Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Emerson Alves Batista

Trigonometria em uma Oficina de Usinagem

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Emerson Alves Batista

TRIGONOMETRIA EM UMA OFICINA DE USINAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

B333
2018

Instituto Ciências Exatas e Tecnológicas, Emerson Alves, 1982-
Trigonometria em uma oficina de usinagem : . / Emerson Alves Instituto Ciências Exatas e Tecnológicas. – Florestal, MG, 2018.
ix, 96f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Luís Alberto D'Afonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Trigonometria. 2. Usinagem. I. Universidade Federal de Viçosa. Matemática. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

516.24

Emerson Alves Batista

TRIGONOMETRIA EM UMA OFICINA DE USINAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Aprovada: 30 de agosto de 2018.

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Carlos Magno Martins Cosme

Luis Alberto D'Afonseca
(Orientador)

Dedicatória

Dedico esse trabalho à todos que de uma forma ou outra cooperaram para minha formação humana e acadêmica. Dedico a meus pais, Osmar e Terezinha, meus irmãos: Carlos, Luiz e Patrícia, minha querida esposa Pollyanna e a meus amados filhos Sophia e João Pedro que em inúmeros momentos que sentei para escrever a dissertação tive que fazê-la com ambos no colo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus que está a meu lado em todos os momentos da minha vida, guiando meus passos e abençoando minha vida. Aos meus pais Osmar Eustáquio Batista e Terezinha de Jesus Alves Batista que mesmo com todas as dificuldades me dedicaram todo o amor e sempre foram referências para meus irmãos e eu. A meus queridos irmãos companheiros em todos os momentos. A minha amada esposa Pollyanna que esteve, literalmente, a meu lado durante todo esse período do PROFMAT e, é claro a meus filhos que sempre que alguma dificuldade aparecia, sorriam e me faziam lembrar o que realmente importa na vida. Agradeço também a meus amigos do PROFMAT que tornaram essa jornada um pouco mais tranquila, verdadeiros companheiros de "batalha" e, é claro a todos os professores: Alexandre, Elisangela "in memorian", Justino, Luis Felipe, Luis D'Afonseca, Mehran que com toda a dedicação e comprometimento nos auxiliaram nos estudos e, as vezes, até em nossa vida pessoal. A todos os meus sinceros agradecimentos.

Resumo

BATISTA, Emerson Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2018. **Trigonometria em uma Oficina de Usinagem**. Orientador: Luis Alberto D'Afonseca.

Este trabalho apresenta aplicações dos conceitos trigonométricos dentro de uma oficina de usinagem mecânica. Iniciaremos apresentando uma breve história da trigonometria. Em seguida faremos uma análise das principais habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (Ensino Fundamental) e também da matriz curricular de uma importante Rede de Ensino do Estado de Minas Gerais para que possamos entender como esse conteúdo é trabalhado em cada ano escolar. Também traremos as principais definições, propriedades e teoremas necessários para uma melhor compreensão das aplicações desse objeto de aprendizagem. Descreveremos alguns equipamentos utilizados em oficinas de usinagem e algumas aplicações da trigonometria dentro dessas. Apresentaremos a Régua e a Mesa de Seno, dois dispositivos Mecânicos que possuem inúmeras aplicações dentro de uma oficina de usinagem mecânica, e também alguns dispositivos que os auxiliam em suas aplicações. Alguns modelos de planos de aula serão apresentados, com atividades que podem ser desenvolvidas na Educação Básica e cuja finalidade é mostrar algumas aplicações da Mesa de Seno para aplicar o conhecimento dos conceitos de trigonometria. Finalizaremos o trabalho propondo a construção de uma Mesa de Seno para que a mesma possa ser aplicada em atividades práticas sendo, dessa forma, uma ferramenta que auxilie os professores do Ensino Básico a apresentarem a Trigonometria como um objeto de aprendizagem que possui suas aplicações práticas.

Abstract

BATISTA, Emerson Alves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2018. **Trigonometry in a Machining Workshop**. Adviser: Luis Alberto D'Afonseca.

This work presents applications of the trigonometric concepts within a mechanical machining workshop. We will start by presenting a brief history of trigonometry. Then we will analyze the main skills proposed by the National Curricular Common Core and the curricular matrix of an important Education Network of the State of Minas Gerais so that we can understand how this content is worked out in each school year. We will also bring the main definitions, properties and theorems necessary for a better understanding of the applications of this learning object. We will describe some equipment used in machining workshops and some trigonometry applications within these. We will present the Sine and the Sine Table, two mechanical devices that have numerous applications inside a machine shop mechanics, and also some devices that aid them in their applications. Some models of lesson plans will be presented, with activities that can be developed in Basic Education and whose purpose is to show some applications of the Sine Table to apply the knowledge of the concepts of trigonometry. We will finish the work by proposing the construction of a Sine Table so that it can be applied in practical activities and, therefore, a tool that helps the teachers of Basic Education to present Trigonometry as an object of learning that has its practical applications.

Lista de Figuras

Sumário

1

Introdução

A Matemática é uma ciência que está presente em todos os campos do conhecimento e, ainda assim, muitos não conseguem visualizar algumas de suas aplicações no "mundo real". Este trabalho visa mostrar algumas aplicações da trigonometria utilizando como exemplos alguns processos de fabricação mecânica e, principalmente, através do princípio de funcionamento de um dispositivo chamado Mesa de Seno que é utilizado na mecânica de usinagem e que pode ser usado para o ensino de alguns conceitos trigonométricos na educação básica.

A proposta de nosso trabalho é descrever a Mesa de Seno e seu uso em uma oficina de usinagem, ilustrando assim, o emprego da trigonometria em uma situação real. Além disso propomos a construção de um protótipo que possa ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem. Esse protótipo pode ser usado tanto no ensino de Matemática como de outras áreas do conhecimento, uma vez que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular [11] as escolas devem

> "[...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica da equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem [...]"

Para consolidar o estudo da trigonometria, saindo do campo teórico e partindo para o campo prático, iremos propor algumas atividades utilizando a Mesa de Seno em diversas situações problemas.

Portanto, no Capítulo 2 faremos uma breve introdução histórica da trigonometria, citando alguns de seus principais nomes e consequentemente suas maiores contribuições para o avanço desse eixo da Matemática ao longo do tempo.

Em seguida, no Capítulo 3, discutiremos o foco dado à Matemática na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) no que tange o Ensino Fundamental, uma vez que, até a data de finalização deste projeto a parte referente ao Ensino Médio ainda estava em discussão pelo Conselho Nacional de Educação (CNE). Descreveremos as cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística) propostas pela BNCC, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, dando um destaque maior à Geometria e também ao eixo Grandezas e Medidas, por serem objetos principais de estudo do nosso trabalho. Neste Capítulo também analisaremos uma Matriz Curricular de uma rede de ensino particular do Estado de Minas Gerais, a fim de, analisar como as habilidades referentes à trigonometria são desenvolvidas e distribuídas ao longo do Ensino Fundamental Anos Finais e no Ensino Médio.

No Capítulo 4 serão definidas e demonstradas algumas relações trigonométricas importantes para a aplicação prática desse trabalho.

O Capítulo 5 será iniciado com uma breve apresentação de uma Oficia de Usinagem Mecânica, apresentaremos algumas de suas principais máquinas mostrando que, em diversos momentos, na fabricação ou medição de peças por elas fabricadas, se faz necessário o cálculo trigonométrico. É neste Capítulo que descreveremos detalhadamente o dispositivo mecânico Mesa de Seno em seus diversos modelos e suas variadas formas de aplicação. Daremos alguns exemplos de utilização dentro de uma oficina mecânica, os cálculos necessários para sua aplicação e os instrumentos que a auxiliam na obtenção de medidas de precisão.

Finalizaremos este trabalho apresentando no Capítulo 6 algumas sugestões de atividades em que a utilização da Mesa de Seno se torna possível, sempre com foco na prática e na interdisciplinaridade como descrito na BNCC [11]

> "Na elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, devem ser enfatizadas as articulações das habilidades com as de outras áreas do conhecimento."

Após as considerações finais desse trabalho, teremos o Apêndice A em que são apresentadas as habilidades propostas pela BNCC que estão diretamente relacionadas ao ensino da Trigonometria e o Apêndice B em que são listadas as habilidades propostas pela Rede SESI de Minas Gerais.

No Apêndice C mostraremos uma forma simples e prática de se construir uma Mesa de Seno. Ela poderá ser utilizada em tarefas práticas em que o uso dos conceitos trigonométricos se fazem presente. Sua utilização poderá ser feita na área da Matemática como em outras áreas do conhecimento.

2

História da Trigonometria

Apresentamos nessa seção uma parte importante da história da trigonometria e exibimos os principais resultados matemáticos com suas demonstrações, uma exposição completa da teoria da trigonometria pode ser encontrada em Asger Aaboe [3], Carl B. Boyer [7] e João Bosco Pitombeira [21].

Figura 2.1: Papiro-Rhind: Documento Egípcio datado de aproximadamente três mil anos.

2.1 Primordios da Trigonometria

Trigonometria (do grego trigonon + metria) significa o estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos [15]. A trigonometria é usada em várias áreas do conhecimento como Engenharias, Física, Astronomia, Navegação, entre outras. Sua origem é incerta, entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegação, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. Encontram-se problemas envolvendo cotangente no Papiro Rhind (Figura 2.1), um documento egípcio que data de aproximadamente três mil anos, e também uma notável tabela de secantes na tábula Cuneiforme babilônica

Plimpton 322 – datada entre 1900 e 1600 a.C. [3].

Conforme descreve Carl B. Boyer [7], no livro *Os Elementos* de Euclides de Alexandria, não há trigonometria no sentido estrito, mas há teoremas equivalentes a leis e fórmulas trigonométricas específicas, como por exemplo as lei dos cossenos e a lei dos senos, utilizando apenas geometria. Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., foi quem recebeu o título de Pai da Trigonometria, isso devido a apresentação de um tratado com cerca de 12 volumes nos quais descrevia a trigonometria com todo o aprofundamento e rigor necessário. A maior parte do que conhecemos sobre ele é devido a Ptolomeu (cientista, astrônomo e geógrafo de origem grega, autor dos estudos de astronomia mais importantes produzidos antes de Copérnico e Galileu) o qual cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia. Hiparco é considerado o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas tendo, para isso, usado uma tabela de cordas por ele calculada. Para construir tais tabelas, ele necessitava de uma medida de inclinações ou de ângulos.

Até *Os Elementos* de Euclides, os ângulos eram medidos por múltiplos ou submúltiplos do ângulo reto. Anos depois, astrônomos gregos passaram a utilizar o sistema sexagesimal dos babilônios que divide a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau. Cada grau por sua vez é dividido em 60 minutos e cada minuto dividido em 60 segundos [21].

Os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo: dado o ângulo $\alpha = \angle AOC$, o dobro de α é o ângulo $\angle AOB$, que subtende o arco AB. A corda do arco duplo AB será o segmento AB. A Figura 2.2 ilustra o ângulo α e o arco duplo AOC.

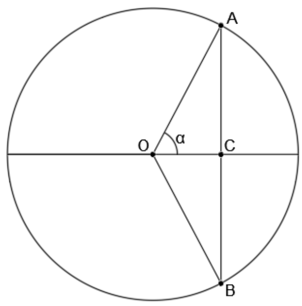


Figura 2.2: Arco Duplo.

Segundo Aaboe [3], o ápice da trigonometria grega ocorreu com Cláudius Ptolomeu cujo principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar aproximadamente sua vida em 78 anos, pois nele Ptolomeu faz referências a fatos astronômicos importantes em que suas datas são conhecidas [21]. O Almagesto descreve matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo a Terra em seu centro. A trigonometria é descrita por Ptolomeu nos Capítulos 10 e 11 de sua obra, sendo que, o Capítulo 11 é uma tabela de cordas (Senos). Ptolomeu utilizou essa tabela de cordas para resolver diversos problemas, como o de calcular o comprimento de uma sombra a partir da inclinação do Sol e outros problemas de astronomia. Para construir tal tabela, Ptolomeu utilizou um Teorema, por ele demonstrado, que descreve que em um quadrilátero qualquer, inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais. Esse teorema é apresentado na Seção 4.4.

Segundo Boyer [7], um outro caso mais útil do Teorema de Ptolomeu é aquele que, em linguagem moderna, utiliza-se para demonstrar as equações trigonométricas de adição e subtração de arcos, como veremos nos Teoremas 4.12 e 4.13 que serão apresentados no Capítulo 4.

2.2 A Trigonometria Europeia do Século XIV

A Matemática se desenvolveu bastante na Europa do século XIV. Pela primeira vez, as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford quanto na Escola de Paris, chegou-se a conclusão de que a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais, como descreve Nielce Lobo da Costa [9].

Ao mesmo tempo em que o desenvolvimento da trigonometria acontecia, ocorreu o desenvolvimento das funções. Nessa área surgiu Nicole Oresme (1323-1382) com seu "*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*", no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis.

Ainda no século XIV, na Inglaterra, Georg von Peuerbach retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos, muito difundida entre os estudiosos europeus [3]. Peuerbach foi o tutor de Regiomontanus (1436-1475), considerado um dos principais matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

A obra *"Tratado sobre triângulos"*, do alemão Johannes Müller von Königsberg, mais conhecido como Regiomontanus, escrita em cinco livros, contém uma formulação completa da trigonometria. Nessa obra ele criou novas tábuas trigonométricas, melhorando a dos Senos já existente e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, incluindo-as em suas tábuas.

Nicolau Copérnico (1473-1543) também deu sua contribuição ao completar alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu "*De Lateribus et Angulis Triangulorum*", que foi publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus no ano de 1542.

O primeiro trabalho impresso em trigonometria foi, provavelmente, a *"Tabula Directionum"* de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data deste ano, em Veneza [3].

Na obra "*Canon Doctrinae Triangulorum*", publicado em Leipzig no ano de 1551, Joachim Rhaeticus define inicialmente as funções trigonométrica como funções do ângulo. Entretanto, ele não as nomeou como seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.

Outra contribuição de Rhaeticus foi quando ele retomou as tábuas de Regiomontanus aumentado sua precisão para onze casas decimais. Ele foi o pioneiro na organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45^0 e completando a tabela com o uso da igualdade

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Rhaeticus também introduziu as secantes na trigonometria europeia e os cálculos do seno de $n\theta$ em termos do seno θ, que foram reestruturados por Jacques Bernoulli no ano de 1702. A fórmula para o cálculo do seno de $n\theta$ está no Capítulo 4.

