

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais

Luiz Fernando Saldanha Vieira
Magister Scientiae

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2026

LUIZ FERNANDO SALDANHA VIEIRA

Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Ady Cambraia Junior

Coorientador: Alessandro Gaio Chimenton

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

V658e
2026

Vieira, Luiz Fernando Saldanha, 2000-
Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais
bidimensionais / Luiz Fernando Saldanha Vieira. – Viçosa, MG,
2026.

1 dissertação eletrônica (57 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Ady Cambraia Junior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2026.

Referências bibliográficas: f. 56-57.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2026.244>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Geometria não-Euclidiana. 2. Superfícies (Matemática).
3. Curvatura. I. Cambraia Junior, Ady, 1980-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 516.9

LUIZ FERNANDO SALDANHA VIEIRA

Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2026.

Assentimento:

Luiz Fernando Saldanha Vieira
Autor

Ady Cambraia Junior
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pelo autor em 25/05/2026 às 12:56:06 e pelo orientador em 25/05/2026 às 12:59:44. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **U855.713K.49FB** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico à Ordália.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao meu orientador, Ady Cambraia Junior, e ao coorientador, Alessandro Gaio Chimenton. A dedicação, a paciência, a compreensão e a atenção de ambos foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas, João, Erik e Rebeca, por ser minha fonte de aprendizagem e apoio durante esta jornada. Por sempre estar meu lado celebrando as conquistas e enfrentando os obstáculos. Não posso esquecer de agradecer aos tios Wilson Dener, Maria Ducarmo, Maria Gorete e Alvino Vicente, pelo forte apoio financeiro. Grato à minha mãe, Jeane, ao meu pai, Edimilson. Também agradeço a minha avó paterna, Ordália, que me acolheu durante toda a minha vida. Aos meus primos Décio Junior, Victor, Walber, Marcell, Dácio, João Pedro, Thiago e Josy, reconheço os momentos de cuidado e dedicação.

Aos professores do departamento de Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, especialmente a Daniel e Janine, eles desempenharam papéis significativos em minha jornada acadêmica, compartilhando e revelando a magia da matemática e do saber matemático.

Agradeço à Hallyson, Guilherme, por todos os momentos que compartilhamos, além dos agregados que também contribuíram pela minha felicidade, Sara e Mariana. Cada risada, desafio superado, memória construída, tornou esta experiência única e inesquecível. Agradeço a cada um de vocês por contribuir para que eu terminasse essa história. À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida,
a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força,
muita determinação e sempre faça tudo com muito amor
e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá.
De alguma maneira você chega lá.
(Ayrton Senna.)

RESUMO

VIEIRA, Luiz Fernando Saldanha, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2026. **Evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais.** Orientador: Ady Cambraia Junior. Coorientador: Alessandro Gaio Chimenton.

Neste trabalho, estuda-se os evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais, com ênfase nos modelos esférico e hiperbólico. Embora o caso plano já tenha sido amplamente investigado na literatura, alguns de seus resultados fundamentais são retomados ao longo do texto. Com a finalidade de estender o estudo dos evolutóides às geometrias de curvatura Gaussiana constante não nula, são utilizadas ferramentas da Geometria Riemanniana, explorando-se as particularidades de cada modelo, tais como a conexão riemanniana, a curvatura geodésica e as propriedades intrínsecas associadas às superfícies consideradas. Além disso, caracterizamos o evolutóide como o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda.

Palavras-chave: envelopes; frentes de onda; geometrias não euclidianas; involutóides

ABSTRACT

VIEIRA, Luiz Fernando Saldanha, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2026. **Evolutoids of convex curves in two-dimensional space forms**. Adviser: Ady Cambraia Junior. Co-adviser: Alessandro Gaio Chimenton.

In this work, we study the evolutes of convex curves in two-dimensional space forms, with emphasis on the spherical and hyperbolic models. Although the planar case has already been extensively investigated in the literature, some of its fundamental results are revisited throughout the text. In order to extend the study of evolutes to geometries of nonzero constant Gaussian curvature, tools from Riemannian geometry are employed, exploring the particular features of each model, such as the Riemannian connection, geodesic curvature, and the intrinsic properties associated with the surfaces under consideration. In addition, we characterize the evolute as the locus of singular points of wave fronts.

Keywords: envelopes; wave fronts; non-euclidean geometries; involutes

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evoluta da elipse	17
Figura 2 – Esfera	19
Figura 3 – Hiperbolóide	22
Figura 4 – Geodésica γ em $\mathbb{M}_{-1}$	23
Figura 5 – Conjunto $\mathcal{S}$	37
Figura 6 – Representação de α_0	41
Figura 7 – Comportamento de $\mathcal{A}_c(R)$	46
Figura 8 – Representação de η	47
Figura 9 – α -involutoíde	48
Figura 10 – Exemplos das frentes de onda	53

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	Geometria Riemanniana	12
2.2	Geodésicas	14
3	GEOMETRIA DAS FORMAS ESPACIAIS	16
3.1	Introdução aos evolutóides no plano	16
3.2	Modelo para a geometria esférica	18
3.3	Modelos para a Geometria Hiperbólica	21
3.3.1	O modelo do Hiperbolóide	21
3.3.2	Semi-plano superior	23
3.3.3	Disco de Poincaré	25
3.4	Fórmulas de Frenet em $\mathbb{M}_c$	28
4	EVOLUTÓIDES EM FORMAS ESPACIAIS BIDIMENSIONAIS	32
4.1	Evolutóides de Curvas Convexas e suas Singularidades	32
4.1.1	Suavidade do α -evolutóide	37
4.1.2	Evolutóides de círculos	41
4.2	Área e comprimento do α -evolutóide	44
4.3	Involutoídes em formas espaciais	47
4.4	Evolutóides e frentes de onda	52
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	REFERÊNCIAS	56

1 Introdução

Considere uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\mathbf{t}$ e $\mathbf{e}$ denotando, respectivamente, os vetores tangente e normal unitários. Para cada ponto da curva, considere a reta inclinada L que forma um ângulo fixo $\alpha \in [0, \pi/2]$ com a reta tangente. O envelope dessa família de retas inclinadas é denominado evolutoíde. Este trabalho tem como objetivo o estudo dos evolutoídes e algumas de suas propriedades em superfícies completas de curvatura gaussiana constante. Inicialmente, tais objetos foram introduzidos no contexto do plano euclidiano Giblin e Warder (2014), tendo sido posteriormente estendidos às formas espaciais por Cambraia et al. (2025). No caso plano, Castro (2013) em [11] estudou os evolutoídes por meio de *funções suporte*, obtendo resultados relevantes relacionados à área e ao comprimento das curvas e de seus evolutoídes. Giblin e Warder (2014) em [7] investigaram propriedades dos evolutoídes de curvas planas, com ênfase em questões de regularidade. Mais recentemente, alguns desses resultados tem sido estendidos para formas espaciais por Cambraia et al. (2025) em [10].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no segundo capítulo são apresentados conceitos básicos da Geometria Riemanniana, como as definições de variedades diferenciáveis, conexões e geodésicas.

O terceiro capítulo é dedicado à geometria das formas espaciais. Nele, são estudadas propriedades dos principais modelos geométricos de curvatura Gaussiana constante c utilizados ao longo do trabalho, a saber: o plano euclidiano $(\mathbb{R}^2, c = 0)$, a esfera $(\mathbb{S}^2, c = 1)$ e o hiperbolóide $(\mathbb{H}^2, c = -1)$. Para o hiperbolóide, iniciamos com a apresentação da métrica de Minkowski. Em seguida, introduzimos esse modelo e, posteriormente, discutimos algumas de suas principais propriedades geométricas.

Por fim, são estudadas algumas propriedades e conceitos, como a aplicação exponencial, os produtos vetorial e interno, as funções trigonométricas generalizadas e as fórmulas de Frenet-Serret.

No quarto capítulo, são estudados os evolutoídes em formas espaciais bidimensionais. Inicialmente, investigamos os evolutoídes e caracterizamos suas singularidades. Nesse contexto, a partir da expressão da aplicação exponencial, é obtida uma fórmula explícita para a curvatura geodésica do α -evolutoíde em função da curvatura de γ . Por fim, são analisadas as relações entre a área delimitada pela curva e a área delimitada pelo seu α -evolutoíde, bem como entre os respectivos comprimentos. Nas seguintes seções, são estudados os involutoídes em formas espaciais, objetos geometricamente relacionados aos evolutoídes. O principal resultado desse capítulo diz respeito à unicidade do involutoíde associado a uma curva convexa. Enfim, é apresentada uma caracterização do α -evolutoíde,

na qual esse objeto é descrito como o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda. Inicialmente, são introduzidas as frentes de onda e suas propriedades básicas; em seguida, é estabelecida a referida caracterização. Tal interpretação foi observada por Giblin e Warder (2014) em [7] no caso plano.

2 Preliminares

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão dos principais pré-requisitos necessários à compreensão desta dissertação. Introduziremos conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana, incluindo variedades diferenciáveis, conexão riemanniana e geodésicas.

2.1 Geometria Riemanniana

Nesta seção, faremos uma revisão de alguns conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana, que ajudarão em alguns tópicos de nosso estudo, usando como referência [1].

Definição 2.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$;
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;
3. A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições (1) e (2).

A aplicação x_α com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado parametrização de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma vizinhança coordenada em p .

Definição 2.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no espaço tangente $T_p M$, que varia de forma diferenciável com p , isto é, se $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de um ponto p , com*

$$X(x_1, \dots, x_n) = p \in X(U) \text{ e } \frac{\partial(p)}{\partial x_i} = dx_p(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

então $\langle X_i, X_j \rangle$ é uma função diferenciável em U , com $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

É fundamental calcularmos comprimentos e distâncias, o que faremos com as noções padrões abaixo.

Definição 2.1.3. *O comprimento de uma curva $\gamma : [a, b] \subset I \rightarrow M$ é dado por*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt. \quad (2.1)$$

Definição 2.1.4. A distância entre $p, q \in M$ é dada por

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega} \ell(\gamma) \quad (2.2)$$

onde Ω é o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam p e q .

Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão Riemanniana é uma forma de calcular derivadas covariantes de campos. Para estudá-la precisamos de alguns resultados.

Proposição 2.1.1. Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M ; $a, b \in \mathbb{R}$, e f, g são funções diferenciáveis, então:

- a) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$;
- d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Veja [1], página 29. □

Definimos $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 2.1.5. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz às seguintes condições:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

em que $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 2.1.6. Sejam X, Y campos de vetores em M , definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_Y X, \end{aligned}$$

dada implicitamente pela formula de Koszul:

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = \frac{1}{2} \cdot \{X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle\},$$

em que Z é um campo vetorial de M . Essa aplicação é chamada de conexão Riemanniana de M . Tal aplicação satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle;$
- ii) $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X];$
- iii) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z;$
- iv) $\nabla_Y fX = YfX + f\nabla_Y X;$
- v) $\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X.$

Teorema 2.1.1 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica;
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Veja [1], página 61. □

Teorema 2.1.2 (Teorema da função implícita). *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular de F se, para todo ponto $p \in F^{-1}(c)$ a diferencial*

$$dF_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

é sobrejetiva.

Esse teorema garante que se c é um valor regular de F , então o conjunto

$$F^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = c\}$$

é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$. As superfícies que usaremos ao longo deste trabalho como modelos das geometrias de curvatura constante são imagens inversas de valores regulares em $\mathbb{R}^3$ e as métricas serão induzidas por formas bilineares de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Geodésicas

Nesta seção, abordaremos as geodésicas em M , dados dois pontos de M , sempre existe uma curva minimizante que liga esses dois pontos.

Definição 2.2.1. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ para todo $t \in I$.*

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle' = 2\langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma' \rangle = 0$$

isto é, o comprimento do vetor tangente γ' é constante. O comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixa, é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'\| dt = \delta(t - t_0).$$

Portanto o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $\delta = 1$, diremos que a geodésica γ está normalizada.

É possível provar que para todo $p \in M$ e $v \in T_p M$, existem $I \subset \mathbb{R}$ e $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica com $\gamma(s_0) = p$ e $\gamma'(s_0) = v$ para algum $s_0 \in I$. O mapa exponencial de M em p é definido como

$$\exp_p(tv) = \gamma(t),$$

em que γ é a única geodésica que passa por p com velocidade v (com t em um intervalo suficientemente pequeno). Nas variedades consideradas neste trabalho, $I = \mathbb{R}$ e portanto a aplicação exponencial está definida para todo t .

Definição 2.2.2. *Um triângulo geodésico de M é uma curva de Jordan C^1 por partes constituída de três arcos geodésicos.*

Se γ está parametrizada por comprimento de arco, então $\langle \gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle = 0$. Supondo $\nabla_{\gamma'} \gamma' \neq 0$, os vetores γ' e $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ são perpendiculares. Usaremos essas observações para definir a curvatura geodésica de curvas em superfícies.

Definição 2.2.3. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão 2 orientada e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A curvatura geodésica de γ é a função $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in I$ vale*

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \kappa(t) \mathbf{e}(t), \quad (2.3)$$

em que ∇ é a conexão de Levi-Civita de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}\}$ é base ortonormal positiva para $T_{\gamma(t)} M$.

Apresentaremos as principais noções geométricas dos modelos geométricos que estudaremos neste trabalho.

3 Geometria das Formas Espaciais

Neste capítulo, apresentaremos uma revisão dos conceitos e propriedades referentes aos modelos geométricos que serão utilizados ao longo do trabalho. Inicialmente será discutido o modelo padrão para a geometria plana ($\mathbb{M}_0$). Em seguida, discutiremos um para a geometria esférica ($\mathbb{M}_1$). Por fim, estudaremos o modelo do hiperbolóide para o espaço hiperbólico. Algumas propriedades pontuais da geometria hiperbólica serão discutidas nos modelos do semiplano superior e do disco de Poincaré. A motivação para estudar os modelos esférico e do hiperbolóide decorre da semelhança entre os cálculos, facilitando a identificação de propriedades relacionadas. Ao longo do capítulo, unificaremos algumas notações para esses modelos.

3.1 Introdução aos evolutóides no plano

Nesta seção, apresentaremos uma breve introdução aos evolutóides no plano. Nela, enquanto tratamos de uma revisão bibliográfica de resultados obtidos em trabalhos anteriores, consideramos um modelo para a geometria plana e, a partir dele, definimos diversos conceitos que serão generalizados nos capítulos seguintes.

O modelo correspondente ao plano euclidiano é

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{M}_0 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\},$$

munido da métrica euclidiana usual, cuja conexão Riemanniana coincide com a derivada usual do espaço ambiente. Em $\mathbb{R}^2$, ao longo de uma curva regular, utiliza-se a base adaptada $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}\}$, em que $\mathbf{t}$ e $\mathbf{e}$ denotam o vetor tangente unitário e vetor normal unitário respectivamente, de modo que a orientação de $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}\}$ seja positiva. A parametrização de uma geodésica no plano é dada por

$$\gamma(t) = p + tv, \quad (3.1)$$

em que $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in T_p\mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a aplicação exponencial Riemanniana assume a forma

$$\exp_p(tv) = p + tv. \quad (3.2)$$

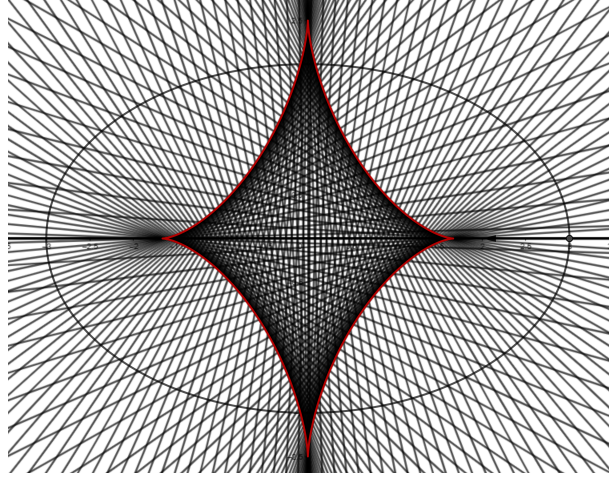
A noção de envelope será importante para introduzirmos o conceito de evolutóide como uma generalização do conceito de evoluta.

