

LUIZ CARLOS GABRIEL FILHO

**POLÍGONO FUNDAMENTAL ASSOCIADO AO GRUPO GERADOR
DA SUPERFÍCIE**

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011**

LUIZ CARLOS GABRIEL FILHO

**POLÍGONO FUNDAMENTAL ASSOCIADO AO GRUPO GERADOR
DA SUPERFÍCIE.**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2011.

Mário José de Souza

Rogério Casagrande

Allan de Oliveira Moura
(Co-orientador)

Simone Maria de Moraes
(Co-orientadora)

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

À minha mãe, minha Avó e tio João Hélio.

DEDICO

Agradecimentos

Agradeço:

À minha família pelo apoio, incentivo e dedicação ao longo destes anos, sem os quais nada seria possível. Destaco aqui minha mãe, Marlene Braz de Queiroz Gabriel, minha avó Teresinha Rosa Gabriel, meu tio João Hélio Gabriel e meu pai Luiz Carlos Gabriel (in memoriam), que me ajudaram muito e me deram belos ensinamentos de vida. Aos meus queridos irmãos Luana Braz de Queiroz Gabriel e Lucas Flávio de Queiroz Gabriel por todo carinho e amizade, e a toda a minha família.

Aos professores do curso de matemática da Unimontes em Montes Claros, tais como Narciso da Hora Lisboa, Antônio Wilson Vieira e José Higino Dias Filho que me despertaram um profundo interesse pela matemática. Não poderia esquecer do incentivo dado pelos professores Ronaldo Dias Ferreira e Rômulo Barbosa Veloso para que eu continuasse meus estudos.

Aos amigos de faculdade na Unimontes em Montes Claros, Odenilton Vilas Boas Lopes, Jairo Martins de Freitas e Ernando Campos Ferreira pelos grupos de estudos e pela companhia nos jogos de sinuca.

Aos amigos de faculdade na UFV, Jane Lage Bretas, Ailton Luiz Vieira, Lucas Carvalho Silva e Julio César de Paula pela disponibilidade em vários momentos. Em especial aos amigos de curso e de república Tiago Rodrigo Perdigão e Gheyza Ferreira da Silva pela compreensão e companheirismo aos longo destes dois anos, a vocês minha eterna gratidão.

Às minhas professoras no curso de mestrado na UFV pelo brilhantismo ao expressarem com beleza os conceitos da Análise, Álgebra, Geometria e Topologia, ou seja, as professoras Marinês Guerreiro, Valéria Mattos da Rosa e Catarina Mendes de Jesus. Em especial à Professora e co-orientadora Simone Maria de Moraes pelo profissionalismo e pelas belíssimas aulas de Geometria Diferencial e Topologia Algébrica, e por ter despertado em mim um grande fascínio pela Geometria.

Ao meu orientador Mercio Botelho Faria e ao professor e co-orientador Allan de Oliveira Moura, por todo apoio concendido ao longo de 2010, nas discussões dos elementos de Geometria Hiperbólica, essenciais e imprescindíveis para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho.

À banca de professores da nossa dissertação, Catarina Mendes de Jesus (UFV), Mário José de Souza (UFG) e Rogério Casagrande (UFJF), pela disponibilidade e contribuição indispensáveis na concretização deste trabalho.

À CAPES-REUNI pelo apoio financeiro concedido aos longo destes dois anos, sem os quais a realização de meu grande sonho seria impossível.

A todos os que eu não citei, mas que contribuíram de alguma forma para que tudo isso acontecesse, trago-os em meu coração.

Sumário

Lista de Símbolos	vii
Lista de Figuras	ix
Resumo	x
Abstract	xi
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Funções Holomorfas e Superfície de Riemann	3
1.2 Rotações e Translações	11
1.3 Aplicações Quase-Conformes	13
1.4 Aplicações Homotópicas	16
1.5 Grupo Fundamental	19
1.6 Grupo Fundamental de uma Superfície Compacta	21
1.7 Processos de Identificação	21
2 Modelos para a Geometria Hiperbólica	23
2.1 Transformações de Möbius	23
2.2 O Grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$	27
2.3 O Plano de Lobatchevsky $\mathbb{H}^2$	28
2.4 O Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	30
2.5 Polígonos Hiperbólicos	32
3 Grupos Fuchsianos	35
3.1 Isometrias Hiperbólicas	35
3.2 Subgrupos Discretos	38
3.3 Domínio Fundamental e Domínio de Dirichlet	40
3.4 Grupos Fuchsianos Co-Compactos	45
4 Polígonos Canônicos para Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados	49
4.1 Preliminares	49
4.2 Polígonos de Fricke	51
4.3 Teorema de Fricke	51

4.4	Teorema Principal, parte 1	53
4.5	Argumento de Continuidade	54
5	Emparelhamentos para Polígonos $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$	58
5.1	Emparelhamentos do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$	58
5.2	Ciclos de Vértices do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$	59
5.3	Polígono Canônico de Fricke do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$	61
5.4	Matrizes do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$	64
5.5	Emparelhamentos do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$	67
5.6	Ciclos de Vértices do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$	68
5.7	Polígono Canônico de Fricke do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$	70
5.8	Matrizes do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$	74
5.9	Polígonos dos Ladrilhamentos $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$	75
	Referências Bibliográficas	79
	Índice Remissivo	80

Lista de Símbolos

$\mathbb{C}$	plano complexo
$\mathbb{C}_\infty$	esfera unitária
$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	esfera unitária
$\mathbb{D}^2$	disco de Poincaré
$\mathbb{D}^2/G$	superfície compacta orientável
$\mu(\mathbb{D}^2/G)$	área da superfície compacta orientável $\mathbb{D}^2/G$
$\partial_\infty \mathbb{D}^2$	fronteira do disco de Poincaré
$d_{\mathbb{D}^2}(a, b)$	distância entre dois pontos em $\mathbb{D}^2$
$\ \lambda\ _{\mathbb{D}^2}$	comprimento hiperbólico em $\mathbb{D}^2$
$\mathcal{D}_p(G)$	domínio de Dirichlet do grupo G com centro em p
$E(T)$	eixo de uma transformação hiperbólica
G	grupo
$G = \langle \Phi \rangle$	grupo gerado pelas funções de emparelhamento
$\Gamma(T)$	círculo isométrico da transformação T
$GL(2, \mathbb{R})$	grupo linear geral
$GM(\hat{\mathbb{R}}^n)$	grupo geral de Möbius
G_x	estabilizador do elemento x do grupo G
$G(x)$	órbita do elemento x do grupo G
$\Lambda(G)$	conjunto limite do grupo G
$\Lambda_z(G)$	conjunto limite do grupo G no ponto $z \in \mathbb{H}^2$
$\mathbb{H}^2$	plano de Lobatchevsky
$\partial_\infty \mathbb{H}^2$	fronteira do plano de Lobatchevsky
$\ \lambda\ _{\mathbb{H}^2}$	comprimento hiperbólico em $\mathbb{H}^2$
$\mathbb{H}^2/G$	superfície compacta orientável
$\mu(\mathbb{H}^2/G)$	área da superfície compacta orientável $\mathbb{H}^2/G$

i_s	aplicação inversão
i_p	aplicação reflexão
$Isom(\mathbb{H}^2)$	grupo das isometrias de $\mathbb{H}^2$
$Möb(\mathbb{D}^2)$	grupo das transformações de Möbius em $\mathbb{D}^2$
$Möb(\mathbb{H}^2)$	grupo das transformações de Möbius em $\mathbb{H}^2$
$Möb(\widehat{\mathbb{R}^n})$	grupo das transformações de Möbius em $\widehat{\mathbb{R}^n}$
$M(2, \mathbb{R})$	conjunto das matrizes reais 2×2
$\mathcal{P}$	polígono hiperbólico
$\mu(\mathcal{P})$	área do polígono hiperbólico $\mathcal{P}$
$PSL(2, \mathbb{R})$	grupo linear projetivo especial
$P(X)$	conjunto das partes do conjunto $X \neq \emptyset$
$P_t(a)$	hiperplano no ponto $a \in \mathbb{R}^n$
$P = P_t(a) \cup \{\infty\}$	hiperplano compactificado
$P_A(x)$	polinômio característico associado à matriz $A \in M(2, \mathbb{R})$
$\mathcal{P}(p^*, S)$	polígono canônico de Fricke
$\widehat{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$	espaço $\mathbb{R}^n$ compactificado
S	sequência padrão de geradores
S^2	esfera unitária
$SL(2, \mathbb{R})$	grupo linear especial
$S_r(a)$	esfera de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$
$tr(A)$	traço da matriz A
$\bigcup$	união disjunta
$\mu(\triangle)$	área de um triângulo hiperbólico
$\trianglelefteq$	notação para subgrupo normal
$\{p, q\}$	ladrilhamento de p arestas e ângulos internos $2\pi/q$
$\{24\lambda + 4, 4\}$	ladrilhamentos de $24\lambda + 4$ arestas e ângulos internos $2\pi/4$
$\{24\lambda - 12, 4\}$	ladrilhamentos de $24\lambda - 12$ arestas e ângulos internos $2\pi/4$

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de aplicação conforme.	8
1.2	Variedade complexa.	9
1.3	Superfícies de gênero 0,1 e 2 respectivamente.	11
1.4	Aplicação quase-conforme.	16
1.5	Caminhos fechados.	19
1.6	Retração do quadrado.	20
1.7	Polígonos de superfícies compactas orientáveis.	21
1.8	Polígonos de superfícies compactas não-orientáveis.	21
1.9	Polígonos de superfícies compactas orientáveis e não-orientáveis.	22
1.10	A aplicação quociente.	22
2.1	Projeção estereográfica.	24
2.2	Reflexão sobre o hiperplano $P_t(a)$	26
2.3	Triângulo hiperbólico com um vértice ideal $p_3 = \infty$	33
2.4	Triângulo hiperbólico.	34
3.1	Domínio fundamental do grupo cíclico $G = \langle T(z) = z + 1 \rangle$	41
3.2	Domínio de Dirichlet com dois ciclos de vértices.	44
3.3	Círculo isométrico da transformação $T(z)$	46
3.4	A ação topológica de G para obter o bitoro.	48
4.1	Região padrão fundamental.	52
4.2	Região padrão fundamental, grupo G com assinatura $(2; 2; k, \infty; 0)$	54
4.3	G possui assinatura $(2; 2; k, \infty; 2)$	56
5.1	Polígono de 28 arestas e ciclos com 4 vértices.	76
5.2	Polígono de 52 arestas e ciclos com 4 vértices.	77
5.3	Polígono de 12 arestas e ciclos com 4 vértices.	77
5.4	Polígono de 36 arestas e ciclos com 4 vértices.	78

Resumo

FILHO, Luiz Carlos Gabriel, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2011.
Polígono fundamental associado ao grupo gerador da superfície. Orientador:
Mercio Botelho Faria. Co-orientadores: Allan de Oliveira Moura e Simone Maria de
Moraes.

Neste trabalho fazemos um estudo de uma classe polígonos no disco de Poincaré, conhecidos como polígonos canônicos de Fricke, que são polígonos fundamentais relacionados a um grupo fuchsiano, gerador de uma superfície de gênero g . Nos baseamos no artigo de Linda Keen [15], considerando o caso em que o gênero $g > 0$. Além disso, com o intuito de aplicar o procedimento adotado por Keen, calculamos os ciclos e encontramos as relações do grupo relacionado aos ladrilhamentos de tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$, que originalmente foram obtidos dos ladrilhamentos $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\eta - 12, 4\}$ apresentados por Oliveira em [19]. Em seguida fazemos uso de um procedimento desenvolvido por Agustini [1] para exibir as matrizes associadas às funções de emparelhamento chegando desta maneira aos vértices do polígono fundamental associado.

Abstract

FILHO, Luiz Carlos Gabriel, M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2011.
Associate of fundamental polygon generator surface. Advisor: Mercio Faria Botelho. Co-advisors: Allan de Oliveira Moura and Simone Maria de Moraes.

In this paper we study a class of polygons on the Poincare disk, known as canonical Fricke polygon that are fundamental polygon related to a Fuchsian group, generating a surface of genus g . We rely on Article by Linda Keen [15], considering the case where the genus $g > 0$. Moreover, in order to apply the procedure adopted by Keen, we calculate the cycles and found the relationship of groups related to the tiles of the type $\{24\lambda + 4, 4\}$ and $\{24\lambda - 12, 4\}$, which were originally obtained the tiles $\{12\eta - 8, 4\}$ and $\{12\eta - 12, 4\}$ given by Oliveira in [19]. Then we use a procedure developed by Agustini [1] to display the matrices associated with pairing functions coming this way to the vertices of the polygon associated key.

Introdução

Neste trabalho estudamos uma classe de polígonos no disco de Poincaré, chamada de *Polígonos Canônicos de Fricke*. Estes polígonos foram originalmente estudados por Robert Karl Emmanuel Fricke e Felix Christian Klein, na obra *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen 1*, páginas 285 – 315, Leipzig, 1926, onde definiram uma classe de polígonos fundamentais chamados de canônicos.

Em seu artigo, *Canonical Polygons For Finitely Generated Fuchsian Groups*, Princeton, New Jersey, páginas 1 – 9, 1966, Linda Keen [15] obtém uma prova independente para a existência dos polígonos de Fricke, utilizando a teoria de aplicações quase-conformes, desenvolvida por Lars Valerian Ahlfors [4] e Lipman Bers [7].

Em sua tese de doutorado, *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*, Mercio Botelho Faria faz um estudo dos polígonos canônicos de Fricke, onde exhibe um algoritmo para determinar os polígonos de Fricke para grupos fuchsianos com um ciclo de vértice.

Estudamos a relação existente entre grupos de isometrias que geram uma superfície com os polígonos canônicos de Fricke. A fim de facilitar a compreensão dos polígonos de Fricke, introduzimos alguns resultados importantes de Álgebra, de Geometria e Topologia.

Assim, no capítulo 1, estudamos funções holomorfas, aplicações quase-conformes e aplicações homotópicas, conceitos estes encontrados na teoria de variáveis complexas e em topologia algébrica. O conceito de aplicações quase-conformes é uma generalização de funções holomorfas, onde aplicações conformes é um caso particular. Para tanto, usamos o desenvolvimento proposto por Ahlfors [4] para exibir um exemplo de aplicação quase-conforme e posteriormente utilizaremos este conceito na demonstração do teorema de Fricke.

No capítulo 2, apresentamos as transformações de Möbius e os modelos para a Geometria Hiperbólica, vemos também que o plano de Lobatchevsky e o Disco de Poincaré são espaços métricos intrinsecamente relacionados. Estes modelos são de fundamental importância para nosso estudo, uma vez que as construções realizadas nos capítulos 4 e 5 são considerados neles.

No capítulo 3, estudamos os grupos fuchsianos, relacionando-os com o grupo linear projetivo especial $PSL(2, \mathbb{R})$. Utilizando os grupos fuchsianos, apresentamos uma maneira de se obter superfícies compactas orientáveis a partir do quociente $\mathbb{D}^2/G$, onde G é um grupo fuchsiano e $\mathbb{D}^2$ o disco de Poincaré. Neste capítulo, estudamos também todos os elementos que compõem um polígono hiperbólico e o Teorema de Poincaré, resultado importante na determinação de um domínio fundamental e do grupo de

isometrias relacionado.

No capítulo 4, com base no artigo de Linda Keen [15], estudamos os polígonos canônicos de Fricke. Vemos que para um grupo fuchsiano finitamente gerado existe uma classe de polígonos fundamentais chamados polígonos canônicos de Fricke. Desta forma, estabelecemos uma relação existente entre superfícies compactas orientáveis e os polígonos canônicos de Fricke, uma vez que cada polígono deste tipo está relacionado ao grupo gerador da superfície. Para a construção dos polígonos canônicos de Fricke usamos essencialmente o modelo do disco de Poincaré bem como os elementos que pertencem a tal espaço, como vimos no capítulo 2.

Finalmente, no capítulo 5 utilizamos alguns resultados encontrados nos trabalhos de Linda Keen [15], Edson Agustini [1] e João de Deus Oliveira Júnior [19]. Reescrevemos os dois emparelhamentos generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\eta - 12, 4\}$ criados por Oliveira Júnior, obtendo os emparelhamentos generalizados $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$. Usamos o método proposto por Edson Agustini em [1] para expressar as matrizes e daí, com base no algoritmo de Linda Keen, obter o polígono de Fricke para emparelhamentos com mais de um ciclo de vértices.

Capítulo 1

Preliminares

“A matemática é o maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da verdade.” Leibnitz

Neste capítulo estudamos resultados preliminares necessários ao entendimento do artigo de Linda Keen [15], tais como funções holomorfas, superfícies de Riemann, aplicações quase-conformes e aplicações homotópicas. Para elaboração deste conteúdo utilizamos as seguintes referências [2], [3], [5], [8], [10], [16], [17], [18], [20] e [21].

Começamos com os conceitos de número complexo e funções holomorfas, abordados na teoria de variáveis complexas.

1.1 Funções Holomorfas e Superfície de Riemann

Um **número complexo** é definido por um par ordenado de números reais, onde este número é identificado com um ponto do plano cartesiano. Uma outra identificação para os números complexos é obtida através de coordenadas polares (r, θ) . Ou seja, um número complexo não nulo $z = x + iy \equiv (x, y)$, se escreve $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Esta é a chamada *representação polar ou forma polar* de um número complexo.

Qualquer valor de θ para o qual a igualdade acima se verifica, é chamado um **argumento** de z e usamos a notação $\theta = \arg(z)$. Observe que θ não é único já que, se a igualdade é verdadeira para um valor de θ , também o é para $\theta + 2k\pi$, onde k é um número inteiro arbitrário.

Agora apresentamos a definição de derivada de uma função de variável complexa, que é formalmente a mesma que no caso de função de variável real.

Definição 1.1.1 *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo domínio é uma região R de $\mathbb{C}$, ou seja, um conjunto aberto e conexo. Dado $z \in R$, dizemos que f é **derivável** no ponto z se existe o limite:*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou, o que é equivalente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Neste caso, o limite é chamado **derivada** de f em z , denotado por $f'(z)$. Se para todo $z \in R$, existe $f'(z)$, então a função $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **função derivada** da função f , denotada por f' .

É claro que, a existência da derivada $f'(z)$, não depende da direção em que Δz tende a zero ou da direção em que w tende a z . Em particular, podemos considerar w tendendo a z ao longo de diferentes raios, todos com origem no ponto z e o limite é o mesmo.

Definição 1.1.2 Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde R é uma região de $\mathbb{C}$, dizemos que f é **holomorfa** em $z_0 \in R$, se existe uma vizinhança $V_\delta(z_0)$ de z_0 em R tal que f é derivável em $V_\delta(z_0)$. Dizemos que f é **holomorfa** em R se f é holomorfa em todo $z \in R$.

Assim, se f é uma função que é derivável em pontos isolados, então f não é holomorfa. Por exemplo, $f(z) = |z|^2$ não é holomorfa em $z = 0$.

Teorema 1.1.3 Sejam R uma região de $\mathbb{C}$ e $u, v : R \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais que possuem derivadas parciais contínuas em R . Uma condição necessária e suficiente para que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $z = x + iy$, seja holomorfa em R é que as **equações de Cauchy-Riemann** sejam satisfeitas em R , ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \quad \text{para todo } (x, y) \in R.$$

Sejam X um conjunto não vazio, e $P(X)$ o conjunto das partes de X , ou seja, $P(X)$ é a coleção de todos os subconjuntos de X , consideremos a seguinte definição.

Definição 1.1.4 Uma **topologia** sobre X é uma família de subconjuntos de X , denotada por τ , que satisfaz:

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. Dada uma família arbitrária de subconjuntos de τ , $\{A_\alpha \in \tau; \alpha \in I\}$, então, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ (I é um conjunto de índices).
3. Dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$, então, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Em outras palavras, uma topologia é um subconjunto de $P(X)$ que contém o conjunto vazio e o conjunto X ; a reunião arbitrária de elementos da topologia pertence a topologia e a interseção finita de elementos da topologia pertence a topologia. Os elementos de τ são ditos **conjuntos abertos** de X segundo τ ou simplesmente **abertos** de X . O par (X, τ) é **chamado espaço topológico**.

Exemplo 1.1.5 *Seja $X = \{a, b, c\}$, então $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é uma topologia sobre X e o par (X, τ) é um espaço topológico.*

Definição 1.1.6 *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é **conexo** se não existem A e B abertos disjuntos e não vazios tais que $X = A \cup B$. Caso contrário, dizemos que X é **desconexo**.*

Exemplo 1.1.7 1. $\{x\}$ e $\emptyset$ são sempre conexos.

2. Seja $\tau_{dis} = \beta(X)$, a topologia discreta, onde os abertos são todos os subconjuntos de X . No espaço topológico (X, τ_{dis}) , os únicos conjuntos conexos não vazios são os conjuntos unitários.

3. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é desconexo. De fato, basta considerar os abertos disjuntos $A = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ e $B = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, tais que $\mathbb{Q} = A \cup B$.

Definição 1.1.8 *Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X .*

1. Uma **cobertura** de A é uma família de subconjuntos $\beta = \{U_i \subset X; i \in J\}$, tal que, $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Se J é finito, a cobertura é chamada **cobertura finita**. E a cobertura é chamada **aberta** se os conjuntos U_i são **conjuntos abertos**.

2. Uma coleção γ de subconjuntos de X é chamada **localmente finita** em X , se todo ponto de X possui uma vizinhança que intercepta somente um número finito de elementos de γ .

3. Uma coleção β de subconjuntos de X é chamada um **refinamento** de γ (ou é dita que refina γ), se para cada elemento U de β , existe um elemento V de γ tal que $U \subset V$. Se os elementos de β são conjuntos abertos, chamamos β um **refinamento aberto** de γ e se são **conjuntos fechados**, chamamos β um **refinamento fechado**.

Exemplo 1.1.9 1. Consideremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, e a topologia: $\tau = \{\emptyset, A \subset \mathbb{R}\}$, onde $A \in \tau$ se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um intervalo aberto (a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A$. Esta topologia é chamada de **euclidiana ou usual**. Em $\mathbb{R}$ com a topologia usual, consideremos $(0, 1) \subset \mathbb{R}$; então a família $\beta = \{(1/n, 1 - 1/n); n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de $(0, 1)$.

2. A coleção de intervalos $\gamma = \{(n, n + 2); n \in \mathbb{Z}\}$ é localmente finita no espaço topológico $\mathbb{R}$. Mas a coleção $\beta = \{(0, 1/n); n \in \mathbb{Z}_+\}$, é localmente finita em $(0, 1)$, mas não em $\mathbb{R}$.

Utilizando a definição 1.1.8, podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 1.1.10 *Seja X um espaço topológico, dizemos que:*

1. X é **compacto** se toda cobertura aberta A de X contém uma subcoleção finita que cobre X .
2. Um espaço X é dito **paracompacto** se toda cobertura aberta γ de X possui um refinamento aberto β localmente finito que cobre X .

Definição 1.1.11 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se as funções f e f^{-1} são contínuas.*

Definição 1.1.12 *Um **caminho** suave em $\mathbb{C}$ é uma aplicação*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

com derivada contínua em todos os pontos de $[a, b] \subset \mathbb{R}$, onde $a < b$.

Descrever uma aplicação $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ significa obter duas funções reais $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que são as coordenadas do caminho γ . Para cada $t \in [a, b]$ associamos um ponto do plano $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$ e, a medida que t percorre o intervalo $[a, b]$, o vetor $\gamma(t)$ descreve um *caminho* em $\mathbb{C}$. A imagem $\gamma([a, b])$ é uma **curva** no plano $\mathbb{C}$, a qual, chamamos *caminho*.

Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, são chamados *ponto inicial* e *ponto final* do caminho γ , respectivamente. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$, dizemos que γ é um **caminho fechado** em $\mathbb{C}$. A derivada ou velocidade de γ em $t \in (a, b)$ é o vetor $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Onde nos extremos do intervalo temos apenas derivadas laterais, isto é,

$$\gamma'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h},$$

e

$$\gamma'(b) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h}.$$

Dizer que γ tem derivada contínua em $[a, b]$, equivale a termos $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma'(t) = \gamma'(t_0)$ qualquer que seja $a < t_0 < b$, $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \gamma'(t) = \gamma'(a)$ e $\lim_{\substack{t \rightarrow b \\ t < b}} \gamma'(t) = \gamma'(b)$.

Exemplo 1.1.13 *O segmento de reta que une dois pontos de $\mathbb{C}$, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, é descrito pelo caminho suave $\gamma(t) = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2)$, $0 \leq t \leq 1$, onde $P_1 = \gamma(0)$ é o ponto inicial e $P_2 = \gamma(1)$ o ponto final de γ .*

Observe que na definição de caminho suave está subentendida a noção de *orientação* ou *sentido de percurso do caminho*. Mais precisamente, o caminho é percorrido do ponto inicial ao ponto final à medida que $t \in [a, b]$ cresce. Podemos inverter o sentido de percurso definindo o caminho inverso de γ , γ^{-1} , por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

O conjunto de pontos do plano descrito por esses dois caminhos é o mesmo, porém os pontos inicial e final de um são os pontos final e inicial do outro, respectivamente.

Definição 1.1.14 Dizemos que uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, é **regular** se $|\gamma'(t)| \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$, e que γ está **parametrizada pelo comprimento de arco**, se $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in [a, b]$.

Exemplo 1.1.15 Considere $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação definida por $\gamma(t) = re^{it}$, onde $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. A curva γ é regular e seu traço é um círculo de raio r e centro na origem.

Definição 1.1.16 Um **caminho suave por partes** em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}, \dots, \gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo: $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Dizemos que um caminho fechado suave por partes é simples, se a aplicação $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ que o define for injetiva, isto quer dizer que o caminho não possui auto-interseções. Apresentamos agora um conceito de grande utilidade.

Definição 1.1.17 Uma **curva de Jordan** suave por partes é um caminho suave por partes, fechado e simples.

Definição 1.1.18 Sejam R uma região de $\mathbb{C}$ e $u, v : R \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais que possuem derivadas parciais contínuas em R . O conjunto de equações,

$$\begin{cases} u(x, y) = u \\ v(x, y) = v, \end{cases} \quad (1.1)$$

estabelece uma correspondência entre os pontos do plano uv com o plano xy . As equações 1.1 são chamadas **equações de transformação**.

Se a cada ponto do plano uv corresponde um único ponto do plano xy e, a cada ponto do plano xy corresponde um único ponto do plano uv , dizemos que a transformação é **biunívoca**.

As funções holomorfas gozam da notável propriedade de preservar ângulos em pontos nos quais a derivada não se anula. Consideremos uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorfa num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, onde $f'(z_0) \neq 0$, e seja γ uma curva regular passando pelo ponto z_0 , dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, com $\gamma(0) = z_0$.

Esta curva transforma-se numa curva $\bar{\gamma}$ no contra-domínio, dada parametricamente por $\bar{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, tal que $w_0 = f(z_0) = \bar{\gamma}(0)$. Observe que

$$\bar{\gamma}'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Seja α o ângulo que a tangente à curva $\bar{\gamma}$ no ponto w_0 faz com o eixo real. Desta forma, usando uma propriedade para o argumento de um número complexo, obtemos:

$$\alpha = \arg \bar{\gamma}'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(0).$$

Sendo $\arg \gamma'(0) = \theta$ o ângulo que a tangente à curva γ no ponto z_0 faz com o eixo real, a equação anterior se escreve:

$$\alpha = \theta + \arg f'(z_0). \quad (1.2)$$

Consideremos agora λ uma nova curva por z_0 e $\bar{\lambda}$ sua imagem passando por w_0 , onde θ' e α' são os ângulos destas curvas com os eixos reais no domínio e contra-domínio, respectivamente. Como fizemos anteriormente, temos:

$$\alpha' = \theta' + \arg f'(z_0) \quad (1.3)$$

de modo que, por (1.2) e (1.3) obtemos

$$\alpha' - \alpha = \theta' - \theta,$$

isto é, o ângulo $\theta' - \theta$ é preservado pela transformação f , tanto em valor como em sentido de orientação (ver figura 1.1). Por causa disso, chamamos f uma **aplicação conforme** de uma vizinhança de z_0 numa vizinhança de w_0 .