Viète (1540-1603) foi quem tratou analiticamente a trigonometria. Ele foi o primeiro matemático a utilizar letras na representação dos coeficientes, o que significou um grande progresso no campo da Álgebra. Viète também construiu tábuas trigonométricas e calculou o seno do ângulo de um minuto com treze casas decimais.

Deve-se também a Viète o desenvolvimento inicial e sistemático do cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos, com aproximação de minutos e com a ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Ele também introduziu métodos gerais de resolução em Matemática. Foi dele a ideia de decompor os triângulos oblíquos em triângulos retângulos para a determinação de todas as medidas dos seus lados e ângulos. Em sua obra *"Variovum de rebus mathematicis"* pode-se ver um equivalente a nossa lei das tangentes

$$\frac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

em que A e B são ângulos e a e b seus respectivos arcos.

Em 1595, Pitiscus publicou um tratado no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus. Pela primeira vez o termo trigonometria aparece como título de um de seus livros.

Podemos destacar também o britânico Napier, que estabeleceu regras para triângulos esféricos, que foram amplamente aceitas, enquanto sua maior contribuição, os logaritmos, ainda estavam sendo analisados e não eram reconhecidos como válidos por todos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas postumamente no *"Napier Analogies"*, do *"Constructio"* no ano de 1619, em Edinburgh [3]. Posteriormente a criação dos logaritmos, Napier (1950-1617) mostrou que a Trigonometria desenvolvida por Regiomantanus era bem semelhante da utilizada hoje em dia.

Uma outra importante contribuição foi dada por John Wallis (1616-1703) ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções, por trabalhar séries infinitas.

Paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados na geometria do movimento, Isaac Newton (1642-1727) contribuiu à trigonometria, tendo trabalhado com séries infinitas e expandido $\operatorname{arcsen} x$ em séries e, por reversão, deduzido a série para $\operatorname{sen} x$. Também desenvolveu a fórmula geral para $\operatorname{sen}(nx)$ e $\cos(nx)$ tendo, dessa forma, aberto a perspectiva para o $\operatorname{sen} x$ e o $\cos x$ surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros.

Para finalizar, vale ressaltar que Thomas-Fanten de Lagny, em 1710, foi o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas.

2.3 Trigonometria e a Análise Matemática

Em 1748, Leonard Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como até então era feito. A mudança das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, se impulsionou novamente com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII.

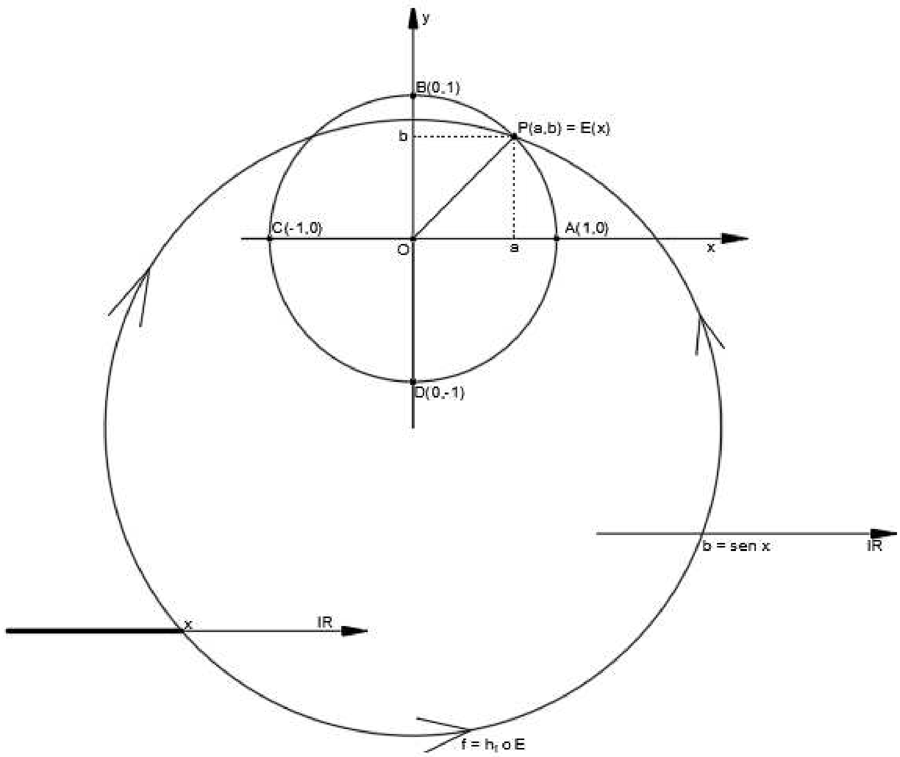


Figura 2.3: Associação entre um Número Real e seu Seno através do Ponto Correspondente no Ciclo.

No livro *"A Matemática do Ensino Médio – Volume 1"* [16] a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow \lambda$ é comparada com um processo de enrolar a reta, identificada como um fio inextensível, sobre a circunferência λ (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1{,}0) \in \lambda$.

Uma propriedade importante da função de Euler é a sua periodicidade. Funções periódicas são aquelas nas quais os valores da função se repetem para determinados valores da variável x,

$$f(x + T) = f(x)$$

ou seja, para cada período, T, iremos obter valores repetidos para a função.

Alguns fenômenos naturais periódicos como o movimento planetário, vibração das cordas, oscilações de um pêndulo, dentre outros, são descritos através das funções periódicas.

A obra *"Introduction in Analysin Infinitorum"*, um trabalho de dois volumes de Leonhard Euler e datado do ano de 1748 trata de forma analítica as funções trigonométricas e é considerado o livro chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, como ilustrado pela Figura 2.3, ou o número definido pela série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Euler mostrou que

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

em que i é a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.

Portanto, a trigonometria tornou-se autônoma e transformou-se em uma parte da Análise Matemática expressando relações entre números complexos sem a necessidade de recorrer a arcos ou ângulos.

Enfim, neste pequeno texto sobre a História da Trigonometria, descrevemos de forma sucinta parte do desenvolvimento dessa área de extrema importância para o desenvolvimento científico.

3

Trigonometria no Ensino Básico

Neste capítulo descreveremos as competências e habilidades propostas pela recém aprovada Base Nacional Comum Curricular sobre a aprendizagem da trigonometria. Além de uma detalhada descrição dessas habilidades e competências propostas pela BNCC, também mostraremos alguns pontos da Matriz Curricular de Matemática da Rede SESI em Minas Gerais, a fim de, verificarmos como os conteúdos necessários para o aprendizado de Trigonometria são propostos a cada série de estudo dos Ensinos Fundamental e Médio dessa importante Rede que tem, dentre outros, sua história baseada na formação para o mundo do trabalho. A lista com os principais tópicos descritos pela BNCC e que estão intimamente relacionados ao estudo da trigonometria no Ensino Fundamental Anos Finais está no Apêndice A e o Apêndice B trás trechos da Matriz Curricular da Rede SESI, também relacionados aos estudo da Trigonometria.

3.1 A Base Nacional Comum Curricular

Conforme elaborado pelo Ministério da Educação, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[11] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996 [?]) também define que, a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil.

A BNCC é toda elaborada com foco no desenvolvimento de habilidades e competências, que ela mesma descreve como sendo a mobilização de conhecimentos (conceitos procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Ela também propõe a superação da fragmentação radicalmente disciplinar do conhecimento, o estímulo à sua aplicação na vida real, a importância do contexto para dar sentido ao que se aprende. É nesse aspecto que se torna importante apresentar aos alunos aplicações práticas de conceitos matemáticos estudados no ensino básico, sempre que possível.

De acordo com a BNCC [11] também se torna importante contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas.

A princípio a Base Nacional Comum Curricular detalha apenas duas etapas da Educação Básica (a Educação Infantil e o Ensino Fundamental), pois, o documento referente ao Ensino Médio ainda não foi aprovado (Texto BNCC, 2018, pag. 21).

> "Durante o processo de elaboração da versão da BNCC encaminhada para apreciação do CNE em 6 de abril de 2017, a estrutura do Ensino Médio foi significativamente alterada por força da Medida Provisória nº 446, de 22 de setembro de 2016, posteriormente convertida na Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Em virtude da magnitude dessa mudança, e tendo em vista não adiar a discussão e a aprovação da BNCC para a Educação Infantil e para o Ensino Fundamental, o Ministério da Educação decidiu postergar a elaboração – e posterior envio ao CNE – do documento relativo ao Ensino Médio, que se assentará sobre os mesmos princípios legais e pedagógicos inscritos neste documento, respeitando-se as especificidades dessa etapa e de seu alunado."

O Ensino Fundamental, "a fim de favorecer a comunicação entre os conhecimentos e os saberes dos diferentes componentes curriculares" (Brasil, 2010), está organizado em cinco áreas do conhecimento: Linguagens, Ciência da Natureza, Ciências Humanas, Ensino Religioso e Matemática.

Na Seção 4.2 a BNCC inicia suas considerações sobre a área da Matemática o que é descrito por ela, na página 263, como

> "[...] o conhecimento necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais[...]"

É necessário ressaltar a importância de se considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

No que se refere a sua aplicação no Ensino Fundamental, a Matemática deve ter o compromisso com o desenvolvimento do *letramento matemático* [11], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de maneira a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação de resolução de problemas em uma variedade de contextos. A análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e, inclusive da Matemática, contribuem para o desenvolvimento dessas habilidades. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem são exemplos de atividade matemática.

Devido a esses pressupostos a área da Matemática e, consequentemente o componente curricular de Matemática deve garantir aos alunos o desenvolvimento das competências específicas, listadas a seguir:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Para garantir essas competências, a BNCC propõe cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística), correlacionadas, que orientam a formulação das habilidades ao longo do Ensino Fundamental, onde, cada uma delas poderá receber ênfase diferente, de acordo com o ano de escolarização.

3.2 Matriz Curricular SESI

Nesta seção iremos fazer uma análise comparando a Matriz Curricular de Matemática da Rede SESI de Minas Gerais com o conjunto de habilidades propostas pela BNCC. O principal objetivo desse comparativo é verificar os anos escolares em que a trigonometria é trabalhada no Ensino Básico e a escolha da Matriz da Rede SESI é porque essa escola está diretamente ligada a indústria e um de seus principais objetivos e capacitar para o mercado de trabalho.

As Matrizes Curriculares dessa instituição [24, 25] descrevem que o Ensino Fundamental oferecido pela Rede SESI MG de Educação estrutura-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais, bem como na LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação, enfatizando o crescimento integral dos alunos, o protagonismo destes em relação à construção do conhecimento, o desenvolvimento das competências e habilidades, situando-os em uma sociedade em constantes mudanças culturais, sociais, econômicas e tecnológicas, a fim de que tenham um papel ativo na sua transformação.

A lista das habilidades e competências da Matriz aqui analisada está no Apêndice B dessa dissertação.

A primeira diferença entre a BNCC e a Matriz analisada está na divisão das unidades Temáticas. Enquanto a BNCC divide todo o conteúdo de Matemática do Ensino Básico em 5 Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, a Matriz divide esse conteúdo em quatro unidades: Números e Operações, Álgebra e Funções, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. A nomenclatura utilizada também é um pouco diferente da proposta pela BNCC, mas o conjunto de Habilidades de cada Unidade proposta é bastante semelhante.

Iniciando nossa análise pelo sexto ano do Ensino Fundamental, podemos verificar que ambos os documentos propõe o ensino das noções básicas de polígonos (classificação quanto ao número de lados, ângulos formados entre suas aresta, noções de perímetro e área) e também os problemas envolvendo medidas de comprimento.

No sétimo ano, a Matriz da Rede analisada visa o aprofundamento dos conceitos estudados no sexto ano, pois ela desenvolve o processo de ensino-aprendizagem em formato espiral. Esse é caracterizado pelo processo de sempre se retornar ao conteúdo e em todos esses momentos, novos conceitos são estudados. Já a BNCC propõe construções com régua e compasso, inclusive de triângulos, com o intuito de que o aluno possa desenvolver as ideias da condição de existência de um triângulo, inclusive verificar quanto é a soma dos ângulos internos desse polígono.

O oitavo ano ambos os documentos propõem o estudo da Geometria voltado para as construções geométricas com régua e compasso. A BNCC também sugere a utilização de recursos digitais para esse ensino. Na Rede SESI é nesse ano escolar que se trabalha os conceitos de semelhança entre polígonos e é dada uma introdução ao conceito de Lugar Geométrico. É nesse ano escolar que se trabalha o Teorema de

Pitágoras e o Teorema de Tales é introduzido no final desse ano escolar.

O estudo da Geometria é bem extenso no nono ano. A matriz Curricular da escola analisada propõe o aprofundamento do estudo de Perímetro, Área e Semelhança de Figuras Planas, além de desenvolver o estudo de Congruência, das Relações Métricas no Triângulo Retângulo e das Relações Trigonométricas nos Triângulos. A BNCC considera que, no nono ano do Ensino Fundamental, todas as escolas do país devem garantir o ensino dos objetos de aprendizagem: Semelhança de Triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e o Teorema da Proporcionalidade de Segmentos.

Como até a presente data a BNCC do Ensino Médio não foi aprovada, não é possível analisar os conteúdos propostos para esse segmento. Entretanto, no que diz respeito aos conceitos trigonométricos estudados no Ensino Médio pelos alunos da Rede SESI, todo ele se concentra no 2º ano do Ensino Médio. Nesse ano escolar é estudado com um maior detalhamento as relações métricas no triângulo retângulo, as relações trigonométricas em triângulos quaisquer, as funções trigonométricas e os teoremas de soma e subtração de arcos.

4

Definições e Relações Trigonométricas

Neste capítulo descreveremos algumas definições e relações trigonométricas que serão importantes no desenvolvimento das atividades propostas no final deste trabalho e, é claro, para o entendimento do princípio de funcionamento da Mesa de Seno. Como já visto no Capítulo 1, a trigonometria tem um papel fundamental no desenvolvimento da humanidade e é através dessa perspectiva que desenvolveremos o nosso trabalho para estimular o seu estudo para a solução de problemas práticos e o mais próximo possível da realidade dos alunos. Porém, para que o ensino da trigonometria seja feito de forma que o estudante aprenda sem grandes dificuldades, é necessário que o professor tenha um conhecimento aprofundado do conteúdo que está ensinando, ou seja, a formação continuada e a prática docente são de extrema importância para que se possa ter uma boa aula de matemática, em especial, de trigonometria. Pavannelo [20] descreve:

> "Para que possa levar os estudantes a aprender Matemática, para que se esteja em condições de lhes proporcionar experiências enriquecedoras e significativas com ela, é evidente que o professor precisa de conhecimentos que lhe permitam executar com êxito sua tarefa, dentre os quais não pode deixar de ser mencionado um conhecimento abrangente e profundo dos conteúdos que serão abordados em sala de aula."

