

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - CCE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

ANA FLÁVIA CÂMARA

**OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E FERMAT PARA OS ESTUDANTES DA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2025

ANA FLÁVIA CÂMARA

**OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E FERMAT PARA OS ESTUDANTES DA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dra. Luciana Maria Mendonça Bragança

VIÇOSA - MINAS GERAIS


2025

ANA FLÁVIA CÂMARA


**OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E FERMAT PARA OS ESTUDANTES DA
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática
Orientador: Prof. Dra. Luciana Maria Mendonça Bragança

APROVADO:
ASSENTIMENTO:

Documento assinado digitalmente
 **ANA FLAVIA CAMARA**
Data: 06/02/2025 21:35:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ana Flávia Câmara
(Autora)

Documento assinado digitalmente
 **LUCIANA MARIA MENDONCA BRAGANCA**
Data: 06/02/2025 22:29:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Luciana Maria Mendonça Bragança
(Orientadora)


ANA FLÁVIA CÂMARA

**OS TEOREMAS DE PITÁGORAS E FERMAT PARA OS ESTUDANTES DA
EDUCAÇÃO BÁSICA**


Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dra. Luciana Maria Mendonça Bragança


BANCA AVALIADORA:

Documento assinado digitalmente
 **LILIAN NEVES SANTA ROSA VALENTIM**
Data: 07/02/2025 10:15:52-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Lilian Neves Santa Rosa Valentim
(UFV)

Documento assinado digitalmente
 **EDSON JOSE TEIXEIRA**
Data: 07/02/2025 09:13:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Edson José Teixeira
(UFV)

Documento assinado digitalmente
 **LUCIANA MARIA MENDONÇA BRAGANÇA**
Data: 06/02/2025 22:32:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Luciana Maria Mendonça Bragança
(Orientadora)

Dedico este trabalho aos meus pais, Nazaré e Raimundo, as minhas irmãs, Ana Lúcia e Liliana. Por todo apoio durante essa trajetória.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me sustentado durante esta caminhada, especialmente nos momentos difíceis, acalmando meu coração e me dando forças para continuar.

Aos meus pais, Nazaré e Raimundo, que não mediram esforços para que eu pudesse estudar. O apoio, o carinho e as palavras de incentivo foram essenciais para que eu pudesse concluir essa jornada.

Às minhas irmãs Lílíana e Ana Lídia, pela paciência, pelas conversas e pela amizade.

À minha orientadora Luciana, por ter aceitado me orientar nesse trabalho, por todo incentivo e apoio.

À Escola Estadual Álvaro Giesta e a professora Thamyres poderem ceder o espaço e a aula para a realização da atividade.

Aos amigos feitos durante a graduação, por terem me ajudado diante das dificuldades e terem me proporcionado momentos de alegria, sem vocês teria sido muito difícil.

A todos os professores, por todos os ensinamentos compartilhados.

À UFV por ter me permitido realizar um sonho.

RESUMO

A Matemática, frequentemente vista pelos estudantes como abstrata e complexa, pode se tornar uma fonte de encanto e descoberta quando ensinada com a mesma paixão e curiosidade que moveram grandes matemáticos ao longo da história. Este trabalho tem como objetivo despertar nos estudantes da educação básica o interesse pela Matemática através da apresentação da vida e do legado de dois matemáticos notáveis: Pitágoras e Fermat. Ambos foram movidos por um profundo amor pelo conhecimento e uma busca incessante por entender o mundo ao seu redor. Pitágoras conheceu a Matemática como uma "receita" que era seguida cegamente na vida prática, sem questionamentos. Entretanto, ele queria entender o porquê das coisas e não meramente replicar um processo mecânico. A partir daí, os números deixaram de ser apenas objetos para contar e medir e passaram a ser apreciados por suas características. O Teorema de Pitágoras, sua principal descoberta, é um dos conceitos mais famosos da Matemática que traz consigo beleza e simplicidade nas suas aplicações. Ao explorar várias demonstrações desse teorema, procuramos mostrar aos estudantes não apenas a sua relevância, mas também como a Matemática é um campo fértil para a criatividade e a exploração. Utilizando a Teoria dos Números, mostraremos os ternos pitagóricos e algumas curiosidades sobre o teorema. Por outro lado, Pierre de Fermat é um exemplo brilhante de um matemático amador, cuja paixão pela Teoria dos Números o levou a fazer contribuições significativas à Matemática. Sua famosa conjectura, o Último Teorema de Fermat, desafiou matemáticos por mais de 300 anos e é a evidência do seu interesse e encanto pelo estudo. Neste trabalho, apresentaremos a demonstração do teorema para o caso $n = 4$ com o objetivo de mostrar aos estudantes que a Matemática é, acima de tudo, uma jornada de descoberta e prazer intelectual. Por último, incorporaremos ao trabalho uma demonstração lúdica do Pequeno Teorema de Fermat e um relato de experiência de uma atividade relacionada ao teorema, aplicada aos estudantes do ensino médio da Escola Estadual Álvaro Giesta, localizada em São Geraldo, Minas Gerais.

Palavras-chave: Pitágoras. Pierre de Fermat. História da Matemática. Demonstrações. Ludicidade.

ABSTRACT

CÂMARA, Ana Flávia, Universidade Federal de Viçosa, 2025. **PYTHAGORAS' AND FERMAT'S THEOREMS FOR BASIC EDUCATION STUDENTS**. Adviser: Luciana Maria Mendonça Bragança.

Mathematics, often seen by students as abstract and complex, can become a source of wonder and discovery when taught with the same passion and curiosity that have driven great mathematicians throughout history. This work aims to awaken an interest in Mathematics in elementary school students by presenting the lives and legacy of two notable mathematicians: Pythagoras and Fermat. Both were driven by a deep love for knowledge and an incessant search to understand the world around them. Pythagoras knew Mathematics as a "recipe" that was blindly followed in practical life, without questioning. However, he wanted to understand the reason for things and not merely replicate a mechanical process. From then on, numbers stopped being just objects to count and measure and began to be appreciated for their characteristics. The Pythagorean Theorem, his main discovery, is one of the most famous concepts in Mathematics that brings with it beauty and simplicity in its applications. By exploring several proofs of this theorem, we seek to show students not only its relevance, but also how Mathematics is a fertile field for creativity and exploration. Using Number Theory, we will show the Pythagorean triples and some interesting facts about the theorem. On the other hand, Pierre de Fermat is a brilliant example of an amateur mathematician, whose passion for Number Theory led him to make significant contributions to Mathematics. His famous conjecture, Fermat's Last Theorem, has challenged mathematicians for over 300 years and is evidence of his interest and delight in the study. In this work, we will present the proof of the theorem for the case $n = 4$ with the aim of showing students that Mathematics is, above all, a journey of discovery and intellectual pleasure. Finally, we will incorporate into the work a playful demonstration of Fermat's Little Theorem and an experience report of an activity related to the theorem, applied to high school students at the Alvaro Giesta State School, located in São Geraldo, Minas Gerais.

Keywords: Pythagoras. Pierre de Fermat. History of Mathematics. Demonstrations. Playfulness

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pitágoras	16
Figura 2 – Pentagrama	17
Figura 3 – Tábula Plimpton 322	18
Figura 4 – Triângulo Retângulo	19
Figura 5 – Quadrado de lado $b + c$	19
Figura 6 – Demonstração de Perigal para o Teorema de Pitágoras	20
Figura 7 – Triângulo retângulo	21
Figura 8 – Demonstração do Presidente para o Teorema de Pitágoras	21
Figura 9 – Triângulo Acutângulo ABC	22
Figura 10 – Triângulo Obtusângulo ABC	22
Figura 11 – Visualização do terno pitagórico $(3, 4, 5)$ através do rearranjo de quadradinhos	23
Figura 12 – Pierre de Fermat	30
Figura 13 – Os cubos 6^3 e 8^3 chegam perto de construir um cubo 9^3	32
Figura 14 – Andrew Willes	33
Figura 15 – Fachada da Escola Estadual Álvaro Giesta	37
Figura 16 – Todas as sequências possíveis com 3 miçangas	40
Figura 17 – Alunos construindo os brincos de 3 miçangas	41
Figura 18 – Todos os 8 brincos construídos	41
Figura 19 – Alunos construindo os brincos de 4 miçangas	42
Figura 20 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 4 miçangas	43
Figura 21 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 5 miçangas - 1.	44
Figura 22 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 5 miçangas - 2.	44

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA	10
2 OBJETIVOS	11
2.1 Objetivo Geral	11
2.2 Objetivos Específicos	11
3 METODOLOGIA	12
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
4.1 História da Matemática no Ensino	13
4.2 O uso do material concreto no ensino da Matemática	13
4.3 Demonstração matemática na educação básica	14
4.4 Articulação dos referenciais teóricos	15
5 PITÁGORAS	16
5.1 Teorema de Pitágoras	18
5.1.1 A demonstração clássica	19
5.1.2 A demonstração de Perigal	20
5.1.3 A demonstração que usa semelhança	20
5.1.4 A demonstração do Presidente	21
5.1.5 A Recíproca do Teorema de Pitágoras	21
5.2 Os Ternos Pitagóricos	23
5.2.1 Ternos Pitagóricos Primitivos	24
5.2.2 Encontrando Ternos Pitagóricos	24
5.2.3 Exemplos	27
5.3 Curiosidades	28
6 PIERRE DE FERMAT	30
6.1 O Último Teorema de Fermat	31
6.2 Demonstração do Último Teorema de Fermat para o caso $n = 4$	33
6.3 Demonstração do Pequeno Teorema de Fermat	36
7 RELATO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA	37
7.1 Escola Estadual Álvaro Giesta	37
7.2 Introdução à Aritmética Modular	38
7.3 De brincos de miçangas ao Pequeno Teorema de Fermat	39
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

A escolha do tema para este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) se deu através de uma reflexão sobre as minhas experiências vivenciadas tanto na educação básica quanto no ensino superior. Através dessas reflexões, pude embasar minha escolha levando em conta o que me encanta e me motiva no mundo do conhecimento. Por isso, irei expor aqui um memorial de minha formação.

O interesse pela Matemática surgiu em minha vida aos oito anos, quando estava cursando a terceira série do ensino fundamental I. Nessa época, estava aprendendo a tabuada e o simples exercício de "decorar" números era um verdadeiro prazer. Eu adorava resolver probleminhas e expressões numéricas e esse encanto pela Matemática me acompanhou ao longo dos anos escolares, sempre crescendo e me incentivando a buscar novos conhecimentos.

Aos 12 anos, já no sétimo ano do ensino fundamental II, tive uma professora que me apresentou uma nova Matemática: prática, inserida no cotidiano e nos objetos que estavam ao meu redor. Eu, que até então só conhecia a Matemática do lápis e do papel, fui apresentada a uma Matemática concreta, palpável, e isso ampliou meu horizonte. Nos dois anos seguintes, oitavo e nono anos, tive um professor que era o oposto da professora do ano anterior: mais teórico, do quadro e giz, e foi ele quem me apresentou o conceito de demonstração matemática. Os meus olhos brilharam diante daquilo e as ideias matemáticas, que antes eu simplesmente aceitava como verdades, passaram a ser demonstradas.

Ao concluir a educação básica, decidi seguir no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Viçosa (UFV), sempre com as lembranças desses dois professores em mente: a professora que me revelou a Matemática prática e lúdica e o professor que me apresentou o formalismo da Matemática. Durante a graduação, pude vivenciar a experiência de me aprofundar no mundo das demonstrações matemáticas através das disciplinas mais teóricas, de raciocínio abstrato e trabalho intelectual e também a experiência de construção dos objetos matemáticos através das disciplinas de Prática de Ensino.

