LILIAN GIVISIEZ PEREIRA

UMA MANEIRA MAIS APROFUNDADA DE SE ENSINAR DIVISIBILIDADE PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

VIÇOSA
MINAS GERAIS- BRASIL
2015

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

P436u
2015

Pereira, Lilian Givisiez, 1987-
Uma maneira mais aprofundada de se ensinar Divisibilidade para alunos do ensino médio / Lilian Givisiez Pereira. – Viçosa, MG, 2015.
vii, 85f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndice.
Orientador: Mercio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.27-29.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Números, Divisibilidade dos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 510

LILIAN GIVISIEZ PEREIRA

UMA MANEIRA MAIS APROFUNDADA DE SE ENSINAR DIVISIBILIDADE PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 24 de fevereiro de 2015

Vandenberg Lopes Vieira

Allan de Oliveira Moura

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

“Felizes aqueles que se divertem com
problemas que educam a alma e
elevam o espírito.”

Fenelon

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por dar-me força para superar as dificuldades encontradas no caminho.

Aos meus pais pela educação de qualidade, pelo apoio às minhas escolhas, por acreditarem em mim e pelo amor e carinho que sempre demonstraram.

Ao Paulo, pela compreensão e apoio.

Aos meus familiares e amigos pro me fazerem tão bem.

Aos professores que dedicaram seu tempo para transmitir seus conhecimentos e, principalmente, ao meu orientador pela paciência e compreensão.

Aos colegas do mestrado pelo apoio, pelas noites de estudos e pelas acaloradas discussões matemáticas.

Aos alunos que me ajudaram na elaboração deste trabalho e fazem meu dia a dia valorizar cada vez mais minha profissão.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

PEREIRA, Lilian Givisiez, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2015. **Uma maneira mais aprofundada de se ensinar Divisibilidade para alunos do Ensino Médio.** Orientador: Mercio Botelho Faria.

De acordo com as Leis de Diretrizes e Bases (LDB), o Ensino Médio deve ser a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental. Motivado por uma experiência profissional e pela falta de referências bibliográficas adaptadas para alunos do Ensino Médio, foi proposto como resultado final deste trabalho, a formulação de um material próprio para alunos do Ensino Médio que se propuserem a aprofundar no conteúdo Divisibilidade. O processo de escrita do material foi descrito em toda a dissertação e as observações, assim como dificuldades encontradas durante a escrita e aplicação do mesmo. A teoria da Resolução de Problemas foi usada como principal base para a escrita do material. Uma das etapas mais importantes da construção do conhecimento proposto pelo material é a resolução de exercícios tanto através de exemplos, quanto através da seleção de questões que devem ser resolvidas em conjunto entre os estudantes e o professor.

ABSTRACT

PEREIRA, Lilian Givisiez, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2015. **A deeper way to teach Divisibility for High School students**. Adiviser: Mercio Botelho Faria.

According to the Lei de Diretrizes e Bases (LDB), the high school should be the consolidation and deepening of the knowledge acquired in Elementary Education. Motivated by work experience and lack of references adapted for high school students, was proposed as the final result of this paperwork, the development of a material suitable for high school students who intend to deepen the content Divisibility. The process of writing material described in any theory and observations, as well as difficulties encountered during writing and application. The theory of troubleshooting was used as the primary basis for writing the material. One of the most important stages of construction of knowledge proposed by this material is solving either by example or through the selection of exercises to be solved by the students and the teacher together.

INTRODUÇÃO

Essa dissertação tem como objetivo a elaboração de um material complementar para aplicação em aulas extras de Matemática para alunos do Ensino Médio. A aplicação deste material deve ser para grupos específicos de aprofundamento por conter certo nível de formalidade nas demonstrações.

O material contempla o tema Divisibilidade, Teoria dos Conjuntos Numéricos, Divisão de Euclides, Equação de Euclides, Critério de Divisibilidade, Números Primos e Compostos, Crivo de Eratostenes, Número de Divisores, Divisores Comuns e Múltiplos Comuns, com demonstrações adaptadas para o entendimento de alunos do Ensino Médio, mas com certo nível de aprofundamento.

A proposta da formulação deste material surge a partir de uma experiência profissional e a produção do mesmo foi feita simultaneamente com aplicação e discussões com dois grupos de estudantes. No primeiro capítulo é narrada essa experiência profissional que motivou a escolha do tema.

Já no segundo capítulo, é apresentada uma consulta a algumas coleções de livros didáticos para constatar como são abordados os temas escolhidos no Ensino Médio.

Uma breve pesquisa sobre o conteúdo nos Parâmetros Curriculares nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação é apresentado no quarto capítulo.

O material contém exemplos, definições, teoremas e suas respectivas demonstrações, além de uma seleção de exercícios que deve ser resolvida durante o processo de aprendizagem, vislumbrando a teoria da Resolução de Problemas. O referencial teórico para escolha da Teoria de Resolução de Problemas é apresentado no quarto capítulo, onde também é abordado um pouco sobre a parte histórica desta teoria. Também no quarto capítulo, são apresentados alguns objetivos e pontos importantes para a produção do material, assim como observações sobre a escrita e aplicação do material e a conclusão sobre o mesmo.

Após as referências bibliográficas, no apêndice, o material é apresentado.

CAPÍTULO 1: Justificativa sobre a escolha do tema - Relato de experiência

Durante o ano de 2013, tive a oportunidade de trabalhar com uma turma composta por alunos do primeiro e segundo ano, para aprofundamento em matemática em uma das escolas que leciono. Eu me reunia com os estudantes mais interessados pela área de exatas para que discutíssemos variados tipos de exercícios, alguns propostos por mim e outros pelos estudantes.

Os exercícios eram de variadas fontes, por exemplo, os livros didáticos que o colégio adotava (Paiva, 2009) [1], provas de vestibular do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA)[1] e do Instituto Militar de Engenharia (IME)[2], provas da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)[3], provas da Olimpíada

---

[1] O Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) é uma instituição universitária pública ligada ao Comando da Aeronáutica (COMAER). Está localizado no Departamento de Ciência e Tecnologia Aeroespacial (DCTA), na cidade paulista de São José dos Campos. Especializado nas áreas de ciência e tecnologia no Setor Aeroespacial, o ITA oferece cursos de:

- graduação em Engenharia
- pós-graduação *stricto sensu* em nível de Mestrado, Mestrado Profissional e Doutorado
- pós-graduação *lato sensu* de especialização e de extensão.

Criado em 1950, por inspiração do Marechal Casimiro Montenegro Filho e intensa cooperação internacional, o ITA é considerado um centro de referência no ensino de engenharia no Brasil.
[2] Fonte: http://www.ita.br/

[2] O IME é um estabelecimento de ensino do Departamento de Ciência e Tecnologia (DCT) responsável, no âmbito do Exército Brasileiro, pelo ensino superior de Engenharia e pela pesquisa básica.
Ministra cursos de graduação, pós-graduação e extensão universitária para militares e civis. Insere-se no Sistema de Ciência e Tecnologia do Exército, cooperando com os demais órgãos, por meio da prestação de serviços e pela execução de atividades de natureza técnico-científicas. O Instituto coopera, pelo ensino e pela pesquisa, também para o desenvolvimento científico-tecnológico do País.
[3] Fonte: http://www.ime.eb.br/

[3] A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é uma competição aberta a todos os estudantes dos Ensinos Fundamental (a partir do 6ª ano), Médio e Universitário das escolas públicas e privadas de todo o Brasil.
[4] Fonte: http://www.obm.org.br/

Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)[4] e provas do Canguru de Matemática[5].

Durante as aulas, diferentes assuntos foram abordados, como História da Matemática, o problema “Triângulo Russo”[6], Triângulo de Pascal, problemas de Análise Combinatória, Raciocínio Lógico, Sequências, Multiplicidade, Divisibilidade, Mínimo Múltiplo Comum (MMC), Máximo Divisor Comum (MDC) e Resto de Divisão.

Alguns problemas que envolvem conteúdos do Ensino Fundamental apareceram com um elevado nível de dificuldade, como nos exemplos abaixo:

EXEMPLO 1:[7] Na sequência (24, 2534, 253534, 2535353534,...) seja n o primeiro número divisível por 99. O número de algarismos de n é igual a:

a)170

b)172

c)174

d) 176

e) 178

EXEMPLO 2: [8] Qual é a maior potência de 2 que divide 2011 * 2012 – 1?

a) 2

b) 4

---

4 A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área.
[5] Fonte: http://www.obmep.org.br/

5 A cada ano, na terceira quinta-feira do mês de março, um gigantesco número de estudantes em todo o mundo faz parte de um importante evento internacional de Matemática, uma competição chamada Canguru de Matemática.
[6] Fonte: http://www.cangurudematematicabrasil.com.br/

6 O problema do Triângulo Russo é apresentado em variadas bibliografias e resolvido usando algumas estratégias diferentes, uma fonte que aqui poderia ser citada por conter a resolução e o enunciado é o vídeo “Geometria- Aula 26- Desafio: o problema do triângulo Russo” do Programa de Iniciação Científica da OBMEP
[16] Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=7jnlhPZoIjo

7 Fonte: Vestibular do Instituto Tecnológico da Aeronáutica [2]

8 Fonte: XXXIV Olimpíada Brasileira de Matemática- Primeira Fase – Nível 3- Ensino Médio [4]

c) 8

d) 16

e) 32

Para trabalhar com esse tipo de questão, foi preciso encontrar um material didático que continha exercícios e conteúdo adaptados ao nível de conhecimento dos estudantes do Ensino Médio. Os temas que achei que o material didático deveria abordar seriam: Multiplicidade, Divisibilidade, MMC, MDC e Resto de Divisão.

O alvo inicial da minha busca foi a coleção de livros de Matemática para o Ensino Médio de Manoel Paiva (Paiva, 2009), pois era adotada pelo colégio. A coleção “Matemática - Paiva” se aprofunda em vários conteúdos e traz textos extras. Um dos textos trata de bases binárias e sistemas digitais no livro do 1º ano, que se relaciona vagamente com a matéria procurada, mas o tema divisibilidade não foi abordado. Procurei em mais algumas coleções que estavam na biblioteca, mas sem êxito.

No encontro seguinte com a turma de aprofundamento, apresentei algumas demonstrações e exercícios, onde usei como base de estudo o material produzido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)[9], tendo como autor Abramo Hefes (Hefez, 2005) [7], livro utilizado pelos alunos do PROFMAT[10].

---

[9]A SBM tem por principais finalidades congregar os matemáticos e professores de Matemática do Brasil, estimular a realização e divulgação de pesquisa de alto nível em Matemática, contribuir para a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis, estimular a disseminação de conhecimentos de Matemática na sociedade, incentivar e promover o intercâmbio entre os profissionais de Matemática do Brasil e do exterior, zelar pela liberdade de ensino e pesquisa, bem como pelos interesses científicos e profissionais dos matemáticos e professores de Matemática no país, contribuir para o constante aprimoramento de altos padrões de trabalho e formação científica em Matemática no Brasil e oferecer assessoria e colaboração, na área de Matemática, visando o desenvolvimento nacional.
[8] Fonte: http://www.sbm.org.br/

[10] O PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional é um curso semipresencial, com oferta nacional, realizado por uma rede de Instituições de Ensino Superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil, e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática.
[9] Fonte: http://www.profmat-sbm.org.br/

As demonstrações feitas no quadro foram adaptadas de acordo com conhecimento e nível de aprendizagem dos estudantes, com menos rigor matemático das demonstrações contidas no material.

O resultado das discussões foi surpreendente. Os alunos se empenharam para entender as demonstrações, se envolveram nos exercícios e começaram a criar novos exercícios e propor teoremas, além de desenvolver senso crítico e argumentativo para demonstrações.

Um exemplo dos resultados que apareceram durante as aulas foi o teorema abaixo, que foi proposto e provado por um aluno do 2º ano, que relacionou a matéria que discutíamos na sala de aprofundamento com o conteúdo abordado em sala de aula (Progressão Aritmética).

"Sendo n um inteiro, ímpar $(2k+1)$, a soma de n números inteiros consecutivos e diferentes de zero é um múltiplo de n"

Demonstração:

$$S = x + x+1 + x+2 + x+3 \cdots x+(n-2) + x+(n-1) \quad \text{com } x \in \mathbb{Z}$$

Sendo R a P.A. que contém os $(n-1)$ restos de divisão de n:

$$S = n \cdot x + \Sigma R$$

★ Se $R = (1, 2, 3, \dots n-2, n-1)$ a soma dos elementos de R (ΣR) é dada por:

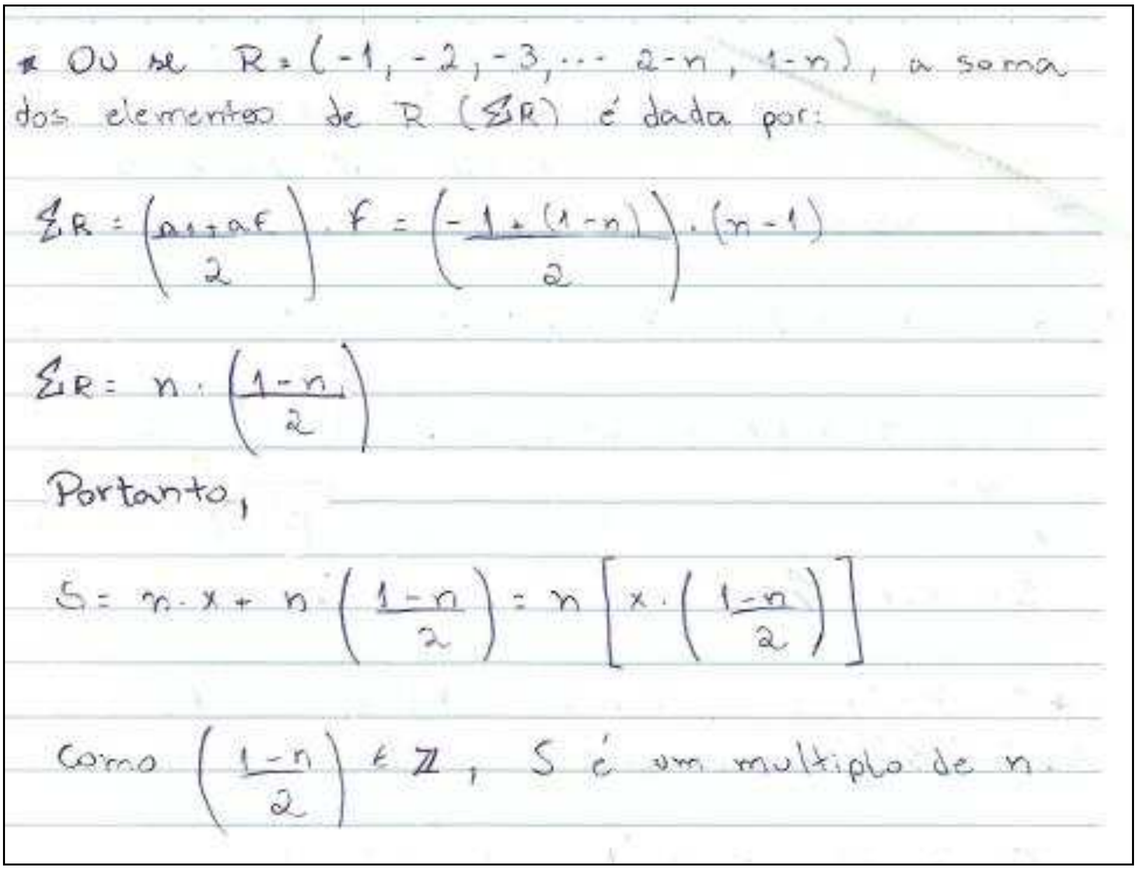
$$\Sigma R = \left(\frac{a_1 + a_f}{2}\right) \cdot f = \left(\frac{1 + (n-1)}{2}\right) \cdot (n-1)$$

$$\Sigma R = n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Portanto,

$$S = n \cdot x + n\left(\frac{n-1}{2}\right) = n\left[x\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]$$

Como $x\left(\frac{n-1}{2}\right) \in \mathbb{Z}$, S é um múltiplo de n.