A seguir, apresentaremos as relações métricas no triângulo retângulo, o ciclo trigonométrico, relações trigonométricas no triângulo retângulo e as leis do Seno e do Cosseno. Mais informações e detalhes podem ser encontrados em João Lucas Marques Barbosa [5], Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo [10], Rokusaburo Kiyukawa [15] e Gelson Iezzi [14].

4.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A fim de demonstrarmos alguns teoremas importantes, consideraremos conhecidos os principais axiomas, definições e resultados da Geometria Euclidiana. O leitor pode

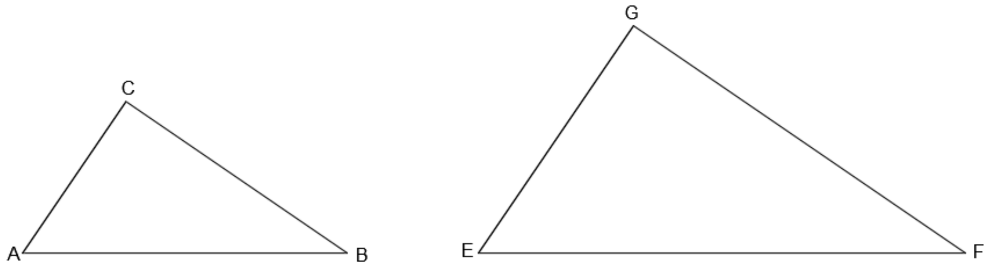


Figura 4.1: Triângulos que possuem ângulos iguais são denominados semelhantes e, dessa forma, seus lados correspondentes são proporcionais.

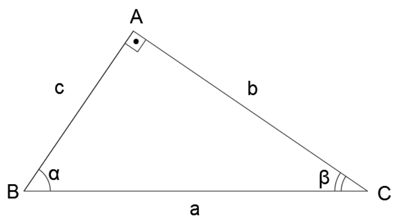
encontrar esses resultados no livro "*Fundamentos da Matemática Elementar*" [10]. Apresentaremos a seguir os resultados diretamente relacionados a trigonometria.

Definição 4.1 (Triângulos Semelhantes): Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e os lados correspondentes sejam proporcionais.

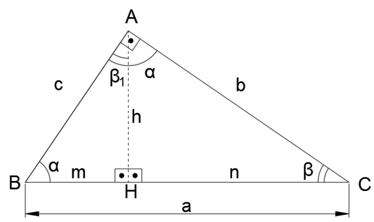
Com isso queremos dizer que, se $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são dois triângulos semelhantes, como mostra a Figura 4.1, e se $A \to E$, $B \to F$ e $C \to G$ é a correspondência que estabelece semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações entre os ângulos e lados do triângulo

$$\hat{A} = \hat{E} \qquad \hat{B} = \hat{F} \qquad \hat{C} = \hat{G} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}$$

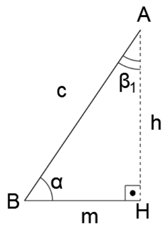
O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de



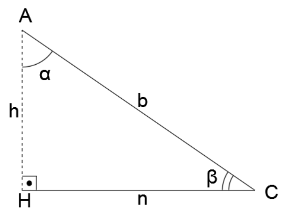
(a) Triângulo Retângulo ABC.



(b) Triângulo ABC reto em A e com altura relativa ao lado BC medindo h.



(c) Triângulo Retângulo ABH.



(d) Triângulo Retângulo ACH.

Figura 4.2: Relações Métricas no Triângulo Retângulo *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

Para que possamos demonstrar as denominadas Relações Métricas no Triângulo Retângulo, considere o triângulo retângulo ABC da Figura 4.2a. Construindo a altura h como na Figura 4.2b podemos observar que

- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Agora, considerando, por exemplo, os triângulos das Figuras 4.2a e 4.2c, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°, têm-se que $\alpha + \beta = 90°$, e, $\alpha + \beta_1 = 90°$, então, $\beta = \beta_1$, analogamente, $\alpha = \alpha_1$ [5]. Assim $\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$. Portanto, analisaremos as relações entre os triângulos ABC e ABH. Dessa forma, a partir das Figuras 4.2a e 4.2c, têm-se que $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

Assim, valem as seguintes proporções

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \tag{4.1}$$

Como resultado obtém-se as relações

$$ah = bc \tag{4.2}$$
$$c^2 = am \tag{4.3}$$
$$bm = ch \tag{4.4}$$

De maneira análoga, analisaremos os triângulos ABH e ACH, mostrados nas Figuras 4.2c e 4.2d, e, desenvolvendo as razões de semelhanças entre eles, obtemos

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \tag{4.5}$$

Desenvolvendo essas razões chega-se as seguintes relações

$$cn = bh \tag{4.6}$$
$$ch = bm \tag{4.7}$$
$$mn = h^2 \tag{4.8}$$

Também podemos analisar os triângulos ABC e HAC mostrados nas Figuras 4.2a e 4.2d, uma vez que também são semelhantes, obtendo as seguintes relações

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \tag{4.9}$$

que desenvolvendo-as, chega-se a

$$an = b^2 \tag{4.10}$$

$$ah = bc \tag{4.11}$$

$$bh = cn \tag{4.12}$$

As Relações Métricas no Triângulo Retângulo que foram apresentadas serão utilizadas nas demonstrações de outros teoremas que apresentaremos e também podem ser utilizadas em algumas aulas práticas que proporemos no Capítulo 7, além disso, todas essas relações supracitadas podem ser enunciadas, a partir da definição de Média proporcional, definida a seguir.

Definição 4.2 (Média Proporcional): Sejam r e s a medida do comprimento de dois segmentos dados. A média proporcional dos comprimentos dos segmentos r e s é o comprimento do segmento x que, com os segmentos dados, forma as seguintes proporções

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{s} \tag{4.13}$$

Dessas proporções segue que

$$x^2 = rs \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{rs} \tag{4.14}$$

A média proporcional de r e s coincide com a média geométrica de r e s.

Portanto, a partir da definição de Média proporcional, podemos enunciar as relações métricas no triângulo retângulo descritas anteriormente

1. Cada cateto é a média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

   $$b^2 = an \qquad\qquad c^2 = am$$

2. A altura relativa à hipotenusa é a média porporcional, ou média geométrica, entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

   $$h^2 = mn$$

3. O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

   $$bc = ah$$

4. O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto

do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$bh = cn \qquad\qquad ch = bm$$

Segundo Kiyukawa [15] algumas relações trigonométricas também importantes são:

$$b^2 = an \tag{4.15}$$

$$c^2 = am \tag{4.16}$$

$$h^2 = mn \tag{4.17}$$

Teorema 4.1 (Teorema da proporcionalidade de segmentos): Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal

- também é dividido em p partes.
- e essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração.

Part 1: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em p partes por retas do feixe.

Se $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), como ilustra a Figura 4.4, pelo menos duas retas do feixe iriam se encontrar em pontos de $\overline{AB}$ (ou de $\overline{A'B'}$), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.

Part 2: $\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a x.

Pelos pontos de divisão de $\overline{A'B'}$, conduzindo paralelas a $\overline{AB}$, obtemos um triângulo para cada divisão, como ilustra a Figura 4.5. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ângulo-lado-ângulo (ALA). Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão. □

Teorema 4.2 (Teorema de Tales): Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes na outra. Na Figura 4.3, se $r /\!/ s /\!/ t$, tem-se que os segmentos CB, BA, $C'B'$ e $B'A'$ são, nesta ordem proporcionais

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{B'A'}} \tag{4.18}$$

Demonstração.

Part 1: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Existe um segmento de comprimento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$$\overline{AB} = px \quad \text{e} \quad \overline{CD} = qx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \tag{4.19}$$

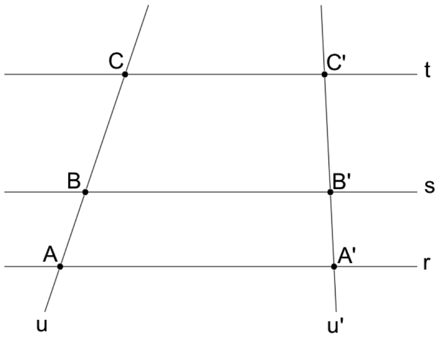


Figura 4.3: As retas paralelas r, s e t cortadas pelas retas transversais u e u'.

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, como ilustra a Figura 4.6, e aplicando o Teorema 4.1, têm-se

$$\overline{A'B'} = px' \quad \text{e} \quad \overline{C'D'} = qx' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \tag{4.20}$$

Portanto, comparando as equações (4.19) e (4.20), concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Part 2: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, ou seja, não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomemos um segmento y submúltiplo de $\overline{CD}$ (y cabe um ceto número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), como ilustra a Figura 4.7, ou seja

$$\overline{CD} = ny \tag{4.21}$$

Marcando sucessivamente y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro de vezes

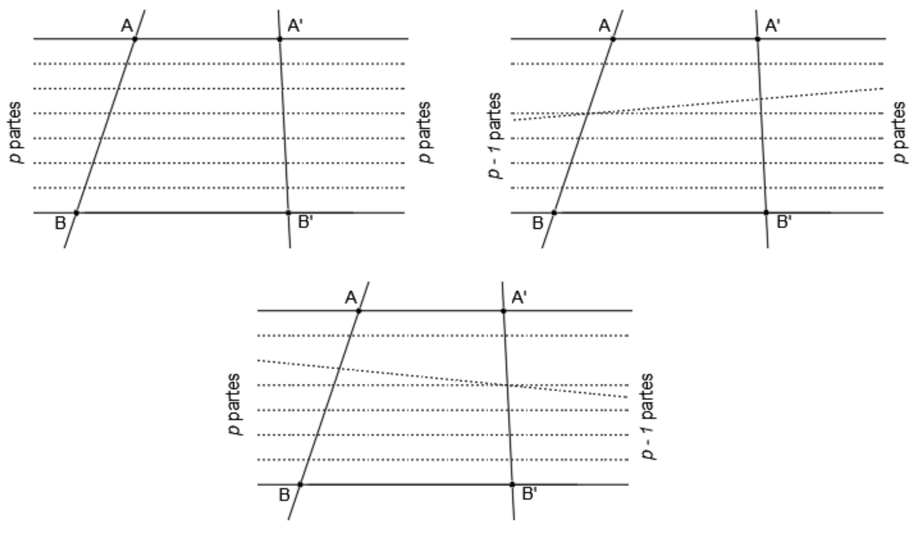


Figura 4.4: Apoio para a demonstração do Teorema 4.1.

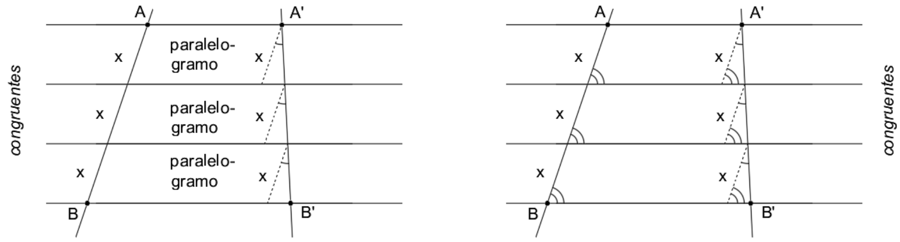


Figura 4.5: Apoio para a demonstração do Teorema 4.1.

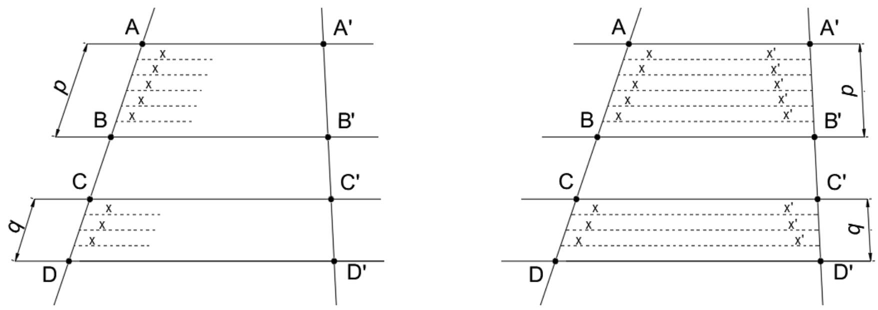


Figura 4.6: Apoio para a demonstração do Teorema 4.2.

m, pela incomensurabilidade de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, temos que

$$my < \overline{AB} < (m+1)y \qquad (4.22)$$

Operando com as relações 4.21 e 4.22, temos

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4.23)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a

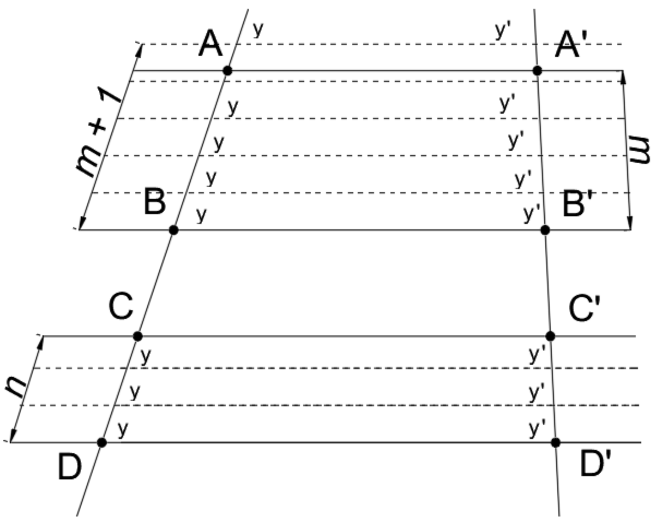


Figura 4.7: Apoio para a demonstração do Teorema de Tales (Teorema 4.2).

propriedade anterior, temos que

$$my' < \overline{A'B'} < (m+1)y' \qquad \text{e} \qquad ny' = \overline{C'D'}$$

operando com essas relações temos

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \tag{4.24}$$

Ora, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos n e nestas condições m/n e $(m+1)/n$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\overline{AB}/\overline{CD}$ pela expressão (4.23), e é $A'B'/C'D'$ pela expressão (4.24). Como esse número é o único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

que demonstra a afirmação do teorema. □

Teorema 4.3 (Teorema de Pitágoras): A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa

$$b^2 + c^2 = a^2 \tag{4.25}$$

Demonstração. Para provar esta relação, consideremos as equações (4.15) e (4.16)

$$b^2 = an \qquad\qquad c^2 = am$$

somando-as, obtemos

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(m+n)$$

como $m + n = a$, temos que

$$b^2 + c^2 = a^2$$

que é a expressão (4.25). □

Como apresentado por Pompeo [10] o recíproco do Teorema de Pitágoras também é válido, como demonstrado a seguir.

