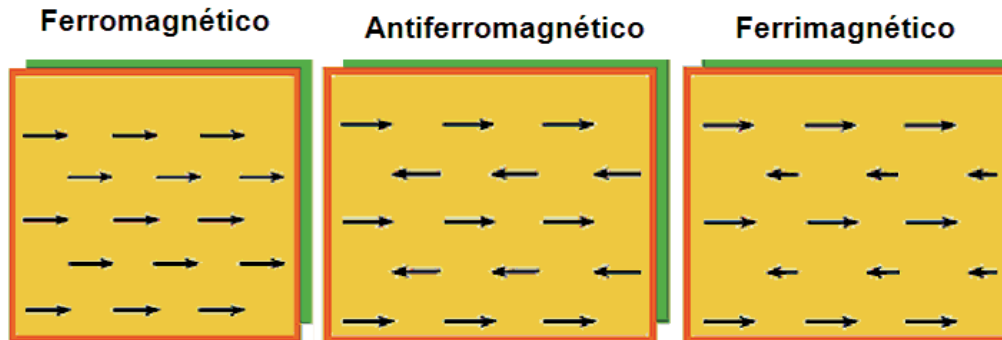


Figura 1.4: Representação dos arranjos espaciais dos spins atômicos nos casos: ferromagnético; antiferromagnético; e ferrimagnético, à direita. (Retirado de <http://www.geocities.com/castanhola2000/figura.htm>)

O primeiro modelo para explicar a magnetização foi proposto por Pierre Weiss no início do Século XX, o qual supunha que cada dipolo magnético de uma rede sofre a ação de um campo magnético efetivo criado pelos vizinhos. No entanto, a origem de tal “campo molecular” só foi compreendida anos mais tarde, com o advento da Mecânica Quântica Estatística, e está relacionado com a diferença entre as energias eletrostáticas de dois elétrons nas situações de spins paralelos e antiparalelos. Quando o estado de menor energia corresponde aos spins paralelos, tem-se o caso do ferromagnetismo. Porém, quando esse estado corresponde a spins antiparalelos, têm-se então o caso de materiais antiferromagnéticos (e ferrimagnéticos). Existem modelos teóricos para se descrever o ferromagnetismo e as transições de fase apresentadas por determinados materiais. Um dos modelos mais famosos e que é base dos modelos de magnetismo nos sólidos é descrito pelo Hamiltoniano de Heisenberg [1],

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) \quad (1.10)$$

Esse modelo fornece a energia de um sistema bidimensional devido a interações de troca entre os spins próximos (primeiros vizinhos); o parâmetro  $J$  é chamado de constante de acoplamento ou de troca. Dependendo se  $J < 0$  ou  $J > 0$ , o hamiltoniano descreve um sistema ferro ou antiferromagnético, respectivamente.  $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$  é o operador

de spin no sítio  $i$ . Em nosso trabalho esse modelo tem papel fundamental, pois é dele que se obtêm as soluções a serem analisadas: as denominadas excitações topológicas de spin. Essas surgem, por sua vez, como soluções clássicas de determinados modelos que apresentam dinâmica não-linear e possuem carga conservada e estabilidade, advindas de propriedades topológicas do modelo em questão. Por exemplo, configurações de spins que apresentam comportamento assintótico não-trivial (não se anulam no infinito) estão associadas a soluções que descrevem excitações não-lineares do tipo-vórtice e/ou do tipo-sóliton. As propriedades estruturais e dinâmicas dessas configurações são importantes para se “caracterizar” o sistema magnético.

### 1.1.2 Parâmetro de ordem e defeitos topológicos

A linguagem, métodos e teoremas de topologia algébrica, em particular a teoria de homotopia, têm sido usados no estudo de Teoria de Campos Relativísticos desde a década de 60, mas suas aplicações sistemáticas no estudo de defeitos topológicos em Física da Matéria Condensada começou a partir de 1974 com os trabalhos de Belavin e Polyakov sobre sólitons no modelo  $\sigma$  não-linear. Os conceitos abordados e a discussão que serão feitas nesta seção é uma abordagem resumida das refs. [6, 7, 8].

Para quase todos os nossos propósitos, um *meio ordenado* pode ser considerado como uma região do espaço descrito por uma função,  $f(\vec{r})$ , que atribui a cada ponto da região um parâmetro de ordem, cujos possíveis valores constituem o espaço interno (ou *parâmetro do espaço ordenado*)[6]. Quando o valor do parâmetro de ordem é o mesmo em todo o lugar, dizemos que o meio é *uniforme*, isto é,  $f(\vec{r})$  é constante. No geral, nós estamos interessados em meios não-uniformes, nos quais o parâmetro de ordem varie continuamente através do espaço, exceto, às vezes, em pontos isolados, linhas ou superfícies - são exatamente essas regiões de dimensões menores que constituem os defeitos topológicos a serem estudados [6]. São exemplos de meios ordenados, *spins planares*, cujo parâmetro de ordem é um vetor com magnitude fixa e contido num plano; o *hélio-4 superfluido*, cujo o parâmetro de ordem é um campo escalar complexo  $\psi(\vec{r})$  e os *spins ordinários*, cujo parâmetro de ordem é um vetor livre para apontar em qualquer direção o espaço interno é a superfície de uma esfera unitária tri-dimensional.

Para falar de defeito topológico é interessante que se tenha conhecimento de alguns conceitos de teoria de homotopia, tais como classes de homotopia, espaços simplesmente conexos e não-simplesmente conexos entre outros. Sendo assim uma breve revisão desse

assunto pode ser encontrado no apêndice (B), e sempre que preciso iremos recorrer aos conceitos ali descritos.

Podemos caracterizar um defeito topológico como sendo uma *região núcleo* de dimensão menor do que o espaço em estudo, no qual a ordem é destruída. Por exemplo, se o espaço é unidimensional um defeito topológico poderia ser um ponto onde o parâmetro de ordem não estivesse definido; uma singularidade também poderia ser uma linha se o espaço fosse bidimensional e assim por diante. No caso do modelo XY, bem como do rotor planar (ver capítulo 2), os defeitos topológicos recebem o nome de vórtices.

Para tanto, considere o parâmetro de ordem  $s(\vec{x}) = s(\cos\theta(\vec{x}), \sin\theta(\vec{x}))$ , sendo uma função periódica de  $\theta(\vec{x})$ :

$$\theta(\vec{x}) = \phi + \theta_0, \quad (1.11)$$

onde  $\theta_0$  é uma constante e  $\vec{x} = (r, \phi)$ , é o vetor posição em coordenadas polares. Então, o parâmetro de ordem é contínuo e  $\nabla\theta = 1/r$  é finito em todo ponto, exceto na origem.

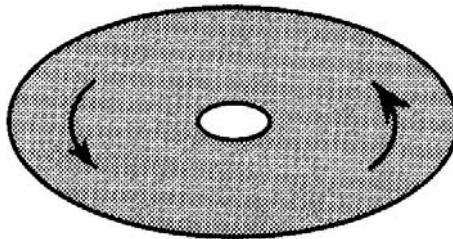


Figura 1.5: Remoção de uma singularidade matemática por um corte na origem do material (Chaikin, (195),p.496)

O ângulo  $\theta$  especifica a direção do parâmetro de ordem e muda por  $2\pi$  em um circuito ao redor do núcleo. Como o parâmetro de ordem é periódico, vemos que, dado um inteiro  $Q$ , há um número infinito de soluções distintas nas quais  $\theta$  muda de  $2Q\pi$  em um circuito fechado em torno da singularidade (ou núcleo; localizado na origem).  $Q$  é o número que caracteriza a solução (1.11) e é conhecido como “*carga topológica*” ou “*winding number*”. A Fig. (1.6) ilustra uma solução com carga topológica  $Q = 1$ . De fato, soluções do tipo (1.11), com  $Q$  inteiro são exemplos de soluções de vórtice mas, como veremos adiante, não são as únicas.

Como veremos  $Q = +1$  está associada à 1ª classe de homotopia (ver apêndice B),  $\Pi_1$ . Dado que essas excitações apresentam carga topológica não-nula,  $Q \neq 0$ , segue-se então

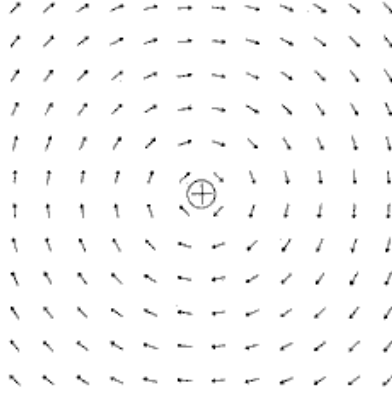


Figura 1.6: Vórtice com carga topológica  $Q = +1$ (Fonte: Belo, Andrade,2007,p.28).

que elas não podem ser destruídas por uma deformação contínua do parâmetro de ordem, adquirindo então estabilidade topológica [7]. Vale ressaltar que o que caracteriza o vórtice é a sua carga topológica e não uma equação do tipo  $\theta(\vec{x}) = Q\phi + \theta_0$ . Na qual em um mapeamento do círculo (essencialmente do espaço interno) em torno do núcleo fornece;

$$\oint_C d\theta = \oint_C \frac{d\theta}{ds} ds = 2Q\pi, \quad Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.12)$$

Existe uma infinidade de configurações para o parâmetro de ordem  $s(\vec{x})$  para o qual  $\theta(\vec{x})$  muda de  $2Q\pi$  em um circuito ao longo de qualquer contorno em volta do núcleo [7]. Por exemplo,  $\theta(\vec{x}) = Q\phi + \sin \phi$  ou  $\theta(\vec{x}) = Q\phi + \tanh(r \cos \phi) \cos 7\phi$  ambos descrevem configurações de spin com carga topológica  $Q$ .

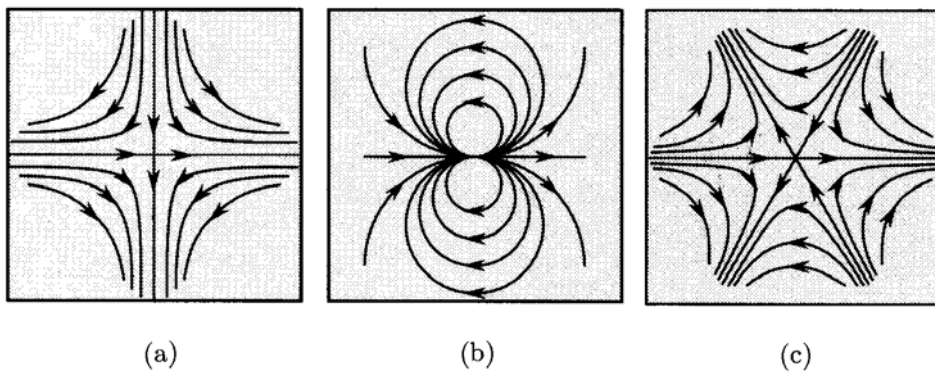


Figura 1.7: Spins planares em duas dimensões com carga topológica **a)**-1 **b)**+2 **c)**-2 (Fonte: Chaikin, (195), p.497).

Quando se buscam soluções tipo vórtice, na realidade estamos procurando por soluções que sejam estáveis, e aqui cabe ressaltar que, embora, soluções tipo vórtice sejam fisicamente estáveis, a estabilidade física não é o mesmo que estabilidade topológica. Essa é um

conceito matemático que depende da carga topológica. Já a estabilidade física depende da energia livre das diferentes configurações. Contudo, em muitos casos, a estabilidade topológica implica na estabilidade física [6]. Como é o caso dos vórtices com carga topológica  $Q = +1$ , pois para distorcer continuamente uma configuração desse tipo para trazê-lo ao estado de spins completamente alinhados demandaria uma quantidade de energia considerável. Assim, é improvável a sua destruição por flutuações estatísticas da energia. O que já não acontece para vórtice com  $Q > 1$  uma vez que a demanda energética é muito alta e sua estabilidade física dificilmente é adquirida, geralmente decaem em similares mas de carga unitária.

A energia,  $E_d$ , de um defeito topológico desse tipo pode ser dividida em duas partes: (1) a energia do núcleo,  $E_c$ , e (2) a energia elástica,  $E_{el}$ . Assim:

$$E_d = E_{el} + E_c. \quad (1.13)$$

A energia do núcleo está associada à destruição do parâmetro de ordem no caroço do defeito. A energia elástica está associada com a variação espacial do parâmetro de ordem e pode ser calculada usando a teoria de elasticidade. Para aprofundar nesse assunto remetemos o leitor à referência [7].

Em Teoria de Campos Clássica não-linear, temos algumas soluções comumente conhecidas como sólitons, que representam configurações de energia bem definidas e sem singularidades. Também temos uma característica importante para os sólitons, uma vez que são soluções de equações não-lineares, de modo que o Princípio da Superposição Linear não é válido, necessariamente. Nesse caso, encontrar soluções multi-solitônicas (2 ou mais sólitons) não é uma tarefa simples. No entanto, quando os sólitons se separam, assintoticamente, eles voltam a ter a forma que tinham antes de se encontrarem [8].

Sólitons são outros exemplos de excitações topológicas e são obtidos como soluções de equações diferenciais não-lineares, como as de Sine-Gordon (1.14).

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \sin(b\phi) = 0 \quad (1.14)$$

A estabilidade das soluções solitônicas em Teorias de Campo Não-Lineares é uma consequência da topologia [8]. Esta estabilidade sinaliza uma *lei de conservação*: deve haver uma quantidade  $Q$  que se conserva, sendo igual a um inteiro  $n$ . Essa quantidade pode ser associada a uma carga topológica, da mesma forma que tínhamos para os vórtices: assim

um sóliton com carga topológica  $Q = +1$  dificilmente poderá ser deformado a um estado no qual o parâmetro de ordem estivesse completamente alinhado (estado fundamental). Na figura (1.8) vemos um sóliton com carga topológica  $Q = +1$ .

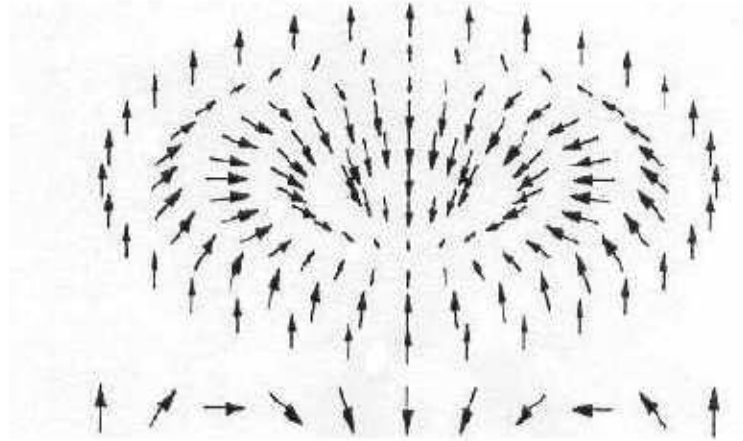


Figura 1.8: Sóliton com carga topológica  $Q = +1$  (Fonte: Belo, Andrade, 2007,p.23).

Portanto, o estudo de excitações topológicas é importante tanto na caracterização de materiais quanto na explicação de fenômenos físicos. Por exemplo, paredes de domínios magnéticos são importantes em aplicações tecnológicas uma vez que são utilizados como elementos de gravação de dados [9]. Em um sistema bidimensional, quando pares de vórtice e anti-vórtice são desemparelhados, devido à influência da temperatura, temos a transição de fase de Kosterlitz-Thouless (TKT) [7]. Hoje, analisar essas e outras características em sistemas físicos não é mais um mero exercício acadêmico. É perfeitamente plausível, tendo em vista os avanços tecnológicos alcançados obter suportes dos mais variados tipos, tais como cilindros, cones, esferas, toros, entre outros. Cabe a nós analisarmos como a geometria do suporte afeta aquelas excitações, sua energética e estabilidade.

Por fim, este trabalho tem como objetivo estudar algumas propriedades do modelo de Heisenberg para ferromagnetos clássicos na geometria/topologia da fita de Möbius, uma superfície não-orientável com curvatura não-constante, e topologicamente não-trivial (assim como o cilindro e o toro, há um buraco interno à superfície).