Definição 1.1.19 Dizemos que uma aplicação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é **conforme**, se os ângulos entre duas curvas que se interceptam no ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ são preservados no ponto $f(z_0)$ pela aplicação.

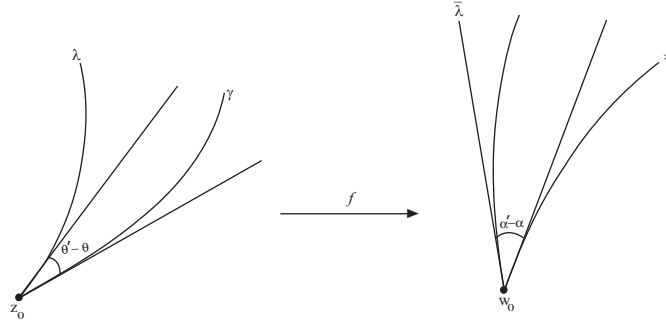


Figura 1.1: Exemplo de aplicação conforme.

Proposição 1.1.20 Sejam U e V dois subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$ e $f : U \rightarrow V$ uma aplicação. Então f é aplicação **conforme** se, e somente se, f é **holomorfa** e verifica $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in U$.

Definição 1.1.21 Sejam R uma região de $\mathbb{C}$ e $u, v : R \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais com derivadas parciais contínuas em R . Dada uma transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida como $T(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (onde $z = x + iy$), o **jacobiano** da transformação T é o determinante:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Uma transformação que preserva os valores absolutos dos ângulos, mas não necessariamente os sentidos, é chamada de **isogonal**. Além disso, se o jacobiano da transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for positivo, $\forall(x, y) \in \mathbb{C}$, dizemos que T *preserva orientação*, e se o jacobiano for negativo, dizemos que T *reverte orientação*.

Definição 1.1.22 *Seja M um conjunto não vazio, dizemos que M é uma **variedade complexa** se satisfaz as seguintes condições:*

1. M é um espaço topológico.
2. Existe uma família $\{V_i\}_{i \in I}$ de conjuntos abertos que cobre M .
3. Para cada $i \in I$, existe um homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, onde cada subconjunto U_i é um aberto de $\mathbb{C}^m$.
4. Dados V_i e V_j tais que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, a aplicação

$$\psi_{ij} : \varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j),$$

dada por $\psi_{ij} = \varphi_j^{-1} \varphi_i$ é holomorfa (Veja a figura 1.2).

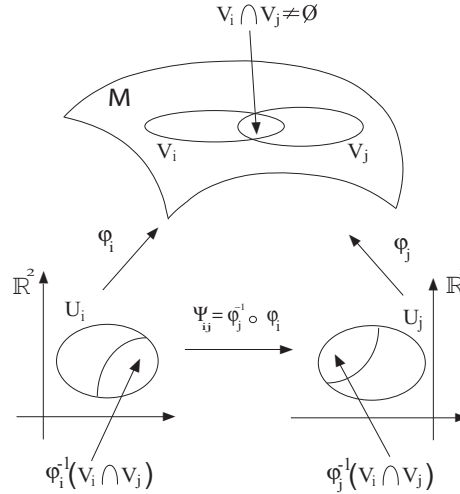


Figura 1.2: Variedade complexa.

O número acima m é chamado **dimensão complexa** de M , e é denotado por $\dim_{\mathbb{C}} M = m$.

Se M é uma variedade complexa de dimensão m , dizemos que a coleção de ternas $\{U_i, \varphi_i, V_i\}_{i \in I}$, onde U_i, φ_i e V_i são como na definição acima, é um **atlas** para M . E fixado um $i_0 \in I$, a terna $\{U_{i_0}, \varphi_{i_0}, V_{i_0}\}$ é uma **carta** do atlas. A aplicação ψ_{ij} é chamada **aplicação transição** de cartas.

Utilizando a definição 1.1.22, podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 1.1.23 *Dizemos que uma variedade M de dimensão 2, é uma **superfície de Riemann** se a aplicação de transição de cartas é conforme, para todo $i, j \in I$.*

Exemplo 1.1.24 A esfera unitária $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, é uma superfície de Riemann.

Consideremos as inversas da **aplicação estereográfica**,

$$\begin{aligned}\varphi_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ z &\longmapsto \varphi_1(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ z &\longmapsto \varphi_2(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, -\frac{2y}{|z|^2+1}, -\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right).\end{aligned}$$

Definindo as cartas $\{\mathbb{C}, \varphi_1, S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}\}$ e $\{\mathbb{C}, \varphi_2, S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}\}$, temos então

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1}(\varphi_2) : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \varphi_1^{-1}(\varphi_2)(z) = \left(\frac{x}{|z|^2}, -\frac{y}{|z|^2} \right).\end{aligned}$$

Fazendo $u(x, y) = \frac{x}{|z|^2}$ e $v(x, y) = -\frac{y}{|z|^2}$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Logo, a aplicação $\varphi_1^{-1}(\varphi_2)$ é conforme, de acordo com o teorema 1.1.3 e proposição 1.1.20.

Definição 1.1.25 Sejam M e N duas **superfícies de Riemann**

1. Uma aplicação conforme (resp. holomorfa) f de M em N , é **localmente conforme** (resp. holomorfa) se: para todo z de M e para qualquer carta $\{U_i, \varphi, V_i\}$ de M em torno de z e para qualquer carta $\{U_j, \psi, V_j\}$ de N em torno de $f(z)$ (U_i e U_j são dois abertos de $\mathbb{C}$ e $\varphi(U_i)$ e $\psi(U_j)$ são dois abertos de M e N , contendo z e $f(z)$ respectivamente), $(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)$ é uma **aplicação conforme** (resp. holomorfa), numa vizinhança de $\varphi^{-1}(z)$ em $\mathbb{C}$.
2. Uma **equivalência conforme** entre M e N é um **homeomorfismo conforme** de M em N .
3. Dizemos que duas superfícies de Riemann são **conformemente equivalentes**, se existir uma **equivalência conforme** entre elas.

Definição 1.1.26 O **gênero** de uma superfície compacta orientável é o número de **alças** que esta contém. (ver figura 1.3)

Segundo Manfredo [8] página 327, toda superfície compacta e conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfa a uma esfera com um número g de alças. Uma superfície de Riemann homeomorfa a uma esfera de g alças é chamada uma **superfície fechada** de gênero g . A esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tem gênero zero e um toro tem gênero um.

Definição 1.1.27 Seja (X, τ) um espaço topológico. X é um **espaço de Hausdorff** se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem $U, V \in \tau$, tal que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 1.1.28 O conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é um espaço de Hausdorff.

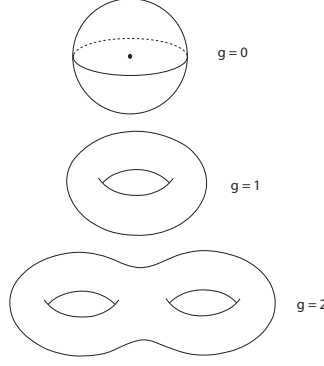


Figura 1.3: Superfícies de gênero 0,1 e 2 respectivamente.

1.2 Rotações e Translações

Antes de falar sobre aplicações quase-conformes, lembramos alguns conceitos que serão importantes para a compreensão da teoria de quase-conformidade de funções, desenvolvida por Ahlfors na referência [4].

Inicialmente, verificamos o efeito de translações e rotações no espaço $\mathbb{R}^2$ em equações da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1.4)$$

Vamos procurar eliminar, por meio de uma translação, os termos de primeiro grau da equação (1.4). Primeiramente, devemos determinar o ponto (h, k) para o qual se deve transladar o sistema de modo que a equação (1.4) se transforme numa equação da forma $\bar{A}u^2 + \bar{B}uv + \bar{C}v^2 + \bar{F} = 0$. Substituindo as equações de translação:

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} \quad (1.5)$$

em (1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} Au^2 + Buv + Cv^2 + (Bk + 2Ah + D)u + (2Ck + Bh + E)v + Ah^2 + Bhk \\ + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Assim, devemos determinar h e k , tal que:

$$\begin{cases} Bk + 2Ah + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

se o sistema (1.7) tiver solução, teremos resolvido nosso problema. Agora, procuramos por meio de uma rotação, eliminar o termo misto de segundo grau da equação (1.4), ou seja, devemos obter um ângulo de rotação tal que a equação (1.4) se transforme numa equação da forma:

$$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0. \quad (1.8)$$

Para levarmos isso a efeito, devemos preliminarmente observar o seguinte: após uma rotação de ângulo θ , a equação (1.4) se transforma em:

$$A' u^2 + B' uv + C' v^2 + D' u + E' v + F' = 0, \quad (1.9)$$

sabendo que uma rotação de ângulo θ é dada pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta, \end{cases} \quad (1.10)$$

substituindo as equações (1.10) na equação (1.4), e após algumas simplificações obtemos:

$$u^2(A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta) + v^2(A \sin^2 \theta - \frac{B}{2} \sin 2\theta + C \cos^2 \theta) + uv(B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta) + u(D \cos \theta + E \sin \theta) + v(E \cos \theta - D \sin \theta) + F = 0, \quad (1.11)$$

onde, pela equação (1.9), temos:

$$A' = A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + \frac{B}{2} \sin 2\theta, \quad (1.12)$$

$$B' = (C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta, \quad (1.13)$$

$$C' = A \sin^2 \theta - \frac{B}{2} \sin 2\theta + C \cos^2 \theta, \quad (1.14)$$

$$D' = D \cos \theta + E \sin \theta,$$

$$E' = E \cos \theta - D \sin \theta,$$

$$F' = F.$$

Assim, para eliminar o termo misto da equação (1.4), pelas equações (1.11), (1.9) e (1.13), devemos ter,

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0. \quad (1.15)$$

Sendo $B \neq 0$, temos:

1. Se $A = C$, então, pela equação (1.15), $\cos 2\theta = 0$ e portanto, θ pode ser $\pi/4$, assim pelas equações (1.12) e (1.14), temos: $A' = 1/2(A+B+C)$ e $C' = 1/2(A-B+C)$. Sendo $A = C$, então: $A' = A + (1/2)B$ e $C' = A - (1/2)B$.
2. Ou $\theta = 3\pi/4$, então: $A' = 1/2(A - B + C)$ e $C' = 1/2(A + B + C)$, e sendo $A = C$, temos: $A' = A - (1/2)B$ e $C' = A + (1/2)B$.
3. Se $A \neq C$, segue pela equação (1.15) que: $\tan 2\theta = B/(A - C)$.

Após um desenvolvimento simples, escolhido θ como acima, os coeficientes obtidos A' e C' são raízes da equação de segundo grau:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

1.3 Aplicações Quase-Conformes

Consideremos um homeomorfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , definido por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $w = f(z)$, $z = x + iy$ e $w = u + iv$, onde obtemos¹:

$$\begin{cases} du &= u_x dx + u_y dy \\ dv &= v_x dx + v_y dy. \end{cases} \quad (1.16)$$

Sendo $w = f(z)$, temos que,

$$dw = f_x dx + f_y dy. \quad (1.17)$$

Sabendo que $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$, podemos escrever (1.17) da seguinte forma

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}, \quad (1.18)$$

onde,

$$\begin{cases} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) \\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(f_x + if_y). \end{cases} \quad (1.19)$$

Geometricamente, (1.16) representa uma transformação afim de (dx, dy) no plano (du, dv) , esta transformação aplica círculos centrados na origem em elipses. Queremos calcular a relação entre os eixos da elipse, bem como suas direções. Em notação clássica, escrevemos (1.16) como segue:

$$du^2 + dv^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \text{ onde} \quad (1.20)$$

$$\begin{cases} E &= u_x^2 + v_x^2 \\ F &= u_x u_y + v_x v_y \\ G &= u_y^2 + v_y^2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Como na seção 1.2, aplicamos uma rotação de um ângulo θ e assim eliminar o termo misto da equação (1.20), que é $dx dy$. As raízes da seguinte equação denota os valores dos eixos da elipse:

$$\begin{vmatrix} E - \lambda & F \\ F & G - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.22)$$

Resolvendo a equação acima, temos as seguintes raízes:

$$\lambda_1 = \frac{E + G + [(E - G)^2 + 4F^2]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{E + G - [(E - G)^2 + 4F^2]^{\frac{1}{2}}}{2},$$

assim:

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{E + G + [(E - G)^2 + 4F^2]^{\frac{1}{2}}}{2(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Podemos reescrever (1.19) da seguinte forma:

¹A aplicação w é uma vez continuamente diferenciável.

$$\begin{cases} f_z &= \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y) \\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y). \end{cases} \quad (1.23)$$

Por (1.23) segue que $|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - v_x u_y$. Este número é chamado o **jacobiano** (ver definição 1.1.21) da transformação (1.16). Consideremos o Jacobiano positivo, no sentido de preservar a orientação entre vetores. Assim, $|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0 \Rightarrow |f_z|^2 > |f_{\bar{z}}|^2 \Rightarrow |f_{\bar{z}}| < |f_z|$. De (1.18), segue que:

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz|, \quad (1.24)$$

assim $|dw|$ é limitado por (1.24). Dividimos a desigualdade (1.24) por $|f_z| - |f_{\bar{z}}|$, e obtemos:

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1, \quad (1.25)$$

O número D_f é chamado de **dilatação** do ponto z , que denota a razão do maior com o menor eixo da elipse. Muitas vezes é mais conveniente considerar:

$$d_f = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} < 1. \quad (1.26)$$

Assim, das equações (1.25) e (1.26) segue,

$$D_f = \frac{1 + d_f}{1 - d_f} \quad e \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1}. \quad (1.27)$$

Proposição 1.3.1 *Uma aplicação $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita **conforme** se, e somente se $D_f = 1$ e $d_f = 0$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação conforme, definida por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, do Teorema 1.1.3 e proposição 1.1.20 segue que $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x \Rightarrow u_x - v_y = 0$ e $u_y + v_x = 0$, portanto $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) = 0$. Pelas expressões 1.25 e 1.26 acima, segue que $D_f = 1$ e $d_f = 0$.

($\Leftarrow$) Se $D_f = 1$ e $d_f = 0$, segue que $1 = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$ e $0 = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|}$, então $|f_{\bar{z}}| = 0 \Rightarrow f_{\bar{z}} = 0$. Assim, $\frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y) = 0$, onde $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, que mostra que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma aplicação conforme. ■

Definição 1.3.2 *Uma **equação de Beltrami** de uma função de variável complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma equação da forma:*

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z,$$

tal que $|\mu_f| = \left| \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \right| = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = d_f < 1$, ou seja $|\mu_f| < 1$.

Definição 1.3.3 Uma aplicação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita **quase-conforme** se D_f é limitado. f é **K -quase-conforme** se $D_f \leq K$. A condição $D_f \leq K$ é equivalente a dizer que $d_f \leq k = \frac{K-1}{K+1}$. Uma aplicação **1-quase-conforme** é uma aplicação conforme.

Exemplo 1.3.4 Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = (x + 2y + 5) + i(-x + 3y + 2). \end{aligned}$$

Sendo o domínio de f o conjunto $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1, \text{ onde } z = x + iy\}$, queremos mostrar que o conjunto $\{f(z); z \in C \text{ e } |f(z)| = 1\}$, é uma elipse no contra-domínio. De fato, $|f(x + iy)| = 1 \Rightarrow |(x + 2y + 5) + i(-x + 3y + 2)| = 1$, obtendo:

$$2x^2 + 13y^2 - 2xy + 6x + 32y + 28 = 0. \quad (1.28)$$

Queremos, por meio de uma translação eliminar os termos de primeiro grau da equação acima. Substituindo as equações de translação $x = u + h$ e $y = v + k$ em (1.28) obtemos:

$$\begin{aligned} 2u^2 + 13v^2 - 2uv + u(4h - 2k + 6) + v(26k - 2h + 32) + \\ (2h^2 + 13k^2 - 2hk + 6h + 32k + 28) = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Segue que

$$\begin{cases} 4h - 2k + 6 = 0 \\ -2h + 26k + 32 = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

onde $k = -\frac{7}{5}$ e $h = -\frac{11}{5}$. Assim, a equação (1.29) será:

$$2u^2 - 2uv + 13v^2 - 1 = 0. \quad (1.31)$$

Por meio de uma rotação queremos agora eliminar o termo uv de (1.31), para isto calculamos A' e C' , que são raízes da equação:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.32)$$

onde $A' = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}$ e $C' = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{2}$. Portanto, a equação final é a elipse:

$$\left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{2}\right)t^2 + \left(\frac{15 - 5\sqrt{5}}{2}\right)w^2 = 1.$$

Assim $f_z = 2 - \frac{3}{2}i$ e $f_{\bar{z}} = -1 + \frac{1}{2}i$, onde $|f_z| = \frac{5}{2}$ e $|f_{\bar{z}}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} = \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \approx 2,61 \geq 1,$$

$$|\mu_f| = d_f = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,36 < 1.$$

O que mostra que f é um exemplo de aplicação quase-conforme.

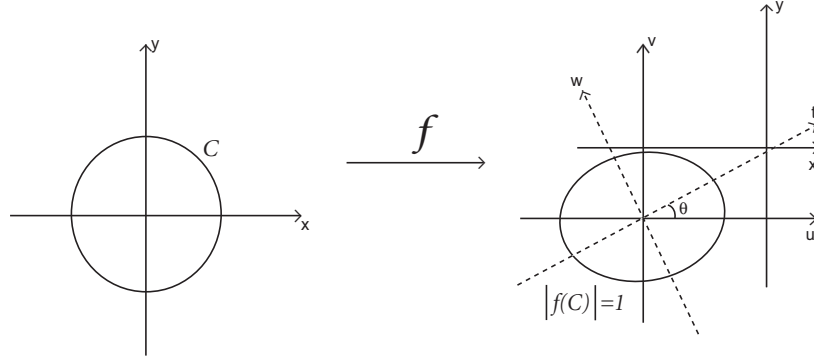


Figura 1.4: Aplicação quase-conforme.

1.4 Aplicações Homotópicas

Apresentamos os conceitos de aplicações homotópicas, caminhos e grupo fundamental, e vemos as relações existentes entre superfícies e um polígono no plano. As figuras apresentadas nesta seção são reproduções da referência [16].

Definição 1.4.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são **homotópicas** se existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \rightarrow Y,$$

*tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$, onde $I = [0, 1]$. A aplicação H chama-se então uma **homotopia** entre f e g . Neste caso, denotamos $f \simeq g$.*

Exemplo 1.4.2 *Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ as aplicações definidas por $f(x) = (x, x^2)$ e $g(x) = (x, x)$. Queremos mostrar que $f \simeq g$.*

De fato, definindo a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = (x, x^2 - tx^2 + tx). \end{aligned}$$

É claro que H é contínua, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f \simeq g$.

Definição 1.4.3 *Sejam $A \subset X$ e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas com $f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$. Dizemos que f é **homotópica** a g , **relativamente** a A , se existe homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$, entre f e g , tal que*

$$H(a, t) = g(a) = f(a),$$

para todo $a \in A$ e todo $t \in I$. Neste caso, a notação adotada é $f \simeq_A g$.

A equação da definição de homotopia relativa nos mostra que durante a deformação de f em g , o conjunto A permanece invariante.

Exemplo 1.4.4 Sejam $f, g : [0, 1] \longrightarrow S^2$ as aplicações definidas por:

$$f(t) = (\sin(\pi t), 0, \cos(\pi t))$$

$$g(t) = (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$$

1. Se $A = \{1/2\} \subset I$, então f não pode ser homotópica a g , relativamente a A . De fato, se $f \simeq_A g$, necessariamente deveríamos ter $f(1/2) = g(1/2)$, o que é falso.
2. Se $A = \{0, 1\} \subset I$, então $f \simeq_A g$. De fato, basta tomar $H : I \times I \longrightarrow S^2$ dada por:

$$H(t, s) = \left(\cos(s\pi/2) \sin(\pi t), \sin(s\pi/2) \sin(\pi t), \cos(\pi t) \right).$$

É claro que $\|H(t, s)\| = 1$, para todo $(t, s) \in I \times I$ e:

$$H(t, 0) = f(t)$$

$$H(t, 1) = g(t)$$

$$H(0, s) = f(0) = H(1, s) = g(1), \text{ para todo } s \in I$$

Definição 1.4.5 Dizemos que os espaços X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, ou são **homotopicamente equivalentes**, se existem aplicações contínuas

$$f : X \longrightarrow Y \text{ e } g : Y \longrightarrow X,$$

contínuas, tais que $g \circ f \simeq Id_X$ e $f \circ g \simeq Id_Y$, onde $Id_X : X \longrightarrow X$ e $Id_Y : Y \longrightarrow Y$ são aplicações identidade. Neste caso, dizemos que as funções f e g são inversas homotópicas e denotaremos por $X \simeq Y$.

Exemplo 1.4.6 Os espaços $S^1 \times \mathbb{R}$, $S^1 \times \{0\}$ e S^1 são homotopicamente equivalentes, ou seja, $S^1 \times \mathbb{R} \simeq S^1 \times \{0\} \simeq S^1$.

De fato, consideremos as funções $f : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times \{0\}$, dadas por $f(x, t) = (x, 0)$ e $g : S^1 \times \{0\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ a inclusão, ou seja, $g(x, 0) = (x, 0)$.

Tomando $H : (S^1 \times \mathbb{R}) \times I \longrightarrow (S^1 \times \mathbb{R})$ definida por:

$$H((x, t), s) = (x, ts)$$

temos, H é contínua e

$$H((x, t), 0) = (x, 0) = (g \circ f)(x, t)$$

$$H((x, t), 1) = (x, t) = Id_{S^1 \times \mathbb{R}}(x, t), \text{ para todo } (x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}.$$

Logo, $H : g \circ f \simeq Id_{S^1 \times \mathbb{R}}$. Como $(f \circ g)(x, 0) = (x, 0) = Id_{S^1 \times \{0\}}(x, 0)$, então, $f \circ g = Id_{S^1 \times \{0\}}$.

Definição 1.4.7 Dizemos que um espaço topológico X é **contrátil** se X tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto, ou seja, $X \simeq \{x_0\}$.

Exemplo 1.4.8 Os espaços $\mathbb{R}^n$ e $B[x, r]$ são contráteis.

Definição 1.4.9 Sejam X um espaço topológico e Y um subespaço de X . Uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow Y$ chama-se uma **retração** quando se tem $r(y) = y$ para todo $y \in Y$, ou seja, quando $r|_Y = Id_Y$. Uma retração $r : X \longrightarrow Y$ é portanto, uma extensão contínua a X da aplicação identidade $Id : Y \longrightarrow Y$.

Toda retração é sobrejetiva. Quando existe uma retração $r : X \longrightarrow Y$ o subespaço Y chama-se um **retrato** do espaço X . Agora um caso especial de homotopia relativa, chamada homotopia de caminhos.

Exemplo 1.4.10 Todo ponto é um retrato de qualquer espaço que o contenha. Para todo $x_0 \in X$, o subespaço $\{x_0\} \times Y$ é um retrato do espaço produto $X \times Y$. Se X é conexo e Y é um subconjunto desconexo de X , então Y não é um retrato de X .

Definição 1.4.11 Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ caminhos contínuos tais que $\alpha(1) = \beta(0)$, o **produto de caminhos** α e β , denotado por $\alpha * \beta$, é o caminho dado por:

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.33)$$

Por definição $\alpha * \beta : I \longrightarrow X$ é um caminho contínuo tal que $\alpha * \beta(0) = \alpha(0)$ e $\alpha * \beta(1) = \beta(1)$.

Definição 1.4.12 Os caminhos α e β tais que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$ são ditos **equivalentes** se $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$.

Vamos denotar caminhos equivalentes por $\alpha \simeq \beta$. Assim, se $\alpha \simeq \beta$ existe homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$, tal que:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t) \\ H(t, 1) &= \beta(t) \\ H(0, s) &= \alpha(0) = \beta(0) \\ H(1, s) &= \alpha(1) = \beta(1), \quad \forall s \in I. \end{aligned}$$

Observe que durante a homotopia os extremos dos caminhos permanecem fixos. Dizemos que dois caminhos fechados α e β são livremente homotópicos quando existe uma homotopia $H : I \times I \longrightarrow X$ entre α e β , tal que $H(0, s) = H(1, s)$, $\forall s, t \in I$.

Definição 1.4.13 Seja $\alpha : I \longrightarrow X$ um caminho ligando x_0 e x_1 . O **caminho inverso** de α é denotado por α^{-1} e definido por:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \alpha(1 - t). \end{aligned}$$

Notemos que α^{-1} tem o mesmo percurso que α , mas se inicia em x_1 e termina em x_0 .

Dado $\alpha : I \longrightarrow X$ um caminho contínuo, denotamos por $[\alpha]$ a classe de todos os caminhos homotópicos a α , ou seja

$$[\alpha] = \{\beta : I \longrightarrow X; \alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1) \text{ e } \beta \simeq \alpha\}.$$

1.5 Grupo Fundamental

Seja X um espaço topológico, dado $x_0 \in X$, chamamos os caminhos fechados $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ de caminhos fechados com base no ponto x_0 . O elemento x_0 é também chamado ponto básico de X . Agora vamos considerar as homotopias, salvo menção contrária, relativas a ∂I .

Denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 , chamado **grupo fundamental do espaço** X com base no ponto x_0 . O elemento neutro desse grupo é a classe de homotopia e_{x_0} caminho constante

$$\begin{aligned} e_{x_0} : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto e_{x_0}(t) = x_0, \text{ para todo } t \in I. \end{aligned}$$

Proposição 1.5.1 *Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 e x_1 induz um isomorfismo $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.*

Demonstração: Seja γ uma classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 e x_1 . Se $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$ então $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. Além disso $\gamma(\alpha\beta)\gamma^{-1} = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1})$. Logo, $\bar{\gamma} : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ definido por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, é um homomorfismo. Observamos que $\alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ é um inverso bilateral para $\bar{\gamma}$, assim, concluímos que $\bar{\gamma}$ é um isomorfismo. ■

Corolário 1.5.2 *Se X é conexo por caminhos então, para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

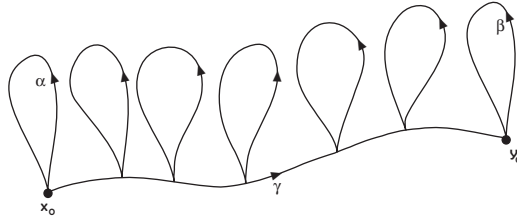


Figura 1.5: Caminhos fechados.

Definição 1.5.3 *Dados dois caminhos fechados $\alpha, \beta : I \rightarrow X$, dizemos que são **livremente homotópicos** quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow X$, tal que $H(t, 0) = \alpha(t)$, $H(t, 1) = \beta(t)$ e $H(0, s) = H(1, s)$, para quaisquer $t, s \in I$.*

Proposição 1.5.4 *Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ caminhos fechados, com bases nos pontos x_0 e y_0 respectivamente. A fim de que α e β sejam **livremente homotópicos** é necessário e suficiente que exista um caminho $\gamma : I \rightarrow X$ ligando x_0 e y_0 tal que $\alpha \cong (\gamma\beta)\gamma^{-1}$.*

Demonstração: Seja $H : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia livre entre os caminhos fechados α e β . Definindo $\gamma : I \rightarrow X$ como $\gamma(t) = H(0, t) = H(1, t)$. Consideremos uma aplicação contínua $\varphi : I \times I \rightarrow I \times I$ que transforma o bordo do quadrado $I \times I$ em si mesmo da seguinte maneira: $\varphi(0, t) = (0, 0)$, $\varphi(1, t) = (1, 0)$, $\varphi(s, 0) = (s, 0)$ para quaisquer $s, t \in I$; finalmente,

$$\varphi(s, 1) = \begin{cases} (0, 2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2, \\ (4s - 2, 1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ (1, 4 - 4s), & \text{se } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação φ existe. Com efeito, toda aplicação contínua $\varphi : \partial(I \times I) \rightarrow (I \times I)$ do bordo do quadrado em $I \times I$ estende-se continuamente a uma aplicação φ de $I \times I$ em $I \times I$, pois o quadrado $I \times I$ é contrátil, logo φ é homotópica a uma constante. Pondo $K = H \circ \varphi$, onde $K : \alpha \cong (\gamma\beta)\gamma^{-1}$.

