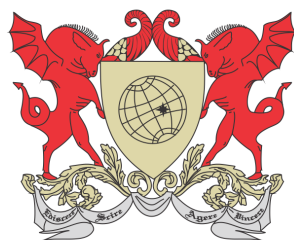


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



DANIEL FRANCISCO DOS SANTOS

USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS COMO  
FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DE  
MATEMÁTICA

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2017

DANIEL FRANCISCO DOS SANTOS

**USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS COMO  
FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DE  
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,  
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal**

T

S237u  
2017 Santos, Daniel Francisco dos, 2017-  
Uso de planilhas eletrônicas como ferramentas de apoio ao ensino de matemática / Daniel Francisco dos Santos. – Florestal, MG, 2017.  
x, 60f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Luis Alberto D'Afonseca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.58-60.

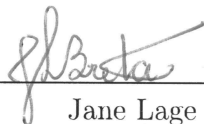
1. Matemática no ensino médio. 2. Ensino de segundo grau. 3. Planilhas eletrônicas. 4. Matemática.. I. Universidade Federal de Viçosa. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

DANIEL FRANCISCO DOS SANTOS

**USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS COMO  
FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DE  
MATEMÁTICA**

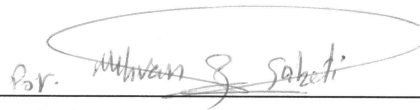
Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,  
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 14 de julho de 2017.



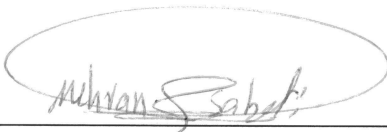
---

Jane Lage Bretas



---

Elisângela Aparecida de Oliveira



---

Mehran Sabeti  
(Coorientador)



---

Luis Alberto D'Afonseca  
(Orientador)

# Dedicatória

---

Dedico este trabalho a quem mais me apoiou e incentivou,  
minha querida esposa Janaína.

# Agradecimentos

---

Agradeço a Deus, que está sempre a frente de tudo, à minha família, pelo apoio e paciência, principalmente à minha esposa Janaína, meus filhos Ana Luiza e João Lucas e minha mãe Maria Verônica. Aos colegas de turma, pois me ajudaram muito ao longo do curso e a meu orientador, Dr. Luis Alberto D'Afonseca, sem o qual não conseguiria alcançar êxito nesta última etapa.

# Lista de Figuras

---

1.1	Percentual de alunos dentro de cada nível de proficiência, ou conhecimento, conforme resultado das avaliações do Saeb, aplicadas em 2015. Dados extraídos do Inep [21]. . . . .	2
1.2	Ranking das unidades federativas brasileiras. O critério utilizado são as notas de Matemática dos alunos do 3º ano do ensino médio, na avaliação do Saeb em 2015. . . . .	3
2.1	Gráfico da Função Afim $f(x) = -2x + 0,7$ . Utilizamos, na planilha, valores de $x$ , com intervalos de um décimo. Além de usarmos $x \in [-5, 5]$ . . . . .	7
2.2	Gráfico da Função Afim $f(x) = x + 1$ , à qual pertencem os pontos $A = (-4, -3)$ e $B = (3, 4)$ . . . . .	8
2.3	Gráfico de uma função afim a partir de seu coeficiente angular (1) e das coordenadas de um ponto $P = (1, 2)$ . . . . .	9
2.4	Parábola obtida a partir da função quadrática $f(x) = -x^2 - x + 5$ . . . . .	11
2.5	Imagem do jogo Angry Birds. Extraído de [2] . . . . .	11
2.6	Parábola descrevendo a trajetória dos Angry Bird passando sobre um muro e atingindo o alvo. . . . .	12
2.7	Descrição dos valores guardados diariamente e o acumulado, ao longo de 30 dias. . . . .	13
2.8	Curva obtida a partir da função exponencial $f(x) = -2 + 3 \times 2^{2x-4}$ . . . . .	14
2.9	Gráfico de função exponencial, com assíntota horizontal, que está desenhada com uma linha tracejada. . . . .	15
2.10	Tabela com alguns valores inteiros para logaritmos. Destaque para a célula C2, que mostra a função utilizada. . . . .	15
2.11	Gráficos das funções inversas $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log(x)$ . Mostrando a simetria dos dois gráficos, com relação à reta $y = x$ . . . . .	16
2.12	Círculo de raio unitário, com destaque para um arco de 1 radiano. . . . .	17
2.13	Seno e Cosseno do arco de um radiano, em um círculo de raio igual a 1. O ponto A é a extremidade do arco, que tem origem no ponto (1,0). . . . .	18
2.14	Função seno transladada, $4f(x) = 2,5 \sin(2x + 0) + 1$ . . . . .	19
2.15	Função cosseno transladada, $f(x) = 2 \cos(2x + 2) + 2$ . . . . .	20

3.1	Os 28 primeiros termos da PA de primeiro termo igual a $-24$ e razão igual a $2$ .	22
3.2	Os losangos representam os 30 primeiros termos de uma PA e os pontos triangulares mostram a soma desses mesmos termos.	23
3.3	Termos de uma PG, criados a partir do 1º termo e da razão da PG.	24
3.4	O gráfico mostra os 15 primeiros termos de duas progressões geométricas. Ambas com $a_1 = 50$ , uma decrescente com razão $(q) = 0,9$ e outra crescente, de razão $(q) = 1,08$ .	25
3.5	PG oscilante, com $a_1 = 100$ e $q = -0,9$	25
3.6	PG infinita, cuja soma dos termos tende a $1,25$ . Tendo $a_1 = 0,25$ e $q = 0,8$	26
3.7	PG infinita, cuja soma dos termos tende ao infinito. Com $a_1 = 0,25$ e $q = 1,11$	26
3.8	O campo de instruções informa como deverão ser cobrados os juros após o vencimento.	27
3.9	Para períodos de tempo menores que o período de taxaço, os juros simples são maiores ou iguais que os juros compostos.	28
3.10	Comparação de um financiamento de R\$1000,00 em dois sistemas de amortizaço, SAC e Price, em 10 parcelas postecipadas, com taxa de 5% ao período.	30
3.11	Crescimento populacional segundo os modelos de Malthus e Verhous, exemplos de sequências numéricas[10].	31
4.1	Planta de uma casa, utilizada para cálculo de áreas.	33
4.2	Cálculo de razões trigonométricas, área, hipotenusa e ângulo de um triângulo retângulo.	34
4.3	Cubo de aresta $a$ , circunscrito à esfera de raio $r$ e inscrito na esfera de raio $R$ .	35
4.4	A distância $d$ entre dois pontos, $A$ e $B$ , calculada a partir de seus pares ordenados.	36
4.5	Área de um pentágono irregular e não-convexo, calculada pelo método prático de Gauss.	36
5.1	Contagem do número de pessoas do sexo masculino e do sexo feminino, em um grupo de 12 pessoas.	38
5.2	Proporções encontradas em uma bicicleta, a partir das razões entre o número de dentes de seus câmbios – pedais e catracas.	39
5.3	Análise de relações algébricas, a partir da substituição das variáveis por valores diversos.	40
5.4	Algumas das operações com números complexos, que podem ser feitas em planilha eletrônica. Os cálculos foram feitos com base nos complexos $Z = 2 + i$ e $W = 3 - 4i$ .	41
5.5	Triângulo de Pascal, com 14 linhas e 14 colunas, contadas a partir de zero (0).	43
5.6	Solução dos itens (a) e (b) da questão 01 da avaliação 1 – MA12 – 2015.1 do PROFMAT.	44

---

5.7	Pesquisa entre 16, alunos quanto ao sexo e sobre o gênero preferido de filme.	45
5.8	Exemplos de gráficos gerados por planilhas eletrônicas. . . . .	46
8.1	Alteração do nome da célula A1 da planilha eletrônica. . . . .	53
8.2	Uso de uma célula com nome alterado, em uma fórmula. . . . .	54
8.3	Troca do nome de uma célula no Excel. . . . .	54
8.4	Segundo passo na construção de uma parábola. . . . .	55
8.5	Gráfico da função quadrática. . . . .	56
8.6	Formatação do gráfico da função quadrática, dando destaque para as raízes da função. . . . .	56
8.7	Caixa de diálogo para inserir funções. . . . .	57
8.8	Caixa de diálogo para inserir a função seno. . . . .	57

# Resumo

---

SANTOS, Daniel Francisco dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017. **Uso de Planilhas Eletrônicas como Ferramentas de Apoio ao Ensino de Matemática**. Orientador: Luís Alberto D'Afonseca. Coorientadores: Mehran Sabeti e Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Apresentamos neste trabalho uma abordagem alternativa para temas desenvolvidos na Matemática do ensino médio com o uso de planilhas eletrônicas. Tomando como base os Conteúdos Básicos Comuns, definidos pela secretaria estadual de educação de Minas Gerais, mostramos que muitos dos tópicos trabalhados neste nível de ensino podem ser desenvolvidos nessas planilhas, como funções, sequências, geometria, contagem e análise de dados. A aplicação em sala de aula, mostrou que a abordagem diferenciada pode levar a um rendimento mais efetivo dos alunos, provocado pela forma de apresentação do conteúdo, em meio informatizado. Observou-se, também, a criação de um ambiente de maior cooperação entre os alunos, devido a seu maior ou menor grau de experiência e conhecimento em informática.

# Abstract

---

SANTOS, Daniel Francisco dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017. **Electronic spreadsheet as Educational tools to Support Mathematical Teaching.** Adviser: Luís Alberto D'Afonseca. Co-advisers: Mehran Sabeti and Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

In this work, we present an alternative approach to some High School Mathematics subjects using Electronic Spreadsheets. Based on State of Minas Gerais Common Basic Contents determinations, we show that many of these topics can be developed in such spreadsheets, such as functions, sequences, geometry, counting, and data analysis. The classroom application showed that this approach can lead to a more effective learning. Obtained by presenting the content in a computerized environment. We was also observed the creation of a collaborative environment among students, due to their heterogeneous degree of computer use expertise.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Funções</b>	<b>5</b>
2.1	Polinomial do Primeiro Grau . . . . .	6
2.1.1	Gráfico da Função Afim, dados os coeficientes . . . . .	6
2.1.2	Gráfico da Função Afim, dadas as coordenadas de dois pontos . . . . .	7
2.1.3	Gráfico da Função Afim, conhecendo-se um ponto e o coeficiente de variação . . . . .	9
2.2	Polinomial do Segundo Grau . . . . .	10
2.3	Exponencial . . . . .	12
2.4	Logarítmica . . . . .	14
2.5	Trigonométricas . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sequências Numéricas</b>	<b>21</b>
3.1	Progressões Aritméticas . . . . .	21
3.2	Progressões Geométricas . . . . .	23
3.3	Juros . . . . .	27
3.4	Crescimento Populacional . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Geometria e Medidas</b>	<b>32</b>
4.1	Geometria Plana . . . . .	32
4.2	Geometria Espacial . . . . .	33
4.3	Geometria Analítica . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Números, Contagem e Análise de Dados</b>	<b>38</b>
5.1	Números . . . . .	38
5.2	Números Complexos . . . . .	40
5.3	Contagem . . . . .	41
5.4	Análise de Dados . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Colocando em Prática</b>	<b>48</b>
6.0.1	Primeira aula . . . . .	48
6.0.2	Segunda aula . . . . .	49
6.0.3	Observações sobre as aulas. . . . .	50

<i>Sumário</i>	x
<b>7</b> <b>Considerações Finais</b>	<b>51</b>
<b>8</b> <b>Apêndice</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>58</b>

# Introdução

---

A tecnologia está, cada vez mais, presente em nosso cotidiano e é preciso se habituar ao uso de seus recursos disponíveis. O professor deve estar atento a isso e procurar aprender e utilizar tais recursos em prol do aprendizado nas aulas. Os alunos, que são nativos digitais [8], estão constantemente utilizando o computador ou mesmo os celulares entre outros aparelhos; e é papel do professor sugerir, orientar e oportunizar atividades que façam uso desses equipamentos da maneira mais proveitosa possível.

Há, hoje em dia, uma grande quantidade de recursos disponíveis, principalmente na internet, que facilitam o trabalho do professor. Assim, neste trabalho dissertaremos sobre o uso de planilhas eletrônicas, tipo Excel ou Calc, para serem utilizadas como ferramentas didáticas pelos professores de matemática do ensino médio. O Excel[29] é um Software desenvolvido pela empresa Microsoft, enquanto o Calc [24] é um Software livre do Libre Office. Ambos são compostos por uma planilha com células organizadas em linhas e colunas. Outras planilhas eletrônicas, como o Google Planilhas, Planilha virtual [17] desenvolvida pelo Google e associada ao Gmail, por exemplo, também podem ser utilizadas e, muitas das sugestões aqui apresentadas podem ser aplicadas através dessas e de outras planilhas. Mas, por que e como usar planilhas eletrônicas para as aulas de Matemática?

Optamos aqui pelo uso de planilhas eletrônicas pelo fato de serem facilmente acessadas e utilizadas por professores e alunos. Seu uso nas aulas de Matemática pode se dar de maneiras variadas, os próprios livros didáticos trazem referências sobre o uso de planilhas eletrônicas, como na construção de gráficos de funções [11] e nos cálculos estatísticos [12].

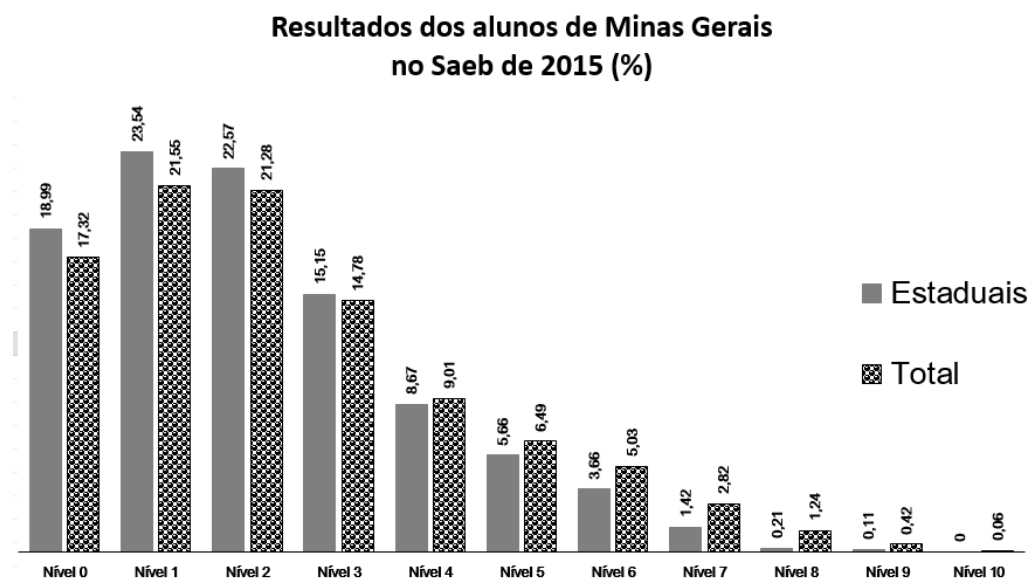
Buscando olhar a educação como descrito no objetivo do PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), vimos que “O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública” [34], damos nesse trabalho, ênfase no ensino de Matemática nas escolas públicas com foco nos conteúdos apresentados no CBC (Conteúdos Básicos Comuns)[7], pois a maior parte das nossas escolas públicas de ensino médio, em Minas Gerais, são estaduais.

A resolução nº 666 de 7 de abril de 2005, da secretaria de estado de educação

de Minas Gerais, estabelece os Conteúdos Básicos Comuns - CBCs ensinados obrigatoriamente pelas unidades de ensino estaduais. Essa resolução estabeleceu eixos temáticos e tópicos trabalhados em cada conteúdo, incluindo Matemática para o ensino médio. Inicialmente ficava a cargo das escolas a distribuição dos conteúdos nos três anos do ensino médio; mas atualmente os CBCs já especificam quais conteúdos de matemática devem ser trabalhados em cada ano do ensino médio.

Uma forma de garantir que o professor trabalhe todo conteúdo do CBC, é avaliar anualmente os alunos das escolas estaduais de Minas Gerais através de um sistema próprio de avaliação – o SIMAVE (Sistema Mineiro de avaliação da educação pública), que existe desde o ano 2000 e, em 2005 passou a fazer suas avaliações com base nos CBCs. Mas os alunos das escolas públicas mineiras também são avaliados por outras avaliações externas como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e o Saeb (Sistema Nacional da Educação Básica). Como têm se saído esses alunos?

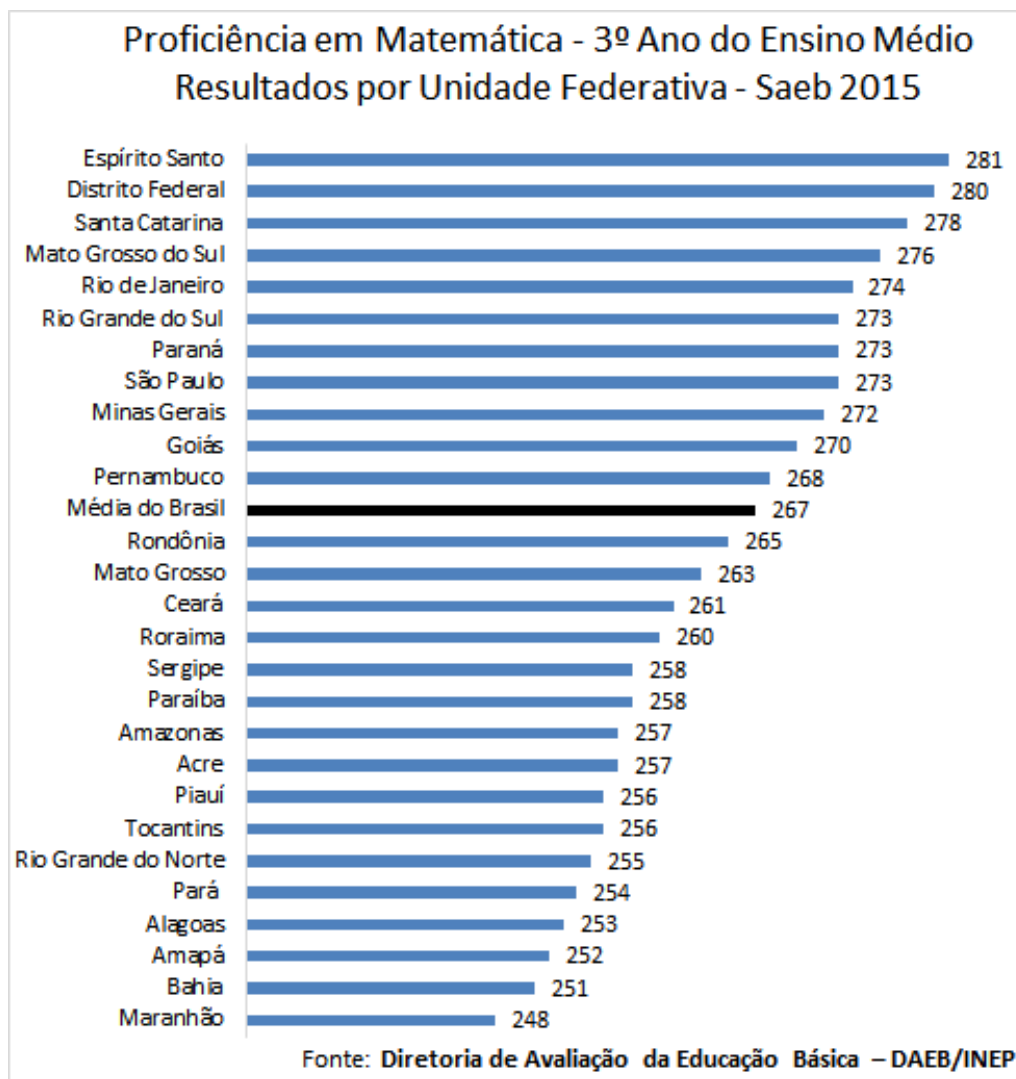
Os últimos resultados disponibilizados pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), para o Saeb, são das avaliações de 2015, quando os alunos participantes tiveram seus resultados divididos em 11 níveis de proficiência, do nível 0 ao nível 10, usados para medir o conhecimento adquirido pelos alunos. O resultado das escolas estaduais de Minas Gerais, em Matemática, mostra que 80,25% dos alunos, do 3º ano do ensino médio, estão nos quatro níveis de menor proficiência (do 0 ao 3), enquanto que apenas 1,74% estão nos quatro níveis de proficiência mais elevada. Há de se destacar que não tem um aluno sequer no nível 10 (Fig. 1.1) [21].



**Figura 1.1:** Percentual de alunos dentro de cada nível de proficiência, ou conhecimento, conforme resultado das avaliações do Saeb, aplicadas em 2015. Dados extraídos do Inep [21].

Ao considerarmos todas as redes de ensino de Minas Gerais, o nível dos alunos melhora um pouco, passando a ser 74,93% nos quatros níveis mais baixos e 4,54% nos quatro mais elevados. Ainda assim o resultado é ruim e preocupante quanto

ao aprendizado em Matemática dos alunos que estão concluindo a educação básica em Minas Gerais. A situação nacional é ainda pior, pois analisando as médias de proficiência do Saeb de 2015, nota-se que 18 estados brasileiros ficaram abaixo de Minas Gerais, considerando o resultado em Matemática para o 3º ano do ensino médio (Fig. 1.2) [21].



**Figura 1.2:** Ranking das unidades federativas brasileiras. O critério utilizado são as notas de Matemática dos alunos do 3º ano do ensino médio, na avaliação do Saeb em 2015.

Os resultados do SIMAVE também mostram que a maioria dos alunos que concluem a educação básica nas escolas públicas de Minas Gerais apresentam baixo desempenho. Não vamos apresentar aqui os resultados porque nos últimos dois anos a escala de proficiência desse sistema de avaliação foi alterada, o que pode mascarar um pouco os resultados, se não levarmos em conta outros anos anteriores.

Estes resultados mostram o quão defasado está o conhecimento Matemático básico no Brasil, em particular em Minas. Querendo contribuir para mudar um pouco esse quadro trataremos aqui de algumas estratégias diferentes, com o auxílio de planilhas eletrônicas, para o ensino de parte dos conteúdos da disciplina.

Há vários outros trabalhos que citam e utilizam planilhas para o estudo da Matemática, cada um com uma abordagem própria. Egressos do PROFMAT já trabalharam o uso de planilhas eletrônicas em vários assuntos, como cônicas – Fernando Carmo Batista (2014) [6] e Marcelo da Silva Pires (2015) [39] – matrizes – Jesiel Souza da Rocha (2015) [35], Josimar Moreira Rocha (2014) [36] e Marcos Roberto Fonseca Conceição (2013) [9] – tratamento da informação – Ricardo Moura da Silva (2015) [37] – Matemática Financeira – Enilton de Abreu Teixeira (2015) [1], Nilson de Sousa Santos (2014) [41] e Rodrigo Duda (2014) [13] – probabilidade – Edinei Jesus (2013) [32] e Jones Paulo Duarte (2013)[?]. O presente trabalho busca trilhar um caminho um pouco diferente, abrangendo uma quantidade maior de conteúdos da matemática do ensino médio, mas sem aprofundar em um determinado assunto. Consideraremos aqui que o leitor possua um mínimo de conhecimento de planilhas eletrônicas e, por isso, não detalharemos todas as fórmulas utilizadas, a fim de que não se torne muito cansativa a leitura. Para o leitor com dificuldades no uso dessas planilhas, sugerimos, primeiramente, a leitura de trabalhos que trazem uma introdução ao seu uso, como Nilson de Sousa Santos [41] e Enilton de Abreu Teixeira [1].

Buscaremos mostrar, ao longo deste trabalho, formas diversificadas de trabalhar vários assuntos da matemática básica, destacando figuras criadas nas planilhas eletrônicas. O intuito principal é o de levar ao professor de matemática, a opção de uma nova abordagem para ser trabalhada em sala de aula.

No Capítulo 2 abordaremos as funções, começando pelas polinomiais do primeiro e do segundo grau, seguidas pelas exponenciais, logarítmicas e, por fim, as trigonométricas. Não discorreremos de forma aprofundada sobre quaisquer dessas funções, nosso objetivo é dar sugestões alternativas, usando planilhas para que as mesmas sejam trabalhadas em sala de aula. Objetivo que será seguido nos demais capítulos.