Definição 3.1.1. *Seja $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva plana fechada, suave e convexa. Dada uma família a um parâmetro $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de curvas, o envelope $\mathcal{D}$ é definido por:*

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \text{ tal que } \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0 \right\}.$$

Daqui em diante, consideraremos apenas curvas convexas, ou seja, fechadas e com curvatura geodésica estritamente positiva. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_0$ uma curva suave e parametrizada pelo comprimento de arco. A evoluta é o envelope das retas normais, como podemos ver na Figura 1.

Figura 1 – Evoluta da elipse



Elaboração própria.

Em vez de considerarmos a reta normal, analisaremos essa reta com uma inclinação fixa com a reta tangente. Nesse caso, Giblin e Warder (2014) em [7] definiram os evolutóides de curvas planas e estudaram suas propriedades utilizando uma parametrização explícita. No estudo, os autores definem os evolutóides como

Definição 3.1.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_0$. O envelope da família $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{F}(s, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} - \gamma(s), \mathbf{t}(s) \sin \alpha - \mathbf{e}(s) \cos \alpha \rangle$, em que $s \in I, \mathbf{x} \in \mathbb{M}_0, \alpha \in [0, \pi/2]$ e $\mathbf{t}, \mathbf{e}$ sendo os vetores tangente e normal respectivamente, é o α -evolutóide de γ , que denotaremos por γ_α .*

A partir dessa definição, os autores obtiveram a seguinte parametrização para o evolutóide:

$$\gamma_\alpha(s) = \gamma(s) + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\kappa(s)} \mathbf{t}(s) + \frac{\sin^2 \alpha}{\kappa(s)} \mathbf{e}(s) \quad , \kappa(s) \neq 0, \quad (3.3)$$

e a partir dela provaram os seguintes resultados.

Proposição 3.1.1 (Giblin, Warder, 2014 [7]). *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva conxeva, suave, parametrizada pelo comprimento de arco e orientada positivamente. Fixe $\alpha \in [0, \pi/2]$ e seja $\gamma_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o α -evolutóide dado por (3.3). Então γ_α é não-regular se e somente se existe $s \in I$ tal que $\kappa^2(s) \cos \alpha - \kappa_s(s) \sin \alpha = 0$.*

Com respeito a condição de regularidade da proposição anterior, o evolutóide pode ou não apresentar cúspides. Nesse contexto, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.2 (Giblin, Warder, 2014 [7]). *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva conxeva, suave, parametrizada pelo comprimento de arco e orientada positivamente. Fixe $\alpha \in [0, \pi/2]$ e seja $\gamma_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o α -evolutoíde dado por (3.3). Assuma $\kappa(s) \neq 0$ e que $\sin \alpha \neq 0$. Então, a singularidade da proposição anterior é uma cúspide ordinária se, e somente se $2\kappa_s^2(s) - \kappa(s)\kappa_{ss}(s) \neq 0$.*

É claro que $\gamma_0 = \gamma$, que é regular. Como consequência, existe um menor $\alpha \in (0, \pi/2]$ tal que γ_α tem alguma singularidade. Em nosso trabalho, estudaremos condições para o aparecimento desse menor α nas formas espaciais, veja 4.1.1.

Castro (2013) em [11] estudou os evolutoídes usando funções suporte. O trabalho obteve resultados importantes acerca de comparações das áreas delimitadas pelo evolutoíde e pela curva γ e dos respectivos comprimentos, como seguem os teoremas abaixo:

Teorema 3.1.1 (Castro, 2013 [11]). *Seja γ uma curva conxeva e fechada de classe C^2 no plano e seja $\alpha > 0$ um número suficientemente pequeno para que γ_α seja uma curva conxeva. Então*

$$\frac{A(\gamma_\alpha)}{A(\gamma)} \leq \cos^2 \alpha$$

com igualdade se e somente se γ for círculo.

Teorema 3.1.2 (Castro, 2013 [11]). *Seja γ uma curva conxeva, suave e fechada no plano e seja $\alpha \in (0, \pi/2)$. Então*

$$\ell(\gamma_\alpha) = \cos \alpha \ell(\gamma).$$

Nas próximas seções desenvolveremos modelos para as superfícies completas de curvatura gaussiana $c = -1, 1$, objetivando estudar alguns aspectos e generalizações dos resultados acima.

3.2 Modelo para a geometria esférica

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades para $\mathbb{M}_1$ e usaremos a esfera padrão

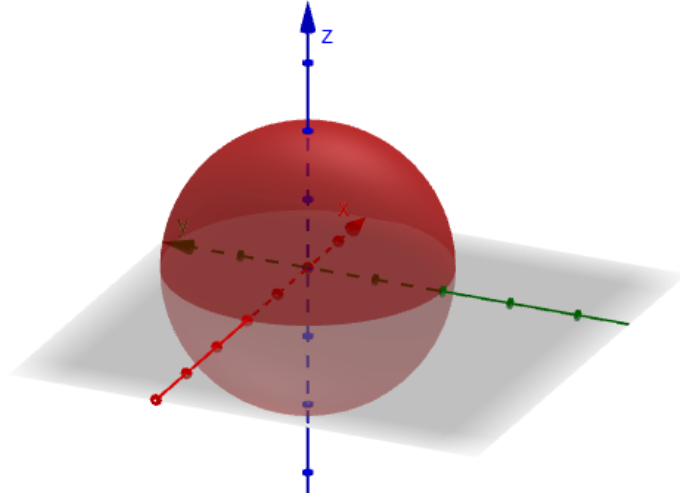
$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{M}_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\},$$

dotada da métrica induzida do espaço Euclidiano tridimensional, que induz curvatura constante positiva sobre $\mathbb{M}_1$. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. Em particular, o valor 1 é regular, portanto

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{M}_1 = F^{-1}(\{1\}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$$

é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

Figura 2 – Esfera



Elaboração própria.

Podemos determinar a conexão Riemanniana da esfera unitária. Para $p \in \mathbb{M}_1$, o espaço tangente é dado por

$$T_p\mathbb{M}_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Denotamos por $\bar{\nabla}$ a conexão do espaço ambiente $\mathbb{R}^3$, definida por

$$\bar{\nabla}_X Y = dY(X),$$

em que X e Y são campos vetoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ e d é a derivada usual. A conexão Riemanniana de Levi-Civita em $\mathbb{M}_1$ é obtida pela projeção tangente da derivada ambiente, isto é,

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top. \quad (3.4)$$

Assim, vale a decomposição

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N, \quad (3.5)$$

lembrando que na esfera unitária o vetor normal unitário é dado por $N(p) = p$.

Em $\mathbb{M}_1$, ao longo de uma curva regular γ , utiliza-se a base adaptada $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$, em que γ representa o vetor posição, e $\mathbf{t}$ e $\mathbf{e}$ denotam, respectivamente, os vetores unitários tangente e normal à curva, que são tangentes à superfície, ou seja, $\mathbf{e} = \gamma \wedge \mathbf{t}$ tal que $\wedge$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 3.2.1. *Seja $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}_1$ a curva parametrizada pelo comprimento de arco dada por*

$$\gamma(t) = \cos(t)p + \sin(t)v,$$

tal que $p \in \mathbb{M}_1$, $v \in T_p\mathbb{M}_1$ com $\|v\| = 1$ e $t \in \mathbb{R}$. Portanto, γ é a geodésica que passa por p na direção de v .

Demonstração. Por definição $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$. Então,

$$\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = -1$$

Portanto, usando conexão Riemanniana, temos

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle \gamma(t) = 0$$

Ou seja, $\gamma(t) = \cos(t) p + \sin(t) v$ é uma geodésica. $\square$

Como consequência as únicas geodésicas de $\mathbb{M}_1$ são os grandes círculos. A aplicação exponencial assume a forma

$$\exp_p(tv) = \cos(t) p + \sin(t) v.$$

Agora, encontraremos a fórmula para a curvatura geodésica de uma curva na esfera. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_1$ uma curva regular. Omitindo s e usando as equações (3.4) e (3.5), vemos que

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \gamma'' - \langle \gamma'', \gamma \rangle \gamma.$$

Se $\mathbf{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$, temos

$$\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \frac{1}{\|\gamma'\|^2} (\nabla_{\gamma'} \gamma' - \|\gamma'\|' \gamma').$$

Então

$$\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \nabla_{\gamma'/\|\gamma'\|} (\gamma'/\|\gamma'\|) = \frac{1}{\|\gamma'\|} \nabla_{\gamma'} \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right).$$

Usando a regra do produto,

$$\nabla_{\gamma'} \left(\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right) = \frac{1}{\|\gamma'\|} \nabla_{\gamma'} \gamma' - \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^2} \gamma',$$

Assim,

$$\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \nabla_{\gamma'} \gamma' - \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^3} \gamma'.$$

Substituindo a expressão de $\nabla_{\gamma'} \gamma'$, obtemos

$$\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \frac{1}{\|\gamma'\|^2} (\gamma'' + \|\gamma'\|^2 \gamma) - \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|^3} \gamma'.$$

Como $\mathbf{e} = \gamma \wedge \mathbf{t}$ é o vetor normal unitário tangente à esfera, a curvatura geodésica definida por $\nabla_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \kappa \mathbf{e}$ e $\mathbf{e}$ sendo ortogonal a γ e a γ' , segue que

$$\kappa = \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \langle \gamma'', \mathbf{e} \rangle.$$

Substituindo $\mathbf{e} = \gamma \wedge (\gamma'/\|\gamma'\|)$, obtemos

$$\kappa = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle \gamma'', \gamma \wedge \gamma' \rangle.$$

Pela identidade do produto misto,

$$\langle \gamma'', \gamma \wedge \gamma' \rangle = \langle \gamma' \wedge \gamma'', \gamma \rangle.$$

Portanto,

$$\kappa(s) = \frac{\langle \gamma'(s) \wedge \gamma''(s), \gamma(s) \rangle}{\|\gamma'(s)\|^3}.$$

3.3 Modelos para a Geometria Hiperbólica

Apresentaremos três modelos para a geometria hiperbólica e estudaremos alguns conceitos tais como métrica, conexão, mapa exponencial, geodésicas, entre outros. A referência utilizada para este capítulo é [4].

3.3.1 O modelo do Hiperbolóide

Em $\mathbb{R}^3$, considere a forma bilinear simétrica dada por

$$\langle x, y \rangle_{-1} = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad (3.6)$$

denominada produto interno de Minkowski. Além disso, definimos o produto vetorial de Minkowski por

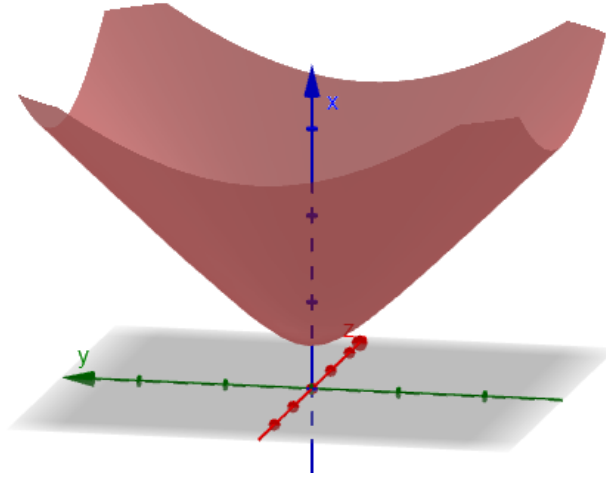
$$x \wedge_{-1} y = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (-(x_2 y_3 - x_3 y_2), x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Se considerarmos a função $W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $W(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{-1}$, obtemos, em particular, que o valor -1 é regular, portanto

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{M}_{-1} = W^{-1}(-1) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{-1} = -1\}$$

é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.

Figura 3 – Hiperbolóide



Elaboração própria.

A restrição do produto interno de Minkowski aos espaços tangentes de $\mathbb{H}^2 = \mathbb{M}_{-1}$ é uma métrica Riemanniana de curvatura constante -1 . A estrutura dada pelas fórmulas acima permite projetar “ortogonalmente” vetores de $\mathbb{R}^3$ nos espaços tangentes de $\mathbb{M}_{-1}$, da maneira natural. Com isso, deduzimos que a conexão Riemanniana de $\mathbb{M}_{-1}$ é dada, analogamente ao caso da esfera, por

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \langle \bar{\nabla}_X Y, p \rangle_{-1} p,$$

e o vetor “normal unitário” é dado por $N(p) = p$, com $\langle p, p \rangle_{-1} = -1$.

Em $\mathbb{M}_{-1}$, ao longo de uma curva regular γ , utiliza-se a base ortonormal $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$, (em relação a forma bilinear (3.6)) em que $\gamma(t)$ representa o vetor posição, e $\mathbf{t}$ e $\mathbf{e}$ denotam, respectivamente, os vetores unitários tangente e normal à curva, que são tangentes à superfície, ou seja, $\mathbf{e} = \gamma \wedge_{-1} \mathbf{t}$. A seguir descreveremos as geodésicas de $\mathbb{M}_{-1}$.

Proposição 3.3.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_{-1}$ a curva parametrizada pelo comprimento de arco dada por*

$$\gamma(t) = \cosh(t) p + \sinh(t) v,$$

em que $p \in \mathbb{M}_{-1}$, $v \in T_p \mathbb{M}_{-1}$ com $\|v\|_{-1} = 1$ e $t \in \mathbb{R}$. Portanto, γ é a geodésica que passa por p na direção de v .

Demonstração. Perceba que $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle_{-1} = -1$, então $\gamma(t) \in \mathbb{M}_{-1}$. Podemos observar que

$$\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle_{-1} = -1$$

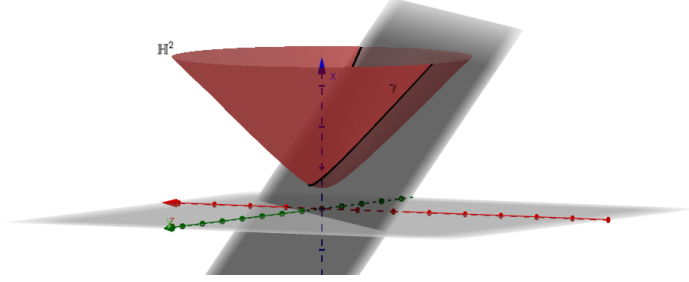
Logo, usando conexão Riemanniana, temos

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle_{-1} \gamma(t) = 0$$

Ou seja, $\gamma(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$ é uma geodésica. $\square$

Uma geodésica do hiperbolóide é a intersecção do plano gerado pelos vetores posição e velocidade com o hiperbolóide, veja Figura 4.

Figura 4 – Geodésica γ em $\mathbb{M}_{-1}$



Elaboração própria.

Consequentemente, a aplicação exponencial Riemanniana assume a forma

$$\exp_p(tv) = \cosh(t)p + \sinh(t)v,$$

em que $p \in \mathbb{M}_{-1}$, $v \in T_p\mathbb{M}_{-1}$ e $t \in \mathbb{R}$.