# Capítulo 2

## Considerações Gerais

### 2.1 Motivação

Dentre os principais motivos para a importância dada às pesquisas em magnetismo nos dias atuais, podemos destacar o fato de que os materiais magnéticos desempenham um papel muito importante nas aplicações e no surgimento de novas tecnologias. Um exemplo é gravação de dados por meio de processos magnéticos [9]. Isso está intimamente relacionado com a existência de domínios magnéticos, que por sua vez, são separados por estruturas topológicas, as paredes de domínio. Assim, para que haja uma boa compreensão acerca da gravação magnética, faz-se necessário um estudo das paredes de domínio.

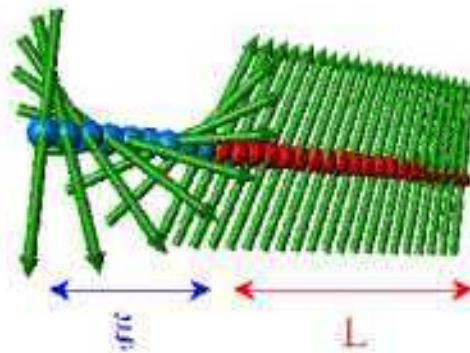


Figura 2.1: Uma parede de domínio de 180°, separando dois domínios cujas magnetizações têm sentidos opostos. Essas paredes têm espessura da ordem de 100 a 1000 nanômetros (Fonte: Belo, Andrade, 2007, p.3).

Os conceitos geométricos e topológicos são ferramentas importantes na compreensão dessas estruturas. A idéia de simetria, intimamente relacionada à geometria é base para o estudo de propriedades fundamentais de muitos sistemas físicos. Topologia, por sua vez, é importante na classificação de certas soluções como sólitons, vórtices e na análise da estabilidade das excitações obtidas. Assim, tendo em vista essa gama de possibilidades e o avanço que a tecnologia permitiu na área experimental e de manipulação de materiais, o

estudo de sistemas magnéticos em várias geometrias/topologias tem sido muito explorado. Geometrias como, o cilindro[10], a esfera [11], o cone [12], o toro[13] e geometria menos usuais como a pseudoesfera[14] e fita de Möbius vem sendo consideradas nessas investigações. O presente trabalho pretende seguir tal linha de investigação, considerando algumas variantes do modelo de Heisenberg contínuo na superfície não-orientável mais simples: a Fita de Möbius.

Também, podem ser encontrados estudos em superfícies magnéticas curvas no contexto de Matéria Condensada. Em muitos desses estudos são analisados os spins de Heisenberg sobre geometrias curvas elasticamente deformáveis tais como cilindro circular, cilindro elíptico, torus. O aparecimento de outras escalas de comprimento além das escalas geométricas faz com que ocorra uma frustração geométrica nesses sistemas magnéticos. Essa frustração leva a uma deformação da superfície magnética na região do sóliton [15].

Em outros trabalhos, tem se observado a influência da topologia na estabilidade das soluções encontradas. Por exemplo, na Ref [14] analisa-se spins de Heisenberg na superfície de uma pseudoesfera (um espaço infinito bidimensional com curvatura constante negativa). Nesse caso, não se consegue obter soluções solitônicas estáveis. De fato, apenas soluções fracionárias podem ser estabilizadas nessa superfície, desde que um furo seja feito. Ao se analisar o modelo XY, verifica-se que a energia de um único vórtice não diverge quando o sistema tende ao infinito. Isso leva a um potencial não-confinante entre um vórtice e um antivórtice a grandes distâncias, de modo que o par possa dissociar-se à uma temperatura arbitrariamente baixa. [12, 16, 14].

Outro exemplo de soluções fracionárias foi obtido em [13] onde também foi analisado o modelo de Heisenberg para spins clássicos no suporte toroidal. Nesse caso, para o regime isotrópico foi observado que as soluções solitônicas são fracionárias e sua energia não diverge com o aumento do raio central do toro. Tais excitações não são estáveis para o caso do *horntorus* (ver [13]), de forma que o genus do toro se torna uma obstrução topológica de suma importância para a estabilidade de excitações não-lineares nesse suporte.

Muitos outros trabalhos têm sido realizados em suportes com geometria não-trivial. Nesse sentido, podemos destacar os trabalhos desenvolvidos sobre a superfície da fita de Möbius. Aqui, iremos fazer uma breve descrição de alguns trabalhos em Matéria Condensada e Ciência de Materiais que têm em comum o desenvolvimento desses sobre o suporte da fita de Möbius.

Recentemente, S. Tanda e colaboradores[17] conseguiram sintetizar cristais de um com-

posto de nobium e selenium,  $NbSe_3$ , na forma de uma fita de Möbius, o que mostra que estudos nessa geometria são perfeitamente factíveis de serem testados experimentalmente.

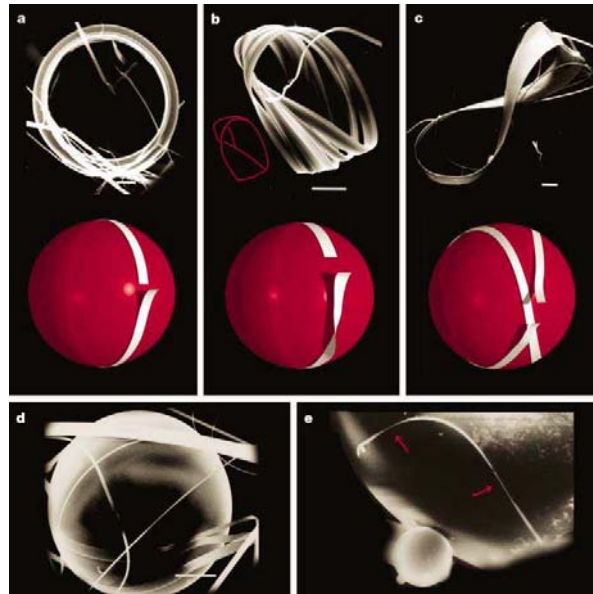


Figura 2.2: **a-c**, os três tipos de topologia, classificados pela natureza de suas torções extrínsecas (mostrada esquematicamente abaixo das imagens). **a)** Estrutura do anel. **b)** Fita de Möbius. **c)** Fita na forma de um "oito". **d)** Fibras de  $NbSe_3$  (tiras brancas) dobram-se em anéis em torno de uma gota de selênio com diâmetro de aproximadamente  $50\mu m$ . A fita de  $NbSe_3$  é enrolada na gota de selênio pela tensão de superfície até que suas extremidades se juntem. **e)** Imagem de alta ampliação que mostra uma torção em uma fita de cristal de  $NbSe_3$ ; o enrolar da fita pode produzir uma torção, como na formação de um cristal de Möbius, devido a suas propriedades elásticas e anisotrópicas. A escala das barras é de  $10\mu m$  [17].

Hayaschi e Ebisawa [18] estudaram estados supercondutores na fita de Möbius, baseada na teoria Ginzburg-Landau (GL), e acharam que as “*Little-Parks Oscillations*” são modificadas quando comparadas ao caso de amostras em formas ordinárias de anéis. As correntes persistentes na fita de Möbius, como função do fluxo aplicado, foi examinado por Yakubo, Avishai e Cohen [19] e Mila, Stafford e Caponi [19]. Wakabayashi e Harigaya estudaram a fita de Möbius feita de uma fita de nanografite e os efeitos dessa geometria sobre estados localizados foram explorados. Kaneda e Okabe [20] estudaram o modelo de Ising na geometria de Möbius, especialmente os efeitos da geometria da amostra nas propriedades de escala finita (“*finite scaling*”).

Masanao e Kazuhiro [21] estudaram, através de métodos de simulação, a estrutura de paredes de domínio na fita de Möbius ferromagnética, utilizando o modelo de Heisenberg ferromagnético clássico bidimensional com uma anisotropia simples e uma aproximação de campo médio, foram obtidos dois tipos de parede de domínio que podem ser formadas:

uma paralela e outra perpendicular à circunferência, respectivamente. Verificou-se que a estabilidade dessas estruturas é sensível à mudança de temperatura e campo magnético aplicado. A magnetização tem um comportamento que admite uma descontinuidade com função da temperatura e do campo externo aplicado.

Em alguns outros trabalhos referentes à geometria de Möbius, observou-se o uso de uma parametrização não-canônica. Essa nova parametrização se baseia no conceito de isometria<sup>1</sup>, curva central e *superfícies desenvolvíveis* (“*developable*”) [22, 23, 24]. Nesses casos utilizam-se informações contidas na linha central tais como torção e curvatura, para se obter a superfície completa. Utiliza-se um sistema de coordenadas locais baseado no sistema de Serret-Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , onde o  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  são os vetores, tangente, normal e binormal à curva (nesse caso linha central), respectivamente. Para uma compreensão melhor da construção da superfície a partir da linha central recomendamos as referências [22, 23, 25].

Gravesen e Willatzen abordaram o problema de autoestados em nanoestruturas na geometria de Möbius *desenvolvível* com inclusão do efeito da curvatura [26]. Neste trabalho, os autoestados e as autoenergias associadas a um sistema com uma partícula confinada em uma superfície na forma da fita de Möbius são determinadas incluindo as contribuições de curvatura para o operador energia cinética. Neste trabalho foi utilizada uma parametrização que minimiza a energia elástica de toda a estrutura explorando métodos de geometria diferencial. Os autores conseguiram mostrar que a inclusão da contribuição da curvatura para a energia cinética levanta a dupla degenerescência encontrada para o caso da estrutura “*flat-Möbius*” e altera significativamente a forma dos estados ligados e excitados das funções de onda [26]. Korte [27], mostrou que o poço de potencial aumenta com a largura da estrutura de Möbius o que leva a uma localização das partículas nas regiões de maior curvatura e essas regiões poderiam atuar como canais para transporte de partículas.

Convém ressaltar que os trabalhos apresentados até então lidam em sua maioria, com simulação ou computação numérica. O confinamento de partículas numa geometria de Möbius e as estruturas de paredes de domínios magnéticos foram abordados, por métodos numéricos e de simulação. Já no trabalho da Ref [28] foi utilizado o formalismo bicomplexo para se obter equações de movimento que ainda assim, são resolvidas apenas para alguns casos específicos com métodos numéricos. Isso nos motiva a abordarmos o problema do estudo de excitações tipo-vórtice na geometria de Möbius, buscando soluções analíticas nos casos em que essas são factíveis e abordarmos o problema por meios numéricos nas

---

<sup>1</sup>Aplicações que conservam a métrica

outras situações. A busca por soluções solitônicas é feita através do modelo de Heisenberg que será discutido na seção seguinte, embora não trataremos nesse trabalho de soluções solitônicas.

## 2.2 O modelo de Heisenberg

O modelo de Heisenberg é empregado para descrever a configuração de spins em uma rede. Alguns conceitos da Mecânica Quântica são usados em sua derivação. O Princípio de Exclusão de Pauli é usado para se obter aproximadamente a energia de troca,  $J$ . Ela descreve a energia necessária para que o sistema de spins interagentes passe de um estado singleto para um estado tripleto. O estado singleto corresponde aos spins interagentes paralelos entre si (estado ferromagnético) e o estado tripleto corresponde aos spins antiparalelos (estado antiferromagnético). A energia de troca é dada por,

$$J = E_S - E_T. \quad (2.1)$$

onde  $E_S$  e  $E_T$  são as energias do estado singleto e tripleto, respectivamente.

A proposta de Heisenberg foi apresentar a energia de interação entre spins vizinhos de dois sítios como,

$$H_o = -J' \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \quad (2.2)$$

onde  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  são os operadores de spin, fornecendo os estados de spin nos sítios 1 e 2, respectivamente. Para uma rede quadrada de sítios no plano, esta energia é dada pela hamiltoniana,

$$H = -\frac{J'}{2} \sum_i (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-1} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+2} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-2}), \quad (2.3)$$

o fator  $\frac{1}{2}$  foi inserido porque cada termo na somatória em (2.3) é contado duas vezes; o índice  $i$  representa o  $i$ -ésimo sítio da rede e os índices  $i+1$ ,  $i-1$ ,  $i+2$  e  $i-2$  são os primeiros vizinhos do  $i$ -ésimo sítio. De uma forma mais compacta escrevemos, simplesmente

$$H = -\frac{J'}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j. \quad (2.4)$$

Como as componentes do vetor de spin  $\vec{S}_i$  são  $(S_i^1, S_i^2, S_i^3)$ , podemos reescrever (2.4) como

$$H = -\frac{J'}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2 + S_i^3 S_j^3). \quad (2.5)$$

Se a rede possui anisotropia, então podemos representar esta anisotropia por um fator  $\lambda$  na hamiltoniana e escrever

$$H = -\frac{J'}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^1 S_j^1 + S_i^2 S_j^2 + (1 + \lambda) S_i^3 S_j^3). \quad (2.6)$$

Considerando o espaçamento  $a$  entre os sítios da rede pequeno o suficiente para se fazer o truncamento na segunda ordem da expansão em Taylor de  $\vec{S}_i$ , no  $i$ -ésimo sítio, podemos passar (2.6) para o limite contínuo (*Apêndice A*): o que leva ao modelo sigma não-linear. Neste caso, a aproximação contínua das variáveis espaciais de spin são válidas para grandes comprimentos de ondas e temperatura suficientemente baixa. O hamiltoniano contínuo toma a forma:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \lambda \delta_{a3}) \frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2, \quad (2.7)$$

onde  $J \equiv \frac{J'}{2}$ ,  $\sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2$  é o elemento de superfície em coordenadas  $\eta_1$  e  $\eta_2$ ,  $\delta_{a3}$  é a delta de Kronecker, e  $g^{ij}$  são os elementos (contravariantes) da métrica da superfície e  $h_{ab}$  são os elementos da métrica do espaço interno (spins). O campo vetorial de spins clássicos pode ser parametrizado em termos dos campos  $\Theta$  e  $\Phi$ : assim teremos que  $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z) \equiv (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$ , sendo esse campo avaliado numa esfera unitária (espaço interno), com  $\Theta = \Theta(\eta_1, \eta_2)$  e  $\Phi = \Phi(\eta_1, \eta_2)$ . O hamiltoniano (2.7) pode ser visto como sendo o modelo  $\sigma$  não-linear anisotrópico, numa superfície bidimensional arbitrária.

Esta é a hamiltoniana para  $J > 0$ , ou seja, o caso ferromagnético. Para o caso mais simples de apenas duas subredes distintas compondo um antiferromagneto ( $J < 0$ ), o vetor de spin  $\vec{S}$  deve ser substituído pelo vetor de Néel,  $\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)$ , onde os índices referem-se a subredes distintas.

## 2.3 A superfície da fita de Möbius

No estudo de superfícies topológicas não-triviais com curvatura, uma muito interessante é a fita de Möbius ou "Möbius Strip", que é uma superfície suave não simplesmente-conexa e com curvatura não-constante. Trata-se, também de uma superfície não orientável que pode ser obtida a partir de um retângulo  $ABCD$ , onde  $AC$  e  $BD$  são unidos de maneira

que  $A$  coincida com  $D$  e  $B$  com  $C$ , veja figura (2.3). Devido a uma torção de  $180^\circ$ , um dos lados da fita fica justaposto ao outro lado e, dessa maneira, obtemos uma superfície com apenas um lado. Além disso, a superfície de Möbius pode ser obtida também a partir de um círculo  $S^1$  parametrizado por  $x^2 + y^2 = R^2$  e por um segmento  $\overline{AB}$  no plano  $xy$  com  $|x| < r$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ . Nós deslocamos o centro  $c$  de  $\overline{AB}$  pelo círculo  $S^1$ . Agora, quando  $c$  descreve um ângulo  $\phi$ ,  $\overline{AB}$  faz uma rotação no sentido anti-horário de  $\frac{\phi}{2}$ . Quando  $c$  completa uma volta em torno de  $S^1$ ,  $\overline{AB}$  retorna a sua posição inicial, contudo, com os extremos invertidos. veja figura (2.3)

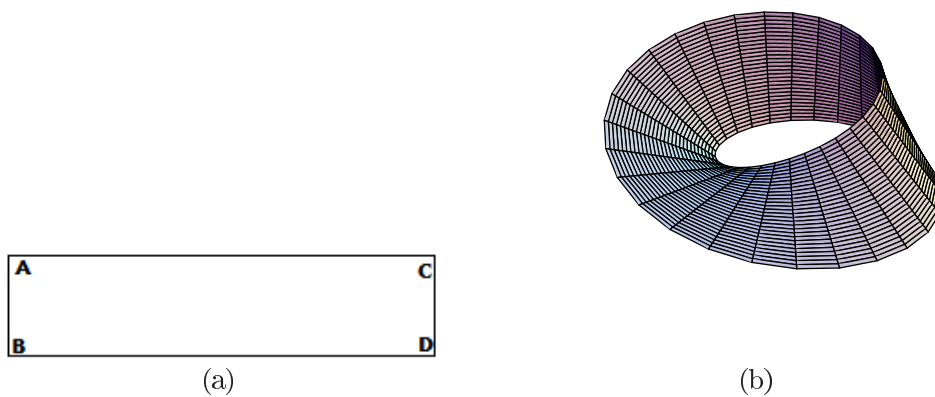


Figura 2.3: a) O retângulo  $ABCD$  pode ser unido de maneira a formar a fita de Möbius. Quando o lado  $AB$  é identificado com o lado  $CD$ , nós obtemos a superfície de Möbius como mostrado em b).