O Capítulo 3 apresenta sequências numéricas, mais especificamente, as progressões aritméticas e geométricas, além dos juros, que foram incluídos aqui por se tratarem de sequências. Os assuntos aqui abordados vêm com o diferencial da representação gráfica, que normalmente não é apresentada aos alunos do ensino médio.

As geometrias plana, espacial e analítica, aparecem no Capítulo 4, juntamente com as medidas. Essa última, particularmente, encontra um ambiente muito favorável nas planilhas eletrônicas, cuja própria estrutura se assemelha a um plano cartesiano.

No Capítulo 5 falamos sobre os conjuntos numéricos, a contagem e a análise de dados.

O Capítulo 6 foi dedicado à descrição do planejamento e execução de duas aulas revisionais, sobre funções polinomiais de primeiro e segundo grau com a utilização de planilhas eletrônicas no laboratório de informática.

# Funções

---

Apesar das várias relações entre grandezas e valores que são trabalhados desde os primeiros anos do ensino fundamental, podemos considerar que o estudo das funções se inicia, geralmente, no final do ensino fundamental, quando os alunos iniciam o estudo do plano cartesiano e das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau. O prosseguimento do estudo das funções se dá logo no primeiro ano do ensino médio, quando são trabalhadas e aprofundadas as funções polinomiais do primeiro e do segundo grau, além da função exponencial e outras que podem ou não ser trabalhadas nesse ano.

A ordem como são abordadas as funções no ensino médio, assim como outros conteúdos, pode variar entre as redes e sistemas de ensino no Brasil. Em São Paulo, por exemplo, o currículo de Matemática e suas tecnologias, disponibilizado pela Secretaria de Estado da Educação [40], mostra que no primeiro ano do ensino médio, devem ser trabalhadas as funções polinomiais de primeiro e segundo graus, as exponenciais e também as logarítmicas. Ficando para o segundo ano, as funções trigonométricas.

Em Minas Gerais, o CBC [7] orienta que sejam trabalhadas, no primeiro ano do ensino médio, apenas as funções polinomiais de graus um e dois, mais a função exponencial. Ficando a função logarítmica para o segundo ano e a trigonométrica sendo dividida para o segundo e o terceiro ano, sendo deixada apenas como sugestão de tópico complementar para o terceiro ano.

Já os livros didáticos, aprovados pelo Ministério da Educação, apresentam outras estruturas, normalmente trazem no Volume 1, relativo ao primeiro ano do ensino médio, o estudo das funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica como no livro Matemática Paiva [31] e alguns trazem, ainda no primeiro volume, as funções trigonométricas ou, pelo menos, a trigonometria no círculo, dando uma prévia sobre funções, como Matemática Completa [15] – livro publicado em 2005, mas que fez parte do programa nacional do livro didático referente ao triênio 2009, 2010, 2011. A própria sociedade brasileira de matemática, através da Coleção do Professor de Matemática [25], defende o ensino de todas essas funções, já citadas aqui, ainda no primeiro ano do ensino médio.

Como foi colocado na introdução desse trabalho, iremos guiar-nos pelos conteúdos

básicos comuns (CBCs) da secretaria de estado da educação de Minas Gerais, no que tange às sugestões de currículo para a Matemática do Ensino Médio. Isso não implica em dizer que nosso trabalho não se aplica a outros sistemas de ensino, pelo contrário, todo conteúdo aqui exposto poderá ser utilizado em qualquer rede ou sistema de ensino.

Nas próximas seções apresentaremos sugestões para o uso de planilhas eletrônicas no ensino de funções polinomiais do primeiro e segundo graus, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

## 2.1 Polinomial do Primeiro Grau

A função afim, como é comumente denotada a função polinomial do primeiro grau, do tipo

$$f(x) = ax + b$$

com  $a$ ,  $b$  e  $x$  reais, é a primeira função específica, por assim dizer, que é trabalhada de forma mais aprofundada no ensino médio, tendo sido introduzida no ensino fundamental.

Após a conceitualização inicial de funções, o estudo da função polinomial do primeiro grau pode ser bem explorado com a construção e análise de seu gráfico. A visualização da representação gráfica de uma função afim ajuda o aluno no entendimento de seu crescimento ou decréscimo, bem como das taxas de variação das mesmas.

Para o trabalho com o gráfico da função afim, deixaremos aqui três sugestões, conhecendo-se: os valores dos coeficientes  $a$  e  $b$ , as coordenadas de dois pontos e um ponto e o coeficiente  $a$ .

### 2.1.1 Gráfico da Função Afim, dados os coeficientes

Inicialmente, em sala de aula, o professor pode apresentar aos alunos, a construção de uma reta a partir de uma função afim usando uma planilha eletrônica. Ainda em sala se pode mostrar como foi construído esse gráfico: gerado a partir de uma tabela com valores atribuídos a  $x$ , e calculados para  $f(x)$ , a partir da função dada.

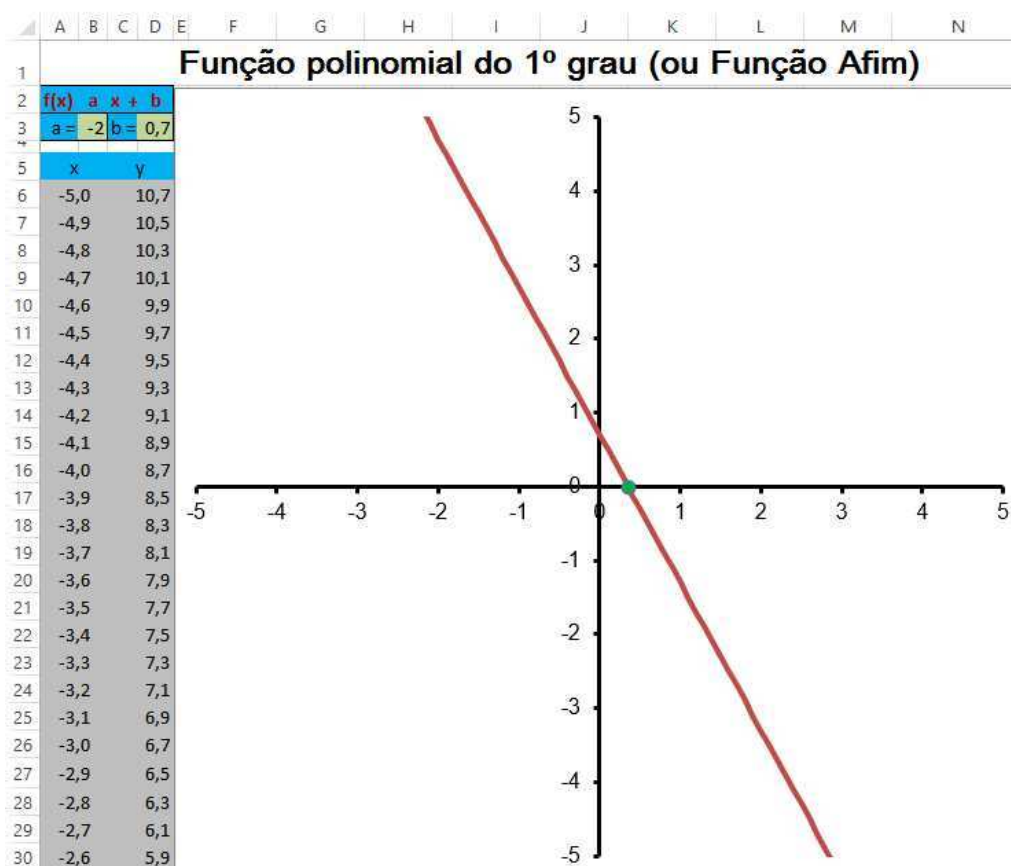
Mostrar como se cria a tabela de valores e como é gerado o gráfico (Fig. 2.1), para uma primeira construção, é necessário um passo a passo, pois muitos alunos recém-chegados ao ensino médio, nunca utilizaram uma planilha eletrônica – apesar de existirem livros didáticos de matemática, voltados para o ensino fundamental, como o *Vontade de Saber Matemática* [42] que exemplificam o uso introdutório de planilhas eletrônicas. Caso o professor tenha uma turma que fuja a essa regra, poderá deixar que os próprios alunos digam como pode ser gerado aquele gráfico.

Em um segundo momento, já no laboratório de informática, o professor deve pedir que seus alunos reproduzam o gráfico mostrado em sala de aula e que, a partir dele, façam alterações nos coeficientes  $a$  e  $b$  da função para ver o que e como varia nesse gráfico cada uma das alterações feitas.

A construção do gráfico da função afim em planilha eletrônica, já é citada

em um dos livros didáticos de ensino médio [11], que atualmente é repassado às escolas públicas através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD); após aquisição feita pelo Ministério da Educação. Uma alteração feita, em relação ao que é apresentado no livro, é o acréscimo de um marcador diferente para o ponto que representa a raiz da função dada.

Fica muito nítido para os alunos que a raiz da função está sempre sobre o eixo das abscissas, quando eles mesmos fazem os valores dos coeficientes variarem e observam o ponto, que representa a raiz, também variar. É muito simples também acrescentar uma célula específica com o valor da raiz, bastando para isso introduzir a relação  $-b/a$  no local desejado.



**Figura 2.1:** Gráfico da Função Afim  $f(x) = -2x + 0,7$ . Utilizamos, na planilha, valores de  $x$ , com intervalos de um décimo. Além de usarmos  $x \in [-5, 5]$ .

### 2.1.2 Gráfico da Função Afim, dadas as coordenadas de dois pontos

Outra forma de trabalhar com os alunos o gráfico da função afim, é fazer a construção desse a partir das coordenadas de dois pontos dados. Essa construção (Fig: 2.2) permite que os alunos busquem, ainda em sala de aula, métodos para calcularem os coeficientes da função afim, a partir das coordenadas  $(x, y)$  de dois pontos dados.

A planilha mostrada a seguir usa o parâmetro  $t$  como coeficiente de variação,

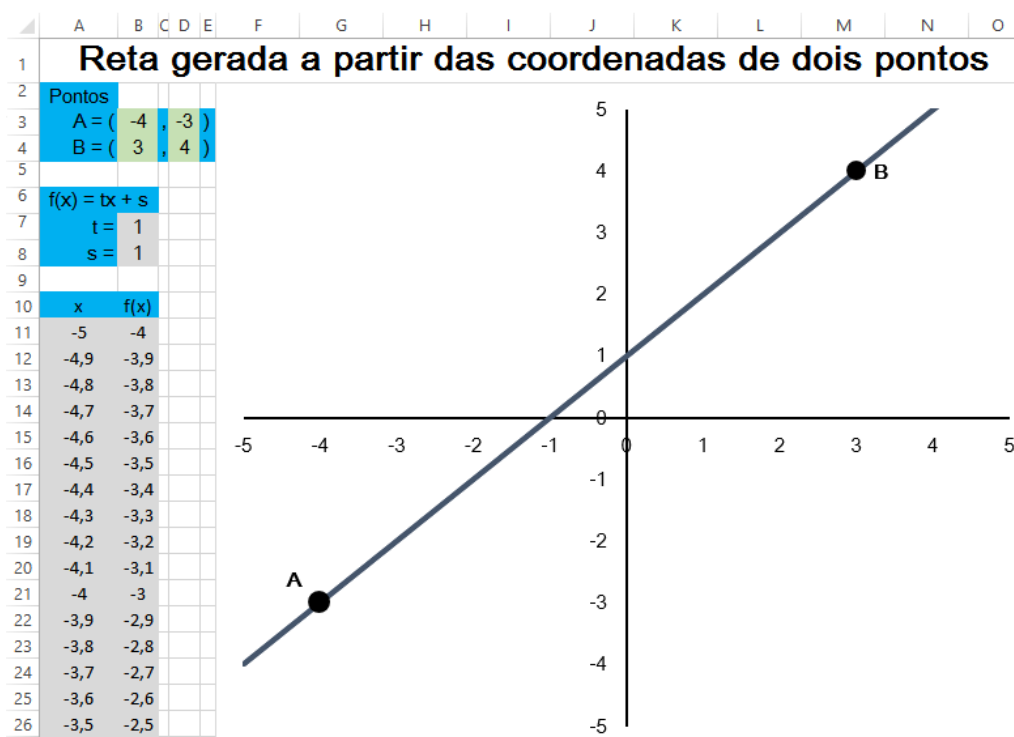
considerando a função  $f(x) = tx + s$  calculamos, inicialmente, os valores de  $t$  e  $s$  a partir das coordenadas de dois pontos já dados  $A = (-4, -3)$  e  $B = (3, 4)$ , em nosso exemplo.

$$t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-3 - 4}{-4 - 3} = 1$$

conhecendo-se o valor de  $t$ , calcula-se o valor de  $s$ ,

$$s = y - tx = 4 - 1 \cdot 3 = 1$$

Para finalizar a representação geométrica da reta gerada pela função  $f(x) = x + 1$ , destacamos as posições dos pontos  $A$  e  $B$ .



**Figura 2.2:** Gráfico da Função Afim  $f(x) = x + 1$ , à qual pertencem os pontos  $A = (-4, -3)$  e  $B = (3, 4)$ .

Vários são os exercícios apresentados em livros didáticos ou vestibulares que possuem o mesmo objetivo, ou seja, solicitam a expressão algébrica da função que contém dois pontos dados. Por exemplo,

(FGV-SP) A receita mensal de vendas de uma empresa ( $y$ ) relaciona-se com os gastos mensais com propaganda ( $x$ ) por meio de uma função do 1º grau. Quando a empresa gasta R\$ 10.000,00 por mês de propaganda, sua receita naquele mês é de R\$ 80.000,00, se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquela, a receita mensal cresce 50% em relação àquela.

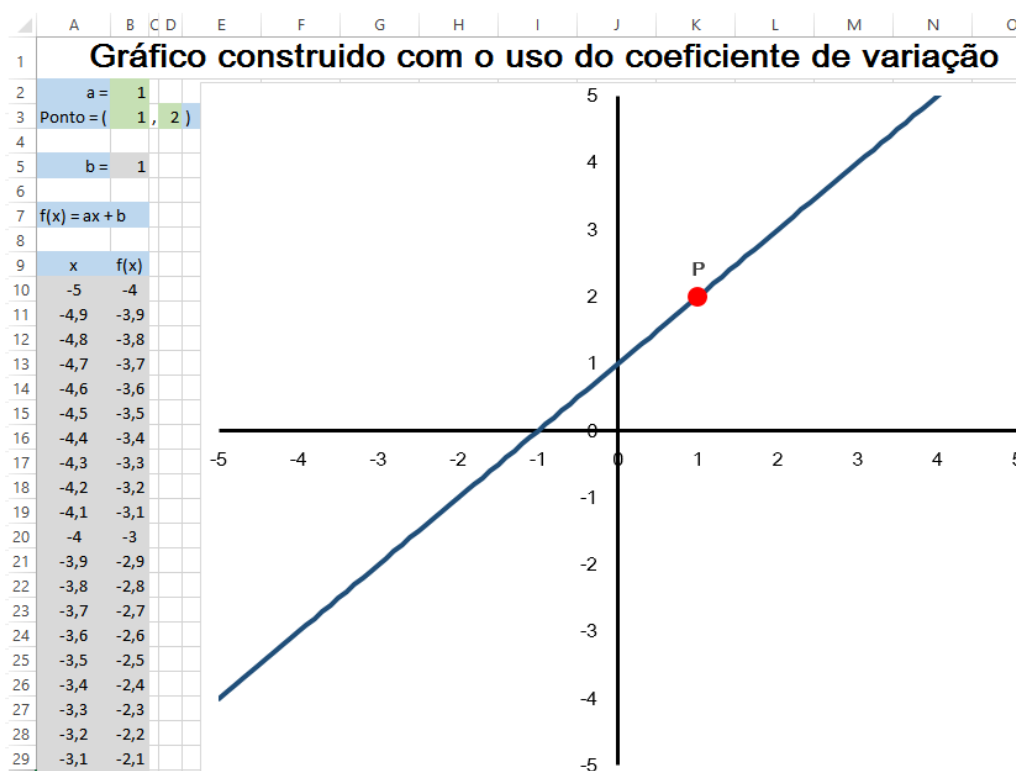
- Qual é a receita se o gasto mensal com propaganda for de R\$ 30.000,00?
- Obtenha a expressão de  $y$  em função de  $x$ .

A construção de um gráfico que represente a situação descrita neste exercício pode ajudar na interpretação dos alunos. Além disso, por se tratar de uma situação concreta, pode-se trabalhar o limite do domínio da função, ou seja, nem toda função pode apresentar quaisquer valores para a variável  $x$ .

### 2.1.3 Gráfico da Função Afim, conhecendo-se um ponto e o coeficiente de variação

Mais uma sugestão para se trabalhar a função afim em uma planilha eletrônica, é a construção de gráficos a partir do coeficiente de variação e das coordenadas de um ponto dado (Fig. 2.3). Esta construção também poderá ser utilizada em geometria analítica, quando se estuda a equação da reta; o coeficiente de variação  $a$  é o valor correspondente à tangente do ângulo positivo formado entre o eixo das abscissas e a reta  $y = ax + b$ .

Como o valor do coeficiente de variação, ou coeficiente angular, já foi dado, podemos utilizar esse valor para calcular o valor de  $b$ , fazendo  $b = y - ax$ .



**Figura 2.3:** Gráfico de uma função afim a partir de seu coeficiente angular (1) e das coordenadas de um ponto  $P = (1, 2)$ .

Um bom entendimento da função polinomial do primeiro grau é primordial para o prosseguimento dos estudos do aluno de ensino médio. Isso porque logo a seguir eles terão que aprofundar seus conhecimentos em função polinomial do segundo grau.

## 2.2 Polinomial do Segundo Grau

Assim como a função afim, a função quadrática (ou função polinomial do segundo grau), definida como sendo toda função do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com  $a, b, c, x$  reais e  $a \neq 0$ , já foi introduzida no ensino fundamental e seu estudo continua sendo consolidado no ensino médio.

Em geral, os alunos apenas decoraram, no ensino fundamental, que as raízes de uma função quadrática são os resultados obtidos “no delta”, ou seja, conseguem apenas fazer a associação do expoente 2 da variável independente com o resultado da equação do segundo grau, que é gerada após igualar a função a zero. “A Fórmula de Bháskara sofre certa repulsa pelos educandos do 9º ano do ensino fundamental, pelo fato de só ser aplicada mais tarde, no ensino médio e Superior. O aluno não sente interesse em aprender algo que não será imediatamente aplicado no seu dia a dia” [4].

A fórmula de Bháskara, que calcula as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , é dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como eles já conhecem a fórmula resolutiva da equação do segundo grau (na fala dos alunos, “a fórmula do delta”), podemos utilizar uma planilha eletrônica para obter as raízes da função quadrática [43]. Na planilha, podemos deixar células específicas para digitar os valores dos coeficientes da função, e fixamos outras células para as fórmulas, dividindo a fórmula de Bháskara em duas partes

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{sendo} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

para que apareçam as duas raízes da função, de acordo com os coeficientes que forem inseridos.

A construção da parábola, a partir de sua forma algébrica,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  dá uma maior clareza ao estudo das funções polinomiais do segundo grau. Ao mesmo tempo que dá clareza, também “espanta”, pois há muitos alunos que acreditam que a existência ou não de uma parábola está associada aos valores das raízes de cada função. Em mais de uma década como professor do primeiro ano do ensino médio, pude observar, várias vezes, estudantes dizerem não existir gráfico para uma função que não possua raiz.

A construção de uma parábola a partir de uma função pode dar destaque a pontos específicos, como o vértice por exemplo (Fig. 2.4).

Para aguçar a curiosidade dos alunos e os estimular a estudarem funções, em especial a quadrática, podemos mostrar a matemática existente por trás do jogo Angry Birds (Fig. 2.5) [10]. Esse jogo foi criado pela companhia finlandesa Rovio, em 2009, já possuindo várias atualizações; é um jogo muito popular e que pode ser

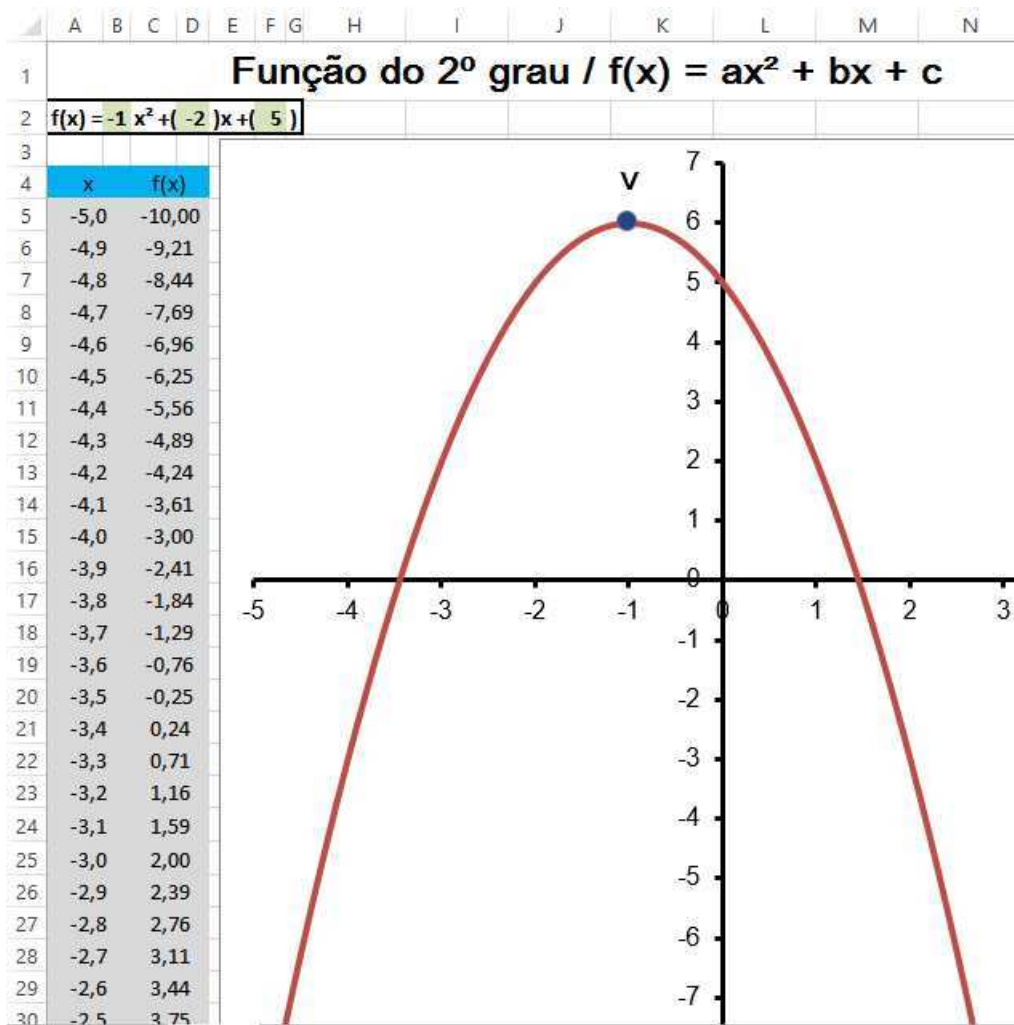


Figura 2.4: Parábola obtida a partir da função quadrática  $f(x) = -x^2 - x + 5$ .

jogado em praticamente todos os sistemas operacionais, bem como redes sociais. Para se ter uma noção do sucesso desse game, a versão Angry Birds Space, quando de seu lançamento, teve 10 milhões de downloads em apenas três dias [2].

O jogo Angry Birds traduz-se, brevemente, em pássaros que estão com raiva porque um grupo de porcos verdes roubaram seus ovos. Os ladrões tentam esconder-se em estruturas de variados materiais. Resta ao jogador, a tarefa de usar um estilingue para jogar os Angry Birds contra esses refúgios, atingindo todos os porcos e causando o máximo de estrago possível.[2]



Figura 2.5: Imagem do jogo Angry Birds. Extraído de [2]

A trajetória de cada Angry Birds, nas versões mais simples, é descrita por uma parábola. Em outras versões, pode-se criar novas trajetórias a partir de determinados pontos, ao longo da trajetória inicial.

Um esquema matemático pode ser feito em planilha eletrônica, como mostrado na Figura 2.6. Essa visualização do modelo matemático, existente por trás das imagens do jogo pode levar o alunado a se interessar em conhecer mais sobre o assunto.