Teorema 4.4 (Recíproco do Teorema de Pitágoras): Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Demonstração. Partindo de um triângulo dado ABC, construímos o triângulo MNP, retângulo em M, como mostra a Figura 4.8. Os catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ são,

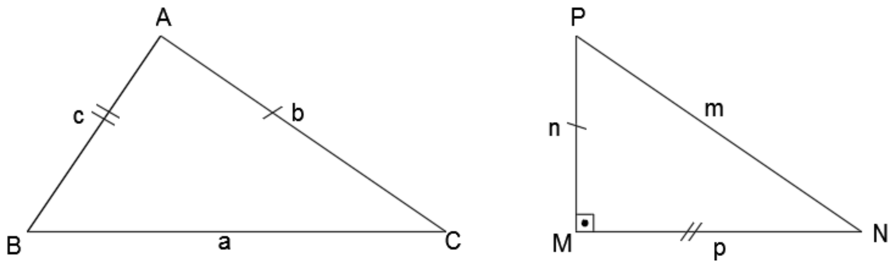


Figura 4.8: Triângulos ABC e MNP utilizados para a demonstração do recíproco do Teorema de Pitágoras.

respectivamente, congruentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e, uma vez que o triângulo MNP é retângulo em M, é válida a igualdade $m^2 = n^2 + p^2$ e como $n = b$ e $p = c$, temos que $m^2 = b^2 + c^2$, e assim $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$. Portanto, pelo caso de congruência LLL (lado, lado, lado), temos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo MNP e, sendo o triângulo MNP retângulo em M, isso implica que o triângulo ABC será retângulo em A. $\square$

Outro teorema importante que expõe a relação entre a medida da mediana relativa a hipotenusa com a medida da hipotenusa é apresentado a seguir.

Teorema 4.5 (Medida da mediana relativa à hipotenusa): Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

Esse fato é ilustrado na Figura 4.9. Apresentaremos a seguir duas demonstrações alternativas desse teorema. A primeira parte da construção de um triângulo retângulo e de suas diagonais e a segunda é feita através de uma circunferência circunscrita a um triângulo retângulo.

Demonstração 1. Demonstrando o teorema a partir da construção do retângulo $ABCD$ e suas diagonais, como ilustrado na Figura 4.10 utilizamos o fato de que as diagonais de um retângulo são congruentes entre si e o ponto comum às duas é o ponto médio de cada uma [10]. Então, uma vez que as diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são iguais e, sendo $\overline{AM} = \overline{AD}/2$, concluímos que $\overline{AM} = \overline{BC}/2$. $\square$

Demonstração 2. Para demonstrarmos o Teorema 4.5 através da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo, consideremos a Figura 4.11. Nela, o ângulo

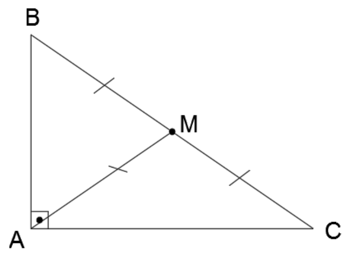


Figura 4.9: Triângulo ABC retângulo em A com M ponto médio da hipotenusa BC.

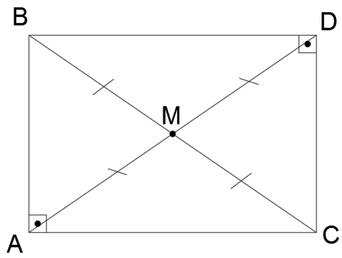


Figura 4.10: As diagonais AD e BC do retângulo $ABCD$ se intersectam no ponto médio M de ambas

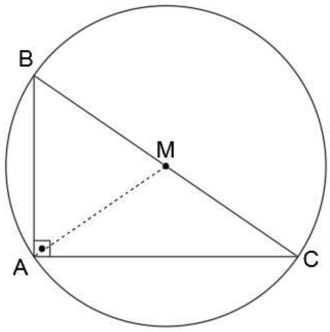
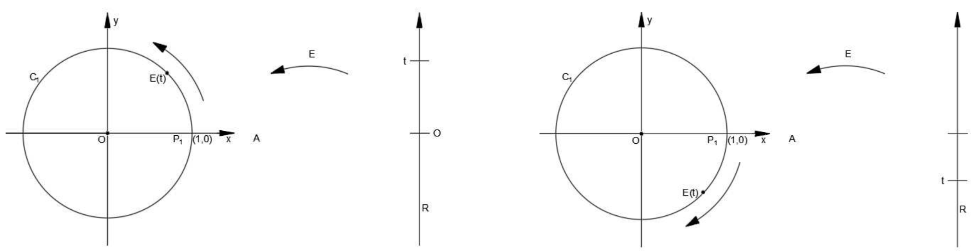


Figura 4.11: Triângulo retângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro M e diâmetro BC.

inscrito na circunferência é reto em A e, dessa forma, o arco BC mede 180°. Então, o segmento $\overline{BC}$ é o diâmetro, e o ponto médio M é o centro da circunferência [10]. Portanto, a medida $\overline{AM}$ é igual ao raio da circunferência, de onde conclui-se que $\overline{AM} = \overline{BC}/2$. $\square$

4.2 O Ciclo Trigonométrico

Para darmos prosseguimento ao nosso estudo em trigonometria, é necessário que façamos referência ao ciclo trigonométrico, que é definido como uma circunferência de raio unitário usada para representar números reais relacionados a ângulos. Dessa forma, cada ponto da circunferência está relacionado a um número real, que, por sua vez, representa um ângulo. Nessa e nas próximas seções utilizaremos radianos como a unidade de medida de ângulos.



(a) Funcao $E(t)$ de Euler crescente.

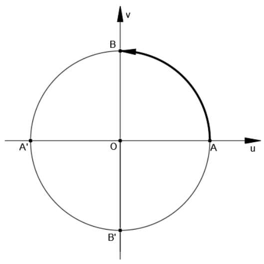
(b) Funcao $E(t)$ de Euler decrescente.

Figura 4.12: Ciclo trigonométrico de raio unitário e origem O.

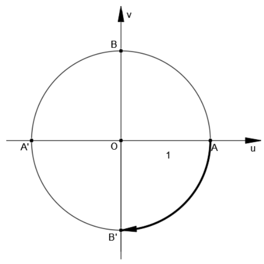
De acordo com Pompeo [10], para que seja definido um ciclo trigonométrico basta que tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal xOy e, daí, consideremos a circunferência λ de centro O e raio $r = 1$, como mostrado nas Figuras 4.12a e 4.12b. Observe que sendo o raio dessa circunferência igual a 1 seu comprimento é 2π rad.

Agora, basta definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre λ, isto é, associar a cada número real t um único ponto P da circunferência λ. A associação do número real t ao ponto $E(t) = (x,y)$ é obtido do seguinte modo:

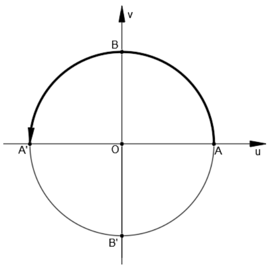
- O zero é levado ao ponto (1,0), isso é, $E(0) = (1,0)$.
- Se $t > 0$, $E(t)$ será o ponto final do caminho de comprimento t percorrido sobre a circunferência λ, a partir do ponto (1,0), no sentido anti-horário, como mostra a Figura 4.12a.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho percorrido sobre λ no sentido horário e que possui o comprimento igual ao módulo de t, como mostra a Figura 4.12b.



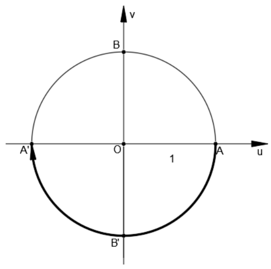
(a) A imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B.



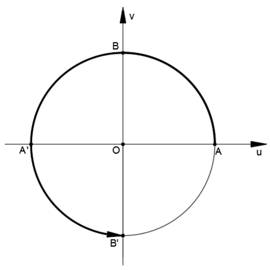
(b) A imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B'.



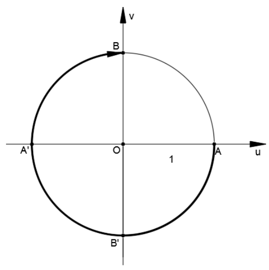
(c) A imagem de π é A'.



(d) A imagem de $-\pi$ é A'.



(e) A imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'.



(f) A imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B.

Figura 4.13: Relacionando um Número Real a um Ângulo.

Essa circunferência, (λ), com origem no ponto P_1 de coordenadas (1,0) é chamada *circunferência trigonométrica* ou *ciclo trigonométrico*. Como descrito em Rokusaburo Kiyukawa no livro *"Os Elos da Matemática"* [15], se P está associado ao número t dizemos que P é a imagem de t no ciclo. A Figura 4.13 ilustra alguns exemplos dessa aplicação.

1. Na Figura 4.13a temos que a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é o ponto B e na Figura 4.13b temos que a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é o ponto B'.

2. Nas Figuras 4.13c e 4.13d temos, respectivamente, que a imagem de π e a de $-\pi$ é A'.

3. Na Figura 4.13e temos que a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B' e na Figura 4.13e a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B.

É também importante observar que se P é a imagem do número x_0, como na Figura 4.14, então P é a imagem dos números x_0, $x_0 \pm 2\pi$, $x_0 \pm 4\pi$, $x_0 \pm 6\pi$, etc. Resumidamente, P é a imagem dos elementos do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} | x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

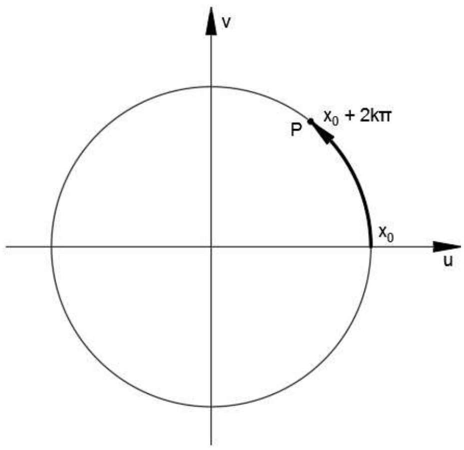


Figura 4.14: Nesta figura temos que P é imagem de $x_0 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

4.3 Funções Circulares

Nessa seção vamos apresentar as definições das funções trigonométricas a partir do círculo definido na seção anterior. Para isso vamos utilizar algumas definições e construções geométricas apresentadas a seguir.

Gelson Iezzi [14], descreve que ao considerarmos o ciclo trigonométrico de origem O, como o ilustrado na Figura 4.15 podemos associar quatro eixos a esse ciclo, sendo eles:

1. O eixo horizontal u é o eixo dos cossenos cujo sentido positivo é da origem O para o ponto A à direita.

2. O eixo v perpendicular a u que passa pela origem O é o eixo dos senos e o sentido positivo vai de O para B.

3. O eixo c que é paralelo a v e passa pelo ponto A é o eixo das tangentes. O sentido positivo desse eixo é o mesmo sentido do eixo v.

4. O eixo d que é paralelo a u e passa pelo ponto B é o eixo das cotangentes. O sentido positivo desse eixo é análogo ao do eixo dos u dos cossenos.

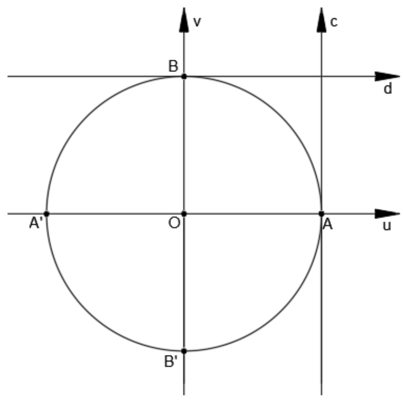


Figura 4.15: Ciclo Trigonométrico de origem O em que os eixos u, d, v e c são, respectivamente, os eixos dos cossenos, senos, tangentes e cotangentes.

Uma vez que os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos ($\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{B'A}$), considerando um número real x, indicaremos, como forma de localização, da imagem P de x no ciclo:

1. x está no 1º quadrante, se, e somente se, o ponto P pertence ao arco AB e isso ocorrerá se, e somente se, $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. x está no 2º quadrante se, e somente se, o ponto P pertence ao arco BA' e isso ocorrerá se, e somente se, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$

3. x está no 3º quadrante se, e somente se, o ponto P pertence ao arco $A'B'$ e isso ocorrerá se, e somente se, $\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

4. x está no 4º quadrante, se, e somente se, o ponto P pertence ao arco $B'A$ e isso ocorrerá se, e somente se, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi$

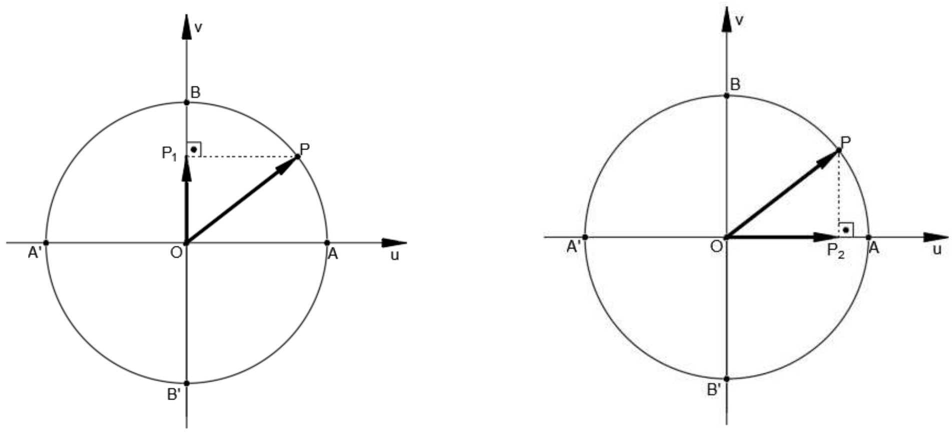
Definição 4.3 (Medida Algébrica de um Segmento): A medida algébrica de um segmento é o número real positivo que corresponde ao comprimento de um segmento orientado.