* Ou se $R = (-1, -2, -3, \dots 2-n, 1-n)$, a soma dos elementos de R (ΣR) é dada por:

$$\Sigma R = \left(\frac{a_1 + a_f}{2}\right) \cdot f = \left(\frac{-1 + (1-n)}{2}\right) \cdot (n-1)$$

$$\Sigma R = n \cdot \left(\frac{1-n}{2}\right)$$

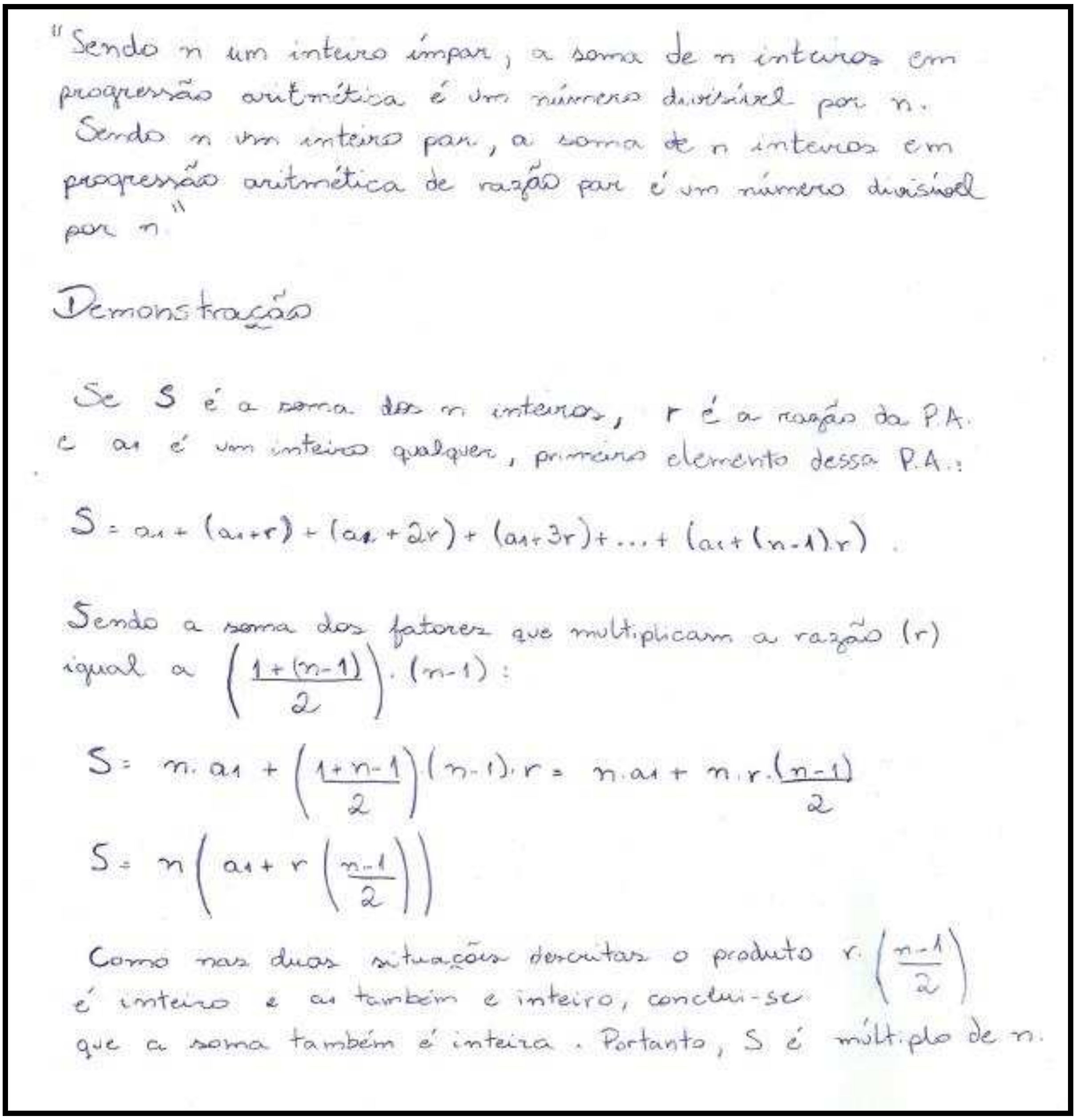
Portanto,

$$S = n \cdot x + n\left(\frac{1-n}{2}\right) = n\left[x \cdot \left(\frac{1-n}{2}\right)\right]$$

Como $\left(\frac{1-n}{2}\right) \in \mathbb{Z}$, S é um multiplo de n.

Figura 1: Demonstração feita por um aluno 1

Após discutirmos durante a aula, o aluno reformulou a demonstração.



"Sendo n um inteiro ímpar, a soma de n inteiros em progressão aritmética é um número divisível por n.
Sendo n um inteiro par, a soma de n inteiros em progressão aritmética de razão par é um número divisível por n."

Demonstração

Se S é a soma dos n inteiros, r é a razão da P.A. e a_1 é um inteiro qualquer, primeiro elemento dessa P.A.:

$$S = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + \dots + (a_1 + (n-1).r).$$

Sendo a soma dos fatores que multiplicam a razão (r) igual a $\left(\frac{1+(n-1)}{2}\right).(n-1)$:

$$S = n.a_1 + \left(\frac{1+n-1}{2}\right)(n-1).r = n.a_1 + n.r.\frac{(n-1)}{2}$$

$$S = n\left(a_1 + r\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

Como nas duas situações descritas o produto $r.\left(\frac{n-1}{2}\right)$ é inteiro e a_1 também é inteiro, conclui-se que a soma também é inteira. Portanto, S é múltiplo de n.

Figura 2: Demonstração feita por um aluno 2

Fiquei satisfeita com o efeito das discussões e o interesse que os alunos tiveram em fazer as demonstrações e resolver os exercícios ligados à Divisibilidade, além do interesse em escrever corretamente com o rigor matemático que eu havia discutido nas demonstrações em sala.

Apesar da minha satisfação com o desenvolvimento dos alunos, o material utilizado para ensinar o conteúdo não era adequado, pois ou eram muito complexos para o nível dos estudantes ou eram muito básicos e incompletos. Como uma das sugestões para a dissertação de conclusão do mestrado proposta pelo PROFMAT era produzir um material para ser usado em sala de aula, vislumbrei a oportunidade de beneficiar os alunos produzindo um material através de uma pesquisa mais detalhada.

Antes de começar a escrever o material, percebi a necessidade de realizar uma busca mais detalhada em coleções de livros usadas no Ensino Médio, pois até então, não havia encontrado um livro que abordasse o conteúdo de maneira satisfatória. Uma possível alternativa seria, além de encontrar o conteúdo em um capítulo específico, encontrá-lo em textos extras.

CAPÍTULO 2: Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio quanto ao assunto Divisibilidade

Durante esse capítulo, iremos analisar quatro coleções de livros didáticos do Ensino Médio, com o intuito de constatar como elas apresentam os temas Divisibilidade e Multiplicidade.

A primeira coleção escolhida para análise foi Matemática para o Ensino Médio de Manoel Paiva (Paiva, 2009) [1]. Nesta coleção, não há nenhum capítulo, explicação, texto extra ou bloco de exercícios que aborde, como foco principal, Divisibilidade, MMC ou MDC.

A segunda coleção analisada é a adotada por outro colégio da região. A coleção que leva o nome de "Matemática, uma nova abordagem", tem como autores José Ruy Giovanni e José Ruy Bonjorno (Bonjorno, 2001) [10] e não apresenta textos extras ou capítulo que abordam Divisibilidade.

A coleção seguinte analisada foi "Novo olhar – Matemática" versão progressões (Souza, 2011) [11] . Tem como autor, Joamir Souza e trás textos aprofundando em assuntos variados, e uma seção ENEM no final do livro, porém não faz nenhuma menção à divisibilidade e problemas que a envolvem.

Outra coleção analisada tem o nome de "Ser protagonista" (Fugita, 2009) [12] e tem como autores: Felipe Fugita, Marco Antônio Martins Fernandes, Milena Soldá Policastro e Willian Seigui Tamashiro . Ao fim de vários capítulos a coleção traz duas seções com os nomes: "Estratégias e soluções" e "Matemática e ciências", que apresentam parte da história da matemática e problemas contextualizados, mas nenhum que aborde divisibilidade.

O material produzido pela Editora Bernoulli, 4 Volumes, tem um módulo destinado à Divisibilidade, MMC e MDC, onde apresenta exemplos, explicações resumidas sobre o assunto e exercícios de variadas fontes e níveis de dificuldade, onde 89% dos exercícios são de vestibulares ou outros processos seletivos. Apesar de conter uma boa quantidade de exercícios sobre o assunto, não apresentam demonstrações. Outro ponto a ser observado, é que o material não apresenta o nome do autor, data de publicação, referências bibliográficas ou lista de siglas, como os outros materiais analisados, talvez por ser apresentado em módulos e ser um material bem resumido.

CAPÍTULO 3: Divisibilidade quanto à LDB, ao PCN e aos CBCs

No capítulo anterior, vimos que nenhuma coleção de livro didático abordava o assunto divisibilidade, exceto um material, em módulos, da editora Bernoulli. Logo seria incomum se nas leis ou parâmetros que cercam o ensino de Matemática no Ensino Médio, esse conteúdo estivesse como obrigatório no currículo do Ensino Médio e não ser apresentado em livros que poderiam ser adotados em escolas.

Neste capítulo iremos apresentar uma pesquisa na Lei de Diretrizes e Bases, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, assim como no Conteúdo Básico Comum do Estado de Minas Gerais e Centro de Referência Virtual do Professor.

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) [13] reúne os dispositivos concernentes ao sistema educacional de todos os níveis. A LDB é um conjunto de leis que regulamentam o funcionamento das instituições educacionais, normatizando inúmeros pontos, desde as competências dos professores até a divisão do ensino em Ensino Fundamental I, Fundamental II e Médio.

De acordo com o Presidente da câmara dos Deputados, Marco Maia (2011-2015), na Apresentação do texto da LDB [13, p.7], na sexta edição da LDB:

> ...se reúnem todos os dispositivos concernentes ao sistema educacional brasileiro, que, desde 1996, está disciplinado em todos os níveis – da creche à universidade, passando por todas as modalidades de ensino especial...
> ...a LDB tornou-se um dos mais efetivos instrumentos de melhoria da qualidade de ensino do Brasil, devendo estar ao alcance de todos para conhecimento, reflexão e oferta de sugestões. Este é o propósito maior desta publicação: aproximar o cidadão dos conteúdos legislativos, para conhecimento de seus direitos e deveres, e assim estimular a participação consciente por parte da população.

De acordo com a seção IV da LDB (6ª edição, com atualização em 25/10/2011), na parte referente à finalidade do ensino médio (artigo 35) temos:

> Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:
> I – a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

Logo, de acordo com a LDB, o Ensino Médio deve consolidar e aprofundar os conhecimentos do Ensino Básico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [14] são publicações feitas pelo Governo Federal que definem as competências e habilidades necessárias ao ensino. No PCN do Ensino Médio, vemos três principais eixos de competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática:

- Representação e comunicação.
- Investigação e compreensão.
- Contextualização sociocultural.

Na página 6, no início do PCN, no capítulo denominado "O sentido do aprendizado na área", o PCN reforça a ideia que colocamos acima que o Ensino Médio deve aprofundar os ensinamentos do Ensino Fundamental:

> A LDB/96, ao considerar o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução CNE/98, ao instituir as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, que organizam as áreas de conhecimento e orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania, apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio.

Já o Conteúdo Básico Comum (CBC) [15], é definido por cada estado brasileiro, escrito a partir da LDB e do PCN, onde aparecem as matérias separadas por eixos temáticos adequados às habilidades e competências definidas pelo PCN.

O Conteúdo Básico Comum (CBC) de Matemática na parte do Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano, página 21, no Eixo Temático I (Conjuntos Numéricos, Números e Operações), temos como conteúdo obrigatório o Conjunto dos Números Naturais, sendo suas habilidades citadas abaixo:

> 1.2. Utilizar os critérios de divisibilidade por 2, 3, 5 e 10.
> 1.3. Utilizar o algoritmo da divisão de Euclides.
> 1.4. Representar a relação entre dois números naturais em termos de quociente e resto.
> 1.5. Fatorar números naturais em produto de primos.
> 1.6. Calcular o mdc e o mmc de números naturais.
> No tópico complementar II Números Naturais, estão citadas tais habilidades:
> • Os demais critérios de divisibilidade.
> • Utilizar a representação decimal para justificar critérios de divisibilidade.
> • Representar geometricamente os conceitos de quociente e de resto na divisão de dois números naturais.
> • Raiz n-ésima de números inteiros que são potências de n.

Já no mesmo CBC, na parte referente ao Ensino Médio, não cita em nenhum eixo temático sobre o assunto divisibilidade, o que é incomum, já que a LDB afirma que o Ensino Médio deve consolidar e aprofundar os conhecimentos do Ensino Básico.

O Centro de Referência Virtual (CRV) [17] é o portal virtual indicado pelo governo para complementação dos conteúdos abordados em escolas públicas, onde pode-se encontrar o CBC, assim como roteiros de atividades e orientações pedagógicas. No CRV, verifica-se que nas orientações pedagógicas, roteiro de atividades, no módulo didático, não consta o conteúdo Divisibilidade.