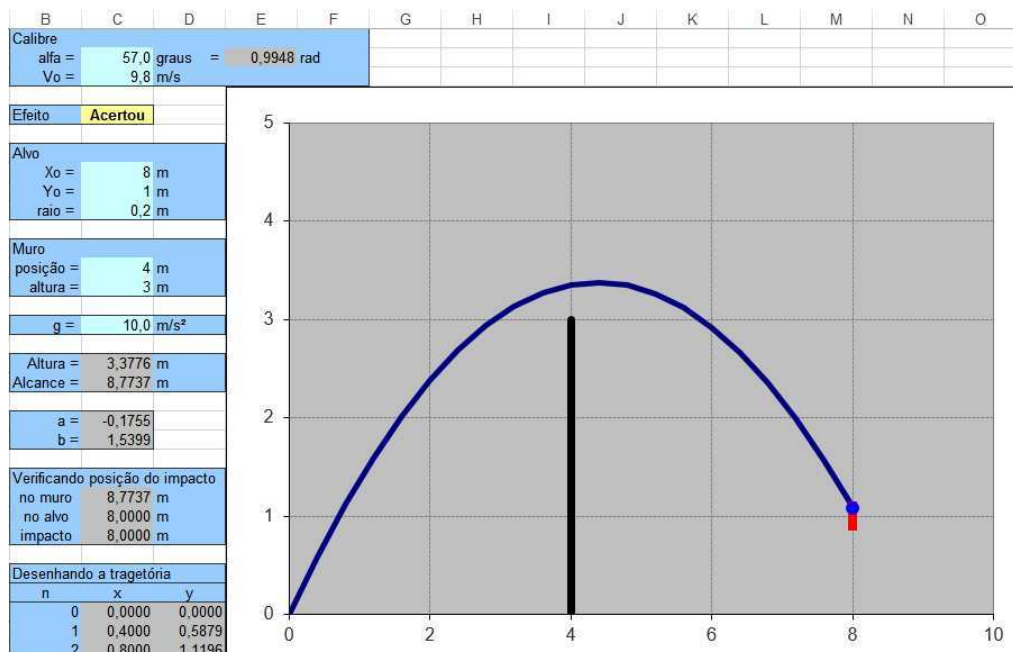


Figura 2.6: Parábola descrevendo a trajetória dos Angry Bird passando sobre um muro e atingindo o alvo.

Podemos utilizar as planilhas para representar, além dos gráficos, alguns pontos específicos das funções quadráticas tais como: vértice, interseção com o eixo das ordenadas e das abscissas (raízes da função).

### 2.3 Exponencial

Ao iniciar o estudo das funções exponenciais, os alunos do primeiro ano do ensino médio, têm contato, pela primeira vez, com uma função não polinomial. As funções do tipo

$$f(x) = k + ma^{nx+q}$$

com  $0 < a \neq 1$  descrevem vários fenômenos na área da biologia, química e matemática financeira que podem ser exemplificados em sala de aula.

Embora nem sempre seja fácil de ser feito, a aproximação de um conteúdo ao mundo dos alunos, faz com que se tenha maior interesse pelo estudo. Um exemplo simples, que pode despertar o interesse dos alunos pelo estudo das potências e funções exponenciais é o acúmulo rápido de dinheiro a partir de um valor irrisório. Como introdução ao estudo das exponenciais, proponho aos alunos que passem, a partir daquele dia, a economizar e guardar 1 centavo de real. E no dia seguinte guardem outros 2 centavos, mais 4 centavos depois de amanhã, e assim sucessivamente. Afirmo-lhes que, antes de completar um mês, eles já estarão milionários, no que a maioria fica incrédulo.

A prova, através dos cálculos, de que ao final de um mês a pessoa que guardar esses valores terá acumulado alguns milhões, surpreende a maioria dos alunos. E todos percebem que, infelizmente, depois de alguns dias, não teriam mais de onde tirar tanto dinheiro para guardar.

Os cálculos para determinar os valores a serem guardados a cada dia podem ser feitos, facilmente, utilizando-se uma planilha eletrônica (Fig. 2.7). Como os alunos já possuem algum conhecimento sobre esse tipo de planilha e a fórmula que gera os valores é bastante intuitiva, pode dar-lhes a oportunidade de criar a referida fórmula.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE						
1	Dia	1º	2º	3º	4º	5º	Continuando a sequência para os 30 dias.										26º	27º	28º	29º	30º																
2	Valor diário	R\$ 0,01	R\$ 0,02	R\$ 0,04	R\$ 0,08	R\$ 0,16											R\$ 335.544,32	R\$ 671.088,64	R\$ 1.342.177,28	R\$ 2.684.354,56	R\$ 5.368.709,12																
3	Valor total	R\$ 0,01	R\$ 0,03	R\$ 0,07	R\$ 0,15	R\$ 0,31											R\$ 671.088,63	R\$ 1.342.177,27	R\$ 2.684.354,55	R\$ 5.368.709,11	R\$ 10.737.418,23																

Figura 2.7: Descrição dos valores guardados diariamente e o acumulado, ao longo de 30 dias.

Ao introduzirmos os gráficos de funções exponenciais, algo intrigante novamente acontece; gráfico da função  $f(x) = a^x$ , nunca toca o eixo das abscissas, independente do valor de  $x$ .

Muitos autores de livros didáticos apresentam aos alunos uma tabela com aproximadamente seis valores para  $x$ , encontrando conseqüentemente, seis valores para  $f(x)$ . Acredito ser essa a melhor maneira de introduzir o estudo dos gráficos de uma função exponencial, pois é, como já citei, a tática adotada pela maioria. Em uma rápida consulta a livros didáticos do ensino médio, pode-se constatar que, em geral, são dadas como exemplo as funções  $f(x) = a^x$  em que se tem  $a = 2$ ,  $a = 3$ ,  $a = \frac{1}{2}$  ou  $a = \frac{1}{3}$  e  $x$  como sendo os inteiros  $-3, -2, -1, 0, 1, 2$  e  $3$  [19].

Mesmo sendo correta esta abordagem inicial é preciso que se tenha uma complementação, quanto ao estudo dos gráficos de funções exponenciais. Em primeiro lugar, o alunado pode ficar com a falsa impressão de que toda função exponencial possui como assíntota a reta  $y = 0$ . Outro ponto de dúvida pode ser o fato de que sempre pensem que, em algum ponto o gráfico tocará a assíntota.

Para minimizar esses problemas, sugerimos novamente a utilização das planilhas, construindo aí um gráfico para a função exponencial

$$f(x) = k + ma^{nx+q},$$

sendo  $0 < a \neq 1$ , (Fig. 2.8) fazendo variar os valores de  $k, m, a, n$  e  $q$ . A construção desse gráfico e a manipulação dos valores que o constituem ajudam no entendimento dos alunos sobre as funções exponenciais, podendo-se, inclusive, trabalhar com a construção de gráficos baseados em situações concretas.

Com relação ao problema da assíntota horizontal ao gráfico das exponenciais, sugerimos a construção da mesma juntamente com o gráfico da função exponencial (Fig. 2.9), mostrando primeiramente o gráfico e, depois, construindo nele mesmo a assíntota. Esse tipo de construção permite uma rápida e fácil visualização da assíntota, além de permitir ao aluno a análise de vários intervalos, com maior detalhe, verificando visivelmente que a curva exponencial não toca a assíntota. Essa

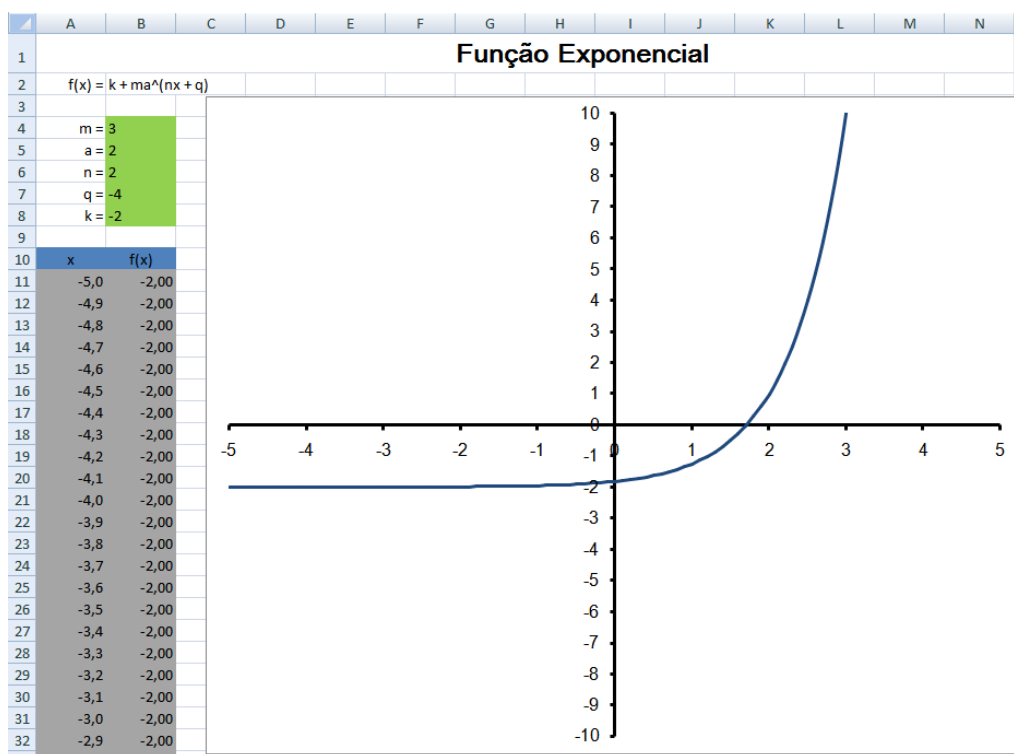


Figura 2.8: Curva obtida a partir da função exponencial  $f(x) = -2 + 3 \times 2^{2x-4}$ .

constatação também pode ser feita a partir dos pares ordenados que são gerados na planilha.

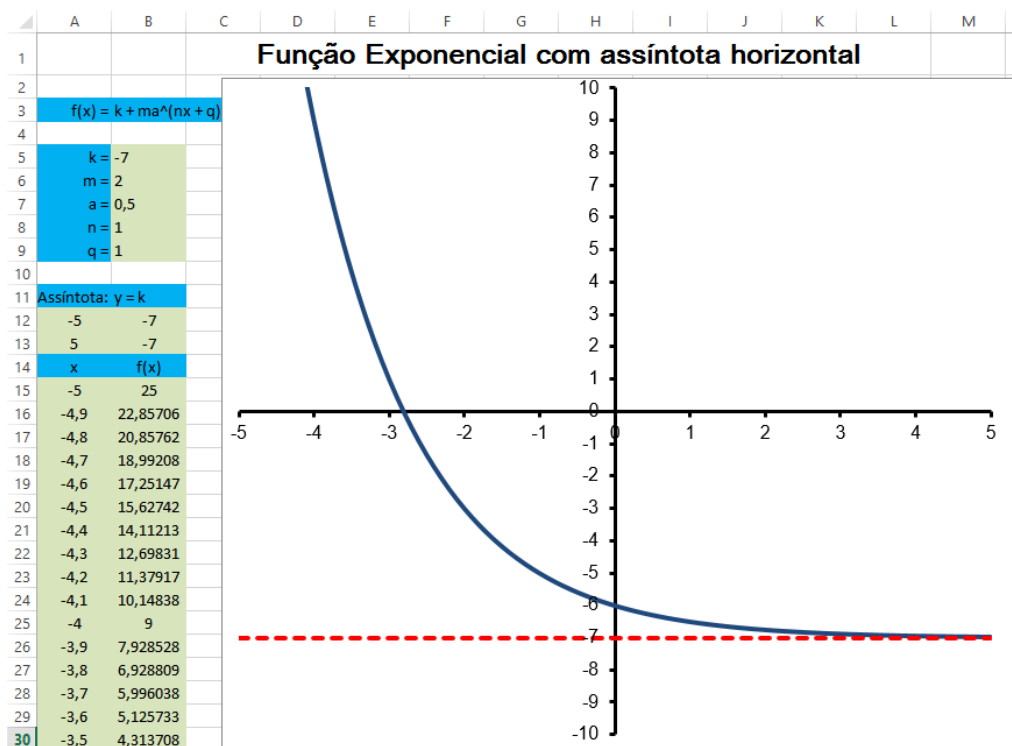
Também é interessante, sempre que possível, utilizar informações apresentadas nos livros didáticos para construir gráficos e analisar as situações ali colocadas. Ajudando, inclusive, na interpretação e resolução de problemas apresentados pelos autores.

## 2.4 Logarítmica

Eis um tema que desperta certo pavor à maioria dos alunos no ensino médio. Por experiência própria de quinze anos, ministrando aulas para esse nível de ensino, ao ser pronunciada, em uma sala de terceiro ano do ensino médio, a palavra logaritmo, há um sentimento de rejeição instantâneo.

Cito aqui o 3º ano porque os alunos, normalmente, já “viram” esse assunto no final do primeiro ou no início do segundo ano. Quando estão no último ano de ensino da educação básica, é comum que se faça uma revisão da maioria dos conteúdos já estudados anteriormente a fim de prepará-los melhor para as provas de vestibular, ENEM e outras avaliações externas, como as Saeb - sistema de avaliação da educação básica - e do Simave - sistema mineiro de avaliação.

Mas, infelizmente, é comum encontrar em uma turma de alunos no 3º ano do ensino médio, quem nunca tenha visto logaritmos, nem tampouco as funções que os possuem.



**Figura 2.9:** Gráfico de função exponencial, com assíntota horizontal, que está desenhada com uma linha tracejada.

Através das planilhas eletrônicas, podemos dar uma ajuda desde a introdução no estudo dos logaritmos, partindo de uma fórmula que o calcule depois de informado o valor do logaritmando e da base do logaritmo. Já na primeira aula sobre logaritmos, o professor pode passar o comando que retorna o valor do logaritmo em uma planilha a seus alunos – que no Excel é  $\text{LOG}(\text{número}; \text{base})$  – conjuntamente com uma tabela de valores (Fig. 2.10), induzindo os alunos a perceberem que o logaritmo está intimamente relacionado às potências.

	A	B	C
1	Logaritmando	Base	Logartimo
2	32	2	=LOG(A2;B2)
3	64	4	3
4	27	3	3
5	25	5	2
6	10000	10	4
7	81	9	2
8	0,5	2	-1
9	1	13	0

**Figura 2.10:** Tabela com alguns valores inteiros para logaritmos. Destaque para a célula C2, que mostra a função utilizada.

Ao avançar, em sala de aula, com o assunto logaritmo, pode-se usar as planilhas para verificar a validade de suas propriedades quando do cálculo de uma expressão logarítmica, por exemplo. Além de se poder construir gráficos de funções logarítmicas com uso dessas planilhas.

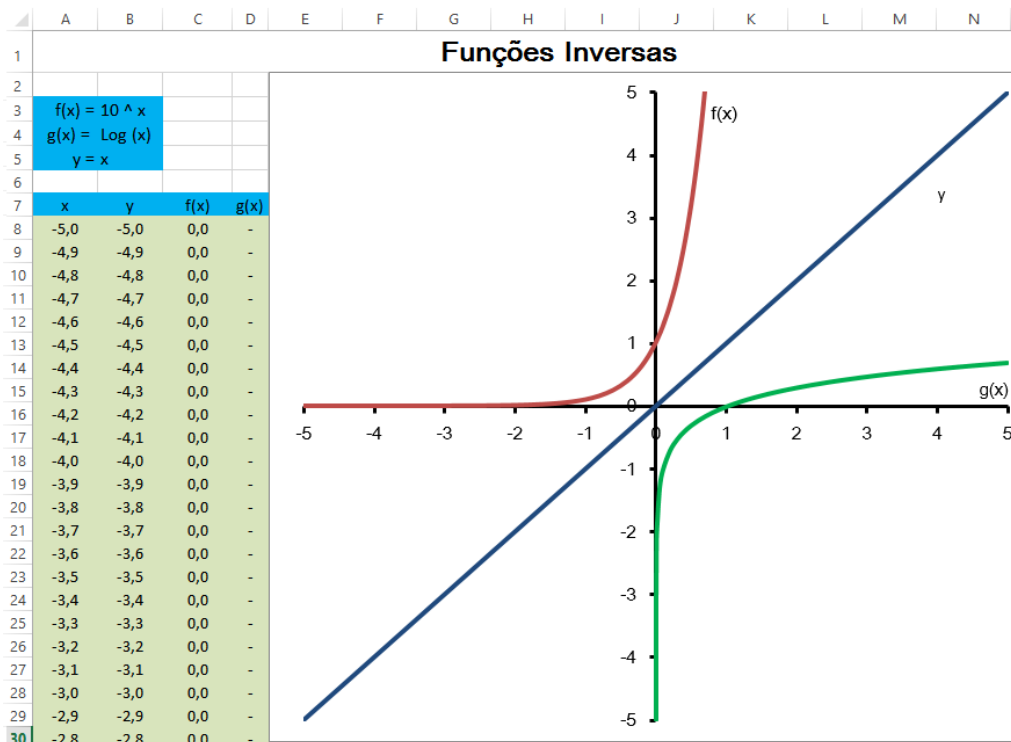
Didaticamente falando, este é um momento ideal para retomar, ou até introduzir, a noção de função inversa. Isso pelo fato de a função logarítmica ser a inversa da função exponencial, já estudada anteriormente, o que torna mais “palpável” o entendimento de que uma função  $g : B \rightarrow A$  é a inversa da função  $f : A \rightarrow B$  quando

se tem

$$g(f(x)) = x \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y$$

para todo  $x \in A$  e  $y \in B$ . Isso é facilmente comprovado por uma análise nos livros didáticos aprovados pelo MEC, como por exemplo em Dante [11] e Iezzi [18], ou até mesmo em livro de Cálculo [3]. Os autores desses livros apresentam definição, propriedades e operações com logaritmos e, quando vão introduzir o conceito de função logarítmica, apresentam pela primeira vez o conceito de função inversa.

Novamente o professor pode fazer uso das planilhas eletrônicas para mostrar os gráficos das funções logarítmicas e também, mostrar que os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Na Figura 2.11 temos, em um mesmo plano cartesiano, a representação dos gráficos das funções  $f(x) = 10^x$  e  $g(x) = \log(x)$ , mostrando a simetria dessas duas funções em relação à reta  $y = x$  que ocorre porque  $g(x) = f^{-1}(x)$ .



**Figura 2.11:** Gráficos das funções inversas  $f(x) = 10^x$  e  $g(x) = \log(x)$ . Mostrando a simetria dos dois gráficos, com relação à reta  $y = x$ .

## 2.5 Trigonômicas

A sugestão apresentada pelo CBC, em Minas Gerais, é para que se trabalhe as funções trigonométricas inicialmente no 2º ano do ensino médio, buscando um entendimento do círculo trigonométrico. Um aprofundamento desse estudo deve ser feito no 3º ano do ensino médio.

A introdução das funções trigonométricas no círculo é feita, normalmente, a partir da definição de arco orientado, seguido da divisão do ciclo trigonométrico em quatro

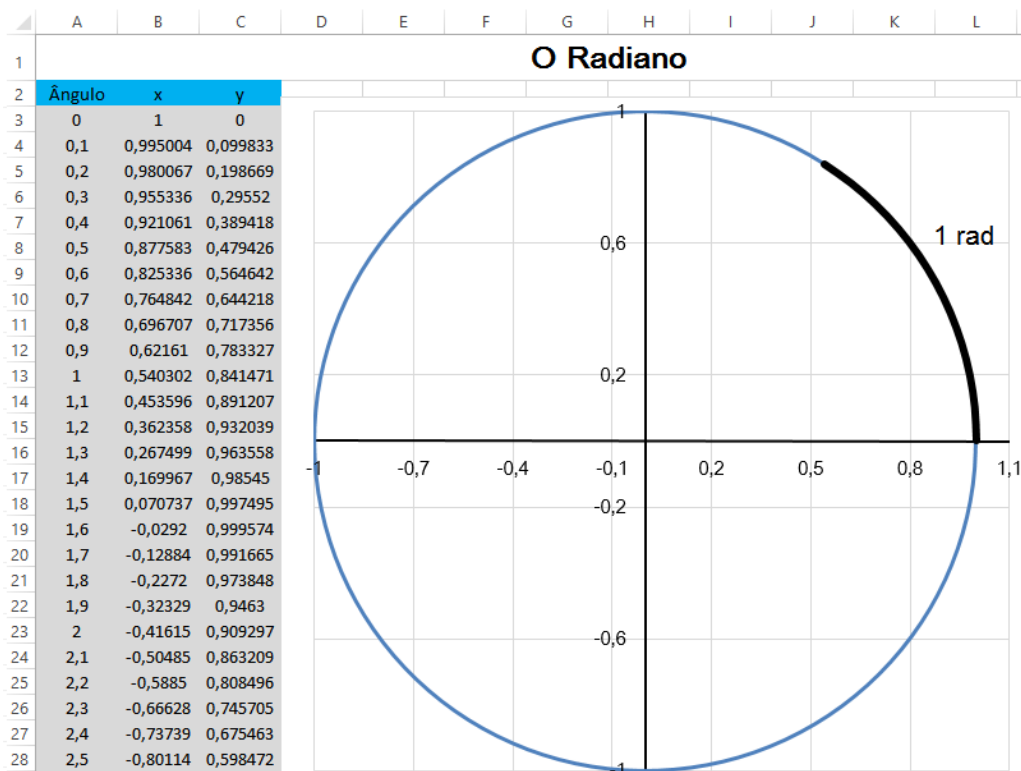
quadrantes. Nesse momento, o aluno do ensino médio toma conhecimento de uma nova unidade de medida de ângulo, o radiano, pois ele, desde os primeiros anos do ensino fundamental, está habituado a trabalhar apenas com o grau.

Essa nova unidade de medida causa uma certa confusão, principalmente pela associação que se faz e que os alunos tendem a decorar de que  $180^{\circ}$  correspondem a  $\pi$  radianos. Uma grande parte dos estudantes acaba por associar um radiano a  $180^{\circ}$ , e para que esse erro não ocorra, uma boa alternativa é a visualização do arco correspondente a um radiano (Fig. 2.12). Esta figura mostra que um radiano é a medida correspondente a um ângulo agudo.

A utilização desta imagem será feita pelo professor para evitar erros que podem ser cometidos em exercícios como:

*O valor de  $\cos(1)$  (cosseno de 1 radiano) é positivo ou negativo?*

Espera-se que, todos os alunos consigam resolver corretamente esse modelo de questão após tomar conhecimento da definição de radiano e conseguir entender a Figura 2.12. “A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo [5].”

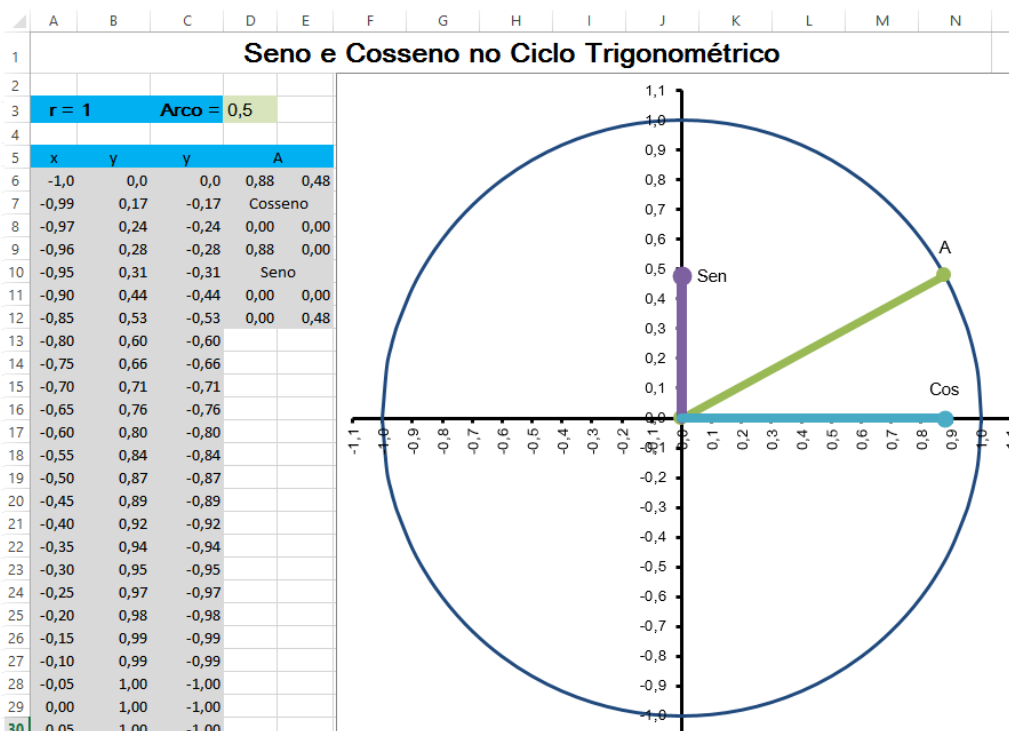


**Figura 2.12:** Círculo de raio unitário, com destaque para um arco de 1 radiano.

Ao se trabalhar com os valores de seno e cosseno no círculo, deve-se destacar o círculo de raio unitário e mostrar que estes valores são correspondentes às medidas das projeções do raio com extremidade coincidente à do arco, sobre os eixos vertical e horizontal – para seno e cosseno, respectivamente.