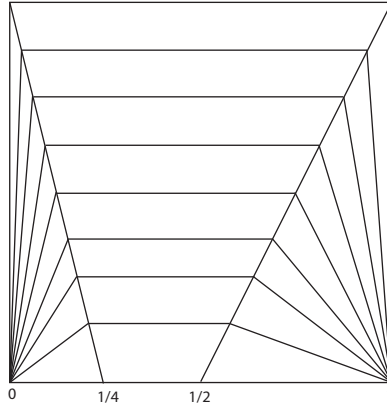


Figura 1.6: Retração do quadrado.

Reciprocamente, suponhamos $\alpha \cong (\gamma\beta)\gamma^{-1}$. Para mostrar que α é livremente homotópico a β , basta mostrar que β e $(\gamma\beta)\gamma^{-1}$ são livremente homotópicos. Vamos verificar que a homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ é livre. De fato, pondo $H = ((\gamma\beta)\gamma^{-1}) \circ \varphi$, onde $\varphi : I \times I \rightarrow I \times I$ é uma retração do quadrado sobre sua base horizontal. Assim, φ é a identidade na base, transformando linearmente cada segmento horizontal indicado na figura 1.6 no segmento $[1/4, 1/2]$ da base, cada segmento de origem 0 no segmento $[0, 1/4]$ e cada segmento de origem 1 no segmento $[1/2, 1]$. Vemos assim que H é uma homotopia livre entre β e $(\gamma\beta)\gamma^{-1}$. ■

Definição 1.5.5 Dizemos que um espaço topológico X é **simplesmente conexo** se X é conexo por caminhos e para todo $x_0 \in X$ tem-se $\pi_1(X, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.

Assim, para todo caminho fechado $\alpha : I \rightarrow X$, com base no ponto x_0 , tem-se que α é livremente homotópico a um caminho constante, ou seja, $\alpha \cong e_{x_0}$.

1.6 Grupo Fundamental de uma Superfície Compacta

Para encerrar este capítulo, de acordo com a referência [16], vamos determinar, em termos de geradores e relações, o **grupo fundamental de uma superfície compacta**. Toda superfície compacta é o espaço quociente de um polígono plano por uma relação de equivalência segundo a qual as arestas que constituem o bordo do polígono são identificadas duas a duas, de acordo com as representações nas figuras 1.7 e 1.8.

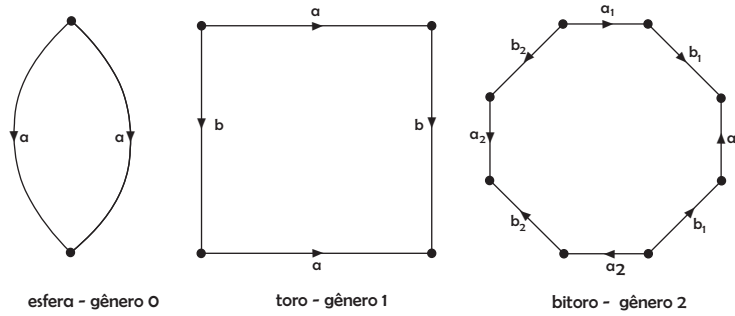


Figura 1.7: Polígonos de superfícies compactas orientáveis.

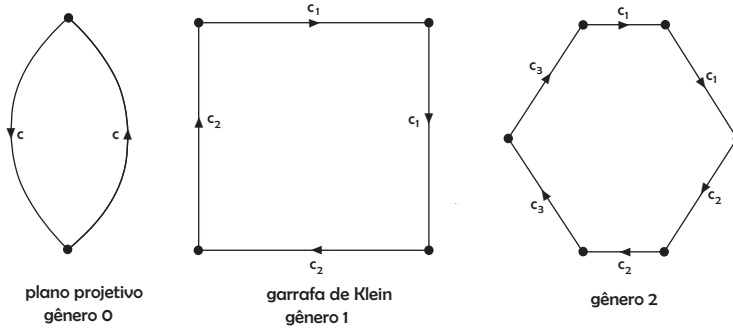


Figura 1.8: Polígonos de superfícies compactas não-orientáveis.

1.7 Processos de Identificação

A **primeira condição** é a da superfície orientável de gênero zero, homeomorfa à esfera S^2 , na qual o “polígono” tem 2 lados, que devem ser identificados um ao outro.

A **segunda condição** é a de uma superfície orientável de gênero $g \geq 1$. O polígono tem $4g$ arestas, marcadas $a_1, b_1, a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. Cada uma dessas arestas são orientadas por meio de uma seta. Percorrendo o contorno do polígono no sentido horário, a disposição das setas nos dá uma “palavra” $\omega = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g^{-1} b_g^{-1}$, a qual representa um caminho fechado na superfície (ver figura 1.9).

A **terceira condição** é a de uma superfície não-orientável de gênero $g = h - 1$. O polígono tem $2h$ arestas, marcados $c_1, c_1, c_2, c_2, \dots, c_h, c_h$. Estas arestas são orientadas

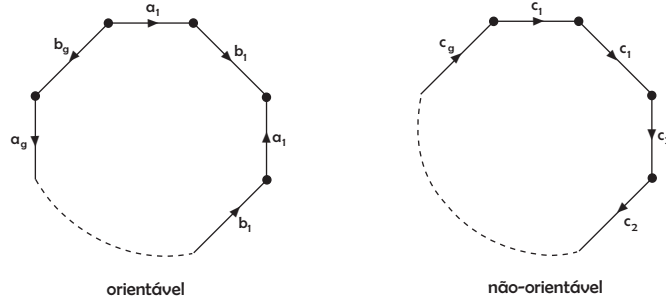


Figura 1.9: Polígonos de superfícies compactas orientáveis e não-orientáveis.

por meio de setas de tal modo que, percorrendo o contorno do polígono no sentido horário, o sentido das setas é o mesmo do percurso. Isto nos dá a palavra $\lambda = c_1^2 c_2^2 \cdots c_h^2$, que representa um caminho fechado na superfície (ver figura 1.9).

Se $\pi : \mathcal{P} \rightarrow X$ é a aplicação quociente do polígono $\mathcal{P}$ sobre a superfície S , o contorno de $\mathcal{P}$ é transformado por π numa reunião de círculos com um ponto em comum (ver figura 1.10). O número de círculos é $2g$ para uma superfície orientável de gênero $g \geq 1$ e $h = g + 1$ para uma superfície não-orientável de gênero $g \geq 1$. O interior de $\mathcal{P}$ é aplicado homeomorficamente sobre o complementar dessa reunião de círculos na superfície.

Proposição 1.7.1 *O grupo fundamental de uma superfície compacta orientável de gênero $g \geq 1$ possui $2g$ geradores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$ e uma única relação $\alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \cdots \alpha_g \beta_g \alpha_g^{-1} \beta_g^{-1} = Id$. O grupo fundamental de uma superfície compacta não-orientável de gênero g possui $h = g + 1$ geradores $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_h$ e uma única relação $\gamma_1^2 \gamma_2^2 \cdots \gamma_h^2 = Id$.*

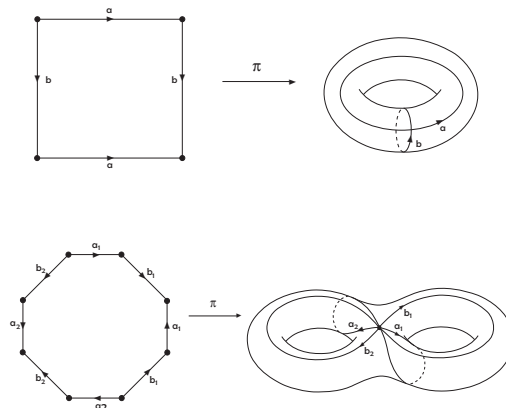


Figura 1.10: A aplicação quociente.

Capítulo 2

Modelos para a Geometria Hiperbólica

“A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.” Immanuel Kant

Neste capítulo estudamos o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ e o relacionamos com as transformações de Möbius. Apresentamos os modelos de Geometria Hiperbólica, no plano de Lobatchevsky $\mathbb{H}^2$ e no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, onde determinamos as relações entre tais espaços e seus elementos. Por fim, definimos o que são polígonos hiperbólicos e estudamos algumas relações básicas destes. Para este capítulo, utilizamos as seguintes referências [2], [6], [12] e [21].

2.1 Transformações de Möbius

Começamos introduzindo o plano estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, e a esfera unitária $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Seja $N = (0, 0, 1)$ o “pólo norte” de S^2 e identifiquemos o plano $\mathbb{C}$ com o plano $\{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, que intercepta S^2 ao longo do equador $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Assim, cada número complexo $z = x + iy$ está identificado ao ponto $(x, y, 0)$.

Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$ considere a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa por z e por N . Esta reta intercepta a esfera em exatamente um ponto $P \neq N$ (ver figura 2.2). Observe que, se $|z| < 1$ então P está no hemisfério sul, se $|z| = 1$ então $P = z$ e, se $|z| > 1$ então P está no hemisfério norte. Fazendo $z \rightarrow \infty$ temos que o ponto P tende a N e, com isso em mente, chamamos N de ponto no infinito $\{\infty\}$ e identificamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com S^2 . Tal como dado, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é também chamada de esfera unitária e denotado por $\mathbb{C}_\infty$ (o plano estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ munido de estrutura complexa, como vimos no capítulo anterior, é um exemplo de *superfície de Riemann*).

Vamos descrever a aplicação $z \rightarrow P$ em coordenadas. O conjunto dos pontos passando por z e N é $\{tN + (1-t)z; t \in \mathbb{R}\}$. Como $z = x + iy \equiv (x, y, 0)$, esse conjunto pode ser escrito como $\{((1-t)x, (1-t)y, t); t \in \mathbb{R}\}$. O ponto P determinado por z é

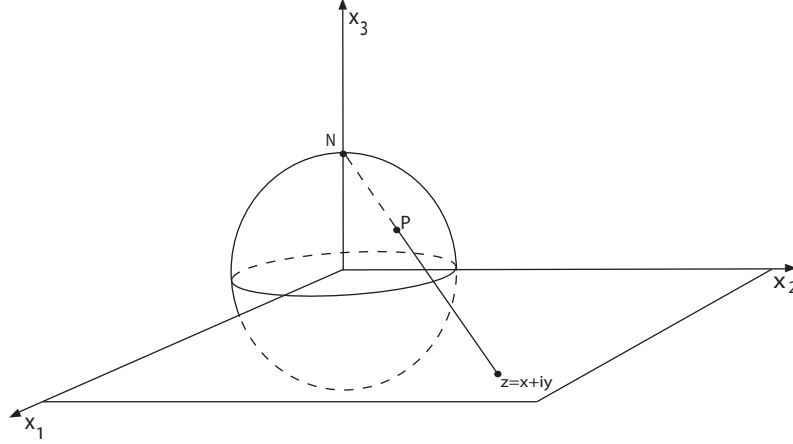


Figura 2.1: Projeção estereográfica.

o ponto dessa reta que está na esfera e, para obtê-lo, precisamos calcular o valor de t que nos dá um ponto em S^2 . Ora, um ponto dessa reta está em S^2 quando,

$$(1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + t^2 = 1,$$

ou seja, $(1-t)^2(x^2 + y^2) = 1 - t^2$, o que equivale a $(1-t)^2|z|^2 = 1 - t^2$. Como $t \neq 1$, pois sabemos que $P \neq N$, esta última igualdade é o mesmo que $(1-t)|z|^2 = 1 + t$ e então $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$. Pela equação de reta que obtemos anteriormente, temos,

$$P = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) nos mostra que $z \rightarrow \infty \Rightarrow P \rightarrow N$. Como essa aplicação é uma bijeção, portanto tem uma inversa, que podemos obter a partir do ponto $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}$, fazendo $t = x_3$ na equação da reta. Então $x_1 = x(1 - x_3)$ e $x_2 = y(1 - x_3)$, assim, temos

$$z = x + iy \equiv \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2) \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) nos mostra que $P \rightarrow N \Rightarrow z \rightarrow \infty$. Esta aplicação inversa é conhecida como **projeção estereográfica** de $S^2 \setminus \{N\}$ em $\mathbb{C}$. Obtivemos assim um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2$, tal que $\varphi(\infty) = N$ e

$$\varphi(z) = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in S^2, \quad (2.3)$$

onde $z = x + iy$, cuja inversa $\varphi^{-1} : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é tal que: $\varphi^{-1}(N) = \infty$

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2) \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Observação 2.1.1 Denotamos por $S_r(a)$ a esfera em $\mathbb{R}^n$ de centro a e raio r . Por interior de $S_r(a)$ entendemos o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$ e por exterior de $S_r(a)$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| > r\}$. Além disso, denotamos a compactificação por um ponto ideal do espaço $\mathbb{R}^n$ por $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Definição 2.1.2 Dada uma esfera $S = S_r(a)$ no espaço euclidiano a **inversão** $i_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ em torno de S é a aplicação tal que $i_S(a) = \infty$, $i_S(\infty) = a$ e para $x \notin a, \infty$, $i_S(x)$ é o único ponto da reta $\overline{ax}$ tal que $|a - x||a - i_S(x)| = r^2$.

Proposição 2.1.3 Dada uma esfera $S = S_r(a)$, temos que para todo $x \neq a, \infty$, $i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}$.

Demonstração: Basta observar que os pontos x, a e $a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}$ são pontos colineares e pela definição acima, segue que:

$$|a - x||a - \left(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}\right)| = |a - x| \left| r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| = r^2 |a - x| \left| \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| = r^2.$$

■

Observação 2.1.4 Entendemos por esferas em $\widehat{\mathbb{R}}^n$ os conjuntos $S_r(a)$, ou os hiperplanos compactificados $P_t(a) \cup \{\infty\}$, onde $P_t(a) = \{p \in \mathbb{R}^n; \langle p, a \rangle = t\}$ ¹ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. De agora em diante, denotaremos por esferas Σ e hiperplanos compactificados por P .

Proposição 2.1.5 Seja i_S a inversão na esfera Σ , então, para toda esfera Σ , o conjunto $i_S(\Sigma)$ é uma esfera.

Demonstração: Seja $S = S_r(a)$ uma esfera em $\mathbb{R}^n$. Denotando por $T_a(x) = x + a$ a translação de um vetor a e considerando $S^* = S_r(0)$, segue pela proposição 2.1.3 que: $i_S = T_a \circ i_{S^*} \circ T_{-a}$.

Como cada translação preserva esferas (novamente por ser uma isometria de $\mathbb{R}^n$), basta provarmos a proposição para i_{S^*} . Toda esfera Σ pode ser definida como o conjunto dos pontos x que satisfazem uma equação da forma:

$$\varepsilon |x|^2 - 2\langle x, a \rangle + \delta = 0, \quad (2.5)$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\delta \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Considerando a equação que define a esfera $\tilde{S} = \tilde{S}_r(a)$ por 2.5, temos que as equações $i_{S^*}(x) = \frac{x}{|x|^2}$ e $|x| = \frac{1}{|i_{S^*}(x)|}$ satisfazem a equação,

$$\varepsilon - 2\langle i_{S^*}(x), a \rangle + \delta |i_{S^*}(x)|^2 = 0,$$

que também define a equação de uma esfera. ■

¹Com a notação $\langle p, a \rangle$ entendemos por produto interno entre dois vetores $p = (x_1, \dots, x_n)$ e $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Corolário 2.1.6 *Sejam $S = S_r(a)$ e $S' = S_{r'}(a')$ esferas e $P = P_t(b)$ um hiperplano. Então,*

1. *Se $a \in P$, $i_S(P) = P$ e se $a \notin P$, então $i_S(P)$ é uma esfera contendo o ponto a .*
2. *Se $a \in S'$, então $i_S(S')$ é um plano e se $a \notin S'$ então $i_S(S')$ é uma esfera.*

Demonstração: Considerando a proposição 2.1.5, basta notarmos que $i_S(a) = \infty$ e $i_S(\infty) = a$. ■

Proposição 2.1.7 *Para toda a esfera $S = S_r(a)$, a inversão i_S reverte a orientação de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.*

Definição 2.1.8 *A **reflexão** i_P em $P = P_t(a) \cup \{\infty\}$ é a aplicação que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa um ponto $i_P(x)$ tal que o segmento de reta por x e $i_P(x)$ é ortogonal a P e intercepta o plano P no ponto médio do segmento $xi_P(x)$. Em particular, i_P mantém fixos os pontos de $P_t(a)$ e por definição $i_P(\infty) = \infty$.*

Se considerarmos π_P a projeção ortogonal em $P_t(a)$, então $\pi_P(x)$ satisfaz as equações $x - \pi_P(x) = \varepsilon a$ e $\langle \pi_P(x), a \rangle = t$, pois $x - \pi_P(x)$ é ortogonal ao hiperplano $P_t(a)$. Destas duas equações obtemos $\varepsilon = (\langle x, a \rangle - t)/|a|^2$. Utilizando $i_P(x) = x - 2(x - \pi_P(x))$ e fazendo as substituições obtemos uma fórmula explícita para a reflexão em hiperplanos:

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a.$$

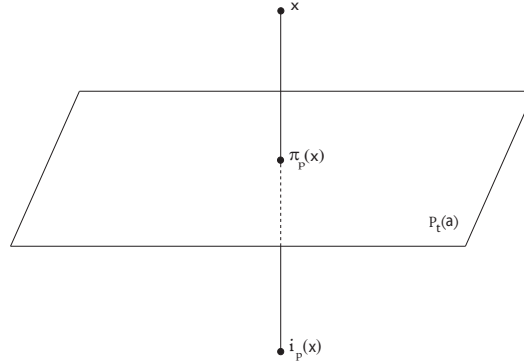


Figura 2.2: Reflexão sobre o hiperplano $P_t(a)$.

Os seguintes teoremas estabelecem uma relação entre o hiperplano e a reflexão em torno dele. O teorema 2.1.9 nos diz que a reflexão é uma isometria, o teorema 2.1.10 que reflexões preservam esferas e o teorema 2.1.11 que reflexão inverte a orientação do espaço.

Teorema 2.1.9 *Seja P um hiperplano, então para quaisquer pontos x e $y \in \mathbb{R}^n$ temos $|x - y| = |i_P(x) - i_P(y)|$.*

Teorema 2.1.10 *Seja i_P a reflexão em um hiperplano P . Então, para toda esfera Σ , $i_P(\Sigma)$ é uma esfera.*

Teorema 2.1.11 *Para todo hiperplano $P = P_t(a)$, a reflexão i_P inverte orientação.*

Definição 2.1.12 *Uma **transformação de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O conjunto das transformações de Möbius, munido com a operação de composição, forma um grupo que é denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ e chamado **grupo geral de Möbius**.*

Verifica-se que $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ é de fato um grupo. Pela própria definição este é fechado por composição e associativo. Para determinarmos a existência de elementos inversos, basta observarmos que cada gerador σ de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ (uma inversão ou uma reflexão é um elemento de ordem 2, ou seja, $\sigma^2 = id$). Sendo as reflexões e as inversões elementos que invertem a orientação de $\mathbb{R}^n$, temos que um elemento qualquer $\sigma \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ preservará orientação se e somente se for composição de um número par de inversões e reflexões.

Definição 2.1.13 *O **grupo de Möbius** $Möb(\widehat{\mathbb{R}^n})$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$ formado pelas transformações que preservam orientação.*

2.2 O Grupo $PSL(2, \mathbb{R})$

Considerando $M(2, \mathbb{R})$ o conjunto das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}); \det(A) \neq 0\}$ é um grupo não abeliano com a operação usual de multiplicação de matrizes. Este conjunto é chamado de **grupo linear geral**. Agora, note que $SL(2, \mathbb{R}) = \{B \in M(2, \mathbb{R}); \det(B) = 1\}$ é um subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$, que chamamos de **grupo linear especial**.

Definição 2.2.1 *Uma transformação linear fracionária é uma função da forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

*Se os coeficientes a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ satisfazem $ad - bc \neq 0$, então $T(z)$ é chamada uma **transformação de Möbius**.*

O grupo G das transformações de Möbius com a operação usual de composição de transformações forma um grupo não abeliano.

Considere $H = \{S(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in G; \text{ tal que } ad - bc = 1\}$ um subgrupo do grupo G das transformações de Möbius. Os elementos de H e $SL(2, \mathbb{R})$ se relacionam da seguinte forma: Dadas $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e $S_A(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $S_B(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \in H$, verificamos que $S_A \circ S_B = S_{AB}$ e para cada transformação de Möbius $S_A \in H$, existe $S_{A^{-1}}$, sua inversa, tal que $S_A \circ S_{A^{-1}} = Id$.

Proposição 2.2.2 Como $\{-Id, Id\} \trianglelefteq SL(2, \mathbb{R})$, onde Id é a matriz identidade ². Então $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{-Id, Id\}} \simeq H$.

Demonstração: Seja uma aplicação $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow H$, dada por $\varphi(A) = \frac{az + b}{cz + d}$ onde,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

A aplicação acima está bem definida e é um homomorfismo sobrejetor de grupos. Assim, pelo Teorema de Isomorfismos de Grupos, temos $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{Ker\varphi} \simeq H$. Por outro, dado $A \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que $A \in Ker\varphi \iff \varphi(A) = Id$, ou seja, $z = \frac{az+b}{cz+d} \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Esta equação tem no máximo duas raízes, assim $c = b = 0$ e $d = a$. Como $ad - bc = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. Portanto, $A \in Ker\varphi \iff A = Id$ ou $A = -Id$, isto é, $Ker\varphi = \{Id, -Id\}$. ■

Observação 2.2.3 O grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{-Id, Id\}} = \dot{\bigcup} \{A, -A\}$, tal que $A \in SL(2, \mathbb{R})$, é chamado **grupo linear projetivo especial** ³.

2.3 O Plano de Lobatchevsky $\mathbb{H}^2$

O **plano de Lobatchevsky**, ou **semi-plano superior** $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$, é o conjunto dos números complexos $z = x + iy$, cuja parte imaginária y é sempre positiva. A **fronteira** de $\mathbb{H}^2$ é o conjunto $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) = 0\} \cup \{\infty\}$. Introduzindo uma métrica no espaço $\mathbb{H}^2$, podemos definir comprimento de curvas, curvas geodésicas e distância entre pontos. Definimos a métrica:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \text{ onde } ds = \frac{|dz|}{Im(z)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Podemos assim apresentar a definição de comprimento hiperbólico.

Definição 2.3.1 Seja λ uma curva diferenciável em $\mathbb{H}^2$, $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$. Definimos o **comprimento hiperbólico** $\|\lambda\|_{\mathbb{H}^2}$ por

$$\|\lambda\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{Im[\lambda(t)]} dt.$$

Definição 2.3.2 Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, definimos a **distância** entre p e q pela expressão

$$d(p, q) = \inf \|\lambda\|.$$

onde o ínfimo é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\lambda(0) = p$ e $\lambda(1) = q$.

²O símbolo $\trianglelefteq$ denota que um subconjunto é subgrupo normal de outro.

³O símbolo $\dot{\bigcup}$ denota a união disjunta de elementos de um conjunto.

Proposição 2.3.3 *O Semi-Plano $\mathbb{H}^2$ com a distância definida acima é um **espaço métrico**.*

Demonstração: Consideremos p_1, p_2 e $p_3 \in \mathbb{H}^2$ e um caminho diferenciável $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que $\lambda(0) = p_1$ e $\lambda(1) = p_3$.

1. Como $\frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} \geq 0$, então $\|\lambda\| = \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt \geq 0$. Assim, $d(p_1, p_2) = \inf \|\lambda\| \geq 0$ e a igualdade ocorrendo quando $p_1 = p_2$.
2. Dado $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$, dado por $\gamma(t) = \lambda(1 - t)$, onde $\gamma(0) = p_3$ e $\gamma(1) = p_1$. Agora,

$$d(p_1, p_3) = \inf \|\lambda\| = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt \right\}.$$

$$d(p_3, p_1) = \inf \|\gamma\| = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt \right\}.$$

Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} j : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto 1 - t, \end{aligned}$$

desta forma, temos:

$$\begin{aligned} d(p_1, p_3) &= \inf \left\{ \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt \right\} = \inf \left\{ \int_{j(0)}^{j(1)} \frac{|\lambda'(j(t))| |j'(t)|}{\text{Im}[\lambda(j(t))]} dt \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_1^0 \frac{|\lambda'(j(t))| (-1)}{\text{Im}[\lambda(j(t))]} dt \right\} = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{|\lambda'(j(t))|}{\text{Im}[\lambda(j(t))]} dt \right\} = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt \right\} \\ &= d(p_3, p_1). \end{aligned}$$

3. Definimos os caminhos diferenciáveis $\lambda_1, \lambda_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, tal que $\lambda_1(0) = p_1$, $\lambda_1(1) = \lambda_2(0) = p_2$ e $\lambda_2(1) = p_3$ e o caminho $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ dado por:

$$\beta(t) = \begin{cases} \lambda_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \lambda_2(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sendo assim β é um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$, onde $\beta(0) = p_1$ e $\beta(1) = p_3$ e $\|\beta\| = \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|$ e, $d(p_1, p_3) = \inf \|\beta\| \leq \inf \|\lambda_1\| + \inf \|\lambda_2\| = d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) \Rightarrow d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3)$. ■

Definição 2.3.4 *Uma curva diferenciável $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é dita uma **geodésica** se para quaisquer pontos $a, b \in [0, 1]$ tivermos:*

$$d(\lambda(a), \lambda(b)) = \int_a^b \frac{|\lambda'(t)|}{\text{Im}[\lambda(t)]} dt.$$

ou seja, se λ minimizar a distância entre pontos de seu traçado.

Definição 2.3.5 Uma transformação de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ é dita uma **isometria** se preserva as distâncias hiperbólicas sobre $\mathbb{H}^2$. O conjunto de todas as isometrias de $\mathbb{H}^2$ forma um grupo, que denotamos por $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Teorema 2.3.6 A métrica $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ de $\mathbb{H}^2$ é invariante pela ação dos elementos $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, ou seja $GM(\widehat{\mathbb{R}^2}) \subset Isom(\mathbb{H}^2)$.

Proposição 2.3.7 Seja X o conjunto de todas as circunferências e semi-retas de $\mathbb{H}^2$ ortogonais ao eixo real. Então $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ age transitivamente sobre X .

Geometricamente, uma ação transitiva ocorre quando dados dois elementos distintos pertencentes a X , existe uma transformação pertencente a $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, que leva uma geodésica em outra.

Teorema 2.3.8 As **geodésicas** de $\mathbb{H}^2$ são as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Demonstração: Suponhamos $p_1, p_2 \in \mathbb{H}^2$ e que $p_1 = ia$ e $p_2 = ib$ com $b > a$. Se $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável ligando ia e ib , onde $\lambda(0) = ia$ e $\lambda(1) = ib$, tal que $\lambda(t) = (x(t), y(t))$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\lambda\| &= \int_0^1 \frac{|\lambda'(t)|}{Im[\lambda(t)]} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\frac{dy}{dt}|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Consideremos uma semi-circunferência γ ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Pelo teorema 2.3.6, existe uma transformação de Möbius $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, que leva γ no eixo imaginário. Utilizando o argumento acima, temos que γ é uma geodésica.

Para provarmos que estas são todas as geodésicas, consideremos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ e uma geodésica β ligando estes dois pontos. Seja α o semi-círculo ou semi-reta ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ contendo estes dois pontos. Sem perda de generalidade, podemos supor que α seja uma semi-reta (senão, pelo teorema 2.3.6, podemos levar α a uma semi-reta). Sendo assim, pela primeira parte desta demonstração, $\alpha = \beta$. ■

2.4 O Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

O **disco de Poincaré** é definido como o conjunto dos números complexos cuja norma é menor que 1, ou seja

$$\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\},$$

cujas **fronteira** é o conjunto

$$\partial_\infty \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}.$$

A aplicação $f(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$ transforma o plano $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$, já que se verifica $|f(z)| \leq 1$ quando $y \geq 0$. A inversa de tal aplicação é dada por $h(z) = f(z)^{-1} = \frac{z+i}{iz+1}$. Desta forma, temos uma bijeção entre o semi-plano superior e o disco de Poincaré.