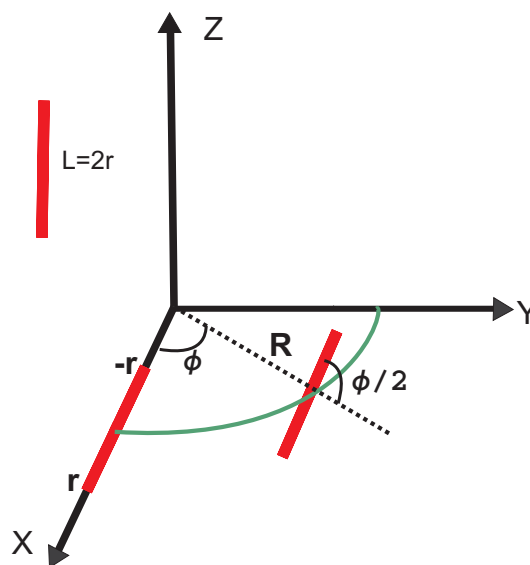


Figura 2.4: Deslocamento do segmento  $AB$  em torno do eixo  $z$ , com uma rotação de  $\frac{\phi}{2}$  quando o segmento descreve um ângulo de  $\phi$  em torno de  $z$ , também obtemos a fita de Möbius.

A fita de Möbius pode ser parametrizada em diferentes sistemas de coordenadas, tais como o cartesiano, de modo que a equação que descreve essa superfície é;

$$-R^2y + x^2y + y^3 - 2Rxz - 2x^2z - 2y^2z + yz^2 = 0, \quad (2.8)$$

de maneira que a sua equação paramétrica seja dada por;

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cos(\phi/2)) \cos(\phi), \\ y &= (R + r \cos(\phi/2)) \sin(\phi), \\ z &= r \sin(\phi/2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $R$  é o raio de rotação em torno de  $z$ ,  $r \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  onde  $L$  é a largura da fita e  $\phi \in [0, 2\pi]$  é o ângulo azimutal.

Para os nossos propósitos é importante que conheçamos a métrica  $g_{ij}$  e o elemento de linha,  $ds$ , da superfície de Möbius. Os elementos  $g_{ij}$  da métrica serão determinados a partir da definição da referência [33].

O elemento de linha desse espaço é dado por,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.10)$$

A métrica, por sua vez, pode ser calculada por:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \quad (2.11)$$

de onde pode-se ver que se os elementos da métrica são produtos escalares dos vetores tangentes  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  às curvas  $\vec{r} = (x, y, z)$  para  $q_j$  constante. Esses coeficientes especificam a natureza do sistema de coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$  que no caso das coordenadas descritas na equação (2.9), equivale a  $(R, r, \phi)$ . Como estamos estudando excitações na superfície da fita de Möbius, o parâmetro  $R$  será mantido fixo, dessa forma não nos preocuparemos com os elementos da métrica relacionados a  $R$ . Assim temos que,

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}. \quad (2.12)$$

Através de cálculos simples, considerando  $q_1 = r$  e  $q_2 = \phi$ , podemos verificar que para a fita de Möbius os elementos,  $g_{ij}$ , da métrica covariante são dados por;

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3r^2+4R^2+2r^2 \cos \phi+8rR \cos \phi/2}{4} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

Pode se definir os elementos da métrica contravariante,  $g^{ij}$ , a partir dos elementos da métrica covariante usando a relação;

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.14)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, que é definido como  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Logo, temos que

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3r^2+4R^2+2r^2 \cos \phi+8rR \cos \phi/2} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Agora, podemos determinar o elemento de linha para a superfície de Möbius,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + [R^2 + 2Rr \cos(\frac{\phi}{2}) + \frac{r^2}{4}(3 + 2 \cos \phi)] d\phi^2, \quad (2.16)$$

onde se adotou a convenção de Einstein para índices repetidos. O gradiente para uma superfície arbitrária qualquer é dada por,

$$\vec{\nabla} = \sum \hat{q}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (2.17)$$

onde  $h_i^2 = g_{ii}$  e  $q_i$  é a coordenada generalizada. Definindo-se  $k = R^2 + 2Rr \cos(\frac{\phi}{2}) + \frac{r^2}{4}(3 + 2 \cos \phi)$ , podemos obter o operador gradiente para a superfície de Möbius, o qual lê-se:

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \partial_r + \hat{\phi} \frac{1}{\sqrt{k}} \partial \phi. \quad (2.18)$$

Observe que o parâmetro  $k$  que aparece nas equações acima, tem algumas características especiais que serão reportadas no capítulo 4, entre elas destacamos o fato de que ele obedece a uma condição de contorno intrínseca à fita de Möbius, a saber,

$$k(r, \phi) = k(-r, \phi + 2\pi). \quad (2.19)$$

Note também que esse parâmetro é estritamente positivo, uma vez que

$$k = (r \cos(\phi/2) + R)^2 + \frac{r^2}{2} > 0. \quad (2.20)$$

Ver figura (2.5),

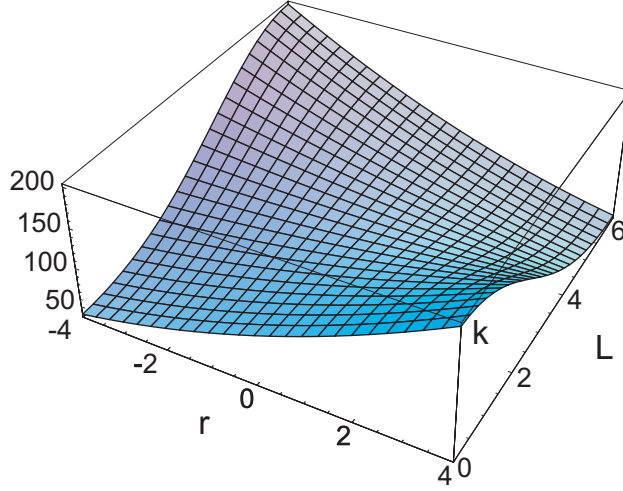


Figura 2.5: Gráfico de  $k$  em função de  $r \times \phi$  com  $L = 8, R = 10$ .

Finalmente, a curvatura gaussiana da fita de Möbius é dada por

$$G = -\frac{4R^2}{(4R^2 + 3r^2 + 2r(4R \cos \phi/2 + r \cos \phi))^2} = -\frac{1}{4}(R/k)^2. \quad (2.21)$$

Podemos notar que a fita de Möbius possui uma geometria bastante rica sua curvatura gaussiana é não-trivial. Ela é negativa e não admite nenhuma região de curvatura nula; sua variação tem dependência nas variáveis  $\phi$  e  $r$ , o que causa acoplamento nas equações de campo como veremos nos capítulos 3 e 4; uma vez que  $G$  é inversamente proporcional a  $k^2$ , as equações de campo se tornam mais complicadas quando comparadas às equações de campo para os casos da esfera[11], pseudo-esfera[14] e toro[13]. Também podemos observar que a curvatura satisfaz a condição  $G(r, \phi) = G(-r, \phi + 2\pi)$ ; que é característica da fita de Möbius e também pode ser observada no parâmetro  $k$ . No limite de  $r \rightarrow 0$  sua dependência em  $\phi$  é eliminada. Ao longo de  $r = 0$  a sua curvatura fica constante, e igual à  $-\left(\frac{1}{2R}\right)^2$ .

No próximo capítulo, iremos utilizar o modelo de Heisenberg para um suporte com a geometria de Möbius e buscaremos obter soluções topológicas nesse suporte.

# Capítulo 3

## Modelo de Heisenberg e soluções topológicas na fita de Möbius

Nesse capítulo, iremos usar o Modelo Rotor Planar(MRP) na fita de Möbius para o estudo de excitações tipo-vórtice. O MRP pode ser obtido do modelo anisotrópico de Heisenberg, tomando o termo de anisotropia como sendo -1 e  $\vec{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 = 1$ . Dessa forma, é conveniente que seja descrito o modelo anisotrópico de Heisenberg para a fita de Möbius para, em seguida, obtermos o modelo MRP.

### 3.1 O modelo de Heisenberg na fita de Möbius

Nosso intuito é obter excitações topológicas na fita de Möbius que é uma superfície não orientável e não simplesmente-conexa, (os "loops" definidos em sua superfície não podem ser contraídos, por meio de deformações contínuas, a um ponto). Vamos utilizar o sistema de coordenadas dado por (2.9), os elementos de métrica covariantes e contravariantes dados em (2.13) e (2.15) e, o espaço de spins (espaço interno) em coordenadas cartesianas, de modo que  $h_{ab} = \delta_{ab}$ . Assim, o hamiltoniano anisotrópico (2.7) toma a forma:

$$H = J \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \frac{(3r^2 + 4R^2 + 2r^2 \cos \phi + 8rR \cos \frac{\phi}{2})^{\frac{1}{2}}}{2} [(\frac{\partial S^x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial S^y}{\partial r})^2 + (1 + \lambda)(\frac{\partial S^z}{\partial r})^2] + \frac{2}{(3r^2 + 4R^2 + 2r^2 \cos \phi + 8rR \cos \frac{\phi}{2})^{\frac{1}{2}}} [(\frac{\partial S^x}{\partial \phi})^2 + (\frac{\partial S^y}{\partial \phi})^2 + (1 + \lambda)(\frac{\partial S^z}{\partial \phi})^2] dr d\phi. \quad (3.1)$$

Quando utilizamos a representação do vetor de spin  $\vec{S} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$  em termos de  $\Theta$  e  $\Phi$  e usamos  $k = R^2 + 2Rr \cos(\frac{\phi}{2}) + \frac{r^2}{4}(3 + 2 \cos \phi)$ , obtemos o seguinte hamiltoniano para o nosso modelo:

$$H = J \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \sqrt{k} [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_r \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_r \Phi)^2]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}}[(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\phi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\phi \Phi)^2]drd\phi, \quad (3.2)$$

sendo,  $\partial_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}$  e  $\partial_\phi \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}$ .

Agora, precisamos determinar as equações de movimento para os campos  $\Theta$  e  $\Phi$  para a hamiltoniana obtida. Essas equações podem ser calculadas via equações de *Euler-Lagrange* para os campos. Neste texto, vamos utilizar a forma definida na referência [8], ou seja,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0. \quad (3.3)$$

Essa expressão representa a equação de movimento para o campo  $\varphi$ . Aqui,

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^1, x^2) \\ &= (r, \phi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como buscamos soluções estáticas, o papel desempenhado por  $\mathcal{L}$  em (3.3) é assumido por  $h$  (densidade hamiltoniano), com sinal negativo uma vez que,

$$H = \sum \pi(q, \dot{q})\dot{q} - L \Rightarrow H = -L, \quad (3.5)$$

onde  $q$ ,  $\pi(q, \dot{q})$ ,  $H$  e  $L$  são, respectivamente, a coordenada canônica, o momento conjugado, a Hamiltoniana e a Langrangeana do sistema. A densidade hamiltoniana para o nosso caso é dada por:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{k}[(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_r \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_r \Phi)^2] + \\ &\frac{1}{\sqrt{k}}[(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\phi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\phi \Phi)^2]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, tomando as equações (3.3) e (3.6), temos que a equação de movimento para os campos  $\Theta$  e  $\Phi$  são:

$$\frac{\partial h}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_r \Phi)} \right] - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_\phi \Phi)} \right] = 0, \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_r \Theta)} \right] - \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \frac{\partial h}{\partial (\partial_\phi \Theta)} \right] = 0. \quad (3.8)$$

Estas expressões levam às seguintes equações de movimento acopladas para os campos  $\Theta(r, \phi)$  e  $\Phi(r, \phi)$ ;

$$\begin{aligned} & \sin \Theta \cos \Theta \sqrt{k} [\lambda (\partial_r \Theta)^2 + (\partial_r \Phi)^2] + \frac{1}{\sqrt{k}} [\lambda (\partial_\phi \Theta)^2 + (\partial_\phi \Phi)^2] \\ &= \partial_r [\sqrt{k} (1 + \lambda \sin^2 \Theta) \partial_r \Theta] + \partial_\phi \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} (1 + \lambda \sin^2 \Theta) \partial_\phi \Theta \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\partial_r [\sqrt{k} \sin^2 \Theta (\partial_r \Phi)] + \partial_\phi \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin^2 \Theta (\partial_\phi \Phi) \right] = 0. \quad (3.10)$$

Portanto, o regime anisotrópico de Heisenberg nos fornece equações diferenciais não-lineares acopladas. Soluções não-triviais adequadas podem ser obtidas desde que algumas condições sejam impostas, de maneira que soluções especiais possam emergir. Neste ponto convém lembrar que as equações acima assumem a forma similar de suas correspondentes nos casos esférico, pseudo-esférico e toroidal. De fato, sempre que identificamos  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  com  $\frac{s}{R + s \sin \theta}$ ,  $\frac{1}{S \sin \theta}$ , ou  $\frac{1}{\rho\tau}$ , onde  $\phi$  faz o papel de ângulo azimutal, as equações acima recobrem os casos do toro, esfera e pseudo-esfera, análogo aos da referências [13, 11, 14]. Nas equações acima  $R$  e  $s$  são os raios axiais de rotação no toro, respectivamente.  $S$  é o raio da esfera e  $\rho\tau$  representa uma distância ao longo da geodésica na pseudo-esfera, ou seja, uma hipérbole.

Como podemos observar as equações para os campos  $\Theta$  e  $\Phi$  são equações acopladas e altamente não-lineares; dessa forma encontrar soluções gerais para esses campos é uma tarefa complicada. Contudo, um estudo de soluções especiais nos fornece informações importantes do comportamento dos campos nessa superfície. Na seção seguinte, iremos estudar o caso anisotrópico para,  $\lambda = -1$ . Nesse caso, temos que  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  é solução e buscaremos uma solução para o campo  $\Phi$ .

## 3.2 Soluções tipo-vórtice no Modelo do Rotor Planar

Em muitas superfícies, excitações chamadas vórtices são obtidas quando buscamos soluções para o caso do Modelo do Rotor Planar (MRP) (já que estamos tratando de soluções estáticas, os resultados são aplicados ao modelo XY)[13, 14, 11, 14, 12, 16]. Geometricamente, um vórtice com uma carga topológica  $\zeta \neq 0$  pode ser visto como um conjunto de spins em torno de um circuito fechado em volta do núcleo (centro do vórtice ou caroço)

que é um ponto(ou região) singular ou uma obstrução topológica, tornando impossível, topologicamente, mudar a configuração de spins para obter uma configuração na qual todos os spins estejam alinhados perfeitamente a uma distância arbitrária do núcleo do vórtice. Assim, uma configuração tipo-vórtice não pode ser continuamente deformada para o estado fundamental, sendo portanto, topologicamente estável. Vórtices têm sido intensamente estudados por décadas em inúmeros sistemas físicos, tais como, superfluidos e supercondutores. Recentemente, eles têm sido observados em nanomagnetos como estados fundamentais em determinadas geometrias, como a cilíndrica.

Quando modelamos um vórtice como um contínuo de spins, temos a intenção de descrever apenas a sua região exterior; uma vez que na região do núcleo o tratamento analítico nos fornece apenas uma estimativa de sua energia,requerendo técnicas numéricas e simulação para melhor entendimento das configurações de spins. De qualquer modo, na topologia da fita de Möbius, temos um “*cut off*” natural para o vórtice (assim como no caso do cilindro e do toro).