Após a construção do círculo para mostrar o arco correspondente a um radiano, pode-se aproveitar parte dos dados na construção de uma planilha que destaca as

projeções citadas (Fig. 2.13). Assim fica mais fácil observar, por exemplo os sinais de seno e cosseno, em cada quadrante. As medidas utilizadas para os arcos podem ser dadas em radiano, unidade normalmente já instalada nas planilhas, ou em grau, neste caso deve-se criar uma fórmula de conversão de entre as unidades de medida.



**Figura 2.13:** Seno e Cosseno do arco de um radiano, em um círculo de raio igual a 1. O ponto A é a extremidade do arco, que tem origem no ponto (1,0).

Somente depois de uma boa introdução à trigonometria, no círculo, é que se consegue trabalhar as funções trigonométricas, caso contrário, ficaria difícil de entender a periodicidade de tais funções, além dos intervalos fechados para suas imagens.

Os gráficos das funções trigonométricas são indispensáveis no entendimento das mesmas, mas não são de fácil construção à mão livre. Por isso, a opção do uso de planilhas eletrônicas vem à tona novamente. Nelas, já existem essas funções embutidas, o que facilita ainda mais as construções.

Nas construções feitas em sala de aula, utilizando a lousa, em geral não se tem muita precisão, nem tampouco se estende o desenho do gráfico a partir de dois períodos (muitas das vezes se faz apenas um). Outro ponto positivo desta construção em uma planilha é a facilidade de se variar a amplitude, a imagem e as translações da função; simplesmente alterando os valores das células destacadas no início da planilha, que representam os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $k$  da função

$$f(x) = a \text{sen}(bx + c) + k$$

As variações desses valores podem ser feitas com intuito de instigar os alunos a buscarem saber sobre o que cada valor representa ou provoca na função.

Observando a Figura 2.14 notamos que o gráfico mostra claramente a periodicidade, assim como a imagem limitada inferiormente e superiormente.

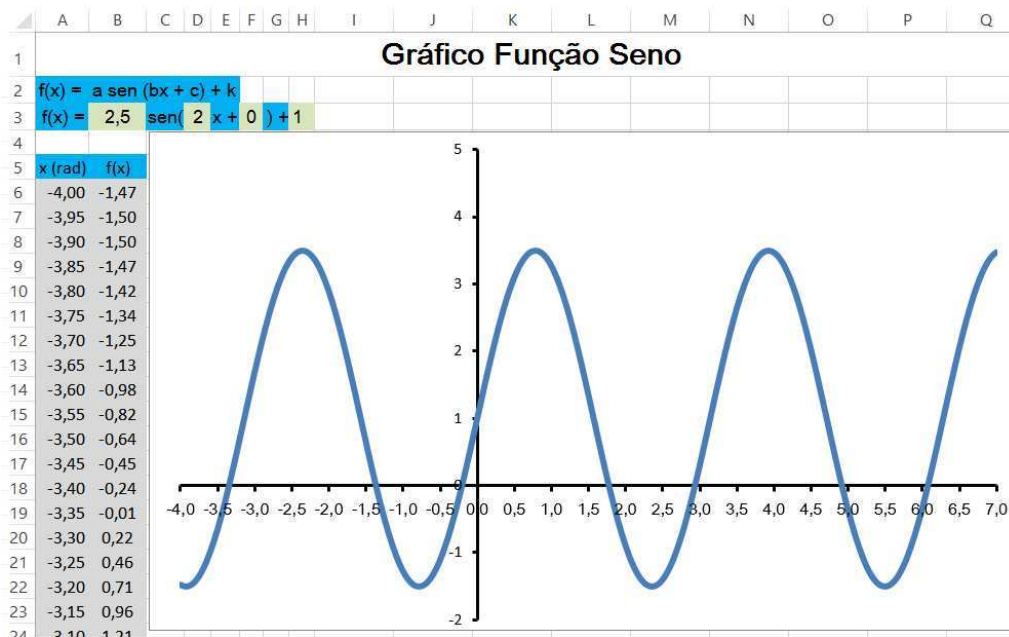


Figura 2.14: Função seno transladada,  $f(x) = 2,5 \text{sen}(2x + 0) + 1$

Outras funções trigonométricas podem ser trabalhadas da mesma forma como citado para a função seno, aliás, a função cosseno (Fig. 2.15) tem como base a mesma tabela usada para a função seno; bastando trocar uma função pela outra, nas fórmulas das respectivas células. Nessa figura, introduzimos uma linha pontilhada, paralela ao eixo das abscissas, cortando o eixo das ordenadas no ponto  $(0, k)$ , onde  $k$  é o ponto médio dos valores extremos do intervalo que representa a imagem dessa função.

Na função representada no gráfico da Figura 2.15,  $f(x) = 2 \cos(2x + 2) + 2$  o conjunto imagem é  $\{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 4\}$  [20], pois:

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \cos(2x + 2) \leq 1 \\
 -2 &\leq 2 \cdot \cos(2x + 2) \leq 2 \\
 0 &\leq 2 + 2 \cdot \cos(2x + 2) \leq 4,
 \end{aligned}$$

logo,

$$0 \leq f(x) \leq 4$$

De forma análoga, pode-se calcular o conjunto imagem da função seno

$$f(x) = a + b \text{sen}(cx + d)$$

permitindo uma comparação com os valores obtidos no gráfico, construído na planilha. Outras relações também podem ser verificadas, como por exemplo, o período das

funções sen ou cos, alterando-se os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ .

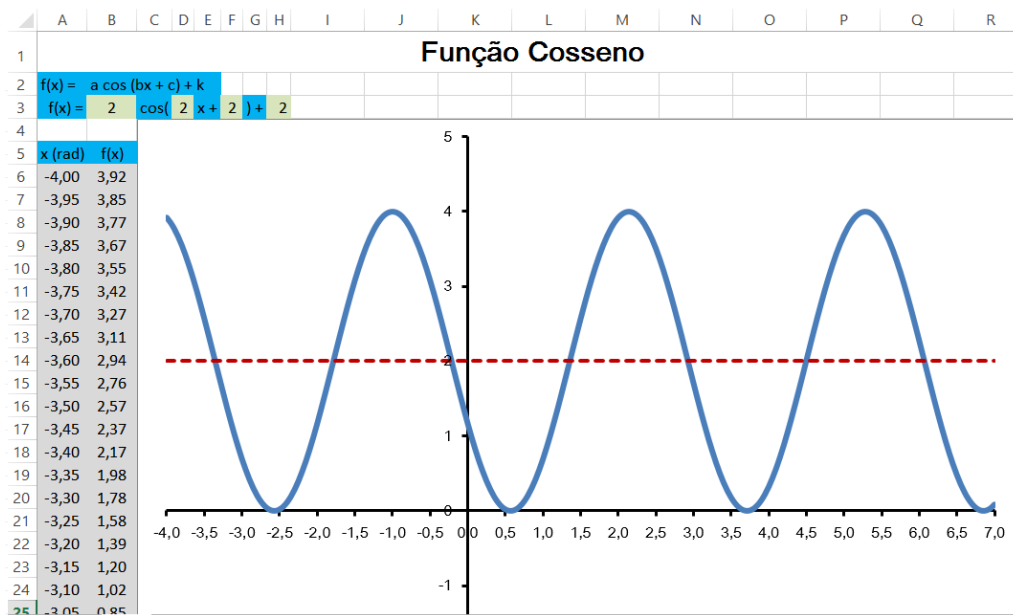


Figura 2.15: Função cosseno transladada,  $f(x) = 2 \cos(2x + 2) + 2$

# Sequências Numéricas

---

As sequências numéricas são tratadas, no ensino médio, a partir do primeiro ano. O CBC não sugere a abordagem da recursividade para trabalharmos as sequências numéricas, nem tampouco os livros didáticos de ensino médio. Já a Sociedade Brasileira de Matemática trata do tema recorrência em livros voltados para a formação de professores do ensino médio [27].

Mesmo não usando recorrência, em geral, os professores apresentam diversas sequências numéricas a seus alunos, como a de Fibonacci, por exemplo [11]. Não é incomum encontramos em livros didáticos, atividades que buscam nos alunos um raciocínio lógico para resolver problemas de sequências e um padrão entre os números dados [11]. Mas isso é feito apenas como uma introdução no estudo das sequências numéricas.

As principais sequências trabalhadas no ensino médio são as progressões aritméticas e geométricas, que estão intimamente ligadas a outros conteúdos desse nível de ensino, como função afim, exponencial e juros.

## 3.1 Progressões Aritméticas

As planilhas eletrônicas manipulam muito bem este tipo de sequência numérica. Ao digitarmos dois números quaisquer em duas células vizinhas, do Excel por exemplo, se selecionarmos essas duas células e arrastarmos o cursor, estaremos criando uma Progressão Aritmética (PA).

As progressões aritméticas formadas apenas com números inteiros são facilmente identificadas por um leitor que saiba efetuar a adição desses números; um padrão de regularidade é facilmente percebido por todos. Uma introdução do assunto com números inteiros ajuda a minimizar as dificuldades que podem surgir quando se trabalha com os demais números reais.

O uso das planilhas eletrônicas aqui, será útil, não só para a criação das sequências a partir de dois termos vizinhos conhecidos, mas também para soma dos termos. Será possível também encontrar qualquer termo da PA, a partir de algumas informações dadas, utilizando para isso a fórmula do termo geral; manipulando-a da maneira mais adequada para que seja inserida na planilha.

A linearidade das progressões aritméticas leva a uma inevitável comparação com

a função polinomial do primeiro grau. Mais uma vez, as planilhas eletrônicas servem de apoio ao professor de matemática, para que se possa mostrar as tendências iguais e, ao mesmo tempo, a diferença quanto à continuidade (Fig. 3.1). Ao considerarmos a fórmula do termo geral de uma PA,

$$a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

e compararmos esta com a função polinomial do primeiro grau (Fig. 2.2),

$$f(x) = ax + b$$

daremos aos alunos a visão de que o coeficiente  $a$  da função  $f(x)$  é igual ao valor da razão  $r$  da PA; enquanto que o coeficiente  $b$  é igual a  $a_1 - r$ . Dessas comparações, tira-se mais uma semelhança entre a função do 1º grau e a PA, ambas são crescentes ou decrescentes, dependendo dos valores de  $a$  e  $r$ .

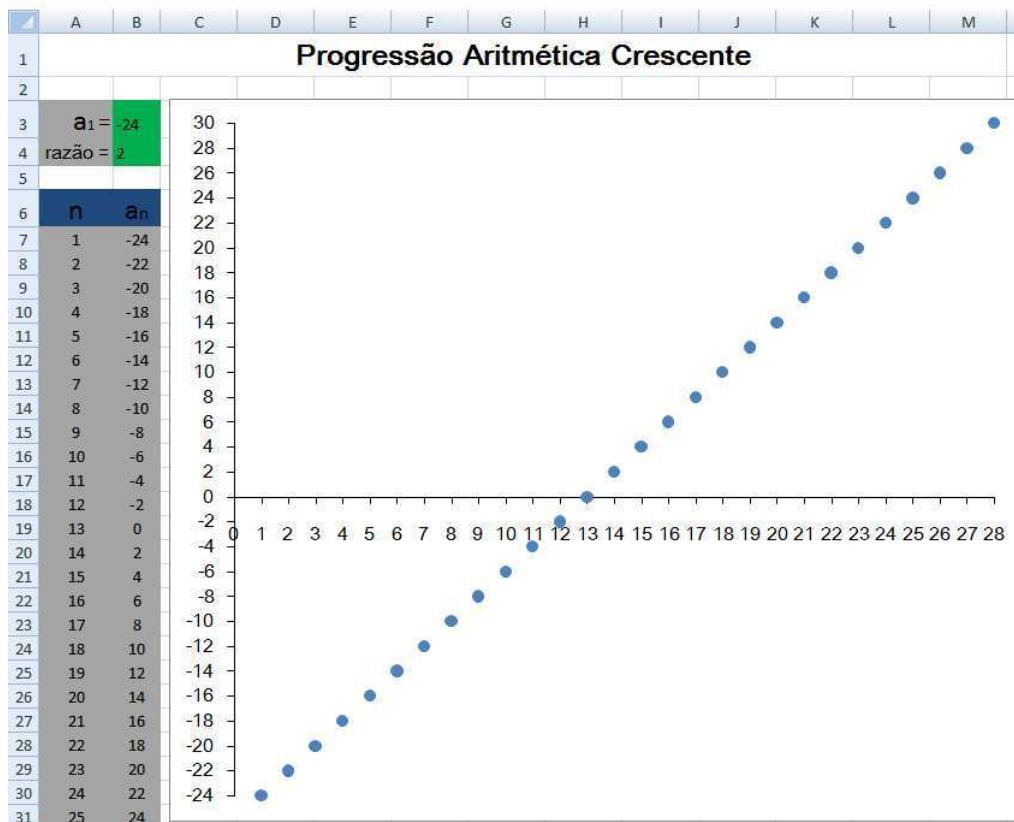


Figura 3.1: Os 28 primeiros termos da PA de primeiro termo igual a  $-24$  e razão igual a  $2$ .

A soma dos termos de uma P.A. pode ser calculada pela fórmula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

ou mais facilmente em uma planilha eletrônica. De fato se pode, em uma única planilha, criar fórmulas que nos dão o termo geral e a soma dos termos a partir do

primeiro termo, da razão e especificando-se o número de termos desejado. Mas o que acontece com o valor acumulado dos termos somados de uma PA?

A planilha mostrada na Figura 3.2 traz uma visão que, em geral, não é abordada nos livros didáticos. Ela mostra os trinta primeiros termos da progressão aritmética de termo geral

$$a_n = 10,7 - 0,7r$$

ao mesmo tempo que nos dá a visão, ponto a ponto, da soma parcial desses primeiros termos. Neste caso, em particular, os pontos que representam a soma descrevem uma trajetória “parabólica”. Comportamento similar ao de funções, quando uma função do 2º grau é a integral de uma função do 1º grau.

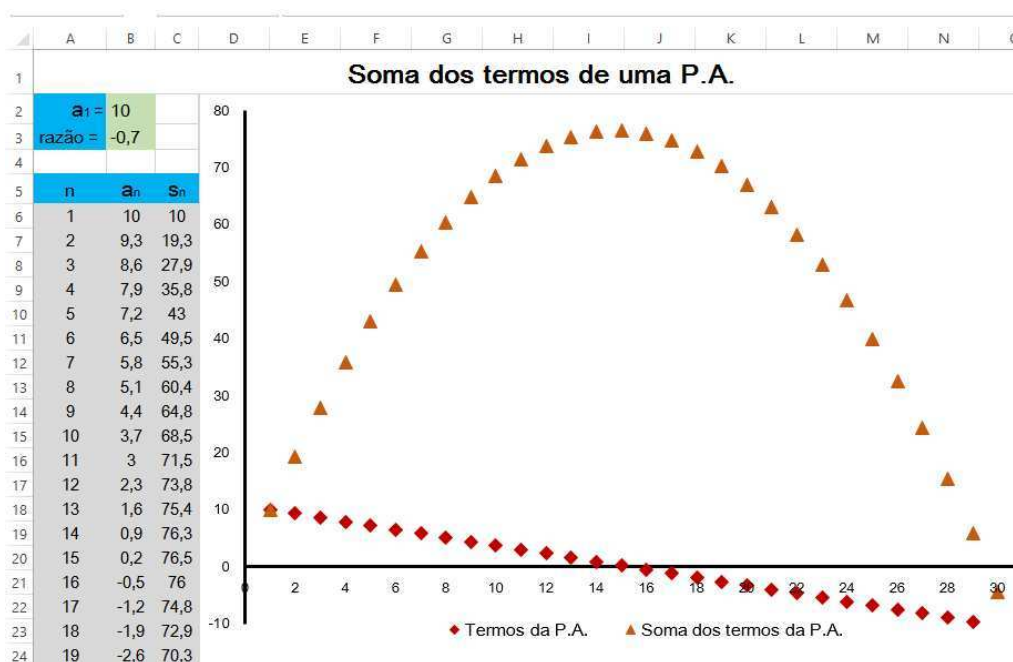


Figura 3.2: Os losangos representam os 30 primeiros termos de uma PA e os pontos triangulares mostram a soma desses mesmos termos.

### 3.2 Progressões Geométricas

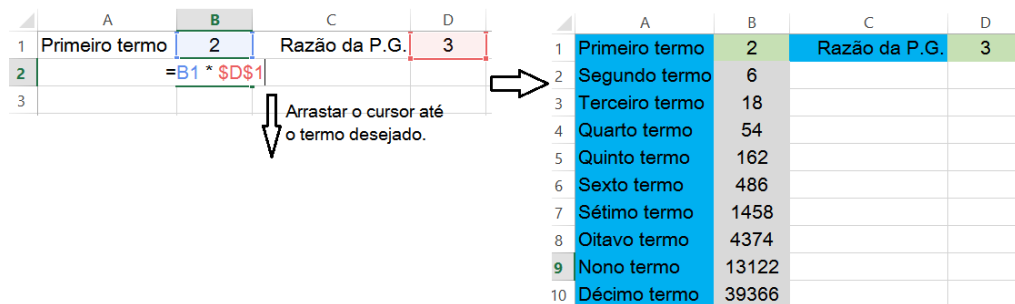
As Progressões Geométricas (PG) são o segundo tipo mais comum de sequência numérica visto no ensino médio. As planilhas eletrônicas não a identificam a partir de uma sequência de três termos, é preciso informar o que ocorre entre um termo e outro.

O cálculo de um determinado termo de uma PG pode ser demorado, se feito sem o auxílio de uma calculadora, devido ao crescimento ou decrescimento exponencial, característico desse tipo de sequência. A fórmula utilizada para esse cálculo é

$$a_n = a_1q^{n-1}, \text{ com } q \neq 0$$

Mas o uso de meios digitais facilita muito a escrita desse tipo de sequência. Nas

planilhas eletrônicas, basta que se coloque o primeiro termo, o valor da razão da PG e um comando que mande esses termos serem multiplicados. Não é preciso utilizar a fórmula do termo geral da P.G., bastando arrastar a fórmula criada até onde se deseja, como na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Termos de uma PG, criados a partir do 1º termo e da razão da PG.

Dessa forma, podemos listar, em segundos, os termos de uma PG, o que ficaria muito mais demorado se fosse feito a mão, mesmo que usássemos calculadora; principalmente se os números atingirem uma grande quantidade de dígitos porque o número de dígitos que cabem na calculadora comum é menor que nas células das planilhas.

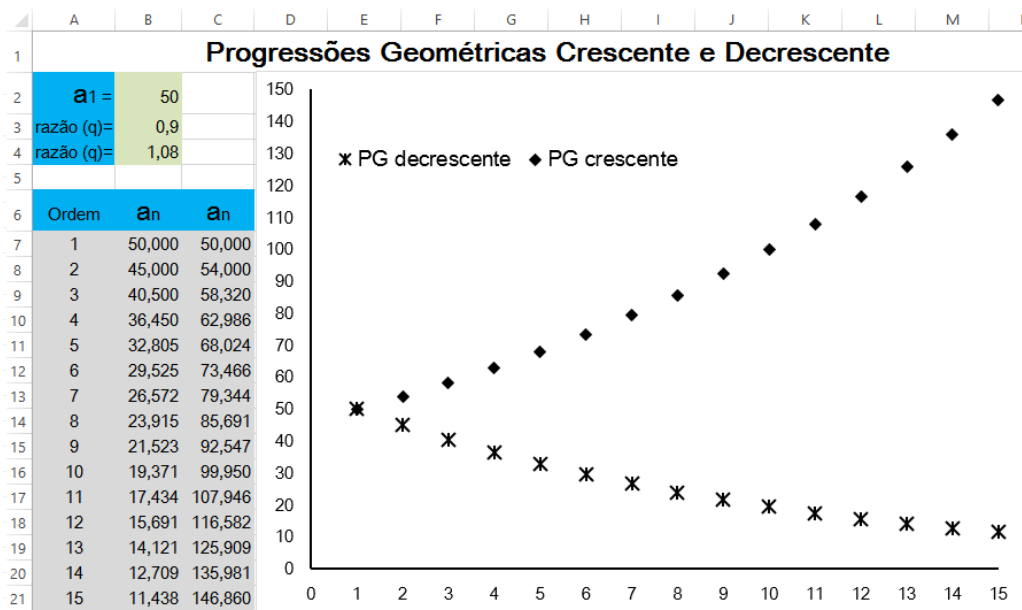
Graficamente, os pontos relativos aos termos de uma PG descrevem uma trajetória curvilínea que lembra uma curva exponencial, quando essa PG é crescente ou decrescente (Fig. 3.4). Pode-se classificar uma PG como crescente ou decrescente com base nos valores da razão  $q$  e do primeiro termo  $a_1$ , da seguinte forma:

1. PG crescente:
  - quando  $q > 1$  e  $a_1 > 0$ , ou
  - quando  $0 < q < 1$  e  $a_1 < 0$ .
2. PG decrescente:
  - quando  $q > 1$  e  $a_1 < 0$ , ou
  - quando  $0 < q < 1$  e  $a_1 > 0$ .

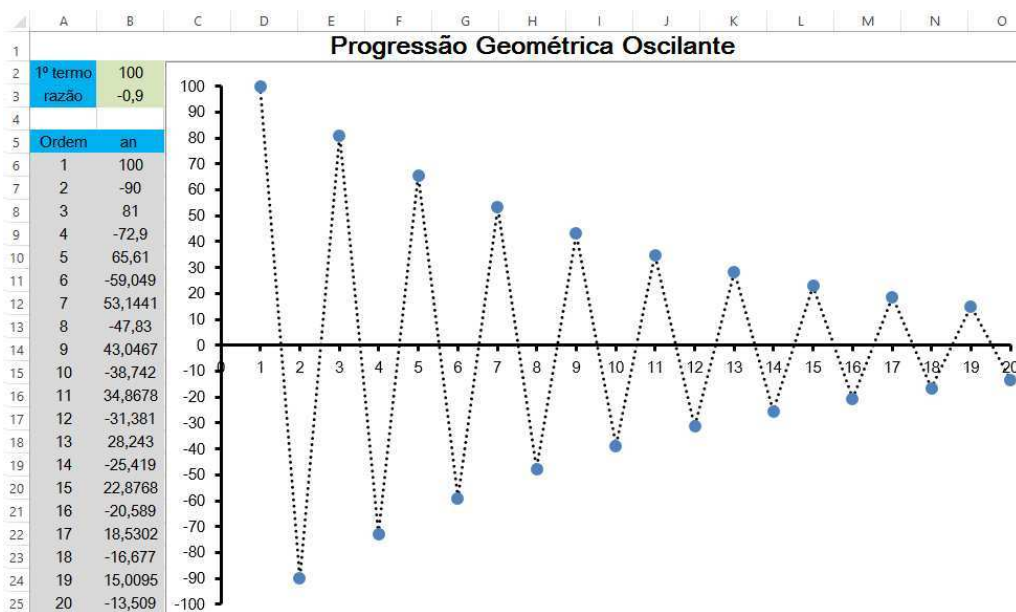
Quando a progressão geométrica apresenta razão ( $q$ ) negativa e  $a_1 \neq 0$ , ela é dita oscilante e seus pontos serão, alternadamente positivos e negativos, alternando o plano cartesiano sobre duas curvas com formato exponencial (Fig. 3.5); uma para os valores positivos e outra para os valores negativos.