CAPÍTULO 4: Escrita do material

Neste capítulo são apresentadas as etapas da construção do material, sendo separadas em cinco seções. A primeira seção refere-se à justificativa para escolha da Teoria de Resolução de problemas como principal referencial para a escrita, já a segunda seção é sobre a escrita do material, principais ideias, problemas e soluções encontrados durante a produção. A terceira seção é destinada às principais fontes de estudos e referenciais teóricos sobre o tema Divisibilidade. Na quarta seção são apresentadas algumas observações e discussões que ocorreram durante a formulação do material. A última seção, apresentamos as principais conclusões sobre a aplicação do material e sobre as possibilidades de sua utilização.

4.1) Referencial teórico para escolha da Teoria de Resolução de Problemas

A Teoria da Resolução de problemas é apresentada como principal referência para a escrita do material, baseado nas informações contidas LDB [13], CBC [15] e PCN de Minas Gerais [14]. Logo, esse capítulo é destinado para justificar a escolha desta teoria como referência para a escrita do material.

Ao analisarmos a evolução do ensino de Matemática do século XX, percebe-se que o início do ensino de Matemática era baseado na repetição e memorização de fatos básicos. Posteriormente, passou-se a valorizar a compreensão do aluno diante do que estava fazendo.

Nas décadas de 60 e 70 com o surgimento da Matemática Moderna, o ensino de Matemática se baseou na estrutura lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava as propriedades, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Essa metodologia distanciava a matemática das questões práticas. Esse movimento não contou com a participação dos professores de sala de aula.

Nos Estados Unidos, o NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática) determina que “resolver problemas” deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80.

No fim dos anos 80, o NCTM em busca de uma nova reforma para a educação matemática, publicou:

- ✓ *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, in 1989;* (Currículo e Padrões de Avaliações para Escolas de Matemática, 1989)
- ✓ *Professional Standards for teaching Mathematics, in 1991;* (Padrões Profissionais para Ensino de Matemática, 1991)
- ✓ *Assessment Standards for school Mathematics, in 1995.* (Padrões de Qualificação para Escolas de Matemática, 1995)

Para Van de Walle (2001), esta é a reforma mais positiva penetrante e amplamente aceita. Trata-se do que ensinar, como ensinar, como avaliar. Além disso, ela é dita para quem desenvolve os materiais didáticos.

Em 1995, após acontecer uma verdadeira “Guerra Matemática”, isto é, uma série de críticas às reformas propostas pelos Standards, o NCTM publica em abril de 2000 os *Standards* 2000.

Estes *Standards* contavam com 6 princípios: equidade, currículo, ensino, aprendizagem, avaliação e tecnologia. Dentre os padrões de conteúdo estavam: números e operações, álgebra, geometria, medida, análise de dados e probabilidade.

No Brasil, apoiado nos *Standards* 2000, surgem os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). O objetivo dos PCNs eram fazer com que os alunos conseguissem pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas de dentro e fora da matemática, desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas.

Os PCNs (2001) focalizam a resolução de problemas como um ponto de partida da atividade matemática. Conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas.

Segundo Krulic (1980), “A resolução de problemas é a própria razão do ensino de Matemática”, isto é, resolver problemas e buscar sua solução, são atividades intrínsecas à educação matemática. O problema é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, é o “alimento” da evolução matemática.

Propor o ensino de matemática através da resolução de problemas pode levar os alunos a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos. Além disso, são levados em consideração os conhecimentos prévios que o aluno possui a respeito do assunto e, portanto, ele busca novas formas para enfrentar aquela situação considerando o conhecimento prévio, seja pelas experiências pessoais ou pelo próprio aprendizado de conteúdos matemáticos.

Além disso, um dos fatores que proporciona o sucesso no ensino de matemática, isto é, assimilação de conhecimento, é propor um ambiente de motivação no qual o aluno se sinta capaz de entender e resolver os problemas que foram propostos.

O ensino através da resolução de problemas proporciona este ambiente ao aluno, pois o professor pode selecionar problemas que estejam relacionados ao cotidiano do aluno, fazendo com que este adquira um aprendizado significativo, associando o aprendizado a uma aplicação prática. Para cada conteúdo ensinado, o aluno deve entender o porquê do aprender, onde e quando aplicar. Como questiona Krulik (1980, p.3): “Por acaso ensinamos cálculos aritméticos, cálculos algébricos e algoritmos apenas porque são coisas interessantes por si mesmas?”

Segundo Smole, enquanto o aluno resolve situações problema ele aprende matemática, desenvolve procedimentos, formas de pensar, desenvolve habilidades básicas como verbalizar, ler, interpretar e produzir textos em matemática e nas áreas do conhecimento envolvidas nas situações propostas. Ao mesmo tempo o aluno ganha confiança em sua forma de pensar e autonomia para investigar e resolver problemas que é o objetivo dos professores que ensinam matemática.

Baseando-se na evolução histórica do ensino de matemática e nos PCNs, a resolução de problemas será adotada como principal estratégia de escrita do material proposto.

4.2) Produção do material

De acordo com o terceiro capítulo, o conteúdo Divisibilidade assim como algumas matérias ligadas ao tema, não são contemplados em alguns livros didáticos do Ensino Médio. Isso é comum, apesar do tema ser pontuado como obrigatório no CBC do Ensino Fundamental e de acordo com a LDB que o Ensino Médio deve aprofundar os conteúdos do Ensino Fundamental. Com esses argumentos o objetivo deste trabalho é a elaboração de um material que aborde esses temas, com uma linguagem de fácil entendimento para alunos do Ensino Médio, mas que contenha teoremas e demonstrações, exemplos e exercícios, com certo nível de formalidade e dificuldade.

O material aborda os seguintes assuntos:

- Teoria de conjuntos numéricos,
- Divisão de Euclides e Equação de Euclides,
- Divisibilidade e Multiplicidade,
- Critérios de divisibilidade por números específicos,
- Números primos e compostos,
- Divisores comuns.
- Múltiplos comuns.

No desenrolar do material é necessário a utilização de pré-requisitos matemáticos. Levando em consideração que o aluno já tenha os conhecimentos essenciais para o aprofundamento dos estudos, é preciso uma revisão de conceitos, nomenclaturas e a introdução de alguns símbolos matemáticos.

Para o sucesso do processo de aprendizagem por meio do método da Resolução de Problemas, serão disponibilizados para o aluno, além das demonstrações, exemplos e exercícios. Tanto os exemplos e os exercícios serão propostos em uma ordem didática, mas sem serem apenas um modelo a ser seguido. Apesar de os exemplos serem também utilizados como ponto de partida para alguns raciocínios propostos no exercício, o material também comtemplará questões totalmente novas, que não são apenas uma repetição. Assim sendo o texto apresenta as estruturas básicas:

- Corpo do texto
- Definições
- Teoremas com suas respectivas demonstrações.
- Exemplos e resoluções.
- Exercícios Propostos

4.3) Fontes de estudo e referencial teórico

As demonstrações contidas no material, assim como os exemplos e exercícios propostos, foram adaptações feitas a partir de algumas bibliografias, como Elementos da Aritmética [7] e Iniciação à Aritmética-Programa de Iniciação Científica OBMEP [18], de Abramo Hefez, assim como vídeo-aulas do Programa de Iniciação Científica OBMEP [19], [20], [21], [22], [23] e dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo [24], [25], [26]. Alguns exercícios e exemplos foram retirados de variados sites [2], [4], [6], [27] e a parte histórica sobre Euclides foi retirado do livro do Abramo Hefez [7] e suas figuras de dois sites [28], [29].

O material produzido é apresentado no apêndice desta dissertação, na forma de uma cartilha pronta para ser aplicada em sala, pois sua linguagem é bastante coloquial para tornar a leitura mais agradável para o aluno.

Uma introdução é apresentada no início da cartilha para situar o aluno sobre o assunto e a ordem que será trabalhado.

Uma ferramenta que está ganhando mais confiabilidade é o uso da internet. Atualmente existem canais no *youtube* onde são postadas aulas de vários professores do IMPA. Como o material é produzido por uma fonte confiável, dois canais do *youtube* foram usados como fonte de pesquisa e indicação para estudo individual para os alunos que compunham as turmas que ajudaram na elaboração do material.

Os dois canais recomendados foram:

- Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Figura 3: Programa de Iniciação Científica da OBMEP

Fonte: https://www.youtube.com/user/PICOBMEP

- Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Figura 4: Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo

Fonte: https://www.youtube.com/user/PolosOlimpicos

Os vídeos são separados por assunto e encontramos vídeos rápidos como aulas mais elaboradas e completas. Os alunos que entraram nesses dois canais gostaram bastante dessa nova ferramenta, pois podem adiantar e voltar quantas vezes quiserem ver a explicação.

Durante a pesquisa, foram indicados alguns livros para os alunos, mas a aceitação dos livros foi bem menor em relação aos canais do *youtube.* Talvez pela facilidade de se encontrar vídeos, ou ler e pensar sozinho é mais difícil do que assistir a uma explicação que pode ser pausada, adiantada e reiniciada.

4.4) Observações durante a escrita e aplicação do material

Os exercícios foram cuidadosamente escolhidos, agrupados e resolvidos de acordo com o assunto. O material apresenta uma ordem didática, onde o aluno não deveria trocar de matéria sem ter resolvido e discutido os exercícios da seção anterior.

Para organização do trabalho, os teoremas foram enumerados de forma crescente e subitens, sendo teoremas consequentes um do outro ou com demonstrações similares. Os exemplos, exercícios e definições também foram colocados em diferentes caixas de texto para fazer a leitura ficar mais dinâmica.

Uma das maiores dificuldades foi encontrar uma ordem que contemplasse todos os conteúdos propostos no início do trabalho. A dificuldade era que, às vezes, uma demonstração dependia de um conceito que não havia sido transmitido ou revisado.

Foi surpreendente a facilidade que os alunos entenderam e usaram a notação “divide” (exemplo: $2|16$).

Quando demonstramos quantos divisores tem um número, os alunos teriam que ter a noção do Princípio Multiplicativo, mas a Análise combinatória só é ensinada no segundo ano do Ensino Médio; como o material é proposto para alunos do Ensino Médio, em geral, foi introduzido a ideia do Princípio Multiplicativo, além de adaptar todos os exercícios que tinham o fatorial (!) no enunciado.

Alguns temas foram colocados durante a escrita do material, mas foram retirados, primeiramente porque implicaria em maior tempo de aplicação; outro motivo, seria pelo nível de dificuldade que não seria interessante pela quantidade de exercícios que são encontrados em nível de Ensino Médio. Podemos citar alguns conteúdos, como as Equações Diofantinas e Congruência modular, além da demonstração por Indução, que fez falta para demonstrar alguns teoremas contidos no material. A ideia do Princípio da Boa Ordenação foi usado na demonstração do Teorema 12, apesar de não ter sido enunciado, assim como a ideia da demonstração por indução ter sido usada numa introdução ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Após a escrita do material, foi acrescentado um pequeno texto introdutório para dar noção para os alunos dos conteúdos abordados e a ordem que isso acontece.

Outro ponto que eu não achei que seria relevante, mas acabou sendo, foi a formatação do material. Durante a escrita do material, alguns alunos não receberam bem os exercícios com formatação no padrão desta dissertação. Quando foram colocados meios de separação e quadros durante o texto, os alunos indicaram mais interesse. Logo, o material é apresentado no apêndice por conter uma formatação mais atrativa para os alunos, contendo caixas de texto e uma linguagem coloquial.

Uma das motivações para a escrita deste trabalho foi um teorema proposto e provado por um estudante. Durante a pesquisa bibliográfica, parte do teorema proposto pelo aluno foi encontrado como exercício proposto no livro do autor Hefez, Elementos da Aritmética [7].

4.5) Resultados finais e conclusões sobre o material

O resultado final do trabalho contém certo nível de dificuldade. Sendo assim, a aplicação do material levaria muito mais tempo do que a estimativa anterior à escrita.

Devido a uma turma específica, o material começou a ser escrito, mas o colégio em questão é uma exceção no sistema de ensino brasileiro. Os alunos deste colégio são selecionados, tanto pelo financeiro (pois a escola é particular e inacessível para uma grande parcela da população) e pela parte cognitiva (pois o colégio possui um rígido processo seletivo).

Os questionamentos sobre a viabilidade da aplicação deste material começaram no momento da seleção das demonstrações que o mesmo iria conter.

O primeiro alvo de reflexão foi em relação aos professores que o usaria. O professor que se propor a fazê-lo, deverá sair da sua zona de conforto, já que muitas demonstrações possuem considerável nível de dificuldade. Mais difícil de entender, seria explicar e fazer o estudante assimilar, tornando-o capaz de resolver problemas.

O professor que usufruir deste trabalho, deve considerar a possibilidade de encontrar exercícios que não conseguirá resolver facilmente, e que deverá dedicar algum tempo no entendimento e resolução dos exercícios propostos.

O público-alvo para aplicação do material é qualquer aluno do Ensino Médio que se interesse por Matemática, com o devido apoio do professor e com a dedicação de tempo e estudo suficiente.

Essa conclusão se consolidou quando, em outra escola, foi sugerido para os alunos, já com grande parte do material pronto, selecionar um grupo de aprofundamento em que o professor iria propor os exercícios. Os encontros foram marcados quinzenalmente, devido ao calendário escolar e dos alunos estarem no terceiro ano do Ensino Médio. O material foi dividido por aula.

Uma aluna específica gerou a expectativa de que qualquer aluno seria capaz de desenvolver os raciocínios propostos no material, se fosse dedicado tempo suficiente. Esta aluna, apesar de sempre apresentar boas notas, não tinha afinidade com exatas, mas era muito dedicada.

A seleção de exercícios foi um ponto muito importante durante o trabalho e mais ainda durante a aplicação, pois eram os exercícios difíceis que faziam o aluno tentar resolver durante semanas. Ao mesmo tempo em que o exercício traz desafios para os alunos, também traz desafios para os professores. Mesmo quando o professor resolve todos os exercícios que serão discutidos em sala, é provável que alguns alunos resolvam de modo diferente.

Uma boa aplicação para esse material seria o Programa OBMEP na Escola. De acordo com o site da OBMEP, com o objetivo de aumentar o rendimento dos alunos das Escolas Públicas nas provas da OBMEP, o IMPA criou o Programa OBMEP na Escola.

Esse projeto seria um conjunto de aulas para aprofundarem os conhecimentos dos alunos em assuntos variados, com o objetivo de aumentar o rendimento dos alunos na OBMEP. O primeiro processo seletivo para professores aconteceu em setembro de 2014, para selecionar, dentre os professores das Escolas Públicas os professores que trabalharão com essas turmas extraclasses. De acordo com o programa, os professores teriam independência para produzir o material que seria usado durante os estudos. O produto dessa dissertação seria uma sugestão de material a ser trabalhado nessas turmas.

CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho foi produzido um material didático com o nível de dificuldade pretendido ao início da escrita e sendo adequado às intensões de aplicação também definidas no início desta dissertação. O tempo de aplicação do material foi um ponto que saiu da expectativa inicial, sendo muito maior ao pretendido no início da escrita.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PAIVA, Manoel. **“Matemática para o Ensino Médio”**. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.