Definição 4.4 (Função Crescente): Uma função f é dita crescente num intervalo I quando para qualquer par de pontos x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definição 4.5 (Função Periódica): Uma função $f : A \to B$ é periódica se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição

$$f(x+p) = f(x), \qquad \forall x \in A$$

nesse caso, p é nomeado período de f.



(a) A função $\operatorname{sen} x$ é a ordenada P_1 do ponto P em relação ao sistema uOv.

(b) A função $\cos x$ é a abscissa P_2 do ponto P em relação ao sistema uOv.

Figura 4.16: Definição das Funções Seno e Cosseno

4.3.1 Função Seno

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função seno.

Definição 4.6 (Função Seno): Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos seno de x (e indicamos $\operatorname{sen} x$) a ordenada P_1 do ponto P em relação ao sistema uOv, como mostrado na Figura 4.16a. Denominamos *função seno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $P_1 = \operatorname{sen} x$, isto é

$$f(x) = \operatorname{sen} x = P_1$$

Podemos observar que a função seno possui as seguintes propriedades:

1. A imagem da função seno é o intervalo $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

   Justificativa: É imediata pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a $+1$.

2. Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é positivo.

   Justificativa: De fato, neste caso o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

3. Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então, $\operatorname{sen} x$ é negativo.

Justificativa: De fato, neste caso o ponto P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

4. Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então, $\operatorname{sen} x$ é crescente.

   Justificativa: É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\widehat{AB}$ e sua ordenada cresce. O mesmo ocorre no quarto quadrante.

5. Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é decrescente.

   Justificativa: É imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco $\widehat{BA'}$, e sua ordenada decresce. Fato semelhante ocorre no terceiro quadrante.

6. A função seno é periódica e seu período é 2π.

   Justificativa: É fato que, se $\operatorname{sen} x = P_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = P_1$ pois x e $x + 2k\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então que para qualquer x em $\mathbb{R}$

   $$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$$

   e, portanto, a função seno é periódica e seu período é o menor valor positivo de $2k\pi$, ou seja, 2π.

4.3.2 Função Cosseno

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função cosseno.

Definição 4.7 (Função Cosseno): Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos cosseno de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa P_2 do ponto P em relação ao sistema uOv, como mostra a Figura 4.16b. Denominamos *função cosseno* a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $P_2 = \cos x$, isto é

$$f(x) = \cos x = P_2$$

Podemos observar que a função cosseno possui as seguintes propriedades

1. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1{,}1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Justificativa: É imediata pois, se P está no ciclo, sua abscissa pode variar apenas de -1 a $+1$.

2. Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.

   Justificativa: De fato, neste caso o ponto P está a direita do eixo v e sua abscissa é positiva.

3. Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então, $\cos x$ é negativo.

   Justificativa: De fato, neste caso o ponto P está a esquerda do eixo v e sua abscissa é negativa.

4. Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então, $\cos x$ é crescente.

   Justificativa: É imediato que, se x percorre o terceiro quadrante, então P percorre o arco $\widehat{A'B'}$ e sua abscissa cresce. O mesmo ocorre no quarto quadrante.

5. Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.

   Justificativa: É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\widehat{AB}$, e sua abscissa decresce. Fato semelhante ocorre no terceiro quadrante.

6. A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

   Justificativa: É fato que, se $\cos x = P_2$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\cos(x + 2k\pi) = P_2$ pois x e $x + 2k\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, $\forall x \in \mathbb{R}$:

   $$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$$

   e, portanto, a função cosseno é periódica e seu período é o menor valor positivo de $2k\pi$, ou seja, 2π.

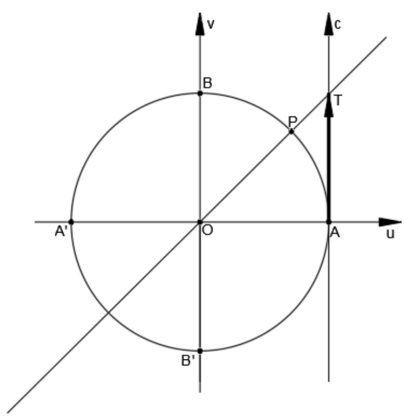
4.3.3 Função Tangente

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função tangente.

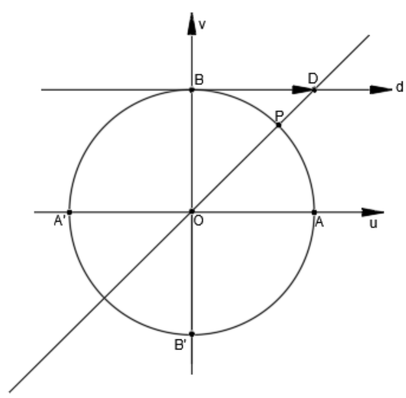
Definição 4.8 (Função Tangente): Dado um número real x, pertencente ao conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq (\pi/2) + k\pi\}$$

e seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ mostrada na Figura 4.17a e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos, *tangente de x* (e



(a) A Tangente de x ($\tan x$) é a intersecção T da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo das tangentes c



(b) A função $\cot x$ é a intersecção D da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo das cotangentes d

Figura 4.17: Definição das Funções Tangente e Cotangente indicamos $\tan x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$. Denominamos *função tangente* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq (\pi/2) + k\pi$, o real $\overline{AT}$

$$f(x) = \tan x = \overline{AT}$$

Observemos que, para $x = (\pi/2) + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, e a $\tan x$ não é definida.

Podemos observar que a função tangente possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq x = (\pi/2) + k\pi\}$.

2. A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real, tal que $\tan x = y$.

   Justificativa: De fato, dado y pertencente ao conjunto dos números reais, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T, tal que o comprimento do segmento AT seja igual a y. Construindo a reta $\overleftrightarrow{OT}$, observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos P e P', imagens dos reais x cuja tangente é y.

3. Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $\tan x$ é positiva.

   Justificativa: De fato, neste caso o ponto T está acima de A e $\overline{AT}$ é positiva.

4. Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $\tan x$ é negativa.

   Justificativa: De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e $\overline{AT}$ é negativa.

5. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\tan x$ é crescente.

   Justificativa: Provemos, por exemplo, quando x percorre o $1^{\underline{o}}$ quadrante. Dados x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$ e, por propriedade de geometria plana, $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$, isto é: $\tan x_1 < \tan x_2$. A demonstração para os outros quadrantes é similar.

6. A função tangente é periódica e seu período é π.

   Justificativa: De fato, se $\tan x = \overline{AT}$ e consideremos k um número inteiro, então $\tan(x + k\pi) = \overline{AT}$, pois x e $x + k\pi$ têm imagens P e P' coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo. Assim, as retas $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OP'}$ são iguais, portanto suas intersecções com o eixo das tangentes c serão iguais. Assim, para todo x pertencente ao conjunto dos números reais e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

   $$\tan x = \tan(x + k\pi)$$

   logo a função tangente é periódica e seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

4.3.4 Função Cotangente

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função cotangente.

Definição 4.9 (Função Cotangente): Dado um número real x pertencente ao conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} |\ x \neq k\pi\}$$

e seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos, *cotangente de* x (e indicamos $\cot x$) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$, como ilustrado na Figura 4.17b. Denominamos *função cotangente* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{BD}$

$$f(x) = \cot x = \overline{BD}$$

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a $\cot x$ não é definida.

Podemos observar que a função cotangente possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi\}$.
2. A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y pertencente ao conjunto dos números reais, existe um único $x \in \mathbb{R}$, tal que, $\cot x = y$.
3. Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $\cot x$ é positiva.
4. Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $\cot x$ é negativa.
5. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\cot x$ é decrescente.
6. A função cotangente é periódica e seu período é π.

4.3.5 Função Secante

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função secante.

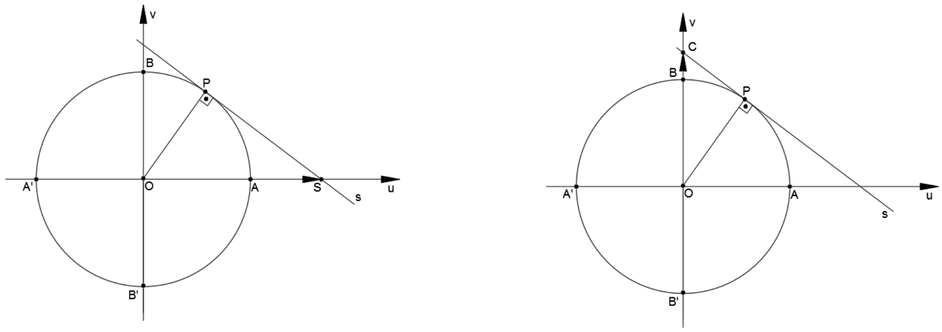
Definição 4.10 (Função Secante): Dado um número real x pertencente ao conjunto

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} |\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$$

e seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos, *secante de* x (e indicamos $\sec x$) a abcissa S do ponto S, como ilustrado na Figura 4.18a. Denominamos *função secante* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq x = (\pi/2) + k\pi$, o real S

$$f(x) = \sec x = S$$

Notemos que, para $x = x = (\pi/2) + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a $\sec x$ não é definida.



(a) A $\sec x$ é a abcissa S da intersecção S da reta s com o eixo dos cossenos (u).

(b) A $\operatorname{cossec} x$ é a ordenada C da intersecção C da reta s com o eixo dos senos (v).

Figura 4.18: Definição das Funções Secante e Cossecante

Podemos observar que a função secante possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.
2. A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$, isto é, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\sec x = y$.
3. Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então $\sec x$ é positiva.
4. Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então $\sec x$ é negativa.
5. Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então $\sec x$ é crescente.
6. Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\sec x$ é decrescente.
7. A função secante é periódica e seu período é 2π.

4.3.6 Função Cossecante

Apresentamos aqui a definição e algumas propriedades da função cossecante.

Definição 4.11 (Função Cossecante): Dado um número real x pertencente ao conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} | \ x \neq k\pi\}$$

e seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos, *cossecante de x* (e indicamos $\operatorname{cossec} x$) a ordenada C do ponto C, como ilustrado na Figura 4.18b.

Denominamos *função cossecante* a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real C

$$f(x) = \operatorname{cossec} x = C$$

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não é definida.

Podemos observar que a função cossecante possui as seguintes propriedades

1. O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi\}$.
2. A imagem da função secante é $\mathbb{R} - (-1, 1)$, isto é, para qualquer $y \in \mathbb{R}$ com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{cossec} x = y$.
3. Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então *cossecx* é positiva.
4. Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é negativa.
5. Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é crescente.
6. Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\operatorname{cossec} x$ é decrescente.
7. A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

4.4 Relações Fundamentais

Uma vez definidas as seis funções circulares

$$\operatorname{sen} x \qquad \cos x \qquad \tan x \qquad \cot x \qquad \sec x \qquad \operatorname{cossec} x$$

mostraremos agora as relações existentes entre eles, relações essas denominadas fundamentais, pois, a partir de cada uma delas é possível calcular as outras cinco.

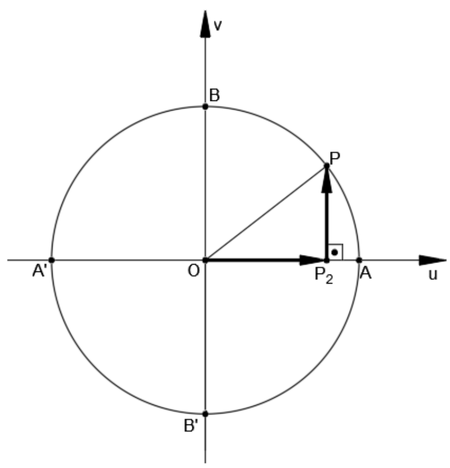


Figura 4.19: A abscissa P_2 é o cosseno do ângulo no ciclo e a ordenada P é o seno do ângulo no ciclo.

Teorema 4.6 (Relação Fundamental da Trigonometria): Para todo x real vale a relação

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Demonstração.

Part 1:

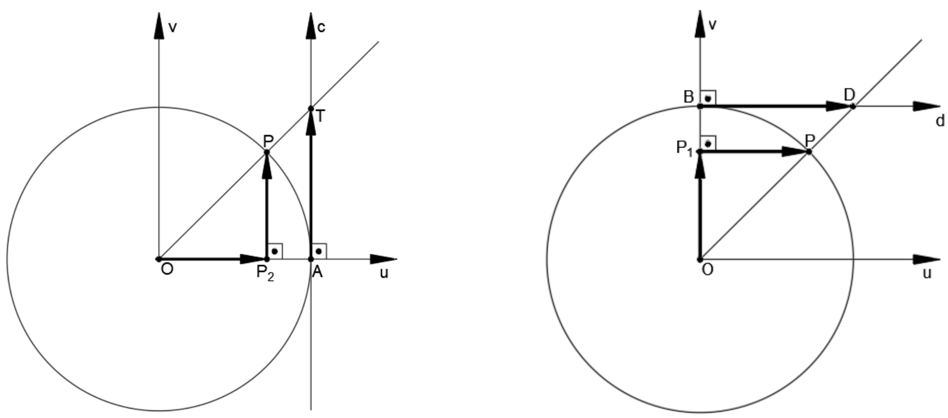
Se $x \neq (k\pi)/2$, a imagem de x é distinta de A, B, A', B', então existe o triângulo OP_2P retângulo, como mostrado na Figura 4.19 e, portanto

$$\left|\overline{OP_2}\right|^2 + \left|\overline{P_2P}\right|^2 = \left|\overline{OP}\right|^2$$

então $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

Part 2:

Sendo $x = (k\pi)/2$ com $k \in \mathbb{Z}$, a sua imagem será o ponto A, B, A' ou B' e, portanto, uma função é zero e a outra vale -1 ou 1. $\square$



(a) Os triângulos OP_2P e OAT são semelhantes pelo caso AA.

(b) Os triângulos OP_1P e OBD são semelhantes pelo caso AA.

Figura 4.20: Figuras de apoio para a demontração dos Teoremas 4.7 e 4.8.

Teorema 4.7: Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Demonstração.