Em 2022, tive a oportunidade de realizar uma Iniciação Científica com o tema "Tópicos Especiais em Álgebra". Foi nesse momento que conheci Pierre de Fermat, e fiquei fascinada por sua história. Fermat, um matemático amador, estudava por puro amor ao conhecimento e fez grandes descobertas para o desenvolvimento da Matemática. Fui descobrir que uma de suas maiores descobertas, o Último Teorema de Fermat, que levou mais de 300 anos para ser solucionado e desafiou os matemáticos mais brilhantes, tem suas raízes no Teorema de Pitágoras, um dos principais tópicos estudados na educação básica. Buscando conhecer mais sobre Pitágoras, percebi que ele compartilhou com Fermat a mesma linha de pensamento: o interesse genuíno pelo conhecimento e o interesse pela demonstração matemática. Percebi que a vida de Pitágoras e Fermat estava muito alinhada com os meus primeiros anos escolares, quando fui cativada pela Matemática, simplesmente pelo prazer do conhecimento e o interesse pelo formalismo matemático.

Por esses motivos, decidi que o tema do meu Trabalho de Conclusão de Curso deveria explorar a conexão entre esses dois matemáticos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática, mostrando aos estudantes da educação básica como a curiosidade e a busca pelo conhecimento impulsionaram suas descobertas.

Paralelo a isso, com o desejo de compartilhar o conhecimento construído durante a graduação na UFV e de utilizar materiais lúdicos para facilitar o entendimento dos conceitos matemáticos, senti a necessidade de incluir neste trabalho uma atividade prática, voltada para os estudantes do ensino médio.

Pitágoras e Fermat foram dois matemáticos que tiveram uma grande influência no desenvolvimento da Matemática. As ideias de Pitágoras, no século VI a. C., foram fundamentais para o desenvolvimento da Geometria e da Aritmética. A Irmandade Pitagórica valorizava a demonstração e a rigurosidade, isto contribuiu para a formalização da Matemática. Fermat, por sua vez, no século XVII ajudou no desenvolvimento de várias áreas da Matemática, dentre elas podemos citar a Geometria Analítica, o Cálculo Infinitesimal, a Teoria das Probabilidades e a Teoria dos Números, área que ele fez a sua maior contribuição ao deixar um enigma para o mundo, o Último Teorema de Fermat. Na busca pela demonstração, novas teorias matemáticas forma desenvolvidas e mostrou-se a conexão de diferentes áreas da Matemática.

A partir da reflexão apresentada acima, as seguintes questões de investigação foram elaboradas: Como a paixão e o interesse genuíno de Pitágoras e Fermat pela Matemática moveram suas descobertas e contribuições para essa ciência? De que maneira essas características podem ser transmitidas aos estudantes da educação básica e como isso pode estimular uma relação mais agradável com a Matemática? Como a união do formalismo matemático com uma prática lúdica pode facilitar a aprendizagem matemática dos estudantes da educação básica?

Apresentada as questões de investigação, expomos agora os objetivos propostos para esta monografia.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Difundir a Matemática para os estudantes da educação básica, explorando a história e contribuições dos matemáticos Pitágoras e Fermat e realizar uma atividade lúdica com os estudantes da educação básica.

2.2 Objetivos Específicos

1. Mostrar como Pitágoras e Fermat estudaram a Matemática por curiosidade e por amor ao conhecimento.
2. Apresentar as contribuições matemáticas de Pitágoras e Fermat e a importância de suas descobertas para o desenvolvimento desta ciência

3. Aplicar atividade que envolva o Pequeno Teorema de Fermat combinada com os recursos de História da Matemática, demonstrações e ludicidade.
4. Apresentar um relato da atividade prática realizada no ensino médio.

3 METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho foram adotadas duas metodologias de pesquisa: a revisão bibliográfica e uma parte qualitativa, envolvendo a realização de uma atividade prática em uma escola.

Primeiro, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre a história dos matemáticos Pitágoras e Pierre de Fermat, com o objetivo de levantar suas principais contribuições para a Matemática. Segundo Fonseca (2002, p. 32), "a pesquisa bibliográfica é realizada a partir do levantamento de referências teóricas previamente analisadas e publicadas por meio de fontes escritas e eletrônicas". Essa abordagem permitiu a identificação e análise das principais teorias, conceitos e estudos relacionados ao tema investigado.

Foram vistas diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras e a demonstração do Último Teorema de Fermat no caso $n = 4$. Para a construção da demonstração do Último Teorema de Fermat foi necessário o estudo dos ternos pitagóricos e dos conteúdos de Aritmética Modular.

Como parte qualitativa do trabalho, foi realizada uma atividade prática sobre o Pequeno Teorema de Fermat, na Escola Estadual Álvaro Giesta, localizada em São Geraldo, MG. De acordo com D'Ambrosio (2012, p. 93), a pesquisa qualitativa "é focada no indivíduo, com toda a sua complexidade, e na sua interação com o ambiente sociocultural e natural". Por meio da observação e da interação com os participantes, foi possível perceber a importância de se trabalhar com a Matemática de forma lúdica, sem perder seu formalismo.

A combinação desses métodos proporcionou uma análise mais completa do tema, enriquecendo o trabalho com fundamentos teórico e dados práticos.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica é uma das partes fundamentais para a produção da pesquisa, através dela fazemos uma revisão das pesquisas e discussões sobre a temática que será abordada no trabalho. Como bem destacado por Buffa (2005, p. 34): "esse levantamento, além de fornecer informações sobre o que já foi produzido sobre o tema, também aponta o que ainda precisa ser investigado.

Com a base teórica definida conseguiremos guiar nossa pesquisa, mantendo sempre um diálogo contínuo e dinâmico com o que já foi produzido, como bem destaca Gil (2002), "o referencial teórico, mais do que um simples ponto de partida, deve ser um processo contínuo que acompanha o desenvolvimento da pesquisa, ajudando o pesquisador a refinar e ajustar suas hipóteses e abordagens".

Nos subtópicos deste capítulo, serão discutidos os principais temas que englobam esta pesquisa, buscando apontar as principais ideias dos temas que se referem ao nosso objetivo de pesquisa.

4.1 História da Matemática no Ensino

A História da Matemática tem um papel fundamental na aprendizagem, haja visto que a partir dela o aluno compreende melhor o pensamento matemático e entende os fatos históricos que levaram à descoberta dos conceitos. Segundo D'Ambrosio (2009, p. 19), uma das finalidades da História da Matemática é “[...] situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) reforçam que a História da Matemática é um dos caminhos para a construção do conhecimento matemático ao apresentar a Matemática como criação humana e

[...] ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático.

Através dela, os alunos percebem que as teorias matemáticas são fruto de desafios e esforços e isso ajuda a dar respostas para alguns "porquês"; desse modo as aulas passam a ter sentido e os alunos entendem os motivos que levaram os pesquisadores a tal conceito. A Matemática torna significativa, mais prazerosa e os alunos desenvolvem um olhar mais crítico sobre tais conhecimentos.

De acordo com essa visão, Ferreira *apud* Santos (2009, p. 20) diz que a História da Matemática:

[...] dá a este aluno a noção exata dessa ciência como uma ciência em construção com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um conteúdo histórico.

Portanto, a História da Matemática, ao ser inserida nas aulas da educação básica, permite aos estudantes uma melhor compreensão da história dos conceitos, os motivos e as razões que moveram as descobertas.

4.2 O uso do material concreto no ensino da Matemática

O uso de material concreto nas aulas de Matemática tem-se mostrado um recurso didático capaz de facilitar o entendimento dos alunos para diversos conceitos. Através do recurso didático, o aluno consegue visualizar as ideias matemáticas no pensamento; isso torna a aula mais dinâmica e atraente.

Trabalhar a ludicidade faz com que as aulas de Matemática deixem de ser uma repetição de fórmulas e exercícios e passe a ser uma aula mais dinâmica e envolvente, capaz de fazer o estudante pensar, questionar e refletir. Dessa forma, o estudo será uma atividade feliz como afirma Mendonça (2001, p. 14) que

Ensinar e aprender Matemática pode e deve ser uma experiência feliz. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos educativos, mas é bastante evidente que só poderemos falar de um trabalho docente bem feito quando todos alcançarmos um grau de felicidade satisfatório.

Portanto, a aplicação de materiais lúdicos durante o desenvolvimento dos conceitos matemáticos tornarão as aulas mais participativas, pois despertarão o interesse dos estudantes e, conseqüentemente terão uma aprendizagem significativa.

4.3 Demonstração matemática na educação básica

Uma demonstração matemática, é uma sequência lógica de argumentos que parte de axiomas, definições, hipóteses e teoremas até chegar a conclusão da veracidade de uma proposição. A demonstração é fundamental na matemática, pois garante que as afirmações são irrefutavelmente verdadeiras.

Quando olhamos para a realidade da educação básica, vemos que o ensino de demonstrações matemáticas enfrenta desafios. Um dos principais desafios está relacionado às dificuldades cognitivas dos alunos, que muitas vezes é em decorrência das lacunas na base em Matemática, o que pode gerar um bloqueio e uma aversão à Matemática.

Outro desafio para o ensino de demonstrações matemáticas advém do próprio sistema de ensino. O currículo escolar muitas das vezes tende a priorizar a quantidade à qualidade, fazendo com que os professores fiquem sobrecarregados e não tenham tempo suficiente para o aprofundamento dos conceitos, e isso faz com que as aulas se restrinjam à aprendizagem de fórmulas e exemplos. A Matemática passa a ser tratada de forma elementar, com características apenas de aplicação, focada na resolução de exercícios extraídos de avaliações padrozinadas, como da prova do ENEM.

De acordo com Balacheff (1988), as demonstrações permitem aos alunos compreenderem não apenas o "como", mas também o "porquê" dos procedimentos e fórmulas. Dessa forma, os estudantes desenvolvem o raciocínio lógico-investigativo e uma postura crítica em relação ao conhecimento e sua aplicação. Segundo Lorenzato (2006), a assimilação dos princípios teóricos que sustentam um teorema ou uma propriedade, torna os alunos capazes de aplicá-los em diferentes contextos e situações. Com isso, a aprendizagem se torna significativa para o estudante pois, este desenvolve habilidades que são indispensáveis em outras áreas do conhecimento e mesmo em resolução de problemas do cotidiano.

4.4 Articulação dos referenciais teóricos

Acreditamos que a combinação da História da Matemática, com o uso de materiais lúdicos e com as demonstrações matemáticas seja capaz de desenvolver os conceitos matemáticos de forma mais abrangente. A História da Matemática deve ser o ponto de partida das aulas, introduzindo o conteúdo e mostrando os motivos que levaram a sua criação. O uso de materiais lúdicos ajuda a visualizar de maneira concreta e agradável alguns casos particulares do objeto em estudo, permitindo questionamentos e conclusões. Após o entendimento das ideias particulares, as demonstrações matemáticas vêm para generalizar o conteúdo, desenvolvendo o raciocínio lógico e promovendo uma compreensão mais profunda.

5 PITÁGORAS

Figura 1 – Pitágoras



Fonte: <https://www.todamateria.com.br/pitagoras/>

No século VI a.C., nasceu na ilha de Samos, localizada a leste do mar Egeu, Pitágoras (Figura 1), uma das figuras mais influentes e misteriosas da Matemática. Pitágoras viajou bastante, esteve no Egito, Pérsia, Creta e Palestina, e foi a partir de suas viagens que ele adquiriu suas habilidades matemáticas além de conhecimentos sobre ciência e religião. Pitágoras era, sem dúvida, uma grande mente que queria absorver todo conhecimento possível. (STRATHERN, 1998, p. 23).

Em suas viagens, Pitágoras percebeu que os egípcios e os babilônicos faziam seus cálculos com base em uma "receita" que aprenderam com seus antepassados. Essa "receita" era seguida cegamente sem questionar a lógica, já que os cálculos davam certo e todo o resto era irrelevante. Pitágoras queria entender o porquê das coisas e não meramente replicar um processo mecânico. Por isso, depois de vários anos viajando, retorna para a ilha de Samos e funda uma escola: a Irmandade Pitagórica, considerada como a primeira "universidade do mundo".

A Irmandade Pitagórica era devotada ao estudo da Filosofia e da Matemática, seus adeptos eram chamados *matemáticos* (*mathematikoi*). De acordo com STRATHERN (1988), Pitágoras foi o primeiro a usar a palavra filosofia e foi ele quem criou a palavra matemática.