[2] Instituto Tecnológico da Aeronáutica. Disponível em: <http://www.ita.br/> Acesso em: 12, jan, 2015.

[3] Instituto Militar de Engenharia. Disponível em: < http://www.ime.eb.br/> Acesso em: 12, jan, 2015.

[4] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.obm.org.br/>. Acesso em: 12, jan, 2015.

[5] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 12, jan, 2015.

[6] Canguru de Matemática Brasil. Disponível em: <http://www.cangurudematematicabrasil.com.br/>.Acesso em: 12, jan, 2015.

[7] HEFEZ, Abramo. **Elementos da Aritmética**, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[8] Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/> . Acesso em 12, jan, 2015.

[9] Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional. Disponível em:< http://www.profmat-sbm.org.br/> . Acesso em 04 jan, 2014.

[10] BONJORNO , José Ruy, **Matemática, uma nova abordagem**. 2. ed.São Paulo: FTD, 2011.

[11] SOUZA Joamir, **Novo olhar – Matemática**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2011.

[12] FUGITA Felipe Fugita, Marco Antônio Martins Fernandes, Milena SoldáPolicastro e Willian SeiguiTamashiro, “**Ser protagonista**”. 1 ed. São Paulo: SM, 2009.

[13]Lei de Diretrizes e Bases, Disponível em :http://www.app.com.br/portalapp/imprensa/ldb_atualizada.pdf Acesso em 06 nov, 2013.

[14] Parâmetro Curricular Nacional, Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 06 nov. 2013.

[15] Centro de Referência Virtual do Professor, Ensino Fundamental. Disponível em:<http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B0A623E0E-CED6-49DD-9F8F-67FFF14F149F%7D_cbc-ef_matematica.pdf>Acesso em: 06 nov. 2013, 15:25.

[16] **Souza , Fabio Henrique Teixeira de,** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. **Geometria- Aula 26- Desafio: o problema do triângulo Russo** Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=7jnlhPZoIjo > Acesso em: 15 fev. 2015, 18:05

[17] Centro de Referência Virtual do Professor, Ensino Médio. Disponível em: <http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BC1C4797C-A5DE-44E3-AB9A-2A74A4F1877%7D_PDF%202%20CBC%20MATEMATICA%20EM%20(2).pdf> Acesso em: 06 nov. 2013, 15:05.

[17] Centro de Referência Virtual do Professor, Ensino Médio. Disponível em: < http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index2.aspx??id_objeto=23967> Acesso em: 12 dez. 2014, 15:05.

[18] HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética-Programa de Iniciação Científica OBMEP**, 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[19] **Souza ,Fabio Henrique Teixeira de**, Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. **Critério de Divisibilidade por 7.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=SnesXs9xlmg>Acesso em: 12 out. 2014.

[20] **Souza , Fabio Henrique Teixeira de,** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. **Critério de divisibilidade por 11.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=E3LrQpUc3cQ> Acesso em: 12 out. 2014.

[21] **Souza , Fabio Henrique Teixeira de,** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP. **Aritmética - Aula 10 - Números primos - Teorema Fundamental da Aritmética.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=krJI7EC9KqA> Acesso em: 12 out. 2014.

[22] **Souza ,Fabio Henrique Teixeira de,** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP **Alguns problemas com resto e divisibilidade.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QTWnXdGcN-E> Acesso em: 16 jan. 2015.

[23] **Souza ,Fabio Henrique Teixeira de,** Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP **Aula 9 - Divisores e MDC - Algoritmo de Euclides . Programa de Iniciação Cientifica da OBMEP**

Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=o7axIIFY3Ko> Acesso em: 16 jan. 2015.

[24] **MOREIRA, Carlos Gustavo Araújo.** Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. **Teoria dos Números. Parte 1.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=c9TnGkENcn8> Acesso em: 15 jan.2015, 19:51.

[25] **Souza ,Fabio Henrique Teixeira de,** Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. **Teoria dos Números (divisibilidade)- Nível 2.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=2GYNf-c8dHY> Acesso em: 15 jan.2015, 19:30.

[26] **Souza ,Fabio Henrique Teixeira de,** Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. **Teoria dos Números (divisibilidade)- Nível 3.** Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=c9TnGkENcn8> Acesso em: 15 jan.2015, 19:21.

[27] Exercícios resolvidos: MMC. Disponível em<http://www.profjosimar.com.br/2013/08/exercicios-resolvidos-mmc_4.html> Acesso em 14 jan. 2015, 19:05.

[28] Euclides e Geometria Dedutiva. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/11/euclides-e-geometria-dedutiva.html> Acesso em: 14 jan. 2015,19:30.

[29] Euclides, bibliografia. Disponível em:<http://www.infoescola.com/biografias/euclides/> Acesso em: 14 dez. 2014,18:35.

APÊNDICE – Material produzido

Caro estudante,

Este material contempla principalmente conteúdos que já foram vistos nas séries do Ensino Fundamental, mas com um rigor matemático maior.

O principal conteúdo abordado é Divisibilidade, mas como faremos demonstrações, precisamos revisar vários conceitos, além de acrescentar alguns símbolos e nomenclaturas.

Estudaremos os temas (nessa ordem):

- Conjuntos numéricos.
- Divisão de Euclides.
- Equação de Euclides.
- Um pouco sobre a história de Euclides.
- Definição da expressão “dividir”.
- Propriedades sobre divisões exatas.
- Números Pares, Ímpares, Sucessores e Aplicação da Equação de Euclides.
- Critério de divisibilidade.
- Números Primos e Compostos.
- Teorema Fundamental da Aritmética.
- Crivo de Eratostenes.
- Número de Divisores.
- Divisores Comuns.
- MDC.
- Números Primos entre si.
- MMC,

Uma das etapas mais importantes da construção do conhecimento proposto por este é a resolução de exercícios. A resolução de exercícios está presente, tanto através de exemplos, quanto através de exercícios propostos que, vocês alunos, devem resolver tentando obedecer à ordem didática apreciada pelo autor.

Aproveitem os estudos!

UM POUCO SOBRE CONJUNTOS

Desde a antiguidade vemos a utilização de vários conceitos de números. Atualmente classificamos os números em conjuntos numéricos.

Relembrando essas classificações:

- **Conjunto dos Números Naturais**

  São todos os números inteiros positivos, covenientemente não iremos incluir o zero, alguns autores incluem. O símbolo $\mathbb{N}$ representa este conjunto. Assim,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...\}$$

- **Conjunto dos Números Inteiros**

  São todos os números que pertencem ao conjunto dos Naturais acrescidos de seus respectivos opostos (negativos) e o número zero. O símbolo $\mathbb{Z}$ representa este conjunto.

$$\mathbb{Z} = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ ...\}$$

- **Conjunto dos Números Racionais**

  O conjunto dos números racionais é um conjunto que engloba todos os números que podem ser escritos na forma de uma fração (todos os números inteiros, os decimais finitos e os decimais infinitos **periódicos** (dízimas periódicas)). O símbolo $\mathbb{Q}$ representa este conjunto.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

- **Conjunto dos Números Irracionais**

  É formado pelos números decimais infinitos não periódicos, como o número π, $\sqrt{3}$, e (número de Euler) e 0,12345678... (que é uma dízima não periódica).

  O conjunto dos números irracionais é representado pela notação $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, que seria o conjunto dos números reais, citado abaixo com exceção dos números racionais.

- **Conjunto dos Números Reais**

  É formado por todos os conjuntos citados anteriormente (união do conjunto dos racionais com os irracionais).

  Representado pelo símbolo $\mathbb{R}$.

Mas quando usamos cada um dos conjuntos numéricos?

Vamos analisar a melhor resposta, através dos seguintes exemplos:

EXEMPLO 1: Certa escola fará uma excursão para o museu. Foram disponibilizadas 8 vans para levar os alunos. Na hora de entrarem nas vans perceberam que eram 84 alunos. Quantos alunos têm em cada van?

RESOLUÇÃO 1:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{-80} & 10 \\ 04 & \end{array}$$

4 vans terão com 10 alunos e as outras 4 vans terão 11 alunos.

EXEMPLO 2: Cinco amigos foram a uma pizzaria e juntos comeram 2 pizzas. Sabendo que cada um comeu a mesma quantidade dos outros amigos, quanto cada um comeu?

RESOLUÇÃO 2:

2 pizzas são divididas para 5 pessoas:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \cline{2-2} \underline{-20} & 0,4 \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{2}{5} = 0,4$, cada amigo comeu 0,4 de uma pizza.

Os dois exemplos acima deixam claro que a solução não depende apenas da “continha” de divisão, também depende do sentido do problema. No exemplo 1, a resposta 10,5 alunos não teria sentido, pois nenhum aluno seria cortado ao meio para entrar na van. Já o exemplo 2, no início da questão

esperávamos como resposta um número não inteiro, uma vez que o número de pizzas é menor que o número de amigos.

Este trabalho será baseado nos números naturais, e dependendo da questão ou demonstração, incluiremos o zero.

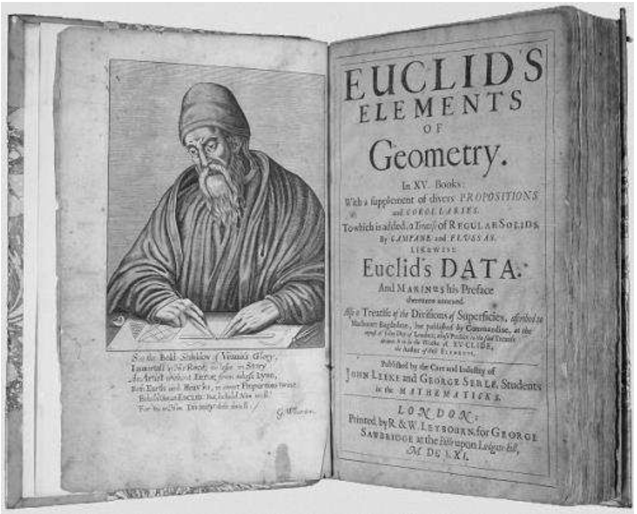
UM POUCO SOBRE EUCLIDES

Euclides de Alexandria nasceu na Síria, aproximadamente 300, a.C. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, incluindo sua data de nascimento e até o local que estudou, pois a informações existentes a seu respeito são inexatas. Euclides era matemático e filósofo e, provavelmente, estudou na Escola Platônica de Atenas, lecionou Matemática no Museu de Alexandria.

Euclides se destacou entre os demais professores pelo seu método de desenvolver Geometria e Álgebra.

Euclides- Fonte: http://www.infoescola.com/biografias/euclides/

Euclides desenvolveu vários axiomas e postulados, sintetizou e organizou trabalhos de outros matemáticos criando assim a sua mais famosa obra, conhecida como “Os Elementos”, onde foi dividido em treze partes onde três se destinavam à Álgebra. Seu livro é foi reeditado inúmeras vezes e atualmente ainda é usado.



Os Elementos de Euclides - Fonte:
http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2013/11/euclides-e-geometria-dedutiva.html

DIVISÃO DE EUCLIDES

Apenas para relembrar algumas nomenclaturas, vamos observar a seguinte divisão:

- ✓ 25 é o dividendo
- ✓ 7 é o divisor
- ✓ 3 é o quociente
- ✓ 4 é o resto

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-21} & 3 \\ 4 & \end{array}$$

- ✓ D é o dividendo
- ✓ d é o divisor
- ✓ q é o quociente
- ✓ r é o resto

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

Alguns outros pontos importantes que devemos observar:

1) O divisor nunca pode ser zero;
2) O dividendo, quociente e o resto podem ser o zero.
3) O resto é sempre não negativo e menor que o divisor;
4) O produto do divisor com o quociente somado com o resto, tem como resultado o dividendo.

Da quarta observação, podemos concluir: $D = d \times q + r$

Essa equação é chamada de equação de Euclides, além do algoritmo que atualmente usamos para fazer divisão também ter sido proposto por ele.

Agora veremos alguns exemplos da aplicação da Equação de Euclides.

EXEMPLO 3: Encontre um número n (Natural) que, quando dividido por 10 deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8 e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.

RESOLUÇÃO 3:

$$\begin{array}{r|l} n & 10 \\ \cline{2-2} & q_1 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 9 \\ \cline{2-2} & q_2 \\ \cline{1-1} 8 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 8 \\ \cline{2-2} & q_3 \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

$$n = 10 \times q_1 + 9 \qquad n = 9 \times q_2 + 8 \qquad n = 8 \times q_3 + 7$$

$$n+1 = 10 \times q_1 + 9 + 1 \qquad n+1 = 9 \times q_2 + 8 + 1 \qquad n+1 = 8 \times q_3 + 7 + 1$$

$$n+1 = 10 \times (q_1 + 1) \qquad n+1 = 9 \times (q_2 + 1) \qquad n+1 = 8 \times (q_3 + 1)$$

Logo *n+1* é divisível por 10, 9 e 8.

Um exemplo para n pode ser:

$$n+1=10.9.8$$
$$n+1=720$$
$$n=719$$

EXEMPLO 4: Qual é o resto que o número $1002.1003.1004$ deixa quando dividido por 7?

RESOLUÇÃO 4:

$$\begin{array}{r|l} 1002 & 7 \\ \hline \underline{\quad} & 143 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1003 & 7 \\ \hline \underline{\quad} & 143 \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1004 & 7 \\ \hline \underline{\quad} & 143 \\ 3 & \end{array}$$

$$1002=7\times143+1 \qquad 1003=7\times143+2 \qquad 1004=7\times143+3$$

$$1002.1003.1004=(7\times143+1)(7\times143+2)(7\times143+3)$$

É fácil ver que, aplicando a propriedade distributiva, o único termo que não teria nenhum fator 7 seria o $1.2.3=6$, logo o resto é 6.

EXEMPLO 5:

Sendo n um número Natural, qual é o resto que o número 4^n deixa quando dividido por 3?

RESOLUÇÃO 5:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline \underline{\quad} & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$4 = 3\times1+1$

$4^n = (3\times1+1)^n$

$4^n = \underbrace{(3\times1+1).(3\times1+1).(3\times1+1)...(3\times1+1)}_{n\ vezes}$

Analogamente ao exercício anterior, aplicando a propriedade distributiva, o único termo que não teria nenhum fator 3 seria o $1.1.1...1=1$, logo o resto é 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

Observando os dois últimos exercícios, demonstre que:

1) Se D_1 e D_2 deixam restos r_1 e r_2, respectivamente, na divisão por q, então: $D_1 + D_2$ deixa o mesmo resto que $r_1 + r_2$, por q.

2) Se D_1 e D_2 deixam restos r_1 e r_2, respectivamente, na divisão por q, então: $D_1.D_2$ deixa o mesmo resto que $r_1.r_2$, por q.