Para alcançarmos nossos propósitos, devemos considerar as soluções confinadas ao plano XY, ou seja, apenas a variável de spin  $\Phi$  terá dinâmica (espacial) enquanto  $\Theta$  permanecerá constante, uma vez que estamos lidando com soluções estáticas. Essas soluções estão associadas ao MRP, de forma que tomaremos  $\lambda = -1$  e  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ . Então a hamiltoniana (3.2) para este sistema passa a ser escrita como:

$$H_{MRP} = J \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} [\sqrt{k}(\partial_r \Phi)^2 + \frac{1}{\sqrt{k}}(\partial_\phi \Phi)^2] dr d\phi. \quad (3.11)$$

Da equação de movimento (3.10), temos que

$$\partial_r[\sqrt{k}(\partial_r \phi)] + \partial_\phi[\frac{1}{\sqrt{k}}(\partial_\phi \Phi)] = 0 \quad (3.12)$$

Como pode ser observado, embora, essa hamiltoniana forneça equações de campo mais simples que (3.10), sua solução não é uma tarefa simples. O termo  $\sqrt{k}$  que acompanha as derivadas de  $\Phi$  é um termo que acopla as variáveis  $r$  e  $\phi$ , naturais dessa geometria, e que não podem ser separadas. Nesse caso é interessante que analisemos algumas soluções assintóticas para o nosso problema. Como são soluções exatas elas nos auxiliarão no julgamento de alguns resultados obtidos para as considerações que faremos posteriormente.

Também, convém ressaltar que o próprio estado ferromagnético, que é o estado de menor energia, já apresenta uma configuração não-trivial, como estudado na Ref.[21]. De

acordo com resultados de simulação para uma fita de Möbius ferromagnética dois tipos de paredes de domínio são possíveis de serem encontradas para o estado ferromagnético.

Esses dois tipos de paredes de domínios encontrados para o estado ferromagnético fornecem uma idéia da estrutura do estado fundamental para essa superfície, como visto na figura (3.1)

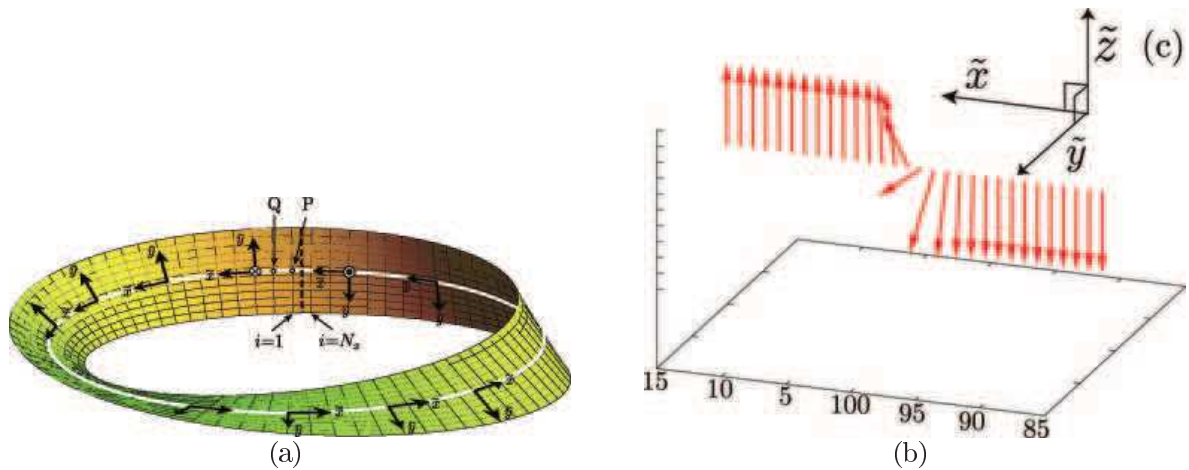


Figura 3.1: a) Simulação para a fita de Möbius ferromagnética. b) Parede de domínio no estado ferromagnético. c) Eixo de coordenadas local [21].

Na figura (3.1) apresentamos apenas o resultado para uma parede de domínio que é suficiente para o propósito desse parágrafo. Os eixos  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  são eixos móveis e definidos em cada ponto da superfície, sendo o eixo  $\tilde{z}$  é normal a superfície em cada ponto. Como vemos na figura (3.1-b) os spins apontam sempre na direção  $\tilde{z}$ . Intrinsecamente, esse caso é análogo ao caso do espaço 2D plano. Note que, para quem está na superfície, os spins apontam sempre no mesmo sentido, o que ocorre para o caso ferromagnético no plano. Contudo, para quem está fora da superfície, percebemos uma formação de parede de domínio. Note que intrinsecamente, os spins apontam todos na mesma direção fornecendo o estado ferromagnético, de mais baixa energia.

# Capítulo 4

## Soluções Assintóticas para o Modelo do Rotor Planar

Vamos analisar algumas soluções assintóticas para a fita de Möbius. Nessa seção usamos algumas aproximações para o parâmetro  $k$ , que são tratados com mais detalhes no apêndice C.

### 4.1 Casos Limites

#### a) Finta Fina $r \rightarrow 0$

Nesse caso, a fita de Möbius estaria reduzida a um círculo de raio  $R$ ; aí, admitindo-se simetria cilíndrica para  $\Phi : \Phi = \Phi(\phi)$ , obtemos que a equação (3.11) torna-se:

$$H_{MRP} = J \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} (\partial_\phi \Phi)^2 \right] dr d\phi. \quad (4.1)$$

A equação de movimento para esse caso é dada por

$$\partial_\phi \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} \partial_\phi \Phi \right] = 0. \quad (4.2)$$

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{R}$ , é constante, a solução é uma solução tipo-vórtice, dada por:

$$\Phi(\phi) = \zeta \phi + \phi_0, \quad \zeta \in Z; \quad (4.3)$$

onde  $\zeta$  é uma carga topológica e  $\phi_0$  uma constante de integração. Essa solução já era de se esperar uma vez que nesse limite a fita de Möbius tem o aspecto de um círculo que tem como solução uma configuração tipo-vórtice.

#### b) Fita Grande $R \rightarrow \infty$

Nesse limite, a fita de Möbius apresenta um raio muito grande e, como  $R \gg r$ , podemos considerar novamente  $\Phi = \Phi(\phi)$  de modo que, continuamos a ter,

$$\partial_\phi \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} \partial_\phi \Phi \right] = 0, \quad (4.4)$$

Quando tomamos  $R \gg r$ , isto é, dado um raio  $R$  muito grande, a razão  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  é praticamente constante (ver apêndice C). Dessa forma, a equação (4.4) pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \partial_\phi [\partial_\phi \Phi] = 0, \quad (4.5)$$

cujas soluções são de tipo-vórtice, dada por:

$$\Phi(\phi) = \zeta' \phi + \phi_1, \zeta' \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Novamente  $\zeta'$  é uma carga topológica e  $\phi_1$  uma constante de integração. Também nesse caso a solução tipo-vórtice já era de se esperar uma vez que nesse limite a fita de Möbius se comporta como uma circunferência que tem como solução uma configuração tipo-vórtice.

### c) Fita Grossa $r \rightarrow \infty$

Neste caso, nós temos um comportamento interessante, mantendo o raio da fita constante e tomando uma largura muito grande vemos que a fita começa a se auto-interceptar. Esse caso não é uma situação fisicamente realizável, contudo, podemos analisar os resultados nessa situação como resultados limite para os nossos cálculos. Vamos admitir, a priori, que nesse caso também seja válida a simetria cilíndrica, i.e,  $\Phi = \Phi(\phi)$ . Sendo assim, teremos a mesma hamiltoniana do caso anterior, novamente calculando as respectivas derivadas obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\partial_\phi^2 \Phi - \frac{1}{2k} \partial_\phi k \partial_\phi \Phi = 0 \quad (4.7)$$

No limite  $r \rightarrow \infty$ , temos que a EDO (4.7) torna-se:

$$\partial_\phi^2 \Phi - \frac{1/2 \sin \phi}{3/2 + \cos \phi} \partial_\phi \Phi = 0, \quad (4.8)$$

tendo como solução;

$$\Phi(\phi) = q_1 E\left(\frac{\phi}{2}, \frac{4}{5}\right) + \phi_0, \quad (4.9)$$

que é uma função Elíptica de Jacobi, onde  $E(\phi, m) = \int_0^\phi [1 - m \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta$ .

Vamos calcular a carga topológica para esse caso. Fazendo,  $q_1 = q \frac{\pi}{E(\frac{4}{5})}$  na equação (4.9). A carga topológica (vorticidade) é formalmente definida, no limite contínuo, como;

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \oint_C \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{l}, \quad (4.10)$$

onde a integração é feita ao longo do caminho fechado  $C$ ,  $\vec{\nabla}$  é o operador gradiente definido em (2.18) e  $d\vec{l}$  é o elemento de linha na fita de Möbius. Assim temos,

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\pi} \int \partial_\phi \Phi d\phi = q \in \mathbb{Z}. \quad (4.11)$$

Aqui é interessante notar que tomando  $q = +1$ , a solução encontrada se assemelha à solução tipo vórtice se diferenciando apenas por oscilações nessa solução, como visto na figura (4.4),

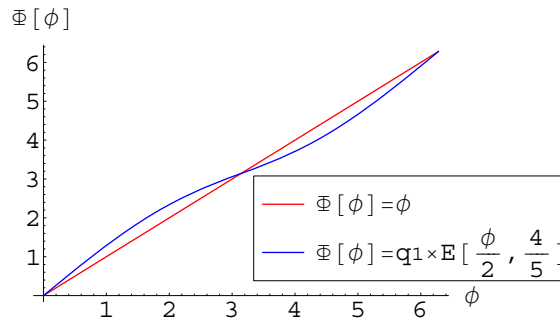


Figura 4.1: Gráfico de  $\Phi(\phi)$  vs  $\phi$  para soluções tipo-vórtice  $\Phi(\phi) = \phi$  e para o caso da solução Elíptica. Note que a solução Elíptica difere por um termo adicional em  $A \sin \phi$

Isto sugere que na solução encontrada, temos um termo de vorticidade e um termo de oscilação do tipo  $A \sin \phi$ .

Também poderíamos analisar o caso limite em que  $R \rightarrow 0$ , contudo, os resultados serão análogos ao caso em  $r \rightarrow \infty$  uma vez que, para a solução final esses dois processos são equivalentes.

Assim, como podemos observar temos que em alguns casos limites as soluções se aproximam de resultados esperados e servem para comparação com resultados posteriores. Contudo, para o caso geral a equação (3.12) ainda se torna difícil de ser resolvida. Uma proposta alternativa é fazer uma análise numérica a fim de conhecermos melhor o comportamento da solução do nosso problema e assim extrapolarmos alguns resultados.

## 4.2 Solução numérica para o MRP

Como pode ser observada a equação de movimento (3.12) é altamente acoplada. E no caso geral não podemos considerar uma simetria cilíndrica, como feita em outros trabalhos, quando o suporte era uma esfera [11], pseudo-esfera [14] ou toro [13], para mencionar, nesses casos tal consideração simplificava em muito a abordagem do problema. Aqui no entanto, devemos levar em consideração tanto a variação de  $\Phi$  com  $r$  quanto com  $\phi$ . Sendo

assim, o que vamos fazer nessa seção é uma abordagem dos resultados obtidos através de um tratamento numérico usando o processo de *diferenças finitas*. O método de diferenças finitas descreve uma aproximação numérica para a solução da equação diferencial em questão. Daí, os dados numéricos gerados serão comparados com as soluções analíticas encontradas para os casos assintóticos da seção (4.1). A partir disso iremos extrapolar uma condição de contorno para o nosso problema no caso geral. Em seguida vamos analisar o caso geral onde os limites considerados não são mais válidos. Os resultados obtidos aqui foram gerados por meio de programa baseado em linguagem Fortran 90. Daremos aqui apenas uma breve descrição do mesmo, para maiores detalhes sobre o método de diferenças finitas ver apêndice (D).

Tal método consiste, basicamente, na discretização da superfície(ou espaço), em questão de modo a tornar a ED (3.12) uma equação discreta. Caso seja conhecido o comportamento da função no contorno para o problema pode-se, por meio de interações, conhecer o comportamento da função no restante da superfície. Agora, vamos reescrever a equação (3.12) como:

$$\partial_r^2 \Phi + \frac{1}{k} \partial_\phi^2 \Phi + \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} \partial_r \Phi - \frac{1}{2k^2} \frac{\partial k}{\partial \phi} \partial_\phi \Phi = 0 \quad (4.12)$$

A equação (4.12) pode ser discretizada quando usamos as seguintes relações para as derivadas primeiras e segundas da função  $\Phi(r, \phi)$  em termos das variáveis  $\phi$  e  $r$  ;

$$\partial_r \Phi = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2p}, \quad (4.13)$$

$$\partial_\phi \Phi = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h}, \quad (4.14)$$

$$\partial_r^2 \Phi = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{p^2}, \quad (4.15)$$

$$\partial_\phi^2 \Phi = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2}, \quad (4.16)$$

onde  $p$  e  $h$  são os incrementos em  $r$  e  $\phi$ , respectivamente. Nessas equações o índice  $i$  refere-se à variável  $\phi \in [0, 2\pi]$  e o índice  $j$  refere-se a variável  $r \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ . O método exige que saibamos o comportamento da função  $\Phi(r, \phi)$  no contorno da superfície. Aqui, vamos assumir a condição de contorno que nos extremos da fita os spins estão alinhados com a superfície. Essa condição é razoável, uma vez que, nos casos limites  $r \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$ , como vimos, temos uma solução tipo-vórtice. Também, no interior da fita vamos sortear direções

aleatórias para os spins. Utilizando essas relações e a condição de contorno proposta, nós obtemos os seguintes resultados para os casos limites, como segue.

### 4.3 Casos limites - Resultados Numéricos

#### a) Fita Fina, $L \rightarrow 0$

Utilizando o método proposto, vamos considerar o caso de uma fita, onde a sua largura é muito pequena,  $r \rightarrow 0$ ; nesse caso, como visto na seção (4.1); a solução analítica é uma solução tipo-vórtice  $\Phi(\phi) = \zeta\phi + \phi_0$ . O resultado numérico para esse caso, usando o método de diferenças finitas, pode ser visto na figura (4.5)

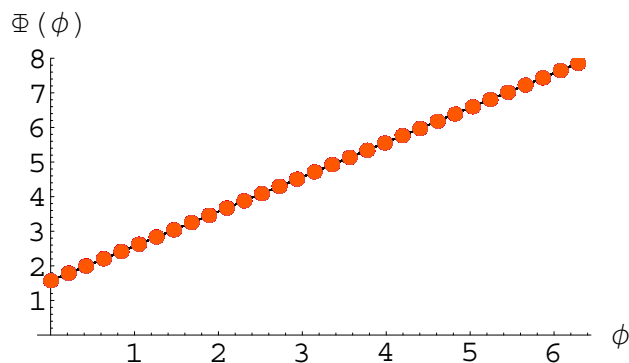


Figura 4.2: Gráfico de  $\Phi(\phi)$  vs  $\phi$ . O resultado linear (linha contínua) é o gráfico para solução tipo-vórtice dada por  $\Phi(\phi) = \phi + \pi/2$  e os pontos o resultado numérico para uma fita de largura muito pequena, nesse caso,  $L = 0.1$  e  $R = 10$ .

Como era de se esperar para  $L \rightarrow 0$ , temos que os resultados numéricos fornecem uma solução tipo-vórtice, o que era natural, tendo em vista que nesse limite a condição de contorno imposta tem um peso muito maior sobre o resultado obtido.

#### b) Fita grande $R \gg r$ .

De maneira análoga ao caso anterior, vamos analisar a fita de Möbius para o caso onde o raio é muito grande. A solução como vista na seção (4) para uma fita de raio muito grande é uma solução tipo-vórtice  $\Phi(\phi) = \zeta'\phi + \phi_0$ . O resultado numérico para esse caso, usando o método de diferenças finitas, pode ser visto na figura (4.6);

Nesse caso, como esperávamos, a solução como vista no gráfico da figura (4.3) é uma solução do tipo-vórtice uma vez que os pontos, resultados numéricos obtidos com o nosso método, têm um comportamento linear praticamente idêntico ao caso analítico, colaborando para a validade dos nossos resultados. A configuração de spins para esse caso pode ser visto na figura (4.7),

#### c) Fita Grossa $L \gg R$ .

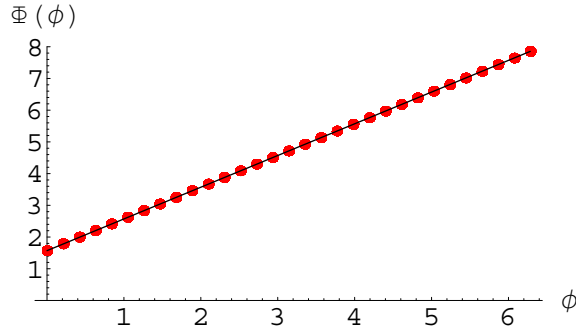


Figura 4.3: Gráfico de  $\Phi(\phi)$  vs  $\phi$ . O resultado linear (linha contínua) é o gráfico para solução tipo-vórtice dada por  $\Phi(\phi) = \phi + \pi/2$  e os pontos o resultado numérico para uma fita de raio muito grande, nesse caso,  $L = 6$  e  $R = 10^4$ .