Para a Irmandade Pitagórica, os números deixaram de ser apenas objetos para contar e medir e passaram a ser apreciados por suas características. Acreditavam que os fenômenos naturais e tudo em volta poderiam ser descritos por números,

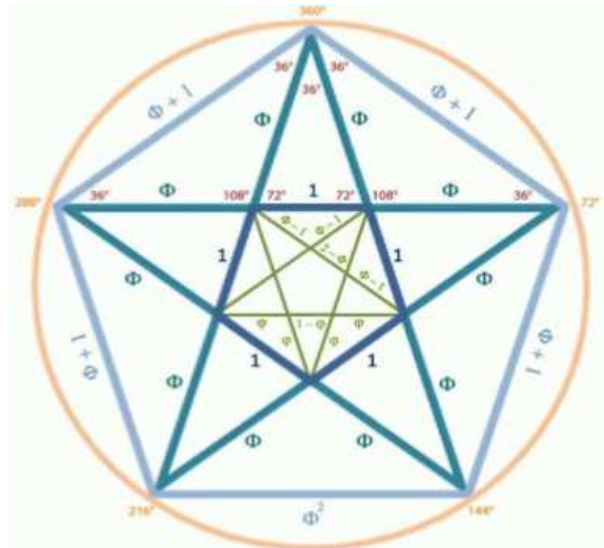
A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética (no sentido de teoria dos números), junto com a geometria, a música e a astronomia, que constituíam as artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico. Esse grupo de matérias tornou-se conhecido na Idade Média como *quadrivium*,

ao qual se acrescentava o *trivium*, formado de gramática, lógica e retórica. Essas sete artes liberais vieram a ser consideradas como a bagagem cultural necessária de uma pessoa educada. (EVES, 1997 *apud* MORTELLE, 2010, p. 17)

Uma das principais descobertas nessa área foi a relação entre a harmonia da música e a harmonia dos números: estabeleceram em que proporções uma corda deve ser dividida a fim de obter as notas musicais.

O símbolo da Irmandade Pitagórica era o Pentagrama (Figura 2). Representava o sigilo (tudo o que descobriam ficava entre os membros), o companheirismo e a união que pregavam. Além disso, na Irmandade Pitagórica, todas as descobertas eram creditadas ao fundador, a Pitágoras.

Figura 2 – Pentagrama



Fonte: https://oscarenfotos.com/2019/04/06/proporcion-aurea-y-fotografia/pentagrama_pitagoras/

De acordo com RIBEIRO (2013) as principais descobertas da Irmandade Pitagórica para o desenvolvimento da Matemática foram:

1. A fundamentação científica da música.
2. O teorema das somas das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
3. A descoberta de grandezas incomensuráveis.
4. A construção dos sólidos regulares (figuras cósmicas).
5. Classificação dos números (par, ímpar, amigo, perfeito, deficiente, abundante, primo, composto).
6. A criação dos números figurados (números triangulares, números quadrangulares, números pentagonais...).

7. A divisão de um segmento em média e extrema razão.
8. A esfericidade da Terra.

A morte de Pitágoras é incerta, o que se sabe é que em 508 a.C., a Irmandade Pitagórica foi atacada e Pitágoras fugiu para Metaponto, onde morreu.

Dentre as várias descobertas realizadas pela Irmandade Pitagórica, a mais famosa é a que leva o nome de seu fundador, o Teorema de Pitágoras. É o teorema mais famoso do ciclo escolar básico e de acordo com SINGH (1997), o teorema fora impresso em milhões, se não bilhões, de mentes humanas. Esse teorema já era conhecido pelos chineses e babilônios, mais Pitágoras foi o primeiro a demonstrar que ele era verdadeiro para todo triângulo retângulo. O teorema é de grande importância na geometria e na trigonometria, sendo um dos alicerces da matemática. Nas próximas seção iremos apresentar algumas de suas demonstrações, explorar mais a fundo a busca pelos ternos pitagóricos e, por fim, compartilhar algumas curiosidades relacionadas ao teorema.

5.1 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras já era conhecido muito antes de ter sido descoberto pela Irmandade Pitagórica. A história mostra que a civilização mesopotâmica (3500 a. C) já conhecia e aplicava o teorema em situações do dia a dia. Um exemplo disso pode ser visto na Figura 3, a Tábula Plimpton 322 (1900 – 1600 a. C), que contém uma tabela com as medidas de lados de um triângulo retângulo.

Figura 3 – Tábula Plimpton 322



Fonte: <https://rcristo.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322-um-tablete-de-argila-com-escrita-cuneiforme->

O teorema também já era conhecido por povos chineses e indianos, embora eles não soubessem que o teorema era verdadeiro para todos os triângulos retângulos, mas apenas aos que haviam sido testados. O motivo pelo qual o teorema leva o nome de Pitágoras é que foi ele o primeiro a demonstrar que tal propriedade é válida para todo triângulo retângulo.

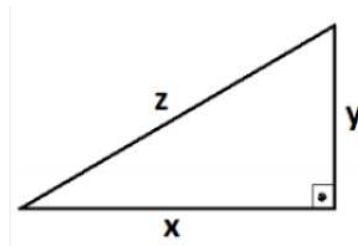
O teorema diz que:

Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Se considerarmos z como a medida da hipotenusa e x e y como as medidas dos catetos (Figura 4), o enunciado do teorema é escrito da seguinte forma:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Figura 4 – Triângulo Retângulo



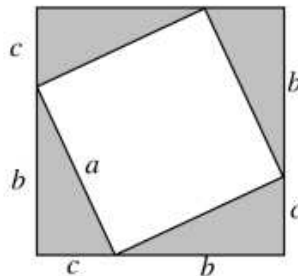
Fonte: A autora

Há muitas maneiras de demonstrar o Teorema de Pitágoras. Um professor de Matemática norte-americano, Elisha Scott Lomis, colecionou durante 20 anos diferentes demonstrações do Teorema. Ele organizou e publicou essas demonstrações em 1927, no livro *The Pythagorean Proposition* (A Proposição de Pitágoras). Na sua primeira edição, o livro continha nada mais nada menos do que 230 demonstrações desse teorema. Em 1940, quando publicado em segunda edição, esse número aumentou para 370. Iremos expor aqui algumas dessas demonstrações.

5.1.1 A demonstração clássica

Consideremos um quadrado de lado $b + c$ dividido em 4 triângulos retângulos iguais e um quadrado de lado a (Figura 5).

Figura 5 – Quadrado de lado $b + c$.



Fonte: (WAGNER, 2015)

A área do quadrado de lado $b + c$ é igual as somas das áreas do quadrados de lado a com os triângulo retângulos de base b e altura c . Assim, temos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

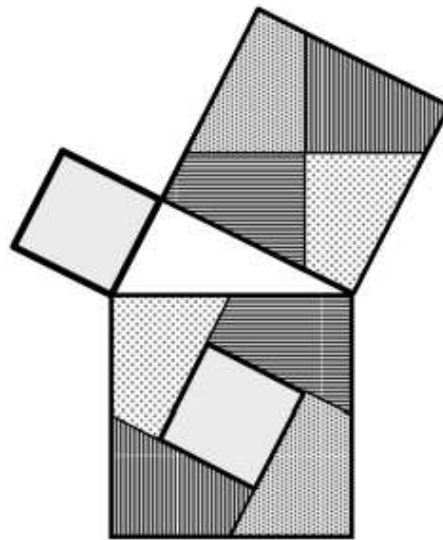
$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Como queríamos demonstrar.

5.1.2 A demonstração de Perigal

Henry Perigal, publicou em 1873 a demonstração a seguir sobre o Teorema de Pitágoras (Figura 6). Tal demonstração mostra de maneira clara que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Figura 6 – Demonstração de Perigal para o Teorema de Pitágoras



Fonte : (WAGNER, 2015)

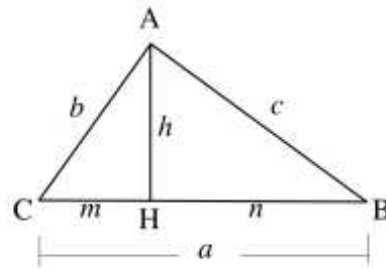
5.1.3 A demonstração que usa semelhança

Definição 5.1 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais. Existem três casos de semelhança de triângulos: ângulo-ângulo (AA), lado-ângulo-lado (LAL) e lado-lado-lado (LLL).*

Considere um triângulo ABC retângulo em \hat{A} (Figura 7). Traçando a altura AH fica determinado os seguintes segmentos:

1. **h**: altura do triângulo relativa à hipotenusa;
2. **m**: projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa e,
3. **n**: projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa.

Figura 7 – Triângulo retângulo



Fonte: (WAGNER, 2015)

Os triângulos AHC e ABC são semelhantes pelo caso AA. Assim, $b^2 = am$. Pelo mesmo caso, os triângulos AHB e ABC são semelhantes, então $c^2 = an$. Adicionando essas duas relações membro a membro, obtemos

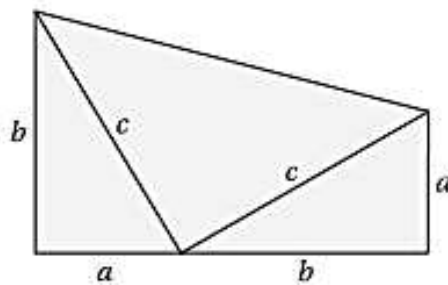
$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a \cdot a = a^2.$$

5.1.4 A demonstração do Presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881), gostava de Matemática e deu a seguinte prova para o Teorema de Pitágoras:

Considere um trapézio de bases a , b e altura $a + b$ dividido em 3 triângulos (Figura 8).

Figura 8 – Demonstração do Presidente para o Teorema de Pitágoras



Fonte: <https://rpm.org.br/cdrpm/2/5.htm>

A área do trapézio é igual a soma das áreas dos triângulos assim:

$$\frac{(a+b) \cdot (a+b)}{2} = \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot c}{2}$$

Simplificando, obtemos $a^2 + b^2 = c^2$.

5.1.5 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

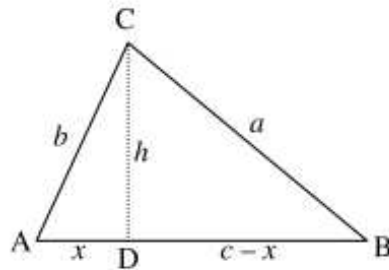
Teorema 5.1 Se a, b e c são lados de um triângulo e $a^2 = b^2 + c^2$ então, o triângulo é retângulo.

Demonstração: Considere um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Podemos ter três situações: ou $\hat{A} < 90^\circ$ ou $\hat{A} > 90^\circ$ ou $\hat{A} = 90^\circ$.

1. $A < 90^\circ$

Imaginemos que $b \leq c$ (Figura 9). Assim, o ponto D , projeção de C sobre AB , cai no interior do lado AB . Sejam $AD = x$ e $CD = h$.

Figura 9 – Triângulo Acutângulo ABC



Fonte: (WAGNER, 2015)

Como o triângulo ADC é retângulo, temos $b^2 = h^2 + x^2$. Como o triângulo BDC é retângulo, temos:

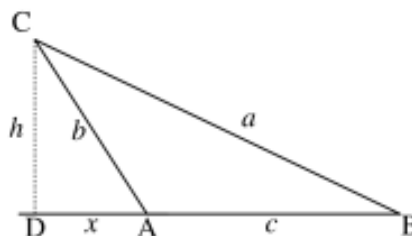
$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-x)^2 \\ a^2 &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, que contradiz a condição inicial.

2. $A > 90^\circ$

Nesse caso, o ponto D está localizado fora do lado AB (Figura 10).

Figura 10 – Triângulo Obtusângulo ABC



Fonte: (WAGNER, 2015)

Os mesmos cálculos que fizemos no caso anterior nos levam a

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx,$$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, novamente contradizendo a condição inicial.