A fórmula para a curvatura geodésica de uma curva no hiperbolóide é análoga à fórmula encontrada no modelo esférico, a única diferença é em relação a métrica usada, já que o hiperbolóide é munido da métrica de Minkowski:

$$\kappa(s) = \frac{\langle \gamma'(s) \wedge_{-1} \gamma''(s), \gamma(s) \rangle_{-1}}{\|\gamma'(s)\|_{-1}^3}.$$

Em ambos os casos, a geometria Riemanniana é determinada de maneira única pela métrica induzida do espaço ambiente e pela conexão de *Levi-Civita*, que é a única conexão compatível com a métrica. Podemos ver que a parametrização para as geodésicas e a aplicação exponencial de ambos os modelos apresentam formas semelhantes, bem como a fórmula para a curvatura geodésica:

$$\kappa(s) = \frac{\langle \gamma'(s) \wedge_c \gamma''(s), \gamma(s) \rangle_c}{\|\gamma'(s)\|_c^3}. \quad (3.7)$$

em que $c = -1, 1$. Esse fato é fundamental para a análise dos evolutóides nesses modelos, a qual será desenvolvida nos capítulos seguintes.

Devido a alguns resultados que aparecerão no texto, estudaremos, nas próximas subseções, outros modelos da geometria hiperbólica.

3.3.2 Semi-plano superior

Apresentaremos nesta subseção o modelo do semi-plano superior e algumas de suas propriedades.

Definição 3.3.1. *Seja*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}, \quad (3.8)$$

em que $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $\text{Im}(z) = y$ é a parte imaginária do número complexo z , chamado de plano hiperbólico $\mathbb{H}$. Este espaço tem naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão 2. Nele construiremos uma métrica Riemanniana. Observe que se $z_0 \in \mathbb{H}$, então $T_{z_0}\mathbb{H} = \mathbb{C}$. É possível verificar que dado $T_{z_0}\mathbb{H}$ o espaço tangente de $\mathbb{H}$ no ponto z_0 e sejam $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}$, o produto escalar hiperbólico, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$, que é definido por

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{\langle u, v \rangle}{(\text{Im}(z_0))^2}, \quad (3.9)$$

com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar de $\mathbb{R}^2$. A equação (3.9) define uma métrica Riemanniana em $\mathbb{H}$, que denominaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ e denotada por $g_{\mathbb{H}}$ e é dada por

$$g_{\mathbb{H}}(u, v) = \langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}. \quad (3.10)$$

Pode-se ver que,

$$g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} |dz|^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2), \quad (3.11)$$

em que $z = x + yi$ e $|dz|^2 = dx^2 + dy^2$.

Definição 3.3.2. *Sejam $z_0 \in \mathbb{H}$ e $u, v \in T_{z_0}\mathbb{H}$. Definimos o ângulo hiperbólico entre u e v como sendo o número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}}}{\|u\|_{\mathbb{H}} \|v\|_{\mathbb{H}}}$$

e o ângulo orientado entre $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, denotado por $\angle(u, v) \in (-\pi, \pi]$, em que

$$\angle(u, v) = \begin{cases} \theta; & \text{se } u_1 v_2 - u_2 v_1 \geq 0 \\ -\theta; & \text{se } u_1 v_2 - u_2 v_1 < 0 \end{cases}.$$

Pela equação (2.1), se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$, com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva C^1 o comprimento hiperbólico de γ é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b g_{\mathbb{H}}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt. \end{aligned}$$

O próximo resultado diz respeito às geodésicas em $\mathbb{H}$.

Teorema 3.3.1. *Por dois pontos distintos dados de $\mathbb{H}$ passa uma única geodésica. Além disso, as únicas geodésicas de $\mathbb{H}$ são as semirretas verticais e os semicírculos ortogonais ao eixo real.*

Demonstração. Veja [4], página 63. □

3.3.3 Disco de Poincaré

Nesta subseção, abordaremos o Disco de Poincaré e suas características. Consideremos $\mathbb{D}$ como o disco unitário aberto,

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C}; \|w\| < 1\}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{z - i}{z + i} \end{aligned}$$

é um difeomorfismo conforme de $\mathbb{H}$ para $\mathbb{D}$. Agora vamos equipar $\mathbb{D}$ com uma métrica $g_{\mathbb{D}}$ de modo que φ seja uma isometria entre $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$, então deduzir a partir desta isometria as geodésicas de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$.

Lema 3.3.1. *A única métrica $g_{\mathbb{D}}$ definida sobre $\mathbb{D}$ tal que φ seja uma isometria de $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ sobre $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$ é*

$$g_{\mathbb{D}} = \frac{4|dw|^2}{(1 - \|w\|^2)^2} = \frac{4\langle dw, dw \rangle}{(1 - \|w\|^2)^2}, \quad w = u + iv, \quad \|w\| < 1.$$

Demonstração. Veja [4], página 70. □

Proposição 3.3.2. *As geodésicas de $\mathbb{D}$, munido da métrica $g_{\mathbb{D}}$, são os diâmetros e os arcos de círculos ortogonais à $\mathbb{S}^1 = \{w \in \mathbb{C}; \|w\| = 1\}$.*

Demonstração. Veja [4], página 74. □

As seguintes proposições, apresentam resultados sobre a trigonometria hiperbólica.

Proposição 3.3.3. *O comprimento hiperbólico de qualquer círculo de $\mathbb{D}$ de raio hiperbólico $\rho > 0$ é $2\pi \sinh(\rho)$ e a área hiperbólica de qualquer disco de $\mathbb{D}$ de raio hiperbólico ρ é $4\pi \sinh^2(\rho/2)$.*

Demonstração. Seja $S_{\mathbb{D}}(w_0, \rho)$ um círculo. A menos de uma isometria de $\mathbb{D}$, podemos supor que o centro hiperbólico de S_{ρ} é a origem 0. De fato, S_{ρ} é o círculo de centro euclidiano 0 e de raio euclidiano $r = \tanh(\rho/2)$. Podemos, portanto, escolher a seguinte parametrização de S_{ρ} :

$$c(\alpha) = r(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi[.$$

Dessa forma, temos $g_{\mathbb{D}}(c'(\alpha), c'(\alpha)) = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2}$ para todo α . Obtém-se, portanto:

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{D}}(S_{\rho}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\mathbb{D}}(c'(t), c'(t))} d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} d\alpha \\ &= 4\pi \frac{r}{1-r^2} \\ &= 4\pi \frac{\tanh(\rho/2)}{1 - \tanh^2(\rho/2)} \\ &= 2\pi \sinh(\rho). \end{aligned}$$

Da mesma forma, se $D_{\rho} \subset \mathbb{D}$ é um disco de raio hiperbólico ρ , podemos supor que o centro de D_{ρ} é a origem 0. Temos então:

$$A_{\mathbb{D}}(D_{\rho}) = \iint_{D_{\rho}} \frac{4}{(1 - (u^2 + v^2))^2} du dv.$$

Ao definir $u = t \cos \alpha, v = t \sin \alpha$ com $t \in]0, r[$ e $\alpha \in [0, 2\pi[$, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{D}}(D_{\rho}) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt \cdot d\alpha = 4\pi \int_0^r \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt \\ &= 4\pi \int_0^{r^2} \frac{dx}{(1-x)^2} \quad (\text{definindo } x = t^2) \\ &= 4\pi \frac{r^2}{1-r^2} = 4\pi \frac{\tanh^2(\rho/2)}{1 - \tanh^2(\rho/2)} \\ &= 4\pi \sinh^2(\rho/2), \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. □

Corolário 3.3.1.1. *O comprimento hiperbólico de qualquer círculo de $\mathbb{H}$ de raio hiperbólico $\rho > 0$ é dado por*

$$\ell = 2\pi \sinh(\rho),$$

e a área hiperbólica de qualquer disco de $\mathbb{H}$ de raio hiperbólico ρ é

$$A = 4\pi \sinh^2\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Demonstração. Veja [4], página 91. □

Teorema 3.3.2. *Seja T um triângulo retângulo em $\mathbb{H}$. Suponhamos que o ângulo no vértice B seja reto, isto é, $\hat{c} = \hat{b} = \pi/2$. Então valem as seguintes relações trigonométricas:*

$$\cos(\alpha) = \frac{\tanh(c)}{\tanh(b)}, \quad (2.10)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\tanh(a)}{\sinh(c)}, \quad (2.11)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sinh(a)}{\sinh(b)}, \quad (2.12)$$

$$\cosh(b) = \cosh(a) \cosh(c). \quad (2.13)$$

Demonstração. Veja [4], página 95. □

Observação 3.3.1. *As relações trigonométricas do Teorema 3.3.2 são, naturalmente, verdadeiras para os triângulos retângulos de $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$. Elas podem ser provadas diretamente ou deduzidas de $\mathbb{H}$ com o auxílio da isometria φ de $(\mathbb{H}, g_{\mathbb{H}})$ sobre $(\mathbb{D}, g_{\mathbb{D}})$. Enunciaremos, sem demonstração, algumas relações trigonométricas clássicas do plano hiperbólico. Como anteriormente, estas relações valem tanto para $\mathbb{H}$ quanto para $\mathbb{D}$. Seja T um triângulo do plano hiperbólico. Mantendo as notações, temos as seguintes relações:*

$$\text{Lei dos senos: } \frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

$$\text{Lei dos cossenos I: } \cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

$$\text{Lei dos cossenos II: } \cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Lema 3.3.2. *Consideremos a geodésica completa*

$$L = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}.$$

Seja z_0 um ponto qualquer de $\mathbb{H}$. Seja γ a geodésica que passa por z_0 e é ortogonal a L , e seja p o ponto de interseção de L com γ , isto é, $L \cap \gamma = \{p\}$. Nessas condições, a distância hiperbólica entre z_0 e L é igual à distância hiperbólica entre z_0 e p , isto é, ao comprimento hiperbólico do arco de γ que liga z_0 a p :

$$d_{\mathbb{H}}(z_0, L) = d_{\mathbb{H}}(z_0, p) = \ell_{\mathbb{H}}(\gamma) \Big|_{[z_0, p]}.$$

Demonstração. Veja [4], página 98. □

Proposição 3.3.4. *Seja $z_0 \in \mathbb{H}$ e $R > 0$. A curvatura geométrica de $S_{\mathbb{H}}(z_0, R)$ é constante igual a $1/\tanh(R)$.*

Demonstração. Veja [4], página 123. □

A seção a seguir é dedicada ao estudo de propriedades gerais dos modelos geométricos considerados, as quais desempenham papel fundamental no desenvolvimento dos resultados apresentados nos capítulos posteriores.

3.4 Fórmulas de Frenet em $\mathbb{M}_c$

Nesta seção, elaboramos um conjunto de notações que permitem tratar, de forma unificada, os modelos esférico e do hiperbolóide. Denotaremos os modelos por $\mathbb{M}_c$, tal que c é a curvatura Gaussiana.

Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ munido da forma bilinear simétrica

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_c = cx_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad c = -1, 1, \quad (3.12)$$

que é uma forma bilinear simétrica e não-degenerada. Além disso, se $c = 1$, ela é positiva definida. Se $c = -1$, ela tem núcleo. Definimos então a “norma”

$$\|\mathbf{x}\|_c = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_c}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, definimos o produto vetorial generalizado por

$$\mathbf{x} \wedge_c \mathbf{y} = (c(x_2y_3 - x_3y_2), x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1), \quad c = -1, 1. \quad (3.13)$$

Em particular, se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, então

$$\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_c = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (3.14)$$

Além disso, a *fórmula de Lagrange* é expressada por

$$\mathbf{x} \wedge_c (\mathbf{y} \wedge_c \mathbf{z}) = c[\mathbf{y}\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle_c - \mathbf{z}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_c], \quad c = -1, 1. \quad (3.15)$$

Com as notações introduzidas acima, enunciaremos, de forma unificada, as fórmulas de Frenet-Serret para os modelos $\mathbb{M}_{-1}$ e $\mathbb{M}_1$. Seja $\gamma = \gamma(s)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathbb{M}_c$ e definamos $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ e $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)$.

Lema 3.4.1. *Se $c = -1, 1$, então a base $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ satisfaz:*

- i) $\langle \gamma(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c = 0$
- ii) $\langle \mathbf{e}(s), \mathbf{e}(s) \rangle_c = 1$
- iii) $\mathbf{t}(s) \wedge_c \mathbf{e}(s) = c\gamma(s)$
- iv) $\mathbf{e}(s) \wedge_c \gamma(s) = \mathbf{t}(s)$

para todo s .

Demonstração. Para todo s , temos

- i) $c = \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle_c \iff \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle'_c = 0 \implies \langle \gamma'(s), \gamma(s) \rangle_c = 0 \implies \langle \mathbf{t}(s), \gamma(s) \rangle_c = 0$.
- ii) $\langle \mathbf{e}(s), \mathbf{e}(s) \rangle_c = \langle \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s), \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s) \rangle_c = c \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle_c \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c = 1$.
- iii) $\mathbf{t}(s) \wedge_c \mathbf{e}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge_c (\gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)) = -(\gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)) \wedge_c \mathbf{t}(s) = -\langle \gamma(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c \mathbf{t}(s) - \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c \gamma(s) = c \gamma(s)$.
- iv) $\mathbf{e}(s) \wedge_c \gamma(s) = (\gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)) \wedge_c \gamma(s) = c[\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle_c \mathbf{t}(s) - \langle \mathbf{t}(s), \gamma(s) \rangle_c \gamma(s)] = \mathbf{t}(s)$.

□

A proposição a seguir refere-se a uma generalização das fórmulas de Frenet-Serret.

Proposição 3.4.1. *Sejam $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco e $c = -1, 1$. Considere o campo de vetores normais ao longo de γ dado por*

$$\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s). \quad (3.16)$$

Então o referencial de Frenet-Serret $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$ satisfaz

$$\begin{cases} \gamma'(s) = \mathbf{t}(s), \\ \mathbf{t}'(s) = -c \gamma(s) + \kappa \mathbf{e}(s), \\ \mathbf{e}'(s) = -\kappa \mathbf{t}(s), \end{cases} \quad (3.17)$$

tal que $\kappa = \kappa(s)$ é a curvatura geodésica de γ em $\gamma(s)$.