Definição 2.4.1 A *distância* entre dois pontos a e b do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ é definida como $d_{\mathbb{D}^2}(a, b) = d_{\mathbb{H}^2}(h(a), h(b))$. $d_{\mathbb{D}^2}$ é uma métrica em $\mathbb{D}^2$, já que $d_{\mathbb{H}^2}$ é métrica em $\mathbb{H}^2$.

Este conjunto munido com a métrica $d_{\mathbb{D}^2}$ fornece um outro modelo para o plano hiperbólico. Para cada caminho diferenciável $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$, a composição $h \circ \lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável em $\mathbb{H}^2$. Sabemos como calcular o comprimento de arco em $\mathbb{H}^2$ pela definição 2.3.1. Definimos assim, o comprimento hiperbólico de λ em $\mathbb{D}^2$ por:

$$\|\lambda\|_{\mathbb{D}^2} = \|h \circ \lambda\|_{\mathbb{H}^2}.$$

Teorema 2.4.2 O comprimento hiperbólico de um caminho diferenciável $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$, é dado pela integral:

$$\|\lambda\|_{\mathbb{D}^2} = \int_0^1 \frac{2|\lambda'(t)|}{1 - |\lambda(t)|^2} dt.$$

Demonstração: Consideremos um caminho diferenciável $h \circ \lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$, ligando os pontos $h(a)$ e $h(b)$, onde $h(z) = \frac{z+i}{iz+1}$. Assim,

$$\|\lambda\|_{\mathbb{D}^2} = \|h \circ \lambda\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|(h \circ \lambda)'(t)|}{\text{Im}[(h \circ \lambda)(t)]} dt = \int_0^1 \frac{|(h'(\lambda(t)))||\lambda'(t)|}{\text{Im}[h(\lambda(t))]} dt.$$

A derivada e a parte imaginária da função h são dadas por:

$$h'(z) = \frac{2}{(iz+1)^2} \quad e \quad \text{Im}[h(z)] = \frac{1 - |z|^2}{|iz+1|^2},$$

onde obtemos:

$$\|\lambda\|_{\mathbb{D}^2} = \|h \circ \lambda\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{2|\lambda'(t)|}{1 - |\lambda(t)|^2} dt. \quad \blacksquare$$

Considerando uma aplicação de Möbius $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ (**grupo das transformações de Möbius** em $\mathbb{H}^2$) vamos obter as transformações de Möbius em $\mathbb{D}^2$. Para ver isto, tomamos a aplicação f definida acima, que leva o semi-plano $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{D}^2$. Assim, $\forall u, v \in \mathbb{D}^2$, consideremos a aplicação $f \circ \gamma \circ f^{-1}$, e

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}((f \circ \gamma \circ f^{-1})(u), (f \circ \gamma \circ f^{-1})(v)) &= d_{\mathbb{H}^2}((\gamma \circ f^{-1})(u), (\gamma \circ f^{-1})(v)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) = d_{\mathbb{D}^2}(u, v). \end{aligned}$$

Ou seja, $f \circ \gamma \circ f^{-1}$ é uma isometria em $\mathbb{D}^2$. Assim,

$$f \circ \gamma \circ f^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}},$$

onde $\alpha = a + d + (b - c)i$ e $\beta = b + c + (a - d)i$, e verifica $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 4(ad - bc) \neq 0$.

Definição 2.4.3 Uma **transformação de Möbius** em $\mathbb{D}^2$ é uma aplicação da forma:

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}},$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$. O conjunto de todas as transformações de Möbius de $\mathbb{D}^2$ forma um grupo, que denotamos por $\text{Möb}(\mathbb{D}^2)$.

Observação 2.4.4 Seja a aplicação $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}}$, onde $\alpha = e^{i\frac{\theta}{2}}$ e $\beta = 0$. Como

$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \neq 0$, segue que $\gamma(z) = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}z}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\theta}z$ é uma transformação de Möbius em $\mathbb{D}^2$. Observemos que esta aplicação é uma rotação no círculo unitário em $\mathbb{C}$.

Teorema 2.4.5 As **geodésicas** no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{D}^2$.

Demonstração: A aplicação $f(z) = \frac{z-i}{-iz+1}$ é conforme, ou seja, preserva ângulos entre curvas, e f aplica $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ em $\partial_\infty \mathbb{D}^2$. Lembrando que as geodésicas em $\mathbb{H}^2$ são arcos de círculos e retas ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$. Como f é conforme, a imagem em $\mathbb{D}^2$ de uma geodésica em $\mathbb{H}^2$ são retas ou arcos de círculos, ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{D}^2$. ■

2.5 Polígonos Hiperbólicos

As figuras apresentadas nesta seção são reproduções da referência [12].

Definição 2.5.1 Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{H}^2$, definimos sua **área** $\mu(A)$ como sendo a integral

$$\mu(A) = \int_A \frac{dx dy}{y^2},$$

se esta existir e for finita. Áreas, assim como comprimentos, são invariantes por isometrias, ou seja, dada isometria T temos que $\mu(T(A)) = \mu(A)$.

Como vimos acima, as geodésicas são semi-retas ou semi-círculos ortogonais à fronteira do **disco de Poincaré** ou do **plano de Lobatchevsky**. Consideremos portanto a seguinte definição:

Definição 2.5.2 Dados pontos em $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{H}^2 \cup \partial \mathbb{H}^2$, um **polígono hiperbólico** $\mathcal{P}$ com vértices $t_1, \dots, t_n$ é uma região delimitada por segmentos geodésicos:

$$\overline{t_1 t_2}, \overline{t_2 t_3}, \dots, \overline{t_{n-1} t_n}, \overline{t_n t_1}.$$

Como vimos acima, há possibilidades de que existam vértices sobre a fronteira, neste caso, dizemos que tais vértices são **vértices ideais**.

Teorema 2.5.3 *Seja Δ um triângulo em $\mathbb{H}^2$ com ângulos α, β e γ . Então, sua área $\mu(\Delta)$ é:*

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Demonstração: Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que um dos vértices do triângulo Δ seja um vértice ideal, de modo que o ângulo γ do triângulo neste vértice é nulo. Como isometrias preservam áreas, podemos assumir que os vértices p_1 e p_2 pertençam à circunferência $|z| = 1$ e $p_3 = \infty$ (um vértice ideal), de modo que as arestas ligando os vértices p_1 e p_2 à p_3 são semi-retas verticais determinadas pelas equações $x = a$ e $x = b$ respectivamente (ver figura 2.3).

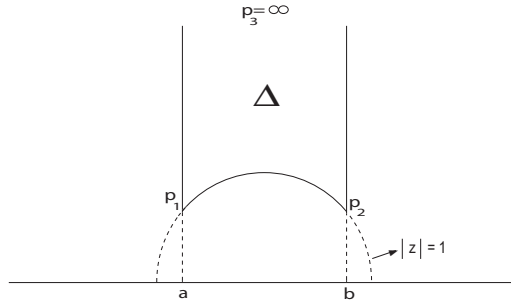


Figura 2.3: Triângulo hiperbólico com um vértice ideal $p_3 = \infty$.

Sendo assim,

$$\mu(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$, ($0 \leq \theta \leq \pi$), obtemos:

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta d\theta}{\sin \theta} = \pi - (\alpha + \beta).$$

Suponha agora que nenhum dos vértices seja um vértice ideal. Observando a figura 2.4, prolonguemos uma das arestas do triângulo Δ em uma das direções, digamos a aresta contendo os vértices p_1 e p_2 , sendo prolongada na direção de p_4 .

Considerando o vértice ideal p_4 , obtemos dois novos triângulos, que denotamos por Δ_1 e Δ_2 , determinados pelos vértices $\{p_2, p_3, p_4\}$ e $\{p_1, p_3, p_4\}$ respectivamente. O ângulo de Δ_1 em p_2 é $\pi - \beta$ e o ângulo de ambos os triângulos no vértice ideal p_4 é 0. Denotemos por θ o ângulo de Δ_1 no vértice p_3 . Temos que $\Delta_2 = \Delta \cup \Delta_1$ e esta união é disjunta, a menos de arestas e vértices, de modo que $\mu(\Delta) = \mu(\Delta_2) - \mu(\Delta_1)$.

Pela primeira parte do teorema, obtemos que:

$$\begin{aligned} \mu(\Delta) &= \mu(\Delta_2) - \mu(\Delta_1) = [\pi - \alpha - (\gamma + \theta)] - [\pi - \theta - (\pi - \beta)] \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

■

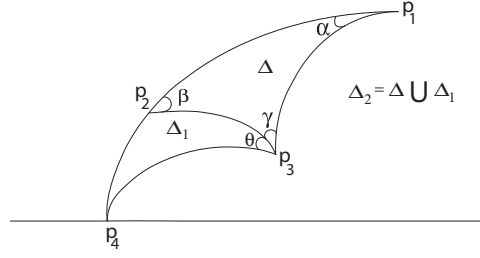


Figura 2.4: Triângulo hiperbólico.

Corolário 2.5.4 *Se $\mathcal{P}$ é um polígono hiperbólico de n lados, com ângulos $\theta_1, \dots, \theta_n$, então:*

$$\mu(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - (\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

Demonstração: Dividimos o polígono em n triângulos e aplicar o teorema acima. ■

Teorema 2.5.5 *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então $\mathcal{P}$ é **convexo** se, e somente se, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, para cada $i = 1, \dots, n$.*

Isto é consequência imediata do corolário anterior, pois uma condição necessária para a existência de um polígono com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ é que: $\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi$.

Teorema 2.5.6 *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ ângulos com $0 \leq \theta_j < \pi$ $j = 1, \dots, n$. Então existe um polígono $\mathcal{P}$ com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ nesta ordem sobre $\partial\mathcal{P}$, se e somente se,*

$$\theta_1 + \dots + \theta_n < (n - 2)\pi.$$

Capítulo 3

Grupos Fuchsianos

“Nota-se, entre os matemáticos, uma imaginação assombrosa... Repetimos: havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero.”
Voltaire

Neste capítulo abordamos o conceito de grupo fuchsiano e dada a extensão do assunto, apresentamos apenas os requisitos necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho. Desta forma, demonstramos alguns resultados, e a demonstração dos demais resultados podem ser encontrados nas referências [6], [12], [13], [14] e [16]. As figuras apresentadas neste capítulo são reproduções das referências [12] e [1].

3.1 Isometrias Hiperbólicas

Seja $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ o conjunto de todas as isometrias hiperbólicas, ou seja, o conjunto de todas as transformações de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ que preservam distância. Munindo $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ com a operação de composição temos um grupo, chamado **grupo das isometrias hiperbólicas**.

Uma **transformação de Möbius** associada a uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, é uma aplicação T_A de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{H}^2$ dada por:

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{H}^2 \\ z &\longmapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \end{aligned}$$

onde a, b, c e d são números reais e $ad - bc = 1$. Denotamos o conjunto de todas as transformações de Möbius em $\mathbb{H}^2$ por $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$.

Munindo este conjunto com a operação de composição temos um grupo, chamado **grupo das transformações de Möbius**. Assim, $\text{Möb}(\mathbb{H}^2) \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Observamos que dada $A \in M(2, \mathbb{R})$ com $\det(A) = 1$, podemos associar a A uma transformação de Möbius T_A . Reciprocamente, dada $T_A \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$, podemos associá-

la a uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com $\det(A) = 1$. No entanto, não podemos garantir a unicidade destas associações. Assim, consideremos

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}); \det(A) = 1\},$$

o grupo linear especial. Como vimos, o quociente $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{-Id, Id\}}$ é denotado por $PSL(2, \mathbb{R})$, onde Id é a matriz identidade de ordem 2. Mostramos na seção 2.2 que $PSL(2, \mathbb{R})$ é isomorfo a $Möb(\mathbb{H}^2)$.

Agora vamos classificar as isometrias hiperbólicas através de uma função definida em $PSL(2, \mathbb{R})$. Seja a função

$$\begin{aligned} T_r : PSL(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ [A] &\longmapsto T_r([A]) = |tr(A)|, \end{aligned}$$

onde $[A]$ denota a classe dos elementos A e $-A$, e $tr(A)$ é o traço da matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Definição 3.1.1 Dada $A \in SL(2, \mathbb{R})$, uma isometria $T_A \in Isom(\mathbb{H}^2)$ associada a A é:

1. **Elíptica** se $Tr(A) < 2$.
2. **Parabólica** se $Tr(A) = 2$.
3. **Hiperbólica** se $Tr(A) > 2$.

O traço de uma matriz é invariante por conjugação, ou seja, $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$, para toda matriz $A \in M(2, \mathbb{R})$ e toda matriz $B \in GL(2, \mathbb{R})$. Logo, a classificação das isometrias da definição acima são invariantes por conjugação.

O número 2 que aparece na definição acima depende exclusivamente do número de auto-valores reais da matriz A . De fato, o polinômio característico de uma matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$ é:

$$P_A(x) = x^2 - x(a + d) + (ad - bc) = x^2 - xtr(A) + \det(A) = x^2 - xtr(A) + 1,$$

com $\Delta = tr^2(A) - 4$, onde Δ indica o discriminante de $P_A(x)$. Sendo assim, analisemos os três casos possíveis:

1. Se $\Delta > 0$, então A possui dois autovalores reais distintos λ_1 e λ_2 . Portanto, a menos de conjugação (em $GL(2, \mathbb{R})$), podemos assumi-lá da seguinte forma,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz deve ter determinante igual 1, temos então $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, ou seja, $Tr(A) = |\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}| > 2$, se $\lambda_1 \neq \pm 1$.

2. Se $\Delta = 0$, então A tem apenas um autovalor real λ , este deve ter multiplicidade 2 e seu polinômio característico é da forma $P_A(x) = (x - \lambda)^2 = x^2 - 2x\lambda + \lambda^2$. Mas o termo constante deste polinômio λ^2 deve ser o determinante de A , então $\lambda = \pm 1$ e $Tr(A) = |2\lambda| = 2$. Portanto, a menos de conjugação (em $GL(2, \mathbb{R})$), podemos assumir a matriz A da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & t \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

3. Se $\Delta < 0$, então A tem apenas autovalores complexos não reais, temos que estes são da forma λ e $\bar{\lambda}$. Seu polinômio característico deve ser da forma $x^2 - 2Re(\lambda)x + |\lambda|^2$, onde $|\lambda|^2 = det(A) = 1$ e sendo $\lambda \neq \pm 1$, temos que $Tr(A) = |tr(A)| = |2Re(\lambda)| < 2$. Portanto, a menos de conjugação (em $GL(2, \mathbb{R})$), podemos assumir a matriz A da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Definição 3.1.2 *Seja X um espaço topológico não vazio e $(G, *)$ um grupo. Dizemos que o grupo $(G, *)$ **age** sobre X se existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ \alpha(g, x) &\longmapsto \alpha(g, x) = g \cdot x, \end{aligned}$$

tal que:

1. $e \cdot x = x$, para todo $x \in X$, $e \in G$, o elemento identidade de G .
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 * g_2) \cdot x$, para todo $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$.

Exemplo 3.1.3 *Sejam X um espaço topológico e*

$$G = \{f : X \longrightarrow X; f \text{ é um homeomorfismo}\}.$$

Temos que o conjunto G é um grupo não comutativo com a composição de funções. Definimos então

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ \alpha(f, x) &\longmapsto \alpha(f, x) = f \cdot x = f(x), \end{aligned}$$

Verificamos que o grupo G age sobre o espaço topológico X , pois satisfaz as condições da definição 3.1.2.

Definição 3.1.4 *A **órbita** de um ponto $x \in X$ por um grupo G é o conjunto*

$$G(x) = \{g(x) \in X; g \in G\}.$$

Definição 3.1.5 *Considere X um conjunto e $x \in X$. Chamamos de **estabilizador** de x por um grupo G ao subgrupo*

$$G_x = \{g \in G; g(x) = x\}.$$

3.2 Subgrupos Discretos

Nesta seção estudaremos grupos fuchsianos e a sua ação em espaços métricos. Começaremos definindo grupos fuchsianos e estudando algumas propriedades básicas deles.

Definição 3.2.1 Um **subgrupo** G de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é chamado **discreto** se a topologia induzida sobre G for uma topologia discreta. Isto é, se G é um conjunto discreto no espaço topológico $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

Definição 3.2.2 Uma **família** $\{X_\alpha; \alpha \in I\}$ de subconjuntos de um espaço métrico X (I é um conjunto de índices) é chamada de **localmente finita**, quando, para qualquer conjunto compacto $K \subseteq X$, temos $X_\alpha \cap K \neq \emptyset$ somente para um número finito de índices de $\alpha \in I$.

O conjunto dos **homeomorfismos** de um espaço topológico X é um **grupo** em relação à composição. Um subgrupo G desse grupo chama-se um **grupo de homeomorfismos** de X . Deve-se ter portanto que $\text{id}_X \in G$ e $g, h \in G \Rightarrow gh, g^{-1} \in G$ (Aqui, gh é a composição de g com h).

Dizemos que um grupo G de homeomorfismos de X é **propriamente descontínuo** quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que, para todo $g \in G$ diferente da identidade, tem-se $gV \cap V = \emptyset$.

Exemplo 3.2.3 Para cada $m \in \mathbb{Z}$, seja $T_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a translação $T_m(x) = x + m$. O conjunto $G = \{T_m; m \in \mathbb{Z}\}$ é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de $\mathbb{R}$.

Definição 3.2.4 Um subgrupo discreto de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é chamado **grupo fuchsiano** se consiste de transformações que preservam orientação. Em outras palavras, grupo fuchsiano é um subgrupo discreto G de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 3.2.5 O subgrupo discreto $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \frac{SL(2, \mathbb{Z})}{\{-Id, Id\}}$ de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é um grupo fuchsiano.

Definição 3.2.6 Um grupo G é **cíclico** quando ele é gerado por um elemento, isto é, quando $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$.

Exemplo 3.2.7 $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle \bar{1} \rangle$. Se G é um grupo cíclico, então G é abeliano.

Teorema 3.2.8 Os subgrupos cíclicos de $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são discretos. Um subgrupo cíclico gerado por elemento elíptico é discreto se e somente se for finito.

Demonstração: Seja

$$G = \langle T_A \rangle = \{\dots, T_A^{-2}, T_A^{-1}, Id, T_A, T_A^2, \dots\} = \{\dots, T_{A^{-2}}, T_{A^{-1}}, Id, T_A, T_{A^2}, \dots\},$$

um subgrupo cíclico gerado por um elemento $T_A \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$. Observamos antes de tudo que G é discreto se, e somente se,

$$T_B G T_B^{-1} = \langle T_B T_A T_B^{-1} \rangle = \{\dots, T_{B A^{-1} B^{-1}}, Id, T_{B A B^{-1}}, \dots\},$$

for discreto. Então A é conjugado a alguma das matrizes da forma

$$A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

conforme A seja hiperbólico, parabólico ou elíptico respectivamente.

Suponhamos, inicialmente, que T_A seja hiperbólica ou parabólica. Então A será conjugada a alguma matriz A_k ou A_t e $(A_k)^n = A_{nk}$ e $(A_t)^n = A_{nt}$. Mas, $0 < \|Id - A_{nk}\|^2 = (1 - \sqrt{e^{nk}})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{e^{kn}}})^2 \leq (1 - \sqrt{e^{(n+1)k}})^2 + (1 - \frac{1}{\sqrt{e^{(n+1)k}}})^2 = \|Id - A_{(n+1)k}\|^2$ e analogamente,

$$0 < \|Id - A_{nt}\|^2 = (nt)^2 < (n+1)^2 t^2 = \|Id - A_{(n+1)t}\|^2.$$

de modo que, se tivermos $k, t > 0$, teremos uma vizinhança de Id que não contém nenhum ponto de G com exceção da própria Id , obtendo assim que G , o grupo gerado por T_{A_k} ou T_{A_t} , é discreto. Suponhamos agora que T_A seja isometria elíptica, isto é, conjugada a alguma T_{A_θ} . Temos que $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$. Então, se G for finito ele será discreto. De qualquer modo, temos que $A_\theta = A_{\theta+2\pi}$. Assim, se considerarmos que G é discreto, podemos considerar que existe $0 < \theta_0$ o menor argumento tal que $T_{A_{\theta_0}} \in G$. Seja então $m \in \mathbb{N}$ o maior número natural tal que $m\theta_0 \leq 2\pi$. Mas se tivermos $m\theta_0 < 2\pi$ teremos $(m+1)\theta_0 - 2\pi < \theta_0$, e $(T_{A_{\theta_0}})^{m+1} = T_{A_{(m+1)\theta_0}} = T_{A_{(m+1)\theta_0 - 2\pi}} \in G$, contradizendo a minimalidade de θ_0 . Temos então que $m\theta_0 = 2\pi$ e $G = \langle T_{A_{\theta_0}} \rangle$ é grupo cíclico de ordem m . ■

Lema 3.2.9 *Sejam $w \in \mathbb{H}^2$ e $K \subset \mathbb{H}^2$ um compacto. Então, o conjunto:*

$$H = \{T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2); T(w) \in K\},$$

é compacto.

Lema 3.2.10 *Seja $G \subset \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ grupo com ação propriamente descontínua em $\mathbb{H}^2$. Então os pontos fixos por elementos de G , ou seja, o conjunto,*

$$\{z \in \mathbb{H}^2; \exists T \in G, T(z) = z\},$$

é discreto.

Teorema 3.2.11 *Um subgrupo $G \subset \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ é discreto se, e somente se, sua ação em $\mathbb{H}^2$ for propriamente descontínua.*

Demonstração: Suponhamos que G seja discreto. Então para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e para todo compacto $K \subset \mathbb{H}^2$,

$$\{T \in G; T(z) \in K\} = \{T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2); T(z) \in K\} \cap G.$$

Mas o lema 3.2.9 garante que $\{T \in \text{Möb}(\mathbb{H}^2); T(z) \in K\}$ é compacto, logo $\{T \in G; T(z) \in K\}$ é finito, pois é a interseção de um conjunto compacto com outro discreto, daí a ação de G é propriamente descontínua.

Reciprocamente, suponhamos que G age de maneira propriamente descontínua e que G não seja discreto em $\text{Möb}(\mathbb{H}^2)$. Seja então z um ponto que não é fixo por qualquer elemento de G a não ser a identidade. A existência de tal ponto é garantida pelo lema 3.2.10, já que o conjunto dos pontos fixos por elementos de G é discreto. Assumindo que G não é discreto, temos que existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ de elementos distintos de G tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = Id$. Temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z) = z$. Mas como $T_n(z) \neq z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência de pontos distintos de z convergindo para z contradizendo a hipótese de G agir de maneira propriamente descontínua. ■

3.3 Domínio Fundamental e Domínio de Dirichlet

Nesta seção estudamos Domínios Fundamentais e de Dirichlet, conjuntos com propriedades importantes e úteis ao nosso trabalho. Começamos definindo Domínio Fundamental.

Definição 3.3.1 *Seja X um espaço métrico e G grupo de homeomorfismos agindo em X de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é dito **domínio fundamental** se satisfizer as seguintes condições:*

1. $\bigcup_{T \in G} T(\mathcal{D}) = X$,
2. $\text{int}(\mathcal{D}) \cap T(\text{int}(\mathcal{D})) = \emptyset$, para todo $Id \neq T \in G$,
3. $\text{int}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$.

Definição 3.3.2 *O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus \text{int}\mathcal{D}$ é chamado **fronteira** de $\mathcal{D}$ e a família $\{T(\mathcal{D}); T \in G\}$ é dita um **ladrilhamento** de X . Dizemos que um **ladrilhamento é de tipo** $\{p, q\}$ se este consiste de um conjunto de polígonos regulares com p arestas, e ângulos internos iguais a $\frac{2\pi}{q}$ que cobrem todo o plano, sem auto-interseções de seus interiores, onde $p, q \in \mathbb{N}^*$.*

Exemplo 3.3.3

Consideremos $G \subset \text{Möb}(\mathbb{H}^2)$ o grupo cíclico gerado por $T(z) = z + 1$, ou seja,

$$G = \{T^n; T^n(z) = z + n \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Seja

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2; k \leq \operatorname{Re}(z) \leq k+1\},$$

é domínio fundamental da ação de G em $\mathbb{H}^2$, pois

1. $\bigcup_{T \in G} T(\mathcal{D}_k) = \mathbb{H}^2$.
2. $\operatorname{int}(\mathcal{D}_k) \cap T(\operatorname{int} \mathcal{D}_k) = \emptyset$, para todo $Id \neq T \in G$.
3. $\operatorname{int}(\mathcal{D}_k) \neq \emptyset$. (ver figura 3.1)

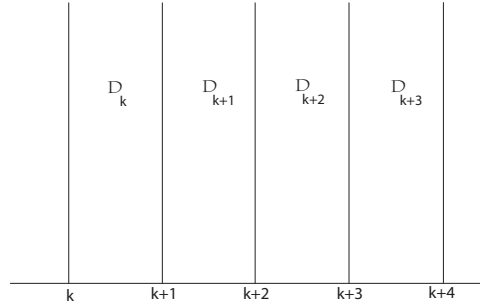


Figura 3.1: Domínio fundamental do grupo cíclico $G = \langle T(z) = z + 1 \rangle$.

Definição 3.3.4 Sejam G um grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(p) \neq p$, $\forall T \in G$. O conjunto

$$\mathcal{D}_p(G) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) \leq d(z, T(p)), \text{ para todo } T \in G\},$$

é chamado de **domínio de Dirichlet** de G centrado em p .

Descrevendo em palavras, consideramos a órbita $G(p)$ e escolhemos os pontos $z \in \mathbb{H}^2$ que estão mais próximos de p do que qualquer ponto da órbita $G(p)$.

Definição 3.3.5 Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ pontos distintos, o **bisector perpendicular** dos pontos p e q é o conjunto,

$$\{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) = d(z, q)\}.$$

Lema 3.3.6 O bisector perpendicular de dois pontos p e q é a geodésica passando pelo ponto médio do segmento $\overline{pq}$ e ortogonal a este.