Demonstramos que em um triângulo ABC , de lados a, b e c , valem as seguintes desigualdades:

$$A < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $A = 90^\circ$. ■

5.2 Os Ternos Pitagóricos

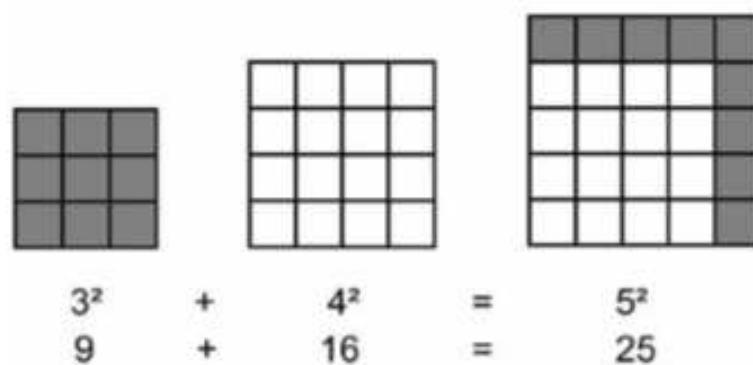
Definição 5.2 *Sejam x, y e z números inteiros positivos. (x, y, z) é um terno pitagórico se, e somente se, $x^2 + y^2 = z^2$.*

Exemplo 5.1 *Exemplos de Ternos Pitagóricos:*

1. $(3, 4, 5)$ é terno pitagórico, pois $3^2 + 4^2 = 5^2$;
2. $(6, 8, 10)$ é terno pitagórico, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$;
3. $(12, 35, 37)$ é terno pitagórico, pois $12^2 + 35^2 = 37^2$.

Um modo de pensar nos ternos pitagóricos é relacioná-los ao ato de rearrumar quadrados. Se temos um quadrado de 3×3 feito de 9 quadradinhos e um de 4×4 feito de 16 quadradinhos, então os quadradinhos podem ser rearrumados para formar um quadrado de 5×5 feito de 25 quadradinhos (Figura 11).

Figura 11 – Visualização do terno pitagórico $(3, 4, 5)$ através do rearranjo de quadradinhos



Fonte: (SINGH: 1997)

Teorema 5.2 *Se (x, y, z) é um terno pitagórico e k é um número inteiro positivo maior que 1, então (kx, ky, kz) também é um terno pitagórico.*

Demonstração: Com efeito, $(kx)^2 + (ky)^2 = k^2(x^2 + y^2) = k^2z^2 = (kz)^2$. ■

Teorema 5.3 Se (x, y, z) é um terno pitagórico e $x = kx_1, y = ky_1$ e $z = kz_1$, com $k \neq 0$, então (x_1, y_1, z_1) também é um terno pitagórico.

Demonstração: Com efeito,

$$k^2(x_1^2 + y_1^2) = (kx_1)^2 + (ky_1)^2 = x^2 + y^2 = z^2 = (kz_1)^2 = k^2z_1^2$$

e como $k \neq 0$, resulta que $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$. ■

5.2.1 Ternos Pitagóricos Primitivos

Definição 5.3 Dado um terno pitagórico (x, y, z) se $\text{mdc}(x, y) = 1$ (e conseqüentemente $\text{mdc}(x, z) = \text{mdc}(y, z) = 1$), dizemos que (x, y, z) é um terno pitagórico primitivo.

Exemplo 5.2 $(5, 12, 13)$ é um terno pitagórico primitivo. De fato, $5^2 + 12^2 = 13^2$ e $\text{mdc}(5, 12, 13) = 1$.

Exemplo 5.3 $(15, 36, 39)$ não é terno pitagórico primitivo. De fato, $15^2 + 36^2 = 39^2$ e $\text{mdc}(15, 36, 39) = 3$.

Notemos que a partir de um terno pitagórico primitivo qualquer, podemos gerar infinitos ternos pitagóricos não-primitivos, bastando multiplicar seus elementos por um inteiro positivo maior que 1. E, dado um terno pitagórico não primitivo, conseguimos obter um primitivo dividindo seus elementos pelo *mdc* deles.

5.2.2 Encontrando Ternos Pitagóricos

Os ternos pitagóricos se tornam raros à medida que os números aumentam, e encontrá-los se torna cada vez mais difícil. Veremos agora dois teoremas que dão condições necessárias e suficientes para que um terno (x, y, z) seja um terno pitagórico. O primeiro deles trata de todos os ternos pitagóricos e o segundo dos ternos pitagóricos primitivos.

Teorema 5.4 (x, y, z) é um terno pitagórico se, e somente se, existem inteiros positivos u e v tais que $u > v > 0$, u e v têm a mesma paridade, uv é um quadrado perfeito, e valem as igualdades

$$x = \sqrt{uv}, y = \frac{u-v}{2} \text{ e } z = \frac{u+v}{2}.$$

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que (x, y, z) é um terno pitagórico. Como $x^2 + y^2 = z^2$, então

$$x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y).$$

Sejam $u = z + y$ e $v = z - y$, temos:

1. uv é um quadrado perfeito.
2. u e v são inteiros positivos, pois $z > y$.
3. u e v possuem a mesma paridade.
4. $u > v$, pois $(z+y) > (z-y)$.
5. $z = \frac{u+v}{2}$. De fato, adicionando membro a membro as equações

$$\begin{cases} u = z + y \\ v = z - y \end{cases}$$

Temos, $u+v = 2z$. Logo, $z = \frac{u+v}{2}$.

6. $y = \frac{u-v}{2}$. De fato, multiplicando por (-1) uma das equações, temos:

$$v = c - b \cdot (-1) \Rightarrow -v = -c + b.$$

Adicionando membro a membro as equações:

$$\begin{cases} u = z + y \\ -v = -z + y \end{cases}$$

Obtemos, $u-v = 2b$. Portanto, $y = \frac{u-v}{2}$.

7. $x^2 = uv \Rightarrow x = \sqrt{uv}$.

(\Leftarrow) Suponha que u e v satisfazem as condições do teorema. Como u e v têm a mesma paridade e $u > v > 0$, então $y = \frac{u-v}{2}$ e $z = \frac{u+v}{2}$ são inteiros positivos. Como uv é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{uv}$ também é um inteiro positivo. Assim,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 + (\sqrt{uv})^2 = \frac{u^2 - 2uv + v^2 + 4uv}{4} = \frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = z^2,$$

e (x, y, z) é um terço pitagórico. ■

Teorema 5.5 *Sejam x, y e z inteiros positivos. Então são equivalentes:*

1. $\text{mdc}(x, y) = 1$ e $x^2 + y^2 = z^2$.
2. $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ ou vice-versa e $z = a^2 + b^2$, com a e b inteiros tais que $a > b > 0$, $\text{mdc}(a, b) = 1$ e a e b têm paridade distinta.

Demonstração:

$1 \Rightarrow 2$: Pelo Teorema 5.4, existem inteiros u e v tais que $u > v > 0$, u e v têm a mesma paridade, uv é um quadrado perfeito, $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{u-v}{2}$ e $z = \frac{u+v}{2}$. Suponha que u e v sejam ambos pares. Escreva $u = 2m$ e $v = 2n$, de modo que

$$x = \sqrt{uv} = 2\sqrt{mn} \text{ e } y = \frac{u-v}{2} = m-n.$$

Como $\text{mdc}(x, y) = 1$, resulta que $\text{mdc}(m, n) = 1$. Com efeito, se $d = \text{mdc}(m, n)$, então $d|m$ e $d|n$. Logo, $d|x$ e $d|y$ e, como $\text{mdc}(x, y) = 1$, segue que $d = 1$. Além disso, m e n têm paridade distinta, pois, caso contrário, $2|x$ e $2|y$, o que contradiz $\text{mdc}(x, y) = 1$. Como $x^2 = 4mn$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$, resulta que m e n são quadrados perfeitos e, portanto, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > b > 0$ tais que $m = a^2$ e $n = b^2$ e a e b têm paridade diferente. Por outro lado,

$$x = 2\sqrt{mn} = 2ab, \text{ } y = m-n = a^2 - b^2$$

e como

$$z^2 = x^2 + y^2 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2,$$

segue que $z = a^2 + b^2$.

Suponha agora que u e v sejam ambos ímpares. Como $\text{mdc}(x, y) = 1$, resulta que $\text{mdc}(u, v) = 1$. Com efeito, se $d = \text{mdc}(u, v)$ então $d|u$ e $d|v$. Logo, $d|x$ e $d|y$ e como $\text{mdc}(x, y) = 1$ tem-se $d = 1$. Segue do fato de $x^2 = uv$ e $\text{mdc}(u, v) = 1$ que u e v são quadrados perfeitos e, portanto, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $u = m^2$ e $v = n^2$, com m e n ímpares. Assim,

$$y = \frac{u-v}{2} = \frac{m^2 - n^2}{2} = 2 \left(\frac{m+n}{2} \right) \cdot \left(\frac{m-n}{2} \right) = 2ab,$$

em que $a = \frac{m+n}{2}$ e $b = \frac{m-n}{2}$. Portanto,

$$x = \sqrt{uv} = mn = \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 - \left(\frac{m-n}{2} \right)^2 = a^2 - b^2$$

e como antes $z = a^2 + b^2$.

Resta mostrar que a e b têm paridade distinta. Se $m \equiv n \equiv 1$ ou $m \equiv n \equiv 3 \pmod{4}$, então $m+n \equiv 2$ e $m-n \equiv 0 \pmod{4}$, de modo que $a = \frac{m+n}{2}$ é ímpar e $b = \frac{m-n}{2}$ é par. Se $m \equiv 1$ e $n \equiv 3 \pmod{4}$ ou $m \equiv 3$ e $n \equiv 1 \pmod{4}$, então $m+n \equiv 0$ e $m-n \equiv 2 \pmod{4}$, de modo que $a = \frac{m+n}{2}$ é par e $b = \frac{m-n}{2}$ é ímpar.

$2 \Leftarrow 1$: Sendo $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ e $z = a^2 + b^2$, a equação pitagórica é satisfeita. Resta mostrar que $\text{mdc}(x, y) = 1$. Observe que $x = 2ab$ é par, enquanto $y = a^2 - b^2$ é ímpar, uma vez que a e b têm paridades diferentes. Suponha $\text{mdc}(x, y) \neq 1$ e seja p um primo ímpar tal que $p|x$ e $p|y$. Como, $p|x$ e $p|2ab$ então $p|a$ ou $p|b$. Além disso, $p|y$ e $p|(a^2 - b^2)$, o que implica $p|a$ e $p|b$. Assim, $\text{mdc}(a, b) \neq 1$, que é uma contradição. ■

5.2.3 Exemplos

1. Considere o caso $x = 45 = 3^2 \cdot 5$. Vamos encontrar todos os triângulos retângulos com um dos catetos igual a 45. Como 45 é ímpar, determinamos inicialmente todos os pares (u, v) tais que $45^2 = 2025 = uv$ com $u > v$. São eles: $(2025, 1)$, $(675, 3)$, $(405, 5)$, $(225, 9)$, $(135, 15)$, $(81, 25)$ e $(75, 27)$. Os valores para $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{u-v}{2}$ e $z = \frac{u+v}{2}$ estão calculados na tabela abaixo:

u	v	x	y	z
2025	1	45	1012	1013
675	3	45	336	339
405	5	45	200	105
225	9	45	108	117
135	15	45	60	75
81	25	45	28	53
75	27	45	24	51

Observe que em todos os casos temos $x^2 + y^2 = z^2$.

2. Para $x = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, vamos encontrar todos os triângulos retângulos com um dos catetos igual a 72. Como 72 é par, determinamos inicialmente todos os pares (u', v') tais que $\frac{72^2}{4} = u'v'$ com $u' > v'$. São eles: $(1296, 1)$, $(648, 2)$, $(432, 3)$, $(324, 4)$, $(216, 6)$, $(162, 8)$, $(144, 9)$, $(108, 12)$, $(81, 16)$, $(72, 18)$, $(54, 24)$ e $(48, 27)$. Os valores para $u = 2u'$, $v = 2v'$, $x = \sqrt{uv}$, $y = \frac{u-v}{2}$ e $z = \frac{u+v}{2}$ estão calculados na tabela abaixo:

u'	v'	u	v	x	y	z
1296	1	2592	2	72	1295	1297
648	2	1296	4	72	646	650
432	3	864	6	72	429	435
324	4	648	8	72	320	328
216	6	432	12	72	210	22
162	8	324	16	72	154	170
144	9	288	18	72	135	153
108	12	216	24	72	96	120
81	16	162	32	72	65	97
72	18	144	36	72	54	90
54	24	108	48	72	30	78
48	27	96	54	72	21	75

Observe que em todos os casos temos $x^2 + y^2 = z^2$.