Demonstração. Considere uma curva $\gamma(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície de curvatura constante $c = \pm 1$. Derivando $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c = 1$ obtemos:

$$\langle \mathbf{t}(s)', \mathbf{t}(s) \rangle_c + \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle_c = 2 \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c = 0.$$

Portanto $\mathbf{t}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ e pode ser escrito como

$$\mathbf{t}'(s) = \lambda(s) \gamma(s) + \mu(s) \mathbf{e}(s),$$

em que $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)$. Da identidade $\langle \gamma(s), \mathbf{t}'(s) \rangle_c = -\langle \gamma'(s), \mathbf{t}(s) \rangle_c = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle'_c = -1$, temos:

$$\langle \gamma(s), \lambda \gamma(s) + \mu \mathbf{e}(s) \rangle = c \lambda \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = c \lambda = c.$$

Como $\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 1$, calculamos:

$$\mu = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{e}(s) \rangle_c = \langle \mathbf{t}'(s), \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s) \rangle_c = \det(\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)) = \kappa(s).$$

Assim, $\mathbf{t}'(s) = -c\gamma(s) + \kappa(s)\mathbf{e}(s)$. Para $\mathbf{e}'(s)$ usamos $\mathbf{e}(s) = \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}(s)$. Temos

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'(s) &= \gamma'(s) \wedge_c \mathbf{t}(s) + \gamma(s) \wedge_c \mathbf{t}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge_c \mathbf{t}(s) + \gamma(s) \wedge_c (-c\gamma(s) + \kappa(s)\mathbf{e}(s)) \\ &= \kappa(s) (\gamma(s) \wedge_c \mathbf{e}(s)) \\ &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s).\end{aligned}$$

Obtemos o sistema de Frenet:

$$\mathbf{t}'(s) = -c\gamma(s) + \kappa(s)\mathbf{e}(s),$$

$$\mathbf{e}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s).$$

□

É conveniente introduzir funções trigonométricas generalizadas que englobem, em uma única notação, os casos hiperbólico, euclidiano e esférico. Essas funções permitem escrever de maneira compacta e uniforme expressões relacionadas a geodésicas, à aplicação exponencial e às fórmulas diferenciais que surgem no estudo de curvas em formas espaciais. Dessa forma, muitas identidades e resultados podem ser apresentados simultaneamente para os três modelos, diferenciando-se apenas pelo valor da curvatura Gaussiana c . Assim, definimos as funções trigonométricas generalizadas por:

$$\sin_c(t) = \begin{cases} \sinh(t), & c = -1, \\ t, & c = 0, \\ \sin(t), & c = 1, \end{cases} \quad \cos_c(t) = \begin{cases} \cosh(t), & c = -1, \\ 1, & c = 0, \\ \cos(t), & c = 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Além disso, definimos

$$\tan_c(t) = \frac{\sin_c(t)}{\cos_c(t)}, \quad \cot_c(t) = \frac{1}{\tan_c(t)}$$

Em particular, temos algumas identidades trigonométricas conhecidas:

$$c \sin_c^2(t) + \cos_c^2(t) = 1, \quad \cos'_c(t) = -c \sin_c(t),$$

$$\cos_c(2t) = \cos_c^2(t) - \sin_c^2(t), \quad \sin'_c(t) = \cos_c(t).$$

A próxima definição descreve o que é uma curva convexa.

Definição 3.4.1. Dizemos que uma curva suave, fechada e orientada positivamente $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é convexa quando:

$$\begin{cases} \kappa(s) > 0, & c = 1, \\ \kappa(s) > 1, & c = -1, \end{cases} \quad \forall s \in [0, \ell].$$

Para se ter uma noção intuitiva da definição, consideremos círculos geodésicos de raio R , que são curvas convexas. Se γ é um círculo geodésico, então

$$\kappa(s) = \begin{cases} \coth(R), & c = -1 \\ \cot(R), & c = 1. \end{cases} \quad \forall s \in [0, \ell]$$

Logo,

$$\kappa(s) \rightarrow \begin{cases} 1, & R \rightarrow +\infty \\ 0, & R \rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Portanto, conforme R cresce, os círculos tendem a geodésicas em $c = 1$ e a horociclos $c = -1$.

Com as notações introduzidas acima, a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_c$ parametrizada pelo comprimento de arco dada por

$$\gamma(t) = \cos_c(t)p + \sin_c(t)v$$

é a geodésica que passa por $p \in \mathbb{M}_c$ com velocidade $v \in T_p\mathbb{M}_c$, $\|v\|_c = 1$. A aplicação exponencial da variedade Riemanniana $(\mathbb{M}_c, \langle \cdot, \cdot \rangle_c)$ é expressada por:

$$\exp_p^c(tv) = \cos_c(t)p + \sin_c(t)v, \quad (3.19)$$

em que $p \in \mathbb{M}_c$, $v \in T_p\mathbb{M}_c$ é um vetor unitário e $t \in \mathbb{R}$.

4 Evolutóides em Formas Espaciais Bidimensionais

Neste capítulo, estudaremos os evolutóides de curvas convexas em formas espaciais bidimensionais de curvatura constante. Na Seção 4.1, investigaremos os evolutóides de curvas convexas e suas singularidades, com especial atenção às propriedades geométricas que emergem nesse contexto. Nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2 analisaremos a suavidade do α -evolutóide e o evolutóide de círculos, respectivamente, em seguida, a Seção 4.2 dedicaremos a comentários acerca da área delimitada pelo evolutóide, discutindo separadamente os casos hiperbólico e esférico. Além disso, verificaremos uma propriedade válida em relação aos comprimentos da curva e do evolutóide. Nas Seções 4.3 e 4.4, discutiremos os involutóides de γ e as frentes de onda, posteriormente. Caracterizaremos o α -evolutóide como o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda. A base de estudo deste capítulo é o trabalho [10].

4.1 Evolutóides de Curvas Convexas e suas Singularidades

Nesta seção, estudaremos os evolutóides em $\mathbb{M}_{-1,1}$ e algumas de suas principais propriedades. Castro (2013) em [11] obteve alguns resultados importantes acerca dos evolutóides. Por exemplo, se a curva é um círculo, então o evolutóide associado também é círculo e vice-versa. Finalizaremos a seção com uma comparação da área delimitada pela curva e pelo evolutóide e uma extensão do resultado 3.1.2. Com esse objetivo, utilizaremos a aplicação exponencial (3.19), que será uma ferramenta importante na generalização dos resultados do caso plano.

Consideremos uma curva suave, fechada e convexa $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$, tal que $c = -1, 1$, com o referencial ortonormal positivo de Frenet–Serret $\{\gamma(s), \mathbf{t}(s), \mathbf{e}(s)\}$. O *envelope* das geodésicas $\sigma_s : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{M}_c$, $\sigma_s(0) = \gamma(s)$, $\sigma'_s(0) = \mathbf{e}(s)$, é chamado de *evoluta* de γ . Fixando um ângulo $\alpha \in [0, \pi/2]$, definimos, para $(t, s) \in [0, \ell] \times [0, \infty)$, a família de geodésicas

$$\mathcal{F}_\alpha(s, t) = \exp_{\gamma(s)}^c(t\mathbf{v}_\alpha(s)), \quad (4.1)$$

tal que

$$\mathbf{v}_\alpha(s) = a\mathbf{t}(s) + b\mathbf{e}(s), \quad (4.2)$$

com $a = \cos(\alpha)$ e $b = \sin(\alpha)$.

Geometricamente, $\mathcal{F}_\alpha$ consiste em uma família de geodésicas que fazem um ângulo α com o vetor tangente $\mathbf{t}(s)$ para cada s , mantendo orientação positiva em relação ao

referencial $\{\mathbf{t}, \mathbf{e}\}$. O envelope dessa família é uma curva que será denominada α -evolutóide da curva γ e será denotada por γ_α . Em particular, Izumiya et al. (2004) em [5] obtiveram vários resultados no caso $c = -1$ e $\alpha = \pi/2$, em que obtém-se a *evoluta hiperbólica* de γ .

Com base nessa interpretação geométrica, introduziremos a seguinte definição, seguindo Escudero, Reventós e Solanes (2007) em [12].

Definição 4.1.1. Fixado $\alpha \in [0, \pi/2]$, o α -evolutóide de uma curva regular, convexa, fechada e parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é a imagem, pela aplicação $\mathcal{F}_\alpha(s, t)$, do conjunto crítico da família $\mathcal{F}_\alpha(s, \cdot)$.

Em $\mathbb{M}_{-1}$, as geodésicas se encontram no máximo uma vez. Então existe uma aplicação $\rho_\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(D\mathcal{F}_\alpha)_{(s, \rho_\alpha(s))}$ é uma aplicação linear singular. Para $c = 1$, o fechamento de todas geodésicas implica que a família $\mathcal{F}(s, \cdot)$ tem singularidades periódicas e o α -evolutóide tem duas componentes conexas simétricas com respeito a origem $(0, 0, 0)$, veja observação 4.1.1.

Proposição 4.1.1. A função $\rho_\alpha : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é dada por

$$\rho_\alpha(s) = \arctan_c \left(\frac{b}{\kappa(s)} \right) \quad (4.3)$$

para todo $s \in [0, \ell]$. Isto é, o α -evolutóide de uma curva suave, convexa e fechada $\gamma = \gamma(s)$ em $\mathbb{M}_c$ é parametrizada por

$$\gamma_\alpha(s) = \exp_{\gamma(s)}^c(\rho_\alpha(s) \mathbf{v}_\alpha(s)). \quad (4.4)$$

Demonstração. Calculando a derivada de $\mathcal{F}_\alpha(s, t)$, usando (3.17) e omitindo a variável s no referencial de Frenet–Serret, temos

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial s}(s, t) = -ac \sin_c(t) \gamma + (\cos_c(t) - b\kappa \sin_c(t)) \mathbf{t} + a\kappa \sin_c(t) \mathbf{e},$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial t}(s, t) = -c \sin_c(t) \gamma + a \cos_c(t) \mathbf{t} + b \cos_c(t) \mathbf{e}.$$

Escrevendo a derivada de $\mathcal{F}_\alpha$ em relação a $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$, obtemos:

$$(D\mathcal{F}_\alpha)_{(s, t)} = \begin{bmatrix} -ac \sin_c(t) & -c \sin_c(t) \\ \cos_c(t) - b\kappa \sin_c(t) & a \cos_c(t) \\ a\kappa \sin_c(t) & b \cos_c(t) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Se $(D\mathcal{F}_\alpha)_{(s, t)}$ não tem posto máximo, temos $b \cos^2(t) - \sin(t) \cos(t) \kappa = 0$, assim,

$$b - t\kappa = 0 \iff t = b/\kappa.$$

Se $c = -1, 1$, $(D\mathcal{F}_\alpha)_{(s,t)}$ tem núcleo não trivial se e somente se,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial s} \wedge_c \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial t} = \begin{vmatrix} c\gamma & \mathbf{t} & \mathbf{e} \\ -ac \sin_c(t) & \cos_c(t) - b\kappa \sin_c(t) & a\kappa \sin_c(t) \\ -c \sin_c(t) & a \cos_c(t) & b \cos_c(t) \end{vmatrix}.$$

Usando a equação (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial s} \wedge_c \frac{\partial \mathcal{F}_\alpha}{\partial t} = (0, 0, 0) &\iff c(b \cos_c(t) - \kappa \sin_c(t)) = 0 \\ &\iff t = \arctan_c\left(\frac{b}{\kappa}\right). \end{aligned}$$

Portanto, substituindo t na equação (4.1), obtemos (4.4). $\square$

Observação 4.1.1. *A versão esférica de (4.3) satisfaz*

$$\tan(\rho_\alpha(s)) = \tan(\rho_\alpha(s) + n\pi) = \frac{b}{\kappa(s)}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exploraremos agora algumas propriedades geométricas dos α -evolutóides. Giblin e Warder (2014) em [7] observaram que, no caso plano, os segmentos

$$\overline{\gamma(s)\gamma_\alpha(s)} \quad \text{e} \quad \overline{\gamma_\alpha(s)\gamma_{\pi/2}(s)}$$

são ortogonais em $\gamma_\alpha(s)$ para cada s , ou, equivalentemente, $\gamma(s)$, $\gamma_\alpha(s)$ e $\gamma_{\pi/2}(s)$ pertencem a um círculo geodésico de diâmetro $1/\kappa(s)$, para todo $\alpha \in [0, \pi/2]$, o qual é tangente a γ em $\gamma_\alpha(s)$. Naturalmente, o centro desse círculo está no segmento *normal* $\overline{\gamma(s)\gamma_{\pi/2}(s)}$. Não se deve esperar que isso aconteça além do caso plano. Em outras palavras, nas formas espaciais $\mathbb{M}_{-1,1}$, mesmo para cada s fixo, podemos construir um único círculo geodésico no qual estão $\gamma(s)$, $\gamma_\alpha(s)$ e $\gamma_{\pi/2}(s)$, mas seus centros necessariamente não estão no segmento geodésico normal $\overline{\gamma(s)\gamma_{\pi/2}(s)}$ diferindo do caso plano. De agora em diante, abordaremos essa afirmação, mas primeiro vamos visitar uma propriedade simples compartilhada pela esfera e pelo plano hiperbólico.

Seja $\Pi = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Lembre-se de que a métrica de Poincaré pode ser induzida em

$$\mathbb{D}(0, 1) = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\} \subset \Pi$$

por meio da projeção estereográfica $P_{-1} : \mathbb{M}_{-1} \longrightarrow \Pi$, que associa a um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{M}_{-1}$ a interseção de Π com a reta de $\mathbb{R}^3$ que une (x, y, z) e $(-1, 0, 0)$.

Da mesma forma, dotamos Π com uma métrica de curvatura gaussiana $c = 1$ através da projeção estereográfica $P_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \rightarrow \Pi$, que associa a $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ a interseção da reta que vai de (x, y, z) a $(1, 0, 0)$ com Π .

Observação 4.1.2. *Seja Π_c o conjunto Π dotado das métricas descritas acima. É bem sabido que as circunferências euclidianas e as retas de Π que passam por $(0,0,0)$ são, respectivamente, círculos geodésicos e retas geodésicas da variedade riemanniana Π_c .*

Denotamos por d_c a distância riemanniana em $\mathbb{M}_c$, $c = -1, 1$.

Lema 4.1.1. *Sejam $c = -1, 1$ e $P_c : \mathbb{M}_c \rightarrow \Pi$ a projeção estereográfica. Para cada $Q \in \mathbb{M}_c$, temos*

$$d_c(Q, (0, 0, 1)) = 2 \arctan_c(d_0(P_c(Q), (0, 0, 0))), \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja $c = \pm 1$ e $P_c : \mathbb{M}_c \rightarrow \Pi$ a projeção estereográfica. Observa-se que

$$P_c((0, 0, 1)) = (0, 0, 0).$$

Logo, para $Q \in \mathbb{M}_c$, basta calcular a distância entre $(0, 0)$ e $P_c(Q)$ no plano Π munido da métrica induzida. A métrica de $\mathbb{M}_c$, via projeção estereográfica, induz em $P_c(\mathbb{M}_c) \subset \Pi$ a métrica conforme

$$ds_c^2 = \frac{4}{(1 + c(x^2 + y^2))^2} (dx^2 + dy^2).$$

Seja $Q' = P_c(Q) = (m, n)$. Pela simetria da métrica que depende apenas de $(x^2 + y^2)$, podemos considerar a curva radial

$$\gamma(t) = tQ', \quad t \in [0, 1],$$

que liga $(0, 0)$ a Q' . O comprimento de γ é dado por

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_c} dt.$$

Como $\gamma'(t) = Q'$, obtemos

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \frac{2\|Q'\|}{(1 + c(t^2\|Q'\|^2))} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t\|Q'\|$, temos $du = \|Q'\|dt$, e portanto

$$\ell(\gamma) = 2 \int_0^{\|Q'\|} \frac{1}{1 + cu^2} du = 2 \arctan_c(\|Q'\|).$$

Por fim, como $\|Q'\| = d_0(P_c(Q), (0, 0, 0))$, segue que

$$d_c(Q, (0, 0, 1)) = 2 \arctan_c(d_0(P_c(Q), (0, 0, 0))),$$

como queríamos demonstrar. □

Seja $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva fechada, suave e convexa e fixe $s \in [0, \ell]$. Vamos provar que o centro do círculo geodésico que passa por $\gamma(s)$, $\gamma_\alpha(s)$ e $\gamma_{\pi/2}(s)$ *não está no segmento normal* $\overline{\gamma(s)\gamma_{\pi/2}(s)}$, diferentemente do caso plano.

Seja $C \subset P_c(\Pi)$ um círculo geodésico (das métricas induzidas descritas acima) de diâmetro d contendo $(0, 0, 0)$, e $L \subset \Pi_c$ uma reta que passa por $(0, 0, 0)$ formando um ângulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ com o eixo positivo $\{(0, y, 0) \mid y \geq 0\} \subset \Pi_c$. Suponha que $C \subset \{(0, y, z) \mid z \geq 0\}$ e que C é tangente ao eixo $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ em $(0, 0, 0)$. Então C intercecta L em um único ponto $A = (0, y, z)$ com $z > 0$.