Part 1:

Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A', B', portanto teremos, como ilustrado na Figura 4.20a:

$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P$$

implicando em

$$\frac{\left|\overline{AT}\right|}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{\left|\overline{P_2P}\right|}{\left|\overline{OP_2}\right|}$$

que implica em

$$|\tan x| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\cos x|} \tag{4.26}$$

Utilizando o quadro de sinais

	sinal de $\tan x$	sinal de $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
1^o	$+$	$+$
2^o	$-$	$-$
3^o	$+$	$+$
4^o	$-$	$-$

observamos que o sinal da $\tan x$ é igual ao do quociente $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Portanto, juntando esse fato a equação (4.26) decorre a tese.

Part 2:

Se $x = k\pi$, então a tangente de x é nula. □

Teorema 4.8: Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Demonstração.

Part 1:

Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos, como ilustrado pela Figura 4.20b

$$\triangle OBD \sim \triangle OP_1P$$

implicando em

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{P_1P}|}{|\overline{OP_1}|}$$

que implica em

$$|\cot x| = \frac{|\cos x|}{|\operatorname{sen} x|} \tag{4.27}$$

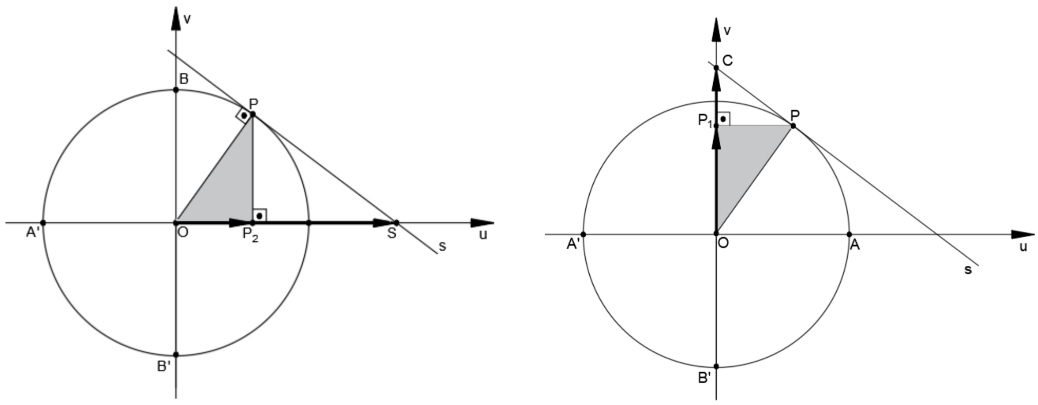
Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de $\cot x$	sinal de $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
1^o	$+$	$+$
2^o	$-$	$-$
3^o	$+$	$+$
4^o	$-$	$-$

observamos que o sinal da $\cot x$ é igual ao sinal do quociente $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Portanto, juntando esse resultado a equação (4.27) comprovasse a tese.

Part 2:

Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos que a cotangente é nula. $\square$



(a) Os triângulos OPS e OP_2P são semelhantes pelo caso AA.

(b) Os triângulos OPC e OP_1P são semelhantes pelo caso AA.

Figura 4.21: Figuras de Apoio para a Demontração dos Teoremas 4.9 e 4.10.

Teorema 4.9: Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Demonstração.

Part 1:

Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos, como ilustrado pela Figura 4.21a

$$\triangle OPS \sim \triangle OP_2P$$

implicando em

$$\frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_2}|}$$

que implica em

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \tag{4.28}$$

Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de cossec x	sinal de sen x
1^o	$+$	$+$
2^o	$-$	$-$
3^o	$-$	$-$
4^o	$+$	$+$

observamos que o sinal da $\sec x$ é igual ao sinal de $\cos x$.

Portanto, juntando esse fato a equação (4.28) comprova-se a tese.

Part 2:

Se $x = k\pi$, com k um inteiro par, temos $\sec x = 1$ e $\cos x = 1$ ou $\sec x = -1$ e $\cos x = -1$, com k um inteiro ímpar. $\square$

Teorema 4.10: Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Demonstração.

Part 1:

Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos, como ilustra a Figura 4.21b

$$\triangle OPC \sim \triangle OP_1P$$

implicando em

$$\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_1}|}$$

que implica em

$$|\operatorname{cossec} x| = \frac{1}{|\operatorname{sen} x|} \tag{4.29}$$

Utilizando o quadro de sinais a seguir

	sinal de $\operatorname{cossec} x$	sinal de $\operatorname{sen} x$
1^o	$+$	$+$
2^o	$+$	$+$
3^o	$-$	$-$
4^o	$-$	$-$

observamos que o sinal da $\operatorname{cossec} x$ é igual ao sinal de $\operatorname{sen} x$

Portanto, juntando esse resultado a equação (4.29) comprova-se a tese.

Part 2:

Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos $\operatorname{cossec} x = 1$ e $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$, para k par, ou $\operatorname{cossec} x = -1$ e $\frac{1}{\operatorname{sen} x} = -1$, para k impar. $\square$

Corolário 4.1: Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \tag{4.30}$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \tag{4.31}$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cossec}^2 x \tag{4.32}$$

$$\cos^2 = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \tag{4.33}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \tag{4.34}$$

Demonstração. Essas relações podem ser demonstradas por manipulações algébricas a partir das relações demonstradas anteriormente.

Part 1: Relação 4.30

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\tan x}$$

Part 2: Relação 4.31

$$\tan^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Part 3: Relação 4.32

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cossec}^2 x$$

Part 4: Relação 4.33

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Part 5: Relação 4.34

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x &= \cos^2 x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \cos^2 x \tan^2 x \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2 x} \tan^2 x \\
&= \frac{\tan^2}{1 + \tan^2 x}
\end{aligned}$$

□

Agora, apresentaremos o Teorema de Ptolomeu para que, utilizando-o, possamos demonstrar os Teoremas do seno da soma, seno da diferença, cosseno da soma e cosseno da diferença.

Teorema 4.11 (Teorema de Ptolomeu): Num quadrilátero qualquer, inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.
De outro modo:
Se A, B, C e D são quatro pontos sobre uma circunferência (vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência), então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \tag{4.35}$$

Demonstração do Teorema de Ptolomeu. Tomemos um ponto E sobre a diagonal $\overline{AC}$, tal que $\angle ABE = \angle DBC$ como mostra Figura 4.22.

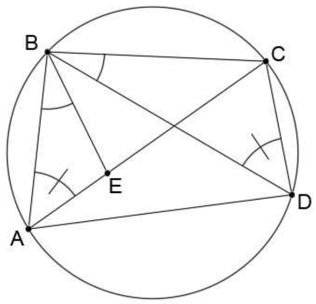


Figura 4.22: Construção para a demonstração do Teorema de Ptolomeu.

Observemos que os triângulo BCE e ABD são semelhantes, pois os ângulos $\angle CBE$ e $\angle ABD$ são iguais por construção, e os ângulos $\angle BCA$ e $\angle BDA$ também são iguais, pois determinam o mesmo arco. Logo seus lados correspondentes são proporcionais, então

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} \tag{4.36}$$

Agora, observando os triângulos BAE e BDC podemos verificar que eles também são semelhantes, pois $\angle ABD = \angle EBC$, por construção e os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BDC$ são iguais por determinarem o mesmo arco, portanto

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} \tag{4.37}$$

Então, adicionando as equações (4.36) e (4.37)

$$\overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD}$$

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot (\overline{CE} + \overline{AE})$$

Como $\overline{CE} + \overline{AE}$ equivale a $\overline{AC}$, temos que

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{AC}$$ □

Teorema 4.12 (Seno da Diferença): Sejam α e β dois ângulos agudos, com

$\alpha > \beta$, então

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscrito numa semicircunferência de raio R como mostrado na Figura 4.23.

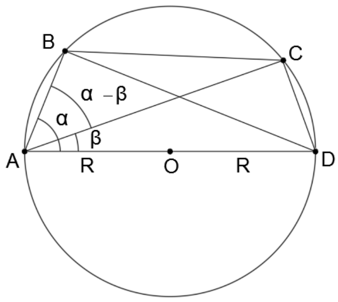


Figura 4.23: Construção para a demonstração do seno da diferença.

Desta forma, temos que $\overline{OD} = \overline{AO} = R$ e $\overline{AD} = 2R$. Os triângulos ACD e ABD são retângulos, pois estão inscritos numa semicircunferência, assim podemos escrever

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = \overline{AD}\operatorname{sen}\beta \tag{4.38}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{AD}\cos\beta \tag{4.39}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = \overline{AD}\operatorname{sen}\alpha \tag{4.40}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \overline{AD}\cos\alpha \tag{4.41}$$

Tracemos o segmento $\overline{CE}$ passando pelo centro O da circunferência e o segmento $\overline{BE}$, formando, dessa maneira, o triângulo BCE, que é retângulo por estar inscrito em uma semicircunferência como mostrado na Figura 4.23.

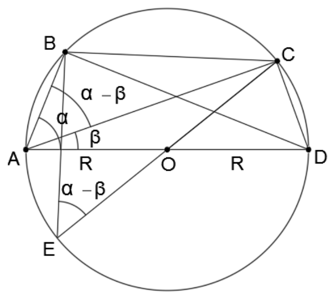


Figura 4.24: Construção para a demonstração do cosseno da diferença.

Sabendo que o ângulo $\angle BEC$ é igual ao ângulo $(\alpha - \beta)$, pois determinam o mesmo arco BC, e que $\overline{CE} = \overline{AD}$, pois são o diâmetro da circunferência, tem-se

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$$

$$\overline{BC} = \overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \tag{4.42}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overline{EB}}{\overline{CE}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\overline{EB}}{\overline{AD}}$$

$$\overline{EB} = \overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \tag{4.43}$$

De posse do Teorema (4.11) temos

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$(\overline{AD}\cos\alpha)(\overline{AD}\operatorname{sen}\beta) + \overline{AD}(\overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha - \beta)) = (\overline{AD}\cos\beta)(\overline{AD}\operatorname{sen}\alpha),$$

$$\operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \qquad \square$$

Teorema 4.13 (Cosseno da Diferença): Sejam α e β dois ângulos agudos, com $\alpha > \beta$, então

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Demonstração. Seja $ABCE$ um quadrilátero convexo inscrito numa semicircunferência de raio R, conforme a Figura 4.24, então, pelo Teorema 4.11

$$\overline{EC} \cdot \overline{AB} + \overline{AE} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{EB} \tag{4.44}$$

Substituindo os valores da equação (4.41) em (4.44), temos

$$\overline{AD} \cdot \overline{AD}\cos\alpha + \overline{AD}\operatorname{sen}\beta \cdot \overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \overline{AD}\cos\beta \cdot \overline{AD}\cos(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos\beta\cos(\alpha - \beta)$$

Dividindo toda a equação por $\cos\beta$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) = \cos(\alpha-\beta)$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - \frac{\operatorname{sen}^2\beta\cos\alpha}{\cos\beta} = \cos(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha\frac{(1-\operatorname{sen}^2\beta)}{\cos\beta} + \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta)$$
$$\cos\alpha\frac{(\cos^2\beta)}{\cos\beta} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$ □

Teorema 4.14 (Seno da Soma): Sejam α e β dois ângulos agudos, então

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

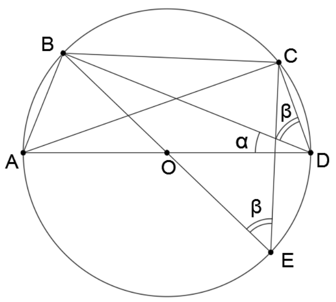


Figura 4.25: Construção para a demonstração do teorema do seno da soma.

Demonstração. Analisando de maneira semelhante aos Teoremas 4.12 e 4.13, se tomarmos o quadrilátero $ABCD$ mostrado na Figura 4.25 e traçarmos dois segmentos: BE, que passa pelo centro O da circunferência e CE formando o triângulo BCE. Podemos verificar que os ângulos $\angle BEC$ e $\angle BDC$ são congruentes, pois subentendem o mesmo arco BC.

Dessa forma, podemos afirmar, em relação aos triângulos BCE, ADB e ACD que são retângulos, pois todos estão inscritos em semicircunferências. Temos

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} \quad\Rightarrow\quad \overline{BC} = \overline{AD}\operatorname{sen}\beta \tag{4.45}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \quad\Rightarrow\quad AB = AD\operatorname{sen}\alpha \tag{4.46}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} \quad\Rightarrow\quad \overline{CE} = \overline{AD}\cos\beta \tag{4.47}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BD} = \overline{AD}\cos\alpha \tag{4.48}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} = \overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \tag{4.49}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CD} = \overline{AD}\cos(\alpha+\beta) \tag{4.50}$$

Utilizando o Teorema de Ptolomeu aos quadriláteros $ABCD$ e $BCDE$, teremos

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{BD}\cdot\overline{AC} \tag{4.51}$$
$$\overline{BC}\cdot\overline{ED} + \overline{BE}\cdot\overline{CD} = \overline{BD}\cdot\overline{CE} \tag{4.52}$$

como $\overline{BE} = \overline{AD}$, pois são diâmetro da circunferência, logo $\overline{AB} = \overline{DE}$. Isolando $\overline{CD}$ na equação (4.52), temos

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\left(\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CE} - \overline{BC}\cdot\overline{ED}}{\overline{AD}}\right) = B\overline{D}\cdot\overline{AC} \tag{4.53}$$

substituindo os valores das equações (4.45) até (4.50) na equação (4.53), teremos

$$\overline{AD}\cdot\overline{AD}\operatorname{sen}\beta + \overline{AD}\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\overline{AD}\cos\alpha\cdot\overline{AD}\cos\beta - \overline{AD}\operatorname{sen}\beta\cdot\overline{AD}\operatorname{sen}\alpha}{\overline{AD}}\right)$$
$$= \overline{AD}\cos\alpha\cdot\overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

$$\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{sen}\beta(1-\operatorname{sen}^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{sen}\beta(\cos^2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta = \cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha. \qquad \square$$

Teorema 4.15 (Cosseno da Soma): Sejam α e β dois ângulos agudos, então

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta.$$

Demonstração. Utilizando a equação (4.51) e substituindo os valores obtidos nas equações de (4.45) à (4.50), teremos

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC} + \overline{AB}\cdot\overline{CD} = \overline{BD}\cdot\overline{AC},$$
$$\overline{AD}\cdot\overline{AD}\operatorname{sen}\beta + \overline{AD}\operatorname{sen}\alpha\cdot\overline{AD}\cos(\alpha+\beta) = \overline{AD}\cos\alpha\cdot\overline{AD}\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta),$$
$$\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha),$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) - \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta,$$

uma vez que $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2$, tem-se

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + (1-\operatorname{sen}^2)\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

dividindo ambos os membros da equação por $\operatorname{sen}\alpha$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad \square$$

Proposição 4.1: Os valores do seno e do cosseno de um ângulo independem do semicírculo utilizado para defini-los.