A soma e o produto dos termos de uma PG também podem ser obtidos, facilmente, em uma planilha eletrônica, bastando incluir nessa as fórmulas apropriadas, que poderão ser copiadas dos livros didáticos ou, preferencialmente, serem criadas pelos alunos. Em particular, a soma dos infinitos termos de uma PG, com  $-1 < q < 1$ , que é convergente.

Essa convergência, quando a PG tende ao infinito, conduz a uma introdução ao limite, que pode até já ter sido mencionado pelo professor se este já trabalhou função exponencial e deu um enfoque especial à assíntota (Fig. 2.9).



**Figura 3.4:** O gráfico mostra os 15 primeiros termos de duas progressões geométricas. Ambas com  $a_1 = 50$ , uma decrescente com razão  $(q) = 0,9$  e outra crescente, de razão  $(q) = 1,08$ .



**Figura 3.5:** PG oscilante, com  $a_1 = 100$  e  $q = -0,9$

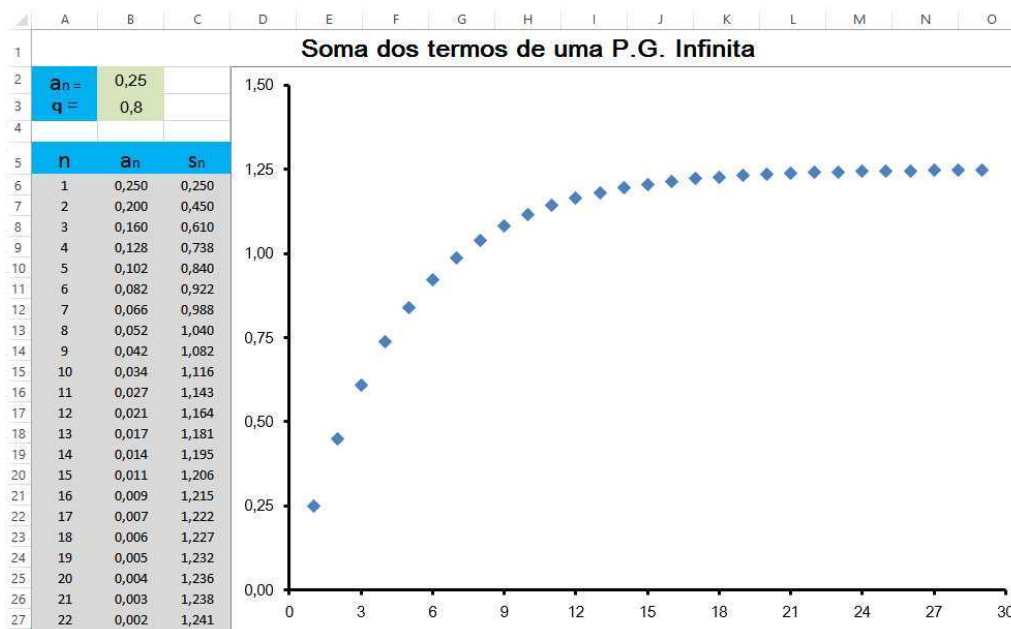
A soma dos termos de uma PG finita, de razão  $q \neq 1$  pode ser calculada pela relação

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

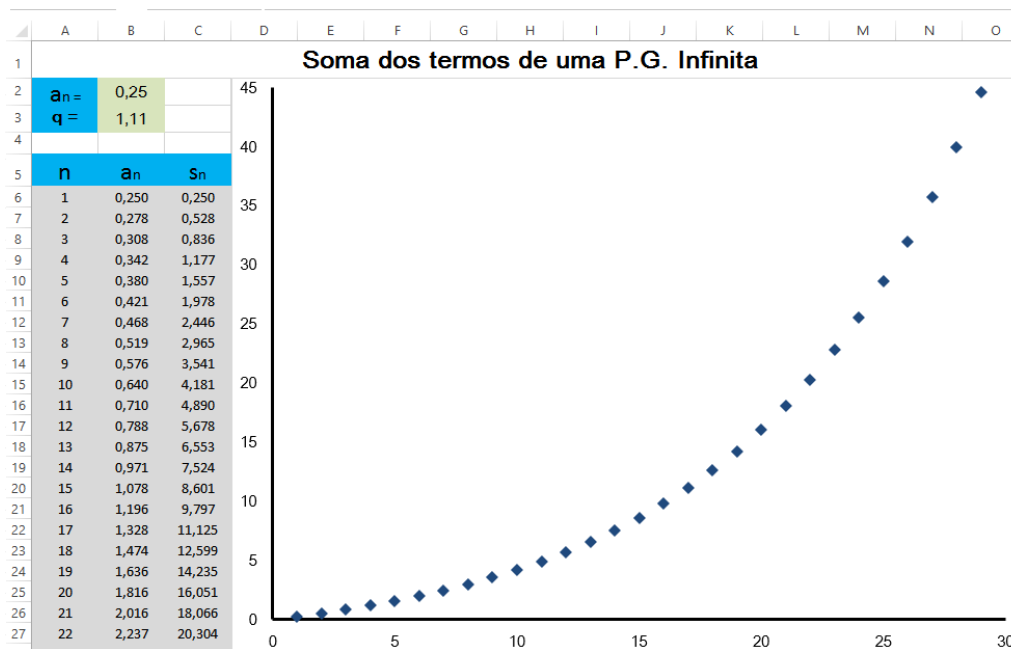
e para os casos em que  $-1 < q < 1$  e  $n$  tende ao infinito teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Não é demais reforçar, visualmente, o que acontece com a soma dos termos de uma progressão geométrica, quando consideramos uma quantidade infinita de termos. Dependendo do valor da razão, podemos ter a soma dos termos convergindo para um valor específico (Fig. 3.6) ou tendendo ao infinito (Fig. 3.7).



**Figura 3.6:** PG infinita, cuja soma dos termos tende a 1,25. Tendo  $a_1 = 0,25$  e  $q = 0,8$



**Figura 3.7:** PG infinita, cuja soma dos termos tende ao infinito. Com  $a_1 = 0,25$  e  $q = 1,11$

### 3.3 Juros

Optamos aqui por não tratar a matemática financeira como um capítulo a parte, mas sim tratarmos os juros como sequências numéricas. Realmente, se construirmos uma tabela com valores de juros simples e compostos, acumulados, período a período, dentro de certo tempo; teremos uma PA e uma PG respectivamente. Normalmente, são utilizadas duas fórmulas básicas para o cálculo de juros simples

$$j = cit$$

e, juros compostos

$$M = c(1 + i)^t$$

sendo:

$j$  são os juros

$c$  é o capital

$i$  é a taxa

$t$  é o tempo

$M$  é o montante (capital + juros)

Uma sugestão dada aos professores de Matemática, em uma das coleções de livro mais conhecidas para esses profissionais, a nível de educação básica, *A Matemática do Ensino Médio* [27], é justamente trabalhar juros como sequências. Os mesmos autores chamam atenção para um fato muito interessante que compara os juros simples e compostos, cobrados em prazos inferiores ao prazo o qual se refere a uma taxa de juros combinada.

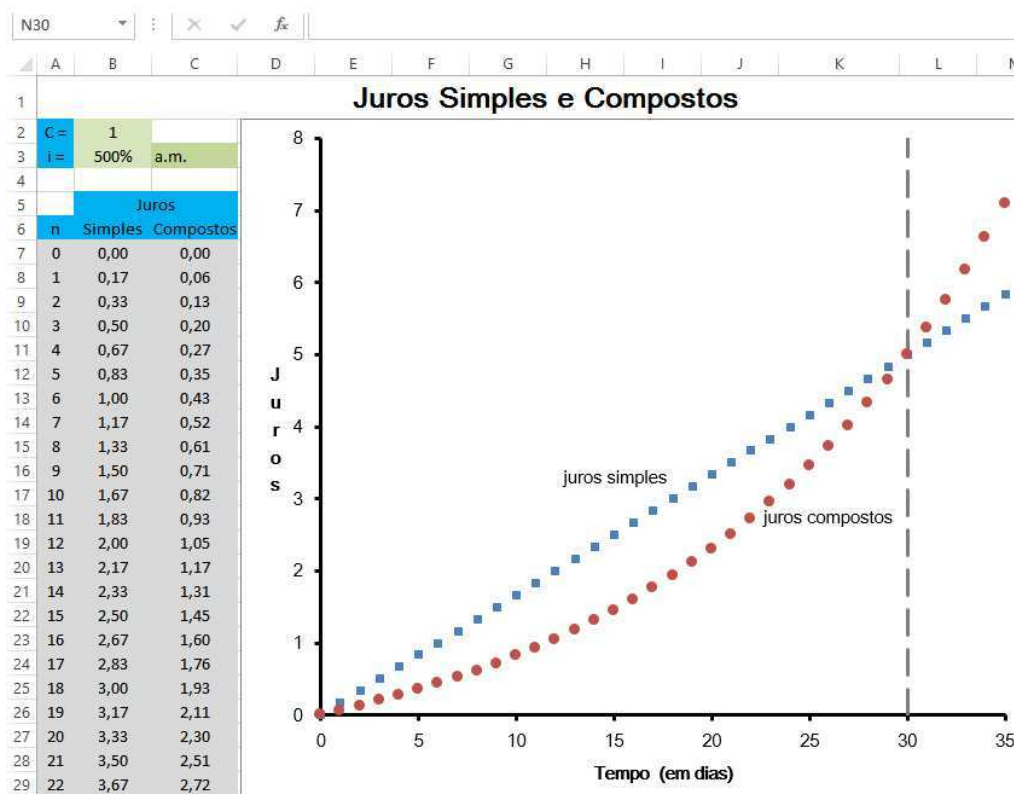
Esse fato pode ser observado em alguns boletos bancários (Fig. 3.8), no campo de instruções, onde se orienta o recebedor do mesmo a cobrar juros simples sobre o valor devido, por até 30 dias após o vencimento, e a não receber o boleto após esse prazo.

<b>BANCO LEGAL S.A.</b>		<b>5000-7</b>	<b>5000-7.341254.66691.0122365.5400.409070.7000000</b>			
AGÊNCIA RECEBEDORA <b>Pagável em qualquer agência bancária até a data do vencimento</b>					VENCIMENTO 01/08/2017	
CEDENTE <b>BANCO LEGAL S.A.</b>					CÓDIGO DO CEDENTE 5000-7 1234567890	
Documento	N.º do documento 000123000	Espécie FAT	Aceite N	Processamento 25/11/2011	Nosso n.º 06/0669610257	
USO BANCO	CIP 000	CARTEIRA 06	ESPÉCIE R\$	QUANTIDADE 06	VALOR 1.215,00	(*) VALOR DO DOCUMENTO R\$ 1.215,00
INSTRUÇÕES (TEXTO DE RESPONSABILIDADE DO CEDENTE)					(*) OUTROS ACRÉSCIMOS	
<b>APÓS O VENCIMENTO COBRAR MULTA DE 2% MAIS JUROS MORATÓRIOS DE 0,05% AO DIA NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DO VENCIMENTO</b>						
SACADO DANIEL FRANCISCO DOS SANTOS Rua das dissertações, 2016 - Florestal - MG					(*) TOTAL COBRADO	
						

**Figura 3.8:** O campo de instruções informa como deverão ser cobrados os juros após o vencimento.

Para facilitar o entendimento desse fato, usamos uma planilha para construção, em um mesmo eixo de coordenadas, de linhas que mostram o que ocorre com os juros simples e compostos em um período pequeno (ou seja, menor que um período utilizado para cálculo da taxa), mostrado na planilha da Figura 3.9. Por uma questão de estética do gráfico e para que a diferença que queremos mostrar ficasse mais visível, foi utilizada uma taxa mensal de 500% – mesmo sabendo que essa taxa não corresponde à realidade do mercado. O tempo considerado é de 30 dias e, como a taxa é mensal, pode-se observar claramente que, para períodos entre 1 e 30 dias, os juros simples superam os juros compostos; após os 30 dias, as posições se invertem, e aí os juros compostos passam a apresentar um valor maior.

Os cálculos e a visualização apresentados nessa planilha são um bom exemplo para que os alunos percebam a diferença do comportamento dos dois sistemas de cobrança de juros (simples e compostos). E também para que entendam que as instituições financeiras visam sempre o maior lucro possível.



**Figura 3.9:** Para períodos de tempo menores que o período de taxação, os juros simples são maiores ou iguais que os juros compostos.

Uma outra vertente para o trabalho com juros, no ensino médio, é a comparação desses com funções. Souza [44], dedica uma seção do capítulo de matemática à comparação entre juros simples e juros compostos à função polinomial do 1º grau e exponencial, respectivamente.

De acordo com o CBC, os alunos do primeiro ano deverão ser capazes de resolver situações-problema que envolvam o cálculo de prestações, mas apenas com um número pequeno de parcelas. As planilhas eletrônicas permitirão mostrar financiamentos em

longos prazos, com facilidade, podendo serem utilizados nas aulas, panfletos de ofertas ou mesmo informações de financiamentos dos pais, como a casa própria, financiamento muito comum. Em uma única aula, é possível mostrar aos alunos o comportamento do dinheiro em sistemas distintos de amortização como o Price (sistema francês) e o SAC (sistema de amortização constante), muito comuns em compras a prazo no comércio e no financiamento de imóveis, respectivamente (Fig. 3.10).

Para períodos menores, os cálculos correspondentes a essas amortizações podem ser feitos, manualmente, ou com a ajuda de uma calculadora comum, como mostrado no segundo livro da coleção *A Matemática do Ensino Médio* [26]. Utilizaremos aqui, os símbolos  $J_k$ ,  $P_k$ ,  $A_k$  e  $D_k$  para representarem, respectivamente, a parcela de juros, a prestação, a parcela de amortização e o valor da dívida, em cada época  $k$ . Consideraremos uma taxa  $i$  de juros e um número  $n$  de pagamentos.

Para o SAC, temos

$$A_k = \frac{D_0}{n}$$

$$D_k = \frac{n-k}{n} D_0$$

$$J_k = i D_{k-1}$$

$$P_k = A_k + J_k$$

Enquanto que no sistema francês (Price), as relações a serem utilizadas são

$$P_k = D_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$D_k = D_0 \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{(1+i)^{-n}}$$

$$J_k = i D_{k-1}$$

$$A_k = P_k - J_k$$

Como os sistemas de amortização não são exigidos pelo CBC, as planilhas eletrônicas se tornam ainda mais úteis por facilitarem os cálculos para números de pagamentos maiores, se aproximando mais da realidade atual dos alunos e de seus familiares. Além disso, servem para ajudar a recordar e fixar o cálculo de juros. Os cálculos mais longos, como o do valor de cada prestação no sistema Price, podem ser feitos através de uma função já existente nas planilhas PGTO (no Excel, por exemplo).

Não se deve deixar de chamar a atenção dos alunos para as sequências de valores de um determinado capital, ao longo do tempo, utilizando, principalmente, as planilhas que também tornarão fácil a comparação dos juros com as PAs e as PGs. Essa é uma forma de mostrar que os problemas de Matemática Financeira são, basicamente,

Sistemas de Amortização										
Dívida Inicial	1000,00									
Taxa	5%									
Nº prestações	10									
SAC					Price					
Prestação	Juros	Amortização	Prestação	Dívida	Prestação	Juros	Amortização	Prestação	Dívida	
0	0,00	0,00	0,00	1000,00	0	0,00	0,00	0,00	1.000,00	
1	50,00	100,00	150,00	900,00	1	50,00	79,50	129,50	920,50	
2	45,00	100,00	145,00	800,00	2	46,02	83,48	129,50	837,02	
3	40,00	100,00	140,00	700,00	3	41,85	87,65	129,50	749,36	
4	35,00	100,00	135,00	600,00	4	37,47	92,04	129,50	657,33	
5	30,00	100,00	130,00	500,00	5	32,87	96,64	129,50	560,69	
6	25,00	100,00	125,00	400,00	6	28,03	101,47	129,50	459,22	
7	20,00	100,00	120,00	300,00	7	22,96	106,54	129,50	352,67	
8	15,00	100,00	115,00	200,00	8	17,63	111,87	129,50	240,80	
9	10,00	100,00	110,00	100,00	9	12,04	117,46	129,50	123,34	
10	5,00	100,00	105,00	0,00	10	6,17	123,34	129,50	0,00	
Total	275,00	1000,00	1275,00		Total	295,05	1000,00	1295,05		

Figura 3.10: Comparação de um financiamento de R\$1000,00 em dois sistemas de amortização, SAC e Price, em 10 parcelas postecipadas, com taxa de 5% ao período.

resumidos ao fato de saber quanto vale o dinheiro em cada período de tempo [26].

### 3.4 Crescimento Populacional

Outras sequências podem ser trabalhadas no ensino médio, além das que são cobradas no CBC; um exemplo seria o crescimento populacional.

Há teorias diferentes para esse crescimento, tais como a *teoria populacional Malthusiana*, que foi uma teoria demográfica criada no final do século XVIII, na Inglaterra, pelo economista e sacerdote protestante Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) [38] e a *teoria populacional de Verhulst*, criada por um matemático belga de mesmo nome, que introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor [45].

O modelo de crescimento proposto por Malthus para períodos constantes de tempo é  $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$  sendo  $n$  é o número de períodos decorridos,  $x_n$  é o tamanho da população no período e  $\alpha$ , a taxa de crescimento por unidade de tempo. O valor de  $x_n$  pode ser expresso pelo número de indivíduos ou pela biomassa, que é a massa biológica da população. Malthus descarta em seu modelo a possibilidade de limite de recursos e a competição entre os indivíduos, em caso de população crescente[22].

O modelo proposto por Verhulst leva em consideração o limite dos recursos, considerando que o ambiente que abriga a população é finito, a equação de Verhulst é dada por  $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n - \beta x_n^2$ , onde  $\alpha$  é a taxa de natalidade populacional e  $\beta$  é a taxa de decréscimo da da população devido à competição ente os indivíduos[22].

Através de uma planilha eletrônica podemos criar gráficos de crescimento populacional como os da Figura 3.11.

As teorias de crescimento populacional podem também ser usadas como motivação para o estudo de exponenciais e logaritmos [45].

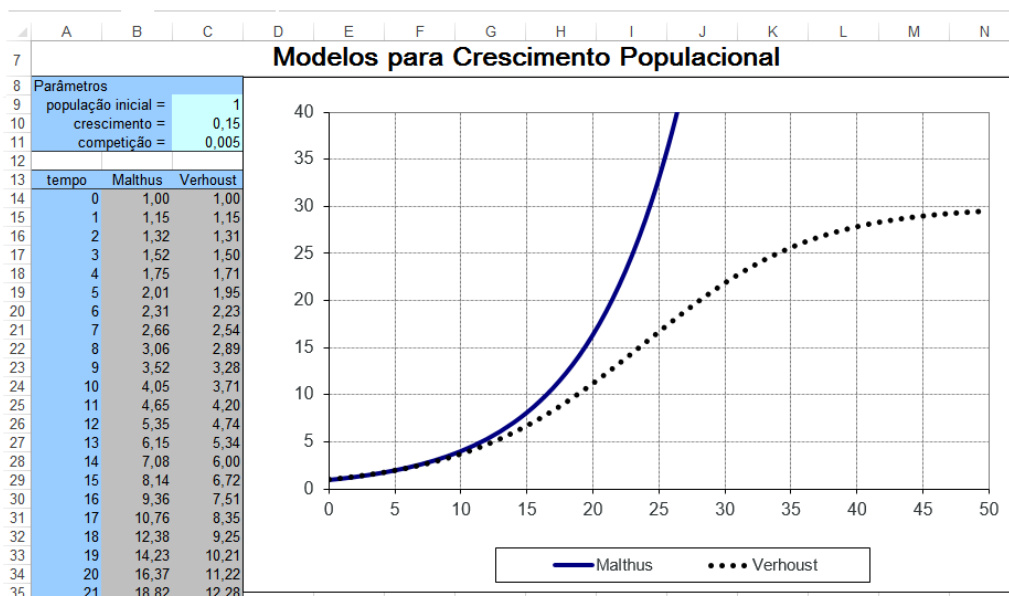


Figura 3.11: Crescimento populacional segundo os modelos de Malthus e Verhous, exemplos de sequências numéricas[10].

# Geometria e Medidas

---

Geometria é uma área da Matemática que vem sendo cada vez mais trabalhada na educação básica. Hoje em dia, as creches ensinam às crianças algumas formas básicas (quadrado, círculo e triângulo), mesmo antes de ensiná-las a contar.

Em primeiro de julho de 2012, o jornal “O Globo”[16], do Rio de Janeiro, publicou reportagem citando pesquisa que destacava a geometria como assunto mais cobrado nas 13 primeiras edições do ENEM. Por ser a principal avaliação para a qual os alunos da educação básica se preparam, o ENEM dita tendências de ensino em todas as áreas e não poderia ser diferente com a Matemática.

Mas a geometria ainda divide opiniões entre os alunos, nem todos gostam e dentre os que gostam, há ainda uma certa preferência por uma parte da geometria ou outra. Para tentar abranger o máximo de público, vamos tratar separadamente três partes da geometria: a plana, a espacial e a analítica. O tema “medidas” também será tratado neste capítulo por ser sugestão do CBC, como eixos temáticos a serem trabalhados concomitantemente no 2º e no 3º anos do ensino médio [7].

## 4.1 Geometria Plana

Como já citado, a geometria plana vem sendo trabalhada nas instituições de ensino, desde os primeiros anos de vida das crianças. Ao longo de todo o ensino fundamental, os professores de matemática reforçam conceitos de figuras planas, relações entre elas e como calcular áreas e perímetros. Mesmo assim, no ensino médio, é comum encontramos adolescentes que não sabem que retângulos e losangos são paralelogramos ou que consideram perímetro e área diretamente proporcionais. Por isso é necessário sempre reforçar os conhecimentos nessa parte básica da geometria.

Situações mais próximas da realidade podem despertar mais o interesse dos alunos, por isso, uma opção para trabalhar áreas, é utilizar plantas de casas e apartamentos, facilmente encontradas na internet ou mesmo em anúncios de construtoras, em jornais. Na Figura 4.1 há a imagem em 3D da planta de uma casa e ao lado, um esquema relativo à planta baixa dessa mesma casa. Várias atividades podem ser propostas a partir das informações aí apresentadas e, novamente, utilizamos uma planilha eletrônica para auxiliar nos cálculos.

Calculamos duas áreas, a da parte externa da casa, relativa às paredes; e a área

interna às paredes do quarto  $Q_1$ . Neste caso, são apenas cálculos simples, mas longos, onde é primordial a atenção. Poderíamos utilizar uma calculadora para auxiliar nas contas, mas uma planilha eletrônica teria vantagem em relação a uma calculadora comum devido ao fato de todas as informações ficarem visíveis e fáceis de se alterar. Caso, seja necessário, pode-se conferir todos os valores digitados, efetuando correções de dados que podem ter sido digitados por engano.

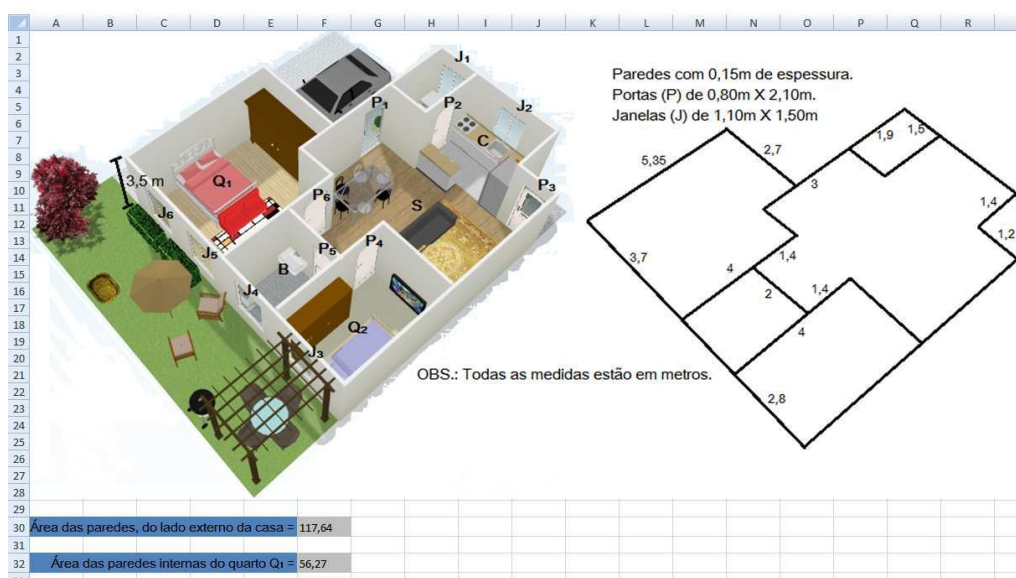


Figura 4.1: Planta de uma casa, utilizada para cálculo de áreas.