Lema 4.1.2. *Seja $\{A\} = L \cap C$. Então*

$$d_c(A, 0) = 2 \arctan_c \left(\frac{\tan_c(d/2) \sin(\alpha)}{2} \right).$$

Demonstração. Pela relação (4.6), um círculo geodésico de raio d em Π_c corresponde a um círculo euclidiano de raio $\tan_c(d/2)$, cujo diâmetro é $\tan_c(d)$. No caso considerado, o círculo C tem centro sobre o eixo y , e sua equação cartesiana é dada por

$$x^2 + \left(y - \frac{\tan_c(d/2)}{2} \right)^2 = \frac{\tan_c^4(d/2)}{4}.$$

A geodésica L que parte da origem formando ângulo α com o eixo vertical é, no modelo Π_c , o segmento de reta parametrizado por

$$(x, y) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha), \quad t > 0.$$

Substituindo essa parametrização na equação do círculo C , obtemos

$$(t \cos \alpha)^2 + \left(t \sin \alpha - \frac{\tan_c(d/2)}{2} \right)^2 = \frac{\tan_c^4(d/2)}{4}.$$

Expandindo,

$$t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha - t \tan_c(d/2) \sin \alpha + \frac{\tan_c^2(d/2)}{4} = \frac{\tan_c^4(d/2)}{4}.$$

isto é,

$$t \left(t - \frac{\tan_c(d/2) \sin \alpha}{2} \right) = 0.$$

Como $t > 0$, segue que

$$t = \frac{\tan_c(d/2) \sin \alpha}{2}.$$

Por construção, t é a distância euclidiana da origem ao ponto A , isto é, $t = d_0(A, 0)$. Aplicando novamente (4.6), que relaciona a distância euclidiana com a distância geodésica em Π_c , obtemos

$$d_c(A, 0) = 2 \arctan_c(t).$$

Substituindo o valor de t , concluímos que

$$d_c(A, 0) = 2 \arctan_c \left(\frac{\tan_c(d/2) \sin(\alpha)}{2} \right),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Agora considere uma curva convexa $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \Pi_c$, $c = -1, 1$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma'(0) = (0, 1, 0)$. Considere também $\alpha \in (0, \pi/2)$ fixo. Seja C o círculo geodésico que passa por $\gamma(0)$, $\gamma_\alpha(0)$ e $\gamma_{\pi/2}(0)$. A geodésica que parte de $\gamma(0)$ com ângulo α em relação a $\gamma'(0)$ intersecciona C em um ponto A . Pelo Lema 4.1.2, A não pode ser $\gamma_\alpha(0)$, já que pela Proposição 4.1.1 temos de fato que

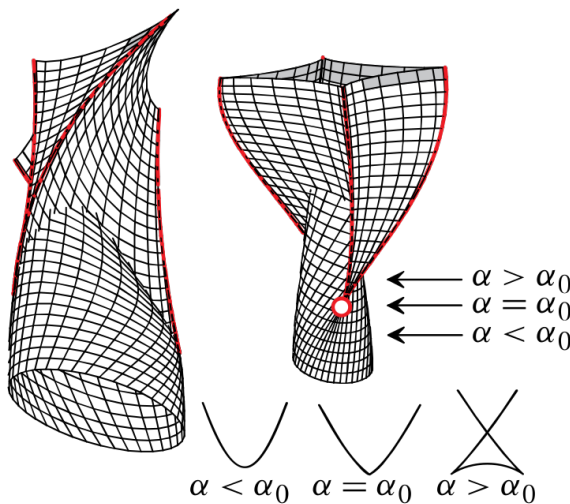
$$d_{\text{hyp}}(A, \gamma(0)) \neq \rho_\alpha(0).$$

4.1.1 Suavidade do α -evolutóide

A evoluta $\gamma_{\pi/2}$ possui singularidades bem conhecidas no caso plano. Giblin e Warder (2014) em [7] descreveram propriedades do α -evolutóide em relação às suas singularidades para o caso plano, usando (3.3). Para o caso hiperbólico, tais singularidades e outras características geométricas têm sido estudadas. Por exemplo, na esfera unitária, Nishimura e Kitagawa (2008) em [9] investigaram *curvas pedais*, que são naturalmente ligadas às evolutas. Em ambos os casos, os pontos críticos da curvatura $\kappa = \kappa(s)$ dão origem às singularidades de γ_α . Para algum $\alpha \in [0, \pi/2)$, vemos que γ_α é regular. Podemos ver na Figura 5 a ilustração do α -born, ou seja, o menor α para que o γ_α tenha singularidades. Essa figura é o empilhamento de todos os evolutóides partindo de $\alpha = 0$ até $\alpha = \pi/2$ e formalmente é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{(\exp_{\gamma(s)}(\rho_\alpha(s)v_\alpha), \alpha); \quad s \in [0, \ell], \alpha \in [0, \pi/2]\}$$

Figura 5 – Conjunto $\mathcal{S}$



Fonte: [7], 2014.

Gostaríamos então de abordar o problema de encontrar o menor $\alpha \in (0, \pi/2]$ tal que γ_α não seja regular – isto é, $\gamma'_\alpha(s) = 0$ para algum $s \in [0, \ell]$ – e caracterizar as singularidades presentes.

A partir da equação (4.4) e da regra da cadeia, as classes de suavidade de γ_α e de ρ_α estão relacionadas. Se considerarmos $c = -1$, foi provado por (Izumiya et al., 2004) em [5], que os pontos singulares da evoluta hiperbólica $\gamma_{\pi/2}$ ocorrem exatamente naqueles s tais que $\gamma(s)$ é um *vértice* de γ , ou seja, críticos de κ . Isso imita o conhecido caso plano estudado por Giblin e Warder (2014) em [7]. Com essa perspectiva, apresentaremos abaixo uma extensão desse resultado.

Teorema 4.1.1. *Fixe $\alpha \in (0, \pi/2]$ e $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva suave, parametrizada pelo comprimento de arco, convexa, fechada e positivamente orientada. O α -evolutóide dado por (4.4) é regular se e somente se,*

$$\rho'_\alpha(s) \neq -\cos(\alpha) \quad (4.7)$$

Demonstração. Sejam γ uma curva com referencial de Frenet adaptado $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$. e o vetor

$$\mathbf{v}_\alpha(s) = a \mathbf{t}(s) + b \mathbf{e}(s); \quad a = \cos \alpha, b = \sin \alpha.$$

Pela equação (4.4) temos

$$\gamma_\alpha(s) = \cos_c(\rho_\alpha(s)) \gamma(s) + \sin_c(\rho_\alpha(s)) \mathbf{v}_\alpha(s),$$

e para abreviar, $\rho_\alpha = \rho_\alpha(s)$ e omitiremos a dependência em s quando claro. Usando (3.17) e sabendo que $\sin'_c(t) = \cos_c(t)$ e $\cos'_c(t) = -c \sin_c(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'_\alpha &= \left(\cos_c(\rho_\alpha) \right)' \gamma + \cos_c(\rho_\alpha) \gamma' + \left(\sin_c(\rho_\alpha) \right)' \mathbf{v}_\alpha + \sin_c(\rho_\alpha) \mathbf{v}'_\alpha \\ &= \left(-c \sin_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha \right) \gamma + \cos_c(\rho_\alpha) \mathbf{t} + \left(\cos_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha \right) \mathbf{v}_\alpha + \sin_c(\rho_\alpha) \mathbf{v}'_\alpha, \end{aligned}$$

Agora calculamos $\mathbf{v}'_\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_\alpha &= a \mathbf{t}' + b \mathbf{e}' \\ &= a(-c\gamma + \kappa \mathbf{e}) + b(-\kappa \mathbf{t}) \\ &= -ac\gamma - b\kappa \mathbf{t} + a\kappa \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Substituindo $\mathbf{v}'_\alpha$ em γ'_α :

$$\begin{aligned} \gamma'_\alpha &= -c \sin_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha \gamma + \cos_c(\rho_\alpha) \mathbf{t} + \cos_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha \mathbf{v}_\alpha \\ &\quad + \sin_c(\rho_\alpha) (-ac\gamma - b\kappa \mathbf{t} + a\kappa \mathbf{e}). \end{aligned}$$

Agora agrupamos os termos segundo as direções γ , $\mathbf{t}$ e $\mathbf{e}$. Portanto obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'_\alpha &= -c \sin_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a) \gamma \\ &\quad + \left((1 + a\rho'_\alpha) \cos_c(\rho_\alpha) - b \sin_c(\rho_\alpha) \kappa \right) \mathbf{t} \\ &\quad + \left(a \sin_c(\rho_\alpha) \kappa + b \cos_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha \right) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Usando $\tan_c(\rho_\alpha) = \frac{b}{\kappa} \implies \kappa \sin_c(\rho_\alpha) = b \cos_c(\rho_\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'_\alpha &= -c \sin_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a) \gamma \\ &\quad + (a(\rho'_\alpha + a) \cos_c(\rho_\alpha)) \mathbf{t} \\ &\quad + (b(\rho'_\alpha + a) \cos_c(\rho_\alpha)) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma'_\alpha = (\rho'_\alpha + a) \left[-c \sin_c(\rho_\alpha) \gamma + \cos_c(\rho_\alpha) \mathbf{v}_\alpha \right]. \quad (4.8)$$

Perceba que $\gamma'_\alpha \neq 0 \iff \rho'_\alpha \neq -a$. Se $c = 0$, obtemos a condição (4.7) de Giblin e Warder, (2014) de [7]. $\square$

Observação 4.1.3. Vale notar que o campo vetorial

$$-c \sin_c(\rho_\alpha) \gamma + \cos_c(\rho_\alpha) \mathbf{v}_\alpha$$

em (4.8) é unitário, tangente a γ_α e canonicamente associado à parametrização $\gamma = \gamma(s)$, mesmo que γ não seja parametrizada pelo comprimento de arco.

Como consequência do Teorema 4.1.1, é natural perguntar que tipo de singularidades podem aparecer no evolutóide γ_α . Para responder a essa questão, utilizaremos os trabalhos de Gibson e Hobbs (1993) em [6], que classificaram singularidades simples de curvas no espaço. No teorema seguinte, apresentaremos uma condição para que a curva γ_α tenha uma singularidade do tipo $(2, 3, 0)$. Isso significa que γ_α é equivalente, por *mudanças à direita e à esquerda*, à forma normal $(s^2, s^3, 0)$ em sua singularidade.

Teorema 4.1.2. *Seja $c = 1, -1$. Sob as hipóteses do Teorema 4.1.1, suponha que γ_α seja singular em $s = s_0$. Essa singularidade é do tipo $(2, 3, 0)$ se e somente se, $\rho'_\alpha(s_0) = -\cos(\alpha)$, $\rho''_\alpha(s_0) \neq 0$, e as seguintes condições abertas forem satisfeitas (todas as funções são consideradas em $s = s_0$):*

$$\cos_c(\rho_\alpha) \left(\kappa \rho''_\alpha \cos_c(\rho_\alpha) + b \sin_c(\rho_\alpha) (a^2 + cb^2 \rho''_\alpha) \right) \neq 0,$$

ou

$$c \sin_c(2\rho_\alpha) (b \rho'''_\alpha + 2a \kappa \rho''_\alpha) + 2ab \rho''_\alpha (c + \sin_c^2(\rho_\alpha)) \neq 0,$$

ou

$$c \left(2b^2 \sin_c^2(\rho_\alpha) - a^2 \cos_c^2(\rho_\alpha) \right) + b \kappa \sin_c(2\rho_\alpha) \rho''_\alpha \neq 0.$$

Demonstração. Omitindo s e calculando a segunda derivada de γ' , obtemos

$$\begin{aligned} \gamma''_\alpha &= (-\rho'_\alpha c \sin_c(\rho_\alpha) - c(\rho'_\alpha + a) \cos_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha - a \cos_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a)) \gamma \\ &\quad + (a \cos_c(\rho_\alpha) \rho''_\alpha - c \sin_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a) - ca \sin_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha (\rho'_\alpha + a) - b \cos_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a) \kappa) \mathbf{t} \\ &\quad + (b \cos_c(\rho_\alpha) \rho''_\alpha + a \kappa \cos_c(\rho_\alpha) (\rho'_\alpha + a) - (\rho'_\alpha + a) cb \sin_c(\rho_\alpha) \rho'_\alpha) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma_\alpha''' = & (-\rho_\alpha''' c \sin_c(\rho_\alpha) - 2\rho_\alpha'' \rho_\alpha' c \cos_c(\rho_\alpha) + \rho_\alpha'^2 (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) \\
& - c\rho_\alpha'' (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - a\rho_\alpha'' \cos_c(\rho_\alpha) + a c \rho_\alpha' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) - c a \rho_\alpha'' \cos_c(\rho_\alpha) \\
& + (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) + a \rho_\alpha' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) - c \kappa^2 (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha)) \gamma \\
& + (-2c \rho_\alpha'' \sin_c(\rho_\alpha) - 2c \rho_\alpha' (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - a (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - 2c a \rho_\alpha' \rho_\alpha'' \sin_c(\rho_\alpha) \\
& + a \rho_\alpha''' \cos_c(\rho_\alpha) - c a \rho_\alpha'^2 (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - c a \rho_\alpha'' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) + 2c b \kappa \rho_\alpha' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) \\
& - 2\kappa^2 \rho_\alpha'' \cos_c(\rho_\alpha) - b \kappa' (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - a \kappa^2 (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha)) \mathbf{t} \\
& + (2a \kappa \rho_\alpha'' \cos_c(\rho_\alpha) - c \kappa (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) - 2c a \kappa \rho_\alpha' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) \\
& - \kappa^3 (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha) - 2c b \rho_\alpha' \rho_\alpha'' \sin_c(\rho_\alpha) + b \rho_\alpha''' \cos_c(\rho_\alpha) + a \kappa' (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) \\
& - c b \rho_\alpha'^2 (\rho_\alpha' + a) \cos_c(\rho_\alpha) - c b \rho_\alpha'' (\rho_\alpha' + a) \sin_c(\rho_\alpha)) \mathbf{e}.
\end{aligned}$$

A curva γ_α é equivalente à esquerda-direita (mesmo tipo de singularidade) à aplicação normal $(s^2, s^3, 0)$ em $s = s_0$ se o posto da matriz $(\gamma_\alpha''(s_0), \gamma_\alpha'''(s_0))$ for igual a 2. Isso significa que a ocorrência da singularidade se dá pela segunda e terceira derivada da parametrização do evolutóide serem linearmente independentes. Portanto, calculando explicitamente $\gamma_\alpha''(s_0) \wedge_c \gamma_\alpha'''(s_0)$ obtém-se as condições. Em particular,

$$\gamma_\alpha''(s_0) \wedge_c \gamma_\alpha'''(s_0) \neq 0.$$

é equivalente à validade de pelo menos uma das condições abertas do teorema.