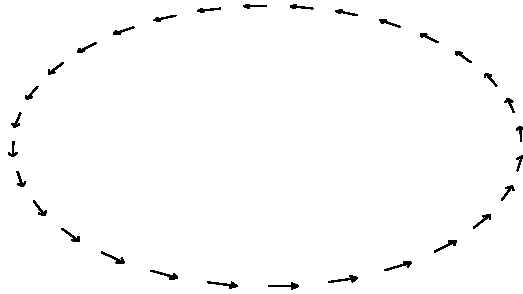


Figura 4.4: Configuração de vórtice sobre a fita de Möbius para o caso de raio grande, nesse caso  $L = 6$  e  $R = 10^4$ .

Esse caso, na realidade não é um caso factível do ponto de vista físico, uma vez que teríamos uma fita que se auto-interceptaria. Contudo, é um caso interessante de se analisar do ponto de vista da validade do método utilizado para obtenção de resultados. Para isso, consideraremos uma fita com um raio fixo e uma largura expressiva em comparação com o raio ( $r \gg R$ ). Para esse, como já vimos anteriormente no limite de  $r \rightarrow \infty$  temos que solução é a elíptica de Jacobi. Dessa forma, a condição de contorno escolhida, não seria a mais apropriada nessa situação ( $L=2000$ ). Contudo isso pode ser contornado, quando analisamos a solução para  $r \in (250, 750)$  uma vez que nessa região  $r$  não está próximo do contorno, e por isso é pouco influenciado por ele, e está longe da origem  $r = 0$ , na qual o limite não é válido. Os resultados para a variação do campo  $\Phi(\phi)$ , podem ser vistos na figura (4.8);

Aqui, devemos ressaltar que diferentemente dos outros resultados o comportamento de  $\Phi(\phi)$  varia com a posição na fita quando assumimos uma largura grande em vista do raio

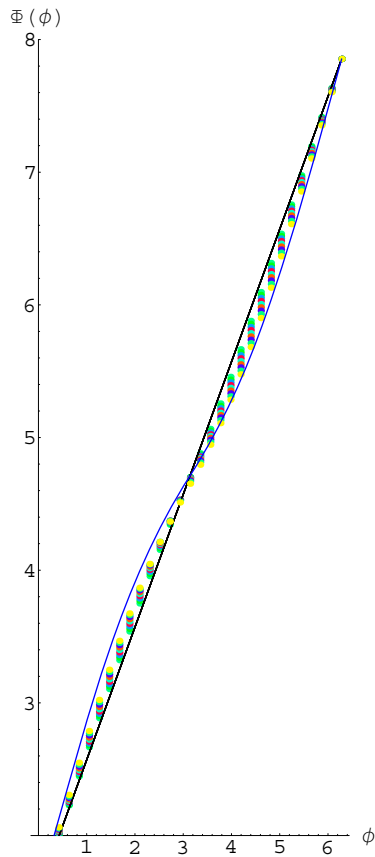


Figura 4.5: Gráfico de  $\Phi(\phi)x\phi$  para soluções tipo-vórtice através de análise numérica. O gráfico linear é o caso  $\Phi(\phi) = \phi$  e os pontos o resultado numérico para  $r$  variando de  $-1000$  a  $1000$  esse intervalo foi dividido em  $800$  partes

da fita de Möbius ( $r \gg R$ ). Noutras palavras, quando temos uma fita de largura grande, o comportamento da função  $\Phi$  para regiões da fita suficientemente afastada do centro, tem um comportamento que se assemelha a função  $E(\frac{\phi}{4}, \frac{4}{5})$  sendo essa função um limite para os resultados obtidos, como pode ser observado na figura (4.9), onde o gráfico contínuo é a função  $E(\frac{\phi}{4}, \frac{4}{5})$  e os pontos o resultado numérico.

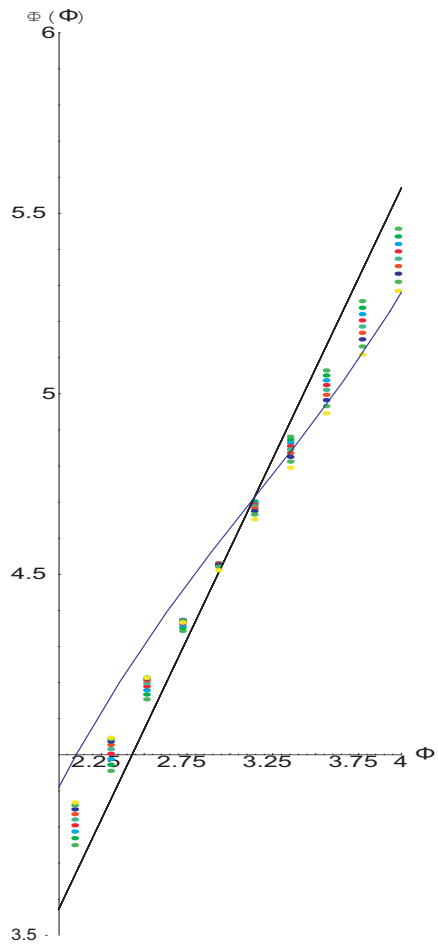


Figura 4.6: Gráfico de  $\Phi(\phi)x\phi$ , o gráfico linear (linha preta) é o caso para solução-tipo vórtice a curva em azul é o gráfico para função elíptica e os pontos são resultados numéricos com  $r$  variando de  $-1000$  à  $1000$  esse intervalo foi dividido em 800 partes, a escala do gráfico foi alterada para melhor visualização.

Note que o comportamento da função  $\Phi$  para fita de Möbius, se assemelha muito ao comportamento da função  $\Phi = \phi + A \sin(\phi)$  onde  $A$  é um parâmetro que depende de  $r$  e no limite quando  $r \rightarrow 0$  temos que  $A \rightarrow 0$ , ou seja, temos uma solução tipo-vórtice  $\Phi = \zeta\phi + \phi_0$ .

Como pode ser observado, o resultado numérico concorda com o resultado analítico encontrado. Sendo assim, vamos utilizar o método numérico para encontrar a solução para uma fita de Möbius, onde a largura é da ordem do raio da fita.

**c) Fita com largura da mesma ordem de tamanho do raio,  $L \approx R$ .**

De modo geral, quando olhamos para essa geometria com objetivos de entendê-la e utilizá-la em futuras aplicações tecnológicas, vemos que as dimensões de sua largura e do seu raio são da mesma ordem: por exemplo, em [17] foi reportada a construção de uma fita com  $L \approx 20\mu m$  e  $R \approx 25\mu m$ .

Vamos considerar uma fita onde  $L = 6u.c$  (unidades de comprimento) e o raio  $R = 7u.c$ , nessa situação nós obtemos os resultados da figura (4.10) para a variação de  $\Phi$  em termos de  $r$  e  $\phi$ .

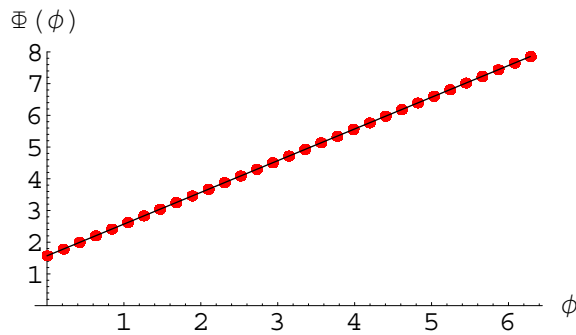


Figura 4.7: Gráfico de  $\Phi(\phi)$  versus  $\phi$  para soluções tipo-vórtice. O gráfico linear é o caso  $\Phi(\phi) = \phi$  e os pontos, os resultados numéricos para  $r$  variando de  $-3$  a  $3$  e  $R = 7$ .

Podemos comparar também o comportamento do campo  $\Phi$  quando variamos o raio da fita de Möbius e mantemos fixo a largura dessa fita. Esse resultado pode ser visto na figura (4.11) e (4.12), nesse último a escala foi ampliada para melhor visualização;

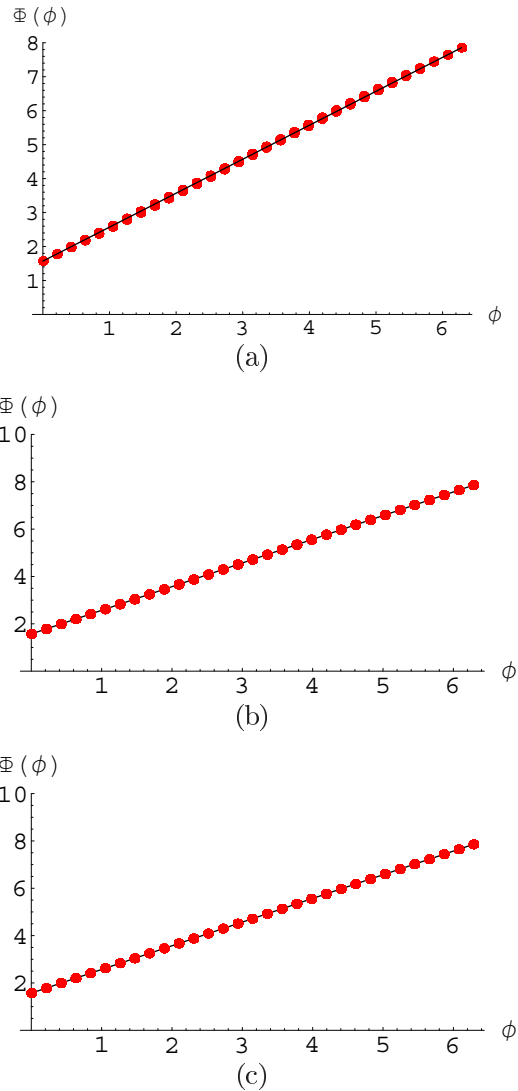


Figura 4.8: Análise da variação de  $\Phi(\phi)$  para os casos de uma fita com  $L = 15$  e  $R =$  **a)8,b)12 e c)20** respectivamente. à medida que o raio aumenta temos uma solução mais próxima da solução tipo-vórtice.

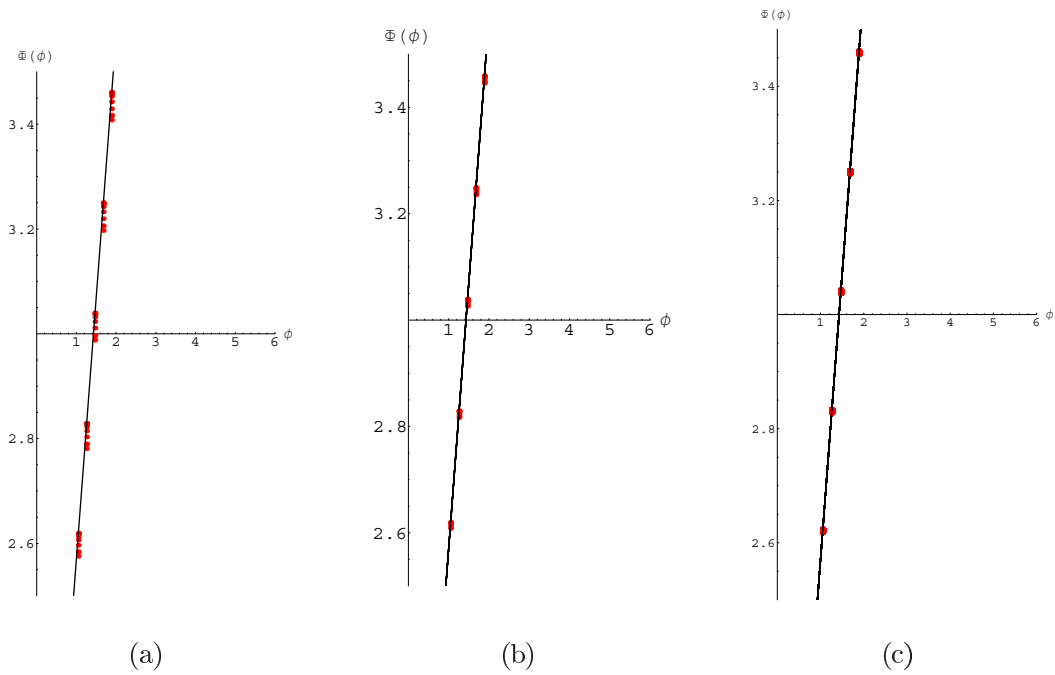
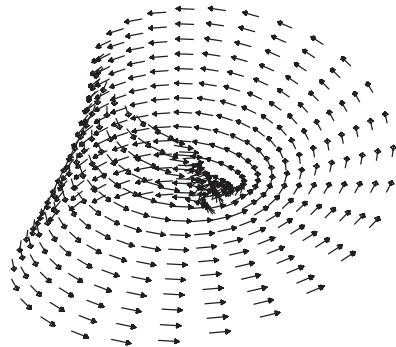
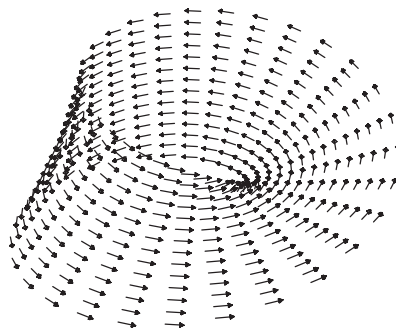


Figura 4.9: Análise da variação de  $\Phi(\phi)$  para os casos de uma fita com  $L = 15$  e **a)**  $R = 8$ , **b)**  $R = 12$  e **c)**  $R = 20$  respectivamente, Os gráficos foram ampliados para melhor análise da variação de  $\Phi$  com  $r$ , o gráfico linear e para solução tipo-vórtice. à medida que o raio aumenta temos uma solução mais próxima da solução tipo-vórtice. O que fica muito claro quando comparado o gráfico **(a)** com o **(c)**.

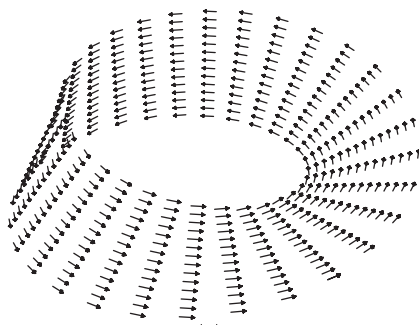
Note que à medida que  $R$  aumenta, a solução se aproxima daquela que descreve um vórtice usual, digo  $\Phi(\phi) = q_n \phi + \phi_0$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10: Configuração de vórtice para os casos de uma fita com  $L = 15$  e **a)**  $R = 8$ , **b)**  $R = 12$  e **c)**  $R = 20$  respectivamente.

Como pode ser observado à medida que a largura começa a assumir valores maiores que o raio da fita, os efeitos de curvatura ficam mais evidentes, como podemos ver no gráfico da figura (4.12-a) e na figura (4.13-a). Por conseguinte, como visto, temos que para os casos em que a largura é da mesma ordem de grandeza do raio (e menor que este; uma vez que, fitas com largura maior que o raio não são realizáveis do ponto de vista geométrico) a excitação tipo vórtice,  $\Phi(\phi) = q_n\phi + \phi_0$ , é solução para fita de Möbius, com a condição de contorno proposta. A carga topológica dessa configuração pode ser calculada como feito na equação (4.10). Assim,

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \oint_C \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\pi} \int_C \partial_\phi\Phi d\phi = q_n. \quad (4.17)$$

Deste modo, baseado em nossos resultados, podemos sugerir o cálculo da energia utilizando uma solução tipo vórtice, dada por  $\Phi = \zeta\phi + \phi_0$ ; usando essa solução na hamiltoniana (3.11). A energia será dada por,

$$E_{MRP} = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{k}} (\partial_\phi\Phi) dr d\phi \quad (4.18)$$

$$E_{MRP} = \zeta^2 \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{k}} dr d\phi \quad (4.19)$$

Como pode ser observado, a integração na variável  $\phi$  não pode ser calculada facilmente. Por isso, vamos fazer uma integração numérica usando o programa Mathematica 5.2, a fim de obtermos o gráfico da energia. Utilizando essa abordagem numérica foi estudada a variação da energia em diversas situações. Como pode ser visto na figura (4.14) e (4.15).