Demonstração. Consideremos um outro círculo de centro O' e neste um diâmetro $A'B'$. Consideremos um ponto C' sobre o círculo de modo que o ângulo $C'\hat{O}'B'$ seja congruente ao ângulo α e portanto congruente a $C\hat{O}B$. Considere os triângulos COD e $C'O'D'$ onde D e D' são os pés das perpendiculares baixadas aos segmentos de reta AB e $A'B'$, respectivamente, a partir dos pontos C e C'. Como $C\hat{D}$ e $C'\hat{D}'O'$ são ângulos retos e já sabemos que $C\hat{O}B = C'\hat{O}'B$, então concluímos que os triângulos considerados são semelhantes. Portanto, teremos

$$\frac{\overline{C'O'}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{OD}}$$

Como consequência

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O'}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{O'D'}}{\overline{C'D'}} \qquad \square$$

Outro resultado importante apresentado por Barbosa [5] é o teorema das fórmulas de redução.

Teorema 4.16 (Fórmulas de redução): Se α é um ângulo agudo então

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \tag{4.54}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \tag{4.55}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha} \tag{4.56}$$

Demonstração. Sejam C e C' pontos de um círculo de extremidades A e A', tais que $C\hat{O}A=\alpha$ e $C'\hat{O}A=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, como mostrado na Figura 4.26a.

Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas à reta que contém AA' a partir de C e C', respectivamente. Observe que, como $C'\hat{O}A=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, então $O\hat{C'}D'=\alpha$. Logo os triângulos COD e $OD'C'$ são congruentes, assim como $OC=OC'$, $C\hat{D}O=\frac{\pi}{2}$ e $C\hat{O}D=O\hat{C'}D'=\alpha$ e portanto

$$\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OD'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$$

Segue ainda que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{OD'}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\operatorname{sen}\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{OD'}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{CB}}=\frac{1}{\tan\alpha}$$ □

Outro teorema utilizado para reduzir as fórmulas para o seno e o cosseno é o seguinte.

Teorema 4.17: Qualquer que seja α tem-se

1. $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$
2. $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

Demonstração. Quando α é igual a 0, $\frac{\pi}{2}$ ou π, a afirmação acima é comprovada por substituição direta dos valores do seno e cosseno correspondentes. Nos outros casos, considere pontos C e C' no semicírculo, como os da Figura 4.26b, de sorte que $C\hat{O}B=\alpha$ e $C'\hat{O}B=\pi-\alpha$. Sejam D e D' os pés das perpendiculares baixadas dos pontos C e C' à reta determinada por A e B.

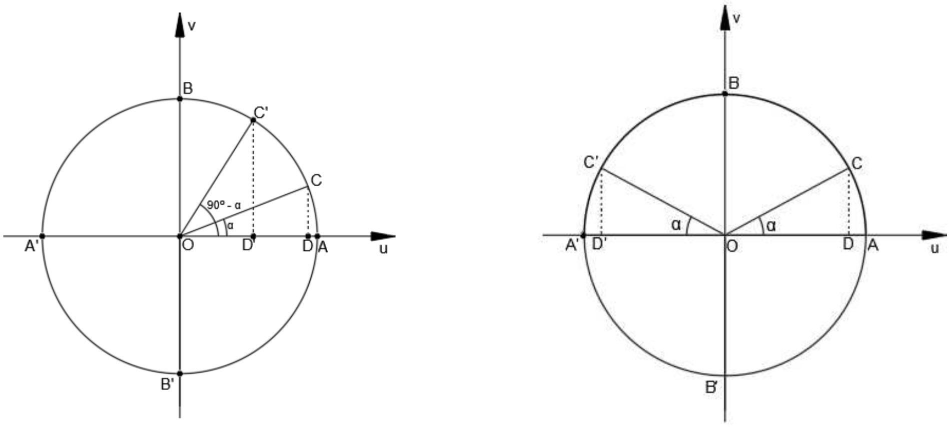
A congruência dos triângulos OCD e $OC'D'$ nos fornece

$$\overline{CD}=\overline{C'D'} \qquad \text{e} \qquad \overline{DO}=\overline{D'O}$$

Como consequência imediata temos que

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{C'O}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{CO}}=\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\frac{\overline{D'O}}{\overline{C'O}}=\frac{\overline{DO}}{\overline{CO}}=\cos\alpha$$



(a) Os triângulos $OD'C'$ e ODC são congruentes.

(b) Os triângulos $OD'C'$ e ODC são congruentes.

Figura 4.26: Demonstração das Fórmulas de Redução de Arcos

Como $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ então α ou $\pi - \alpha$ é obtuso e o outro é agudo. Por isto, $\cos\alpha$ e $\cos(\pi - \alpha)$ têm sinais opostos. Logo

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \square$$

4.5 Propriedades Trigonométricas em Triângulos Quaisquer

Em quaisquer triângulos podemos utilizar os seguintes Teoremas, encontrados em Iezzi [14].

Teorema 4.18 (Lei dos Cossenos): Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

1º Triângulo Acutângulo. Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, como mostra a Figura 4.27a

No triângulo BCD, que é retângulo, vale a relação métrica demonstrada na Seção 4.1

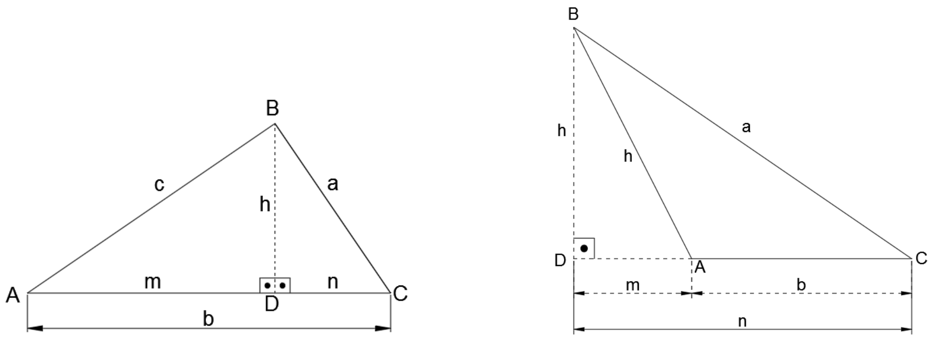
$$a^2 = n^2 + h^2 \tag{4.57}$$

enquanto que no triângulo BAD, que é retângulo

$$h^2 = c^2 + m^2 \tag{4.58}$$

Temos também por construção, que

$$n = b - m \tag{4.59}$$



(a) Triangulo ABC com $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$. (b) Triangulo ABC com $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$.

Figura 4.27: Demonstração da Lei dos Cossenos

Substituindo as equações (4.59) e (4.58) na equação (4.57) temos

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

que pode ser simplificada em

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo BAD temos que $m = c \cos \hat{A}$. Portanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \qquad \square$$

2º Triângulo Obtusângulo. Seja ABC um triângulo com $\frac{\pi}{2} < \hat{A} < \pi$, como mostrado na Figura 4.27b

$$a^2 = n^2 + h^2 \tag{4.60}$$

enquanto que no triângulo BAD que também é retângulo

$$h^2 = c^2 - m^2 \tag{4.61}$$

Temos também, por construção, que

$$n = b + m \tag{4.62}$$

Substituindo as equações (4.62) e (4.61) na equação (4.60) temos

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$

que pode ser simplificada em

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

Mas, no triângulo BAD, $m = c \cos(\pi - \hat{A})$ que equivalente a $m = -c \cos \hat{A}$.

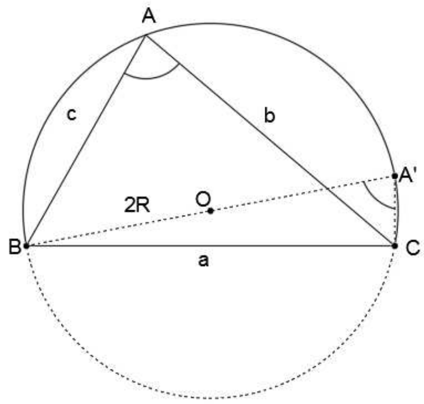


Figura 4.28: Triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio R em que foi traçado pelo vértice B o diâmetro $A'B = 2R$ determinando, dessa forma o ângulo $A' = A$, pois determinam a mesma corda BC.

Portanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \qquad \square$$

Teorema 4.19 (Lei dos Senos): Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração. Considere ABC um triângulo qualquer, como o da Figura 4.28, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo, B por exemplo, tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C. Sabemos que $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito numa semi-circunferência. Dessa forma, teremos

$$a = 2R \operatorname{sen} \hat{A}'$$

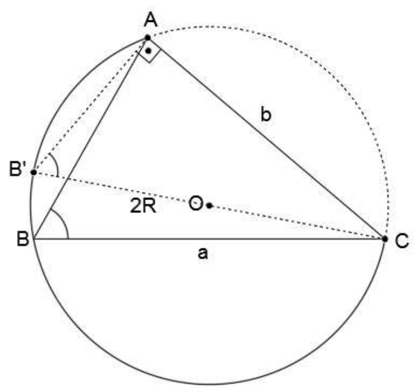


Figura 4.29: Triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio R em que foi traçado pelo vértice C o diâmetro $B'C = 2R$ determinando, dessa forma o ângulo $B' = B$, pois determinam a mesma corda AB.

que equivale a

$$a = 2R \operatorname{sen} \hat{A}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}'} = 2R \tag{4.63}$$

Analogamente, se traçarmos pelo vértice C o diâmetro $B'C$ em que $\hat{B}' = \hat{B}$ por determinarem a mesma corda AB, o triângulo $AB'C$ é retângulo por estar inscrito numa semi-circunferência, como mostra a Figura 4.29, desse modo

$$b = 2R \operatorname{sen} \hat{B}'$$

que equivale a

$$b = 2R \operatorname{sen} \hat{B}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 2R \tag{4.64}$$

Finalmente, se traçarmos pelo vértice A o diâmetro AC' em que $\hat{C}' = \hat{C}$ por determinarem a mesma corda AB, o triângulo ABC' é retângulo por estar inscrito numa semi-circunferência, como mostrado na Figura 4.30, desse modo

$$c = 2R \operatorname{sen} \hat{C}'$$

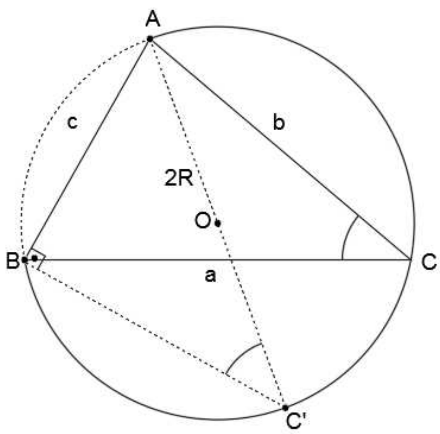


Figura 4.30: Triângulo ABC inscrito numa circunferência de raio R em que foi traçado pelo vértice C o diâmetro $C'A = 2R$ determinando, dessa forma o ângulo $C' = C$, pois determinam a mesma corda AB.

que equivale a

$$c = 2R \operatorname{sen} \hat{C}$$

que pode ser transformada em

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{c}} = 2R \tag{4.65}$$

Portanto, se igualarmos as equações (4.63), (4.64) e (4.65), teremos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R \qquad \square$$

Apresentamos nesse capítulo as principais definições e teoremas referentes ao estudo da trigonometria, conceitos esses que serão utilizados para mostrar alguns processos de usinagem que fazem uso desses elementos.

5

A Oficina de Usinagem Mecânica

Neste capítulo, apresentaremos algumas máquinas, dispositivos e instrumentos muito comuns na indústria metal mecânica a fim de mostrar como a trigonometria está diretamente ligada à indústria em suas diversas formas de produção. Enquanto apresentamos as ferramentas vamos também ilustrar várias aplicações da trigonometria dentro de uma oficina de usinagem mecânica.

5.1 Máquinas Ferramentas

Máquina ferramenta é definida por Izildo Antunes [4] como sendo uma máquina que serve para executar operações em peças de materiais e formatos diversos com o arranque de cavaco, ou seja, o material removido. Quando esse processo é realizado em metais, o mesmo é denominado de operação de usinagem.

Na operação de usinagem se confere novas formas e dimensões ao material, retirando-se parte deste, conhecida com sobremetal, em forma de cavaco.

De acordo com J.M. Freire [12], o automóvel, o rádio, a máquina de lavar, os refrigeradores, os condicionadores de ar, os instrumentos científicos e uma série de outras utilidades não existiriam hoje se não existissem as máquinas ferramentas

Dentre as máquinas ferramentas existentes, as principais são: Tornos Mecânicos,

Figura 5.1: Torno Mecânico Convencional

Fresadoras e Retificadoras. Nas seções a seguir apresentamos cada uma dessas máquinas.

5.2 Torno Mecânico

O Torno Mecânico, como o da Figura 5.1, é uma máquina ferramenta que permite usinar peças com a forma geométrica de revolução. Os Tornos têm sido utilizados de várias formas ao longo de séculos e tem representado um dos pilares da engenharia de precisão. O Torno pode ser utilizado para usinar formas cilíndricas ou cônicas e também na fabricação de perfis decorativos, como observados em pés de mesas, castiçais, canetas e peças de xadrez. Peças que exigem precisão em suas medidas, tais como componentes de motor, juntas esféricas, equipamentos médicos e peças de aeronaves e foguetes também são fabricadas em Tornos Mecânicos.

Figura 5.2: Protótipo do torno a pedal com volante de inércia desenvolvido por Leonardo da Vinci no ano de 1482.

Até mesmo o gênio italiano Leonardo da Vinci deu sua parcela de contribuição no processo evolutivo do Torno. Ele projetou um torno semelhante ao da Figura 5.2 que poderia ser operado por uma pessoa e trabalhava com o movimento de rotação contínuo cujo sistema motriz é parecido com o de uma máquina de costura.