Reciprocamente, suponha que $\rho_\alpha'(s_0) = -\cos(\alpha)$, $\rho_\alpha''(s_0) \neq 0$, e que uma das condições abertas seja satisfeita. Então, pela (4.8), segue que $\gamma_\alpha'(s_0) = 0$, isto é, s_0 é um ponto singular. Além disso, $\rho_\alpha''(s_0) \neq 0$ implica que $\gamma_\alpha''(s_0) \neq 0$, já que na expressão de γ_α'' o termo ρ_α'' não se anula simultaneamente. Logo, as condições abertas garantem que $\gamma_\alpha''(s_0) \wedge_c \gamma_\alpha'''(s_0) \neq 0$, o que caracteriza uma singularidade do tipo $(2, 3, 0)$. $\square$

Observação 4.1.4. As singularidades de γ_{α_0} não são do tipo $(2, 3, 0)$. Suponha que o α -evolutóide γ_α é singular em $s = s_0$, isto é, $\rho_\alpha' = -\cos \alpha$ em $s = s_0$. Diferenciando a equação (4.3), temos

$$-\frac{\sin(\alpha) \kappa'(s)}{\kappa(s)^2 + c \sin(\alpha)^2} \neq -\cos(\alpha).$$

Utilizando o Teorema 4.1.1, obtemos que s é uma singularidade de γ_α quando $G(s, \alpha) = 0$, em que

$$G : [0, \ell] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dada por

$$\begin{aligned}
G(s, \alpha) &= \rho_\alpha'(s) + \cos(\alpha) \\
&= -\frac{\sin(\alpha) \kappa'(s)}{\kappa(s)^2 + c \sin(\alpha)^2} + \cos(\alpha).
\end{aligned}$$

Considere o conjunto

$$A = \{\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]; \gamma_\alpha \text{ é singular}\} = \{\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]; \exists s \in [0, \ell] \text{ tal que } G(s, \alpha) = 0\}.$$

Como $\frac{\pi}{2} \in A$, temos que $A \neq \emptyset$. Defina

$$\alpha_0 = \inf A.$$

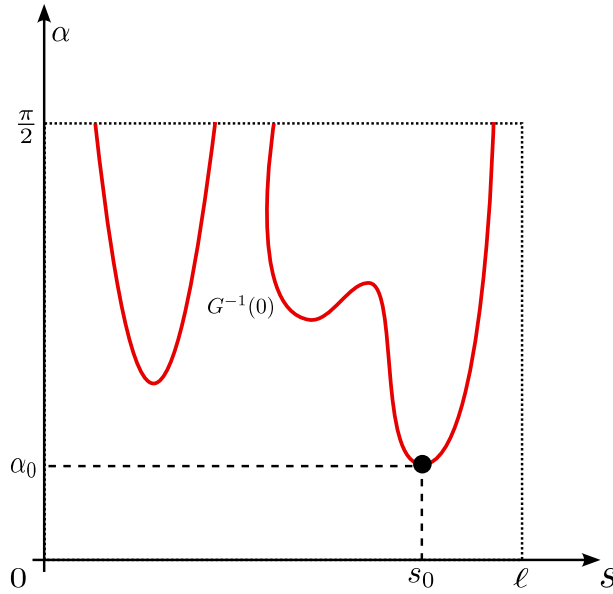
Observe que $G^{-1}(0)$ é compacto e que A é a projeção de $G^{-1}(0)$ sobre a segunda coordenada. Assim, A é compacto e $\alpha_0 \in A$. Portanto, γ_{α_0} é singular. Agora, suponha que $s = s_0$ seja uma singularidade de γ_{α_0} , isto é, $G(s_0, \alpha_0) = 0$. Note que $G_s(s_0, \alpha_0) = 0$ porque $\alpha_0 = \inf A$. Assim,

$$\rho''_{\alpha_0}(s_0) = G_s(s_0, \alpha_0) = 0.$$

Portanto, segue do Teorema 4.1.2 que s_0 não é uma singularidade do tipo $(2, 3, 0)$.

A Figura 6 representa o ângulo $\alpha_0 = \inf A$.

Figura 6 – Representação de α_0



Fonte: [10], 2025.

A subseção a seguir, diz respeito aos evolutóides de círculos, a qual demonstramos um teorema do caso plano em $\mathbb{M}_c$.

4.1.2 Evolutóides de círculos

Voltamos nossa atenção para a equação (4.4), que implica imediatamente que, se $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é um círculo, então γ_α também é um círculo, para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$. Castro (2014) em [11] obteve a recíproca desse resultado no caso plano, utilizando funções suporte e propriedades de curvas de largura constante. É natural perguntar se o mesmo

ocorre em formas espaciais. Nesse sentido, usando apenas (4.4), damos uma prova simples para a recíproca em formas espaciais. Começaremos fornecendo a curvatura geodésica de γ_α no seguinte lema.

Lema 4.1.3. *Seja $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva fechada, suave e convexa, e $\alpha \in [0, \pi/2)$ tal que γ_α é suave. Seja $\kappa = \kappa(s)$ a curvatura geodésica de γ . Então a curvatura geodésica de γ_α é dada por*

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{(\kappa^2(s) + cb^2)^{3/2}}{a(\kappa^2(s) + cb^2) - b\kappa'(s)}. \quad (4.9)$$

Demonstração. Usando (4.8), omitindo s e o fato de que $\rho_\alpha(s) = \arctan_c\left(\frac{b}{\kappa(s)}\right) \Rightarrow \sin_c(\rho_\alpha)\kappa(s) = \cos_c(\rho_\alpha)b$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha \wedge_c \gamma'_\alpha &= (\cos_c(\rho_\alpha)\gamma + a \sin_c(\rho_\alpha)\mathbf{t} + b \sin_c(\rho_\alpha)\mathbf{e}) \wedge_c (\rho'_\alpha + a)(-c \sin_c(\rho_\alpha)\gamma + a \cos_c(\rho_\alpha)\mathbf{t} \\ &\quad + b \cos_c(\rho_\alpha)\mathbf{e}) \\ &= (\rho'_\alpha + a)(a \cos_c^2(\rho_\alpha)\mathbf{e} + ac \sin_c^2(\rho_\alpha)\mathbf{e} - b \cos_c^2(\rho_\alpha)\mathbf{t} - bc \sin_c^2(\rho_\alpha)\mathbf{t}) \\ &= (\rho'_\alpha + a)(a\mathbf{e} - b\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Alem disso,

$$\begin{aligned} \gamma''_\alpha &= \rho_\alpha(-c \sin_c(\rho_\alpha)\gamma + a \cos_c(\rho_\alpha)\mathbf{t} + b \cos_c(\rho_\alpha)\mathbf{e}) \\ &\quad + (\rho'_\alpha + a)(-c \cos_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha\gamma - c \sin_c(\rho_\alpha)\mathbf{t} - ca \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha\mathbf{t} + a \cos_c(\rho_\alpha)(-c\gamma + \kappa\mathbf{e}) \\ &\quad - cb \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha\mathbf{e} - b \cos_c(\rho_\alpha)\kappa\mathbf{t}) \\ &= \gamma(-\rho'_\alpha c \sin_c(\rho_\alpha) - c(\rho'_\alpha + a) \cos_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha - a \cos_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a)) + \mathbf{t}(a \cos_c(\rho_\alpha)\rho''_\alpha \\ &\quad - c \sin_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a) - ca \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha(\rho'_\alpha + a) - b \cos_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a)\kappa) + \mathbf{e}(b \cos_c(\rho_\alpha)\rho''_\alpha \\ &\quad + a\kappa \cos_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a) - (\rho'_\alpha + a)cb \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_\alpha \wedge_c \gamma'_\alpha, \gamma''_\alpha \rangle_c &= -b(\rho'_\alpha + a)(a \cos_c(\rho_\alpha)\rho''_\alpha - c \sin_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a) - ca \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha(\rho'_\alpha + a) \\ &\quad - b \cos_c(\rho_\alpha)\kappa(\rho'_\alpha + a)) + a(\rho'_\alpha + a)(\rho''_\alpha \cos_c(\rho_\alpha)b + a\kappa \cos_c(\rho_\alpha)(\rho'_\alpha + a) \\ &\quad - (\rho'_\alpha + a)cb \sin_c(\rho_\alpha)\rho'_\alpha) \\ &= (\rho'_\alpha + a)^2(\cos_c(\rho_\alpha)\kappa + bc \sin_c(\rho_\alpha)). \end{aligned}$$

Como $\|\gamma'_\alpha\|^3 = (\rho'_\alpha + a)^3$, obtemos,

$$\kappa_\alpha = \frac{(\rho'_\alpha + a)^2(\cos_c(\rho_\alpha)\kappa + bc \sin_c(\rho_\alpha))}{(\rho'_\alpha + a)^3} = \frac{\cos_c(\rho_\alpha)\kappa + bc \sin_c(\rho_\alpha)}{\rho'_\alpha + a}.$$

Por $\rho_\alpha = \arctan_c \left(\frac{b}{\kappa} \right) \Rightarrow \rho'_\alpha = \left(\frac{b}{\kappa} \right)' \cdot \frac{1}{1 + c \left(\frac{b}{\kappa} \right)^2} = \frac{-b\kappa'}{\kappa^2 + cb^2}$ temos,

$$\kappa_\alpha = \frac{\cos_c(\rho_\alpha)\kappa + bc \sin_c(\rho_\alpha)}{-\frac{b\kappa'}{\kappa^2 + cb^2} + a} = \frac{\cos_c(\rho_\alpha)\kappa + bc \sin_c(\rho_\alpha)}{\frac{-b\kappa' + a(\kappa^2 + cb^2)}{\kappa^2 + cb^2}}.$$

Como $\sin_c(\rho_\alpha) = \sin_c \left(\arctan_c \left(\frac{b}{\kappa} \right) \right) = \frac{b}{\sqrt{\kappa^2 + cb^2}}$ e

$$\cos_c(\rho_\alpha) = \cos_c \left(\arctan_c \left(\frac{b}{\kappa} \right) \right) = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + cb^2}}.$$

Assim,

$$\kappa_\alpha = \frac{(\kappa^2 + b^2c)^{\frac{1}{2}}}{\frac{-b\kappa' - a(\kappa^2 + cb^2)}{\kappa^2 + cb^2}} = \frac{(\kappa^2 + b^2c)^{\frac{3}{2}}}{a(\kappa^2 + cb^2) - b\kappa'},$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 4.1.3. *Sejam $\gamma : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva fechada, suave e convexa, e $\alpha \in [0, \pi/2)$ tal que γ_α é suave. Seja $\kappa = \kappa(s)$ a curvatura geodésica de γ . Então γ é um círculo se, e somente se, γ_α é um círculo.*

Demonstração. Suponhamos que γ seja círculo, então a curvatura geodésica κ é constante. Logo, por (4.9), κ_α é constante, isso implica que γ_α é círculo, por (4.4).

Agora, suponha que γ_α possui curvatura geodésica constante κ_0 . Pelo Lema 4.1.3, a curvatura geodésica de γ_α é dada por

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{(\kappa(s)^2 + cb^2)^{3/2}}{a(\kappa(s)^2 + cb^2) - b\kappa'(s)}. \quad (4.10)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.10) pelo denominador, obtemos, para todo s ,

$$\kappa_0(a(\kappa(s)^2 + cb^2) - b\kappa'(s)) = (\kappa(s)^2 + cb^2)^{3/2}. \quad (4.11)$$

Sejam s_0, s_1 dois pontos críticos de κ . Avaliando (4.11) em s_0 e s_1 , obtemos

$$\kappa_0 a(\kappa(s_0)^2 + cb^2) = (\kappa(s_0)^2 + cb^2)^{3/2},$$

$$\kappa_0 a(\kappa(s_1)^2 + cb^2) = (\kappa(s_1)^2 + cb^2)^{3/2}.$$

Dividindo cada igualdade por $(\kappa(s_i)^2 + cb^2)^{1/2}$, $i = 0, 1$, obtemos

$$a\kappa_0(\kappa(s_0)^2 + cb^2)^{-1/2} = a\kappa_0(\kappa(s_1)^2 + cb^2)^{-1/2}.$$

Como $a\kappa_0 \neq 0$, segue que

$$(\kappa(s_0)^2 + cb^2)^{-1/2} = (\kappa(s_1)^2 + cb^2)^{-1/2},$$

e portanto

$$\kappa(s_0)^2 + cb^2 = \kappa(s_1)^2 + cb^2,$$

Assim, $\kappa(s_0)^2 = \kappa(s_1)^2$. Como γ é convexa, sua curvatura geodésica é não-negativa. Logo, $\kappa(s_0) = \kappa(s_1)$. Já que s_0 e s_1 são pontos críticos arbitrários de κ , concluímos que todos os pontos críticos de κ têm o mesmo valor. Como γ é fechada e suave, isto implica que κ é constante ao longo de toda a curva. Finalmente, uma curva fechada, suave e convexa com curvatura geodésica constante é um círculo. Assim, γ é um círculo. $\square$

4.2 Área e comprimento do α -evolutóide

Discutiremos alguns aspectos referentes às áreas totais delimitadas por uma curva fechada, convexa em $\mathbb{M}_c$ e seu α -evolutóide (para α pequeno), bem como seus comprimentos.

É naturalmente esperado que a área total delimitada por γ_α seja uma função decrescente de $\alpha \in [0, \pi/2]$ para uma γ fixa e α pequeno. Seja $\mathcal{A}_c(\gamma)$ a área de um domínio $\Gamma \subset \mathbb{M}_c$ delimitado pela curva convexa e regular γ . Para $c = 0$, Castro (2014) em [11] provou que

$$\frac{A_0(\gamma_\alpha)}{A_0(\gamma)} \leq \cos^2(\alpha), \quad (4.12)$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se, γ for um círculo. Observe que o quociente em (4.12) não depende do raio desses círculos. Mas em $\mathbb{M}_{-1}$, temos uma situação diferente: se $\gamma^R, \gamma_\alpha^R \subset \mathbb{M}_{-1}$ são, respectivamente, um círculo geodésico de raio R e um α -evolutóide, então o quociente $A_{-1}(\gamma_\alpha^R)/A_{-1}(\gamma^R)$ depende de R . Para ver isso, podemos deduzir uma fórmula para a área de uma curva fechada e simples em $\mathbb{M}_{-1,1}$ usando o Teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema 4.2.1 (Teorema de Gauss-Bonnet em $\mathbb{M}_c$, [2]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{M}_c$ um domínio regular. Então vale a fórmula*

$$\int_{\Omega} c dA + \int_{\partial\Omega} \kappa ds + \sum_{i=1}^m \theta_i = 2\pi \chi(\Omega), \quad (4.13)$$

em que c é a curvatura Gaussiana constante da forma espacial; dA é o elemento de área induzido pela métrica de $\mathbb{M}_c$; κ é a curvatura geodésica da fronteira $\partial\Omega$; ds é o elemento de comprimento de arco; θ_i são os ângulos externos nos pontos não suaves, orientados no sentido anti-horário e $\chi(\Omega)$ é a característica de Euler de Ω .