5.3 Curiosidades

Proposição 5.1 *O número 3 é o menor inteiro positivo que figura como cateto em um terço pitagórico.*

Demonstração: Os inteiros positivos menores que 3 são: 0, 1, 2. O número 0 não pode ser cateto de um terço pitagórico, já que deve representar lado de um triângulo. Sendo assim, resta mostrar que 1 e 2 não podem ser catetos de nenhum terço pitagórico.

Seja (a, b, c) um terço pitagórico. Tomando $a = 1$, sem perda de generalidade, temos:

$$1^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 1 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 1 \Rightarrow (c + b)(c - b) = 1$$

A única forma de representar o número 1 como produto de dois números inteiros é: $1 = 1 \cdot 1$. Assim, $c + b = 1$ e $c - b = 1$, implicando $b = 0$. Mas como vimos, 0 não pode ser cateto de um terço pitagórico. Portanto, o número 1 não pode ser cateto de um terço pitagórico.

Agora, tomando $a = 2$ temos:

$$2^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 4 \Rightarrow (c + b) \cdot (c - b) = 4.$$

O número 4 pode ser representado de duas formas $4 = 2 \cdot 2$ ou $4 = 4 \cdot 1$, como produto de números inteiros. Assim,

1. $c + b = 2$ e $c - b = 2$, o que implica $b = 1$.
2. $c + b = 4$ e $c - b = 1$, o que implica $c = \frac{5}{2}$.

Logo, podemos concluir que o número 2 não pode ser cateto de um terço pitagórico. ■

Proposição 5.2 *Se $x \geq 3$, então existe um triângulo retângulo com cateto x .*

Demonstração: Para x ímpar, considere $u = x^2$ e $v = 1$. Como $x \geq 3$, tem-se $u > v$. Por outro lado, para x par, considere $u = \frac{x^2}{2}$ e $v = 2$. Como $x \geq 4$, segue que $u > v$. Aplicando o Teorema 5.4, obtém-se o resultado. ■

Proposição 5.3 *Existem infinitos triângulos retângulos com um de seus catetos e a hipotenusa sendo números consecutivos.*

Demonstração: Para cada número ímpar x , $x \geq 3$, tomamos $u = x^2$ e $v = 1$. Assim, pelo Teorema 5.4,

$$z = \frac{u + v}{2} = \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} + 1 = \frac{u - v}{2} + 1 = y + 1.$$

■

Proposição 5.4 *Se (a, b, c) é um terço pitagórico, então $a \neq b$.*

Demonstração: Suponhamos que (a, b, c) é um terno pitagórico e $a = b$. Daí,

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Sendo assim, c não é um número inteiro, contrariando a definição de Terno Pitagórico (Definição 5.2). ■

Proposição 5.5 $(3, 4, 5)$ é o único terno pitagórico cujos termos são três inteiros positivos consecutivos.

Demonstração: Sejam $k, k + 1$ e $k + 2 \in \mathbb{Z}_+^*$ três inteiros positivos consecutivos. Suponha que $(k, k + 1, k + 2)$ seja um terno pitagórico. Temos:

$$\begin{aligned} k^2 + (k + 1)^2 &= (k + 2)^2 \\ k^2 + k^2 + 2k + 1 &= k^2 + 4k + 4 \\ 2k^2 + 2k + 1 &= k^2 + 4k + 4 \\ k^2 - 2k - 3 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes são $k = -1$ ou $k = 3$. Como k representa lado de triângulo não pode assumir valor negativo, logo $k = 3$. Assim, $k + 1 = 4$ e $k + 2 = 5$. ■

Proposição 5.6 O terno $(3, 4, 5)$ é o triângulo pitagórico de menor área e de menor perímetro.

Demonstração: Pela Proposição 5.1, 3 é o menor inteiro positivo que pode ser cateto de um terno pitagórico e pela Proposição 5.4 os catetos de um terno pitagórico são sempre distintos. Isso nos garante que $(3, 4, 5)$ é o terno pitagórico que possui os menores elementos. Portanto, ele gera a menor área $\left(\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\right)$ e o menor perímetro $(3 + 4 + 5 = 12)$. ■

6 PIERRE DE FERMAT

Figura 12 – Pierre de Fermat



Fonte: <https://www.infoescola.com/biografias/pierre-de-fermat/>

Pierre de Fermat (Figura 12) nasceu em 17 de agosto de 1601, em Beaumont-de-Lomagne, no sudoeste da França. Filho de Dominique Fermat, um rico mercador de peles, Pierre teve a sorte de receber uma educação excepcional. Estudou direito em Toulouse e em 1631 foi nomeado *conseiller au Parlement de Toulouse*, conselheiro na Câmara de Requerimentos.

Em seu tempo livre, Fermat se dedicava à Matemática e este era o seu *hobby*. Ele era um autêntico estudioso amador, conhecido como "Príncipe dos Amadores". O seu interesse pela Matemática ocorreu através da leitura do livro *Aritmética*, de Diofanto. Sua influência na Matemática foi limitada devido a sua falta de interesse em publicar suas descobertas. Escrevia cartas aos seus contemporâneos enunciando seus teoremas, mas se recusava a revelar suas demonstrações, causando assim muita frustração.

Fermat contribuiu nas mais diversas áreas da Matemática, sendo as principais: a Geometria Analítica, o Cálculo Geométrico e Infinitesimal, a Teoria da Probabilidade e a Teoria dos Números.

Em 1629, Fermat desenvolveu os seguintes conceitos de Geometria Analítica: a ideia de eixos perpendiculares, descreveu as equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérbolas.

No campo do Cálculo Geométrico e Infinitesimal, Fermat concentrou seus estudos nas tangentes, quadraturas, volume, comprimentos de curvas e centros de gravidade. Chegou ainda a um importante trabalho sobre máximos e mínimos de uma função que se assemelha ao usado hoje no Cálculo.

Em 1654, Fermat iniciou seus estudos na Teoria das Probabilidades e, juntamente com Pascal, descreveram com precisão as leis do acaso.

Por fim, na Teoria dos Números, Fermat contribuiu no estudo dos números perfeitos, números amigáveis, números figurados, quadrados mágicos, ternos pitagóricos e números primos. Sua realização mais polêmica e amplamente conhecida nessa área foi o “Último Teorema de Fermat”.

6.1 O Último Teorema de Fermat

Enquanto estudava o Livro 2 da *Aritmética*, Fermat encontrou o Teorema de Pitágoras e os ternos pitagóricos e pensou de que forma poderia contribuir com o assunto. Em um *insight* que imortalizaria o Príncipe dos Amadores, Fermat mudou a potência de 2 para 3 e criou uma equação que aparentemente não tinha solução para qualquer número inteiro. Alterando novamente o expoente para números maiores que 3, descobriu que a busca de soluções era igualmente difícil. Na margem de sua *Aritmética* escreveu uma observação:

"É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de duas quartas potências ou, em geral, para qualquer número que é uma potência maior do que a segunda, ser escrito como a soma de duas potências com o mesmo expoente." (SINGH, 1997)

Em notação algébrica, o teorema diz que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução para $n > 2$, com $n \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$.

Depois da primeira nota na margem esboçando sua teoria, Fermat adicionou um comentário que iria assombrar gerações de matemáticos:

"Descobri uma demonstração maravilhosa desta proposição que, no entanto, não cabe nas margens deste livro." (SINGH, 1997)

Estava lançado o desafio para o mundo.

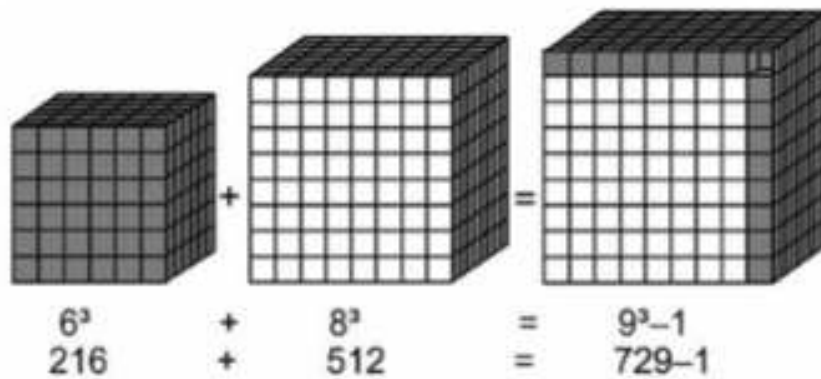
Na equação original, caso $n = 2$, o desafio era rearrumar os quadradinhos de dois quadrados para formar um terceiro quadrado maior. Na versão $n = 3$, o desafio é rearrumar dois cubos para formar um terceiro cubo maior. Não importa quais cubos sejam escolhidos de início; ao serem combinados, sempre sobra ou falta quadradinhos. O arranjo mais próximo de um perfeito foi aquele em que sobrou ou faltou apenas um quadradinho (Figura 13).

Pensar numa representação geométrica para $n \geq 4$ é impossível.

Fermat, por volta de 1650, já havia provado a validade do teorema para $n = 4$ utilizando o método de “descenso infinito”.

Após sua morte, em 1665, seu filho percebeu a importância dos trabalhos do pai e decidiu que as suas descobertas não seriam esquecidas pelo mundo. Assim, reuniu todas as cartas e anotações, incluindo as encontradas nas margens do livro *Aritmética* e as publicou. No livro, além desse teorema, existiam outras afirmações matemáticas escritas por Fermat. Todas foram provadas posteriormente, por um curto período de tempo, exceto o Último Teorema de Fermat.

Figura 13 – Os cubos 6^3 e 8^3 chegam perto de construir um cubo 9^3 .



Fonte: (SINGH, 1997)

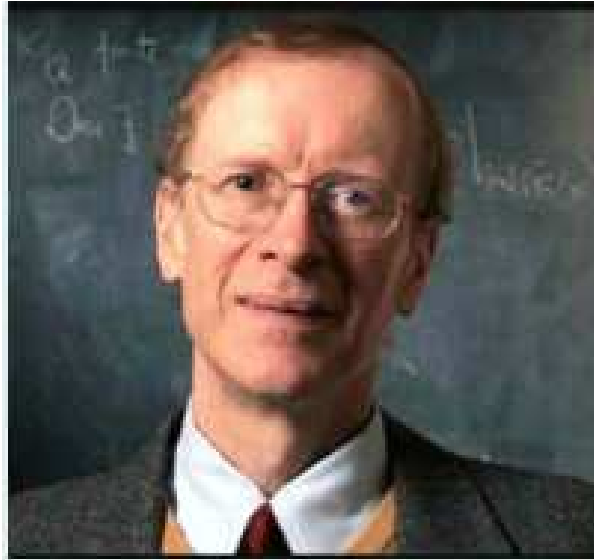
Ao longo dos três séculos seguintes, vários matemáticos tentaram descobrir provas para o Teorema de Fermat. Em 1753, Leonhard Euler conseguiu provar para $n = 3$. Em 1825, Adrien-Marie Legendre, demonstrou o caso para $n = 5$. Em 1832, Dirichlet, provou para $n = 14$. Ernst Kummer, em 1843, conseguiu provar todos os casos até $n = 100$, exceto para $n = 37, n = 59$ e $n = 67$.

Após o trabalho de Ernst Kummer, as esperanças de se descobrir uma demonstração para o Último Teorema de Fermat parecia cada vez mais impossível. A Matemática se voltava para outras áreas de pesquisa e corria-se o risco do problema ser esquecido. Na virada do século, o matemático amador Paul Friedrich Wolfskehl revitalizou a busca pela demonstração ao instituir um prêmio de dois milhões de dólares àquele que o demonstrasse. Segundo Paul, o Teorema o salvou de cometer suicídio. Assim, em menos de um ano, 621 provas foram publicadas, mas todas estavam erradas.