Na figura (4.14) nota-se que a energia diminui com o aumento de  $R$ , o que concorda com resultados encontrados em [13], onde também se trabalha com uma superfície não-simplesmente conexa, a saber, o toro. Naquela situação, também ocorre diminuição da energia com o aumento de  $R$ . Em tais circunstâncias, isso se dá porque no limite de  $R \rightarrow \infty$ , o toro efetivamente se tornava um *annulus* infinito (não um plano infinito) com raio externo e interno dados, respectivamente, por  $R - \pi r$  e  $R + \pi r$ . Para a fita de Möbius temos uma situação similar quando  $R \rightarrow \infty$  também temos um vórtice num *círculo infinito* de modo que a energia também se anularia. Pode ser observado que para variação da largura da fita a energia aumenta, o que é natural uma vez que temos uma maior superfície magnética contribuindo para a energia. Contudo, há um limite para esse aumento da largura, uma vez que, devido às peculiaridades da geometria de Möbius, para larguras grandes ( $L \gg R$ )

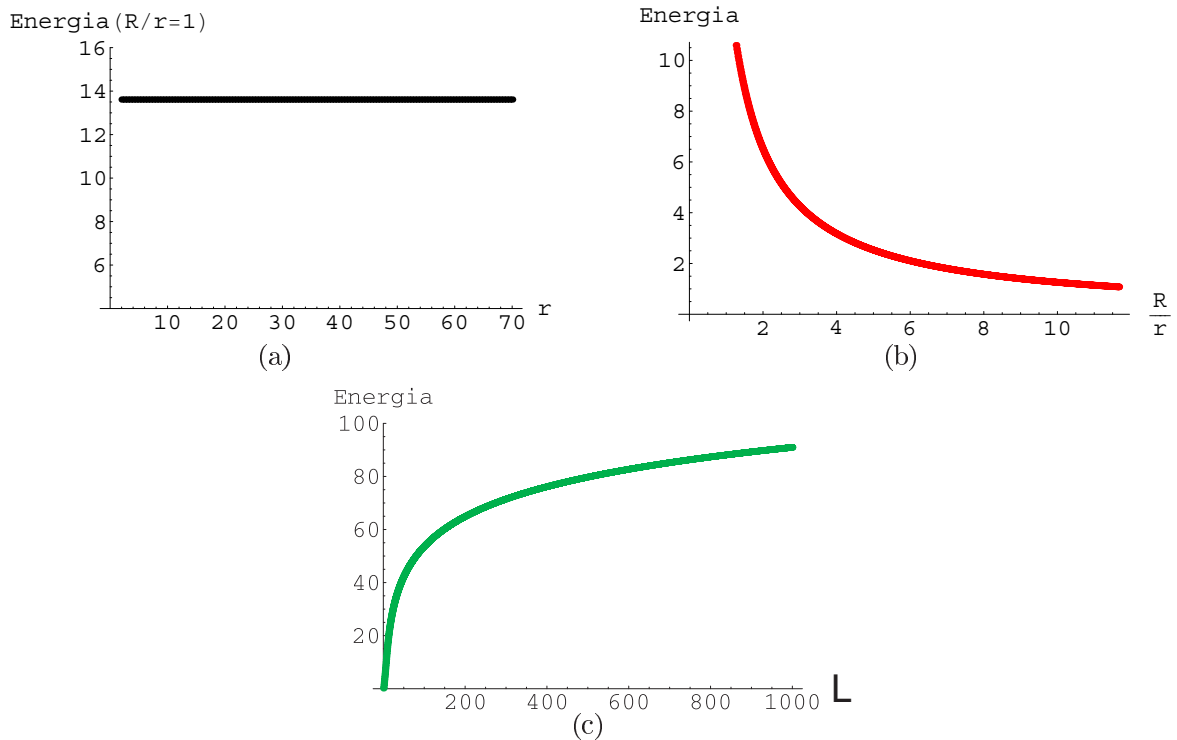


Figura 4.11: Análise da variação da energia para os casos **a)** Energia para a fita de Möbius quando a razão  $R/r = 1$  **b)** Energia variando com raio da fita de Möbius **c)** Energia variando com a largura da fita.

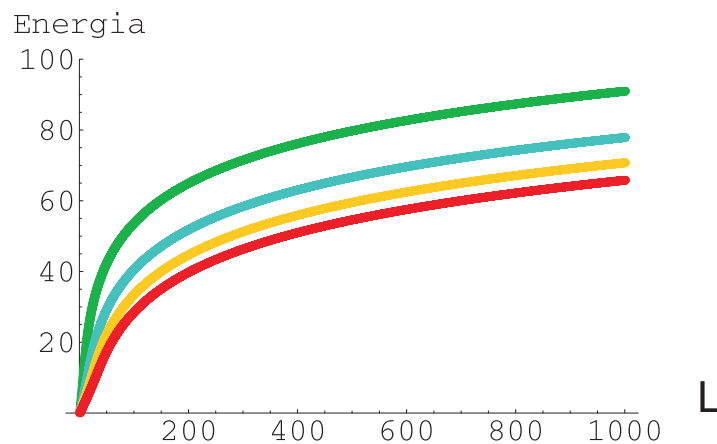


Figura 4.12: Variação da energia com a Largura para diferentes raios da fita de Möbius **a)**(Verde) $R = 8$ , **b)**(Azul) $R = 18$ , **c)**(Amarelo) $R = 28$ , **d)**(Vermelho) $R = 38$

ocorre auto-intercepção da fita, o que não é geometricamente realizável. Por fim, na figura (4.15) vemos que para valores de raios da fita cada vez maiores a energia, embora, aumente com a largura, sofre uma diminuição com o aumento do raio.

# Conclusões gerais e perspectivas

Tendo estudado o MRP para spins clássicos na fita de Möbius, pode ser observado que os efeitos da curvatura causam um acoplamento nas equações de campo encontradas, tornando-as mais complicadas de resolver quando comparadas com suas contrapartidas em outras geometrias curvas, como no caso esférico[11], toroidal[13] e pseudoesférico[14]. Utilizando o método de diferenças finitas para a determinação das soluções numéricas de equações diferenciais parciais, foi possível obter excitações tipo-vórtice na fita de Möbius baseado na análise dos resultados numéricos. Através, dessa análise foi verificado que para a fita de Möbius a condição de contorno adotada é razoável e as soluções encontradas para os casos  $R \gg r$  e  $L \approx 0$  concordam com os resultados encontrados nos casos limites  $R \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ . Generalizando esses resultados, foi verificado que para a fita de Möbius com largura da ordem de grandeza do raio e menor que este, a solução-tipo vórtice é uma solução para excitações de spins nessa superfície com carga topológica  $q_n$  inteira, o que garante que as soluções são soluções topologicamente estáveis. Verificou-se também que a energia dessa configuração decresce com o aumento do raio da fita.

O presente trabalho pode ser utilizado como auxílio no estudo de estruturas ferromagnéticas, com geometrias não usuais, com curvatura não-trivial, para os casos nos quais os componentes do material possuam spins suficientemente grandes, para que as aproximações de spins clássicos sejam válidas. Nesses casos de estruturas finitas, além da energia de troca (aqui considerada), devemos acrescentar também o termo magnetostático, advindo de cargas magnéticas superficiais associadas à distribuição da magnetização.

Como reportado, materiais sintetizados na forma da geometria de Möbius já foram obtidos. Em alguns trabalhos foram utilizadas simulação computacional de materiais de grafeno na geometria de Möbius com o objetivo de analisar a estabilidade estrutural nessa geometria e suas propriedades eletrônicas [52, 53]. Dessa forma, o estudo da geometria de Möbius tem muito a oferecer para o entendimento de fenômenos físicos sensíveis à geometria e topologia desse suporte.

Como perspectivas, buscaremos estudar a fita de Möbius utilizando uma parametri-

zação não-canônica usada nos trabalhos[22, 23, 24] buscando compreender a influência da curvatura nesses casos.

# Apêndice A

## Aproximação contínua do modelo de Heisenberg

Nesta seção, nós iremos obter a equação (2.7), que é a expressão para o limite contínuo do modelo de Heisenberg anisotrópico. Como foi visto anteriormente, o hamiltoniano de Heisenberg para interação entre primeiros vizinhos, numa rede bidimensional, é dada por:

$$H = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} H_{i,j} = -J' \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 + \lambda) S_j^z S_j^z). \quad (\text{A.1})$$

Aqui,  $\vec{S}_i$  é o operador que atua no sítio  $i$  da rede que interage com os sítios  $i + 1$ ,  $i + 2$ ,  $i - 1$  e  $i - 2$ . Essa hamiltoniana pode ainda ser escrita como (fazendo  $J = J'/2$ ):

$$H = -J \left[ \sum_i \sum_{\alpha=x,y,z} S_i^\alpha (S_{i+1}^\alpha + S_{i+2}^\alpha + S_{i-1}^\alpha + S_{i-2}^\alpha) + \lambda \sum_i S_i^z (S_{i+1}^z + S_{i+2}^z + S_{i-1}^z + S_{i-2}^z) \right]. \quad (\text{A.2})$$

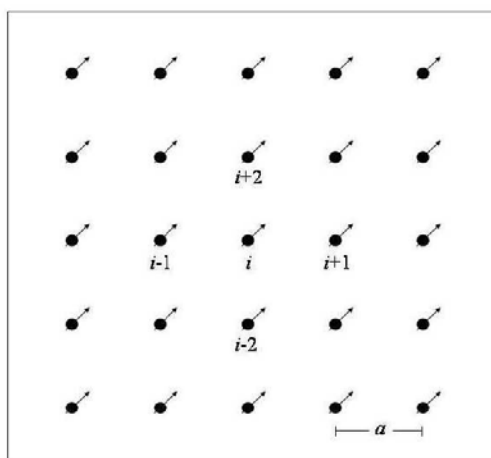


Figura A.1: Rede quadrada de spins indicando os quatro sítios que interagem com o sítio genérico  $i$ .

Também, podemos expandir as componentes de spin numa série de Taylor, com uma boa aproximação, até segunda ordem:

$$S_{i+1}^\alpha = S_i^\alpha + a\partial_x S_i^\alpha + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 S_i^\alpha + \dots, \quad (\text{A.3})$$

$$S_{i-1}^\alpha = S_i^\alpha - a\partial_x S_i^\alpha + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 S_i^\alpha - \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$S_{i+2}^\alpha = S_i^\alpha + a\partial_y S_i^\alpha + \frac{a^2}{2}\partial_y^2 S_i^\alpha + \dots, \quad (\text{A.5})$$

$$S_{i-2}^\alpha = S_i^\alpha - a\partial_y S_i^\alpha + \frac{a^2}{2}\partial_y^2 S_i^\alpha - \dots, \quad (\text{A.6})$$

onde  $a$  é um espaçamento de rede. Dessa forma, a hamiltoniana (A.7) poderá ser escrita como:

$$\begin{aligned} H = & -J \sum_i \sum_{\alpha=x,y,z} S_i^\alpha [4S_i^\alpha + a^2(\frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2})] \\ & -J\lambda \sum_i S_i^z [4S_i^z + a^2(\frac{\partial^2 S_i^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_i^z}{\partial y^2})]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Como estamos analisando o limite contínuo, vamos substituir o somatório em  $i$  pela integral dupla  $\int \int \frac{dxdy}{a^2}$ , temos que:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{4J\bar{S}^2}{a^2} \int \int dxdy - J \sum_{\alpha=x,y} \int \int S^\alpha [\frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2}] dxdy \\ & -J(1+\lambda) \int \int S^z [\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^z}{\partial y^2}] dxdy. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

No limite termodinâmico, onde o tamanho do sistema tende ao infinito, o primeiro termo diverge e deve ser subtraído da hamiltoniana original. Assim, obtemos:

$$H = -J \sum_{\alpha=x,y} \int \int S^\alpha [\frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^\alpha}{\partial y^2}] dxdy - J(1+\lambda) \int \int S^z [\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S^z}{\partial y^2}] dxdy. \quad (\text{A.9})$$

Integrando por partes os termos que sobraram, chegamos à seguinte expressão:

$$H = J \int \int \sum_{\alpha=x,y,z} (1 + \delta_{\alpha 3}\lambda) [(\frac{\partial S^\alpha}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S^\alpha}{\partial y})^2] dxdy, \quad (\text{A.10})$$

que pode ainda ser reescrita como:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 \delta_{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3}\lambda) (\frac{\partial S^a}{\partial x_i}) (\frac{\partial S^b}{\partial x_j}) dxdy, \quad (\text{A.11})$$

onde  $\delta_{ij}$  assume o valor 1 se  $i = j$  e 0, caso contrário.  $h_{ab}$  é o elemento da métrica do espaço de spins, o qual, no caso de parametrizarmos os spins em coordenadas cartesianas, será dado por  $h_{ab} = \delta_{ab}$ .

A transformação do elemento de superfície de coordenadas cartesianas para um sistema qualquer é dado por [33]:

$$dxdy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu_1} & \frac{\partial x}{\partial \mu_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu_1} & \frac{\partial y}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} d\mu_1 d\mu_2. \quad (\text{A.12})$$

Então, essa transformação pode ser usada para descrever a hamiltoniana (A.10) numa superfície arbitrária qualquer. Temos então que:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 \delta^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial x_j} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu_1} & \frac{\partial x}{\partial \mu_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu_1} & \frac{\partial y}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} d\mu_1 d\mu_2. \quad (\text{A.13})$$

O termo  $\delta^{ij}$  conta para o elemento da métrica no espaço parametrizado em coordenadas cartesianas. No caso de trabalharmos numa superfície arbitrária, com os elementos de métrica dados por  $g_{ij}$ , a última expressão será escrita como:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 \delta_{ij} g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left( \frac{\partial S^a}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial S^b}{\partial x_j} \right) \sqrt{|g|} d\mu_1 d\mu_2, \quad (\text{A.14})$$

que é a expressão dada em (2.7). Aqui definimos,

$$\sqrt{|g|} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu_1} & \frac{\partial x}{\partial \mu_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \mu_1} & \frac{\partial y}{\partial \mu_2} \end{vmatrix} \quad (\text{A.15})$$

# Apêndice B

## Alguns conceitos de Homotopia

Nosso objetivo nesse apêndice não é fazer uma revisão desse assunto com rigor matemático e sim abordar o tema buscando contextualizá-lo num ambiente de Física de Matéria Condensada, mais especificamente, iremos abordar alguns aspectos no estudo de sistemas ordenados. Os aspectos tratados nesse apêndice podem ser aprofundados nos trabalhos de Shankar [34] e no trabalho de Mermin [6].

Seja um sistema ordenado descrito pelo campo  $\varphi(\vec{x})$  definido sobre os pontos  $\vec{x}$  de algum domínio espacial  $X$ . O campo  $\varphi$  pode ser considerado como um vetor de spin  $\vec{s}$  se o sistema é um ferromagneto, ou o vetor diretor  $\vec{n}$  se o sistema é um líquido nemático, etc. Vamos denotar por  $Y$ , o contorno dos possíveis valores de  $\varphi$ , por exemplo,  $Y = S^1$  é um círculo, se  $\varphi$  é um vetor de duas componentes e comprimento fixo ( $\varphi = \varphi_1\hat{x} + \varphi_2\hat{y}$ , tal que  $|\varphi^2| = 1$ );  $Y = S^2$  se  $\varphi$  é um vetor de três componentes de comprimento fixo ( $\varphi = \varphi_1\hat{x} + \varphi_2\hat{y} + \varphi_3\hat{z}$ , tal que  $|\varphi^2| = 1$ ); e assim por diante.

Agora, seja  $X$  um sistema unidimensional parametrizado por  $0 \leq x \leq 2\pi$  e algum campo  $\varphi(\vec{x})$  tal que a cada ponto  $x_i \in X$  há um ponto imagem  $\varphi(x_i)$  em  $Y$ . Como  $x$  varia de 0 a  $2\pi$ , o ponto imagem traça uma curva em  $Y$  iniciando em  $\varphi(0)$  e terminando em  $\varphi(2\pi)$ . Vamos considerar os campos que obedecem à seguinte condição  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = \varphi_0$  onde  $\varphi_0$  é chamado de ponto base. Dessa forma os pontos imagem traçam uma curva fechada em  $Y$  ancorada em  $\varphi_0$ . Assim o estudo do sistema se reduz ao estudo do comportamento dos caminhos fechados (*loops*) em  $Y$ .