Se a fronteira $\partial\Omega$ é uma curva suave, simples e fechada, o termo dos ângulos externos desaparece, então a equação (4.13) assume a forma

$$\int_{\Omega} c \, dA + \int_{\partial\Omega} \kappa \, ds = 2\pi \chi(\Omega).$$

Fixe $\rho > 0$. Seja γ a curva obtida pela interseção de $\mathbb{M}_{-1}$ com o plano $x_0 = \cosh(\rho)$, parametrizada por $\gamma(t) = (\cosh(\rho), \sinh(\rho) \cos t, \sinh(\rho) \sin t)$ tal que $t \in [0, 2\pi]$. Essa curva é um círculo geodésico de raio hiperbólico ρ , cuja curvatura geodésica é constante e vale $\kappa = \coth(\rho)$. Observando que o comprimento de γ é

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = 2\pi \sinh(\rho),$$

temos

$$\int_{\gamma} \kappa \, ds = \kappa \ell(\gamma) = \coth(\rho) 2\pi \sinh(\rho) = 2\pi \cosh(\rho).$$

Portanto,

$$\int_D dA = 2\pi (\cosh(\rho) - 1).$$

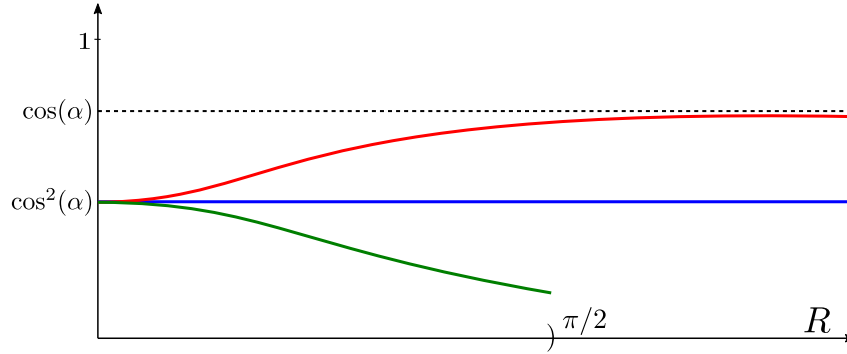
Logo, a área da região limitada pelo círculo geodésico γ em $\mathbb{M}_{-1}$ é

$$\mathcal{A}_c(\gamma) = 2\pi (\cosh(\rho) - 1) = 4\pi \sinh^2(\rho/2)$$

A Figura 7 apresenta o comportamento de

$$\frac{A_c(\gamma_{\alpha}^R)}{A_c(\gamma^R)}, \quad R > 0 \tag{4.14}$$

para $c = -1, 0, 1$. Observamos que, ao menos para círculos geodésicos, a contraparte hiperbólica do limite ótimo superior em (4.14) é uma função assintótica de R . Pode-se relacionar naturalmente o valor $A_{-1}(0) = \cos^2(\alpha)$ ao fato de que a área de domínios muito pequenos tende a sofrer pouca influência da curvatura Gaussiana quando comparados entre si. Seria interessante determinar como o limite superior ótimo para (4.14) depende (assintoticamente) do diâmetro $R > 0$ de uma curva fechada convexa $\gamma \subset \mathbb{M}_{-1}$ e talvez de outras características geométricas de γ . Esperamos que, em cada classe de curvas de mesmo diâmetro (isto é, duas curvas convexas são equivalentes se e somente se, tiverem o mesmo diâmetro) a igualdade na versão hiperbólica de 4.12 ocorra se e somente se, a curva for um círculo geodésico nesta classe, embora ainda não tenhamos uma prova desse resultado. Na imagem abaixo, temos o comportamento de $A_c(\gamma_{\alpha}^R)/A_c(\gamma^R)$ com γ^R sendo um círculo geodésico de raio $R > 0$, em que para $c = -1, 0, 1$, o comportamento é em vermelho, azul e verde, respectivamente.

Figura 7 – Comportamento de $\mathcal{A}_c(R)$ 

Fonte: [10], 2025.

Por outro lado, para $c = -1, 1$, estendemos o Teorema 3.1.2. Mais especificamente, dada uma curva $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_{-1,1}$ convexa e fechada, calculamos o comprimento de uma família de α -evolutóides γ_α .

Antes de prosseguir, destacamos um aspecto técnico da equação (4.7): como $\gamma_0 = \gamma$, então $\rho_0(s) = \rho'_0(s) = 0$ para todo $s \in [0, \ell]$. Assim, a condição (4.7) é imediatamente satisfeita:

$$0 = \rho'_0(s) > -\cos(0) = -1.$$

Por continuidade, existe um $\alpha^* \in (0, \pi/2)$ máximo tal que

$$|\rho'_\alpha(s)| < \cos(\alpha), \quad (4.15)$$

para todo $\alpha \in [0, \alpha^*)$ e para todo $s \in [0, \ell]$. Usaremos essa condição na Proposição 4.2.1.

Proposição 4.2.1. *Sejam $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva convexa e fechada, γ_α seu α -evolutóide e denote por $\ell(\gamma)$, $\ell(\gamma_\alpha)$ seus respectivos comprimentos. Se $\alpha \in [0, \alpha^*)$, então*

$$\ell(\gamma_\alpha) = \cos(\alpha)\ell(\gamma). \quad (4.16)$$

Demonstração. Omitindo s e assumindo $\|\gamma'\|_c = 1$, então, $\int_0^\ell \|\gamma'\| ds = \ell = \ell(\gamma)$. Como

$$\|\gamma'_\alpha\|_c = |\rho'_\alpha + a| = \rho'_\alpha + a.$$

Integrando em $[0, \ell]$ e ρ_α sendo uma função periódica, temos

$$\int_0^\ell \|\gamma'_\alpha\|_c dt = \int_0^\ell |\rho'_\alpha + a| dt = \int_0^\ell \rho'_\alpha dt + \int_0^\ell a dt = [\rho_\alpha]_0^\ell + a[t]_0^\ell = 0 + a \cdot \ell = a \cdot \ell.$$

Portanto, obtemos (4.16). □

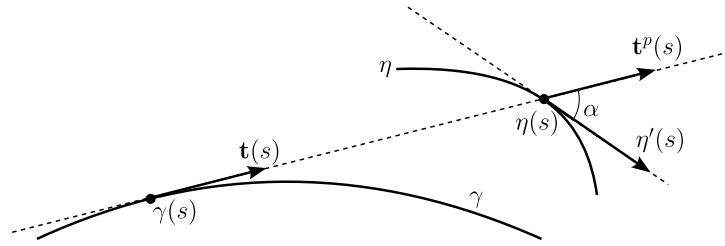
Na próxima seção, apresentaremos alguns resultados envolvendo os involutóides, que estão relacionados com o evolutóide.

4.3 Involutóides em formas espaciais

É natural perguntar se uma dada curva fechada, regular por partes $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é o α -evolutóide de alguma curva η . Quando esse é o caso, ainda temos o problema da *unicidade* de η .

Definição 4.3.1. *Um α -involutóide de uma curva fechada, regular por partes e parametrizada por comprimento de arco $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ é qualquer curva regular $\eta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_c$ que satisfaça $\eta_\alpha = \gamma$.*

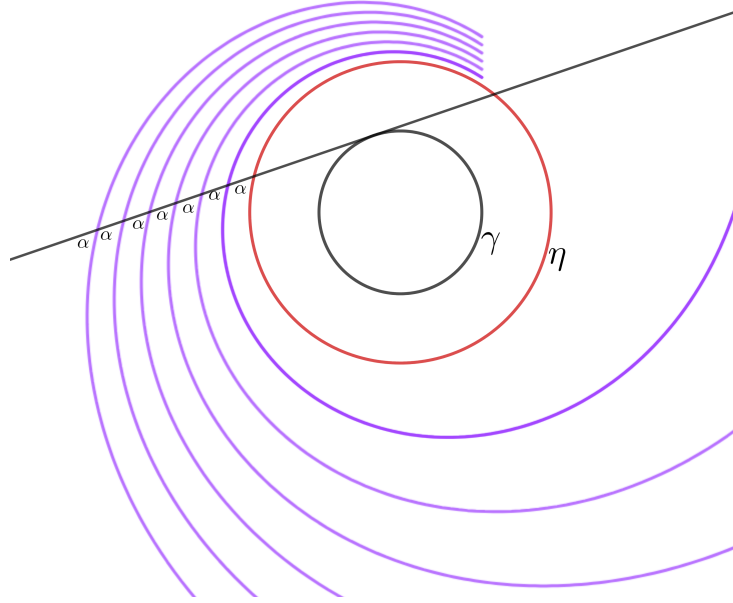
Figura 8 – Representação de η



Fonte: [10], 2025.

A definição acima é uma generalização da clássica noção de *involuta* de uma curva γ , que é qualquer curva η cuja evoluta é γ . Esta noção aparece em Huygens [15] no estudo da construção de relógios precisos [13]. Um tratamento mais moderno do tema e de suas generalizações pode ser encontrado em [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

No caso plano, considere um círculo. Ele possui uma família de α -involutóides, um deles sendo um círculo fechado e os demais sendo espirais logarítmicas e curvas singulares (Proposição 4.3.2). Na Figura 9, exibimos os involutóides suaves de um círculo γ .

Figura 9 – α -involutoíde

Fonte: [10], 2025.

Em [11], Castro (2013) estudou a seguinte situação: se γ é uma curva plana fechada, suave e convexa, existe um involutoíde fechado único para γ em $\mathbb{R}^2$. Nosso objetivo é estender esse resultado para o espaço hiperbólico usando o Teorema de Massera (1950) [3].

Exploraremos condições para encontrar qualquer α -involutoíde associado a uma curva γ fechada, suave e convexa em $\mathbb{M}_c$. Fixe $\alpha \in (0, \pi/2)$. Se η é um α -involutoíde associado a γ , então (3.19) implica que, para cada s , existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\eta(s) = \cos_c(\lambda(s)) \gamma(s) + \sin_c(\lambda(s)) \mathbf{t}(s) \quad (4.17)$$

e

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \eta'(s), \mathbf{t}^p(s) \rangle_c}{\|\eta'(s)\|_c \|\mathbf{t}^p(s)\|_c}, \quad (4.18)$$

em que $\mathbf{t}^p(s)$ é o transporte paralelo de $\mathbf{t}(s)$ ao longo da geodésica tangente a γ em $\gamma(s)$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^p(s) &= \frac{d}{dt} \Big|_{\lambda(s)} \exp_{\gamma(s)}^c(t \gamma'(s)) \\ &= -c \sin_c(\lambda(s)) + \cos_c(\lambda(s)) \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Proposição 4.3.1. *Sejam $\eta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_c$ e $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$. Todos os α -involutoídes são dados pela família de soluções $\lambda = \lambda(s)$ da equação*

$$\lambda' = \cot(\alpha) \kappa |\sin_c(\lambda)| - 1 \quad (4.20)$$

Demonstração. Como $\|\mathbf{t}^p(s)\|_c = 1$, basta calcular $\langle \eta'(s), \mathbf{t}^p(s) \rangle_c$ e $\|\eta'(s)\|_c$. Derivando a equação (4.17), usando o Lema 3.4.1 e omitindo s temos

$$\eta' = (-c \sin_c(\lambda) \lambda' - c \sin_c(\lambda)) \gamma + (\cos_c(\lambda) + \lambda' \cos_c(\lambda)) \mathbf{t} + \kappa \sin_c(\lambda) \mathbf{e}. \quad (4.21)$$

Assim,

$$\langle \eta', \mathbf{t}^p \rangle_c = (c \sin_c^2(\lambda) + \cos_c^2(\lambda))(1 + \lambda') = (1 + \lambda').$$

A norma de η é,

$$\|\eta'\|_c = \sqrt{(1 + \lambda')^2 (c \sin_c^2(\lambda) + \cos_c^2(\lambda)) + \kappa^2 \sin_c^2(\lambda)}.$$

Substituindo na equação (4.18),

$$\cos(\alpha) = \frac{(1 + \lambda')}{\sqrt{(1 + \lambda')^2 (c \sin_c^2(\lambda) + \cos_c^2(\lambda)) + \kappa^2 \sin_c^2(\lambda)}}.$$

Portanto,

$$\frac{1 + \lambda'}{\sqrt{(1 + \lambda')^2 + \kappa^2 \sin_c^2(\lambda)}} = \cos(\alpha). \quad (4.22)$$

Logo,

$$(1 + \lambda')^2 = \cos^2(\alpha) (1 + \lambda')^2 + \cos^2(\alpha) \kappa^2 \sin_c^2(\lambda).$$

Assim,

$$\lambda' = \cot(\alpha) \kappa |\sin_c(\lambda)| - 1 \quad (4.23)$$

Portanto, todos os α -involutóides são dados pela família de soluções $\lambda = \lambda(s)$ da equação (4.23). $\square$

Proposição 4.3.2. *Sejam $\gamma : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva regular e η um α -involutóide associado a γ . Os pontos singulares de η pertencem a γ .*

Demonstração. Observe que a equação (4.21), a componente $\kappa(s) \sin_c(\lambda(s))$ do vetor $\mathbf{e}(s)$ se anula, isto é, $\kappa(s) \sin_c(\lambda(s)) = 0$. Mas, $\sin_c(\lambda(s)) = 0$ se e somente se $\lambda(s) = 0$. Então, os pontos singulares de η pertencem a γ . $\square$

Teorema 4.3.1 (Teorema de Massera). *Seja $F : (-\infty, s_0] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitz que satisfaz $F(s + T, y) = F(s, y)$ para algum $T > 0$ e para todos $(s, y) \in (-\infty, s_0] \times \mathbb{R}$. Então o problema*

$$y'(s) = F(s, y(s)) \quad (4.24)$$

possui uma solução periódica em $(-\infty, s_0]$ se, e somente se, ele possui uma solução limitada em $(-\infty, s_0]$.

Nesse caso, todas as soluções $\bar{y}$ para o problema são assintóticas à solução periódica, isto é,

$$|y(s) - \bar{y}(s)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } s \rightarrow -\infty.$$

Em particular, existe no máximo uma solução periódica para (4.23). Para verificar que (4.23) satisfaz às hipóteses do Teorema de Massera, precisamos de alguns resultados geométricos sobre funções y que satisfazem

$$y'(s) = f(s) |g(y(s))| - 1, \quad (4.25)$$

tal que f é uma função T -periódica, suave e positiva e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e crescente satisfazendo $g(-y) = -g(y)$.

Proposição 4.3.3. *Sob as hipóteses acima, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que (4.25) tem uma solução limitada $y : (-\infty, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. O campo de direções $F(s, y) = f(s)|g(y)| - 1$ é localmente Lipschitz e tem seus zeros exatamente nos pontos (s, y) tais que $g(y) = \pm \frac{1}{f(s)}$. Afirmamos que (4.25) tem uma solução limitada definida em algum intervalo $(-\infty, s_0]$. Uma vez que f é positiva e g é bijetora com $g(-y) = -g(y)$, o conjunto de zeros de F é a união de dois gráficos, dados pelas equações

$$y = \pm g^{-1} \left(\frac{1}{f(s)} \right).$$

Observe que esses gráficos contínuos dividem $\mathbb{R}^2$ em três regiões, em cada uma das quais F tem sinal constante. Seja

$$s_0 := \arg \max \left(g^{-1} \left(\frac{1}{f(s)} \right) \right).$$

Se $y_1 : (-\infty, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (4.25) com $y(s_0) = g^{-1} \left(\frac{1}{f(s_0)} \right)$, então $y_1(s) \leq y_1(s_0)$ para todo $s \in (-\infty, s_0]$. Ao mesmo tempo, qualquer solução $y_2 : (-\infty, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$ de (4.25) tal que

$$-g^{-1} \left(\frac{1}{f(s_0)} \right) < y_2(s_0) < g^{-1} \left(\frac{1}{f(s_0)} \right)$$

satisfaz $y_2(s) \geq y(s_0)$ para todo $s \in (-\infty, s_0]$. Então

$$y_2(s_0) \leq y_2(s) < y_1(s) \leq y_1(s_0).$$

O argumento mostra, de fato, que tanto y_1 quanto y_2 são limitadas em $(-\infty, s_0]$. $\square$

Especializando a discussão para a nossa equação (4.23) e usando o Teorema de Massera, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.2. *Qualquer curva fechada e convexa $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{-1}$ admite um α -involutóide fechado único associado, para cada $\alpha \in (0, \pi/2)$ fixado.*

Como consequência, todos os α -involutóides não fechados de curvas fechadas e convexas em $\mathbb{M}_{-1}$ são não limitados (quando $s \rightarrow +\infty$) e assintóticos (quando $s \rightarrow -\infty$) à curva original. As soluções eventualmente negativas de (4.23) dão origem a involutoides singulares, cujas singularidades ocorrem exatamente quando $\lambda(s) = 0$ e estão relacionadas às chamadas *frentes de onda*.