Demonstração: Provaremos que dado z com $d(z, p) = d(z, q)$, z pertence à geodésica ortogonal ao segmento $\overline{pq}$ pelo seu ponto médio. Sem perda de generalidade podemos considerar $p = i$ e $q = r^2 i$. Considerando a fórmula da distância, temos

$$d(z, p) = d(z, q) \iff \frac{|z - p|^2}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{|z - q|^2}{r^2 \operatorname{Im}(z)}.$$

Mas,

$$\frac{|z - p|^2}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{\operatorname{Re}^2(z) + (\operatorname{Im}(z) - 1)^2}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{\operatorname{Re}^2(z) + (\operatorname{Im}(z) - r)^2}{r^2 \operatorname{Im}(z)} = \frac{|z - q|^2}{r^2 \operatorname{Im}(z)},$$

se e somente se,

$$|z|^2 = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = r^2.$$

Ou seja, se $|z| = r$. Entretanto $|z| = r$ é exatamente a geodésica ortogonal ao segmento $\overline{pq}$ pelo seu ponto médio. ■

Denotamos por $L_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) = d(z, T(p))\}$ o bissetor perpendicular de p e $T(p)$. Note que $L_p(T)$ é a fronteira topológica de

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) \leq d(z, T(p))\},$$

e observamos que,

$$\mathcal{D}_p(G) = \bigcap_{Id \neq T \in G} H_p(T).$$

Teorema 3.3.7 *Sejam G um grupo fuchsiano e $\mathcal{D}_p(G)$ um domínio de Dirichlet centrado em p . Então $\mathcal{D}_p(G)$ é domínio fundamental da ação de G .*

Corolário 3.3.8 *Todo domínio de Dirichlet de um grupo fuchsiano é **geodesicamente convexo**, ou seja, dados $z_1, z_2 \in \mathcal{D}_p(G)$, o segmento geodésico $\overline{z_1 z_2} \subset \mathcal{D}_p(G)$.*

Observação 3.3.9 *A fronteira de um domínio de Dirichlet é formada pela união de geodésicas,*

*raios geodésicos ou segmentos geodésicos. A cada uma destas geodésicas (raios ou segmentos), chamaremos de **aresta ordinária**. Dizemos que um ponto da fronteira de um domínio de Dirichlet é um **vértice ordinário** se este for a interseção de duas arestas ordinárias distintas de $\mathcal{D}_p(G)$.*

Observação 3.3.10 *Se considerarmos $w \in \mathcal{D}_p(G)$ fixo por algum elemento (elíptico) $T \in G$, temos que w é ponto de fronteira de $\mathcal{D}_p(G)$. Vamos supor que T é um elemento de ordem $k \geq 3$. Como T fixa w e leva geodésicas em geodésicas, temos que w é um **vértice ordinário** de $\mathcal{D}_p(G)$ e as arestas ordinárias que se interceptam em w formam um ângulo interno θ de no máximo $\frac{2\pi}{k}$.*

Teorema 3.3.11 *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(G)$ domínio de Dirichlet. Então o **ladrilhamento** $\{T(\mathcal{D}); T \in G\}$ é localmente finito.*

Demonstração: Sejam $q \in \mathbb{H}^2$, K vizinhança compacta de q e $r = \sup_{z \in K} \{d(p, z)\}$. Como K é compacto temos que $r < \infty$. Suponhamos que exista uma sequência $(T_n)_{n=1}^\infty$ de elementos distintos de G tal que $K \cap T_n(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Existe então sequência $z_n \in \mathcal{D}$ tal que $w_n = T_n(z_n) \in K \cap T_n(\mathcal{D})$. Mas,

$$d(p, T_n(p)) \leq d(p, w_n) + d(w_n, T_n(p)) = d(p, w_n) + d(z_n, p)$$

$$\leq d(p, w_n) + d(w_n, p) = 2r.$$

E como p não é fixado por qualquer elemento de G , a sequência $T_n(p)$ é sequência de pontos distintos contidos na bola fechada de centro p e raio $2r$, contradizendo a hipótese de as órbitas de G serem discretas. ■

Teorema 3.3.12 *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet $\mathcal{D}_p(G)$ contém exatamente dois elementos.*

Definição 3.3.13 *Seja $\mathcal{P}$ um polígono fechado convexo em $\mathbb{H}^2$ (ou $\mathbb{D}^2$) e $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as arestas de $\mathcal{P}$. Dizemos que o **emparelhamento de arestas** do polígono $\mathcal{P}$ é o conjunto de isometrias $\Phi = \{T_\beta ; \beta \in \mathcal{A}\}$, onde, para toda aresta $\beta \in \mathcal{A}$ temos:*

1. *Existe uma aresta $\beta' \in \mathcal{A}$ tal que $T_\beta(\beta') = \beta$;*
2. *As isometrias $T_{\beta'}$ e T_β satisfazem a seguinte relação $T_{\beta'} = T_\beta^{-1}$;*
3. *Se β for aresta de $\mathcal{P}$ então $\beta' = \mathcal{P} \cap T_\beta^{-1}(\mathcal{P})$.*

Observação 3.3.14 *Vemos então que se $\mathcal{D}_p(G)$ possui um número finito de arestas, este é necessariamente um número par. Mais ainda, dada uma aresta β existe uma única outra aresta $\beta' \neq \beta$ e um único elemento $T_{\beta'} \in \Phi$ tal que $T_{\beta'}(\beta) = \beta'$. Dizemos neste caso que $\{\beta, \beta'\}$ é um par de **arestas congruentes** e que $T_{\beta'}$ relaciona o par, ou então que $T_{\beta'}$ **emparelha as arestas**. Observemos que se $T_{\beta'}$ relaciona o par $\{\beta, \beta'\}$, então $T_{\beta'}^{-1}$ também o relaciona.*

Teorema 3.3.15 *Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(G)$ domínio de Dirichlet de G . Considere o conjunto $\{T_i; i \in I\}$ de elementos de G que relacionam arestas distintas de $\mathcal{D}$. Então $\{T_i; i \in I\}$ é um conjunto de geradores de G .*

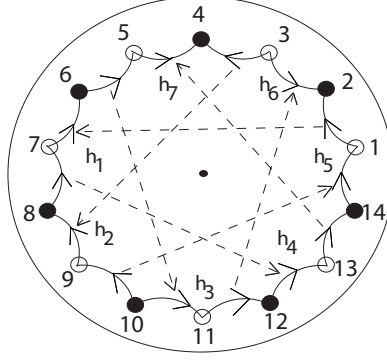
Definição 3.3.16 *Sejam G grupo fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(G)$ um Domínio de Dirichlet de G . Definimos um **ciclo de vértices** (chamamos simplesmente de **ciclo**), como sendo uma classe de equivalência de **vértices congruentes**, ou seja, como um conjunto da forma:*

$$\{T(z); T \in G, z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } D_p(G)\}.$$

Exemplo 3.3.17 *O grupo seguinte $G = \{h_1, \dots, h_7\}$ possui dois **ciclos de vértices** mostrados na figura 3.2.*

Na figura 3.2, observamos que a isometria h_1 emparelha duas arestas, orientadas com sentido contrário. Assim, os vértices 1 e 7 são relacionados pela isometria h_1 . A isometria h_4 relaciona duas arestas orientadas com sentido contrário, e o vértice 7 se relaciona com o vértice 13.

Pela isometria h_7 , os vértices 13 e 5 são relacionados, observando que as arestas que os contém estão orientadas com sentido contrário uma da outra. De forma análoga, o vértice 5 se relaciona com o vértice 11 pela isometria h_3 , o vértice 11 com o vértice 3 pela isometria h_6 , o vértice 3 com o vértice 9 pela isometria h_2 e fechando o ciclo de vértices, relacionamos os vértices 9 e 1 pela isometria h_5 .



$$c = \{1, 7, 13, 5, 11, 3, 9\}$$

$$v = \{2, 12, 8, 4, 14, 10, 6\}$$

Figura 3.2: Domínio de Dirichlet com dois ciclos de vértices.

Teorema 3.3.18 *Seja $\mathcal{D}_p(G)$ domínio de Dirichlet de G . Sejam $v_1, \dots, v_n$ vértices de um ciclo e sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ os ângulos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem do estabilizador em G de um dos vértices do ciclo, temos que $\theta_1 + \dots + \theta_n = \frac{2\pi}{m}$.*

Vamos examinar algumas consequências do teorema acima. Suponhamos que z não é fixado por nenhum elemento elíptico de G , o ciclo C contendo z é chamado **ciclo accidental** e os vértices de tal ciclo são chamados de **vértices accidentais**. Estes ciclos são caracterizados pelo fato de $m = 1$, isto é:

$$\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi.$$

Supondo que z é fixado por um elemento elíptico em G e que o estabilizador de z tem ordem q , assim $m = q$. Então

$$\theta_1 + \dots + \theta_n = 2\pi/q.$$

Definição 3.3.19 *Seja G um grupo fuchsiano. Então $\mathcal{P}$ é um **polígono fundamental convexo** de G se, e somente se, $\mathcal{P}$ é convexo e localmente finito no domínio fundamental de G .*

Teorema 3.3.20 (Teorema de Poincaré) *Seja $\mathcal{P}$ um polígono fechado convexo em $\mathbb{H}^2$, Φ um emparelhamento de arestas e $G = \langle \Phi \rangle$. Sejam $v_1, \dots, v_n$, um ciclo finito com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$, respectivamente e m a ordem do estabilizador em G de um dos vértices do ciclo. Então se todo ciclo de vértices for finito, e se $\theta_1 + \dots + \theta_n = \frac{2\pi}{m}$, então G é um grupo discreto e $\mathcal{P}$ é um polígono fundamental de G .*

3.4 Grupos Fuchsianos Co-Compactos

Nesta seção estudamos o espaço quociente $\mathbb{H}^2/G$, onde G é um grupo de isometrias agindo em $\mathbb{H}^2$ de maneira propriamente descontínua. O quociente acima se relaciona com uma superfície compacta orientável. Antes, definimos conjunto limite de um grupo fuchsiano.

Definição 3.4.1 *Seja G grupo fuchsiano e $z \in \mathbb{H}^2$.*

1. Chamamos de **conjunto limite** de G determinado por z ao conjunto

$$\Lambda_z(G) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{H}^2}; \zeta \text{ é ponto de acumulação de } G(z)\}.$$

2. Chamamos de **conjunto limite** de G ao conjunto

$$\Lambda(G) = \{\zeta \in \overline{\mathbb{H}^2}; \zeta \text{ é ponto de acumulação de alguma órbita } G(z)\} = \bigcup_{z \in \mathbb{H}^2} \Lambda_z(G).$$

Exemplo 3.4.2 *Seja G o grupo gerado por $T(z) = 2z$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T^n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n |z| = \infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T^{-n}(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} |z| = 0.$$

De modo que $\Lambda_z(G) = \Lambda(G) = \{0, \infty\}$.

Definição 3.4.3 *Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ com $c \neq 0$. Chamamos de **círculo isométrico** de T ao conjunto:*

$$\Gamma(T) = \{z \in \mathbb{C}; |cz+d| = 1\} = \left\{z \in \mathbb{C}; \left|z + \frac{d}{c}\right| = \frac{1}{|c|}\right\},$$

com raio igual a $1/|c|$, e centro $-\frac{d}{c}$.

Observação 3.4.4 *Se considerarmos o modelo de Poincaré, veja definição 2.4.3, página 32, podemos representar toda isometria na forma,*

$$T(z) = \frac{az+c}{\bar{c}z+\bar{a}}, |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Neste caso, se $c = 0$ temos que T é isometria elíptica fixando a origem, portanto uma rotação euclidiana e todas as distâncias euclidianas são preservadas. Se $c \neq 0$ obtemos de modo inteiramente análogo que o conjunto no qual T preserva as distâncias euclidianas é definido por,

$$\Gamma(T) = \{z \in \mathbb{C}; |\bar{c}z + \bar{a}| = 1\} = \left\{z \in \mathbb{C}; \left|z + \frac{\bar{a}}{\bar{c}}\right| = \frac{1}{|\bar{c}|}\right\},$$

ou seja, continuamos com um círculo de raio $1/|c|$ e centro $-\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$.

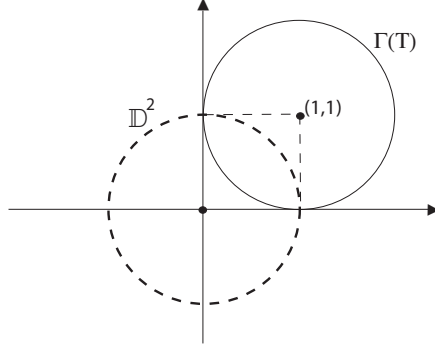


Figura 3.3: Círculo isométrico da transformação $T(z)$.

Exemplo 3.4.5 Dada a transformação $T(z) = \frac{(1+i)z-i}{iz+(1-i)}$, temos $|1+i|^2 - |i|^2 = 1$, logo, $T(z) \in \text{Möb}(\mathbb{D}^2)$. Assim, $\Gamma(T) = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$ é uma circunferência ortogonal ao disco $\mathbb{D}^2$ (ver figura 3.3).

Definição 3.4.6 Dizemos que um grupo fuchsiano G é **grupo de primeiro tipo** se $\Lambda(G) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$. O grupo G é **grupo de segundo tipo** se $\Lambda(G) \neq \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Definição 3.4.7 A geodésica em $\mathbb{H}^2$ unindo os dois pontos fixos de uma transformação hiperbólica T , é chamada **eixo** de T , que denotamos por $E(T)$.

Definição 3.4.8 Dado um grupo fuchsiano G , dizemos que G é **co-compacto** se o espaço quociente $\mathbb{D}^2/G$ é compacto.

Corolário 3.4.9 Um grupo fuchsiano G é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Dirichlet de G for compacto.

Definição 3.4.10 Sejam G um grupo fuchsiano co-compacto e $\mathcal{D}_p(G)$ um domínio de Dirichlet de G com vértices fixados por isometrias elípticas. Consideramos $m_1, \dots, m_r$ as ordens dos vértices de $\mathcal{D}_p(G)$ e g o gênero da superfície compacta orientável $\mathbb{D}^2/G$. O conjunto ordenado $(g, m_1, \dots, m_r)$ é chamado **assinatura** de G .

Teorema 3.4.11 Se G é grupo fuchsiano de assinatura $(g, m_1, \dots, m_r)$, então a área μ da superfície $\frac{\mathbb{D}^2}{G}$ é dada por:

$$\mu\left(\frac{\mathbb{D}^2}{G}\right) = 2\pi \left[(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k}\right) \right].$$

Em sua tese de doutorado, Edson Agustini [1] prova os seguintes resultados, que nos possibilita exibir as isometrias que emparelham as arestas de um polígono no disco de Poincaré:

Proposição 3.4.12 *Seja $\mathcal{P}$ um polígono hiperbólico regular de $4g$ arestas centrado na origem de $\mathbb{D}^2$ com um vértice no eixo real positivo. Então, as arestas de $\mathcal{P}$ estão contidos nos círculos euclidianos*

$$C = \left(\left(e^{i\frac{\pi}{2g}(\frac{1}{2}+k)} \right) \sqrt{\frac{1 + \sec \frac{\pi}{2g}}{2}}, \frac{\tan \frac{\pi}{2g}}{\sqrt{2 + 2 \sec \frac{\pi}{2g}}} \right),$$

onde $k = 0, \dots, 4g - 1$.

Temos o trabalho de obter apenas uma isometria geradora de G .

- Rotulemos as arestas de $\mathcal{P}$ com $\gamma_1, \dots, \gamma_{4g}$, no sentido anti-horário e a partir do ângulo zero no primeiro quadrante.
- Obtemos a translação hiperbólica que emparelha as arestas γ_1 e γ_3 de $\mathcal{P}$.
- As outras isometrias são obtidas por conjugação com isometrias elípticas.

Proposição 3.4.13 *Seja $\mathcal{P}$ como na proposição anterior. A translação hiperbólica que emparelha as arestas γ_1 e γ_3 é dada por*

$$h_1(z) = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2g})} e^{i\pi \frac{1}{2g}} z - \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{2g})} e^{i\pi \frac{3}{4g}}}{\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{2g})} e^{-i\pi \frac{3}{4g}} z - \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2g})} e^{-i\pi \frac{1}{2g}}}.$$

Fazemos uso de isometrias elípticas com centro na origem e ângulo $\frac{2\pi}{8g} + k\frac{2\pi}{4g}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\longmapsto \left(e^{i\frac{\pi}{2g}(\frac{1}{2}+k)} \right) z, \end{aligned}$$

onde $k = 0, \dots, 4g - 1$, para obter as outras isometrias.

Exemplo 3.4.14 *Considerando $g = 2$, um bitoro, obtemos a seguinte região fundamental,*

Para obtermos a isometria h_2 , a partir da aresta b fazemos uma rotação no sentido horário até a aresta a . Aplicamos a isometria h_1 e obtemos a aresta c . Da aresta c , rotacionamos três vezes no sentido horário até a aresta h . Assim, relacionamos as arestas b e h pela isometria h_2 .

Obtemos agora a isometria h_3 . A partir da aresta e , rotacionamos 4 vezes no sentido horário até a aresta a . Aplicando h_1 , obtemos a aresta c . Da aresta c , rotacionamos 4 vezes no sentido anti-horário até a aresta g . Assim, relacionamos as arestas e e g pela isometria h_3 .

Repetindo o mesmo argumento, obtemos uma relação para a isometria h_4 .

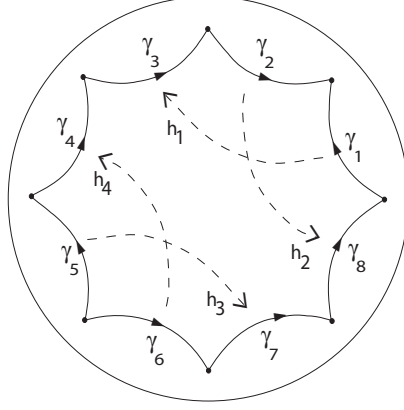


Figura 3.4: A ação topológica de G para obter o bitoro.

$$\begin{cases} h_2 &= \rho_3 \circ h_1 \circ \rho_1 \\ h_3 &= \rho_{-4} \circ h_1 \circ \rho_4, \\ h_4 &= \rho_1 \circ h_1 \circ \rho_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde,

$$\begin{aligned} \rho_k &: \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\longmapsto (e^{i\frac{\pi}{8}(2k+1)})z. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Em termos de Matrizes, podemos escrever (3.2) e a aplicação h_1 da seguinte forma:

$$M_{\rho_k} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{16}(2k+1)} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{16}(2k+1)} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$M_{h_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{\pi}{4})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{3\pi}{8})} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{3\pi}{8})} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{\pi}{4})} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Agora, por (3.1), (3.3) e (3.4) temos:

$$M_{h_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{3\pi}{8})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{\pi}{4})} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{\pi}{4})} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{3\pi}{8})} \end{pmatrix},$$

$$M_{h_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{5\pi}{4})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{\pi}{4})} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{\pi}{4})} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{5\pi}{4})} \end{pmatrix},$$

$$M_{h_4} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i(\frac{\pi}{8})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i\pi} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{4})}e^{i\pi} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}e^{-i(\frac{\pi}{8})} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

Polígonos Canônicos para Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados

“Não há seitas em Geometria. Quando a verdade é demonstrada, torna-se impossível a formação de partidos ou facções.” Voltaire

Neste capítulo, estudamos os polígonos canônicos de Fricke, considerando um grupo fuchsiano G finitamente gerado. Na obra *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen 1*, Páginas 285 – 315, Leipzig, 1926, produzida em parceria com Felix Klein, Robert Fricke definiu uma classe de polígonos fundamentais chamados de canônicos. Tais polígonos se caracterizam pelo fato de serem regiões convexas no plano.

Um polígono canônico $\mathcal{P}$, segundo Fricke, depende da escolha de um determinado sistema padrão de geradores S e de um grupo fuchsiano G , finitamente gerado. No artigo, *Canonical Polygons For Finitely Generated Fuchsian Groups*, Princeton, New Jersey, páginas 1 – 9, 1966, de Linda Keen, estudamos a demonstração da existência dos polígonos de Fricke, dado um grupo G , de gênero positivo e qualquer sistema padrão de geradores S dado.

A demonstração proposta por Linda Keen envolve construções explícitas e os argumentos de continuidade usam aplicação quase-conforme, desenvolvida por Ahlfors [4] e Bers [7]. Neste capítulo utilizamos as referências [9] e [15]. As figuras apresentadas neste capítulo são reproduções da referência [15].

4.1 Preliminares

Definição 4.1.1 *Seja M uma superfície de Riemann. Dizemos que uma superfície de Riemann M é do tipo finito, se M é uma superfície de Riemann compacta $\widehat{M}$ e dado um subconjunto finito $E \subset \widehat{M}$, M é conformemente equivalente a $\widehat{M} \setminus E$. Se M é uma superfície de Riemann, o gênero g de M e o número de pontos n ($n \geq 0$) no subconjunto E são determinados por M .*

Exemplo 4.1.2 O plano estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é uma superfície de Riemann do tipo finito, pois é uma superfície compacta e conformemente equivalente à esfera unitária menos o “polo norte” $S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$, pela projeção estereográfica.

Observação 4.1.3 Assim M é uma **superfície de Riemann do tipo finito** $(g; n; m)$, se for conformemente equivalente a $\widehat{M} - \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \cup (d_1, d_2, \dots, d_m)\}$, onde $\widehat{M}$ é uma superfície fechada de Riemann de gênero g , os p_i são pontos e os d_j são discos ($p_i \neq p_j, d_i \cap d_j = \emptyset$ para $i \neq j, p_i \notin d_j, n \geq 0, m \geq 0$). Removendo cada ponto p_j , $j = 1, \dots, n$, atribuímos um inteiro v_j , com $v_j = 2, 3, \dots, \infty$ e $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$. Então dizemos que M tem **assinatura** $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$.

Uma superfície deste tipo é preservada sob **equivalência conforme**.

Uma superfície M com assinatura $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$ é representada por um grupo fuchsiano G se:

1. G é um **grupo propriamente** descontínuo de **transformações de Möbius** deixando o disco unitário $\mathbb{D}^2$ fixo.
2. Se $\mathbb{D}_G^2$ denota $\mathbb{D}^2 - \{\text{pontos fixos de isometrias elípticas em } G\}$ então:
3. $\mathbb{D}^2/G$ é **conformemente equivalente** a $\widehat{M} - \{(p_r, \dots, p_n) \cup (d_1, d_2, \dots, d_m)\}$, onde $v_r = v_{r+1} = \dots = \infty$ e $\mathbb{D}_G^2/G$ é conformemente equivalente a $\widehat{M} - \{(p_1, \dots, p_n) \cup (d_1, d_2, \dots, d_m)\}$.
4. A aplicação $\pi_G : \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2/G$ é localmente bijetora na vizinhança de cada ponto de $\mathbb{D}_G^2$, e cada v_j é associado a um único inteiro para cada $p_1, \dots, p_{r-1}$.

De agora em diante, vamos considerar apenas superfícies de Riemann do tipo finito. Os seguintes teoremas clássicos são fundamentais para a teoria que estamos discutindo. E a demonstração dos mesmos, podem ser encontradas no artigo de Bers [7].

Teorema 4.1.4 Todos os grupos fuchsianos finitamente gerados representam superfícies do tipo finito.

Teorema 4.1.5 Existe um grupo fuchsiano finitamente gerado representando cada superfície do tipo finito, com uma assinatura, desde que $3g - 3 + n + m > 0$ e se $g = 0$, $m = 0$ e $n = 4$, então:

$$\sum_{j=1}^4 v_j > 8.$$

4.2 Polígonos de Fricke

Se $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$ é a assinatura da superfície M , e G é o grupo que representa M , dizemos que $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$ é a **assinatura** de G . Destacamos que a assinatura de G é preservada sob conjugação.

Seja G um grupo fuchsiano finitamente gerado com assinatura $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$ e suponha que R é o domínio fundamental de G . Assim, dizemos que R é chamado **domínio padrão fundamental** do grupo G se satisfaz as seguintes condições:

1. R é limitada por $4g + 2n + 2m$ **arcos de Jordan** em $\mathbb{D}^2$ e m arcos sobre a fronteira de $\mathbb{D}^2$, formando uma **curva de Jordan** orientada, onde o interior de R está sempre à esquerda.
2. As arestas de R estejam devidamente colocados em ordem:

$$a_1, b_1, a'_1, b'_1, a_2, b_2, a'_2, b'_2, \dots, a'_g, b'_g, c_1, c'_1, \dots, c_n, c'_n, d_1, e_1, d'_1, \dots, d_m, e_m, d'_m,$$

onde existem elementos **hiperbólicos** A_i, B_i e $D_j \in G$, $i = 1, 2, \dots, g$, $j = 1, 2, \dots, m$, tal que $A_i(a_i) = -a'_i$, $B_i(b'_i) = -b_i$ e $D_j(d_j) = -d'_j$ e elementos **elípticos** $C_k \in G$ de ordem v_k (se forem **parabólicos**, $v_k = \infty$), com $k = 1, 2, \dots, n$, tal que $C_k(c_k) = -c'_k$. De tal forma que estes elementos satisfaçam a seguinte relação:

$$D_m \dots D_1 C_n \dots C_1 B_g^{-1} A_g^{-1} B_g A_g \dots B_1^{-1} A_1^{-1} B_1 A_1 = I. \quad (4.1)$$

Observação 4.2.1 A notação AB significa que primeiro aplicamos B e depois aplicamos A . Os e_j , $j = 1, 2, \dots, m$ são arcos sobre o círculo unitário S^1 .

Sabe-se que os elementos de

$$S = \{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m\}$$

com a relação 4.1, geram o grupo G . Chamaremos S de **sequência padrão de geradores** de G . Dois domínios fundamentais são equivalentes se dão origem à mesma sequência padrão de geradores.

4.3 Teorema de Fricke

Consideremos S uma sequência padrão de geradores e p_0 um ponto em $\mathbb{D}^2$. Nosso intuito é obter uma curva poligonal fechada $\mathcal{P}(p_0; S)$, sem auto-intersecções, sendo a fronteira de um polígono de Fricke associada à sequência padrão de geradores S . Dado um $p_0 \in \mathbb{D}^2$, obtemos os seguintes pontos através dos elementos de S :

$$\begin{aligned} p_0^1 &= A_1^{-1} B_1^{-1}(p_0), \quad p_0^2 = A_1^{-1}(p_0), \quad p_0^3 = B_1^{-1}(p_0), \quad p_0^4 = p_1 = B_1^{-1} A_1^{-1}(p_0), \\ p_1^1 &= A_2^{-1} B_2 A_2(p_1), \quad p_1^2 = B_2 A_2(p_1), \quad p_1^3 = A_2(p_1), \quad p_1^4 = p_2 = B_2^{-1} A_2^{-1} B_2 A_2(p_1), \\ p_2^1 &= A_3^{-1} B_3 A_3(p_2), \quad p_2^2 = B_3 A_3(p_2), \quad p_2^3 = A_3(p_2), \quad p_2^4 = p_3 = B_3^{-1} A_3^{-1} B_3 A_3(p_2), \end{aligned}$$

Observação 4.3.1 Se p_0 é um ponto adequado, a soma dos ângulos dos vértices que compõe o **ciclo acidental** (isto é, o ciclo que contém todos os vértices que são imagens de p_0) é 2π .

Teorema 4.3.2 (Teorema de Fricke) Seja G um grupo fuchsiano finitamente gerado com assinatura $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$, e assumamos que $3g - 3 + n + m > 0$. Então, existem pontos adequados para qualquer tipo de sequência padrão de geradores S .

Observação 4.3.3 Fricke chamou os polígonos correspondentes para pontos adequados de **polígonos canônicos**. A prova do teorema 4.3.2 está contida na demonstração dos teoremas abaixo. Dizemos que $\mathcal{P}(p^*, S)$ é um **polígono canônico de Fricke pertencente a S** .

4.4 Teorema Principal, parte 1

Teorema 4.4.1 (Teorema Principal, parte 1) Seja G um grupo finitamente gerado do **primeiro tipo** com assinatura $(g; n; v_1, \dots, v_n)$ e assumamos que $g > 0$ e $3g - 3 + n > 0$. Dada qualquer sequência padrão de geradores $S = \{A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, C_1, \dots, C_n\}$ os eixos de A_1 e B_1 se cruzam, e seu ponto de interseção p^* é um ponto adequado.

Demonstração: Primeiro, obtemos uma construção de um polígono canônico de Fricke, para um determinado grupo G_0 , com assinatura estabelecida. O teorema segue então por um argumento de continuidade.

Inicialmente, consideremos o primeiro quadrante de $\mathbb{D}^2$. Sobre o eixo real positivo e imaginário erguemos segmentos perpendiculares sobre um parâmetro ρ .

Unimos os pontos finais destas perpendiculares por um arco circular concêntrico a $\mathbb{D}^2$. Em seguida, partimos este arco em $4(g-1) + 2n$ subarcos iguais. Rotulamos esta divisão em pontos sucessivos $p_1, p_2, \dots, p_{4(g-1)+2n+1}$.

Obtidos os pontos como acima, unimos p_1 a p_2 , p_2 a $p_3, \dots, p_{4(g-1)}$ a $p_{4(g-1)+1}$ por segmentos não-euclidianos de reta e desenhamos segmentos de reta da origem aos pontos $p_{4g-2}, p_{4g}, \dots, p_{4(g-1)+2n}$ (veja a figura 4.2).

Se $n > 0$, obtemos o ponto q_1 através do segmento de reta que passa pela origem e pelo ponto p_{4g-2} , onde ângulo formado por um segmento não-euclidiano unindo q_1 a $p_{4(g-1)+1}$ e este segmento de reta é π/v_1 , sendo o ângulo total nos vértices p_{4g-3}, p_{4g-2} e p_{4g-1} igual a $2\pi/v_1$. Repetimos esta construção para obter os pontos $q_2, \dots, q_n$. Se $v_j = \infty$, então q_j é um vértice ideal.