Em 1963, quando tinha dez anos de idade, Andrew Wiles (Figura 14) estava na biblioteca da sua escola e viu um livro chamado *O último Problema*. Esse livro contava a história do Último Teorema de Fermat, um problema com enunciado simples mas que há mais de trezentos anos ninguém conseguiu solucioná-lo. A partir disso, Andrew Wiles passou a ter como sonho de vida resolver tal teorema.

Em 1993, o matemático Andrew Wiles, professor da Universidade de Princeton anunciou em uma Conferência no Sir Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences em Cambridge ter finalmente realizado a demonstração do Último Teorema de Fermat. Entretanto, sua demonstração apresentava falhas e teve que ser reformulada a fim de corrigir as lacunas apontadas. Em 1995, corrigida as falhas, Wiles apresentou a demonstração definitiva e finalmente foi provado o Último Teorema de Fermat. A demonstração do professor Andrews contém cerca de 200 páginas e apresenta uma linguagem matemática avançada.

Figura 14 – Andrew Wiles



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b-andrew-wiles/>

6.2 Demonstração do Último Teorema de Fermat para o caso $n = 4$

A seguir, apresentaremos alguns conceitos da Aritmética Modular, que será utilizado na demonstração do Teorema de Fermat para o caso $n = 4$ e para o Pequeno Teorema de Fermat

Definição 6.1 *Sejam a, b e m inteiros, com $m > 0$, dizemos que a é congruente a b módulo m se eles deixam o mesmo resto quando dividido por m .*

Proposição 6.1 $a \equiv b \pmod{m} \iff a - b$ é divisível por m .

Demonstração:

(\Rightarrow) Pelo algoritmo da divisão podemos escrever:

$$a = mq_1 + r_1 \text{ e } b = mq_2 + r_2 \text{ com } 0 \leq r_1, r_2 < m.$$

Como $a \equiv b \pmod{m}$, temos $r_1 = r_2$. Logo:

$$a - b = mq_1 + r_1 - (mq_2 + r_2) = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) = m(q_1 - q_2)$$

Portanto, $m \mid (a - b)$. Como queríamos demonstrar.

(\Leftarrow) Pelo algoritmo da divisão podemos escrever:

$$a = mq_1 + r_1 \text{ e } b = mq_2 + r_2 \text{ com } 0 \leq r_1, r_2 < m.$$

Neste caso,

$$a - b = mq_1 + r_1 - mq_2 - r_2 = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Se esse valor é divisível por m e pelo fato de que $m|m(q_1 - q_2)$, então $m|r_1 - r_2$. Pelo algoritmo da divisão temos que $0 \leq r_1 - r_2 < m$. Como, $r_1 - r_2$ é divisível por m , a única opção que respeita o algoritmo da divisão é: $r_1 - r_2 = 0$. Logo, $r_1 = r_2$. Portanto, como os restos de a e b são iguais, podemos dizer que $a \equiv b \pmod{m}$. Logo, está demonstrada a volta do teorema. ■

Lema 6.1 (Lei do Corte) Se $ax \equiv ay \pmod{m}$ e $\text{mdc}(a, m) = 1$, então $x \equiv y \pmod{m}$.

Demonstração: Pela hipótese, temos que $\exists q \in \mathbb{Z}$, tal que $ax = mq + ay$, daí

$$mq = ax - ay = a(x - y)$$

Assim, temos que $m|a(x - y)$, mas como o $\text{mdc}(a, m) = 1$, segue $m|(x - y)$, garantindo que

$$x \equiv y \pmod{m}$$

■

Definição 6.2 (Sistema Reduzido De Resíduos) Seja p um número primo. Dizemos que um conjunto de $p - 1$ números inteiros a_1, a_2, \dots, a_{p-1} é um Sistema de Resíduos (srr) módulo p se os a_i representam todas as classes de congruências não nulas módulo p .

Por exemplo, $1, 2, \dots, p - 1$ formam um srr módulo p , pois são todos os restos não nulos possíveis de se obter quando dividimos um número inteiro por p .

Lema 6.2 Dados p primo e a inteiro de tal modo que $\text{mdc}(p, a) = 1$, defina o conjunto $A = \{an; \forall n \in \mathbb{N} \text{ com } n < p\}$. O conjunto dos restos das divisões dos elementos de A por p forma um srr módulo p .

Demonstração: Como n é diferente de zero e estritamente menor do que p , então temos exatamente $p - 1$ valores possíveis. Agora suponha que haja dois múltiplos de a , digamos, ia e ja , que tenham o mesmo resto quando dividimos por p . Nós podemos escrever isso como

$$ia \equiv ja \pmod{p}.$$

Subtraindo ja de ambos os lados e fatorando a , descobrimos que

$$a(i - j) \equiv 0 \pmod{p}$$

isto é, $a(i - j)$ é divisível por p . Como p divide o produto de dois números, ele deve dividir um dos números (ou ambos). Mas como a não é divisível por p , daí p deve dividir $i - j$. Mas i e j são ambos menores que p , portanto, a diferença deles deve estar estritamente entre $-p$ e p . O único múltiplo de p estritamente entre $-p$ e p é zero, então $i - j = 0$. Então a única maneira de ter $ia \equiv ja \pmod{p}$ é se $i = j$, mostrando assim que todos os múltiplos de a a partir de a até $(p - 1)a$ possuem diferentes restos quando divididos por p . Finalmente, uma vez que existem exatamente $p - 1$ múltiplos de a no nosso conjunto e $p - 1$ possíveis restos não nulos \pmod{p} ,

concluimos que cada resto aparece exatamente uma vez. Provando assim que o conjunto dos restos das divisões dos elementos de A por p se configura um srr módulo p . ■

Passaremos agora para a demonstração do Último Teorema de Fermat.

Teorema 6.1 (O Último Teorema de Fermat: Caso $n = 4$) *A equação $X^4 + Y^4 = Z^2$ não tem solução em \mathbb{Z} , exceto as soluções triviais com pelo menos uma das variáveis iguais a zero. Em particular, o Último Teorema de Fermat é válido para $n = 4$.*

Demonstração: Demonstraremos tal resultado utilizando redução ao absurdo. Consideremos que a equação $x^4 + y^4 = z^2$ possua solução não trivial (x, y, z) . Sem perda de generalidade, podemos supor que $x, y, z \in \mathbb{N}$. Escolhemos a solução com o menor valor possível para z e, então, podemos considerar $\text{mdc}(x, y) = 1$. Com efeito, caso tenhamos $d = \text{mdc}(x, y) \neq 1$, dividimos a equação inicial por d^4 e obtemos uma solução com um menor valor para z :

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= z^2 \\ \left(\frac{x}{d}\right)^4 + \left(\frac{y}{d}\right)^4 &= \left(\frac{z}{d^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Agora, pelo Teorema 5.5, temos que existem $a, b \in \mathbb{N}$ sendo as paridades de a e b distintas e $\text{mdc}(a, b) = 1$, tais que:

$$\begin{cases} x^2 = 2ab \\ y^2 = a^2 - b^2 \\ z^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Caso a seja par e b ímpar, teremos $y^2 = a^2 - b^2 \equiv -1 \pmod{4}$, o que não é possível, visto que existem apenas duas possibilidades para o resto de um quadrado perfeito na divisão por 4, no caso, 0 e 1. Então, devemos ter a ímpar e b par. Consequentemente, podemos escrever $b = 2c$, com $c \in \mathbb{Z}$ e, assim:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2ab = 4ac \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= ac. \end{aligned}$$

Pela igualdade acima, podemos escrever $a = l^2$ e $c = m^2$ com $l, m \in \mathbb{N}$ e l ímpar. Mais ainda, como a e b são primos entre si, temos que o mesmo vale para a e c , implicando que $\text{mdc}(l, m) = 1$. Além disso, temos

$$y^2 = a^2 - b^2 = a^2 - (2c)^2 = l^4 - 4m^4,$$

donde resulta:

$$\begin{aligned} l^4 &= 4m^4 + y^2 \\ (l^2)^2 &= (2m^2)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Notemos que, pelo fato de $\text{mdc}(l, m) = 1$ e de l ser ímpar, temos $\text{mdc}(2m^2, l^2) = 1$ e, logo, $\text{mdc}(2m^2, y) = 1$. Nessas condições, aplicando novamente o Teorema 5.5, obtemos que existem $p, q \in \mathbb{N}$ de paridades distintas e tais que $\text{mdc}(p, q) = 1$ satisfazendo:

$$\begin{cases} 2m^2 = 2pq \\ l^2 = p^2 + q^2 \end{cases}$$

Como $m^2 = pq$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, segue que existem $r, s \in \mathbb{N}$, primos entre si, tais que $p = r^2$ e $q = s^2$. Assim, resulta

$$l^2 = r^4 + s^4.$$

E ainda, observemos que $l < z$ pois, pela definição de l , temos:

$$l^2 = a \leq a^2 < a^2 + b^2 = z^2.$$

Desse modo, obtivemos outra solução inteira para a equação $X^4 + Y^4 = Z^2$, a saber, a tripla (r, s, l) , em que $l < z$. No entanto, esse resultado contradiz a minimalidade de z . Portanto, a equação $X^4 + Y^4 = Z^2$ não possui solução não trivial em \mathbb{Z} , como queríamos provar.

Como $X^4 + Y^4 = Z^2$ não possui solução inteira positiva, então $X^4 + Y^4 = (Z^2)^2 = Z^4$ também não. De fato, pois se (a, b, c) fosse solução de $X^4 + Y^4 = Z^4$ então $a^4 + b^4 = c^4 \Rightarrow a^4 + b^4 = (c^2)^2 \Rightarrow (a, b, c^2)$ seria solução da equação $X^4 + Y^4 = Z^2$ que é um absurdo. Portanto, para $n = 4$ o Último Teorema de Fermat fica provado. ■

6.3 Demonstração do Pequeno Teorema de Fermat

Teorema 6.2 *Se $a, p \in \mathbb{Z}$, com p primo e $\text{mdc}(a, p) = 1$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração: Admitindo as hipóteses, ou seja, supondo que p seja um número primo e a um inteiro não divisível por p , considere o conjunto $A = \{a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a\}$. Devido ao Lema 6.2, nenhum dos elementos de A é divisível por p e quaisquer dois deles são incongruentes \pmod{p} . Dessa forma, o conjunto formado pelos restos das divisões dos elementos de A por p consiste num srr. Assim, podemos multiplicar todos os elementos de A e obter a seguinte congruência:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

Ou seja, o produto de todos os múltiplos de a tem o mesmo resto que o fatorial de $(p-1)$ quando dividido por p . Reescrevendo a expressão acima, obtemos

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

Como $(p-1)!$ é o produto dos números naturais menores que p , temos que $\text{mdc}(p, (p-1)!) = 1$. Assim, pela Lei do Corte (6.1) temos:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$



7 RELATO DA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

7.1 Escola Estadual Álvaro Giesta

Figura 15 – Fachada da Escola Estadual Álvaro Giesta



Fonte: A autora

A atividade foi desenvolvida no dia 4 de dezembro de 2024 na Escola Estadual Álvaro Giesta (Figura 15). A escola está localizada na cidade de São Geraldo, interior de Minas Gerais, e dista 29 quilômetros de Viçosa. Fundada em 1918, a escola é uma instituição que oferece formação nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, além do EJA. É uma escola referência na região em razão da excelência do ensino ofertado e do compromisso em oferecer uma educação pública de qualidade.

Durante a realização da atividade fui acompanhada pela, regente da turma, Thamyres Ribeiro Medeiros, ex-aluna do curso de Licenciatura em Matemática da UFV. Atualmente, ela trabalha nas redes estadual e municipal de educação, desenvolvendo um excelente trabalho.

A atividade teve como objetivo demonstrar o Pequeno Teorema de Fermat de forma lúdica e acessível aos estudantes do Ensino Médio. A proposta foi unir a Matemática rigorosa com seus conceitos de definição, teorema, demonstração com o uso do lúdico e de materiais concretos. Permitindo assim que os estudantes compreendessem conceitos complexos de maneira concreta e interativa.

A atividade contou com a participação dos estudantes dos três anos do Ensino Médio (1º, 2º e 3º ano), que foram divididos em três grupos, de acordo com seus anos escolares. De acordo com Barros (2016, p. 11), "as atividades em grupo facilitam o desenvolvimento cognitivo e conseqüentemente a aprendizagem do estudante". Isso é reforçado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

[...] trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como: perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso; saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro; discutir as

dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias; incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender. (PCN, 1988, p. 39).