Recorde que a convexidade em $\mathbb{M}_{-1}$ significa $\kappa(s) > 1$ para todo s , mas a equação (4.23) admite soluções exigindo apenas positividade e limitação de κ . Assim, qualquer curva fechada *no plano ou no espaço hiperbólico* com curvatura estritamente positiva possui um α -involutoide fechado suave associado, para todo $\alpha \in (0, \pi/2)$.

É interessante observar o que ocorre no caso esférico $\mathbb{M}_1$. A equação (4.23) torna-se

$$\lambda'(s) = \cot(\alpha)\kappa(s)|\sin(\lambda(s))| - 1. \quad (4.26)$$

Dependendo da imagem de $\kappa = \kappa(s)$, podemos não ser capazes de calcular g^{-1} . Consequentemente, as condições de Massera não são garantidas, como mostraremos no próximo exemplo.

Exemplo 4.3.1. Se $c = 1$, as soluções não constantes λ de (4.23) são:

a) Se $\sin(\lambda) > 0$, então

$$s + K = \begin{cases} -\frac{1}{B} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) - A - B}{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) - A + B} \right|, & \text{se } A > 1, \\ \frac{2}{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) - 1}, & \text{se } A = 1, \\ -\frac{2}{B} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) - A}{B}\right), & \text{se } A < 1. \end{cases}$$

b) Se $\sin(\lambda) < 0$, então

$$s + K = \begin{cases} -\frac{1}{B} \ln \left| \frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) + A - B}{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) + A + B} \right|, & \text{se } A > 1, \\ \frac{2}{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 1}, & \text{se } A = 1, \\ -\frac{2}{B} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) + A}{B}\right), & \text{se } A < 1. \end{cases}$$

onde K é constante, $A = \cot(\alpha)k_0$ e $B = \sqrt{A^2 - 1}$. Para soluções constantes $\lambda(s) = \lambda_0$, a equação (4.23) reduz-se a

$$\sin(\lambda_0) = \pm \frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}.$$

Observe que tais soluções existem apenas quando $\kappa_0 \geq \tan(\alpha)$ e são dadas por:

a) Se $\sin(\lambda_0) = \frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}$,

$$\lambda_0 = \arcsin\left(\frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}\right) + 2n\pi \quad \text{ou} \quad \lambda_0 = \pi - \arcsin\left(\frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}\right) + 2n\pi,$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

b) Se $\sin(\lambda_0) = -\frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}$,

$$\lambda_0 = \pi + \arcsin\left(\frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}\right) + 2n\pi \quad \text{ou} \quad \lambda_0 = 2\pi - \arcsin\left(\frac{\tan(\alpha)}{\kappa_0}\right) + 2n\pi,$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Na seguinte seção, mostraremos uma caracterização para os evolutóides.

4.4 Evolutóides e frentes de onda

Nesta seção, abordaremos o estudo dos evolutóides como o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda. Fisicamente, esses objetos aparecem quando há propagação de ondas em meios líquidos contidos em recipientes sujeitos à vibração. Um tratamento deste objeto no caso plano pode ser encontrado em [7].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}_c$ tal que $c = -1, 1$, uma curva suave, convexa e fechada. A frente de onda de γ na direção $\mathbf{v}_\alpha(s) = \cos(\alpha)\mathbf{t}(s) + \sin(\alpha)\mathbf{e}(s)$ é a curva $\sigma : I \rightarrow \mathbb{M}_c$ ortogonal à geodésica que passa por $\gamma(s)$ na direção $\mathbf{v}_\alpha(s)$. Esta noção generaliza naturalmente a dada por [21]. Podemos expressar $\sigma(s)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \exp_{\gamma(s)}^c(r(s)\mathbf{v}_\alpha) \\ &= \cos_c(r(s))\gamma(s) + \sin_c(r(s))\mathbf{v}_\alpha \end{aligned} \tag{4.27}$$

para alguma $r = r(s)$ que satisfaz à condição $\langle \sigma'(s), \mathbf{v}_\alpha^p \rangle_c = 0$. em que $\mathbf{v}_\alpha^p$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha^p(s) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{r(s)} \exp_{\gamma(s)}^c(t\mathbf{v}_\alpha(s)) \\ &= -c \sin_c(r(s))\gamma(s) + \cos_c(r(s))\mathbf{v}_\alpha(s) \end{aligned} \tag{4.28}$$

A partir disso, segue o seguinte lema:

Lema 4.4.1. A frente de onda de uma curva suave, parametrizada pelo comprimento de arco, convexa $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}_c$ na direção $\mathbf{v}_\alpha(s)$ é dada por

$$\sigma(s) = \exp_{\gamma(s)}^c(r(s)\mathbf{v}_\alpha(s)) \quad (4.29)$$

em que $r(s) = C_0 - sa$.

Demonstração. De fato, seja

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha^p(s) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{r(s)} \exp_{\gamma(s)}^c(t\mathbf{v}_\alpha(s)) \\ &= -c \sin_c(r(s))\gamma(s) + \cos_c(r(s))\mathbf{v}_\alpha(s) \end{aligned} \quad (4.30)$$

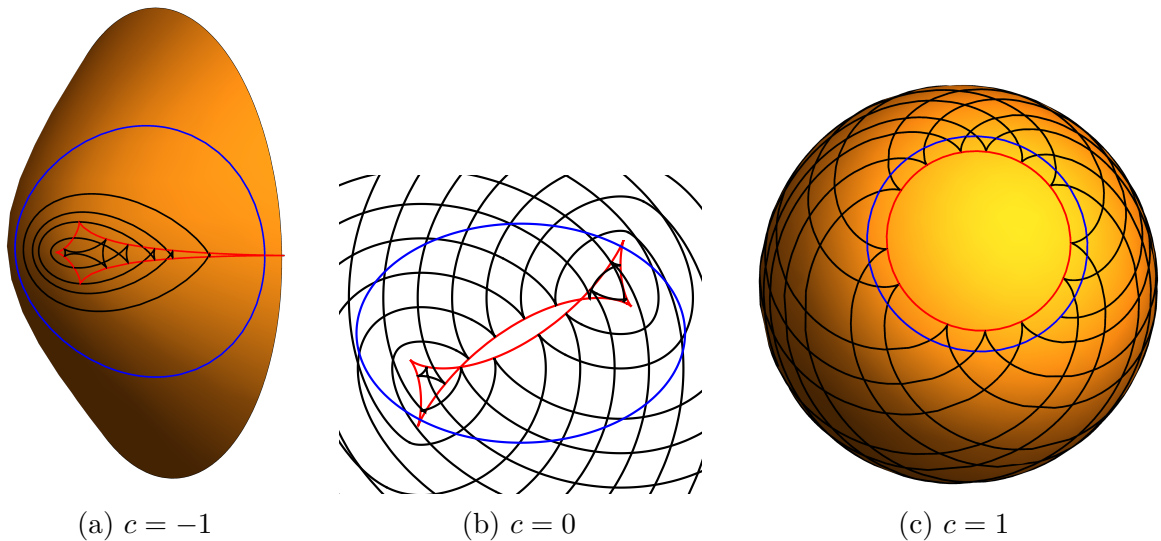
Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \sigma'(s), \mathbf{v}_\alpha^p(s) \rangle_c &= \langle (-c \sin_c(r(s))(r'(s) + a))\gamma(s) + (\cos_c(r(s))(1 + ar'(s)) - \kappa(s)b \sin_c(r(s)))\mathbf{t}(s) \\ &\quad + (a\kappa(s) \sin_c(r(s)) + br'(s) \cos_c(r(s)))\mathbf{e}(s), c \sin_c(r(s))\gamma(s) + \cos_c(r(s))\mathbf{v}_\alpha(s) \rangle_c \\ &= \sin_c^2(r(s))(r'(s) + a) + \cos_c^2(r(s))(a + a^2r'(s)) + b^2r'(s) \cos_c^2(r(s)) \\ &= \sin_c^2(r(s))(r'(s) + a) + \cos_c^2(r(s))(a + r'(s)(a^2 + b^2)) \\ &= r'(s) + a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, $r'(s) + a = 0$ se e só se $r(s) = C_0 + sa$, para algum C_0 . $\square$

A Figura 10 ilustra as frentes de onda nos três modelos: $\mathbb{M}_{-1}$, $\mathbb{M}_0$ e $\mathbb{M}_1$. A curva original é representada em azul, o evolutóide em vermelho e as frentes de onda em preto.

Figura 10 – Exemplos das frentes de onda



Fonte: [10], 2025.

Apresentaremos uma caracterização para os α -evolutóides, envolvendo as frentes de onda.

Teorema 4.4.1. *Sejam $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}_c$ uma curva convexa e fechada e $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{M}_c$ o α -involutóide. Então o α -evolutóide de γ é o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda de γ na direção $\mathbf{v}_\alpha$.*

Demonstração. Calculando a derivada de σ temos

$$\begin{aligned} \sigma'(s) = & -c \sin_c(r(s))(r'(s) + a)\gamma(s) + (\cos_c(r(s))(1 + ar'(s)) - \kappa(s)b \sin_c(r(s)))\mathbf{t}(s) \\ & + (a\kappa(s) \sin_c(r(s)) + br'(s) \cos_c(r(s)))\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Como $r'(s) + a = 0$ temos

$$\sigma'(s) = b(\cos_c(r(s))b - \kappa(s) \sin_c(r(s)))\mathbf{t}(s) - a(b \cos_c(r(s)) - \kappa(s) \sin_c(r(s)))\mathbf{e}(s).$$

Portanto,

$$\|\sigma'(s)\|_c^2 = (\cos_c(r(s))b - \kappa(s) \sin_c(r(s)))^2$$

Perceba que,

$$\begin{aligned} \|\sigma'(s)\| &= 0 \iff \cos_c(r(s))b - \kappa(s) \sin_c(r(s)) = 0 \\ &\iff \cot_c(r(s)) = \frac{\kappa(s)}{\sin \alpha} \\ &\iff r(s) = \arccos_c\left(\frac{\kappa(s)}{\sin \alpha}\right). \end{aligned}$$

Como encontramos anteriormente $r(s) = C_0 - sa$, temos

$$\cot_c(C_0 - sa) = \frac{\kappa(s)}{b}.$$

Portanto, $r(s) = \rho_\alpha(s)$. □

5 Considerações finais

Nesta dissertação, teve-se como objetivo expandir propriedades dos evolutóides do caso plano para as formas espaciais esférica e hiperbólica. Utilizando a aplicação exponencial, algumas propriedades dos evolutóides em $\mathbb{M}_c$ para $c = -1, 1$ foram provadas, uma vez que o uso dessa aplicação mostrou-se uma estratégia eficaz para que os cálculos se tornassem mais técnicos e precisos.

Obtivemos resultados positivos, como a fórmula para a curvatura geodésica do evolutóide. Ademais, demonstrou-se, por um método distinto daquele utilizado no caso plano, o resultado segundo o qual, se o evolutóide é um círculo, então a curva γ também é um círculo, e vice-versa.

No que se refere à área do evolutóide e à área da curva original, um resultado sobre a comparação de ambas foi obtido por Castro (2013) em [11]. Esperamos que um resultado análogo para as formas espaciais $\mathbb{M}_{-1,1}$ tenha o formato e as características discutidas em nosso trabalho na Seção 4.1, mas depende de investigações futuras. Por outro lado, o resultado relativo à comparação entre o comprimento da curva e o comprimento do evolutóide mostrou-se positivo também no caso $c = -1, 1$. Além disso, caracterizamos os evolutóides como o lugar geométrico dos pontos singulares das frentes de onda. Por fim, esperamos que o estudo abordado sobre os evolutóides em formas espaciais bidimensionais possa ser útil a outros pesquisadores.

Referências

- [1] CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2015. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [13](#) e [14](#).
- [2] CARMO, M. P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. [S.l.:s.n.], 2014. v. 6. 620 p. ISSN 9788583370246. Citado na página [44](#).
- [3] José L Massera. **The existence of periodic solutions of systems of differential equations**. Duke Mathematical Journal, (17):457–475, 1950. Citado na página [48](#).
- [4] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Introduction à la Géométrie Hyperbolique et aux Surfaces de Riemann**. Cassini, 2009. Citado 5 vezes nas páginas [21](#), [24](#), [25](#), [26](#) e [27](#).
- [5] Shyuichi Izumiya, Dong He Pei, Takashi Sano, and Erika Torii. **Evolutes of hyperbolic plane curves**, Acta Mathematica Sinica, 20:543–550, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [33](#) e [38](#).
- [6] C. G. Gibson and C. A. Hobbs. **Simple singularities of space curves**. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 113(2):297–310, 1993. Citado na página [39](#).
- [7] P. J. GIBLIN, J. P. WARDER, **Evolving evolutoids**, American Mathematical Monthly, 2014. Citado 9 vezes nas páginas [10](#), [11](#), [17](#), [18](#), [34](#), [37](#), [38](#), [39](#) e [52](#).
- [8] J. W. BRUCE, P. J. GIBLIN, **Curves and Singularities**, Cambridge Univ. Press, 1992. Nenhuma citação no texto.
- [9] Takashi Nishimura and keita Kitagawa. **Classification of singularities os pedal curves in $\mathbb{S}^2$** , Journal os the Faculty of Education and Human Sciences, Yokohama National University. The ntural sciences, 10:39-55, 2008. Citado na página [37](#).
- [10] A. C. Junior, A. G. Chimenton, M. A. C. Fernandes and M.Salarinoghabi, **Some results on evolutoids of convex curves in 2-dimensional space forms**, 2025. Submetido para publicação. Citado 7 vezes nas páginas [10](#), [32](#), [41](#), [46](#), [47](#), [48](#) e [53](#).
- [11] Jerônimo Castro. **On evolutoids of planar curve plane**, Spring Bases, 2013. Citado 7 vezes nas páginas [10](#), [18](#), [32](#), [41](#), [44](#), [48](#) e [55](#).
- [12] Carlos Escudero, Agustí Reventós, and Gil Solanes. **Focal sets in two dimensional space forms**. Pacific Journal of Mathematics, 2007. Citado na página [33](#).

- [13] Carl B. Boyer and Uta C Merzbach. **A history of mathematics**. John Wiley & Sons, 2011. Citado na página [47](#).
- [14] As, Engin, and Ayhan Sarıoğlu. **On the Bishop curvatures of involute-evolute curve couple in** *Int. J. Phys. Sci* 9.7 (2014): 140-145. Citado na página [47](#).
- [15] Huygens, Christiaan. **Horologium oscillatorium**. 1673. Citado na página [47](#).
- [16] Fuchs, Dmitry. **Evolutes and involutes of spatial curves**. *The American Mathematical Monthly* 120.3 (2013): 217-231. Citado na página [47](#).
- [17] Fukunaga, Tomonori, and Masatomo Takahashi. **Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane**. *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics* 1052 (2014): 1-20. Citado na página [47](#).
- [18] Craizer, Marcos, and Horst Martini. **Involutes of polygons of constant width in Minkowski planes**. *Ars Mathematica Contemporanea*, 2016. Citado na página [47](#).
- [19] Craizer, Marcos. **Iterates of involutes Constant With Curves in the Mikowski Plane**. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 2014. Citado na página [47](#).
- [20] Arnold, Maxim, et al. **Iterating evolutes and involutes**. *Discrete Computational Geometry* 58.1 (2017): 80-143. Citado na página [47](#).
- [21] Nishimura, Takashi. **Hyperplane families creating envelopes**. *Nonlinearity* 35.5 (2022): 2588 Citado na página [52](#).