Uma outra planilha a ser utilizada no ensino da geometria plana, é a demonstrada na Figura ( 4.2), que traz um triângulo retângulo desenhado sobre o plano cartesiano, planilha esta idealizada por D’Afonseca [10]. Essa planilha calcula automaticamente, a partir da medida dos dois catetos, a medida da hipotenusa, a área do triângulo e as razões trigonométricas *seno*, *coosseno* e *tangente*, para o ângulo interno de vértice na origem.

Esse conteúdo já é passado aos alunos no ensino fundamental, mas é revisto e aprofundado no ensino médio [7]. As razões trigonométricas são utilizadas em muitos momentos ao longo da educação básica, assim como o teorema de Pitágoras, o que torna mais interessante o uso dessa planilha durante o ensino da geometria plana, e em outras aulas que o professor julgar necessária. A critério do professor, essa planilha poderá ser aplicada também aos alunos do ensino fundamental.

## 4.2 Geometria Espacial

O ensino/aprendizagem da geometria espacial nas escolas públicas ainda exige um certo malabarismo dos professores e muita imaginação por parte dos alunos, que normalmente aprendem a geometria plana a partir do uso de material concreto. Ter que imaginar a interseção de planos ou mesmo a altura de uma pirâmide, não é uma tarefa fácil para muitos.

O cálculo de áreas e volumes pode ser feito facilmente com o uso de planilhas eletrônicas. Para ilustrar uma atividade, tomaremos como base a Figura 4.3. A plani-

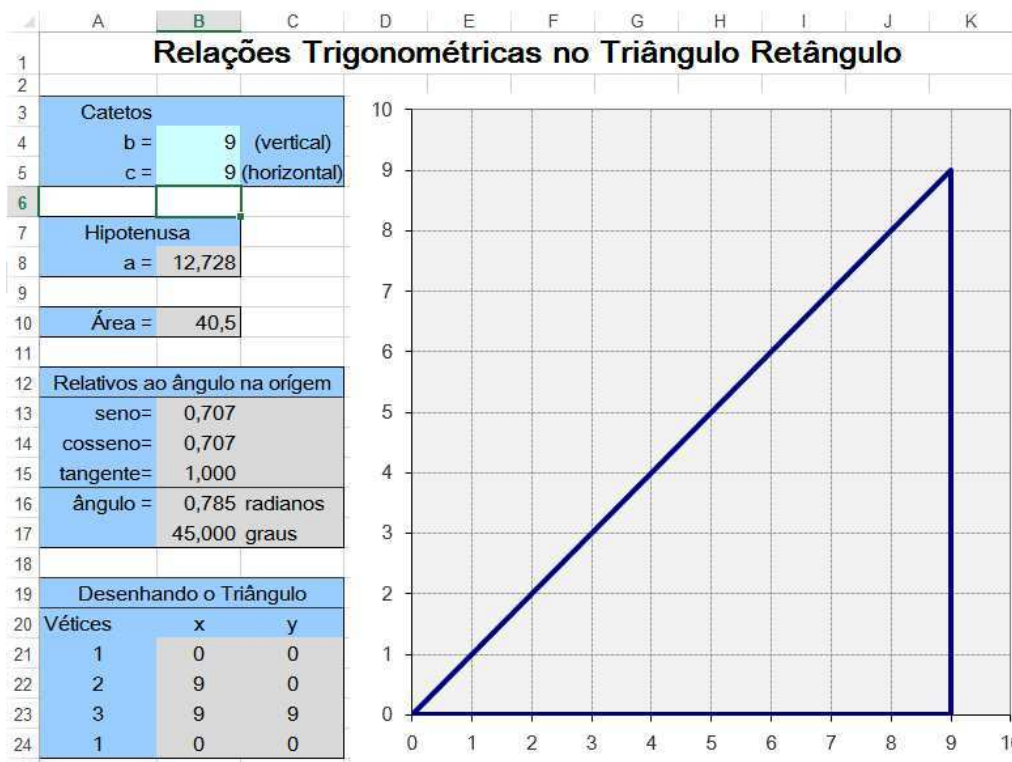


Figura 4.2: Cálculo de razões trigonométricas, área, hipotenusa e ângulo de um triângulo retângulo.

lha construída na referida figura trata de um cubo de aresta  $a$ , que está circunscrito a uma esfera de raio  $r$  e inscrito em outra esfera, de raio  $R$ . A partir do valor de  $a$ , a planilha calcula automaticamente os valores de  $r$  e  $R$ , e a partir desses valores, calcula as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  e os volumes  $V_1$  e  $V_2$  das esferas inscrita e circunscrita ao cubo, respectivamente.

Chamaremos de  $\alpha$  à esfera de raio  $r$  e de  $\Gamma$  à esfera de raio  $R$  para mostrar os cálculos feitos na planilha em supracitada. Temos, inicialmente que, se  $a$  é a medida da aresta do cubo, então  $r = \frac{a}{2}$ , pois o diâmetro de  $\alpha$  é igual à medida do lado do cubo; assim como  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , pois o diâmetro de  $\Gamma$  é igual à medida da diagonal interna do mesmo cubo.

$$S_1 = 4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad S_2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Apesar dos cálculos rápidos e interessantes que podem ser feitos para raios, superfícies e volumes das esferas, deve-se dar especial atenção às razões entre esses valores; que são sempre os mesmos, independente da medida da aresta do cubo. Para mostrar esse fato algebricamente, em geral, os alunos de ensino médio ficam muitas vezes, entediados e pouco interessados; se fizermos os cálculos para muitos valores diferentes de  $a$ , também ficará cansativo. O uso da planilha mostra mais rapidamente (mas não prova) que a razão não se altera, independente do valor atribuído a aresta do cubo e pode despertar no aluno o interesse em demonstrar, algebricamente, que

esse fato é verdadeiro sempre.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{3}^2}{\frac{a^2}{2^2}} = 3$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{a^3\sqrt{3}^3}{\frac{a^3}{2^3}} = 3\sqrt{3}$$

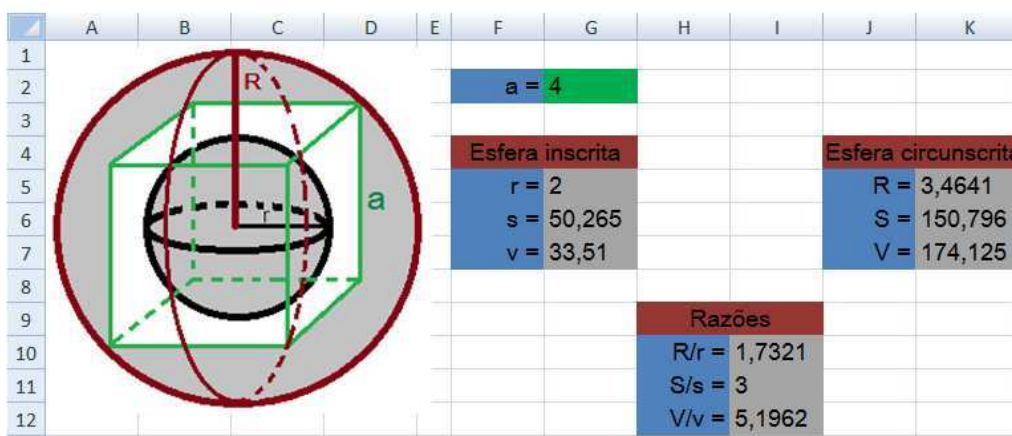


Figura 4.3: Cubo de aresta  $a$ , circunscrito à esfera de raio  $r$  e inscrito na esfera de raio  $R$ .

### 4.3 Geometria Analítica

Com a geometria analítica trabalhada no ensino médio, poderemos abordar temas já tratados na geometria plana e vários outros temas trabalhados na álgebra. Não trabalha-se a geometria espacial dentro da geometria analítica porque no ensino médio não se vê a álgebra no  $\mathbb{R}^3$ .

As planilhas eletrônicas são propícias ao estudo da Geometria Analítica, pois é fácil inserir nelas os pares ordenados. A distância entre dois pontos no plano, por exemplo, dada pela fórmula

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

pode ser calculada facilmente, além de poder ser visualizada no plano (Fig. 4.4).

O estudo analítico da reta poderá ser feito, na planilha, de forma análoga à que foi utilizada no estudo da função polinomial do primeiro grau (Seção 2.1).

Quanto ao cálculo de área de polígonos, podemos tomar emprestado da topologia, o método prático de Gauss. Esse método consiste em utilizar as coordenadas de todos os vértices do polígono em sequência horária ou anti-horária, sem saltar qualquer par ordenado, repetindo ao final o vértice usado inicialmente. O cálculo da área será a soma dos produtos das abscissas de cada ponto pelas ordenadas de cada ponto subsequente, subtraída da soma dos produtos das ordenadas de cada ponto pelas

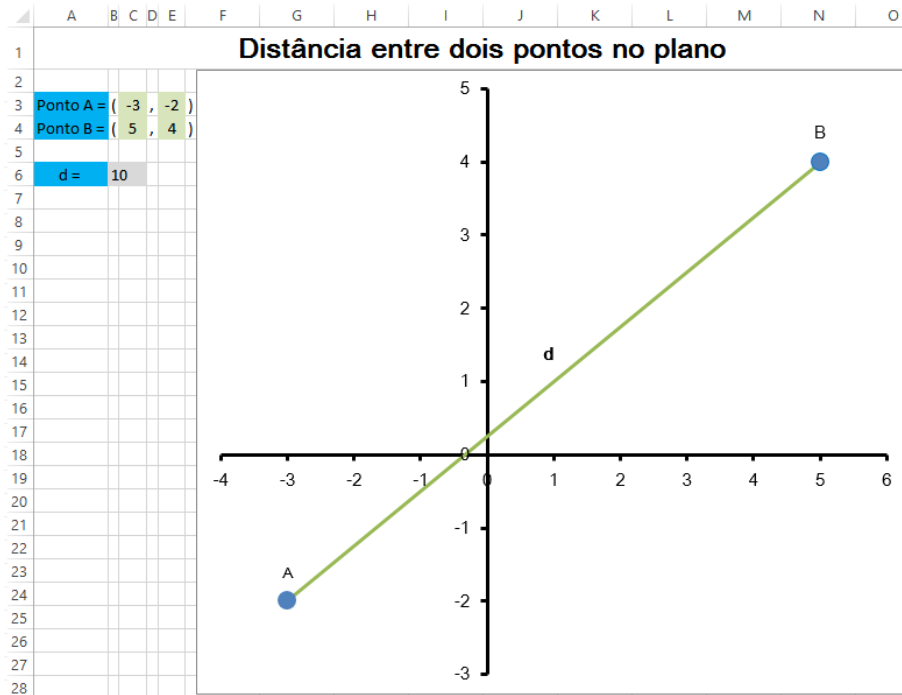


Figura 4.4: A distância  $d$  entre dois pontos,  $A$  e  $B$ , calculada a partir de seus pares ordenados.

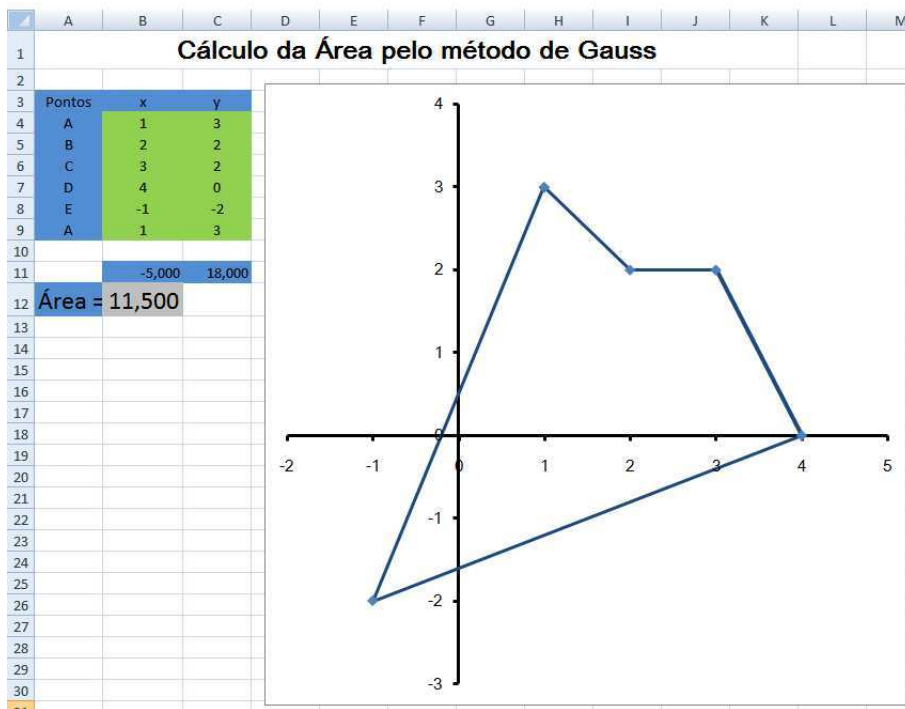


Figura 4.5: Área de um pentágono irregular e não-convexo, calculada pelo método prático de Gauss.

abscissas de cada ponto subsequente; o resultado dessa subtração será dividido por dois[30].

Tomemos como exemplo o triângulo de vértices  $A = (m, n)$ ,  $B = (p, q)$  e

$C = (x, y)$ , sua área  $S$  será

$$S = \frac{(mq + py + xn) - (np + qx + ym)}{2}$$

A construção de uma planilha permitirá, ao mesmo tempo, desenhar o polígono e calcular sua área; sempre a partir dos pares ordenados de todos os vértices (Fig. 4.5). Dependendo do número de vértices do polígono, tem-se a necessidade de alterar a planilha, pois cada um desses vértices é indispensável para a construção do polígono, bem como para o cálculo da área.

# Números, Contagem e Análise de Dados

---

Este é um eixo temático muito amplo, que o CBC coloca como obrigatório nos três anos do ensino médio, como forma de aprofundamento e consolidação do que foi estudado no ensino fundamental.

## 5.1 Números

Os números são trabalhados com as crianças desde os primeiros anos da educação básica, Constance Kamii [23] faz uma análise das teorias de seu professor Jean Piaget sobre o aprendizado dos números pelas crianças a partir dos quatro anos de idade. Seu livro ilustra a preocupação com esse tema primordial para o conhecimento matemático. Após a conclusão do ciclo inicial da educação básica, conhecido como educação infantil, as crianças têm contato com os conjuntos numéricos. Inicialmente com os números naturais, logo depois os racionais não negativos e a seguir, os inteiros. Ao final do ensino fundamental, os números irracionais e por fim os reais. No início do ensino médio, esses conjuntos são todos revistos, bem como suas operações e posições dentro de uma reta numérica.

Com relação ao uso das planilhas eletrônicas para o estudo dos conjuntos numéricos, poderemos explorar os números a partir de uma contagem simples de elementos, como na Figura 5.1, que utiliza a função `CONT.SE`, já existente nas planilhas, para contar a quantidade de pessoas do sexo masculino (M) e de pessoas do sexo feminino (F), no intervalo que foi determinado. Essa contagem retoma a origem e definição de números naturais, como destaca o professor Elon [27].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Sexo	M	F	F	M	M	F	M	M	M	F	F	7	CONT.SE(B4:M4;"M")			
2													5	CONT.SE(B4:M4;"F")			

**Figura 5.1:** Contagem do número de pessoas do sexo masculino e do sexo feminino, em um grupo de 12 pessoas.

Aplicações do uso dos números voltadas para o cotidiano, podem despertar o

interesse dos estudantes, por isso indicamos o uso da planilha mostrada na Figura 5.2 [10], que utiliza informações de uma bicicleta para o cálculo de razões. Essa planilha foi construída com base em uma bicicleta que possui câmbio dianteiro de duas velocidades – os quais são denominados de pedal menor e pedal maior – e câmbio traseiro, ou catraca, com cinco velocidades, totalizando 10 velocidades se mantido fixo o número de pedaladas por minuto.

Por ser um meio de transporte muito comum, é possível que alunos tenham bicicletas, o que abre a possibilidade de adaptação dessa planilha para se trabalhar com as informações de uma bicicleta específica. Os vários números dessa planilha podem ser trabalhados separadamente, quanto aos seus significados.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>A Bicicleta e as Proporções</b>							
2								
3	Número de dentes no pedal menor =				39	dentes		
4	Número de dentes no pedal maior =				51	dentes		
5	Raio da roda traseira =				35	cm		
6								
7	Circunferência da roda traseira =				219,9	cm		
8								
9	Catraca	N dentes	Razão com o pedal		cm por pedalada		km por pedalada	
10			menor	maior	P. menor	P. maior	P. menor	P. maior
11	menor	15	2,60	3,40	571,8	747,7	0,0057	0,0075
12	segundo	17	2,29	3,00	504,5	659,7	0,0050	0,0066
13	terceiro	20	1,95	2,55	428,8	560,8	0,0043	0,0056
14	quarto	24	1,63	2,13	357,4	467,3	0,0036	0,0047
15	maior	28	1,39	1,82	306,3	400,6	0,0031	0,0040
16								
17	Número de pedaladas por minuto =				19			
18	Número de pedaladas por hora =				1140			
19								
20	Catraca	Velocidade com o						
21		P. menor	P. maior					
22	menor	6,52	8,52	km/h				
23	segundo	5,75	7,52	km/h				
24	terceiro	4,89	6,39	km/h				
25	quarto	4,07	5,33	km/h				
26	maior	3,49	4,57	km/h				
27								

**Figura 5.2:** Proporções encontradas em uma bicicleta, a partir das razões entre o número de dentes de seus câmbios – pedais e catracas.

Apresentamos, até aqui, exemplos que utilizam apenas números positivos, mas podemos também trabalhar os números negativos, além do zero. Mesmo já estando no ensino médio, alunos ainda apresentam dúvidas sobre as operações com números inteiros; e nesse ponto uma planilha também pode ajudar bastante.

Para tirar dúvidas sobre essas operações, pode-se fazer uma sequência das mesmas, com os resultados sendo dados pela planilha; a fim de que se possa comparar os resultados. A vantagem, em relação a uma calculadora, por exemplo, seria a

possibilidade de se fazer muitos cálculos de uma só vez e trocar valores com facilidade, inclusive montando operações inversas, através de fórmulas, com o objetivo de comparar e entender melhor o que ocorre em cada operação.

Ainda dentro do tópico de números, pode-se trabalhar o valor numérico de uma expressão algébrica, tema recorrente na Matemática básica. Podemos, por exemplo, verificar as possíveis veracidades de produtos notáveis, propriedades de potências e logaritmos, como mostrado na Figura 5.3. São várias as expressões que se pode verificar com o auxílio de uma planilha eletrônica.

	A	B	C	D	E
1					
2	<b>a = 4</b>			$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^b = 2,70481$	
3	<b>b = 100</b>				
4					
5	$(a + b)^2 = 10816$			$\log^{ab} = 2,60206$	
6	$a^2 + b^2 = 10016$			$\log^a \log^b = 1,20412$	
7					
8	$(ab)^2 = 160000$			$\sqrt{ab} = 20$	
9	$a^2 b^2 = 160000$			$\sqrt{a}\sqrt{b} = 20$	

**Figura 5.3:** Análise de relações algébricas, a partir da substituição das variáveis por valores diversos.

Para ilustrar o uso de números para demonstração de igualdades, usamos nesta planilha, dois valores de referência,  $a$  e  $b$ , com o objetivo de testar algumas relações, a saber:

- 1-  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ? Como  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ , a proposição só será verdadeira se  $ab = 0$ . Assim, para quaisquer valores diferentes de zero, que forem testados, verifica-se a falsidade.
- 2-  $(ab)^2 = a^2 b^2$ ? Esta igualdade é verdadeira, pois  $(ab)^2 = (ab)(ab) = (aa)(bb) = a^2 b^2$ . Os resultados apresentados na planilha também confirmarão essa igualdade, independente dos valores de  $a$  e  $b$ .
- 3-  $\log(ab) = \log(a) \log(b)$ ? Vamos escrever  $\log(a) = m$  e  $\log(b) = n$ , assim teremos  $10^m = a$  e  $10^n = b$ . Segue daí que  $10^m \cdot 10^n = ab$ , ou seja,  $10^{(m+n)} = ab$ ; o que significa que  $m + n = \log(ab)$ . Portanto,  $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$ , mostrando ser falsa a proposição quando  $a \neq b$ ,  $ab \neq a$  e  $ab \neq b$ .

Substituindo na planilha  $a$  e  $b$ , positivos, chega-se também a esta constatação.

- 4-  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ? Esta igualdade é verificada com base no item 2, pois  $\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = (a)^{\frac{1}{2}}(b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ; sendo então verdadeira. Na verificação por substituição numérica, deve-se utilizar valores não negativos para  $a$  e  $b$ .

- 5- Por último, colocamos na planilha a expressão

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)^b$$

que pode ser usada para aproximar os valores do número  $e$ , sem utilizar limites.

## 5.2 Números Complexos

Os números complexos são apresentados aos alunos do 3º ano do ensino médio e, como não poderia deixar de ser, causam bastante estranheza no início. É difícil

aceitar que todos os professores de matemática “mentiram” até então, dizendo que não havia, por exemplo, valor para  $\sqrt{-1}$ ; e agora vem o professor dizer que isso é igual a uma unidade imaginária “ $i$ ”.

É comum que os alunos concluam a educação básica com pouquíssimo ou nenhum conhecimento sobre os números complexos. Um dos motivos é o fato de que este conteúdo é deixado, normalmente para o final do último ano letivo, pois não é cobrado no ENEM. Observando as diretrizes que norteiam o ENEM observa-se que na competência de área 1, pretende-se construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. Não fazendo menção aos números complexos [33]. Após o ENEM a maioria dos alunos já está aprovada, só esperando a conclusão do ensino médio, acabando por diminuir a motivação e o interesse pelos estudos.

A fim de tentar dar um pouco mais de ânimo aos alunos que estão estudando números complexos, podemos utilizar as planilhas eletrônicas que possuem várias funções para se trabalhar com esses números. Vamos utilizar como exemplo os complexos  $Z = 2 + i$  e  $W = 3 - 4i$  para realizar operações, como mostra a Figura 5.4.

Além das operações mostradas na referida figura (módulo, argumento, conjugado, adição, subtração, divisão, multiplicação e potência de expoente inteiro), ainda é possível fazer várias outras, como raiz, logaritmo, cosseno, seno, etc.

	A	B
1	<b>Operações com Complexos</b>	
2	<b>Operação</b>	<b>Resultado</b>
3	Módulo de W; $ W  = 5$	
4	Argumento de Z em rad; $\theta = 0,463647609$	
5	Conjugado de Z = 2-i	
6	$W + Z = 5-3i$	
7	$W - Z = 1-5i$	
8	$W : Z = 0,4-2,2i$	
9	$W \cdot Z = 10-5i$	
10	$W^3 = -117-44i$	

**Figura 5.4:** Algumas das operações com números complexos, que podem ser feitas em planilha eletrônica. Os cálculos foram feitos com base nos complexos  $Z = 2 + i$  e  $W = 3 - 4i$ .

### 5.3 Contagem

Os problemas de contagem não se restringem, unicamente, à contagem simples de elementos, no ensino médio tratamos a contagem a partir da análise combinatória, que abrange o princípio fundamental da contagem (PFC), arranjos, permutações e combinações. Podemos também citar, em contagem, o cálculo do número de elementos da união de dois ou mais conjuntos. Outros métodos de contagem, tais como princípio da inclusão-exclusão, princípio das gavetas e teoria de Ramsey, normalmente não são

trabalhados no ensino médio [7], apesar de que o princípio das gavetas, por exemplo, ser bastante simples e de fácil compreensão.

Os cálculos de arranjo, permutação e combinação podem ser feitos nas planilhas eletrônicas com o uso de funções específicas. Essas funções já existem nas planilhas, como no Excel, onde se tem as funções PERMUT, que calcula permutações e arranjos simples, PERMUTAS, para o cálculo de permutações com elementos repetidos e COMBIN, que será utilizada para o cálculo de combinações simples. Não há uma função chamada arranjo, apesar das planilhas oferecem outras funções que podem ser úteis, como a COMBINA, para o cálculo de combinações com elementos repetidos, que não consta do CBC, mas pode ser mostrado aos alunos do ensino médio.