Dica: Use $\begin{array}{l} D_1 = d_1\times q + r_1 \\ D_2 = d_2\times q + r_2 \end{array}$

3) Resolva as divisões abaixo e escreva o resultado na forma da equação de Euclides:

A) $23\div7=$

B) $65\div12=$

C) $654\div9=$

D) $34 \div 6 =$

E) $0 \div 7 =$

4) (Vestibular - FCMMG) Seja *x* um número inteiro positivo. Sabendo-se que *x* satisfaz às seguintes condições: é múltiplo de 3; deixa resto 1 se dividido por 2; por 5 ou por 7; o menor valor de *x*, que satisfaz a essas condições, pertence ao intervalo

A) [100, 180]

B) [190, 270]

C) [280, 360]

D) [370, 450]

5) (Vestibular - PUCPR) A soma *S* de todos os números naturais de dois algarismos que divididos pelo número 5 dão resto igual a 2 é tal que:

A) $S < 550$

B) $550 \leq S < 750$

C) $750 \leq S < 950$

D) $950 \leq S < 1150$

E) $S \geq 1150$

6) Resolva as divisões abaixo e escreva o resultado na forma da equação de Euclides:

a) $16 \,\underline{|2\ \ }$

b) $98 \,\underline{|7\ \ }$

c) $5421 \,\underline{|3\ \ }$

d) $330 \,\underline{|11\ \ }$

O que podemos dizer, além do resultado, quando realizamos a divisão de 16 por 2?

“A divisão é exata.”, “O resto é zero!”, são possíveis respostas, e as duas estão corretas.

Observando a mesma divisão também podemos dizer que:

- 16 é divisível por 2 (essa é uma resposta natural para vocês já que tem a ideia de divisibilidade consolidada).
- 2 divide 16.
- $16 = 2 \times 8 + 0$ (usando a equação de Euclides).

A definição é dada da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 1:

Sejam a e b Números Naturais (b pode ser igual a 0, mas $a \neq 0$), dizemos que b é divisível por a se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b = a.c$.

DEFINIÇÃO 2:

Sejam a e b Números Naturais (b pode ser igual a 0, mas $a \neq 0$), dizemos que a divide b, se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b = a.c$.

NOTAÇÃO: $a|b$ (a divide b)

DEFINIÇÃO 3:

Caso contrário, se para todo $n \in \mathbb{N}$ tivermos $b = a.n + r$, com $r \neq 0$ dizemos que a não divide b **.**

NOTAÇÃO: $a \nmid b$ (a não divide b).

Já temos algumas ideias consolidadas sobre divisões, do tipo: “Qualquer número dividido por ele mesmo é 1.” ou “Qualquer número é divisível por 1”. Agora vamos propor outras e prová-las.

TEOREMA 1: Sejam a, b, c e d $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $a \neq 0$, temos:

$i)$ $a|a$ e $a|0$.

$ii)$ $1|n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$iii)$ Sendo $b \neq 0$, se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

$iv)$ Sendo $c \neq 0$ se $a|b$ e $c|d$, então $a.c|b.d$.

$v)$ Se $a \neq 0$ e $a|b$, então $b \geq a$.

<u>DEMOSTRAÇÃO 1:</u>

Sejam a, b, c e d $\in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $a \neq 0$, temos:

$i)$ $a = a.1 \Leftrightarrow a|a$

$0 = a.0 \Leftrightarrow a|0$

$ii)$ $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n = 1.n \Leftrightarrow 1|n$

$iii)$ Se $a|b$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.n$ **(1)**

Se $b|c$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c = b.m$ **(2)**

Logo:

$$c = b.m \underset{(1)}{=} (an)m = \underset{\in \mathbb{N}}{a(mn)}$$

$$c = a\underset{\in \mathbb{N}}{(mn)} \Leftrightarrow a|c$$

$iv)$ Se $a|b$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.n$ **(1)**

Se $c|d$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d = c.m$ **(2)**

Logo:

$$b.d \underset{(1)e(2)}{=} (an)(cm) = ac\underbrace{(mn)}_{\in\mathbb{N}}$$

$$b.d = (ac)\underbrace{(mn)}_{\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow ac\,|\,bd$$

$v)$ Sendo $a \neq 0$ sabemos que $a|b \Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.n$, como $b > 0$, então $n \geq 1$, consequentemente $n.a \geq 1.a$, ou seja, $b \geq a$.

Se um número é divisor de dois outros números, ele também é divisor da soma e da subtração dos mesmos (o módulo da subtração, já que estamos trabalhando apenas com os números Naturais).

Transformando em notação Matemática, temos:

TEOREMA 2:

Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b+c$ e $a\,\big|\,|b-c|$.

DEMOSTRAÇÃO 2:

Se $a|b$ e $a|c$ logo existe d, $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que:

Se $b = a \times d$ e $c = a \times e$.

Então, $b + c = a \times d + a \times e = a \times (d + e)$.

$$b + c = a \times (d + e)$$

Logo $a \,|\, b + c$.

Analogamente, $|b - c| = |ad - ae| = a|(d - e)|$.

Logo $a \,|\, |b - c|$.

A diferença de b e c seja um número positivo, já que estamos trabalhando no universo dos números naturais.

TEOREMA 3.1:

Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então $a \times c \mid b \times d$.

DEMOSTRAÇÃO 3.1:

Se $a \mid b$ e $c \mid d$ então existe e e $f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que:

$b = a \times e \qquad d = c \times f$

$b \times d = a \times e \times c \times f = a \times c \times \underbrace{(e \times f)}_{k}$

$b \times d = (a \times c) \times k$

Então, $a \times c \mid b \times d$.

TEOREMA 3.2:

Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que

$a \mid (b+c)$, então $a \mid b \iff a \mid c.$

DEMOSTRAÇÃO 3.2:

Se $a \mid (b+c)$, então existe $f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que:

$(\bullet) \quad b + c = a \times f$

$(\Rightarrow)$ Se $a \mid b$ então existe $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$(\bullet\bullet)$ $b = a \times g$

Substituindo $(\bullet\bullet)$ em $(\bullet)$ temos:

$b + c = a \times g + c = a \times f$

$c = a \times f - a \times g$

$c = a \times (f - g)$ (como $b + c \geq b$, logo $f \geq g$, então $f - g \geq 0$)

$(\Leftarrow)$ Analogamente, se $a|c$ então existe $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$(\bullet\bullet\bullet)$ $c = a \times h$

Substituindo $(\bullet\bullet\bullet)$ em $(\bullet)$ temos:

$b + c = b + a \times h = a \times f$

$b = a \times f - a \times h$

$b = a \times (f - h)$ (como $b + c \geq c$, logo $f \geq h$, então $f - h \geq 0$)

TEOREMA 3.3:

Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $a \,\big|\, |b - c|$.

Então $a|b \Leftrightarrow a|c$.

DEMOSTRAÇÃO 3.3:

Se $a|(b - c)$, então existe $f \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $b \geq c$, tal que:

$(\bullet)$ $b - c = a \times f$

$(\Rightarrow)$ Se $a|b$ então existe $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$(\bullet\bullet)$ $b = a \times g$

Substituindo $(\bullet\bullet)$ em $(\bullet)$ temos:

$b - c = a \times g - c = a \times f$

$c = a \times f + a \times g$

$c = a \times (f + g)$, ou seja, $a|c$

$(\Leftarrow)$ Analogamente, se $a \mid c$ então existe $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$(\bullet\bullet\bullet)$ $c = a \times h$

Substituindo $(\bullet\bullet\bullet)$ em $(\bullet)$ temos:

$b - c = b - a \times h = a \times f$

$b = a \times f + a \times h$

$b = a \times (f + h)$, ou seja, $a \mid b$.

__TEOREMA 4.1:__ Se $a \in \mathbb{N}$ e $b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (x \times b + y \times c)$, sendo $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

__DEMOSTRAÇÃO 4.1:__

Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem d e $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $b = a \times d$ e $c = a \times e$.

$x \times b + c \times y = x \times a \times d + y \times a \times e = a \times (x \times d + x \times e)$.

Logo, $a \mid (x \times b + y \times c)$.

__TEOREMA 4.2:__ Se $a \in \mathbb{N}$, $b, c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (tomando $b \geq c$), tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (x \times b - y \times c)$, sendo $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

__DEMOSTRAÇÃO 4.2:__

Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem d e $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $b = a \times d$ e $c = a \times e$.

$x \times b - c \times y = x \times a \times d - y \times a \times e = a \times (x \times d - x \times e)$.

Logo, $a \mid (x \times b - y \times c)$.

NÚMEROS PARES, ÍMPARES, SUCESSORES E APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EUCLIDES

Um tipo de raciocínio que devemos frisar, é como podemos definir alguns números.

- Qualquer número par pode ser escrito da forma $2k$, onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Qualquer número ímpar pode ser escrito da forma $2k+1$, onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- O sucessor de um número n é o número $n+1$.
- Os possíveis restos da divisão de D por d, são todos os números naturais menores que d mais o número zero.

Podemos aplicar o último item acima observando uma divisão. Quando dividimos qualquer número por 4, o resto da divisão pode ser qualquer número menor que 4 ou o 0, ou seja, $D = 4q + 0$, $D = 4q + 1$, $D = 4q + 2$ ou $D = 4q + 3$ (Para qualquer $D, q \in \mathbb{N}$) .

EXEMPLO 6:

A soma de dois números consecutivos é sempre ímpar.

RESOLUÇÃO 6:

Dados dois números positivos e consecutivos, suponha (sem perda de generalidade) que sejam $2n$ e $2n+1$.

A soma desses dois números seria:

$$S = (2n) + (2n+1)$$
$$S = 4n + 1$$
$$S = 2\underbrace{(2n)}_{k} + 1$$
$$S = 2k + 1$$

Onde $k \in \mathbb{N}$, S é necessariamente ímpar.

EXEMPLO 6:

Mostre que se a soma de dois números consecutivos é sempre ímpar.

RESOLUÇÃO 6:

Dados dois números positivos e consecutivos, suponha (sem perda de generalidade) que sejam $2n$ e $2n+1$.

A soma desses dois números é:

$$
\begin{aligned}
S &= (2n)+(2n+1) \\
S &= 4n+1 \\
S &= 2\underbrace{(2n)}_{k}+1 \\
S &= 2k+1
\end{aligned}
$$

Onde $k \in \mathbb{N}$, S é necessariamente ímpar.

EXEMPLO 7:

Mostre que o produto de dois números consecutivos é sempre par.

RESOLUÇÃO 7:

Dados dois números positivos e consecutivos, suponha (sem perda de generalidade) que sejam $2n$ e $2n+1$.

O produto desses dois números é:

$$
\begin{aligned}
P &= (2n).(2n+1) \\
P &= 4n^2+2n \\
P &= 2\underbrace{(2n^2+n)}_{k} \\
P &= 2k
\end{aligned}
$$

Onde $k \in \mathbb{N}$, P é necessariamente par.

EXEMPLO 8:

Quais são os números que, quando divididos por 5, deixam resto igual à metade do seu quociente?

RESOLUÇÃO 8:

Sabemos que $D = d.q + r$, tomando $d = 5$, teremos $D = 5.q + \frac{q}{2}$

Também sabemos que r pode assumir qualquer valor de 0 até 4, então os possíveis valores de q são todos os números PARES de 0 a 8, pois r é um número inteiro.

Substituindo na equação $D = 5.q + \frac{q}{2}$, temos:

Para $q = 0$ temos: $5.0 + \frac{0}{2} = 0$

Para $q = 2$ temos: $5.2 + \frac{2}{2} = 11$

Para $q = 4$ temos: $5.4 + \frac{4}{2} = 22$

Para $q = 6$ temos: $5.6 + \frac{6}{2} = 33$

Para $q = 8$ temos: $5.8 + \frac{8}{2} = 44$

Logo, a resposta seria:

$D = 0,\ 11,\ 22,\ 33,\ 44$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

7) Demonstre que o produto de três números consecutivos é múltiplo de 3. (Dica: represente esses três números como $3n$, $3n+1$ e $3n+2$).

8) Demonstre que o produto de três números consecutivos é múltiplo de 6.

9) (OBM-2012–Nível 3) Qual é a maior potência de 2 que divide 2011.2012 – 1?

A) 2

B) 4

C) 8

D) 16

E) 32

10) Quais são os números que, quando divididos por 5, deixam resto igual :

A) ao quociente?

B) ao dobro do quociente?

c) ao triplo do quociente?

11) Mostre que, *n* se é ímpar, então $n^2 -1$ é divisível por 8.

12) (ENC-2001) Seja M um número natural, prove que a divisão de M^2 por 6, nunca deixa resto 2.

13) (ENC- 2002) O resto da divisão do inteiro M por 20 é 8. Qual é o resto da divisão de M por 5?

14) Ache o menor múltiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Iremos definir alguns critérios de divisibilidade para o nosso sistema de numeração. Primeiramente, devemos lembrar que nosso sistema de numeração é decimal e posicional, ou seja, temos dez algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) e seu valor aumenta ou diminui de acordo com sua posição.

Vamos provar teoremas que demonstram muitos critérios de divisibilidade para alguns números específicos, para isso vamos usar o raciocínio do nosso sistema de numeração ser na base 10. Observe o exemplo:

$$\begin{aligned} 5439 &= 9\times 1 + 4\times 10 + 3\times 100 + 5\times 1000 \\ &= 9\times 10^0 + 4\times 10^1 + 3\times 10^2 + 5\times 10^3 \end{aligned}$$

Generalizando esse raciocínio, temos que um número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Já estamos bastante habituados com o critério de divisibilidade por 2:

"Todo número é divisível por 2 se seu algarismo das unidades for par."

Agora vamos propor esse critério como um teorema usando uma linguagem mais formal.

TEOREMA 5.1: Dado um número $a \in \mathbb{N}$,onde a tem n algarismos (com $n \geq 1$).

O número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Temos: $2|a \Leftrightarrow 2|a_0$

DEMOSTRAÇÃO 5.1:

Dado o número a , temos:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$$
$$a = a_0 \times 1 + 10 \times \left(a_1 + a_2 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-1}\right)$$
$$a = a_0 + \underbrace{2 \times \left[5 \times \left(a_1 + a_2 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-1}\right)\right]}_{a_k}$$
$$a = a_0 + a_k$$

Logo $2 | a_k$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $2 | a_0$, já que $2 | a_k$ e $a = a_0 + a_k$, pelo Teorema 2, $2 | a$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $2 | a$, já que $2 | a_k$ e $a_0 = a - a_k$, pelo Teorema 2, $2 | a_0$.

O critério de divisibilidade por 4 mostra um raciocínio similar. Um número é divisível por 4 quando seus dois últimos dígitos são divisíveis por 4.

TEOREMA 5.2: Dado um número $a \in \mathbb{N}$,onde a tem n algarismos (com $n \geq 1$).