A atividade teve duração de 90 minutos e foi dividida em três momentos: introdução à Aritmética Modular, história de Pierre de Fermat e atividade de construção dos brincos de miçangas.

7.2 Introdução à Aritmética Modular

No início, fizemos uma introdução à Aritmética Modular, conteúdo essencial para a formulação do Pequeno Teorema de Fermat. Para introduzir o conteúdo, fiz a seguinte pergunta:

Ana Flávia: *Vocês conseguem pensar em um contexto onde a operação $7 + 6 = 1$ faça sentido?*

Os estudantes olharam com certa surpresa, sem saber como responder. Após um momento de reflexão, fiz uma sugestão:

Ana Flávia: *A aula de vocês se iniciam às 7 horas da manhã e suponha que num determinado dia ela terá duração de seis horas. Que horas a aula irá acabar?*

Estudantes: *13 horas.*

Ana Flávia: *Sim! Mas se estivermos pensando em um relógio analógico, de ponteiro. Onde estará localizado o relógio das horas?*

Estudantes: *No número 1.*

Ana Flávia: *Bom, então parece razoável pensar que quando falamos em um relógio analógico, a operação $7 + 6 = 1$ faz sentido.*

Os estudantes concordaram com a conclusão apresentada.

Afim de conduzir os estudantes à conclusão de que o número 1 é, na verdade, o resto da divisão do número 13 pelo número 12 sendo, o número de divisões em horas do relógio, foi proposto mais um exemplo:

Ana Flávia: *Vamos supor agora que vocês iniciaram um viagem às 6 horas da manhã e terá duração de 40 horas. Que horas estará marcando no relógio no momento da chegada? Ou seja, em que número estará o ponteiro das horas?*

Com esse exemplo pretendíamos levar os estudantes a abstrair e obterem um método numérico para chegar ao resultado e não ficarem dependentes de "dar voltas" no relógio.

Pensando no relógio e no movimento dos ponteiros, os estudantes responderam corretamente que o ponteiro das horas estaria no número 10. Então, como no exemplo inicial, foi possível escrever $6 + 40 = 10$.

No quadro, descrevemos as ideias discutidas:

Ana Flávia: $6 + 40 = 46$. Se dividirmos 46 por 12, o resto obtido nessa operação no conjunto dos números inteiros será 10. Ora, 10 é o resultado da operação acima. Da mesma forma, voltando ao exemplo inicial, $7 + 6 = 13$ e o resto obtido na divisão de 13 por 12 é 1.

Os estudantes conseguiram perceber que os resultados obtidos nas operações acima, apesar de absurdas no conjunto dos números inteiros, fazem sentido em outros contextos. A partir daí, apresentamos no quadro a notação de módulo:

Ana Flávia: *Então, a partir de agora podemos dizer o seguinte:*

1. 13 é congruente a 1 módulo 12. Notação: $13 \equiv 1 \pmod{12}$ e
2. 46 é congruente a 10 módulo 12. Notação: $46 \equiv 10 \pmod{12}$.

Chamei a atenção de que o módulo 12 nos informa em que contexto estamos realizando a operação. Sem essa informação, alguém que a visse consideraria errada. Além disso, foi dito que nessa nova operação usaríamos o sinal de congruência (\equiv) no lugar do sinal da igualdade ($=$). Sintetizamos a nossa discussão dizendo que a Aritmética Modular é uma área da Matemática que trabalha com os possíveis restos obtidos na divisão por um dado número, e que isso pode ser feito para quaisquer números inteiros positivos.

Em seguida, foi apresentada aos estudantes a Proposição 6.1 que relaciona a congruência de dois números módulo p com a divisibilidade desses números por p . Conseguimos demonstrar tal proposição de forma participativa, pois foram utilizados conceitos de divisibilidade e de módulo que tinha acabado de ser apresentado.

No segundo momento da atividade, com o objetivo de despertar a curiosidade sobre a atividade que seria realizada, contei a história de Pierre de Fermat, usando para isso a pesquisa bibliográfica feita e exposta no Capítulo 6. Com essa exposição, foi possível verem o legado deixado por Fermat.

7.3 De brincos de miçangas ao Pequeno Teorema de Fermat

No terceiro momento, apresentei aos estudantes o enunciado do Pequeno Teorema de Fermat e expliquei como seria realizada a atividade prática relacionada ao teorema, com a utilização de miçangas. Os estudantes deveriam construir brincos de miçangas de duas cores, variando somente a quantidade de miçangas utilizadas em cada brinco e assim investigar as regularidades nas peças formadas e suas relações com o Pequeno Teorema de Fermat.

Todos os grupos receberam um pacote contendo miçangas nas cores azul e branca e a primeira atividade proposta foi construir brincos utilizando $p = 3$ miçangas e tendo somente $a = 2$ cores de miçangas disponíveis.

Ana Flávia: *Quantos brincos diferentes conseguimos construir?*

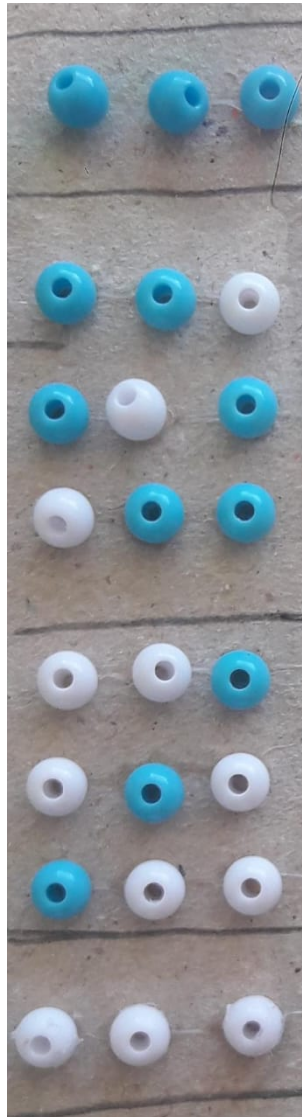
Alunos: 4.

Observei que os estudantes haviam compreendido que a ordem de escolha das miçangas não interferia no resultado final, ou seja, ao escolherem primeiro duas miçangas azuis e depois uma miçanga branca construiriam o mesmo brinco, gerado por uma branca seguida das duas azuis. Estávamos interessados em construir todas as sequências possíveis utilizando três miçangas e duas cores, desse modo, fiz o seguinte comentário:

Ana Flávia: A primeira miçanga pode ser azul ou branca e de forma análoga, temos as mesmas possibilidades para a segunda e para a terceira miçangas. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há duas possibilidades de cores para a primeira, para a segunda e a terceira miçanga, isto é, $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ brincos possíveis a serem construídos.

A Figura 16 mostra todas as sequências possíveis, usando 3 miçangas e 2 cores.

Figura 16 – Todos as sequências possíveis com 3 miçangas



Fonte: A autora.

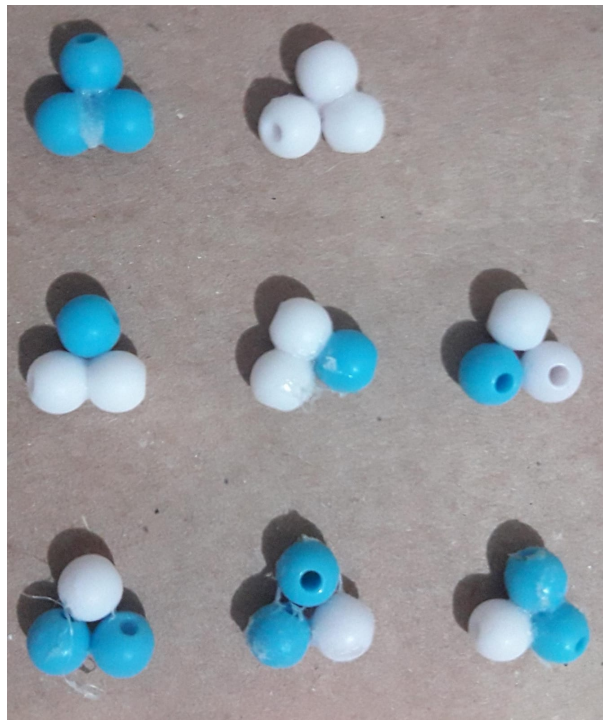
Após a construção das sequências, pedi aos estudantes que construíssem os brincos, juntassem as miçangas de modo a formar um triângulo. As imagens 17 e 18 registram a construção e os brincos prontos, respectivamente.

Figura 17 – Alunos construindo os brincos de 3 miçangas



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 18 – Todos os 8 brincos construídos



Fonte: A autora.

Dos oitos brincos formados, dois são monocromáticos e os seis restantes são coloridos e podem ser divididos em dois grupos com a mesma quantidade de brincos. Os três brincos de cada grupo são iguais, a menos de rotação.

De acordo com a notação do Teorema 6.2, o número $p = 3$ representa a quantidade de miçangas em cada brinco e o número $a = 2$ a quantidade de cores disponíveis. Assim, temos:

$$\begin{aligned} 3 &\text{ divide } 6 \\ 3 &\text{ divide } 8 - 2 \\ 3 &\text{ divide } (2^3 - 2) \\ p &\text{ divide } (a^p - a) \end{aligned}$$

$2^3 - 2$ é a quantidade total de brincos subtraído dos dois brincos monocromáticos. A quantidade restante 6, pode ser distribuída de maneira igual em dois grupos, com mesma quantidade de elementos, como vemos na Figura 18. Cada grupo tem 3 brincos porque é o número de rotações que um brinco de cada grupo deve dar para voltar a sua posição inicial. Assim, provamos que o Pequeno Teorema de Fermat é válido para esse caso.

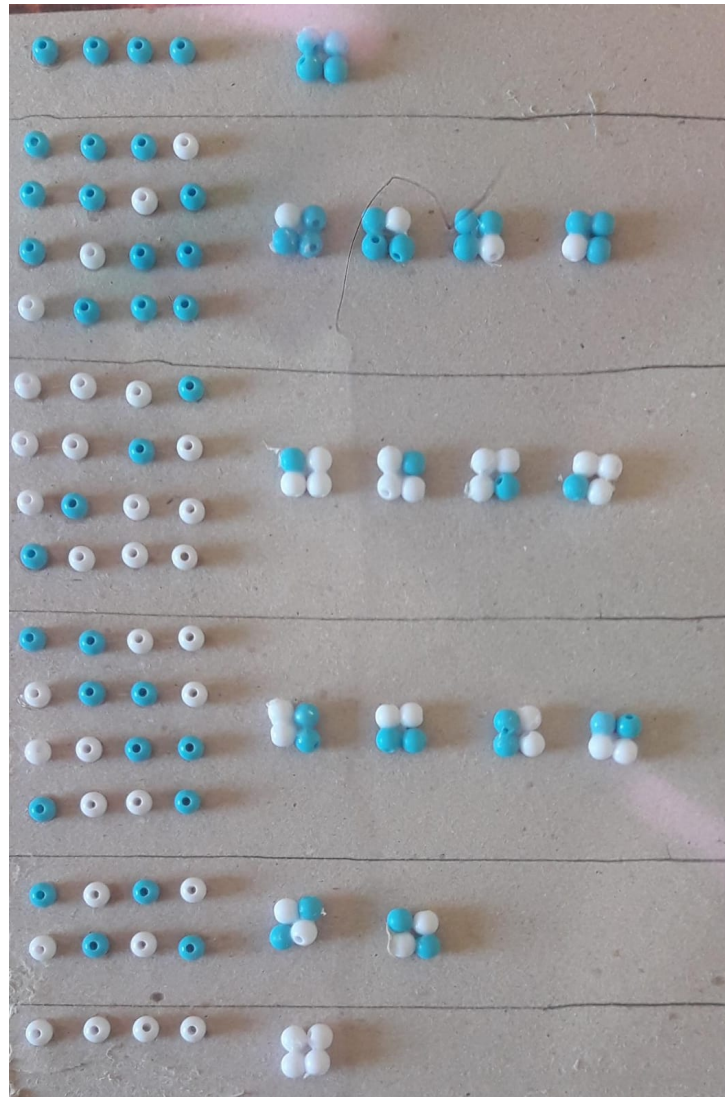
Em seguida, passamos para $p = 4$ miçangas e continuamos com $a = 2$ cores. Perguntei novamente aos estudantes quantas sequências conseguimos obter nesse caso. De acordo com o exemplo inicial, responderam que pelo Princípio Fundamental da Contagem, seriam $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ sequências possíveis. As Figuras 19 e 20 a seguir mostram respectivamente, a construção por parte dos estudantes e um modelo com todas as sequências e os respectivos brincos construídos.