Uma outra aplicação das planilhas eletrônicas, quando de fala em contagem é a construção, rápida e fácil, do Triângulo de Pascal (Fig. 5.5) que pode ser utilizado para encontrar valores resultantes de combinações simples, coeficientes do desenvolvimento de potências do tipo  $(x + y)^n$  ou trabalhar relações, no mínimo interessantes, como a de Stifel[28]

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$$

Existem várias outras relações que podem ser observadas no triângulo de Pascal, como o fato de que a soma de todos os elementos de uma linha é sempre uma potência de 2. Caso o segundo número de uma linha seja um número primo, todos os elementos dessa linha serão múltiplos desse número, excetuando o número 1. Outras relações existentes no triângulo de Pascal são citadas no livro “O diabo dos números” [14], em que o autor dedica várias páginas a tratá-las de forma curiosa, mostrando uma maneira mais lúdica de trabalhar este tópico.

Para se trabalhar as várias propriedades existentes no triângulo de Pascal, podemos utilizar uma planilha para sua construção. Tal construção pode ser feita, indicando que cada elemento, a partir da terceira linha e segunda coluna, é igual à soma de outros dois elementos da linha anterior, relação de Stifel.

Podemos também resolver exercícios de combinatória com o auxílio de planilhas, como a questão da prova do Profmat em 2015, exemplificada a seguir:

Uma escola pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão.

- (a) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor.
- (b) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor e dois alunos.
- (c) Um aluno resolveu o item (b) acima da seguinte maneira:

“Devemos primeiramente selecionar um professor dentre os oito ( $C_8^1$ ). Escolhido um professor, devemos, em seguida, escolher dois alunos dentre os vinte ( $C_{20}^2$ ). Finalmente, escolhidos um professor e dois alunos, devemos escolher 3 pessoas

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	lin\col	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	0	1													
3	1	1	1												
4	2	1	2	1											
5	3	1	3	3	1										
6	4	1	4	6	4	1									
7	5	1	5	10	10	5	1								
8	6	1	6	15	20	15	6	1							
9	7	1	7	21	35	35	21	7	1						
10	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
11	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
12	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1			
13	11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1		
14	12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	
15	13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1

Figura 5.5: Triângulo de Pascal, com 14 linhas e 14 colunas, contadas a partir de zero (0).

quaisquer das 25 que restaram para formar a comissão de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos ( $C_{25}^3$ ). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos é igual a  $C_8^1 \times C_{20}^2 \times C_{25}^3$ .”

A solução proposta por este aluno está correta? Caso não esteja, identifique e explique o erro deste aluno.

**Solução**

A solução dos itens (a) e (b) estão mostradas na Figura 5.6, cada uma calculada de duas maneiras diferentes. No primeiro item pode-se fazer as seguintes escolhas para formar a comissão:

- 1 professor e 5 alunos
- 2 professores e 4 alunos
- 3 professores e 3 alunos
- 4 professores e 2 alunos
- 5 professores e 1 aluno
- 6 professores e 0 aluno.

Ou podemos calcular o número total de comissões de 6 membros, que se pode escolher em um grupo de 28 pessoas; e subtrair desse total o número de comissões formadas por 6 alunos e nenhum professor.

A solução do segundo item apresenta um número menor de combinações possíveis, podemos ter, neste caso:

- 1 professor e 5 alunos
- 2 professores e 4 alunos
- 3 professores e 3 alunos
- 4 professores e 2 alunos.

Ou, de outra maneira, tomar todas a comissões possíveis com 6 pessoas; e delas subtrairmos aquelas formadas somente por alunos, as formadas 5 professores e 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Solução de item sobre combinações simples</b>							
2	Professores	8						
3	Alunos	20						
4	(a) $C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 + C_8^5 \times C_{20}^1 + C_8^6 \times C_{20}^0 =$							337980
5		ou						
6	$C_{28}^6 - C_{20}^6 =$		337980					
7								
8	(b) $C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 =$							336832
9		ou						
10	$C_{28}^6 - C_{20}^6 - C_8^5 \times C_{20}^1 - C_8^6 =$		336832					

**Figura 5.6:** Solução dos itens (a) e (b) da questão 01 da avaliação 1 – MA12 – 2015.1 do PROFMAT.

aluno, e aquelas formadas por 6 professores.

O item (c) não necessita de cálculos, apenas de uma análise da solução apresentada pelo aluno. É bem verdade que poderíamos fazer o cálculo apresentado, a fim de confrontar os resultados, mas basta observar que há comissões contadas repetidas vezes. Como exemplo tomemos o caso em que é escolhido inicialmente o professor  $P_1$ , depois os alunos  $A_1$  e  $A_2$  e, por último os professores  $P_2, P_3$  e  $P_4$ ; formando a comissão  $P_1A_1A_2P_2P_3P_4$ . Se for escolhido primeiro o professor  $P_4$  e por último o professor  $P_1$ , mantendo-se as demais escolhas na mesma ordem, formaremos uma comissão com os mesmos elementos  $P_4A_1A_2P_2P_3P_1$ .

## 5.4 Análise de Dados

A estatística deve ser introduzida na educação básica, nas aulas de Matemática, ao menos nas escolas estaduais de Minas Gerais. Ainda nos anos iniciais do ensino fundamental, as crianças tomam conhecimento de tabelas e gráficos de barras. Durante o ensino fundamental 2 (6º ao 9º ano) trabalha-se o eixo temático de dados, que enfatiza a organização e apresentação de um conjunto de dados em tabelas ou gráficos. No primeiro ano do ensino médio, já sob o nome de Estatística, continua-se a trabalhar a organização de dados em tabelas, segundo rege o CBC.

Na apresentação dos eixos temáticos do ensino médio, o CBC traz como “justificativa” para se trabalhar Estatística, o fato da proximidade com a realidade dos alunos:

*Provavelmente é no tratamento de dados que a matemática manifesta mais claramente a sua utilidade no cotidiano. Hoje em dia a Estatística Descritiva e a Probabilidade fazem parte do discurso jornalístico e científico cotidiano quando se trata, por exemplo, de pesquisas de intenção de voto, perfil sócio-econômico da população brasileira, as chances da cura de determinada doença ou riscos de contraí-la. Espera-se, portanto, que numa formação básica do cidadão, não apenas se adquira a capacidade de ler e analisar dados expostos em diversas formas, mas que se possa refletir*

*criticamente sobre os seus significados e emitir juízos próprios. Por essa razão, a análise de dados é escolhida como um dos temas estruturadores da Matemática, pois proporciona uma adequada contextualização sócio-cultural, aproximando o conhecimento adquirido na Escola da realidade do aluno. Este tema é importante também por ser utilizado em quase todas as demais áreas do conhecimento, como, por exemplo, demografia, saúde, linguística, possibilitando o desenvolvimento de várias atividades integradas dentro da escola [7].*

Apesar de apresentar um certo destaque, a Estatística sugerida no CBC ainda não atende o mínimo que nossos alunos necessitam; ela não traz, por exemplo, o estudo das medidas de dispersão – nem sequer o cálculo da amplitude. Em 2016, a prova do exame nacional do ensino médio (Enem) trouxe uma questão que exigia um conhecimento mínimo a cerca de Desvio Padrão, e os alunos das escolas estaduais de Minas Gerais não estavam devidamente preparados para dar uma resposta.

Assim como em outros tópicos da matemática do ensino médio, as orientações do CBC não possuem uma correspondência com relação aos livros didáticos aprovados pelo MEC; observa-se que a maioria destes tratam da Estatística no volume 3, destinado aos alunos do 3º ano. Como o livro é, muitas das vezes, o melhor, senão o único recurso disponibilizado ao professor, torna-se necessário o trânsito frequente de livros entre uma sala e outra. O uso de planilhas eletrônicas poderá reduzir esse trabalho físico de carregamento de livros.

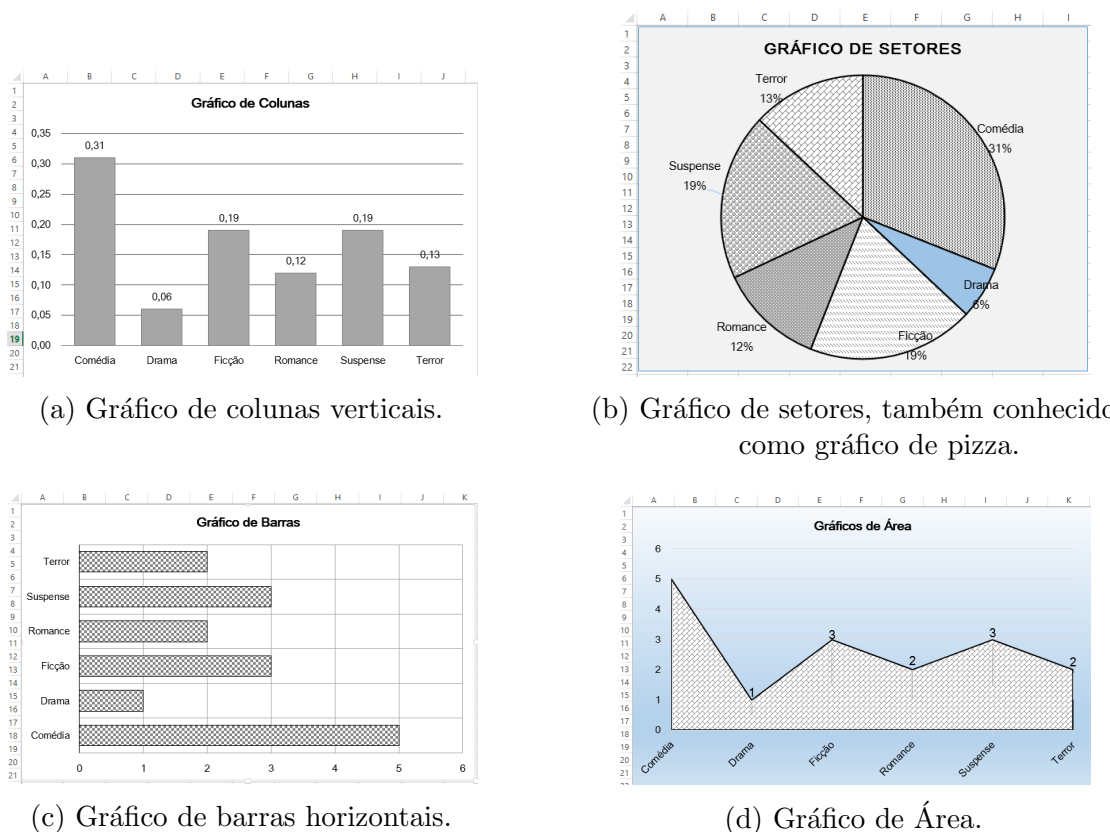
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
1	<b>Tabulação</b>																		
2																			
3	<b>Gênero de Filme</b>	Fi	Ro	Fi	Co	Co	Dr	Co	Co	Te	Fi	Su	Su	Ro	Su	Te	Co		
4	<b>Sexo</b>	M	M	M	F	M	F	F	M	F	M	M	F	M	F	M	F		
5																			
6	<b>Gênero de Filme</b>	Comédia (Co)					5	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Co")										
7		Drama (Dr)					1	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Dr")										
8		Ficção (Fi)					3	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Fi")										
9		Romance (Ro)					2	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Ro")										
10		Suspense (Su)					3	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Su")										
11		Terror (Te)					2	⇒	CONT.SE(C\$3:R\$3; "Te")										
12	<b>Sexo</b>	Masculino (M)					9	⇒	CONT.SE(C4:R4; "M")										
13		Feminino (F)					7	⇒	CONT.SE(C4:R4; "F")										

**Figura 5.7:** Pesquisa entre 16, alunos quanto ao sexo e sobre o gênero preferido de filme.

Usaremos planilhas para organizar dados em tabelas, no primeiro ano do ensino médio. Dados que estejam na forma bruta poderão ser ordenados alfabeticamente ou numericamente, com a função CLASSIFICAR, e contados com a função CONT.SE, para serem organizados em tabelas de frequência. Para exemplificar pode-se fazer uma pequena pesquisa entre os alunos, indagando coisas simples como sexo e gênero

preferido de filme. A Figura 5.7 ilustra esse exemplo, os valores não foram digitados, mas sim contados a partir de uma função inserida – à frente da quantidade de cada gênero de filme e de cada sexo está colocada a fórmula utilizada para a contagem.

As planilhas eletrônicas facilitam o estudo da estatística através da análise de dados, e permite a construção de gráficos de uma maneira muito fácil, em formatos diversos. Basta selecionar os dados, clicar em **inserir** e escolher o tipo de gráfico que deseja utilizar, para explicitar os valores descritos e já organizados em tabela.



**Figura 5.8:** Exemplos de gráficos gerados por planilhas eletrônicas.

Para exemplificar, construímos quatro gráficos (Fig. 5.8) tendo os mesmos dados como base. Utilizamos os valores da pesquisa realizada com os 16 alunos, sobre gênero de filme preferido (Fig. 5.7), para construir gráficos de:

**Setores (ou Pizza)** – Os percentuais mostrados nesse gráfico são calculados automaticamente pela planilha; esta é uma das opções de design para apresentação do mesmo.

**Colunas** – Este gráfico aparece como primeira opção para a maioria dos dados selecionados, é um gráfico de fácil interpretação, e permite também uma formatação simples e rápida, em qualquer tipo de planilha.

**Barras** – Muito semelhante ao gráfico de colunas, a principal diferença é que as barras referentes às informações retiradas da pesquisa são horizontais.

**Área** – Um gráfico menos usual que os anteriores. Ele é mais usado para mostrar tendências ao longo do tempo, assim como o gráfico de linhas. O gráfico de linhas seria formado apenas pela linha superior do gráfico de área.

Quanto à formatação, o gráfico de área permite colocar, facilmente, qualquer imagem em sua representação.

Não vamos citar, nem tampouco exemplificar cada um dos tipos de gráfico disponíveis nas planilhas eletrônicas. Mas fica aqui uma recomendação para que os professores explorem outros modelos disponíveis, não se prendendo apenas aos mais tradicionais, que geralmente são apresentados nos livros didáticos voltados à educação básica.

## Colocando em Prática

---

Desde o início deste trabalho venho aplicando, em sala de aula, atividades diferenciadas envolvendo a Matemática, com o uso de planilhas eletrônicas. Até então, eu utilizava as planilhas apenas para construir alguns gráficos estatísticos e tabelas com cálculos financeiros simples.

Fiz, então, um planejamento para rever funções polinomiais de primeiro e segundo grau, com os alunos do terceiro ano do ensino médio. O planejamento das aulas é o que se segue:

### 6.0.1 Primeira aula

1. Inicialmente os alunos deverão abrir as planilhas no computadores, para que possam conhecer melhor o ambiente de trabalho. Todos já visualizaram as planilhas em sala de aula, mas nem todos já utilizaram uma planilha eletrônica na prática.
2. Serão dados alguns comandos básicos como exemplos, a serem inseridos nas planilhas pelos alunos. Tais como somar valores de duas ou mais células, calcular potências e arrastar fórmulas.
3. Logo depois será pedido aos alunos para construírem uma planilha que dê a raiz de uma função afim, cujo processo algébrico será relembrado no quadro negro.

$$f(x) = ax + b \quad f(x) = 0 \quad ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}.$$

4. Após a construção desta planilha, os alunos deverão alterar os valores de  $a$  e  $b$  e observar o resultado apresentado para a raiz da função.
5. A seguir, será solicitado aos alunos a construção do gráfico dessa função (afim, Fig. 2.1), dando destaque para o ponto  $(-b/a, 0)$ . Depois do gráfico pronto, cada aluno irá alterar o valor de  $a$ , substituindo-o por 1, 2, 3, 4 e 5, observando o que ocorre com o gráfico. De forma análoga devem usar os negativos  $-1, -2, -3, -4$  e  $-5$ , fazendo a mesma observação.

- Deixando agora um valor fixo para o coeficiente  $a$ , deverão atribuir valores diferentes para o coeficiente  $b$ , a fim de que tomem conhecimento do efeito deste coeficiente sobre o gráfico.
- Ao final dessa primeira aula, de aproximadamente 90 minutos – serão dois horários de 50 minutos cada, já descontados o deslocamento de ida e volta até o laboratório de informática – espera-se que os alunos relembrem o que é e como se calcula a raiz de uma função afim; que eles saibam quais são os efeitos produzidos pelos coeficientes  $a$  e  $b$  da função  $f(x) = ax + b$  sobre o gráfico dessa função, além de identificarem com facilidade a representação geométrica da raiz.

### 6.0.2 Segunda aula

A duração dessa aula será a mesma da aula anterior, seguindo o seguinte roteiro:

- Inicialmente, os alunos deverão usar uma planilha eletrônica para calcular as raízes de uma função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0.$$

Com o intuito de facilitar o trabalho, será feito o cálculo das raízes de uma função quadrática no quadro negro, já destacando o fato de que a planilha não separa os cálculos da fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara), ou seja, cada aluno terá que inserir duas fórmulas

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

e

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

- Assim que concluírem a construção da planilha, todos terão que testar alguns valores diferentes para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Cada um poderá utilizar os valores que quiser, mas depois de alguns instantes serão instruídos a usarem números que resultem em resultados iguais para as duas fórmulas, bem como resultados diferentes e mesmo a ausência de resultados – garantindo assim, que visualizem todas as possibilidades de raízes.
- Num segundo momento, será construído o gráfico da função quadrática, que é uma curva parabólica, como mostrado na Figura 2.4. Para um primeiro gráfico, utilizaremos valores que gerem duas raízes distintas para a função; depois do gráfico pronto, vamos dar destaque a essas raízes e, a seguir, destacaremos outro ponto importante da parábola, o vértice, calculado em duas células distintas

das já utilizadas, o par ordenado

$$\left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

em que  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

4. A parte final dessa aula será de muita observação, depois de dar liberdade para que troquem à vontade os valores dos coeficientes, os alunos serão orientados a utilizarem como coeficientes da função, os valores colocados no quadro negro. O intuito é mostrar as variações que ocorrem no gráfico, dependendo principalmente dos sinais de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

### 6.0.3 Observações sobre as aulas.

Na primeira aula houve um pouco de dificuldade, por parte de alguns alunos, principalmente para controlar o mouse. Embora consigam digitar com muita facilidade, nas telas dos aparelhos celulares, tivemos alunos ficaram um pouco perdidos com o teclado do computador, ao procurarem as letras que desejavam.

Essa dificuldade inicial, revelou uma face muito interessante em um aluno em especial, que chamarei de João. Tal aluno não demonstra interesse pelas aulas em sala, nem tampouco apresenta domínio do conteúdo, mas se mostrou muito prestativo em auxiliar seus colegas; prestando bastante atenção às orientações passadas. Ele terminava rapidamente cada etapa e se punha a ajudar os colegas com dificuldade.

Ao criar a tabela de valores para as variáveis  $x$  e  $y$  da função afim,  $y = ax + b$ , enquanto eu oferecia ajuda a alguns alunos, João explicou a alguns alunos como deveriam proceder para arrastar valores e fórmulas. Ele se tornou o aluno mais aplicado e interessado, durante as aulas no laboratório de informática.

De maneira geral, os alunos conseguiram seguir todos os passos para construção das fórmulas e gráfico propostos para a primeira aula. Ao final dessa aula, todos entenderam as variações provocadas pela alteração dos coeficientes  $a$  e  $b$ . Gostaram da facilidade com que se pode calcular a raiz da função, e também construir o gráfico.

Quando da segunda aula, os alunos demonstraram maior facilidade e agilidade na execução dos comandos, bem como da construção de tabelas e gráficos. Foi possível relembrar e frisar a relação entre o valor do discriminante ( $\Delta$ ) e o número de raízes reais de uma função quadrática,  $y = ax^2 + bx + c$ .

Ao construirmos o gráfico dessa função, João novamente se sobressaiu, ao substituir os valores dos coeficientes e dizer à turma o que aconteceria a cada substituição, antes mesmo que eu pedisse que fizessem alguma alteração. Ele percebeu rapidamente os deslocamentos na horizontal e na vertical, além da inversão da concavidade da parábola, a partir da mudança do sinal de cada coeficiente.

Todos os alunos conseguiram construir a planilha solicitada, com níveis diferentes de dificuldades, mas com vontade de conseguirem concluir o que foi proposto. Os objetivos da aula foram alcançados, sem qualquer aluno se recusar em participar de alguma atividade e, mais do que isso, com uma percepção clara de que houve entendimento do conteúdo por parte de todos.

## Considerações Finais

---

Apresentamos uma abordagem alternativa de apresentação para vários tópicos de Matemática do ensino médio, presentes nos Conteúdos Básicos Comuns (CBC) de Minas Gerais. Salientamos que as alternativas aqui apresentadas, são opções de recursos para auxiliar o professor de Matemática, em especial no ensino médio, não propomos que sejam seguidas como um guia para esse nível de ensino.

Optamos por não incluir os detalhes de construção das planilhas, entendendo que um conhecimento básico sobre o tema permitirá ao professor construir tudo o que foi proposto. Se necessário, o detalhamento do funcionamento das planilhas pode ser encontrado em outros trabalhos, como por exemplo, em Nilson de Sousa Santos (2014) [41].

No decorrer do trabalho incluímos exemplos de construções de planilhas que abordam funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica, além de sequências numéricas, juros, cálculo de áreas e volumes, operações com números complexos, análise combinatória e gráficos estatísticos.

Há exemplos apresentados nesse trabalho que não são normalmente apresentados em livros didáticos e, até por isso, aguçam a curiosidade. O gráfico que mostra a soma dos termos de uma PA (Fig. 3.2) não foi encontrado em qualquer dos livros didáticos pesquisados por nós, e mostra o que pode acontecer com essa soma termo a termo.

A aplicação em sala de aula, mostrou que as planilhas podem ser uma ferramenta útil, capaz de despertar maior interesse por parte dos alunos. A construção das planilhas no laboratório de informática permitiu aos alunos verificarem o que ocorre com o gráfico de uma função ao ter seus coeficientes alterados, um a um. Foi notória a participação de todos, empenhados em construir as planilhas e verificar se o resultado final, ao gerar o gráfico, seria o esperado. Podemos concluir, sem medo de errar, que a forma alternativa de trabalhar Matemática com o uso de planilhas eletrônicas é válida.

Embora não tenhamos abordado todos os tópicos da matemática do ensino médio sugerimos o uso das planilhas eletrônicas como opção de ensino/aprendizagem. Sendo possível a cada professor criar novas planilhas, explorando os mais diversos tópicos que devem ser abordados no ensino de Matemática, não só no ensino médio, mas

também no ensino fundamental.

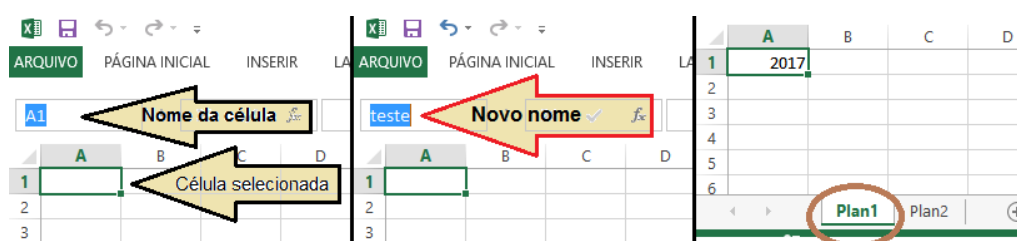
## Apêndice

Vamos deixar aqui um pequeno tutorial para construção do gráfico de uma função em planilha eletrônica. Como exemplo vamos construir o gráfico de uma função quadrática e mostraremos que, de forma análoga pode-se construir os gráficos de muitas outras funções.

Para a construção que iremos mostrar a seguir, utilizaremos o software Excel 2013 da Microsoft. Outras versões desse software também poderão ser utilizadas com os mesmos comandos que iremos mostrar.

Iniciaremos mostrando como se pode alterar o nome de um célula da planilha eletrônica. Isso facilitará o uso de algumas células para criação de fórmulas. O processo é bastante simples, basta selecionar a célula que se deseja alterar o nome e em seguida apagar o nome original da planilha pelo nome desejado.