Observamos que a soma dos ângulos nos vértices acidentais, isto é, p_j , com $j = 1, \dots, 4(g-1) + 1, 4g-1, 4g+1, \dots, 4g+2n+1, 0$, $i\rho$ e ρ , é uma função contínua de ρ . Unimos p_{4g-3} a p_{4g-1} , p_{4g-1} a $p_{4g+1}, \dots, p_{4g+2n-1}$ a $p_{4g+2n+1}$ por segmentos não-euclidianos de reta. A soma dos ângulos internos deste polígono truncado tende a $3\pi/2$ quando ρ tende a 1.

O polígono original consiste no truncamento de n triângulos. Fazendo ρ tender a 1, todos os vértices dos triângulos tendem para a fronteira ideal do disco e portanto, a soma de seus ângulos internos tendem a $2\pi/v_j$. Quando ρ tende a zero, o polígono truncado é quase-euclidiano. Isto é, uma figura convexa com $4g + n$ arestas.

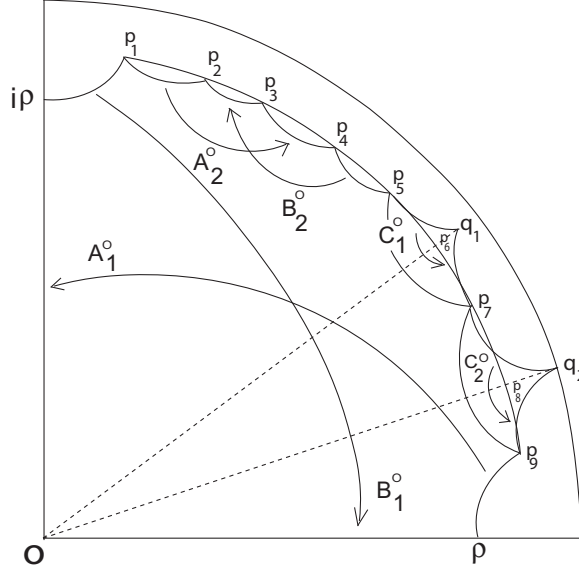


Figura 4.2: Região padrão fundamental, grupo G com assinatura $(2; 2; k, \infty; 0)$.

Uma vez que a soma dos ângulos internos de um polígono euclidiano é $(K - 2)\pi$, onde K é o número de arestas, a soma dos ângulos do polígono original não-euclidiano definitivamente excede 2π para ρ pequeno. Concluimos que para algum ρ a soma dos ângulos do polígono é exatamente 2π . Efetuando nossa construção para este ρ , obtemos um polígono R_0 satisfazendo todas as condições do teorema de Poincaré.

Portanto, o grupo G_0 gerado pela sequência S_0 de segmentos não-euclidianos indicado na figura 4.2 é fuchsiano com a assinatura desejada. Além disso, R_0 é um polígono de Fricke de G_0 pertencente a sequência padrão de geradores S_0 . Notamos que A_1^0 e B_1^0 são isometrias hiperbólicas cujos eixos conectam pontos do eixo real e imaginário respectivamente, de modo que R_0 satisfaz todas condições do teorema 4.4.1. ■

Lema 4.4.2 *Para qualquer grupo fuchsiano finitamente gerado G , com assinatura, existe uma região padrão fundamental R tal que cada arco limite é C^∞ e os ângulos nos vértices acidentais nunca são 0 ou π .*

4.5 Argumento de Continuidade

Voltemos à prova do teorema principal. Seja R um domínio padrão fundamental para um grupo G satisfazendo todas as condições do lema 4.4.2. Uma vez que G_0 e G possuem mesma assinatura, R_0 e R têm o mesmo número de arestas. Podemos definir uma aplicação contínua,

$$W : R_0 \longrightarrow R.$$

Definindo-a primeiro sobre os limites das regiões R_0 e R com respeito às identificações, e estendendo ao interior por quase-conformidade. Uma vez que as identificações sejam respeitadas, temos que para todo $A_0 \in S_0$ existe $A \in S$ tal que,

$$W(A_0(z)) = A(W(z)), \quad (4.2)$$

sobre a fronteira de R_0 . A aplicação $A_0 \rightarrow A$ é um isomorfismo de G_0 em G através do qual podemos estender W para o resto do disco unitário, tal que a equação (4.2) é válida. Assim W é um homeomorfismo de $\mathbb{D}^2$ sobre si mesmo e assim, quase-conforme no interior e sobre a fronteira de R_0 . Uma vez que é uma aplicação quase-conforme em todo o disco, podemos extendê-la para o disco fechado. Definindo

$$\mu(z) = \frac{W_{\bar{z}}}{W_z}, \quad (4.3)$$

observamos que $|\mu(z)| \leq k < 1$ em $\mathbb{D}^2$ e por Bers [7] temos que,

$$\mu(A(z))\overline{A'(z)} = \mu(z)A'(z) \quad \forall A \in G. \quad (4.4)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $W(0) = 0$ e $W(1) = 1$, pois se B é uma transformação de Möbius tal que $B(W(0)) = 0$ e $B(W(1)) = 1$, podemos trocar G por $B^{-1}GB$. Consideremos as funções $t\mu(z)$, tal que $0 \leq t \leq 1$ e definimos $W^{t\mu}$ como uma solução da equação de Beltrami $W_{\bar{z}} = t\mu W_z$, de forma que W aplica o disco unitário fechado sobre si mesmo, fixando os valores 0 e 1.

Observemos que $W^{t\mu}$ é quase-conforme por definição, e contínua em t . De fato, se $t = 0$, $W^{t\mu} = Id$, e se $t = 1$, $W^{t\mu} = W$. Por por Bers [7], $A^{t\mu} = (W^{t\mu})^{-1} \circ A \circ W^{t\mu}$, $\forall A \in G$ é uma transformação de Möbius e $S^{t\mu} = (W^{t\mu})^{-1} \circ S_0 \circ W^{t\mu}$ uma sequência padrão de geradores do grupo $G^{t\mu}$. Assim, $G^{t\mu}$ é um grupo fuchsiano se G_0 o for.

Suponhamos que p_t^* seja um ponto de interseção dos eixos de $A_1^{t\mu}$ e $B_1^{t\mu}$. Podemos ver que esses eixos sempre se cruzam, pois os pontos fixos de $A_1^{t\mu}$ e $B_1^{t\mu}$ se separam um do outro para $t = 0$, e uma vez que $W^{t\mu}$ é um homeomorfismo do disco fechado, os eixos estão sempre separados um do outro.

Definimos então $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}(p_t^*, S^{t\mu})$. Afirmamos que o conjunto dos t^s para cada ponto p_t^* adequado, é um conjunto não vazio, aberto e fechado, consistindo de todos os t^s , com $0 \leq t \leq 1$. O conjunto é não vazio pois contém $t = 0$ e $p_0 = p_0^*$ é um ponto adequado por construção. Suponhamos que $p_{t_0}^*$ seja um ponto adequado e $|t - t_0|$ pequeno. A curva $\mathcal{P}_t$ está muito próxima da curva $\mathcal{P}_{t_0}$ e uma vez que $\mathcal{P}_{t_0}$ é uma curva simples e estritamente convexa, $\mathcal{P}_t$ também é simples e estritamente convexa.

Como os elementos de $S^{t\mu}$ satisfazem a relação 4.1, a soma dos ângulos nos vértices acidentais é um múltiplo de 2π . Como $\mathcal{P}_t$ está muito próxima de $\mathcal{P}_{t_0}$, a soma de seus ângulos tende a 2π e portanto, exatamente 2π . Pelo teorema de Poincaré, $\mathcal{P}_t$ é uma região fundamental para $G^{t\mu}$ e portanto é um polígono de Fricke pertencente a $S^{t\mu}$.

Consideremos $t_j \rightarrow t$ e $p_{t_j}^*$ um ponto adequado $\forall j$. Então para N grande, $|p_{t_N}^* - p_t^*|$ é pequeno, sendo o limite de uma sequência de polígonos estritamente convexos, polígonos convexos ou um segmento de reta. Se o limite fosse um segmento de reta, os eixos de $A_1^{t\mu}$ e $B_1^{t\mu}$ seriam coincidentes. Isto é impossível, pois os pontos fixos de $A_1^{t\mu}$ e $B_1^{t\mu}$ estão separados um do outro.

Concluimos que o polígono limite é um polígono convexo e assim, um polígono fundamental para o grupo $G^{t\mu}$. Concluimos que p_t^* é um ponto adequado para todo t , onde $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 4.5.1 (Teorema Principal, parte 2) *Seja G um grupo fuchsiano finitamente gerado do segundo tipo com assinatura $(g; n; v_1, \dots, v_n; m)$, $g > 0$ e $3g - 3 + m + n > 0$. Dada uma sequência padrão de geradores, $S = \{A_1, B_1, \dots, D_m\}$, os eixos de A_1 e B_1 se cruzam. Seu ponto de interseção p^* é adequado e leva a um único polígono de Fricke estritamente convexo $\mathcal{P}(p^*, S)$. Chamamos este polígono também de polígono canônico de Fricke.*

Demonstração: A demonstração deste teorema, como o teorema 4.4.1, segue por continuidade. De forma análoga, erguemos perpendiculares sobre os eixos real e imaginário ao longo do parâmetro ρ , no primeiro quadrante e unimos os extremos das perpendiculares por um arco concêntrico a $\mathbb{D}^2$.

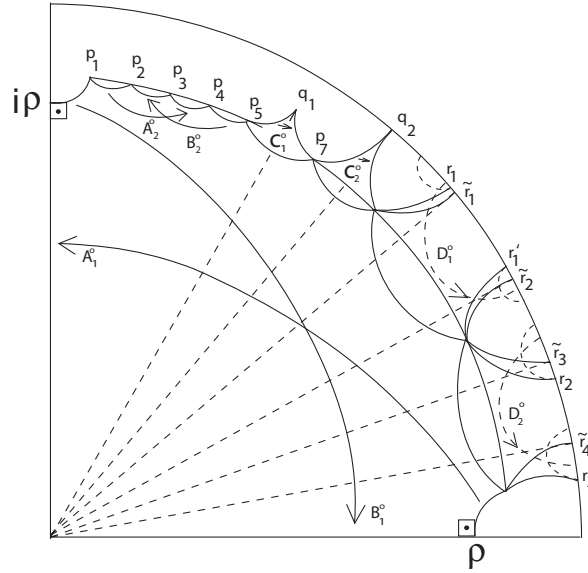


Figura 4.3: G possui assinatura $(2; 2; k, \infty; 2)$.

Dividimos este arco em $4(g-1) + 2n + 4m$ subarcs iguais e rotulamos as subdivisões em pontos $p_1, \dots, p_{4(g-1)+2n+4m+1}$. Encontramos os pontos $q_1, \dots, q_n$ como no teorema 4.4.1 e unimos por segmentos não-euclidianos de reta os pontos:

$$p_1 \text{ a } p_2, p_2 \text{ a } p_3, p_3, \dots, p_{4g-4} \text{ a } p_{4g-3}, p_{4g-3} \text{ a } q_1,$$

$$q_1 \text{ a } p_{4g-1}, p_{4g-1} \text{ a } q_2, q_2 \text{ a } p_{4g+1}, \dots, q_n \text{ a } p_{4g-4+2n}.$$

Desenhamos semi-retas da origem aos pontos $p_{4(g-1)+2n+2}, p_{4(g-1)+2n+4}, \dots, p_{4(g-1)+2n+4m}$ e denotemos os pontos finais destas semi-retas por $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{2m}$. E por último, unimos por segmentos não-euclidianos de reta os pontos (ver figura 4.3),

$$p_{4(g-1)+2n+1} \text{ a } \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 \text{ a } p_{4(g-1)+2n+5}, p_{4(g-1)+2n+5} \text{ a } \tilde{r}_3, \dots, \tilde{r}_{2m} \text{ a } p_{4(g-1)+2n+4m+1}.$$

Usaremos o mesmo argumento que foi utilizado antes para fixar o valor de ρ e assim aplicar o Teorema de Poincaré. Desta forma, obtemos um grupo G_0 gerado por uma sequência padrão de geradores $S_0 = \{A_1^0, B_1^0, \dots, C_1^0, \dots, D_1^0, \dots, D_1^m\}$, onde a região R_0 é um polígono de Fricke pertencente a S_0 .

Lembremos de que na definição de $P(p_0; S)$, fixamos os vértices não-parabólicos sobre a fronteira de $\mathbb{D}^2$ como pontos finais de círculos isométricos. Podemos alterar R_0 substituindo $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_{2m}$ por um conjunto de pares de pontos relacionados por $D_1, D_2, \dots, D_m$ e assim, obter um polígono de Fricke associado.

Portanto, afim de tornar R_0 um polígono canônico de Fricke trocamos $\tilde{r}_1, \tilde{r}_3, \dots, \tilde{r}_{2m-1}$ por pontos finais $r_1, r_2, \dots, r_m$ dos círculos isométricos de $D_1, D_2, \dots, D_m$, situados à esquerda de seus eixos. Em seguida, definimos: $r'_1 = D_1(r_1), \dots, r'_m = D_m(r_m)$. O polígono canônico é agora o polígono canônico exigido para o grupo G_0 . Todos os argumentos de continuidade seguem como no teorema 4.4.1. ■

Capítulo 5

Emparelhamentos para Polígonos $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$

“O que nos torna imediatamente felizes é a alegria do pensamento, pois essa boa qualidade se recompensa logo, por si mesma.” Arthur Schopenhauer

Neste capítulo obtemos todas as isometrias que emparelham as arestas dos polígonos relacionados aos ladrilhamentos de tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$ ¹, isto é, polígonos com $24\lambda + 4$ e $24\lambda - 12$ arestas e tendo em cada ciclo 4 vértices. Conseguimos também uma expressão geral para seus ciclos através das funções de emparelhamento e por último, usamos o algoritmo proposto por Linda Keen na página 51 para obter os polígonos canônicos de Fricke para tais grupos. Para este capítulo, utilizamos as seguintes referências [1], [15] e [19]. As figuras apresentadas nesta seção são reproduções da referência [19].

5.1 Emparelhamentos do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$

Nesta seção construímos um emparelhamento generalizado para um ladrilhamento de tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$, onde $\lambda \in \mathbb{N}$. Vimos na definição 3.3.13, que um emparelhamento de arestas de um polígono consiste de um conjunto de isometrias que relacionam as arestas de um polígono, duas a duas, a fim de obtermos superfícies compactas orientáveis.

Segundo Oliveira [19], as isometrias do ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$ geram um grupo fuchsiano $G_{\{24\lambda+4,4\}}$, tal que o quociente $\mathbb{D}^2/G_{\{24\lambda+4,4\}}$ é uma superfície compacta orientável.

Assim o grupo $G_{\{24\lambda+4,4\}}$ consiste de isometrias α_i, β_i e γ_1 que relacionam duas-a-duas as arestas (τ_i e τ_j) e os vértices (v_i e v_j), pelas isometrias. Para o ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$, vamos construir o emparelhamento como segue.

¹Estes foram gerados por João de Deus [19] e correspondem aos casos $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\eta - 12, 4\}$.

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_1(\tau_{3\lambda}) & = & \tau_{15\lambda+2} \\ \gamma_1(\tau_{6\lambda+1}) & = & \tau_{24\lambda+3} \\ \beta_1(\tau_{6\lambda}) & = & \tau_{6\lambda+2} \\ \beta_2(\tau_{24\lambda+4}) & = & \tau_{24\lambda+2}, \end{cases}$$

Para $\lambda \geq 1$ e $k = 0, \dots, (3\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_{2+2k}(\tau_{3\lambda+1+k}) & = & \tau_{15\lambda-1-3k} \\ \alpha_{3+2k}(\tau_{3\lambda-1-k}) & = & \tau_{15\lambda+5+3k}, \end{cases}$$

Para λ ímpar e $k = 0, \dots, \frac{3}{2}(\lambda - 1)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k}(\tau_{6\lambda+3+6k}) & = & \tau_{6\lambda+6+6k} \\ \beta_{4+4k}(\tau_{6\lambda+4+6k}) & = & \tau_{6\lambda+7+6k} \\ \beta_{5+4k}(\tau_{24\lambda+1-6k}) & = & \tau_{24\lambda-2-6k} \\ \beta_{6+4k}(\tau_{24\lambda-6k}) & = & \tau_{24\lambda-3-6k}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{1+6\lambda}(\tau_{15\lambda}) & = & \tau_{15\lambda+3} \\ \beta_{2+6\lambda}(\tau_{15\lambda+1}) & = & \tau_{15\lambda+4}, \end{cases}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k}(\tau_{6\lambda+3+6k}) & = & \tau_{6\lambda+6+6k} \\ \beta_{4+4k}(\tau_{6\lambda+4+6k}) & = & \tau_{6\lambda+7+6k} \\ \beta_{5+4k}(\tau_{24\lambda+1-6k}) & = & \tau_{24\lambda-2-6k} \\ \beta_{6+4k}(\tau_{24\lambda-6k}) & = & \tau_{24\lambda-3-6k}, \end{cases}$$

5.2 Ciclos de Vértices do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$

Nesta seção descrevemos os ciclos dos vértices para o emparelhamento de tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$. Na definição 3.3.16, vimos que um ciclo de vértices consiste de uma classe de equivalência de vértices congruentes.

Denotamos os conjuntos da forma C_{v_i} por ciclos de vértices para o ladrilhamento de tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$, onde cada v_i é o representante da classe de vértices congruentes. Observamos que cada ciclo de vértice tem comprimento 4, sendo o último elemento do ciclo a identidade.

Os vértices v_i são acidentais, ou seja, não são pontos fixos de isometrias elípticas. Tendo cada ciclo de vértice 4 elementos, o ângulo em cada vértice é $\pi/2$ e a soma dos ângulos para cada ciclo de vértice é 2π . Para o ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$, onde $\lambda \in \mathbb{N}$, vamos construir os ciclos de vértices como segue.

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$C_{v_1} = \{v_1, \alpha_{(6\lambda-1)}(v_1), \beta_6(\alpha_{(6\lambda-1)}(v_1)), \beta_5^{-1}(\beta_6(\alpha_{(6\lambda-1)}(v_1))),$$

$$\beta_2^{-1}(\beta_5^{-1}(\beta_6(\alpha_{(6\lambda-1)}(v_1))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda+1)}} = \{v_{(6\lambda+1)}, \beta_1(v_{(6\lambda+1)}), \gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda+1)})), \beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda+1)}))), \\ \gamma_1^{-1}(\beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda+1)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda)}} = \{v_{(6\lambda)}, \beta_1(v_{(6\lambda)}), \beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda)})), \beta_4^{-1}(\beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda)}))), \\ \alpha_{(6\lambda-2)}^{-1}(\beta_4^{-1}(\beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda)}))))\}.$$

Para λ par, consideremos:

$$C_{v_{(3\lambda)}} = \{v_{(3\lambda)}, \alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)}), \beta_{(6\lambda+2)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)})), \beta_{(6\lambda+1)}(\beta_{(6\lambda+2)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)}))), \\ \alpha_3^{-1}(\beta_{(6\lambda+1)}(\beta_{(6\lambda+2)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda+1)}} = \{v_{(3\lambda+1)}, \alpha_2(v_{(3\lambda+1)}), \beta_{(6\lambda-1)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)})), \beta_{(6\lambda)}((\beta_{(6\lambda-1)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)})))), \\ \alpha_1^{-1}(\beta_{(6\lambda)}((\beta_{(6\lambda-1)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)}))))\}.$$

Para λ par e $j = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 2)$, consideremos:

$$C_{v_{(2+2j)}} = \{v_{(2+2j)}, \alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}), \beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)})), \\ \beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}))), \\ \alpha_{(6\lambda-1-4j)}^{-1}(\beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3+2j)}} = \{v_{(3+2j)}, \alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}), \beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)})), \\ \beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}))), \\ \alpha_{(6\lambda-3-4j)}^{-1}(\beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-2-2j)}} = \{v_{(6\lambda-2-2j)}, \alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}), \beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)})), \\ \beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}))), \\ \alpha_{(6\lambda-6-4j)}^{-1}(\beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-1-2j)}} = \{v_{(6\lambda-1-2j)}, \alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}), \beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)})), \\ \beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}))), \\ \alpha_{(6\lambda-4-4j)}^{-1}(\beta_{(4+4j)}^{-1}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}))))\}.$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$C_{v_{(3\lambda-1)}} = \{v_{(3\lambda-1)}, \alpha_3(v_{(3\lambda-1)}), \beta_{(6\lambda)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-1)})), \beta_{(6\lambda-1)}(\beta_{(6\lambda)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-1)}))), \\ \alpha_5^{-1}(\beta_{(6\lambda-1)}(\beta_{(6\lambda)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-1)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda)}} = \{v_{(6\lambda-3)}, \alpha_1(v_{(6\lambda-3)}), \beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_1(v_{(6\lambda-3)})), \beta_{(6\lambda+2)}((\beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_1(v_{(6\lambda-3)})))), \\ \alpha_3^{-1}(\beta_{(6\lambda+2)}((\beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_1(v_{(6\lambda-3)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda+1)}} = \{v_{(3\lambda+1)}, \alpha_2(v_{(3\lambda+1)}), \beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)})), \beta_{(6\lambda+2)}^{-1}((\beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)})))), \\ \alpha_1^{-1}(\beta_{(6\lambda+2)}^{-1}((\beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_2(v_{(3\lambda+1)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda+2)}} = \{v_{(3\lambda+2)}, \alpha_4(v_{(3\lambda+2)}), \beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda+2)})), \beta_{(6\lambda-2)}(\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda+2)}))), \\ \alpha_2^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}(\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda+2)}))))\}.$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $j = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
C_{v_{(2+2j)}} &= \{v_{(2+2j)}, \alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}), \beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)})), \\
&\beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}))), \\
&\alpha_{(6\lambda-1-4j)}^{-1}(\beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3-4j)}(v_{(2+2j)}))))\}. \\
C_{v_{(3+2j)}} &= \{v_{(3+2j)}, \alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}), \beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)})), \\
&\beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}))), \\
&\alpha_{(6\lambda-3-4j)}^{-1}(\beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-5-4j)}(v_{(3+2j)}))))\}. \\
C_{v_{(6\lambda-1-2j)}} &= \{v_{(6\lambda-1-2j)}, \alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}), \beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)})), \\
&\beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}))), \\
&\alpha_{(6\lambda-4-4j)}^{-1}(\beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2-4j)}(v_{(6\lambda-1-2j)}))))\}. \\
C_{v_{(6\lambda-2-2j)}} &= \{v_{(6\lambda-2-2j)}, \alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}), \beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)})), \\
&\beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}))), \\
&\alpha_{(6\lambda-6-4j)}^{-1}(\beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-4-4j)}(v_{(6\lambda-2-2j)}))))\}.
\end{aligned}$$

Segue agora a descrição de todos os ciclos, onde exibimos apenas seus vértices, diferente da construção que fizemos acima, onde os vértices de cada ciclo são descritos em termos de isometrias do grupo $G_{\{24\lambda+4,4\}}$. Para o ladrilhamento $\{24\lambda+4,4\}$, vamos construir os ciclos de vértices como segue.

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$C_{v_{(6\lambda+1)}} = \{v_{(6\lambda+1)}, v_{(6\lambda+2)}, v_{(24\lambda+3)}, v_{(24\lambda+4)}\}.$$

Para $k = 0, \dots, (3\lambda - 1)$, consideremos:

$$C_{v_{(1+2k)}} = \{v_{(1+2k)}, v_{(24\lambda-6k)}, v_{(24\lambda-2-6k)}, v_{(24\lambda+2-6k)}\}.$$

$$C_{v_{(2+2k)}} = \{v_{(2+2k)}, v_{(24\lambda-3-6k)}, v_{(24\lambda+1-6k)}, v_{(24\lambda-1-6k)}\}.$$

5.3 Polígono Canônico de Fricke do Ladrilhamento $\{24\lambda+4,4\}$

A partir do modelo de Linda Keen (ver página 51), construímos um algoritmo que gera o polígono de Fricke relacionado ao grupo $G_{\{24\lambda+4,4\}}$. Como vimos na generalização dos ciclos, cada elemento do ciclo é descrito em termos de isometrias do grupo. Assim, unimos os vértices obtidos por geodésicas, de tal forma que obtemos uma região convexa em $\mathbb{D}^2$, relacionada ao grupo $G_{\{24\lambda+4,4\}}$.

Vamos construir o algoritmo para obtermos os polígonos de Fricke relacionados aos ladrilhamentos de tipo $\{24\lambda+4,4\}$ como segue.