O número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Temos: $4 | a \Leftrightarrow 4 | a_0 + a_1 \times 10$

DEMOSTRAÇÃO 5.2:

Dado o número a temos:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$$
$$a = a_0 \times 1 + a_1 \times 10 + 100 \times \left(a_2 + a_3 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-2}\right)$$
$$a = \underbrace{a_0 + a_1 \times 10}_{a_j} + \underbrace{4 \times \left[25 \times \left(a_2 + a_3 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-2}\right)\right]}_{a_k}$$
$$a = a_j + a_k$$

Logo $4|a_k$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que 4 divide os dois últimos dígitos do número a ($4|a_j$), já que $4|a_k$ e $a = a_j + a_k$, pelo Teorema 1, $4|a$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $4|a$, já que $4|a_k$ e $a_j = a - a_k$, pelo Teorema 2, $4|a_j$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

15) Escreva o critério de divisibilidade por 8 e demonstre.

Vamos fazer uma pausa no estudo para fazermos uma brincadeira.

Siga os passos propostos na lista abaixo sem fazer pausas, e só mude de item depois que fizer o que o item anterior pediu:

1) Pense um número de 1 a 10.
2) Multiplique seu número por 9.
3) Some os algarismos do resultado.
4) Subtraia 5 do resultado encontrado no item anterior.
5) Pense na letra que seja equivalente ao resultado usando a seguinte ideia de que A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6...
6) Após encontrar a letra, pense em um país que comece com essa letra.
7) Encontre a quinta letra desse país.
8) Pense em um animal com essa letra.
9) Agora, com a mesma letra, escolha uma cor para esse animal.
10) Com a letra que você preferir, escolha uma fruta que esse animal come.

Conseguiu? Agora me responda:

- O que esse macaco marrom está fazendo na Dinamarca comendo banana?

Deu certo? Você sabe por quê?

A resposta dessa brincadeira está no critério de divisibilidade por 9, que é muito parecido com o critério de divisibilidade por 3, que é bastante conhecido:

"Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos também é divisível por 3."

TEOREMA 6: Dado um número $a \in \mathbb{N}$,onde a tem n algarismos (com $n \geq 1$).

O número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Temos: $3 | a \Leftrightarrow 3 | a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

DEMOSTRAÇÃO 6:

Dado o número a temos:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$$
$$a = a_0 \times 1 + a_1 \times 10 + a_2 \times 100 + a_3 \times 1000 + a_4 \times 10000 ... + a_n \times 10^n$$
$$a = a_0 + a_1 + a_1 \times 9 + a_2 + a_2 \times 99 + a_3 + a_3 \times 999 + a_4 + a_4 \times 9999 + ... + a_n + a_n \times \underbrace{999...999}_{n \text{ números } 9}$$
$$a = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + \left(a_1 \times 9 + a_2 \times 99 + a_3 \times 999 + a_4 \times 9999 + ... + a_n \times \underbrace{999...999}_{n \text{ números } 9} \right)$$
$$a = \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n)}_{a_j} + \underbrace{3 \times \left(a_1 \times 3 + a_2 \times 33 + a_3 \times 333 + a_4 \times 3333 + ... + a_n \times \underbrace{333...33}_{n \text{ números } 3} \right)}_{a_k}$$
$$a = a_j + a_k$$

Logo $3 | a_k$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $3 | a_j$, já que $3 | a_k$ e $a = a_j + a_k$, pelo Teorema 2, $3 | a$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $3 | a$, já que $a_j = a - a_k$, pelo Teorema 2, $3 | a_j$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

16) Escreva o critério de divisibilidade por 9 e demostre.

17) Justifique porque a brincadeira que acabamos de fazer dá certo na maioria das vezes. Encontre um exemplo de raciocínio que a resposta daria errada.

TEOREMA 7: Dado um número $a \in \mathbb{N}$,onde a tem n algarismos (com $n \geq 1$).

O número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Temos: $5|a \Leftrightarrow a_0 = 0 \ ou \quad a_0 = 5$

DEMOSTRAÇÃO 7:

Dado o número a temos:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$$
$$a = a_0 \times 1 + 10 \times \left(a_1 + a_2 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-1}\right)$$
$$a = a_0 + \underbrace{5 \times \left[2 \times \left(a_1 + a_2 \times 10^1 + ... + a_n \times 10^{n-1}\right)\right]}_{a_k}$$
$$a = a_0 + a_k$$

Logo $5|a_k$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $5|a_0$ (ou seja $a_0 = 5$ ou $a_0 = 0$. Já que $5|0$ e $5|5$ pelo Teorema 1) , e sabemos que $5|a_k$ e $a = a_0 + a_k$, pelo Teorema 2, $5|a$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $5|a$, como $a_0 = a - a_k$, pelo Teorema 2 , $5|a_0$

Logo, $a_0 = 5$ ou $a_0 = 0$, já que $5|0$ e $5|5$ pelo Teorema 1.

EXERCÍCIOS PRPOSTOS:

18) Escreva o critério de divisibilidade por 10 e demostre.

19) Escreva o critério de divisibilidade por 6.

20) Sendo x e y algarismos do número 32x84y, qual deve ser o menor valor atribuído a cada uma destas variáveis, tal que 32x84y seja simultaneamente divisível por 3 e por 5?

21) Sendo x e y os dois últimos dígitos do número 1xy, qual deve ser o maior valor atribuído a eles de sorte que o número resultante seja tanto divisível por 5 e por 6?

22) Qual é o maior número com três dígitos que é divisível por 4 e também por 5?

23) Um número é divisível por 9 e por 5. Se somarmos 315 a este número ele ainda continuará divisível por 9 e por 5?

24) Quantos dígitos possui o número $N = 2^{124} \cdot 5^{120}$?

25) (Apostila 2006 OBMEP) Quantos zeros possui 100! ?

(Dica: $6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$)

Os critérios de divisibilidade por 7 e por 11 são menos conhecidos, mas o raciocínio na demonstração desses dois critérios é interessante, portanto será demonstrado abaixo.

O próximo teorema é um dos critérios de divisibilidade por 7, existem outros. Antes de propor o teorema iremos fazer dois exemplos da aplicação desse critério.

EXEMPLO 9: Descubra se 1785 é um múltiplo de 7, sem realizar a divisão.

RESOLUÇÃO 9:

Vamos anular o último digito do número e encontrar um novo número.

Desse novo número subtraímos o dobro do número anulado, se encontrarmos um número que sabemos ser divisível por 7, o primeiro número também é.

$178\cancel{5} \to 178 - 2.5 = 168$

Como ainda não sabemos se 168 é, ou não, divisível por 7, vamos repetir o processo.

$16\cancel{8} \to 16 - 2.8 = 0$

Como 0 é múltiplo de qualquer número então 1785 é divisível por 7

EXEMPLO 10: Descubra se 1987 é um múltiplo de 7 sem realizar a divisão.

RESOLUÇÃO 10:

Vamos anular o último digito do número e encontrar um novo número.

Desse novo número subtraímos o dobro do número anulado, se encontrarmos um número que sabemos ser divisível por 7, o primeiro número também é.

$198\cancel{7} \to 198 - 2.7 = 184$

Como ainda não sabemos se 168 é, ou não, divisível por 7, vamos repetir o processo.

$18\cancel{4} \to 18 - 2.4 = 10$

Como 10 não é múltiplo de 7 então 1987 não é divisível por 7.

Entendeu o método?

Agora, vamos enunciar o teorema:

TEOREMA 8: Um número natural n (da forma $10a+b$) é divisível por $7 \Leftrightarrow a-2b$ é divisível por 7.

DEMOSTRAÇÃO 8:

$(\Rightarrow)$ Suponha que o número n é divisível por 7.

Podemos escrever o número n como $10a+b$, logo:

$$10a+b=7k$$
$$10a+b+\underbrace{20b-20b}_{=0}=7k$$
$$10a+21b-20b=7k$$
$$10a-20b=7k-21b$$
$$10(a-2b)=7\underbrace{(k-3b)}_{k'}$$
$$10.(a-2b)=7k'$$

Como o 10 não é múltiplo de 7 então $a-2b$ tem que ser múltiplo de 7.

$(\Leftarrow)$ Suponha que $a-2b$ é divisível por 7. Logo:

$$a-2b=7k$$
$$10a-20b=70k$$
$$10a-20b\underbrace{-b+b}_{=0}=70k$$
$$10a-21b+b=70k$$
$$10a+b=70k+21b$$
$$10a+b=7\underbrace{(k+3b)}_{k'}$$
$$10a+b=7k'$$

Você saberia dizer qual é o critério de divisibilidade por 11?

Antes de demonstrarmos ou enunciarmos esse critério, vamos raciocinar sobre as divisões de potências de 10 por 11. É um bom caminho para iniciarmos, pois nosso sistema de numeração é decimal e usamos essa ideia nas demonstrações anteriores.

10 não é divisível por 11, mas 10+1 é.

100 não é divisível por 11, mas 100-1 é.

1.000 não é divisível por 11, mas 1000+1 é

10.000 não é divisível por 11, mas 10.000-1 é.

Generalizando, teremos que:

10^n não é divisível por 11, mas 10^n+1 é (se n for ímpar)

ou 10^n-1é (quando n for ímpar).

Veremos alguns exemplos de aplicação do critério de divisibilidade por 11.

EXEMPLO 11: O número 581559 é divisível por 11?

RESOLUÇÃO 11:

9-5+5-1+8-5=11

Como 11 é divisível por 11, então 581559 é divisível por 11.

EXEMPLO 12: O número 1.001 é divisível por 11?

RESOLUÇÃO 12:

1-0+0-1=0

Como 0 é divisível por 11, então 581559 é divisível por 11.

EXEMPLO 13: O número 394567 é divisível por 11?

RESOLUÇÃO 13:

7-6+5-4+9-3= 8

Como 8 não é divisível por 11, então 394567 não é divisível por 11.

Através dos exemplos, podemos enunciar o critério de divisibilidade:

Um número é divisível por 11 quando a subtração dos algarismos de ordem par pelos algarismos de ordem ímpar, é múltiplo de 11 (tomando o último algarismo como o ocupante da posição 0, o penúltimo algarismo ocupante da posição 1 e assim sucessivamente).

Logo podemos propor o teorema que segue:

TEOREMA 9: Dado um número $a \in \mathbb{N}$,onde a tem n algarismos (com $n \geq 1$).

O número a pode ser escrito como:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 10^i$$

Temos: $11 | a \Leftrightarrow 11 | (a_0 + a_2 + a_4 ...) - (a_1 + a_3 + a_5 ...)$

DEMOSTRAÇÃO 9:

Dado o número a temos:

$$a = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + a_4 \times 10^4 ... + a_n \times 10^n$$

$$a = a_0 \times 1 + 10 \times a_1 \underbrace{+ a_1 - a_1}_{0} + a_2 \times 10^2 \underbrace{- a_2 + a_2}_{0} + a_3 \times 10^3 \underbrace{+ a_3 - a_3}_{0} + a_4 \times 10^4 \underbrace{- a_4 + a_4}_{0} + ... + a_n \times 10^n \underbrace{- a_n + a_n}_{0}$$

$$a = a_0 + a_1 \underbrace{(10^1 + 1)}_{multiplo\ de\ 11} - a_1 + a_2 \underbrace{(10^2 - 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_2 + a_3 \underbrace{(10^3 + 1)}_{multiplo\ de\ 11} - a_3 + a_4 \underbrace{(10^4 - 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_4 + ... + a_n \underbrace{(10^n - 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_n$$

$$a = \underbrace{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... + a_n \times (-1)^n}_{b_1} + \underbrace{a_1 \underbrace{(10^1 + 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_2 \underbrace{(10^2 - 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_3 \underbrace{(10^3 + 1)}_{multiplo\ de\ 11} + a_4 \underbrace{(10^4 - 1)}_{multiplo\ de\ 11} + ... + \underbrace{(10^n - 1)}_{multiplo\ de\ 11}}_{b_2}$$

$a = b_1 + b_2$

Onde $11 | b_2$

$(\Leftarrow)$ Suponha que $11 | b_1$, como $11 | b_2$,pelo Teorema 2, $11 | a$.

$(\Rightarrow)$ Suponha que $11 | a$, como $11 | b_2$ e $b_1 = a - b_2$,pelo Teorema 2, $11 | b_1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

26) (Vestibular UNIFESP) Um número inteiro positivo m dividido por 15 dá resto 7. A soma dos restos das divisões de m por 3 e por 5 é:

A) 2

B)3

C)4

D)5

E)6

27) (Vestibular UFU-MG) Desenvolvendo o número $10^{65} - 92$, iremos encontrar todos os algarismos que o compõem. Assim, pode-se afirmar que a soma desses algarismos é igual a:

A) 575

B) 573

C) 566

D) 585

28) (Vestibular do ITA) Na sequência (24, 2534, 253534, 2535353534,...) seja n o primeiro número divisível por 99. O número de algarismos de n é igual a:

A)170

B)172

C)174

D) 176

E) 178

NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Já temos o conceito de número primo bem consolidado, agora vamos definir o que seria um número primo:

DEFINIÇÃO 4: Número primo é qualquer número natural, diferente de 1, que seja divisível APENAS por ele mesmo e por 1.

Mesmo não considerando zero um número natural, vamos frisar que o zero, nem o número um, não são primos.

DEFINIÇÃO 5: Número composto é qualquer número natural, diferente de 1, que não seja primo.

Exemplo de um conjunto de números compostos são os números pares maiores que o número 2. Assim é fácil ver que o conjunto de números compostos é infinito, já que o conjunto dos números pares é infinito.

Outra observação importante, é que o único número par e primo é o 2, pois todos os outros números pares são múltiplos de 2.

Já que os números compostos são infinitos, o que podemos dizer sobre os números primos?

Quem respondeu essa pergunta foi Euclides usando uma demonstração baseada em uma hipótese falsa (técnica do absurdo).

TEOREMA 10: O conjunto dos números primos é infinito.

DEMOSTRAÇÃO 10:

Para demonstrar o Teorema 10, faremos uma hipótese contrária ao que queremos provar e vamos provar que ela é falsa.

HIPÓTESE: Quantidade de primos é finita.

Suponha que a quantidade de números primos seja finita e considere o número A composto pelo produto de todos os primos.

$A = p_1.p_2.p_3...p_i...p_n$, onde p_1 seria o menor número primo e p_n o maior primo existente.

Sabendo que 2 é primo e 2>1, logo $A > 1$, já que 2 é um fator de A.

Observe o número $A+1$.

$A+1>A$, consequentemente $A+1$ é maior do que qualquer número primo, logo $A+1$ não poderia ser primo, podendo apenas ser um número composto.

Se $A+1$ é composto, então ele necessariamente é um múltiplo de certo número primo p_i, e apesar de não sabermos o valor de p_i, sabemos que ele é um fator de A.

Ou seja: $A+1=K.p_i$ e $A=p_i.\left(p_1.p_2.p_3...p_n\right)$

$$\left.\begin{array}{l} A+1=p_i.K \quad \Rightarrow \quad A=p_i.K-1 \\ \\ A=p_i.\underbrace{\left(p_1.p_2.p_3...p_n\right)}_{K'} \Rightarrow A=p_{i.}K' \end{array}\right\}$$

$$igualando\ as\ duas\ equações\ temos: p_i.K-1=p_{i.}K'$$

$$p_i.K-p_{i.}K'=1$$

$$p_i.(K-K')=1$$

O que seria um absurdo, já que o número 1 não pode ser escrito como produto de dois números inteiro diferentes de 1.