Figura 19 – Alunos construindo os brincos de 4 miçangas



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 20 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 4 miçangas



Fonte: A autora.

Ao construir os brincos, os estudantes perceberam que dois são monocromáticos e 14 coloridos. Entretanto, os brincos coloridos não podem ser divididos em grupos de igual quantidade.

Como o número de miçangas $p = 4$ não é primo, não foi possível formar grupos iguais de mesmo tamanho ao excluir os dois monocromáticos.

Assim:

4 não divide 14

4 não divide $16 - 2$

4 não divide $(2^4 - 2)$

p não divide $(a^p - a)$

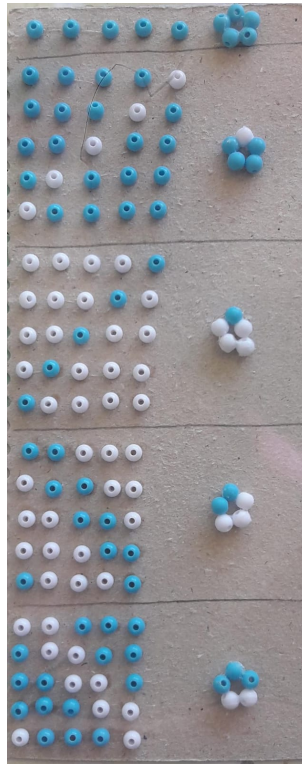
Portanto o teorema não é válido para $p = 4$. O que era de se esperar, já que o teorema exige que p seja primo. Apresentamos assim um exemplo de que o teorema não é válido para

número composto.

Em seguida, apresentei o caso $p = 5$ miçangas com $a = 2$ cores . Mostrando a construção da sequência e de um modelo de cada brinco, conforme Figuras 21 e 22.

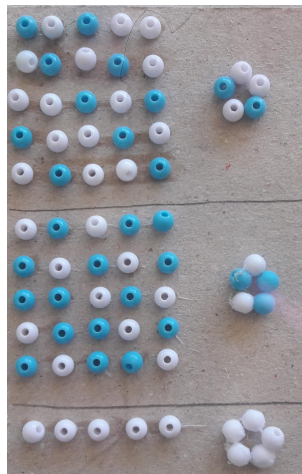
Pelo Princípio Fundamental da contagem conseguimos formar $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ sequências.

Figura 21 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 5 miçangas - 1.



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22 – Todas as sequências possíveis de serem construídas com 5 miçangas - 2.



Fonte: Dados da pesquisa

As 32 sequências formadas excluindo as monocromáticas, podem ser divididas em seis grupos com igual quantidade de elementos. Ou seja, conseguimos formar cinco brincos de cada um dos modelos pois, este é o número de rotações necessárias para retornar à posição inicial.

Assim, temos:

$$\begin{aligned} 5 &\text{ divide } 30 \\ 5 &\text{ divide } 32 - 2 \\ 5 &\text{ divide } (2^5 - 2) \\ p &\text{ divide } (a^p - a) \end{aligned}$$

Portanto, conseguimos mostrar que o teorema é válido para $p = 5$.

No exemplo inicial e no último estávamos trabalhando com uma sequência formada por três miçangas e por cinco miçangas. Desconsiderando as sequências monocromáticas, qualquer outra sequência que se forme não pode ser dividida em partes iguais, ou seja, não pode ser dividida de modo que as partes tenham o mesmo número de miçangas e de cores iguais. Isso se deve ao fato da quantidade de miçangas ser um número primo e como sabemos, o número primo só divide 1 e ele mesmo. Logo, cada uma dessas sequências deve ter a mesma quantidade de brincos e essa quantidade corresponde aos giros necessários para voltar à posição inicial.

Agora, quando o número de miçangas é quatro, é possível formar a sequência BABA ($B =$ branco, $A =$ azul), na qual pode ser dividida ao meio e é necessário somente dois movimentos para voltar à posição inicial. Logo, esse modelo não tem a mesma quantidade de brincos dos demais e por isso, o teorema não é válido.

Estava prevista a apresentação da demonstração do Pequeno Teorema de Fermat. Entretanto, devido à falta de tempo, isto não foi possível.

A atividade realizada abarcou com êxito o que foi apresentando na fundamentação teórica.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou apresentar a importância da utilização da História da Matemática, juntamente com o uso de materiais lúdicos, sem deixar o formalismo das demonstrações matemáticas, como recursos de ensino e aprendizagem. Foi feito um estudo sobre as vidas e contribuições dos matemáticos Pitágoras e Fermat e um aprofundamento do Teorema de Pitágoras e do Último Teorema de Fermat, caso $n = 4$.

O Teorema de Pitágoras é um dos principais teoremas da educação básica e relacioná-lo à história do seu criador, ajuda a despertar nos estudantes a curiosidade e mostra que a Matemática não é apenas números e memorizações desinteressantes. As demonstrações distintas do teorema, utilizando diferentes objetos matemáticos e o aprofundamento nos ternos pitagóricos comprovam que esses são conteúdos matemáticos de beleza e profundidade.

A história do Último Teorema de Fermat, ilustra a importância da dedicação e perseverança no estudo já que demorou mais de 300 anos para que este teorema fosse provado. Os

grandes avanços no campo matemático exigem não apenas curiosidade, mas também uma jornada árdua em busca de soluções. Isso pode ser levado aos estudantes como forma de mostrá-los que se não entenderam de imediato um conceito matemático é necessário a paciência e perseverança diante da dificuldade. Foi Andrew Willes, no ano de 1995, quem demonstrou o teorema. Ele é um exemplo de garoto que se encantou com a beleza da Matemática. Em uma leitura solitária na biblioteca, ao 10 anos, encontrou o teorema que o acompanhou durante muitos anos até culminar na sua demonstração.

Na atividade prática, realizada com estudantes do ensino médio da Escola Estadual Álvaro Giesta, foi possível perceber que a contextualização e a história de quem era o criador do teorema influenciou positivamente no interesse e envolvimento dos estudantes. Ao mencionar que Fermat era um matemático amador e a Matemática era o seu hobby, foi possível notar uma certa desconfiança por parte dos estudantes. Acredito que esse pensamento tem haver com o modelo tradicional de ensino, em que o estudo dos conceitos matemáticos é considerado uma tarefa árdua e monótona.

Ao mesmo tempo, a ideia de que uma pessoa comum fez descobertas significativas na Matemática, sugere que todos que tenham o interesse, persistência e dedicação podem também fazer Matemática e ajudar na construção de conhecimento para a humanidade. O nosso foco era o Pequeno Teorema de Fermat, mas não poderia deixar de mencionar sobre o Último Teorema de Fermat. Os estudantes também não o conheciam, mas foi possível notar uma certa surpresa ao saberem da saga até à demonstração.

O uso das miçangas, enquanto material lúdico, foi essencial para despertar o interesse dos estudantes na atividade. Eles demonstraram empenho e dedicação na construção das sequências e dos brincos. Com o material, eles puderam ver de maneira concreta os conceitos matemáticos e tornaram mais participativos, já que conseguiam responder as perguntas e não se perdiam no raciocínio; conseguiam olhar para suas mesas e visualizar a resposta.

Não foi possível demonstrar o Pequeno Teorema de Fermat como planejado. Devido aos calendários da escola e da universidade não estarem compatíveis em questão de datas e também ao fato do semestre curto em decorrência da greve de 2024, não foi possível marcar uma nova data para completar a atividade. Pensando na continuidade do trabalho, em outra oportunidade desejamos realizar uma oficina em dois dias, tendo mais tempo para desenvolver as ideias e acrescentar uma parte prática relacionada ao Teorema de Pitágoras.

Durante a atividade foi feita a demonstração da Proposição 6.1 e alguns exemplos para o entendimento do seu enunciado. Ao fazer exemplos, surge a questão: será que a proposição é válida para todos os números inteiros? Mas é impossível testar todos. Com esse pensamento é natural a ideia da importância da demonstração matemática. Por mais que os estudantes não tenham conseguido captar toda a essência da demonstração, a ideia de que estavam vendo a comprovação de um fato, o fizeram refletir que muitas ideias aceitas, têm por trás uma demonstração, uma comprovação da sua veracidade para todos os possíveis casos.

Em síntese, esse trabalho reintera a importância de rever as metodologias de ensino de

Matemática, destacando que trabalhar a ludicidade aliada com as demonstrações matemáticas pode enriquecer o processo de aprendizagem. Ao combinar o formalismo matemático com atividades práticas, foi possível proporcionar uma compreensão mais profunda e significativa, além de estimular a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes. O sucesso alcançado com esta abordagem evidencia que a Matemática, quando ensinada de forma interativa e de maneira rigorosa, tem o poder de engajar os estudantes e de promover o entendimento mais profundo e duradouro dos conhecimentos matemáticos.

Por fim, ressalto que este trabalho contribuiu significativamente para minha formação, pois me mostrou que através das demonstrações matemáticas, de atividades lúdicas e da contextualização com a História da Matemática, é possível oportunizar aos estudantes uma experiência que pode levar ao encanto pela Matemática e ao aprofundamento dos conceitos. Dessa forma, é possível fugir do ensino tradicional, em que o estudante é passivo diante do conhecimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANDRADE, J. F. **Tópicos Especiais em Álgebra**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.
- [2] BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: PIMM, D. (Ed.). **Mathematics, teachers and children**, p. 216-235. London: Hodder & Stoughton, 1988.
- [3] BARROS, James Jansen Pinho. **O Tangram como Ferramenta Didática para a Matemática do Ensino Fundamental**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- [4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- [5] BUFFA, E. **A teoria em pesquisa: o lugar e a importância do referencial teórico na produção em educação**. Cadernos de Pós-Graduação, São Paulo, v. 4, Educação, p. 33-38, 2005.
- [6] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 2012.
- [7] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Coleção Tendências em Educação Matemática, ed. Belo Horizonte: Autêntica. 2009
- [8] DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Vol. 9, 7ª Edição, Atual Editora, 1993.
- [9] ESPÍRITO SANTO, Marcelo Alexandre Torres do. **Aspectos de duas demonstrações do pequeno teorema de Fermat**. 2017. 70 f.: il. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – Campus São Paulo, 2017.
- [10] FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- [11] GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, SP: Atlas, 2002.
- [12] KAMERS, Fernando. **Pitágoras de Samos e o Teorema de Pitágoras**. Universidade Federal De Santa Catarina, 2008.
- [13] LORENZATO, S. **A Matemática e a Educação Básica: Reflexões e Propostas**. Campinas: Autores Associados, 2006

- [14] MENDONÇA, Erasto Fortes. **Educação e Sociedade Numa Perspectiva sociológica**. Volume 3, In: Módulo I. Curso PIE. Pedagogia Para Professores em Exercícios no Início de Escolarização. Brasília, UNB, 2001.
- [15] MOTERLE, Juliana. **Teorema De Pitágoras**. Universidade Regional Integrada Do Alto Uruguai E Das Missões, 2010.
- [16] RIBEIRO, Vanessa Vânia Silva Marinho. **Revisitando o Teorema de Pitágoras** 2013. 110 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.
- [17] SANTOS, Luciane Mulazani dos. **Metodologia do Ensino de Matemática e Física: Tópicos de História da Física e da Matemática**. Curitiba: Ibpex, 2009.
- [18] STRATHERN, P. **Pitágoras e o seu Teorema em 90 minutos**. 1. Ed. Rio de Janeiro: J. Z. E, 1998.
- [19] SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. Editora Record, 1997.
- [20] WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.