Para λ par e $\lambda \geq 2$, unimos os pontos:

$$\begin{aligned}
v_{(1)} &= \beta_{(2)}^{-1}(\beta_{(5)}^{-1}(\beta_{(6)}(\alpha_{(6\lambda-1)}(v_{(1)})))) \quad \text{a} \quad v_{(2)} = \alpha_{(6\lambda-1)}^{-1}(\beta_{(5)}(\beta_{(6)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3)}(v_{(2)})))), \\
v_{(2)} &\quad \text{a},
\end{aligned}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-3-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}^{-1}(\beta_{(10+4k)}(\alpha_{(6\lambda-5-4k)}(v_{(3+2k)}))))), \\
v_{(3+2k)} \text{ a } v_{(4+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-5-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}(\beta_{(10+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4k)}(v_{(4+2k)}))))), \\
v_{(4+2k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3\lambda+1)} &= \alpha_{(1)}^{-1}(\beta_{(6\lambda)}(\beta_{(6\lambda-1)}^{-1}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda+1)})))) \text{ a,} \\
v_{(3\lambda+2)} &= \alpha_{(2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-1)}(\alpha_{(4)}(v_{(3\lambda+2)}))))), \\
v_{(3\lambda+2)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 3)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3\lambda+3+2k)} &= \alpha_{(4+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4-4k)}(\beta_{(6\lambda-5-4k)}^{-1}(\alpha_{(6+4k)}(v_{(3\lambda+3+2k)}))))), \\
v_{(3\lambda+3+2k)} \text{ a } v_{(3\lambda+4+2k)} &= \alpha_{(6+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-5-4k)}(\alpha_{(8+4k)}(v_{(3\lambda+4+2k)}))))), \\
v_{(3\lambda+4+2k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(6\lambda-1)} &= \alpha_{(6\lambda-4)}^{-1}(\beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)})))) \text{ a } v_{(6\lambda)} = \alpha_{(6\lambda-2)}^{-1}(\beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)}))))), \\
v_{(6\lambda)} \text{ a } v_{(6\lambda+1)} &= \gamma_{(1)}^{-1}(\beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}))))), \quad v_{(6\lambda+1)} \text{ a } v_{(6\lambda+2)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}), \\
v_{(6\lambda+2)} \text{ a } v_{(6\lambda+3)} &= \beta_{(1)}(v_{(6\lambda)}), \quad v_{(6\lambda+3)} \text{ a } v_{(6\lambda+4)} = \beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)})), \\
v_{(6\lambda+4)} \text{ a } v_{(6\lambda+5)} &= \beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)}))), \quad v_{(6\lambda+5)} \text{ a } v_{(6\lambda+6)} = \alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)}), \\
v_{(6\lambda+6)} \text{ a } v_{(6\lambda+7)} &= \beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)})), \quad v_{(6\lambda+7)} \text{ a } v_{(6\lambda+8)} = \beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)}))), \\
v_{(6\lambda+8)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(6\lambda+9+6k)} &= \alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)}) \text{ a } v_{(6\lambda+10+6k)} = \beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)})), \\
v_{(6\lambda+10+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+11+6k)} &= \beta_{(8+4k)}^{-1}(\beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)}))), \\
v_{(6\lambda+11+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+12+6k)} &= \alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)}), \\
v_{(6\lambda+12+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+13+6k)} &= \beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)})), \\
v_{(6\lambda+13+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+14+6k)} &= \beta_{(8+4k)}(\beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)}))), \\
v_{(6\lambda+14+6k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 1)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(15\lambda+3+6k)} &= \alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2k)}) \text{ a } v_{(15\lambda+4+6k)} = \beta_{(6\lambda+2-4k)}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)})), \\
v_{(15\lambda+4+6k)} \text{ a } v_{(15\lambda+5+6k)} &= \beta_{(6\lambda+1-4k)}(\beta_{(6\lambda+2-4k)}^{-1}(\alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2k)}))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{(15\lambda+5+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+6+6k)} &= \alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)}), \\
v_{(15\lambda+6+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+7+6k)} &= \beta_{(6\lambda+2-4k)}^{-1}(\alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2k)})), \\
v_{(15\lambda+7+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+8+6k)} &= \beta_{(6\lambda+1-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda+2-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)}))), \\
v_{(15\lambda+8+6k)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ par, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(24\lambda+3)} &= \gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)})) \quad \text{a} \quad v_{(24\lambda+4)} = \beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}))), \\
v_{(24\lambda+4)} \quad \text{a} \quad v_{(1)}. &
\end{aligned}$$

■

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, unimos os pontos:

$$\begin{aligned}
v_{(1)} &= \beta_{(2)}^{-1}(\beta_{(5)}^{-1}(\beta_{(6)}(\alpha_{(6\lambda-1)}(v_{(1)})))) \quad \text{a} \quad v_{(2)} = \alpha_{(6\lambda-1)}^{-1}(\beta_{(5)}(\beta_{(6)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-3)}(v_{(2)})))), \\
v_{(2)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-3-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}^{-1}(\beta_{(10+4k)}(\alpha_{(6\lambda-5-4k)}(v_{(3+2k)})))), \\
v_{(3+2k)} \quad \text{a} \quad v_{(4+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-5-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}(\beta_{(10+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4k)}(v_{(4+2k)})))), \\
v_{(4+2k)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3\lambda)} &= \alpha_{(3)}^{-1}(\beta_{(6\lambda+2)}(\beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)})))) \quad \text{a}, \\
v_{(3\lambda+1)} &= \alpha_{(1)}^{-1}(\beta_{(6\lambda+2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda+1)}))))), \\
v_{(3\lambda+1)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3\lambda+2+2k)} &= \alpha_{(2+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-2-4k)}(\beta_{(6\lambda-3-4k)}^{-1}(\alpha_{(4+4k)}(v_{(3\lambda+2+2k)}))))), \\
v_{(3\lambda+2+2k)} \quad \text{a} \quad v_{(3\lambda+3+2k)} &= \alpha_{(4+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-2-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-3-4k)}(\alpha_{(6+4k)}(v_{(3\lambda+3+2k)}))))), \\
v_{(3\lambda+3+2k)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(6\lambda-1)} &= \alpha_{(6\lambda-4)}^{-1}(\beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)})))) \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda)} = \alpha_{(6\lambda-2)}^{-1}(\beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)})))), \\
v_{(6\lambda)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+1)} &= \gamma_{(1)}^{-1}(\beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)})))), \quad v_{(6\lambda+1)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+2)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}), \\
v_{(6\lambda+2)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+3)} &= \beta_{(1)}(v_{(6\lambda)}), \quad v_{(6\lambda+3)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+4)} = \beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)})), \\
v_{(6\lambda+4)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+5)} &= \beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)}))), \quad v_{(6\lambda+5)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+6)} = \alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)}), \\
v_{(6\lambda+6)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+7)} &= \beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda)})), \quad v_{(6\lambda+7)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+8)} = \beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-2)}(v_{(6\lambda-1)}))),
\end{aligned}$$

$$v_{(6\lambda+8)} \text{ a,}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{aligned} v_{(6\lambda+9+6k)} &= \alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)}) \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+10+6k)} = \beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)})), \\ v_{(6\lambda+10+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+11+6k)} &= \beta_{(8+4k)}^{-1}(\beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)}))), \\ v_{(6\lambda+11+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+12+6k)} &= \alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)}), \\ v_{(6\lambda+12+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+13+6k)} &= \beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-4-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)})), \\ v_{(6\lambda+13+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+14+6k)} &= \beta_{(8+4k)}(\beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4k)}(v_{(6\lambda-3-2k)}))), \\ v_{(6\lambda+14+6k)} \quad \text{a,} \end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{aligned} v_{(15\lambda)} &= \alpha_{(2)}(v_{(3\lambda+1)}) \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+1)} = \beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)})), \\ v_{(15\lambda+1)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+2)} &= \beta_{(6\lambda+2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda+1)}))), \\ v_{(15\lambda+2)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+3)} &= \alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)}), \quad v_{(15\lambda+3)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+4)} = \beta_{(6\lambda+1)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda+1)})), \\ v_{(15\lambda+4)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+5)} &= \beta_{(6\lambda+2)}(\beta_{(6\lambda+1)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda)}))), \\ v_{(15\lambda+5)} \quad \text{a,} \end{aligned}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 1$ e $k = 0, \dots, \frac{3}{2}(\lambda - 1)$, consideremos:

$$\begin{aligned} v_{(15\lambda+6+6k)} &= \alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)}) \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+7+6k)} = \beta_{(6\lambda-4k)}(\alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)})), \\ v_{(15\lambda+7+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+8+6k)} &= \beta_{(6\lambda-1-4k)}(\beta_{(6\lambda-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)}))), \\ v_{(15\lambda+8+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+9+6k)} &= \alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)}), \\ v_{(15\lambda+9+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+10+6k)} &= \beta_{(6\lambda-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-1-2k)})), \\ v_{(15\lambda+10+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+11+6k)} &= \beta_{(6\lambda-1-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4k)}(\alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)}))), \\ v_{(15\lambda+11+6k)} \quad \text{a,} \end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{aligned} v_{(24\lambda+3)} &= \gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)})) \quad \text{a} \quad v_{(24\lambda+4)} = \beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}))) \\ v_{(24\lambda+4)} \quad \text{a} \quad v_{(1)}. \end{aligned}$$

■

5.4 Matrizes do Ladrilhamento $\{24\lambda + 4, 4\}$

Nesta seção exibimos todas as isometrias do grupo fuchsiano $G_{\{24\lambda+4, 4\}}$. Inicialmente, precisamos obter uma isometria α_1 para obtermos todas as outras isometrias do grupo. Por Edson Agustini [1], todas as outras isometrias do grupo $G_{\{24\lambda+4, 4\}}$ são

obtidas por conjugação com transformações elípticas:

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\longmapsto e^{i\pi \frac{(2k+1)}{24\lambda+4}} z \end{aligned} \quad , \quad (5.1)$$

onde $\lambda \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$ e $k = 0, \dots, 24\lambda + 3$.

Para obtermos a matriz de α_1 , fixamos duas arestas do polígono, a saber: $\tau_{3\lambda}$ e $\tau_{15\lambda+2}$, tal que $\alpha_1(\tau_{3\lambda}) = \tau_{15\lambda+2}$. Primeiramente vamos obter o caso geral, ou seja, o emparelhamento para duas arestas τ_{j_1} e τ_{j_2} quaisquer.

Os polígonos relacionados ao grupo $G_{\{24\lambda+4, 4\}}$ possuem $24\lambda + 4$ arestas. Assim os polígono são divididos (veja os polígonos na seção 5.9) em $24\lambda + 4$ triângulos isósceles, tendo cada triângulo na origem do disco $\mathbb{D}^2$ um ângulo $2\pi/(24\lambda + 4)$. Cada triângulo possui uma aresta ao longo de um círculo isométrico.

Desta forma os centros euclidianos dos círculos isométricos, que obtivemos através do desenvolvimento dado por Edson Agustini [1], são dados por:

$$C_{\tau_{j_1}} = e^{i\pi \frac{(2j_1+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}, \quad (5.2)$$

$$C_{\tau_{j_2}} = e^{i\pi \frac{(2j_2+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}, \quad (5.3)$$

Consideramos uma isometria hiperbólica em $\mathbb{D}^2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\longmapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

tal que $a, c \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$, que emparelha as arestas τ_{j_1} e τ_{j_2} do polígono. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1} : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\longmapsto \frac{\bar{a}z - \bar{c}}{-cz + a}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Os círculos isométricos de α_1 e α_1^{-1} são, respectivamente:

$$\Gamma(\alpha_1) = \left\{ z \in \mathbb{D}^2; \left| z + \frac{\bar{a}}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\} \quad \text{e} \quad \Gamma(\alpha_1^{-1}) = \left\{ z \in \mathbb{D}^2; \left| z - \frac{a}{c} \right| = \frac{1}{|c|} \right\}, \quad (5.6)$$

onde $c \neq 0$. Os centros dos círculos isométricos de α_1 e α_1^{-1} são, respectivamente $-\frac{\bar{a}}{c}$ e $\frac{a}{c}$. Desta forma, pelas equações (5.2) e (5.3) acima, obtemos:

$$-\frac{\bar{a}}{c} = e^{i\pi \frac{(2j_1+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}, \quad (5.7)$$

$$\frac{a}{c} = e^{i\pi \frac{(2j_2+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}, \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{|c|} = \frac{\tan(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{\sqrt{2 + 2\sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}}, \quad (5.9)$$

Pelas equações (5.7) e (5.8), temos:

$$c = \frac{-\bar{a}}{e^{i\pi \frac{(2j_1+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}}, \quad (5.10)$$

$$c = \frac{a}{e^{i\pi \frac{(2j_2+1)}{24\lambda+4}} \sqrt{\frac{1 + \sec(\frac{\pi}{12\lambda+2})}{2}}}, \quad (5.11)$$

E através das expressões (5.10) e (5.11), obtemos a seguinte relação:

$$a = -\bar{a} e^{i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{24\lambda+4}}. \quad (5.12)$$

Como $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$ então,

$$|c|^2 = |a|^2 - 1. \quad (5.13)$$

Por (5.9) e (5.13), temos:

$$a\bar{a} = \frac{(1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2}))^2}{\sin^2(\frac{\pi}{12\lambda+2})}. \quad (5.14)$$

E pelas equações (5.12) e (5.14), obtemos:

$$a = -i \frac{(1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2}))}{\sin(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{48\lambda+8}}. \quad (5.15)$$

Consequentemente, por (5.11) e (5.15), resulta que:

$$c = -i \frac{\sqrt{2(1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})) \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})}}{\sin(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi \frac{2(j_1+j_2+1)}{48\lambda+8}}. \quad (5.16)$$

Desta forma, pelos itens (5.11) e (5.16), a transformação hiperbólica que emparelha as arestas τ_{j_1} e τ_{j_2} , no sentido anti-horário a partir do eixo real positivo é:

$$h(z) = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{48\lambda+8}} z - \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi \frac{2(j_1+j_2+1)}{48\lambda+8}}}{\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi \frac{2(j_1+j_2+1)}{48\lambda+8}} z - \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{48\lambda+8}}}, \quad (5.17)$$

Voltando ao caso particular, queremos obter a isometria α_1 , que emparelha as arestas $\tau_{3\lambda}$ e $\tau_{15\lambda+2}$, basta tomar $j_1 = 3\lambda$ e $j_2 = 15\lambda + 2$ na expressão acima, e assim, simplificando, obtemos:

$$\alpha_1(z) = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi \frac{1}{2}} z - \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi \frac{3}{4}}}{\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi \frac{3}{4}} z - \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi \frac{1}{2}}}. \quad (5.18)$$

A matriz de α_1 pode ser escrita também como:

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi(\frac{1}{2})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{i\pi(\frac{3}{4})} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi(\frac{3}{4})} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda+2})} e^{-i\pi(\frac{1}{2})} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Segue abaixo a descrição de todas as isometrias geradoras do grupo $G_{\{24\lambda+4, 4\}}$, onde $\lambda \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{N}$. Observe que obtemos todas as outras isometrias por conjugação com isometrias elípticas (5.1). O raciocínio utilizado aqui é o mesmo que usamos no exemplo 3.4.14, para obtermos as isometrias do grupo G de gênero $g = 2$.

Para o ladrilhamento $\{24\lambda+4, 4\}$, obtemos as isometrias do grupo $G_{\{24\lambda+4, 4\}}$ como segue.

Para $\lambda \geq 1$ e $k = 0, \dots, (3\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_{2(k+1)} &= \rho_{-3(k+1)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(k+1)} \\ \alpha_{3+2k} &= \rho_{3(k+1)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(k+1)}, \end{cases}$$

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \rho_{9\lambda+1} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+1)} \\ \beta_1 &= \rho_{-9\lambda} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-3\lambda} \\ \beta_2 &= \rho_{9\lambda} \circ \alpha_1 \circ \rho_{3\lambda}, \end{cases}$$

Para λ ímpar e $k = 0, \dots, \frac{3}{2}(\lambda - 1)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k} &= \rho_{-(9\lambda-4-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+3+6k)} \\ \beta_{4+4k} &= \rho_{-(9\lambda-5-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+4+6k)} \\ \beta_{5+4k} &= \rho_{(9\lambda-4-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+3+6k)} \\ \beta_{6+4k} &= \rho_{(9\lambda-5-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+4+6k)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{6\lambda+1} &= \rho_1 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-12\lambda} \\ \beta_{6\lambda+2} &= \rho_2 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(12\lambda+1)}, \end{cases}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k} &= \rho_{-(9\lambda-4-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+3+6k)} \\ \beta_{4+4k} &= \rho_{-(9\lambda-5-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+4+6k)} \\ \beta_{5+4k} &= \rho_{(9\lambda-4-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+3+6k)} \\ \beta_{6+4k} &= \rho_{(9\lambda-5-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+4+6k)}, \end{cases}$$

5.5 Emparelhamentos do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$

Nesta seção construiremos o emparelhamento generalizado para o ladrilhamento de tipo $\{24\lambda - 12, 4\}$. Aqui também relacionamos as arestas e os vértices dos polígonos

através das isometrias α_i, β_i e γ_1 , de tal forma que obtemos uma superfície compacta orientável $\mathbb{D}^2/G_{\{24\lambda-12,4\}}$. O raciocínio aqui empregado é o mesmo que utilizamos na seção 5.1. Para o ladrilhamento $\{24\lambda-12,4\}$, onde $\lambda \in \mathbb{N}$, vamos construir o emparelhamento como segue.

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_1(\tau_{3\lambda-2}) &= \tau_{15\lambda-8} \\ \gamma_1(\tau_{6\lambda-3}) &= \tau_{24\lambda-13} \\ \beta_1(\tau_{6\lambda-4}) &= \tau_{6\lambda-2} \\ \beta_2(\tau_{24\lambda-12}) &= \tau_{24\lambda-14}, \end{cases}$$

Para $k = 0, \dots, (3\lambda-4)$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_{2+2k}(\tau_{3\lambda-1+k}) &= \tau_{15\lambda-11-3k} \\ \alpha_{3+2k}(\tau_{3\lambda-3-k}) &= \tau_{15\lambda-5+3k}, \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{6\lambda-3}(\tau_{15\lambda-10}) &= \tau_{15\lambda-7} \\ \beta_{6\lambda-2}(\tau_{15\lambda-9}) &= \tau_{15\lambda-6}, \end{cases}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda-5)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k}(\tau_{6\lambda-1+6k}) &= \tau_{6\lambda+2+6k} \\ \beta_{4+4k}(\tau_{6\lambda+6k}) &= \tau_{6\lambda+3+6k} \\ \beta_{5+4k}(\tau_{24\lambda-15-6k}) &= \tau_{24\lambda-18-6k} \\ \beta_{6+4k}(\tau_{24\lambda-16-6k}) &= \tau_{24\lambda-19-6k}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{6\lambda-3}(\tau_{15\lambda-10}) &= \tau_{15\lambda-7} \\ \beta_{6\lambda-2}(\tau_{15\lambda-9}) &= \tau_{15\lambda-6}, \end{cases}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda-2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k}(\tau_{6\lambda-1+6k}) &= \tau_{6\lambda+2+6k} \\ \beta_{4+4k}(\tau_{6\lambda+6k}) &= \tau_{6\lambda+3+6k} \\ \beta_{5+4k}(\tau_{24\lambda-15-6k}) &= \tau_{24\lambda-18-6k} \\ \beta_{6+4k}(\tau_{24\lambda-16-6k}) &= \tau_{24\lambda-19-6k}, \end{cases}$$

5.6 Ciclos de Vértices do Ladrilhamento $\{24\lambda-12,4\}$

Segue abaixo a descrição de todos os ciclos de vértices para o ladrilhamento $\{24\lambda-12,4\}$, onde $\lambda \in \mathbb{N}$. Aqui cada ciclo de vértices possuem 4 elementos e os ângulos em cada vértice igual a $\pi/2$. A construção aqui é análoga ao ladrilhamento $\{24\lambda+4,4\}$. Para o ladrilhamento $\{24\lambda-12,4\}$, vamos construir os ciclos de vértices como segue.

Para $\lambda = 1$, consideremos:

$$C_{v_1} = \{v_1, \alpha_1(v_1), \beta_3^{-1}(\alpha_1(v_1)), \beta_4(\beta_3^{-1}(\alpha_1(v_1))), \beta_2^{-1}(\beta_4(\beta_3^{-1}(\alpha_1(v_1))))\}.$$

$$C_{v_3} = \{v_3, \beta_1(v_3), \gamma_1(\beta_1(v_3)), \beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_3))), \gamma_1^{-1}(\beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_3))))\}.$$

Para $\lambda \geq 2$, consideremos:

$$C_{v_1} = \{v_1, \alpha_{(6\lambda-5)}(v_1), \beta_6(\alpha_{(6\lambda-5)}(v_1)), \beta_5^{-1}(\beta_6(\alpha_{(6\lambda-5)}(v_1))), \beta_2^{-1}(\beta_5^{-1}(\beta_6(\alpha_{(6\lambda-5)}(v_1))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-3)}} = \{v_{(6\lambda-3)}, \beta_1(v_{(6\lambda-3)}), \gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda-3)})), \beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda-3)}))), \gamma_1^{-1}(\beta_2^{-1}(\gamma_1(\beta_1(v_{(6\lambda-3)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-4)}} = \{v_{(6\lambda-4)}, \beta_1(v_{(6\lambda-4)}), \beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda-4)})), \beta_4^{-1}(\beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda-4)}))), \alpha_{(6\lambda-6)}^{-1}(\beta_4^{-1}(\beta_3(\beta_1(v_{(6\lambda-4)}))))\}.$$

Para λ par, consideremos:

$$C_{v_{(3\lambda-2)}} = \{v_{(3\lambda-2)}, \alpha_1(v_{(3\lambda-2)}), \beta_{(6\lambda-2)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)})), \beta_{(6\lambda-3)}(\beta_{(6\lambda-2)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)}))), \alpha_3^{-1}(\beta_{(6\lambda-3)}(\beta_{(6\lambda-2)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda-1)}} = \{v_{(3\lambda-1)}, \alpha_2(v_{(3\lambda-1)}), \beta_{(6\lambda-5)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)})), \beta_{(6\lambda-4)}((\beta_{(6\lambda-5)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)})))), \alpha_1^{-1}(\beta_{(6\lambda-4)}((\beta_{(6\lambda-5)}^{-1}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)}))))\}.$$

Para λ par e $j = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 3)$, consideremos:

$$C_{v_{(2+2j)}} = \{v_{(2+2j)}, \alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}), \beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)})), \beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}))), \alpha_{(6\lambda-5-4j)}^{-1}(\beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3+2j)}} = \{v_{(3+2j)}, \alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}), \beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)})), \beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}))), \alpha_{(6\lambda-7-4j)}^{-1}(\beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-6-2j)}} = \{v_{(6\lambda-6-2j)}, \alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}), \beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)})), \beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}))), \alpha_{(6\lambda-10-4j)}^{-1}(\beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-5-2j)}} = \{v_{(6\lambda-5-2j)}, \alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}), \beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)})), \beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}))), \alpha_{(6\lambda-8-4j)}^{-1}(\beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}))))\}.$$

Para $\lambda = 1$, consideremos:

$$C_{v_2} = \{v_2, \alpha_1(v_2), \beta_4(\alpha_1(v_2)), \beta_3^{-1}(\beta_4(\alpha_1(v_2))), \beta_1^{-1}(\beta_3^{-1}(\beta_4(\alpha_1(v_2))))\}.$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$C_{v_{(3\lambda-3)}} = \{v_{(3\lambda-3)}, \alpha_3(v_{(3\lambda-3)}), \beta_{(6\lambda-4)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-3)})), \beta_{(6\lambda-5)}(\beta_{(6\lambda-4)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-3)}))), \alpha_5^{-1}(\beta_{(6\lambda-5)}(\beta_{(6\lambda-4)}^{-1}(\alpha_3(v_{(3\lambda-3)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda-2)}} = \{v_{(3\lambda-2)}, \alpha_1(v_{(3\lambda-2)}), \beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)})), \beta_{(6\lambda-2)}((\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)})))), \alpha_1^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}((\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)}))))\}.$$

$$\alpha_3^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}((\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_1(v_{(3\lambda-2)}))))).$$

$$C_{v_{(3\lambda-1)}} = \{v_{(3\lambda-1)}, \alpha_2(v_{(3\lambda-1)}), \beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)})), \beta_{(6\lambda-2)}^{-1}((\beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)})))), \alpha_1^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}^{-1}((\beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_2(v_{(3\lambda-1)})))))\}.$$

$$C_{v_{(3\lambda)}} = \{v_{(3\lambda)}, \alpha_4(v_{(3\lambda)}), \beta_{(6\lambda-7)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda)})), \beta_{(6\lambda-6)}(\beta_{(6\lambda-7)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda)}))), \alpha_2^{-1}(\beta_{(6\lambda-6)}(\beta_{(6\lambda-7)}^{-1}(\alpha_4(v_{(3\lambda)}))))\}.$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $j = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 7)$, consideremos:

$$C_{v_{(2+2j)}} = \{v_{(2+2j)}, \alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}), \beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)})), \beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}))), \alpha_{(6\lambda-5-4j)}^{-1}(\beta_{(5+4j)}(\beta_{(6+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7-4j)}(v_{(2+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(3+2j)}} = \{v_{(3+2j)}, \alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}), \beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)})), \beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}))), \alpha_{(6\lambda-7-4j)}^{-1}(\beta_{(9+4j)}^{-1}(\beta_{(10+4j)}(\alpha_{(6\lambda-9-4j)}(v_{(3+2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-6-2j)}} = \{v_{(6\lambda-6-2j)}, \alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}), \beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)})), \beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}))), \alpha_{(6\lambda-10-4j)}^{-1}(\beta_{(8+4j)}^{-1}(\beta_{(7+4j)}(\alpha_{(6\lambda-8-4j)}(v_{(6\lambda-6-2j)}))))\}.$$

$$C_{v_{(6\lambda-5-2j)}} = \{v_{(6\lambda-5-2j)}, \alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}), \beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)})), \beta_{(4+4j)}(\beta_{(3+4j)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}))), \alpha_{(6\lambda-8-4j)}^{-1}(\beta_{(4+4j)}^{-1}(\beta_{(3+4j)}(\alpha_{(6\lambda-6-4j)}(v_{(6\lambda-5-2j)}))))\}.$$

Segue agora a descrição de todos os ciclos, onde exibimos apenas seus vértices, diferente da construção que fizemos acima, onde os vértices de cada ciclo são descritos em termos de isometrias do grupo $G_{\{24\lambda-12,4\}}$. Para o ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$, vamos construir os ciclos de vértices como segue.

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$C_{v_{(6\lambda-3)}} = \{v_{(6\lambda-3)}, v_{(6\lambda-2)}, v_{(24\lambda-13)}, v_{(24\lambda-12)}\}.$$

Para $k = 0, \dots, (3\lambda - 3)$, consideremos:

$$C_{v_{(1+2k)}} = \{v_{(1+2k)}, v_{(24\lambda-16-6k)}, v_{(24\lambda-18-6k)}, v_{(24\lambda-14-6k)}\}.$$

$$C_{v_{(2+2k)}} = \{v_{(2+2k)}, v_{(24\lambda-17-6k)}, v_{(24\lambda-15-6k)}, v_{(24\lambda-19-6k)}\}.$$

5.7 Polígono Canônico de Fricke do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$

A partir do modelo de Linda Keen (ver página 51), construímos também um algoritmo que gera o polígono de Fricke relacionado ao grupo $G_{\{24\lambda-12,4\}}$. Como vimos na generalização dos ciclos, cada elemento do ciclo é descrito em termos de isometrias do grupo. Assim, unimos os vértices obtidos por geodésicas, de tal forma que obtemos uma região convexa em $\mathbb{D}^2$, relacionada ao grupo $G_{\{24\lambda-12,4\}}$.

Vamos construir o algoritmo para obtermos os polígonos de Fricke relacionados aos ladrilhamentos de tipo $\{24\lambda - 12, 4\}$, onde $\lambda \in \mathbb{N}$, como segue.