A figura 8.1 mostra a seleção da primeira célula da planilha A1, localizada na primeira linha e na primeira coluna; logo acima da célula encontra-se seu nome original. Esse nome deve ser apagado e, em seu lugar, deve-se digitar o novo nome da célula, que nesse caso estamos rebatizando de “teste”. Depois de digitado o novo nome deve-se apertar a tecla **enter**, para que esse nome fique gravado. Alguns nomes podem não serem aceitos por já existirem com outro significado na planilha, como a letra “C”, que significa coluna.



**Figura 8.1:** Alteração do nome da célula A1 da planilha eletrônica.

Pode-se notar também (Fig. 8.1) que digitamos um valor, o número 2017. Nesse caso, nosso objetivo é mostrar que o nome dado a uma célula é válido em qualquer planilha do arquivo aberto. Ao abrirmos a planilha 2 (Plan2), na parte inferior da planilha, e escolhermos uma célula qualquer, podemos utilizar as informações digitadas na célula “teste”, apenas colocando seu nome em uma fórmula. A figura

8.2 mostra a planilha 2, com a célula B2 ativa, onde foi digitada a fórmula = teste. O sinal de igual (=) deve ser colocado antes de qualquer fórmula; no exemplo em questão queremos retomar o valor digitado na célula “teste” da planilha 1.

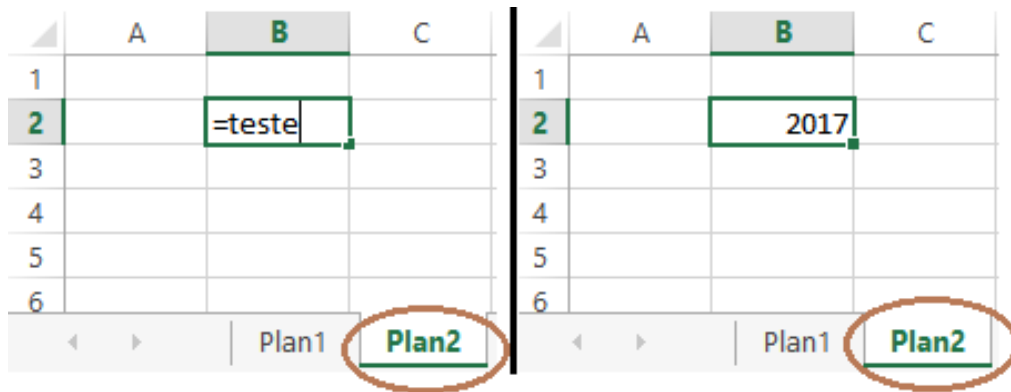
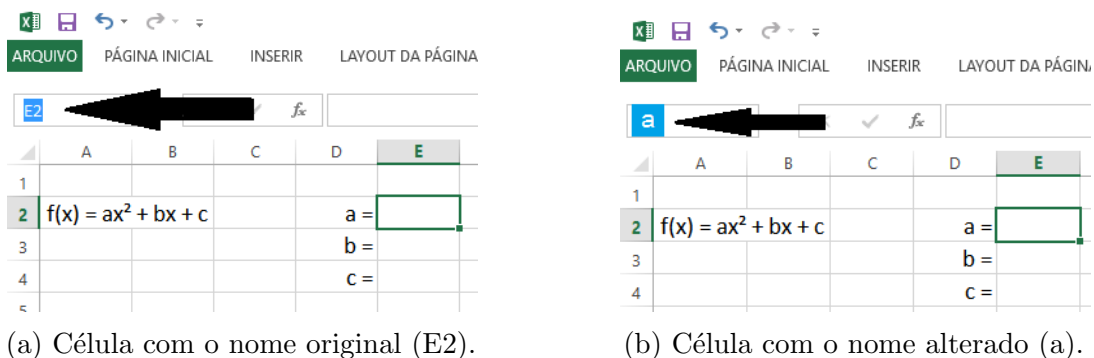


Figura 8.2: Uso de uma célula com nome alterado, em uma fórmula.

A célula que foi renomeada poderá ser usada em uma fórmula e, mesmo que esta fórmula seja arrastada, ela manterá o mesmo valor sempre. Vamos agora iniciar a construção do gráfico de uma função quadrática.

Primeiramente colocamos em uma célula a forma com que se apresenta uma função quadrática,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , e também trocamos os nomes de três células, as quais deverão conter os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , como mostrado na figura 8.3, onde substituímos o nome da célula E2 por  $a$ .



(a) Célula com o nome original (E2).

(b) Célula com o nome alterado (a).

Figura 8.3: Troca do nome de uma célula no Excel.

Fizemos também as trocas dos nomes das células E3 e E4 por  $b$  e  $c$  respectivamente. Utilizamos  $cc$  porque a planilha não aceita apenas  $c$  como nome de célula.

Agora criaremos em uma coluna, valores sequenciais para  $x$  e, ao lado de  $x$ , iremos escrever a fórmula que dará o valor de  $f(x)$  correspondente a cada  $x$ . Os valores que estamos usando para  $x$  são os números  $-10; -9,9; -9,8; \dots; 9,9; 10$ , e os valores de  $f(x)$  serão calculados pela planilha, segundo a fórmula  $= ax^2 + bx + c$  (Fig. 8.4a).

As células que contêm os valores de  $x$  não precisam ser digitadas uma a uma, basta que sejam introduzidos os valores  $-10$  e  $-9,9$ , como fizemos nas células A6 e

A7. Depois deve-se selecionar essas duas células e posicionar o cursor do mouse sobre o canto inferior direito da célula A7, quando o cursor mudar seu formato (se tornando uma cruz preta e de espessura menor que a normal) pressiona-se o botão esquerdo do mouse e, com ele pressionado, arrasta-se até a célula desejada. Ao arrastar o mouse para baixo, a planilha mostrará os valores que estão sendo gerados, permitindo que saibamos quando parar.

A fórmula utilizada para o cálculo de  $f(x)$  também não precisa ser redigitada várias vezes, basta que ela seja digitada a primeira vez e depois “arrastada” para as demais células. Isto pode ser feito dando enter após a primeira digitação e voltando à célula onde a fórmula foi digitada; depois deve-se posicionar o cursor do mouse no canto inferior direito dessa célula, pressionar o botão esquerdo e arrastar até onde se deseja (Fig. 8.4b).

Os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  podem ser escolhidos aleatoriamente, em nossa construção estamos usando 2, 1 e 3, respectivamente.

	A	B	C	D	E
1					
2	$f(x) = ax^2 + bx + c$			a =	
3				b =	
4				c =	
5	x	f(x)			
6	-10	=a*A6^2 + b*A6 + cc			
7	-9,9				
8	-9,8				
9	-9,7				
10	-9,6				
11	-9,5				
12	-9,4				
13	-9,3				

(a) Atribuição de valores para  $x$  e inserção de fórmula para o cálculo de  $f(x)$ .

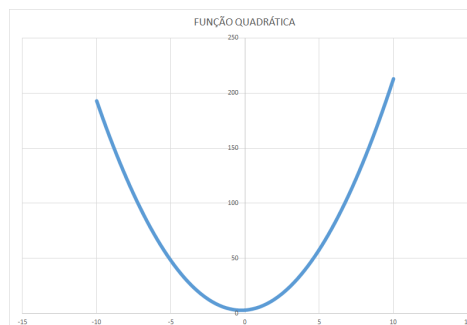
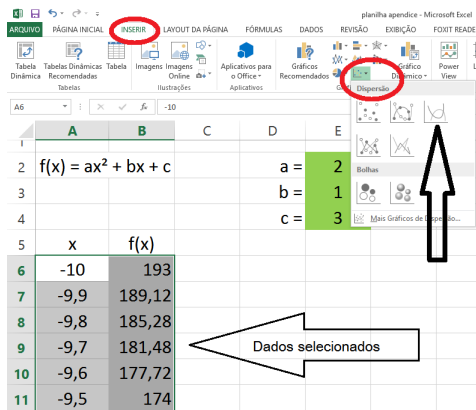
	A	B	C	D	E
1					
2	$f(x) = ax^2 + bx + c$			a =	2
3				b =	1
4				c =	3
5	x	f(x)			
6	-10	193			
7	-9,9	189,12			
8	-9,8	185,28			
9	-9,7	181,48			
10	-9,6	177,72			
11	-9,5	174			

(b) Escolha aleatória de valores para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

**Figura 8.4:** Segundo passo na construção de uma parábola.

Nosso próximo passo será inserir o próprio gráfico. Para isso basta selecionar os valores correspondentes a todos os pares ordenados que criamos  $(x, f(x))$  e, a seguir, no menu inserir, clicar em gráfico de dispersão com linhas suaves (Fig. 8.5).

Depois de construído o gráfico, pode-se formatá-lo de maneira a torná-lo mais visível ou a destacar algum detalhe desejado. Para exemplificar vamos, inicialmente, eliminar as linhas paralelas aos eixos das abscissas e das ordenadas; bastando para isso clicar uma vez sobre qualquer dessas linhas e apertar a seguir a tecla **Delete**. A espessura de cada eixo, bem como da própria curva que forma o gráfico, basta clicar com o botão direito do mouse sobre um deles que será exibida uma janela à direita da tela, própria para a formatação, não só de espessura mas também cor, fonte entre outras opções. “sadf” Ainda é possível limitar o tamanho de cada eixo (das abscissas e das ordenadas) através da caixa de diálogo de formatação. Esse limite permite uma melhor visualização de detalhes do gráfico, bem como das alterações ocorridas quando trocamos os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



(a) Seleção do tipo de gráfico a ser usado.

(b) Gráfico da função quadrática.

Figura 8.5: Gráfico da função quadrática.

Para finalizar essa nossa construção vamos inserir pontos para marcar as raízes da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Criamos em duas células as fórmulas para cálculo das possíveis raízes reais, utilizando para isto a fórmula de Bháskara. Em outras duas células, preferencialmente adjacentes, colocamos zero como valor da ordenada de cada raiz. Clicando sobre a área do gráfico com o botão direito do mouse, escolhemos a opção **Selecionar dados**, e a seguir na caixa de diálogo que se abre, em **Adicionar**, inserindo os pares ordenados das raízes (um de cada vez).

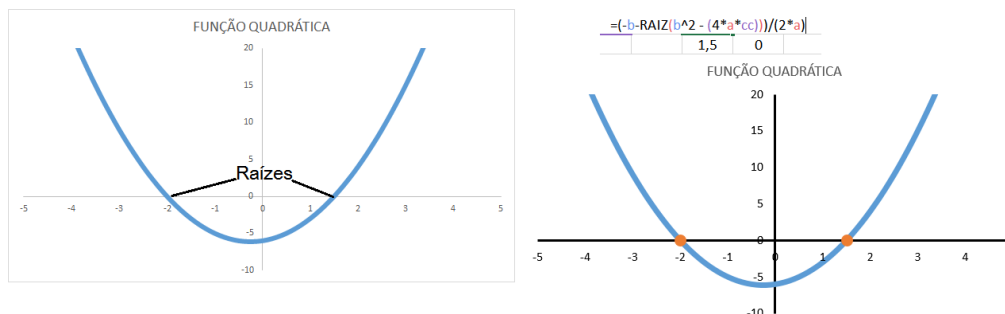


Figura 8.6: Formatação do gráfico da função quadrática, dando destaque para as raízes da função.

Para construir gráficos de outras funções deve-se proceder de forma análoga, bastando alterar a fórmula utilizada para o cálculo de  $f(x)$ .

Outra forma de introduzir funções em planilhas eletrônicas é utilizar o ícone de inserir função ( $f(x)$ ), que é um atalho muito utilizado pela praticidade e por mostrar um grande leque de opções com explicações úteis sobre o que fornece cada função.

Ao clicar sobre esse ícone aparecerá uma caixa de diálogo que dá ao usuário da planilha, a possibilidade de selecionar uma categoria, dentre várias apresentadas. Em nosso exemplo (Fig. 8.7) escolhemos a categoria “Matemática e Trigonometria”; depois deve-se selecionar uma função, a qual será inserida na célula que estiver ativa. Como estamos utilizando um recurso para inserir funções, não é necessário digitar o sinal de igual (=) antes da função, ele será colocado automaticamente.

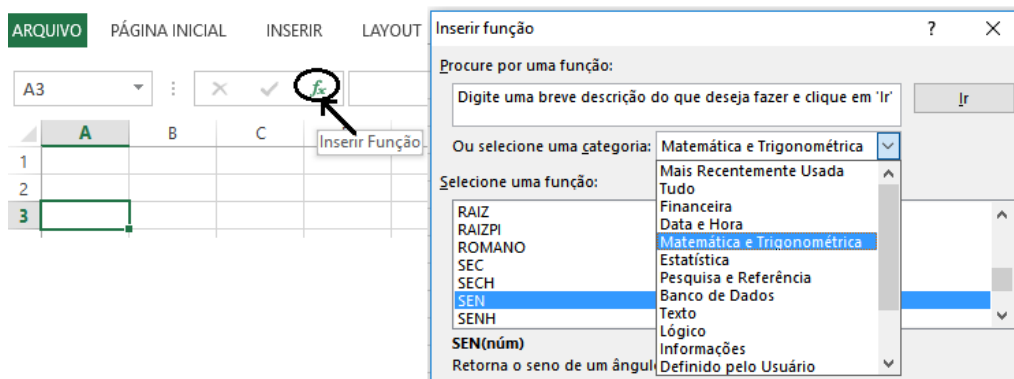


Figura 8.7: Caixa de diálogo para inserir funções.

Se escolhermos, por exemplo, a função seno uma nova caixa de diálogo se abrirá, solicitando o ângulo do qual se quer que calcule o valor do seno (Fig. 8.8). Nota-se que o ângulo está em radiano. Portanto temos  $\text{sen}(1) = 0,841470985$ , caso queira utilizar os valores que estão em uma célula específica, basta clicar no espaço onde foi digitado on número 1 (o retângulo em branco depois de Núm) e selecionar a célula desejada.

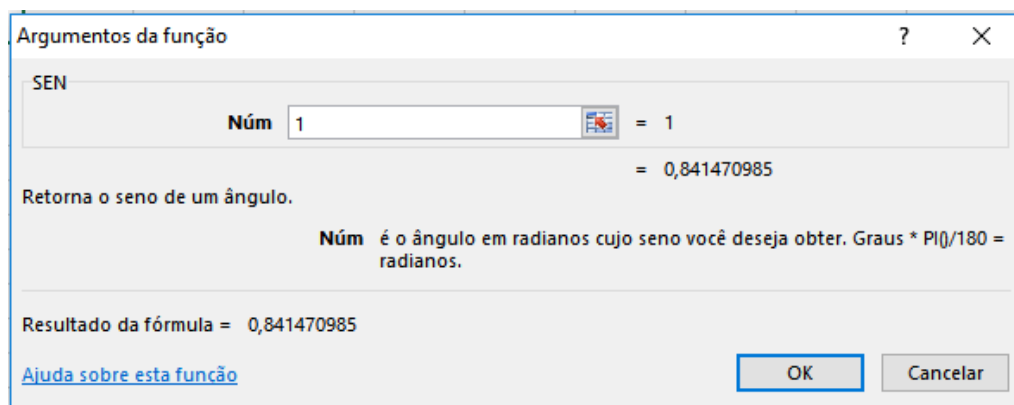


Figura 8.8: Caixa de diálogo para inserir a função seno.

Há uma gama muito grande de possibilidades para se trabalhar com as planilhas eletrônicas e, reforçamos a indicação de leituras já sugeridas ao longo do trabalho.

# Bibliografia

---

- [1] Abreu Teixeira, Enilton de: *Uso da planilha eletrônica excel como ferramenta didática para o ensino da matemática financeira no ensino médio*. Disponível em: [file:///C:/Users/Daniel/Downloads/2015\\_000077667\\_ENILTON\\_DE\\_ABREU\\_TEIXEIRA.pdf](file:///C:/Users/Daniel/Downloads/2015_000077667_ENILTON_DE_ABREU_TEIXEIRA.pdf), acesso em 28 jul 2016.
- [2] Amaral, Bruno do: *Conheça a história e cada versão de Angry Birds*. Disponível em: <http://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2012/03/conheca-historia-e-cada-versao-de-angry-birds.html>, acesso em 26 fev 2017.
- [3] Anton, Howard: *Cálculo: um novo horizonte*, volume 1. Bookman, 6ª edição. 1999.
- [4] Barbosa, Equinaldo Rosa, Érico José da Silva Nascimento e Phelipe de Souza Vieira: *A Aplicação Metodológica da Fórmula de Bháskara*. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a58/index.php>, acesso em 30 abr 2017.
- [5] Carmo, Manfredo Perdigão do, Augusto César Morgado e Eduardo Wagner: *Trigonometria / Números Complexos*. SBM, 3ª edição. 2005.
- [6] Carmo Batista, Fernando do: *Utilizando as planilhas eletrônicas para determinar os elementos das cônicas*. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/8829>, acesso em 30 jan 2017.
- [7] Carneiro, Mário Jorge Dias, Michel Spira e Jorge Sabatucci: *Proposta Curricular de Minas Gerais*. Disponível em: [http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema\\_crv/index.aspx?id\\_projeto=27&id\\_objeto=68553&tipo=ob&cp=B53C97&cb=&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Matem%C3%A1tica&b=s](http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?id_projeto=27&id_objeto=68553&tipo=ob&cp=B53C97&cb=&n1=&n2=Proposta%20Curricular%20-%20CBC&n3=Ensino%20M%C3%A9dio&n4=Matem%C3%A1tica&b=s), acesso em 03 mai 2016.
- [8] Carreira, Susana: *Matemática e tecnologias — Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”*. Vol. 18(Nº 1 e 2). Disponível em: [https://www.researchgate.net/profile/Susana\\_Carreira/publication/270105778\\_Matematica\\_e\\_tecnologias\\_-\\_Ao\\_encontro\\_dos\\_nativos\\_digitais\\_com\\_os\\_manipulativos\\_virtuais/links/54a09e440cf267bdb9016828.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Susana_Carreira/publication/270105778_Matematica_e_tecnologias_-_Ao_encontro_dos_nativos_digitais_com_os_manipulativos_virtuais/links/54a09e440cf267bdb9016828.pdf), acesso em 06 abr 2017.
- [9] Conceição, Marcos Roberto Fonseca: *Transformações no Plano: Uma Aplicação do Estudo de Matrizes com o Uso de Planilhas Eletrônicas*. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/6689>, acesso em 29 jul 2016.
- [10] D’Afonseca, Luis Alberto: *Comunicação pessoal*. [luis.dafonseca@gmail](mailto:luis.dafonseca@gmail), 2016.
- [11] Dante, Luiz Roberto: *Contexto e Aplicações*, volume 1. Ática. 2014.
- [12] Diniz, Kátia Stocco Smole Maria Ignez: *Matemática Ensino Médio*, volume 3. Saraiva, 8ª edição. 2013.
- [13] Duda, Rodrigo: *Matemática financeira e planilhas eletrônicas: uma abordagem com a incorporação de recursos computacionais*. [http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1206/2012\\_00989\\_RODRIGO\\_DUDA.pdf?sequence=1](http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1206/2012_00989_RODRIGO_DUDA.pdf?sequence=1), acesso em 25 de nov de 2016.
- [14] Enzensberger, Hans Magnus: *O diabo dos números*. Schwarcz. 1997.

- [15] Giovanni, José Ruy e José Roberto Bonjorno: *Matemática Completa*, volume 1. FTD, 2<sup>o</sup> edição. 2005.
- [16] Gomes, Rodrigo: *Enem: geometria é conteúdo mais cobrado nas provas de matemática, segundo levantamento*. Disponível em: <http://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/enem-geometria-conteudo-mais-cobrado-nas-provas-de-matematica-segundo-levantamento-5>, acesso em 13 jan 2017.
- [17] Google: *Planilhas Google*. Disponível em: <https://www.google.com/intl/pt-BR/sheets/about/>, acesso em 06 jun 2017.
- [18] Iezzi, Gelson e Osvaldo Dolce: *Matemática*. Atual. 2002.
- [19] Iezzi, Gelson e Osvaldo Dolce: *Matemática: Ciência e Aplicações*, volume 1. Saraiva, 6<sup>o</sup> edição. 2010.
- [20] Iezzi, Gelson e Osvaldo Dolce: *Matemática: Ciência e Aplicações*, volume 2. Saraiva, 6<sup>o</sup> edição. 2010.
- [21] Inep: *Resultados Saeb de 2015*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/resultados>, acesso em 12 jan 2017.
- [22] Jesus, Eliane Alves de: *Sistemas Dinâmicos Discretos*. 2016.
- [23] Kamii, Constance: *A Criança e o Número*. Papirus, 16<sup>a</sup> edição. 1992.
- [24] Libreoffice: *Calc*. Disponível em: <https://pt-br.libreoffice.org/descubra/calc/>, acesso em 06 jun 2017.
- [25] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado: *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM. 2009.
- [26] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado: *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM. 2006.
- [27] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado: *A Matemática do Ensino Médio: Volume 2*, volume 1. SBM. 2006.
- [28] Lima, Virgínia Barbosa de: *Demonstração de Identidades Combinatórias com Teoria de Contagem*. Disponível em: [http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia\\_Virginia.pdf](http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Virginia.pdf), acesso em 14 jun 2017.
- [29] Microsoft: *Microsoft Excel*. Disponível em: <https://www.microsoft.com/pt-br/store/d/excel-2016/cfq7ttc0k5f3>, acesso em 06 jun 2017.
- [30] Oliveira Fernandes, Renato de: *Cálculo de Áreas*. Disponível em: <http://wiki.urca.br/dcc/lib/exe/fetch.php?media=calculodeareas.pdf>, acesso em 13 jan 2017.
- [31] Paiva, Manoel: *Matemática Paiva*, volume 1. Moderna, 2<sup>o</sup> edição. 2013.
- [32] Paula, Edinei Jesus Teixeira de: *Probabilidade e Simulações em Planilhas Eletrônicas*. Disponível em: [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=40564](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=40564), acesso em 26 jul 2016.
- [33] Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, Instituto Nacional de Estudos e: *Matriz de Referência ENEM*. Disponível em: [http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/enem/downloads/2012/matriz\\_referencia\\_enem.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf), acesso em 15 mar 2017.
- [34] Profmat: *Apresentação*. Disponível em: <http://www.profmtat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao>, acesso em 28 jul 2016.
- [35] Rocha, Jesiel Souza da: *Ensino/aprendizagem de Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares através da planilha Excel*. Disponível em: [https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=81468](https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81468), acesso em 20 dez 2016.

- [36] Rocha, Josimar Moreira: *A planilha eletrônica como recurso didático: um exemplo com multiplicação de matrizes*. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/809>, acesso em 18 jun 2016.
- [37] Silva, Ricardo Moura da: *Proposta de um texto sobre tratamento da informação em nível básico, som uso de planilhas eletrônicas*. Disponível em: [https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=89745](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=89745), acesso em 28 jul 2016.
- [38] Silva, Wellington Souza: *Teoria populacional Malthusiana*. Disponível em: <http://www.infoescola.com/geografia/teoria-populacional-malthusiana>, acesso em 06 mai 2017.
- [39] Silva Pires, Marcelo da: *Cônicas: uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas*. Disponível em: [https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=85378](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85378), acesso em 28 nov 2016.
- [40] São Paulo, Secretaria Estadual de Educação de: *Currículo do Estado de São Paulo*. <http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/238.pdf>, acesso em 13 ago 2016.
- [41] Sousa Santos, Nilson de: *Atividades de matemática financeira na planilha eletrônica: uma aplicação para alunos do ensino médio*. Disponível em: [https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=1193](https://sca.profmatt-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1193), acesso em 20 nov 2016.
- [42] Souza, Joamir Roberto de e Patricia Rosana Moreno Pataro: *Vontade de Saber Matemática, 7º ano*. FTD, 2ª edição. 2012.
- [43] Souza, Joamir Roberto de e Patricia Rosana Moreno Pataro: *Vontade de Saber Matemática, 9º ano*. FTD, 2ª edição. 2012.
- [44] Souza, Joamir Roberto de: *Novo Olhar Matemática*, volume 2. FTD. 2013.
- [45] Tavoni, Robinson: *Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: Uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais*. Disponível em: [http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/829/2011\\_00605\\_ROBINSON\\_TAVONI.pdf?sequence=1](http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/829/2011_00605_ROBINSON_TAVONI.pdf?sequence=1), acesso em 06 mai 2017.