Vamos considerar a classificação das configurações de loops que são classificados em classes, tais que:

- Quaisquer dois loops pertencendo à mesma classe podem ser deformado continuamente um no outro. Como exemplo, um triângulo, um quadrado, um pentágono, e assim por diante, podem ser continuamente deformados para se obter um círculo. Sendo assim, podemos afirmar que essas figuras pertencem à mesma classe.

- Loops pertencentes a diferentes classes não podem ser continuamente deformadas um no outro.

Dessa forma, as classes são chamadas classes de homotopia e os membros de uma dada classe são ditos homotópicos um ao outro.

Convém aqui destacarmos os conceitos de superfícies simplesmente conexas e não-simplesmente conexas: superfície *simplesmente conexas* é aquela na qual qualquer caminho fechado pode ser continuamente reduzido a um ponto; e superfície *não-simplesmente conexas* ocorre quando nem todas as curvas fechadas sobre esta podem ser continuamente deformadas a um ponto.

Vamos ver alguns exemplos. Considere o caso de  $Y = E^2$  o espaço euclidiano bidimensional que pode ser identificado com o plano  $xy$ . Seja  $y_0$  um ponto qualquer do plano. É evidente que temos apenas uma classe de homotopia, pois qualquer loop sobre esta superfície pode ser deformado em outro, por meio de deformações contínuas, e particularmente, em um loop puntiforme em  $y(x_0)$ , onde  $y_0$  é um ponto qualquer sobre a superfície.

Consideremos agora,  $Y = E^2 - (0, 0)$ . Neste caso, temos o plano euclidiano menos um ponto. Este é um exemplo de uma superfície não-simplesmente conexa. Agora, seja  $y_0$  um ponto qualquer em  $Y$ . Podemos ver que qualquer loop que não envolve a origem pode ser continuamente deformado a um loop puntiforme em  $y_0$  enquanto aqueles que são fechados em torno da origem não o podem. Os loops podem circular a origem uma duas ou mais vezes, dessa forma podemos classificar os loops por meio de um inteiro  $m$ , onde a magnitude e o sinal de  $m$ , especificam o número de vezes e o sentido no qual a origem é envolvida. É claro que aplicações pertencentes a diferentes valores de  $m$  não são homotópicos. Considere o conjunto  $y^0, y^1, y^2, \dots$ , onde  $y^m$  representa todos os loops que circulam a origem  $m$  vezes. Este conjunto é chamado de *primeiro grupo de homotopia* de  $Y$ , e denotamos por  $\Pi_1(Y)$ . O subscrite 1 nos diz que  $X$  adquire a forma de uma superfície fechada unidimensional, isto é, um loop que é topologicamente equivalente a um círculo,  $S^1$ . Como pode ser observado existe uma correspondência um para um entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto  $\Pi_1[E^2 - (0, 0)]$ . O estudo desses grupos também revela que suas leis de são idênticas à de adição entre correspondentes inteiros. Denotaremos por  $Z_\infty$  o conjunto de todos os inteiros que formam um grupo sob adição. Assim temos,

$$\Pi_1(E^2 - (0, 0)) = Z_\infty. \quad (\text{B.1})$$

Se a região  $X$  é uma região bidimensional e todos os pontos do contorno são mapeados

em um ponto  $y_0$ ,  $X$  assumirá a forma de uma superfície fechada bi-dimensional, topologicamente equivalente a uma superfície esférica  $S^2$ . O grupo em questão é o  $\Pi_2(Y)$ . De fato, enquanto vórtices (magnéticos em particular) são caracterizados por uma carga topológica associada ao primeiro grupo fundamental  $\Pi_1(Y)$ , isto é, adquirem uma carga topológica pelo mapeamento de um círculo de spins na superfície magnética em questão. Para as excitações solitônicas é preciso grupos superiores. No caso do magnetismo, tal grupo é  $\Pi_2(Y)$ , ou seja, o mapeamento deve envolver uma esfera de spins. Igualmente se  $X$  é uma região tri-dimensional do espaço, o grupo de estudo será o  $\Pi_3(Y)$ .

# Apêndice C

## Análise do parâmetro $k$

Para fazermos um estudo mais detalhado das equações de movimento é conveniente que antes façamos algumas observações sobre o termo  $k$  que aparece em nossas equações. Pode-se, por meio de uma verificação direta, observar que  $k$  é estritamente positivo, uma vez que,

$$k = R^2 + 2Rr \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{r^2}{4}(3 + 2 \cos \phi) = (r \cos(\phi/2) + R)^2 + \frac{r^2}{2} > 0 \quad (\text{C.1})$$

Observe os gráficos da figura (C.1) Quando consideramos o caso assintótico  $R/r \gg 1$ ,

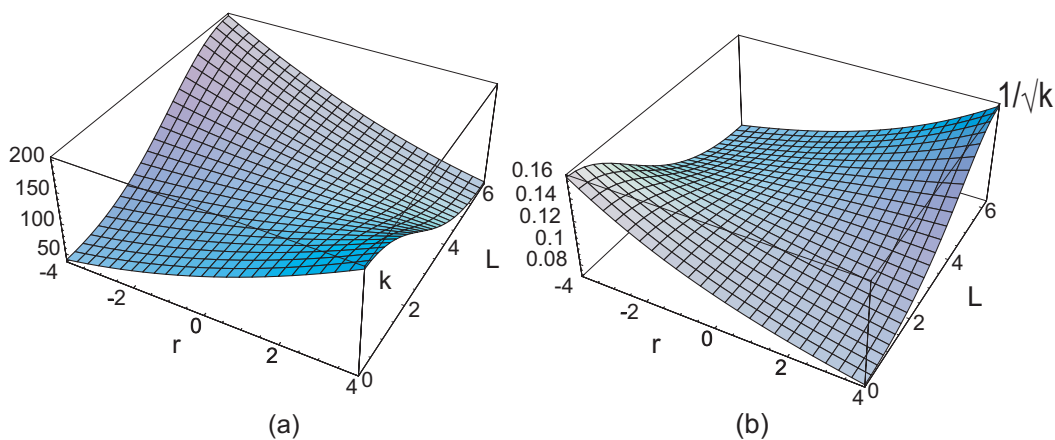


Figura C.1: **a)** Gráfico de  $k$  em função de  $r$  e  $\phi$  com  $L = 8, R = 10$ . **b)** Gráfico de  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  em função de  $r$  e  $\phi$  com  $L = 8, R = 10$ .

temos que o termo  $1/\sqrt{k}$  é aproximadamente constante. Como pode ser observado nas figuras (C.2) e (C.3):

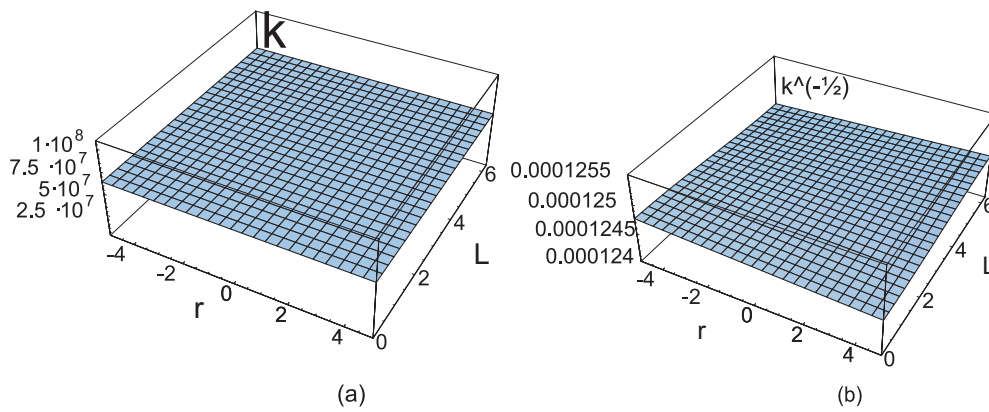


Figura C.2: **a)**Variação do parâmetro  $k$  em função de  $r$  e de  $\phi$  para  $R = 8000$ . **b)**Variação de  $1/\sqrt{k}$  em função de  $r$  e  $\phi$  para  $R = 8000$ .

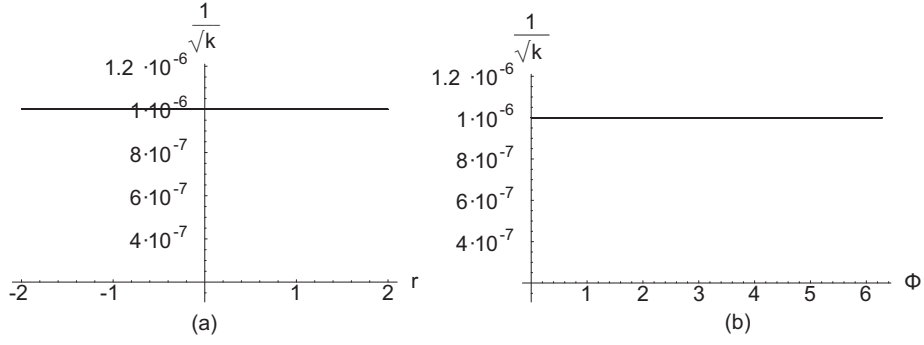


Figura C.3: **a)**Variação do parâmetro  $1/\sqrt{k}$  em função de  $r$ . **b)**Variação do parâmetro  $1/\sqrt{k}$  em função de  $\phi$ .Em **(a)**foram atribuídos vários valores para  $\phi$  em seguida plotados os gráficos de  $1/\sqrt{k}xr$ . Em **(b)**foram atribuídos vários valores de  $r$  e plotado o valor de  $1/\sqrt{k}x\phi$ .

Outra característica importante que podemos destacar é que  $k$  obedece à uma condição característica da fita de Möbius, a saber,

$$k(r, \phi) = k(-r, \phi + 2\pi) \quad (\text{C.2})$$

Também convém ressaltar que  $k$  se relaciona com a curvatura por meio da relação,

$$k^2 = - \left( \frac{R}{2} \right)^2 \frac{1}{G} \quad (\text{C.3})$$

Onde  $G$  é a curvatura Gaussiana da fita de Möbius que é estritamente negativa.

# Apêndice D

## Método de diferenças finitas

O método de diferenças finitas consiste, basicamente, na discretização da superfície (ou espaço) em questão, de modo a tornar a equação diferencial uma equação discreta. O método pode ser usado em várias aplicações no estudo de soluções numéricas de equações diferenciais tanto ordinárias quanto parciais. Os resultados aproximados obtidos pelo método melhoram à medida que tomamos incrementos cada vez menores. A implementação do método consiste de dois passos: (i) Substituição da equação original por sua forma em termos de diferenças finitas. (ii) obter solução destas equações para os valores discretos da função.

Para obtermos a equação discreta vamos considerar a expansão em Taylor de  $f(x - h)$  e  $f(x + h)$ , onde  $h$  é um incremento em  $x$  que pode ser escrita como;

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) - \dots, \quad (\text{D.1})$$

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \dots \quad (\text{D.2})$$

Fazendo  $f(x + h) - f(x - h)$  e ignorando os termos cúbicos e de ordem maior em  $h$  obtemos que,

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}, \quad (\text{D.3})$$

Agora fazendo  $f(x + h) + f(x - h)$  e novamente ignorando os termos de ordem superior obtemos que:

$$f''(x) \simeq \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}, \quad (\text{D.4})$$

que são as equações de diferenças finitas para a derivada primeira e para a derivada segunda. Utilizando essas equações e a equação diferencial em questão obtém-se a equação diferencial na forma discreta. Nesse método, dada a condição de contorno adequada podemos obter a solução aproximadas para o problema abordado. No caso de um EDP,

deve-se fazer uma pequena alteração nas equações (D.3) e (D.4) para incluir as respectivas variáveis do problema em questão. Para um problema onde  $f$  é função de duas variáveis  $x, y$  por exemplo, temos,

$$\partial_x f = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2p}, \quad (\text{D.5})$$

$$\partial_y f = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h}, \quad (\text{D.6})$$

$$\partial_x^2 f = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{p^2}, \quad (\text{D.7})$$

$$\partial_y^2 f = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}. \quad (\text{D.8})$$

No caso, de termos uma EDP de três ou mais variáveis o processo é análogo. Para a geração de dados vamos utilizar um algoritmo escrito em linguagem de programação Fortran 90 que pode ser visto no apêndice (D.2), e para manipulação de dados foi utilizado o Mathematica 5.2.

Antes de descrevermos o algoritmo para o problema da fita de Möbius, vamos aplicá-lo à uma superfície toroidal, na qual já temos resultados bem estabelecidos, sendo assim um bom contexto para verificação da validade do método.

## D.1 Soluções do MRP para a superfície toroidal

Nesta seção iremos abordar apenas os aspectos necessários para nossa análise, mais detalhes a respeito da superfície toroidal pode ser visto em [85]. A superfície do toro pode ser parametrizada em termos de  $\theta$  e  $\phi$  por:

$$x = (R + r \sin \theta) \cos \phi, \quad (\text{D.9})$$

$$y = (R + r \sin \theta) \sin \phi, \quad (\text{D.10})$$

$$z = r \cos \theta, \quad (\text{D.11})$$

sendo  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$  e  $r, R$  são parâmetros do toro.

A métrica covariante e contravariante para essa superfície é dada, respectivamente, por,

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} (R + r \sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

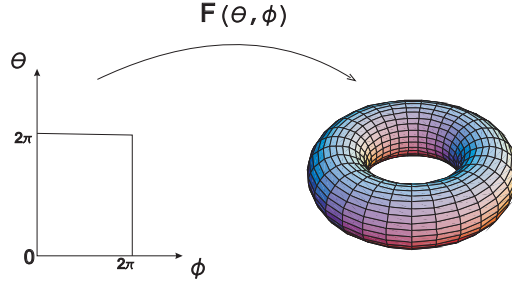


Figura D.1: Parametrização do toro em termos de  $\theta$  e  $\phi$  com  $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R+r \sin \theta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

O Hamiltoniano para o Modelo do Rotor Planar(MRP) é dado por,

$$H_{RP} = J \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} [\kappa'(\partial_\theta \Phi)^2 + \frac{1}{\kappa'}(\partial_\phi \Phi)^2] d\phi d\theta. \quad (\text{D.14})$$

Onde  $\kappa' = \frac{R+r \sin \theta}{r}$ . Utilizando a equação de Euler-Lagrange obtemos a seguinte equação de campo para  $\Phi$ ;

$$\partial_\theta [\kappa'(\partial_\theta \Phi)] + \partial_\phi \left[ \frac{1}{\kappa'}(\partial_\phi \Phi) \right] = 0 \quad (\text{D.15})$$

Que pode ser escrita como:

$$\partial_\theta^2 \Phi + \frac{1}{\kappa'^2} \partial_\phi^2 \Phi + \frac{1}{\kappa'} \frac{\partial \kappa'}{\partial \theta} \partial_\theta \Phi - \frac{1}{\kappa'^3} \frac{\partial \kappa'}{\partial \phi} \partial_\phi \Phi = 0, \quad (\text{D.16})$$

Observe que, fazendo  $\theta \rightarrow r$  e  $\kappa'^2 \rightarrow k$  na equação (D.16) voltamos na equação (3.12) que mostra a semelhança destes dois problemas.

A equação (D.16) pode ser discretizada quando usamos o análogo das equações (D.5)-(D.8) para o campo  $\Phi(\theta, \phi)$ .

As derivadas primeiras e segundas da função  $\Phi(\theta, \phi)$  em termos das variáveis  $\theta$  e  $\phi$  são;

$$\partial_\theta \Phi = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2p}, \quad (\text{D.17})$$

$$\partial_\phi \Phi = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h}, \quad (\text{D.18})$$

$$\partial_\theta^2 \Phi = \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{p^2}, \quad (\text{D.19})$$

$$\partial_\phi^2 \Phi = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2}. \quad (\text{D.20})$$

Onde  $p$  e  $h$  são os incrementos em  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente. Nessas equações o índice  $i$  refere-se à variável  $\phi$  e o índice  $j$  refere-se a variável  $\theta$ . Como vimos a superfície toroidal pode ser parametrizada em termos das variáveis  $\theta$  e  $\phi$  definidas no intervalo  $[0, 2\pi]$ . E o campo  $\Phi$  também pode ser mapeado em termos dessas variáveis.