Para λ par e $\lambda \geq 2$, unimos os pontos:

$$v_{(1)} = \beta_{(2)}^{-1}(\beta_{(5)}^{-1}(\beta_{(6)}(\alpha_{(6\lambda-5)}(v_{(1)})))) \quad \text{a} \quad v_{(2)} = \alpha_{(6\lambda-5)}^{-1}(\beta_{(5)}(\beta_{(6)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7)}(v_{(2)}))))),$$

$$v_{(2)} \quad \text{a},$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 3)$, consideremos:

$$v_{(3+2k)} = \alpha_{(6\lambda-7-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}^{-1}(\beta_{(10+4k)}(\alpha_{(6\lambda-9-4k)}(v_{(3+2k)})))) \quad \text{a},$$

$$v_{(4+2k)} = \alpha_{(6\lambda-9-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}(\beta_{(10+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-11-4k)}(v_{(4+2k)}))))),$$

$$v_{(4+2k)} \quad \text{a},$$

Para λ par, consideremos:

$$v_{(3\lambda-1)} = \alpha_{(1)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4)}(\beta_{(6\lambda-5)}^{-1}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda-1)})))) \quad \text{a},$$

$$v_{(3\lambda)} = \alpha_{(2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-5)}(\alpha_{(4)}(v_{(3\lambda)}))))),$$

$$v_{(3\lambda)} \quad \text{a},$$

Para λ par, $\lambda \geq 4$ e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 4)$, consideremos:

$$v_{(3\lambda+1+2k)} = \alpha_{(4+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-8-4k)}(\beta_{(6\lambda-9-4k)}^{-1}(\alpha_{(6+4k)}(v_{(3\lambda+1+2k)})))) \quad \text{a},$$

$$v_{(3\lambda+2+2k)} = \alpha_{(6+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-8-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-9-4k)}(\alpha_{(8+4k)}(v_{(3\lambda+2+2k)}))))),$$

$$v_{(3\lambda+2+2k)} \quad \text{a},$$

Para λ par, consideremos:

$$v_{(6\lambda-5)} = \alpha_{(6\lambda-8)}^{-1}(\beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)})))) \quad \text{a},$$

$$v_{(6\lambda-4)} = \alpha_{(6\lambda-6)}^{-1}(\beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}))))),$$

$$v_{(6\lambda-4)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda-3)} = \gamma_{(1)}^{-1}(\beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)}))))), \quad v_{(6\lambda-3)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda-2)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)}),$$

$$v_{(6\lambda-2)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda-1)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}), \quad v_{(6\lambda-1)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda)} = \beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)}),$$

$$v_{(6\lambda)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+1)} = \beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}))), \quad v_{(6\lambda+1)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+2)} = \alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)}),$$

$$v_{(6\lambda+2)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+3)} = \beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)})), \quad v_{(6\lambda+3)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+4)} = \beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)}))),$$

$$v_{(6\lambda+4)} \quad \text{a},$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 3)$, consideremos:

$$v_{(6\lambda+5+6k)} = \alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-6-2k)}) \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+6+6k)} = \beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)})),$$

$$v_{(6\lambda+6+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+7+6k)} = \beta_{(8+4k)}^{-1}(\beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-6-2k)}))),$$

$$v_{(6\lambda+7+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(6\lambda+8+6k)} = \alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)}),$$

$$\begin{aligned}
v_{(6\lambda+8+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+9+6k)} &= \beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-6-2k)})), \\
v_{(6\lambda+9+6k)} \text{ a } v_{(6\lambda+10+6k)} &= \beta_{(8+4k)}(\beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)}))), \\
v_{(6\lambda+10+6k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(15\lambda-7+6k)} &= \alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)}) \text{ a } v_{(15\lambda-6+6k)} = \beta_{(6\lambda-2-4k)}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)})), \\
v_{(15\lambda-6+6k)} \text{ a } v_{(15\lambda-5+6k)} &= \beta_{(6\lambda-3-4k)}(\beta_{(6\lambda-2-4k)}^{-1}(\alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)}))), \\
v_{(15\lambda-5+6k)} \text{ a } v_{(15\lambda-4+6k)} &= \alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)}), \\
v_{(15\lambda-4+6k)} \text{ a } v_{(15\lambda-3+6k)} &= \beta_{(6\lambda-2-4k)}^{-1}(\alpha_{(1+4k)}(v_{(3\lambda-2-2k)})), \\
v_{(15\lambda-3+6k)} \text{ a } v_{(15\lambda-2+6k)} &= \beta_{(6\lambda-3-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-2-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)}))), \\
v_{(15\lambda-2+6k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ par, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(24\lambda-13)} &= \gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)})) \text{ a } v_{(24\lambda-12)} = \beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda+1)}))), \\
v_{(24\lambda-12)} &\text{ a } v_{(1)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para $\lambda = 1$, unimos os pontos:

$$\begin{aligned}
v_{(1)} &= \beta_{(2)}^{-1}(\beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(1)})))) \text{ a } v_{(2)} = \beta_{(1)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(4)}(\alpha_{(1)}(v_{(2)}))))), \\
v_{(2)} \text{ a } v_{(3)} &= \gamma_{(1)}^{-1}(\beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(3)})))) \quad v_{(3)} \text{ a } v_{(4)} = \beta_{(1)}(v_{(3)}), \\
v_{(4)} \text{ a } v_{(5)} &= \beta_{(3)}^{-1}(\beta_{(4)}(\alpha_{(1)}(v_{(2)}))) \quad v_{(5)} \text{ a } v_{(6)} = \beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(1)})), \\
v_{(6)} \text{ a } v_{(7)} &= \alpha_{(1)}(v_{(2)}) \quad v_{(7)} \text{ a } v_{(8)} = \alpha_{(1)}(v_{(1)}) \quad v_{(8)} \text{ a } v_{(9)} = \beta_{(4)}(\alpha_{(1)}(v_{(2)})), \\
v_{(9)} \text{ a } v_{(10)} &= \beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(1)}))) \quad v_{(10)} \text{ a } v_{(11)} = \gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(3)})), \\
v_{(11)} \text{ a } v_{(12)} &= \beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(3)}))) \quad v_{(12)} \text{ a } v_{(1)}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(1)} &= \beta_{(2)}^{-1}(\beta_{(5)}^{-1}(\beta_{(6)}(\alpha_{(6\lambda-5)}(v_{(1)})))) \text{ a } v_{(2)} = \alpha_{(6\lambda-5)}^{-1}(\beta_{(5)}(\beta_{(6)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-7)}(v_{(2)}))))), \\
v_{(2)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 7)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(3+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-7-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}^{-1}(\beta_{(10+4k)}(\alpha_{(6\lambda-9-4k)}(v_{(3+2k)})))) \text{ a,} \\
v_{(4+2k)} &= \alpha_{(6\lambda-9-4k)}^{-1}(\beta_{(9+4k)}(\beta_{(10+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-11-4k)}(v_{(4+2k)}))))), \\
v_{(4+2k)} &\text{ a,}
\end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$v_{(3\lambda-2)} = \alpha_{(3)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}(\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda-2)})))) \quad \mathbf{a},$$

$$v_{(3\lambda-1)} = \alpha_{(1)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda-1)}))))),$$

$$v_{(3\lambda-1)} \quad \mathbf{a},$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 7)$, consideremos:

$$v_{(3\lambda+2k)} = \alpha_{(2+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-6-4k)}(\beta_{(6\lambda-5-4k)}^{-1}(\alpha_{(4+4k)}(v_{(3\lambda+2k)})))) \quad \mathbf{a},$$

$$v_{(3\lambda+1+2k)} = \alpha_{(4+4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-6-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-5-4k)}(\alpha_{(6+4k)}(v_{(3\lambda+1+2k)}))))),$$

$$v_{(3\lambda+1+2k)} \quad \mathbf{a},$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$v_{(6\lambda-5)} = \alpha_{(6\lambda-8)}^{-1}(\beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)})))) \quad \mathbf{a},$$

$$v_{(6\lambda-4)} = \alpha_{(6\lambda-6)}^{-1}(\beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}))))),$$

$$v_{(6\lambda-4)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda-3)} = \gamma_{(1)}^{-1}(\beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)})))) \quad v_{(6\lambda-3)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda-2)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)}),$$

$$v_{(6\lambda-2)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda-1)} = \beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}) \quad v_{(6\lambda-1)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda)} = \beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)})),$$

$$v_{(6\lambda)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+1)} = \beta_{(4)}^{-1}(\beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)}))) \quad v_{(6\lambda+1)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+2)} = \alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)}),$$

$$v_{(6\lambda+2)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+3)} = \beta_{(3)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-4)})) \quad v_{(6\lambda+3)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+4)} = \beta_{(4)}(\beta_{(3)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-6)}(v_{(6\lambda-5)}))),$$

$$v_{(6\lambda+4)} \quad \mathbf{a},$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 7)$, consideremos:

$$v_{(6\lambda+5+6k)} = \alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-6-2k)}) \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+6+6k)} = \beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)})),$$

$$v_{(6\lambda+6+6k)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+7+6k)} = \beta_{(8+4k)}^{-1}(\beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-6-2k)}))),$$

$$v_{(6\lambda+7+6k)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+8+6k)} = \alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)}),$$

$$v_{(6\lambda+8+6k)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+9+6k)} = \beta_{(7+4k)}(\alpha_{(6\lambda-8-4k)}(v_{(6\lambda-2-2k)})),$$

$$v_{(6\lambda+9+6k)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(6\lambda+10+6k)} = \beta_{(8+4k)}(\beta_{(7+4k)}^{-1}(\alpha_{(6\lambda-10-4k)}(v_{(6\lambda-7-2k)}))),$$

$$v_{(6\lambda+10+6k)} \quad \mathbf{a},$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$v_{(15\lambda-10)} = \alpha_{(2)}(v_{(3\lambda-1)}) \quad \mathbf{a} \quad v_{(15\lambda-9)} = \beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda-2)})),$$

$$v_{(15\lambda-9)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(15\lambda-8)} = \beta_{(6\lambda-2)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda-1)}))),$$

$$v_{(15\lambda-8)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(15\lambda-7)} = \alpha_{(1)}(v_{(3\lambda-2)}), \quad v_{(15\lambda-7)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(15\lambda-6)} = \beta_{(6\lambda-3)}(\alpha_{(2)}(v_{(3\lambda-1)})),$$

$$v_{(15\lambda-6)} \quad \mathbf{a} \quad v_{(15\lambda-5)} = \beta_{(6\lambda-2)}(\beta_{(6\lambda-3)}^{-1}(\alpha_{(1)}(v_{(3\lambda-2)}))),$$

$$v_{(15\lambda-5)} \quad \mathbf{a},$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(15\lambda-4+6k)} &= \alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)}) \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda-3+6k)} = \beta_{(6\lambda-4k)}(\alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-4-2k)})), \\
v_{(15\lambda-3+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda-2+6k)} &= \beta_{(6\lambda-5-4k)}(\beta_{(6\lambda-4-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)}))), \\
v_{(15\lambda-2+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda-1+6k)} &= \alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-4-2k)}), \\
v_{(15\lambda-1+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+6k)} &= \beta_{(6\lambda-4-4k)}^{-1}(\alpha_{(3+4k)}(v_{(3\lambda-3-2k)})), \\
v_{(15\lambda+6k)} \quad \text{a} \quad v_{(15\lambda+1+6k)} &= \beta_{(6\lambda-5-4k)}^{-1}(\beta_{(6\lambda-4-4k)}(\alpha_{(5+4k)}(v_{(3\lambda-4-2k)}))), \\
v_{(15\lambda+1+6k)} \quad \text{a}, &
\end{aligned}$$

Para λ ímpar e $\lambda \geq 3$, consideremos:

$$\begin{aligned}
v_{(24\lambda-13)} &= \gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)})) \quad \text{a} \quad v_{(24\lambda-12)} = \beta_{(2)}^{-1}(\gamma_{(1)}(\beta_{(1)}(v_{(6\lambda-3)}))), \\
v_{(24\lambda-12)} \quad \text{a} \quad v_{(1)} &. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.8 Matrizes do Ladrilhamento $\{24\lambda - 12, 4\}$

Nesta seção faremos uma construção semelhante à da seção 5.4, para o grupo fuchsiano $G_{\{24\lambda-12,4\}}$. Expressamos uma matriz α_1 , e obtemos todas as outras isometrias do grupo $G_{\{24\lambda-12,4\}}$, por conjugação com transformações elípticas:

$$\begin{aligned}
\rho_k : \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{D}^2, \\
z &\longmapsto e^{i\pi \frac{(2k+1)}{24\lambda-12}} z
\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde $\lambda \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$ e $k = 0, \dots, 24\lambda - 13$.

Fixamos duas arestas do polígono, a saber: $\tau_{3\lambda-2}$ e $\tau_{15\lambda-8}$, tal que $\alpha_1(\tau_{3\lambda-2}) = \tau_{15\lambda-8}$. Utilizando os mesmos argumentos apresentados por Edson Agustini, obtemos a isometria que emparelha duas arestas quaisquer j_1 e j_2 de um polígono $\{24\lambda - 12, 4\}$, que é:

$$h(z) = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{48\lambda-24}} z - \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi \frac{2(j_1+j_2+1)}{48\lambda-24}}}{\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi \frac{2(j_1+j_2+1)}{48\lambda-24}} z - \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi \frac{2(j_2-j_1)}{48\lambda-24}}}, \tag{5.21}$$

Voltando ao caso particular, queremos obter a isometria α_1 , que emparelha duas arestas $\tau_{3\lambda-2}$ e $\tau_{15\lambda-8}$. Substituindo $j_1 = 3\lambda - 2$ e $j_2 = 15\lambda - 8$ na expressão acima, e simplificando, obtemos:

$$\alpha_1(z) = \frac{\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi \frac{1}{2}} z - \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi \frac{3}{4}}}{\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi \frac{3}{4}} z - \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi \frac{1}{2}}}. \tag{5.22}$$

A matriz de α_1 pode ser escrita também como:

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi(\frac{1}{2})} & -\sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{i\pi(\frac{3}{4})} \\ \sqrt{2 \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi(\frac{3}{4})} & -\sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{12\lambda-6})} e^{-i\pi(\frac{1}{2})} \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Segue abaixo as isometrias geradoras do grupo $G_{\{24\lambda-12, 4\}}$, onde $\lambda \geq 1$ e $\lambda \in \mathbb{N}$. Obtemos as outras isometrias por conjugação com isometrias elípticas 5.20. O raciocínio utilizado aqui é o mesmo que usamos no exemplo 3.4.14, para obtermos as isometrias do grupo G de gênero $g = 2$.

Para $\lambda \geq 2$ e $k = 0, \dots, (3\lambda - 4)$, consideremos:

$$\begin{cases} \alpha_{2(k+1)} &= \rho_{-3(k+1)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(k+1)} \\ \alpha_{3+2k} &= \rho_{3(k+1)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(k+1)}. \end{cases}$$

Para $\lambda \geq 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \gamma_1 &= \rho_{(9\lambda-5)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda-1)} \\ \beta_1 &= \rho_{-(9\lambda-6)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda-2)} \\ \beta_2 &= \rho_{(9\lambda-6)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda-2)}, \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{6\lambda-3} &= \rho_1 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(12\lambda-8)} \\ \beta_{6\lambda-2} &= \rho_2 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(12\lambda-7)}, \end{cases}$$

Para λ ímpar, $\lambda \geq 3$ e $k = 0, \dots, \frac{1}{2}(3\lambda - 5)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k} &= \rho_{-(9\lambda-10-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+1+6k)} \\ \beta_{4+4k} &= \rho_{-(9\lambda-11-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+2+6k)} \\ \beta_{5+4k} &= \rho_{(9\lambda-10-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+1+6k)} \\ \beta_{6+4k} &= \rho_{(9\lambda-11-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+2+6k)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{6\lambda-3} &= \rho_1 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(12\lambda-8)} \\ \beta_{6\lambda-2} &= \rho_2 \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(12\lambda-7)}, \end{cases}$$

Para λ par e $k = 0, \dots, (\frac{3}{2}\lambda - 2)$, consideremos:

$$\begin{cases} \beta_{3+4k} &= \rho_{-(9\lambda-10-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+1+6k)} \\ \beta_{4+4k} &= \rho_{-(9\lambda-11-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{-(3\lambda+2+6k)} \\ \beta_{5+4k} &= \rho_{(9\lambda-10-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+1+6k)} \\ \beta_{6+4k} &= \rho_{(9\lambda-11-6k)} \circ \alpha_1 \circ \rho_{(3\lambda+2+6k)}, \end{cases}$$

5.9 Polígonos dos Ladrilhamentos $\{24\lambda+4, 4\}$ e $\{24\lambda-12, 4\}$

Nesta seção apresentamos os polígonos no disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ para ladrilhamentos do tipo $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$ que encontramos na referência [19]. Os polígonos descritos nas figuras 5.1 e 5.2 correspondem à construção que fizemos nas seções 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. Já os polígonos descritos nas figuras 5.3 e 5.4, se relacionam com as generalizações que obtemos nas seções 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8.

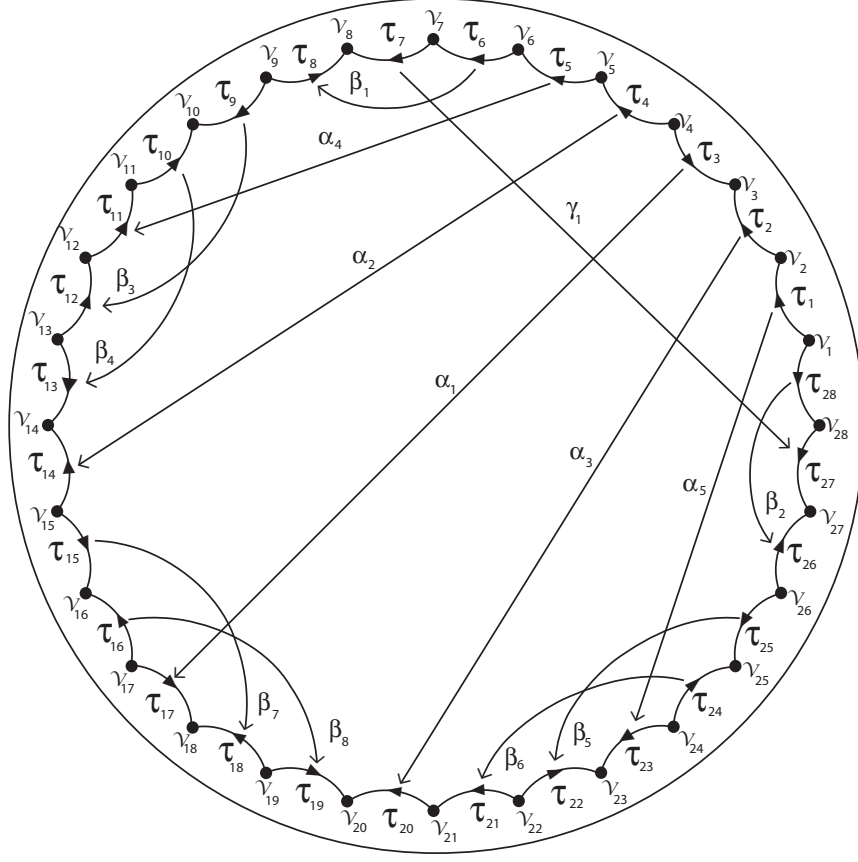


Figura 5.1: Polígono de 28 arestas e ciclos com 4 vértices.

Neste capítulo generalizamos os emparelhamentos, os ciclos de vértices e expressamos todas as isometrias dos ladrilhamentos $\{24\lambda + 4, 4\}$ e $\{24\lambda - 12, 4\}$, a partir da referência [1]. Por último, obtemos um algoritmo capaz de descrever os polígonos canônicos de Fricke associados aos grupos $G_{\{24\lambda+4,4\}}$ e $G_{\{24\lambda-12,4\}}$.

Em nosso trabalho estudamos conceitos da Álgebra, Geometria Hiperbólica, Topologia, Variáveis complexas e Topologia Algébrica. E neste capítulo, utilizamos resultados dos trabalhos de Edson Agustini [1], João de Deus Oliveira Júnior [19] e Linda Keen [15].

Estudando todos estes trabalhos, conseguimos estabelecer uma relação entre grupos fuchsianos finitamente gerados $G_{\{24\lambda+4,4\}}$ e $G_{\{24\lambda-12,4\}}$, superfícies compactas orientáveis

$\mathbb{D}^2/G_{\{24\lambda+4,4\}}$ e $\mathbb{D}^2/G_{\{24\lambda-12,4\}}$ e a classe de polígonos no disco de Poincaré, conhecida como polígonos canônicos de Fricke.

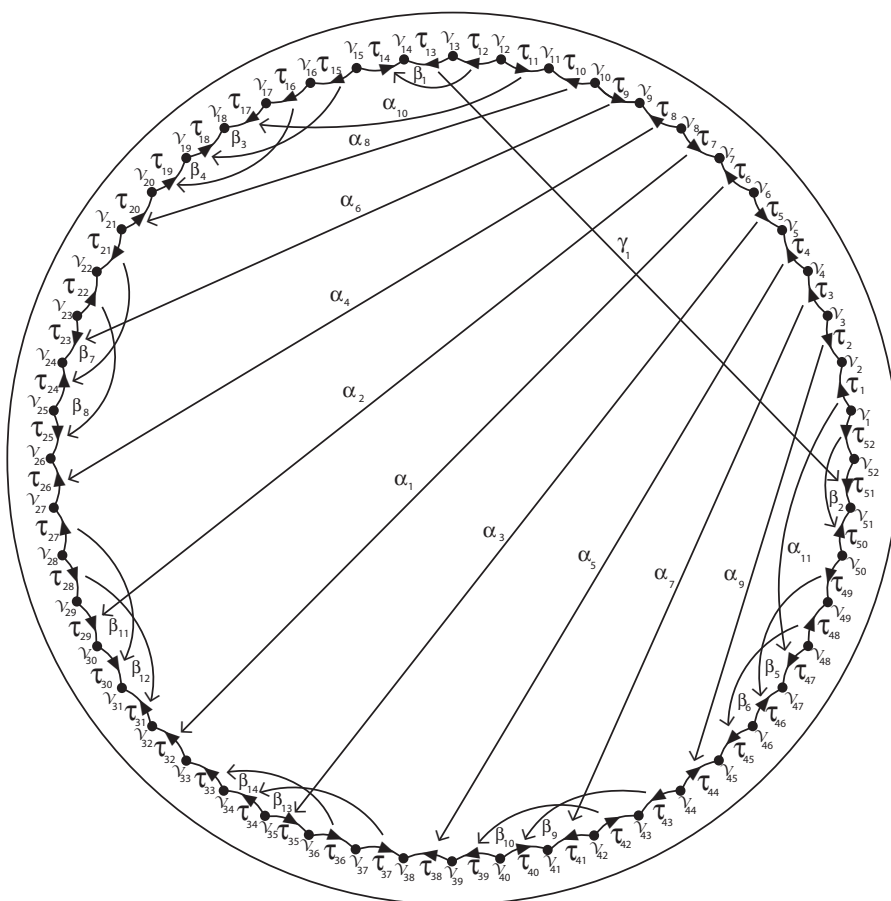


Figura 5.2: Polígono de 52 arestas e ciclos com 4 vértices.

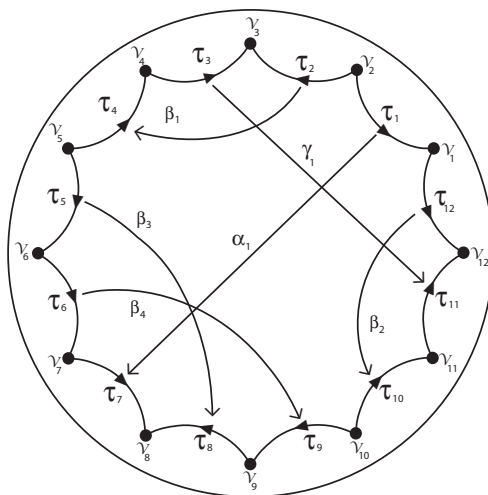


Figura 5.3: Polígono de 12 arestas e ciclos com 4 vértices.

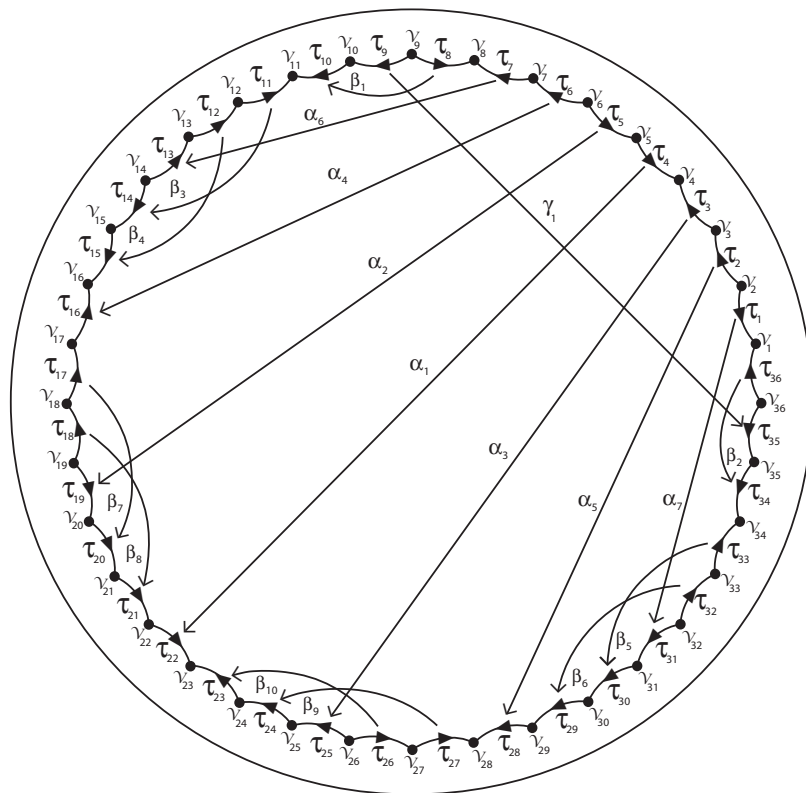


Figura 5.4: Polígono de 36 arestas e ciclos com 4 vértices.

Referências Bibliográficas

- [1] Agustini, E., *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos*. Tese de Doutorado. IMEC-UNICAMP, 2002.
- [2] Anderson, J. W., *Hyperbolic Geometry*. Second Edition, Springer, 2005.
- [3] Ahlfors, L. V., *Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company*. Second Edition, 1966.
- [4] Ahlfors, L. V., *On Quasi-conformal Mappings. J. Analyse Math.*, 4 (1954), 1 – 58.
- [5] Ávila, G., *Variáveis Complexas e Aplicações*. Terceira Edição, Editora LTC, 2000.
- [6] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [7] Bers, L., *Uniformization by Beltrami Equations. Comm. Pure Appl. Math.*, 14(1961), 215 – 228.
- [8] Carmo, M. P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 3a. edição, 2005.
- [9] Earle, C. J. & Markovic V. *Isometries Between the Spaces of L^1 Holomorphic Quadratic Differentials on Riemann Surfaces of Finite Type*. Duke Math. J. Volume 120, Number 2(2003), 433 – 440.
- [10] Faria, M. B., *Coodenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de Doutorado. IMEC-UNICAMP, Campinas, 2005.
- [11] Faria, M. B., *Empacotamento de Esferas em Espaços Hiperbólicos*. Dissertação de Mestrado. IMEC-UNICAMP, Campinas, 2001.
- [12] Firer, M., *Grupos Fuchsianos*. UNICAMP, Notas de Aulas, 1999.
- [13] Garcia, A. & Lequain Y., *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides, IMPA, 5a. edição, 2008.
- [14] Katok, S., *Fuchsian Groups*. The University of Chicago and London, lectures in Mathematics Seires, 1992.

- [15] Keen, L., *Canonical Polygons for Finitely Generated Fuchsian Groups*. Princeton, New Jersey, 1966.
- [16] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [17] Munkres, J. R., *Topology - A First Course*. Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [18] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics, Japan, 1990.
- [19] Oliveira, J. D. J., *Construção de Superfícies Utilizando o Teorema de Poincaré*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Viçosa, UFV, fevereiro, 2010.
- [20] Sá Earp R. & Toubiana E., *Cours de Geometrie Hyperbolique et de Surfaces de Riemann*, PUC-RJ, Rio de Janeiro, 1982.
- [21] Soares, M. G., *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária. Segunda Edição, IMPA, 1999.

Índice Remissivo

- ação de um grupo, 37
- aplicação conforme, 8
- aplicação quase-conforme, 15
- aplicação transição, 9
- aplicações homotópicas, 16
- area hiperbólica, 32
- arestas congruentes, 43
- argumento, 3
- assinatura, 50
- assinatura de um grupo fuchsiano, 46
- atlas, 9

- bisector perpendicular, 41

- caminho fechado, 6
- caminho suave, 6, 7
- caminho suave por partes, 7
- caminhos livremente homotópicos, 19
- carta, 9
- ciclo de vértices, 43
- circulo isométrico, 45
- cobertura, 5
- conjunto compacto, 6
- conjunto conexo, 5
- conjunto limite, 45
- conjunto paracompacto, 6
- curva, 6
- curva de Jordan, 7

- dilatação, 14
- dimensão complexa, 9
- distância em $\mathbb{D}^2$, 31
- distância em $\mathbb{H}^2$, 28
- domínio de Dirichlet, 41
- domínio fundamental, 40
- domínio padrão fundamental, 51

- eixo de uma transformação hiperbólica, 46
- emparelhamento, 43
- equação de Beltrami, 14
- equações de Cauchy-Riemann, 4
- equivalência conforme, 10
- esfera unitária, 10
- espaço contrátil, 17
- espaço de Hausdorff, 10
- espaço simplesmente conexo, 20
- espaço topológico, 5
- espaços homotopicamente equivalentes, 17
- estabilizador, 37

- família localmente finita, 38
- fronteira, 40
- função holomorfa, 4

- gênero de uma superfície, 10
- geodésica, 29
- geodésicas em $\mathbb{D}^2$, 32
- geodésicas em $\mathbb{H}^2$, 30
- grupo cíclico, 38
- grupo co-compacto, 46
- grupo do primeiro tipo, 46
- grupo do segundo tipo, 46
- grupo fuchsiano, 38
- grupo fundamental, 19
- grupo linear especial, 27
- grupo linear geral, 27
- grupo propriamente descontínuo, 38

- homeomorfismo, 6
- homotopia, 16
- homotopia relativa, 16

- inversão, 25
- isometria, 30

- jacobiano, 8

ladrilhamento, 40
localmente conforme, 10

o grupo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, 27
órbita, 37

palavra, 21
polígono convexo, 34
polígono fundamental convexo, 44
polígono hiperbólico, 32
produto de caminhos, 18
projeção estereográfica, 24

refinamento, 5
reflexão, 26
retração, 18
retrato, 18

sequência padrão de geradores, 51
subgrupo discreto, 38
superfície de Riemann, 10
superfície fechada, 10
superfícies de Riemann do tipo finito, 50

teorema de Poincaré, 44
topologia, 4
transformação biunívoca, 7
transformação de Möbius, 27
transformação isogonal, 9
triângulo hiperbólico, 33

vértices ideais, 33
variedade complexa, 9
vértice ordinário, 42