Se provamos que a hipótese é falsa, logo a negação da hipótese é verdadeira, ou seja, a quantidade de números primos é infinita.

Acabamos de ver que os conjuntos dos números primos e compostos são infinitos, agora vamos entender que, qualquer número composto é um produto único de números primos. Ou, escrevendo de outra maneira, um Número Natural é primo ou produto único de primos, com exceção do número 1.

Dado um número natural a, com $a \geq 2$, existe um número primo p_0 tal que:

- Ou o número a é um número primo, ou tem um primo na sua fatoração: $a = p_0$ ou $a = p_0.a_1$, e sabemos que $1 < a_1 < a$, onde a_1 é um número natural.
- Por sua vez, o número a_1 é um número primo, ou existe um primo na sua fatoração: $a_1 = p_1$ ou $a_1 = p_1.a_2$, e sabemos que $1 < a_2 < a_1 < a$, onde a_2 é um número natural e p_1 .
- Analogamente, o número a_2 é um número primo, ou tem um primo na sua fatoração: $a_2 = p_2$ ou $a_2 = p_2.a_3$, e sabemos que $1 < a_3 < a_2 < a_1 < a$, onde a_3 é um número natural e p_2 .

Repetindo esse raciocínio, teremos:

O número a é um número primo ou é o produto de n números primos:

$a = p_0$ ou $a = p_0.p_1.p_2.p_3...p_n$, sendo que $1 < p_n ... < p_4 < p_3 < p_2 < p_1 < p_0 < a$, onde a é um número natural e p_0 é o maior número primo na fatoração de a, p_1 o segundo maior, e assim sucessivamente, até p_n, que é o menor primo da fatoração de a.

Assim podemos enunciar o Teorema fundamental da Aritmética:

<u>TEOREMA 11:</u> TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a > 1$, então a é um primo ou pode ser expresso unicamente (com exceção da ordem) como um produto finito de números primos.

Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a > 1$, então a é um primo ou pode ser expresso unicamente como um produto finito de números primos.

EXEMPLO 14: Encontre números primos que tenham como resultado do produto o número 30.

RESOLUÇÃO 14:

30 = 2.3.5, ou seja, 30 é a multiplicação dos números primos 2, 3 e 5.

Observe que para o TFA ser válido, o número 1 não pode considerado número primo, pois nenhuma fatoração seria única:

$15 = 3.5$

$15 = 3.5.1$

$15 = 3.5.1.1$

...

$15 = 3.5.1.1...$

CRIVO DE ERATOSTENES

O Crivo de Eratostenes é um método de encontrar números primos através da eliminação dos números compostos.

De acordo com os significados da palavra crivo, o sinônimo mais adequado seria a palavra peneira. Uma peneira faz uma separação entre alguns materiais, eliminando alguns enquanto o alvo da busca fica dentro da peneira. Análogo a uma peneira, o Crivo de Eratostenes funciona, eliminando os números compostos, ficando no final apenas os números primos.

Primeiramente, faz-se uma tabela com os números naturais a partir do número 2.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Identifica-se o primeiro número primo, no caso, o número 2, com uma marcação e todos os seus múltiplos são eliminados (com outra marcação).

	$\boxed{2}$	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~

Em seguida, analisa-se o próximo item da tabela, no caso o número 3. Analogamente ao passo anterior, seus múltiplos são eliminados.

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

Repetimos o processo até “peneirarmos” todos os números da primeira tabela, assim todos os primos de 2 a 60 são encontrados.

	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	~~4~~	$\boxed{5}$	~~6~~	$\boxed{7}$	~~8~~	~~9~~	~~10~~
$\boxed{11}$	~~12~~	$\boxed{13}$	~~14~~	~~15~~	~~16~~	$\boxed{17}$	~~18~~	$\boxed{19}$	~~20~~
~~21~~	~~22~~	$\boxed{23}$	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	$\boxed{29}$	~~30~~
$\boxed{31}$	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	$\boxed{37}$	~~38~~	~~39~~	~~40~~
$\boxed{41}$	~~42~~	$\boxed{43}$	~~44~~	~~45~~	~~46~~	$\boxed{47}$	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	$\boxed{53}$	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	$\boxed{59}$	~~60~~

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 39, 41, 43, 47, 51, 57, 59\}$$

O crivo pode ser reproduzido em qualquer “tamanho”, ou seja, se quiser encontrar todos os múltiplos até 200 é só repetir o processo até 200.

QUANTOS DIVISORES TEM UM NÚMERO?

Quais seriam os divisores do número 12?

$$D(12)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,12\}$$

Uma observação importante, é que ao colocarmos os divisores de um número em ordem crescente, o produto dos extremos é o próprio número. Observe:

$$D(12)=\{\underbrace{1,\ \underbrace{2,\ \underbrace{3,\ 4}_{3\times4},\ 6}_{2\times6},12}_{1\times12}\}$$

Lembrando que o número 1 é divisor de qualquer número, e que um número é sempre divisor dele mesmo. Logo, podemos dizer que o número de divisores de 12 é 6 , usaremos a notação $n(12)=6$.

Quantos seriam os divisores de 360?

Agora não é conveniente encontrar todos os divisores e conta-los, então iremos usar outra estratégia.

Fatorando o número 360 temos:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 360=2^3.3^2.5^1$$

Os divisores de 360 são formados pelo produto de fatores de 360, logo os divisores seriam combinações dos fatores 2, 3 e 5.

Então, escolhendo um número aleatório d que seja divisor de 360, temos que ver quantas vezes o número 2, 3 e 5 aparece na sua fatoração.

O número 2 pode aparecer na fatoração de d, uma, duas, três ou zero vezes.

O número 3 pode aparecer na fatoração de d, uma, duas ou zero vezes.

O número 5 pode aparecer na fatoração de d, uma ou zero vezes.

Logo, temos quatro respostas para o fator 2, três respostas para o fator 3 e duas respostas para o fator 5.

Então, $n(360) = 4.3.2 = 24$, ou, $n(360) = (3+1).(2+1).(1+1) = 4.3.2 = 24$, onde cada fator deste produto é a potência de cada número primo da fatoração de 360 adicionado uma possibilidade, que seria a opção deste número primo não aparecer na fatoração do d.

EXEMPLO 15: Quantos divisores tem o número 500?

RESOLUÇÃO 15:

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 500 = 2^2.5^3 \qquad n(500) = (2+1).(3+1) = 3.4 = 12$$

EXEMPLO 16: Quantos divisores ímpares tem o número 500?

RESOLUÇÃO 16:

Um número ímpar não pode ter o número 2 em sua fatoração.

Como $500 = 2^2.5^3$, então $n(500)\ \textit{ímpares} = (3+1) = 4$.

EXEMPLO 17: Quantos divisores de 500 são múltiplos de 25?

RESOLUÇÃO 17:

Um número múltiplo de 25 deve ter o número 5 (no mínimo) duas vezes em sua fatoração.

Como $500 = 2^2.5^3$, então o número 5 pode aparecer na fatoração duas ou três vezes $n(500)$ *múltiplos de* $25 = (2+1).(2) = 3.2 = 6$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

29) (Vestibular UERJ) Seja *n* = 20!. Determine o maior fator primo de *n*.
Dica: 20!=20.19.18.17...3.2.1

30) (Vestibular UFMG) Seja *N* o menor número inteiro pelo qual se deve multiplicar 2.520 para que o resultado seja o quadrado de um número natural. Então, a soma dos algarismos de *N* é:

A) 9

B) 7

C) 8

D) 10

32) (Vestibular UFF) Sophie Germain introduziu em seus cálculos matemáticos um tipo especial de número primo descrito a seguir: "Se *p* é um número primo e se 2*p* + 1 é um número primo, então o número primo *p* é denominado primo de Germain." Pode-se afirmar que é primo de Germain o número:

A) 7

B) 17

C) 18

D) 19

E) 41

33) (Vestibular UFRJ) n e m são números naturais, $n = 1000! + 18$ e $m = 50! - 37$.

Calcule o resto da divisão de *n* por 18;

m é um número primo? Justifique sua resposta.

34) O menor natural *N* para o qual $1260 \cdot N = x^3$, sendo *x* um inteiro é:

A) 1260

B) 1050

C) 12602

D) 7350

E) 44100

35) (Vestibular UFV) Seja *x* = 3600. Se p é o número de divisores naturais de *x*, e *q* é o número de divisores naturais pares de *x*, então é CORRETO afirmar que:

A) p = 45 e q = 36.

B) p = 36 e q = 45.

C) p = 16 e q = 10.

D) p = 45 e q = 12.

E) p = 16 e q = 34.

36) (CN) Seja $N = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^6$. O número de divisores de N que são múltiplos de 10 é:

A) 24

B) 35

C) 120

D) 144

E) 210

37) Sabendo que $N = 2^x \cdot 5 \cdot 7^x$ possui 12 divisores positivos ímpares, determine o número de divisores positivos pares de *N*:

A) 12

B) 24

C) 30

D) 40

E) 60

DIVISORES COMUNS

Encontraremos todos os divisores de 18 e 24:

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Observe que os números 1, 2, 3 e 6 são divisores tanto de 18, quanto de 24.

$D(18) = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{6}, 9, 18\}$

$D(24) = \{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, \boxed{6}, 8, 12, 24\}$

Sendo o número 6 o maior divisor em comum entre 18 e 24, ele recebe a denominação de Máximo Divisor Comum. É bem comum usarmos a sigla MDC e representarmos por $mdc(18, 24) = 6$, logo vamos definir:

DEFINIÇÃO 6: Dados a e b, Números Naturais, dizemos que d é DIVISOR COMUM de a e b, se ,e somente se, $d|a$ e $d|b$.

Dizemos que d é o MÁXIMO DIVISOR COMUM de a e b se ,e somente se:

$i)$ d é divisor de a e b ($\Leftrightarrow d|a$ e $d|b$).

$ii)$ d é divisível por qualquer divisor comum de a e b ($\Leftrightarrow$ para qualquer c onde $c|a$ e $c|b$, então $c|d$).

NOTAÇÃO: MÁXIMO DIVISOR COMUM de a e b = $mdc(a,b)$

Outra maneira de se encontra o MDC é através da fatoração.

Ao fatorarmos os dois números, temos que destacar os números que estão na fatoração dos dois:

$$\begin{array}{r|l} 18 & \boxed{2} \\ 9 & \boxed{3} \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & \boxed{2} \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & \boxed{3} \\ 1 & \end{array}$$

Os fatores comuns seriam o 2 e o 3, logo o $mdc(18,\ 24) = 6$.

Outra maneira seria observar a fatoração do 18 e do 24, ao buscarmos o MDC devemos pegar os números comuns da fatoração com o menor expoente:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2^1.3^2 \\ 24 = 2^3.3^1 \end{array}\right\} mdc(18,\ 24) = 2^1.3^1 = 6$$

EXEMPLO 18: Encontre o máximo divisor comum entre os números 45 e 50.

RESOLUÇÃO 18:

Como a fatoração destes números pode ser feita de cabeça, iremos escolher o método que usando a fatoração destes:

$$\left.\begin{array}{l} 45 = 3^2.5^1 \\ 50 = 2^1.5^2 \end{array}\right\} mdc(45,\ 50) = 5^1 = 5$$

EXEMPLO 19: Qual é o MDC entre 500 e 60?

RESOLUÇÃO 19:

$$\left.\begin{array}{l} 60 = 2^2.3^1.5^1 \\ 500 = 2^2.5^3 \end{array}\right\} mdc(60,\ 500) = 2^2.5^1 = 20$$

EXEMPLO 20: Qual é o MDC entre a e b sabendo que $a = 2^3.5^4.7.11^3$ e $b = 2^5.3^2.11$?

RESOLUÇÃO 20:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^3.5^4.7.11^3 \\ b = 2^5.3^2.11 \end{array}\right\} mdc(a,\ b) = 2^3.11^1 = 88$$

EXEMPLO 21: Sabendo que o MDC entre a e b é 36 e que $a = 2^3.3^4.5.13^3$. Encontre a fatoração de b, sabendo que b é o menor Número Natural que satisfaz a condição inicial e que é múltiplo de 77.

RESOLUÇÃO 21:

Usando o mesmo método dos exercícios anteriores, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^3.3^4.5.13^3 \\ b = 2^x.3^y.5^z.13^w.7.11 \end{array}\right\} mdc(a,\, b) = 36 = 2^2.3^2$$
$$x = 2$$
$$y = 2$$

Como o número b é o menor possível, então teremos que $z = 0$ e $w = 0$.

Logo, $b = 2^2.3^2.5^0.13^0.7.11 = 2772$.

Uma propriedade pouco conhecida sobre o MDC de dois números é que enunciaremos como o próximo teorema:

TEOREMA 12: Dados a e b, Números Naturais, e sabendo que d é o Máximo Divisor Comum entre a e b, então existem x e y, Números Inteiros, tal que $d = ax + by$.

DEMONSTRAÇÃO 12:

Seja o conjunto $C = \{n \in \mathbb{N} \,/\, existem\ x, y \in \mathbb{Z},\ onde\ n = ax + by\}$ um conjunto não vazio.

Como o conjunto C está contido no conjunto dos Números Naturais, ele tem um menor elemento.

Seja d o menor elemento do conjunto C, logo existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax_0 + by_0$.

Vamos mostrar que $d|a$:

Existem $q,r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $a = q \times d + r$, sendo que $0 \leq r < d$.

Como $d = ax_0 + by_0$, temos que:

$$a = q(ax_0 + by_0) + r$$
$$r = a - q(ax_0 + by_0)$$
$$r = a - qax_0 - qby_0$$
$$r = a(1 - qx_0) + b(-qy_0)$$

Isso é um absurdo, se $r > 0$ e $r \in C$, pois $r < d$ e d é o menor elemento do conjunto C.

Por tanto r só poderia ser 0, já que $0 \leq r$.

Logo $a = qd \Rightarrow d|a$.

Com o raciocínio análogo também teríamos que $d|b$.

Se $d|a$ e $d|b$, agora só falta provar que d é divisível por todos os divisores comuns de a e b.

Tome qualquer c onde $c|a$ e $c|b$.

Logo $c|a\,x_0$ e $c|b\,y_0$.

Pelo Teorema2, temos que $c|ax_0 + by_0$

Como $d = ax_0 + by_0$, temos que $c|d$

Ou seja, provamos que d é o Máximo divisor Comum entre a e b de acordo com a definição 6.

É muito comum exercícios contextualizados que usam a ideia do MDC, logo vamos fazer alguns exemplos que teremos que pensar no contexto da questão.