Caso seja conhecido o comportamento da função no contorno para o problema, pode-se por meio de interações conhecer o comportamento da função no restante da superfície. De acordo com Carvalho [85], para o MRP no contorno os spins se comportam como vórtices. Dessa forma na região  $R$  os contornos devem satisfazer a essa condição. Isso no leva a impormos as seguintes condições de contorno  $\Phi(0, \phi) = \Phi(2\pi, \phi) = \phi + \pi/2$ ,  $\Phi(\theta, 0) = \pi/2$  e  $\Phi(\theta, 2\pi) = 5\pi/2$ . Com essas condições obtemos os seguintes resultados para superfície toroidal, vistos na figura (D.1).

Variação de  $\Phi$  x  $\phi$

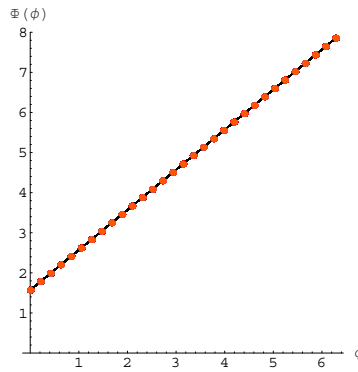


Figura D.2: Variação de  $\Phi$  em função de  $\phi$  para o caso toroidal.

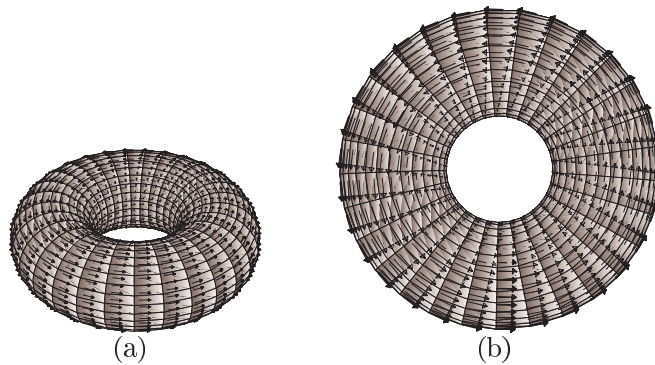


Figura D.3: Configuração de spins na superfície toroidal.

Como pode ser observado a solução obtida é uma solução tipo-vortice, uma vez que a variação de  $\Phi$  em termos de  $\phi$  é do tipo  $\Phi = q\phi + \phi_0$ , nesse caso a carga topológica é  $q \in \mathbb{Z}$ .

## D.2 Algoritmo

Algoritmo utilizado para geração de dados. Para a visualização dos dados gerados foi utilizado o programa Mathematica 5.2.

```
program Mobius_Strip implicit none
Real(8)::A(31,401,3),B(31,401,3),D(31,401,3),y(31,401),
      r(401),ph(31)
Real(8)::L,t,pi,p,dQi,dQj,h,Q Integer(4)::i,j,z,n,zz,s
Print*, 'Entre com a largura'
Read*,L
Print*, 'Raio'
Read*,t
pi=4*Atan(1.)
h=2*pi/30
p=L/400
z=1359711
zz=30 !Numero de divisões do arco
n=400 !Numero de divisões da
      largura

r(1)=-L/2.
r(401)=L/2.
ph(1)=0.
ph(31)=2*pi
y(1,1)=pi/2
y(1,401)=pi/2
y(31,1)=5*pi/2 y
(31,401)=5*pi/2
do i=2,30 !Definindo
as regiões de contorno
      ph(i)=(i-1)*h
      y(i,1)=ph(i)+pi/2
      y(i,401)=ph(i)+pi/2
end do
do j=2,400
      r(j)=-L/2+(j-1)*p
      y(1,j)=pi/2
      y(31,j)=5*pi/2
end do
do j=2,400 !Definindo os valores iniciais para a fita
      do i=2,30
            y(i,j)=10*sin((i**2-j)*2*pi/20)
      end do
end do
Print*, 'ok1'
do s=1,35000
      do j=2,400
            do i=2,30
                  Q= t**2+2*t*r(j)*cos(ph(i)/2)+0.25d0*(r(j)**2)*(3+2*cos(ph(i)))
                  dQi= -t*r(j)*sin(ph(i)/2)-0.5d0*(r(j)**2)*sin(ph(i))
                  dQj= 2*t*cos(ph(i)/2)+0.5d0*r(j)*(3+2*cos(ph(i)))
                  y(i,j)= 0.5d0*(((p*h)**2)/(Q*h**2+p**2))*(y(i,j+1)*(((2*Q+p*dQj)/(2*p**2)))+
                        +y(i,j-1)*(((2*Q-p*dQj)/(2*p**2)))+y(i+1,j)*(((4*Q-h*dQi)/(4*Q*h**2))+
                        +y(i-1,j)*(((4*Q+h*dQi)/(4*Q*h**2))))
            end do
      end do
Print*, 'ok2'
do q=1,401
Do i= 1,31
      A(i,q,1)=(t+r(q)*cos(ph(i)/2))*cos(ph(i))      !Montando a matriz das
                                                    coordenadas (sitios)
```

```

A(i,q,2)=(t+r(q)*cos(ph(i)/2))*sin(ph(i))
A(i,q,3)=r(q)*sin(ph(i)/2)
B(i,q,1)=cos(y(i,q))    !Montando a matriz do vetor de spins
B(i,q,2)=sin(y(i,q))
B(i,q,3)=0
D(i,q,1)=ph(i)    !Montando a matriz com todos os valores de Phi
D(i,q,2)=y(i,q)
D(i,q,3)=r(q)
open(1,file='CoordSit.dat',status='unknown')
  write(1,*) ,A(i,q,1),A(i,q,2),A(i,q,3)
open(2,file='phiXPhiG.dat',status='unknown')
write(2,*) ,D(i,q,1),D(i,q,2)
open(3,file='VetSpin.dat',status='unknown')
write(3,*) ,B(i,q,1),B(i,q,2),B(i,q,3)
end do
end do
  open(4,file='DadInic.dat',status='unknown')
  write(4,*) , 'Largura da Strip Mobiu=',L, 'Raio da Strip
    Mobius=',t, 'Nº de divisões da Largura=',n,
    'Nº de divisões do arco de 2Pi=',zz
open(5,file='Dados.dat',status='unknown')
  write(5,*) ,L,t,n,zz
close(1)
close(2)
close(3)
close(4)
close(5)
close(6)
close(7)
close(8)
end program Mobius_Strip

```

# Bibliografia

- [1] I. S. Oliveira e V. L. B. Jesus, "*Introdução a Física do Estado Sólido* ", Livraria da Física Editora, São Paulo, (2005).
- [2] C. Kittel, "*Introduction to Solid State Physics*", 7<sup>o</sup>ed., J.Wiley and Sons, New York, (1996)
- [3] R. Eisberg e R. Resnick, "*Física Quântica*", Ed. Campus, 19<sup>a</sup> Tiragem, Rio de Janeiro, (1979)
- [4] D. J. Griffiths, "*Introduction to Electrodynamics*", Prentice-Hall Inc., New Jersey (1999).
- [5] K. D. Machado, "*Teoria do Eletromagnetismo*", Vol. II, Editora UEPG, Ponta Grossa (2002).
- [6] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 591.
- [7] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, "*Principles of Condensed Matter Physics*", Cambridge Univ. Press, 3<sup>rd</sup> printing, (2006).
- [8] L. H. Ryder, "*Quantum Field Theory*", 2nd. ed., Cambridge University Press, (1996).
- [9] S. M. Rezende, "*Materiais e Dispositivos Eletrônicos*", Ed. Livraria da Física, 2<sup>a</sup>Edição, São Paulo, (2004).
- [10] A. Saxena, R. Dandoloff, *Phys Rev B*, **55** (1997) 11049
- [11] G.S. Milagre, W. A. Moura-Melo, *Phys. Lett. A* **368** (2007) 155.
- [12] W. A. Freitas, W. A. Moura-Melo, A. R. Pereira, *Phys. Lett. A* **336** (2005) 412.
- [13] V. L. Carvalho-Santos, et al, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 134450.
- [14] L.R.A. Belo, et al, *Phys. Lett. A* **365** (2007) 463.

- [15] S. Villain-Guillot and R. Dandoloff, *Phys. Rev B* **52**,(1995) 6712
- [16] W. A. Moura-Melo, et al, *Phys. Lett. A* **360** (2007) 472.
- [17] S. Tanda, et al, *Nature* **417** (2002) 397.
- [18] M. Hayashi and H. Ebisawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** (2002) 3495.
- [19] K. Yakubo, Y. Avishai, and D. Cohen, *Phys. Rev. B*,**67**,(2003) 125319.
- [20] K. Kaneda and Y. Okabe,*Phys. Rev. Lett.* **86**,(2001) 2134.
- [21] M. Yoneya, K. Kubok, *Phy Rev B*, **78** (2008) 064419
- [22] G. Schwarz, *Amer.Math. Monthly*, **97** (1990) 890.
- [23] G. Schwarz, *Pacific J. Math.* **143**, (1990),195.
- [24] C. Chicone, N. J. Kalton, "*Flat Embeddings of Möbius strip in  $R^3$* ". *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* **9** (2002) 31.
- [25] Y. Kurono, M. Umehara, *Geom. Dedicata* **134** (2008) 109-130.
- [26] J. Gravesen, M. Willatzen, *Phys. Rev. A*,**72** (2005) 032108.
- [27] A. P. Korte , G. H. M van der Heijden,"*Quantum states and localisation of developable Möbius*", arXiv:0807.0377v1 [cond-mat.mtrl-sci],(2008)
- [28] E. L. Starostin and G. H. M. van der Heijden, *Nature Materials*,**6** (2007) 563 .
- [29] R. Dandoloff, A. Saxena, *Eur. Phys. J. B*, **29** (2002), 265
- [30] G. Leon, "*The Story of Eletricity*", Dover, New York, (1988).
- [31] G. J. B. Rodriguez, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **20** (1998) 315.
- [32] D. M. Walba, R. M. Richards, *J. Am. Soc.*,**104** (1982) 3219-3221.
- [33] G. B. Arfken, H. J. Weber, "*Mathematical Methods for Physicists*", Sixth Editon, Elsevier Inc., (2005).
- [34] R. Shankar, *Le Journal de Physique* **38** (1977) 1405.

- [35] B.I. Dunlap, Phys. Rev. **B 76** (1992) 1933;  
J. Liu et al, Nature (London) **385** (1997) 780.
- [36] S. Zhao et al, Phys. Lett. **A 331** (2004) 238.
- [37] E. W. Lee, “*Magnetism Since 1947*” in A. P. Cracknell and R. A. Vaugan, “*Magnetism in Solids: Some Current Topics*”, Redwood Burn Limited, Trowbridge, (1981)
- [38] F. J. G. Landgraf e M. Emura, J. Magn. Mag. Mat. **242** (2002) 152.
- [39] S. B. C. Pergher, et al, Química Nova **28** (2005) 751.
- [40] V.L. Berezinskii, Sov. Phys. JETP **32** (1970) 493 ; *ibid* **34**, 610 (1972);  
J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, J. Phys. **C6**, (1973) 1181 .
- [41] A. Saxena, R. Dandoloff, T. Lookman, Physica **A 261** (1998) 13.
- [42] S. Villain-Guillot, R. Dandoloff, A. Saxena, Phys. Lett. **A 188** (1994) 343.
- [43] R. Dandoloff, S. Villain-Guillot, A. Saxena, A. R. Bishop, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 813.
- [44] A. Saxena, R. Dandoloff, Phys. Rev. **B 58** (1998) 563.
- [45] R. Dandoloff, A. Saxena, Eur. Phys. Jour. **B 29** (2002) 265.
- [46] S. Villain-Guillot, R. Dandoloff, A. Saxena, A. R. Bishop. Phys. Rev. **B 52** (1995) 6712.
- [47] A. R. Pereira, J. Mag. Magn. Mat. **285** (2005) 60.
- [48] A. Saxena, R. Dandoloff, Phys. Rev. **B 66** (2002) 104414.
- [49] P. J. Lin-Chung, A. K. Rajogopal, *J. Phys.: Condens. Matter* **6** (1994) 3697
- [50] R. Blinc, B. Zeks, *Phys. Rev. A*, **18** (1978) 740
- [51] H. Luc, E. K. Maschke, C. Mercier, J. H Misguich, H. M. Rizk, *Plasma Phys.* **16** (1974) 455
- [52] E.W.S Caetano, et al, *Langmuir, Art. ASAP.*, DOI: **10.1021/Ia803929f** (2009)  
Downloaded from <http://pubs.acs.org>.

- [53] E.W.S Caetano, et al, *J.Chem.Phys.* **128** (2008) 164719.
- [54] P. Raumonon, S. Suuriniemi, T. Tarhasaari, L. Kettunem, *IEEE Trans* **44** (2008) 1146
- [55] P.L. De Vries, *A First Course in Computational Physics*, J. Wiley, New York. 1994
- [56] G.'t Hooft, Nucl. Phys. **B 72** (1974) 461; *ibid.* **B 75** (1974) 461.
- [57] E. Witten, Nucl. Phys. **B 223** (1983) 422; *ibid.* **B 223** (1983) 433.
- [58] O.-Y. Zhong-Can, Phys. Rev. **A 41** (1990) 4517.
- [59] H. Jian- Guo, O.-Y Zhong-Can, Phys. Rev. **E 47** (1993) 461.
- [60] A. Wachowiak, et al, Science **298** (2002) 577.
- [61] M. Rahm, et al, App. Phys. Lett. **85** (2004) 1553; M. Rahm, J. Stahl, D. Weiss, App. Phys. Lett. **87** (2005) 182107; A. R. Pereira, et al, J. Appl. Phys. **101** (2007) 034310.
- [62] V. P. Kravchuk, D. D. Sheka, Y. B. Gaididei, Magn. Mag. Mat. **310** (2007) 116.
- [63] P. Voll, N. apRoberts-Warren, R. J. Zieve, "Surface Curvature and Vortex Stability", arXiv:cond-mat/0601395 v1 (2006).
- [64] F. Raissi, Appl. Phys. Lett. **86** (2005) 263503.
- [65] J. Li, C. Rau, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 107201.
- [66] B. Van Waeyenberge, et al, Nature **444** (2006) 461.
- [67] A. Krishnan, *et al*, Nature **388** (1997) 51.
- [68] C. A. Ross, *et al*, J. Appl. Phys. **89** (2001) 1310; *ibid* 91 (2002) 6848.
- [69] R. Dandoloff, *et al*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 813.
- [70] K. S. Buchananet, et al, Phys. Rev. **B 74**, (2006) 064404.
- [71] X. Xing, "Geometry and Topology of 1D Translational Order on Curved Surface", arXiv:0708.3182v1 [cond-mat.soft], (2007).

- [72] S. Gupta, et al, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 143201.
- [73] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, Phys. Rev. **A 74** (2006) 065601.
- [74] H. Watanabe, et al, App. Phys. Lett. **78** (2001) 2928.
- [75] M. M. Hingorani, M. O'Donnell, Nature Rev. Mol. Cell. Biology **1** (2000) 22.
- [76] J. Benoit, R. Dandoloff, Phys. Lett. **A 248** (1998) 439.
- [77] S. R. A. Salinas, "*Introdução à Física Estatística*", edusp, São Paulo (2005).
- [78] S. Wolfram, "*Mathematica*", Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999).
- [79] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 2nd ed. Boca Raton, (1997).
- [80] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 49.
- [81] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, JETP Lett, **22** (1975) 245.
- [82] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "*Table of Integrals, Series and Products*", 7<sup>th</sup> ed., (2007) 171.
- [83] B. A. Ivanov, C. E. Zaspel, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 027205.
- [84] BELO, Leandro Reibeiro Andrade. *Modelo de Heisenberg em um Espaço com Curvatura Negativa: Excitações Topológicas de Spin na Pseudo-Esfera*. 2007, 68f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2007.
- [85] SANTOS, Vagson Luiz de Carvalho. *Soluções Topológicas de spins no toro*. 2008, 74f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.
- [86] X. Michalet, D. Bensimon, B. Fourcade, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 168.
- [87] J. Roustekoski, J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3934.
- [88] T. S. Li, M. F. Lin, Phys. Rev. **B 76** (2007) 073409.
- [89] J. D. M. Vianna, A. Fazzio, S. Canuto, "*Teoria Quântica de Móléculs e Sólidos: Simulação Computacional*", Editora Livraria da Física, São Paulo (2004).