EXEMPLO 22: Dona Ana, é costureira e dispõe de três faixas de pano para confeccionar panos de mesa, Essas tiras de pano medem 60cm, 80cm e 100 cm de comprimento, tendo todas a largura de 15cm. Ela deseja cortá-las em pedaços iguais de maior comprimento possível. Quantos panos de mesa Dona Ana conseguirá confeccionar?

RESOLUÇÃO 22:

Primeiramente, devemos encontrar o tamanho de cada pano.

Esse tamanho deverá ser encontrado através do $mdc(60,\ 80,\ 100)$:

$$\begin{array}{rrr|l} 60, & 80, & 100 & \boxed{2} \\ 30, & 40, & 50 & \boxed{2} \\ 15, & 20, & 25 & 2 \\ 15, & 10, & 25 & 2 \\ 15, & 5, & 25 & 3 \\ 5, & 5, & 25 & \boxed{5} \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

$$\mathrm{mdc}(60,\ 80,\ 100) = 2.2.5 = 20$$

Ou seja, cada tira deve ser cortada de 20 em 20cm, sendo que a primeira tira produzirá 3 panos de mesa, a segunda, 4 panos de mesa e a tira de 100cm, 5 panos de mesa, totalizando 12 panos de mesa.

EXEMPLO 23: (NCNB/001-Auxiliar Administrativo – 2007) – Em um colégio de São Paulo, há 120 alunos na 1.ª série do Ensino Médio, 144, na 2.ª e 60, na 3.ª. Na semana cultural, todos esses alunos serão organizados em equipes com o mesmo número de elementos, sem que se misturem alunos de séries

diferentes. O número máximo de alunos que pode haver em cada equipe é igual a:
A) 7
B) 10
C) 12
D) 28
E) 30

RESOLUÇÃO 23:

Para dividir as equipes, a quantidade de alunos em cada uma deve ser a mesma, além disso, a maior possível, para isso vamos calcular o $\text{mdc}(120,\ 144,\ 60)$.

$$
\begin{array}{ccc|c}
120, & 144, & 60 & \boxed{2} \\
60, & 72, & 30 & \boxed{2} \\
30, & 36, & 15 & 2 \\
15, & 18, & 15 & 2 \\
15, & 9, & 15 & \boxed{3} \\
5, & 3, & 5 & 3 \\
5, & 1, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1 &
\end{array}
$$

$\text{mdc}(120,\ 144,\ 60) = 2.2.3 = 12$.

Logo, em cada equipe deve haver 12 alunos.

EXEMPLO 24: (SPTR/001-Agente de Informação – 2007) - No almoço de confraternização de uma empresa estavam presentes 250 homens, 300 mulheres e 400 crianças.
Em uma brincadeira foram formadas equipes compostas apenas de crianças, equipes apenas de mulheres e equipes somente de homens. Todas as equipes

tinham o mesmo número de pessoas e foi feito de maneira que fosse o maior número possível.

Em cada equipe havia um total de:

A) 10 pessoas.

B) 20 pessoas.

C) 30 pessoas.

D) 40 pessoas.

E) 50 pessoas.

RESOLUÇÃO 24:

Para dividir as equipes, a quantidade de pessoas em cada uma deve ser a mesma, além disso, a maior possível. Para isso vamos calcular o $\text{mdc}(250,\ 300,\ 400)$.

$$\begin{array}{ccc|c}
250, & 300, & 400 & \boxed{2} \\
125, & 150, & 200 & 2 \\
125, & 75, & 100 & 2 \\
125, & 75, & 50 & 2 \\
125, & 75, & 25 & 3 \\
125, & 25, & 25 & \boxed{5} \\
25, & 5, & 5 & \boxed{5} \\
5, & 1, & 1 & 5 \\
1, & 1, & 1 &
\end{array}$$

$\text{mdc}(250,\ 300,\ 400) = 2.5.5 = 50$

Ou seja, cada equipe deverá ter 50 pessoas.

PRIMOS RELATIVOS OU PRIMOS ENTRE SI

DEFINIÇÃO 7: Dizemos que dois inteiros a e b, são relativamente primos ou primos entre si, se $mdc(a, b) = 1$.

EXEMPLO 25: Os números 8 e 15 são primos entre?

RESOLUÇÃO 25:

8 e 15 são primos entre si pois, o mdc (8, 15) = 1.

Observe que 8 e 15 não são números primos.

EXEMPLO 26: Os números 8 e 20 não são números primos entre si?

RESOLUÇÃO 26:

8 e 20 não são números primos entre si , pois ambos são também divisíveis por 4.

Perceba que não faremos exercícios sobre MDC nesta etapa. Antes de resolvermos exercícios sobre MDC vamos estudar o MMC, pois é bem comum os alunos terem dificuldade em identificar quando é para se calcular o MMC ou MDC.

MÚLTIPLOS COMUNS

Agora, encontraremos os múltiplos de 18 e 24, observe que nunca encontraremos todos os múltiplos de um número pois o conjuntos dos múltiplos de um número é infinito.

$M(18) = \{18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162...\}$

$D(24) = \{24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192...\}$

Observe que os números 72 e 144 são múltiplos tanto de 18, quanto de 24.

$M(18) = \{18,\ 36,\ 54,\ \boxed{72},\ 90,\ 108,\ 126,\ \boxed{144},\ 162...\}$

$D(24) = \{24,\ 48,\ \boxed{72},\ 96,\ 120,\ \boxed{144},\ 168,\ 192...\}$

Sendo o número 72 o menor múltiplo em comum entre 18 e 24, ele recebe a denominação de Mínimo Múltiplo Comum. É bem comum usarmos a sigla MMC e representarmos por $mmc(18,\ 24) = 72$, logo vamos definir:

DEFINIÇÃO 8: Dados a e b, Números Naturais, dizemos que m é MÚLTIPLO COMUM de a e b, se ,e somente se, $a|m$ e $b|m$.

Dizemos que d é o MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM de a e b se ,e somente se:

$i)$ m é múltiplo de a e b ($\Leftrightarrow$ $a|m$ e $b|m$.).

$ii)$ m é divisor por qualquer múltiplo comum de a e b ($\Leftrightarrow$ para qualquer c onde $a|c$ e $b|c$, então $m|c$).

NOTAÇÃO: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM de a e b = $mmc(a,b)$

Outra maneira de se encontra o MMC é através da fatoração.

Ao fatorarmos os dois números, lado a lado, e fazer o produto da fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 18,\ 24 & 2 \\ 9\ ,12 & 2 \\ 9\ ,\ \ 6 & 2 \\ 9\ ,\ \ 3 & 3 \\ 3\ ,\ \ 1 & \underline{3} \\ 1\ ,\ \ 1 & 72 \end{array}$$

Então o $mmc(18,\ 24) = 72$.

Outra maneira seria observar a fatoração do 18 e do 24, separadamente.

Para encontrar o MMC devemos pegar os todos os números da fatoração com o maior expoente:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2^1.3^2 \\ 24 = 2^3.3^1 \end{array}\right\} \; mdc(18,\ 24) = 2^3.3^2 = 72$$

EXEMPLO 27:

Calcule o $mmc(12,30)$.

RESOLUÇÃO 27:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 3^2.5^1 \\ 50 = 2^1.5^2 \end{array}\right\} \; mdc(45,\ 50) = 5^1 = 5$$

EXEMPLO 28:

Encontre a fatoração do MMC entre a e b, sabendo que $a = 2^3.5^4.7.11^3$ e $b = 2^5.3^2.11$?

RESOLUÇÃO 28:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^3.5^4.7.11^3 \\ b = 2^5.3^2.11 \end{array}\right\} \; mmc(a,\ b) = 2^5.3^2.5^4.7^1.11^3$$

Agora vamos contextualizar o significado do MMC, através de exemplos:

EXEMPLO 29: Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro a cada 4 dias, o segundo a cada 6 dias e o terceiro a cada 9 dias. Se esses navios partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos, novamente?

RESOLUÇÃO 29:

Calculando o MMC, teremos:

$$\begin{array}{ccc|l} 4, & 6, & 9 & 2 \\ 2, & 3, & 9 & 2 \\ 1, & 3, & 9 & 3 \\ 1, & 1, & 3 & 3 \\ \hline 1, & 1, & 1 & 36 \end{array}$$

Daqui a 36 dias os navios sairão juntos novamente.

EXEMPLO 30: Em uma casa há quatro lâmpadas, a primeira acende a cada 27 horas, a segunda acende a cada 45 horas, a terceira acende a cada 60 horas e a quarta só acende quando as outras três estão acesas ao mesmo tempo. Sabendo que hoje é dia 1º de abril, que dia a quarta lâmpada e vai acender?

RESOLUÇÃO 30:

$$\begin{array}{ccc|l} 27, & 45, & 60 & 2 \\ 27, & 45, & 30 & 2 \\ 27, & 45, & 15 & 3 \\ 9, & 15, & 5 & 3 \\ 3, & 5, & 5 & 3 \\ 1, & 5, & 5 & 5 \\ \hline 1, & 1, & 1 & 540 \end{array}$$

Como o $mmc(27, 45, 60) = 540$, logo daqui a 540 horas a quarta lâmpada vai acender.

$540 \div 24 = 22,5 \;\; dias$ ou 22 dias e 12 horas.

Logo, dia 23 a quarta lâmpada irá acender.

EXEMPLO 31: No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luzes "piscam" com frequências diferentes. A primeira, "pisca" 12 vezes por minuto e a segunda, "pisca" 15 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?

A) 10 segundos.

B) 20 segundos.

C) 15 segundos.

D) 40 segundos.

E) 30 segundos.

RESOLUÇÃO 31:

A que pisca 12 vezes por minuto pisca de 5 em 5 segundos.

A que pisca 15 vezes por minuto pisca de 4 em 4 segundos.

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 5 = 5^1 \end{array}\right\} \quad mmc(4,\ 5) = 2^2.5^1 = 20$$

Ou seja, em 20 segundos elas piscarão novamente juntas.

Observe que sempre quando calculamos o MDC de dois números encontraremos um número menor ou igual a um dos números e quando calculamos o MMC, encontraremos um resultado sempre maior ou igual.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

38) (Vestibular UFRN) Uma espécie de cigarra que existe somente no leste dos EUA passa um longo período dentro da terra, alimentando-se de seiva de raízes, ressurgindo após 17 anos. Em revoada, os insetos dessa espécie se acasalam e produzem novas ninfas que irão cumprir o novo ciclo de 17 anos. Em 2004, ano bissexto, os EUA presenciaram outra revoada dessas cigarras.

O próximo ano bissexto em que ocorrerá uma revoada da futura geração de cigarras será:

A) 2072

B) 2068

C) 2076

D) 2080

39) (Vestibular UFMG) José decidiu nadar, regularmente, de quatro em quatro dias. Começou a fazê-lo em um sábado, nadou pela segunda vez na quarta-feira seguinte e assim por diante Nesse caso, na centésima vez em que José for nadar, será:

A) terça-feira.

B) quarta-feira.

C) quinta-feira.

D) sexta-feira.

40) A população de Lagoa Santa era um quadrado perfeito. Depois, com um aumento de 100 habitantes, a população passou a ser uma unidade maior que um quadrado perfeito. Depois, com outro aumento de 100 habitantes, a população voltou a ser um quadrado perfeito. A população inicial era um múltiplo de:

A) 3

B)7

C)9

D)11

E)17

41) (Vestibular UNESP) Uma concessionária vendeu, no mês de outubro, n carros do tipo A e m carros do tipo B, totalizando 216 carros. Sabendo-se que o número de carros vendidos de cada tipo foi maior do que 20, que foram vendidos menos carros do tipo A do que do tipo B, isto é, $n<m$, e que MDC(n,m) = 18, os valores de n e m são respectivamente:

A) 18, 198.

B) 36, 180.

C) 90, 126.

D) 126, 90.

42) (Vestibular UERJ) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez, é de:

A) 150

B) 160

C) 190

D) 200

43) (Vestibular UERJ) O número de fitas de vídeo que Marcela possui está compreendido entre 100 e 150. Grupando-as de 12 em 12, de 15 em 15 ou de 20 em 20, sempre resta uma fita. A soma dos três algarismos do número total de fitas que ela possui é igual a:

A) 3

B) 4

C) 6

D) 8

44) (Vestibular - UFMG) Sabe-se que os meses de janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro têm 31 dias. O dia 31 de março de certo ano ocorreu numa quarta-feira. Então 15 de outubro do mesmo ano foi

A) quinta-feira

B) terça-feira

C) quarta-feira

D) sexta-feira

45) (Vestibular - UFPR) Os anos bissextos ocorrem de 4 em 4 anos, em geral, mas sua caracterização exata é a seguinte: são anos bissextos aqueles que são divisíveis por 4, mas não por 100; a exceção a essa regra são os anos divisíveis por 400,que também são bissextos. Assim, o número de anos bissextos entre 1895 e 2102 é:

A) 50

B) 47

C) 48

D) 49

E) 51

46) (Vestibular UNICAMP) Sejam *a* e *b* dois números inteiros positivos tais que mdc(*a*,*b*) = 5 e o mmc(*a*,*b*) = 105.

A) Qual é o valor de *b* se *a* = 35?

B) Encontre todos os valores possíveis de (*a*,*b*).

47) (Vestibular - FUVEST) Sabendo que os anos bissextos são múltiplos de 4 e que o primeiro dia de 2007 foi segunda-feira, o próximo ano a começar também em uma segunda-feira será:

A) 2012

B) 2014

C) 2016

D) 2018

48) (Vestibular - UFPE) Uma escola deverá distribuir um total de 1260 bolas de gude amarelas e 9072 bolas de gude verde entre alguns de seus alunos. Cada aluno contemplado receberá o mesmo número de bolas amarelas e o mesmo número de bolas verdes. Se a escola possui 300 alunos e o maior número possível de alunos da escola deverá ser contemplado, qual o total de bolas que cada aluno contemplado receberá?

A) 38

B) 39

C) 40

D) 41

E) 42

49) (Vestibular PUC Minas) Os números naturais *a* e *b* são tais que $ab = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $\frac{a}{b} = 0,4$. O máximo divisor comum de *a* e *b* é:

A) 6

B) 8

C) 10

D) 12

E) 30

50) (Vestibular Milton Campos - MG) Do ponto final de uma linha de ônibus, partem, às 10 horas da manhã, os ônibus *A* e *B*. Sabendo-se que o ônibus *A* volta ao ponto-final a cada 35 minutos, e o *B*, a cada 40 minutos, pode-se afirmar que o primeiro horário em que os dois ônibus voltarão a partir juntos será às:

A) 11 horas e 15 minutos.

B) 12 horas e 40 minutos.

C) 14 horas e 20 minutos.

D)14 horas e 40 minutos.

51) Dados a e b, números naturais, demonstre que $mdc(a, b).mmc(a, b) = a.b$.

Dica: Use a definição de MMC e MDC (definição 6 e 8)

52) Dados a e b, números naturais primos entre si, demonstre que $mmc(a, b) = a.b$.

Dica: Use a definição de MMC e de números primos entre si (definição 7 e 8).