O funcionamento de um Torno Mecânico consiste em rotacionar um material, normalmente, de forma cilíndrica que é preso a um dispositivo denominado placa, representada na Figura 5.3, que pode possuir 3 ou 4 peças fixadoras, nomeadas de castanhas, cujos ângulos entre elas são, respectivamente, iguais a 120° ou 90°.

Figura 5.3: Nessa imagem temos a esquerda uma placa com 3 castanhas, a direita uma placa com 4 castanhas, 4 castanhas soltas e uma chave de placa.

Para que esse material possa ser usinado, é preso em um suporte denominado castelo uma ou várias ferramentas de corte que irão, uma de cada vez, pressionar o material retirando todo o excesso indesejado. Todo esse movimento das ferramentas é controlada pela movimentação de três “carros”.

Carro principal ou longitudinal – responsável pela movimentação longitudinal da ferramenta. É nele que o operador controla a medida de comprimento da peça.

Carro Transversal – é o responsável pela movimentação transversal da ferramenta. É nesse carro que é controlada a medida de diâmetro da peça.

Carro Superior – carro que pode ser inclinado a fim de se obter peças que possuam a forma de um cone ou um tronco de cone.

Cada carro é movimentado pelo giro de uma manivela que avançam de forma coordenada. Em cada manivela está fixado um colar micrômetro, como o ilustrado pela Figura 5.4 que Antunes [4] descreve como sendo *“elementos de forma circular, com divisões com distâncias iguais (graduações) que determinam a movimentação de cada carro permitindo controlar a quantidade exata de material que será retirado. A resolução desses colares, normalmente, são na faixa dos milésimos de milímetros.”*

Figura 5.4: Colar Micrométrico de um Torno Mecânico: o colar dessa imagem possui a resolução de 0,05 mm.

Hoje existem diversos tipos de Tornos Mecânicos, inclusive os CNC’s (Comando Numérico Computadorizado) que possuem a parte mecânica semelhante a dos convencionais, porém o movimento dos carros é controlado por um software computacional que é totalmente programado através de um sistema de eixos cartesianos.

Aplicações Trigonométricas no Uso do Torno

A trigonometria é muito aplicável na fabricação de peças utilizando o torno mecânico convencional. Encontramos em Antunes [4] diversos exemplos em que se faz necessário o uso das relações trigonométricas, como por exemplo no torneamento cônico que de acordo com Edson Bini [6] consiste em dar à peça a forma de um cone de revolução. Ainda de acordo com Bini para se obter uma peça no formato cônico utilizando o torno mecânico convencional, pode-se proceder de três modos diferentes:

1. Inclinando o carro superior;
2. Deslocando o contraponto;

3. Utilizando um dispositivo copiador.

O primeiro procedimento consiste em inclinar o carro superior do torno e a usinagem é feita toda manualmente, como mostra a Figura 5.5, uma vez que dos três carros que compõem o torno, o superior é o único que não é automático.

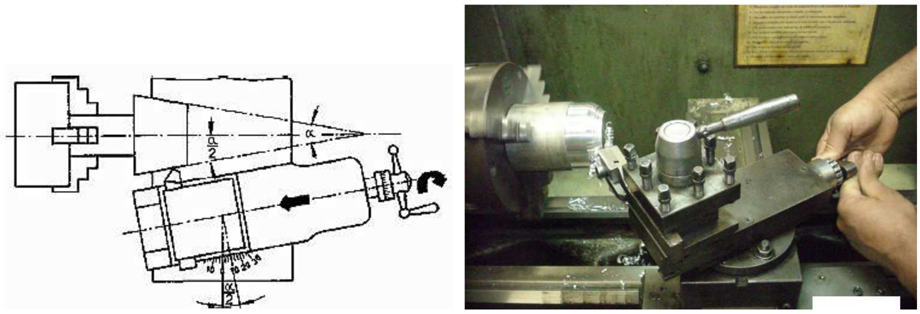


Figura 5.5: Nessa imagem temos a ilustração da fabricação de uma peça cônica usinada pelo método da inclinação do carro superior do torno.

O terceiro procedimento consiste em elaborar uma montagem de um dispositivo em que a produção em série é beneficiada.

Já o segundo procedimento é onde o uso da trigonometria é mais evidente. Uma vez conhecidos, respectivamente, os diâmetros maior, D, menor, d e o comprimento, L, do cone a ser usinado, ou seja, geometricamente, a altura do tronco do cone, o ângulo α que se dever girar cabeçote móvel que é utilizado como encosto ou apoio para montagem entre pontas da peça que será torneada, como ilustra o esquema da Figura 5.6, e possui um comprimento de pelo menos 3 vezes o seu diâmetro é calculado da seguinte forma

$$\tan \alpha = \frac{D - d}{2L}$$

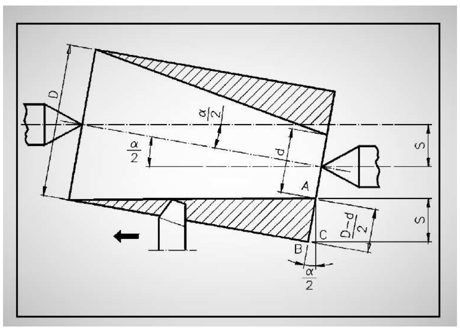


Figura 5.6: Essa figura ilustra a fabricação de uma peça cônica através do deslocamento do contraponto do torno.

5.3 Fresadora Mecânica

A Fresadora Mecânica mostrada na Figura 5.7 é descrita no livro *"Ferramentas de Corte II"* [27] como sendo uma *"máquina ferramenta construída especialmente*

Figura 5.7: Fresadora Mecânica Convencional.

para assegurar os movimentos relativos da peça e da ferramenta". Elas são utilizadas, principalmente, para a obtenção de peças com superfícies planas. O processo de fabricação de peças nessas máquinas é denominado *Fresagem* o que de acordo com Erich [27] é um processo de usinagem no qual a remoção de material da peça se realiza de modo intermitente pelo movimento rotativo da ferramenta, geralmente multicortante, isto é, com múltiplos dentes de corte. Esse processo gera superfícies das mais variadas formas.

A Fresadora teria sido criada em 1818, pelo norte-americano Eli Whitney, para a fabricação de peças para rifles, uma vez que os Estados Unidos estavam em guerra civil, e ele queria fornecer para o governo cerca de dez mil armas de fogo em um prazo de dois anos. Esta fresadora, mostrada na Figura 5.8 não dispunha de motor e o movimento do eixo árvore – eixo que rotaciona a ferramenta de corte – era feito através do giro e um volante que trabalhava sobre um parafuso de rosca-sem-fim.

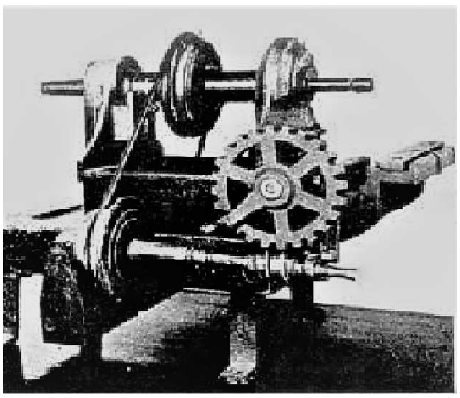


Figura 5.8: Fresadora desenvolvida por Eli Whitney cujo o principal objetivo era de fabricar rifles para o governo Norte-Americano, uma vez que os EUA estavam em guerra civil.

Dois anos mais tarde, em 1820, o também norte-americano Robert Johnson adaptou uma roda de um moinho d'água ao eixo árvore da fresadora para que conseguisse uma maior produtividade. A força da água movia uma grande roda que através de um conjunto de correias e polias transmitia o movimento até o eixo árvore da máquina.

O modelo que mais se assemelha ao que hoje é produzido foi desenvolvido em 1862, pelo engenheiro norte americano Joseph R. Brown. Ele é o fundador de uma das mais importantes fábricas de máquinas ferramentas, a "Brown e Sharpe". No final do século XIX a empresa já fabricava fresadoras como uma grande variedade de acessórios. Foram desenvolvidas alavancas para trocas de velocidades e rotação e a maioria dos acessórios existentes hoje em dia.

As Fresadoras utilizadas atualmente são máquinas de extrema precisão. As peças por elas fabricadas chegam a ter precisão na casa dos milésimos de milímetro. Sua mesa possui movimento controlado por três eixos (longitudinal, transversal e horizontal) também chamados de eixos X, Y e Z.

Com o desenvolvimento e o aparecimento do CNC (Comando Numérico Computadorizado), a partir da década de 1970, as fresadoras passaram a usinar com uma velocidade muito maior, além de elevar consideravelmente a qualidade das peças por elas produzidas. Hoje existe no mercado as Fresadoras convencionais (Figura 5.7) que são operadas manualmente e aquelas operadas digitalmente, os chamados CNC'S. Nesse tipo de máquina é feito um programa computacional baseado no sistema de eixos cartesianos. Além dos tradicionais eixos X, Y e Z encontrados em máquinas manuais, uma máquina de fresagem CNC frequentemente contém um ou dois eixos adicionais. Estes eixos extras podem permitir uma maior flexibilidade e maior precisão. As máquinas CNC's possuem uma velocidade de usinagem bem maior e, após desenvolvida a programação para a fabricação da peça, podem ser fabricadas quantas peças forem necessárias simplesmente fixando o material a ser usinado.

O princípio de funcionamento de uma Fresadora Mecânica consiste em, após a fixação da peça na mesa da fresadora, esta efetua o movimento de avanço linear a uma baixa velocidade que varia na faixa de 10 a 500 mm/min, enquanto é posta a rotacionar a ferramenta de corte, que possui o nome de fresa, a uma velocidade relativamente alta da ordem de 10 a 150 m/ min, como é descrito por Gerling [13]. As vantagens do processo consistem na variedade de formas que podem ser produzidas, na qualidade dos acabamentos superficiais, na alta taxa de produtividade e na disponibilidade de ampla variedade de ferramentas que podem ser construídas ou associadas para a produção.

A Fresadora Mecânica é um dos maquinários mais procurados pelas indústrias atuais, devido a função que possui de usinagem de materiais metálicos, madeira e outros elementos sólidos.

Algumas ferramentas de corte utilizadas nesse tipo de maquinário, as denominadas *Fresas* estão representadas na Figura 5.9. De acordo com Mário Rossi [22], as fresas são ferramentas constituídas por um sólido em revolução cuja superfície apresenta um certo número de gumes, ou dentes cortantes, geralmente iguais entre si, equidistantes e dispostos simetricamente em relação ao eixo de rotação.

Figura 5.9: Fresa é o nome dado a ferramenta de corte utilizada em uma fresadora.

Uma curiosidade é a origem do nome fresa. A palavra Fresa vem do francês "Fraise" que significa moranguinho, o que de acordo com Erich Stemmer [27] correspondia inicialmente a uma ferramenta manual primitiva, em forma de uma bola, que antes de ser submetida a um processo de tratamento térmico (têmpera) apresentava numerosas rebarbas e, pelo seu aspecto e forma geral, lembrava a fruta que lhe deu o nome.

Desde que surgiu, a fresadora vem apresentando evolução, o que permitiu um maior número de operações e fabricações industriais. A fresadora necessita de uma estrutura que a torne firme, pois é sempre submetida a esforços, como torção, que variam conforme a intensidade frequência de vibrações aplicadas.

Dentro das oficinas de manutenção, a fresadora é ideal, pois dispõe de versatilidade, permitindo que seus cabeçotes sejam trocados, sendo transformada em vertical ou horizontal a qualquer momento, adaptando-se às necessidades operacionais. Por esse motivo, a fresadora consegue desenvolver os mais variados trabalhos, além de ser extremamente prática durante o trabalho, pois envolve superfície dos materiais e consegue oferecer usinagem para suas faces sem que a peça seja retirada da máquina.

5.3.1 Aplicações Trigonométricas no Uso da Fresadora

São diversas as aplicações da trigonometria na utilização da fresadora mecânica. Na própria escolha de uma fresa se faz necessário a identificação de sua forma geométrica (cilíndrica, cônica, disco, forma especial ou particular) e de seus diversos ângulos. Como exemplo, podemos citar o caso das fresas denominadas Frontais de Metal Duro que são fresas constituídas de um corpo, normalmente, cilíndrico onde em seu corpo são fixadas uma série de ferramentas intercambiáveis de metal duro e cujos principais ângulos das lâminas de corte são mostrados na Figura 5.10 e denominados como segue.

1. Ângulo de saída ortogonal (λ_o)

   Esse ângulo influi decisivamente na força e na potência necessária ao corte, no acabamento superficial e no calor gerado. Relativamente, seu valor será

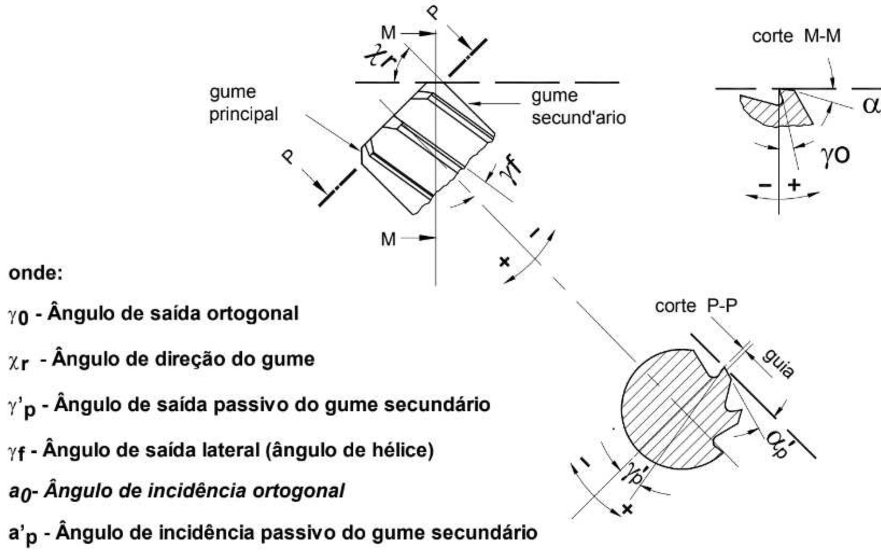


Figura 5.10: Desenho em vistas de uma fresa frontal com seus principais ângulos.

pequeno para o corte de materiais de difícil usinabilidade e seu valor varia entre $-10°$ e $30°$.

2. Ângulo de saída passivo (λ_p)

   É o ângulo que tende a diminuir o atrito entre a peça e a superfície da ferramenta e seu valor depende, principalmente, da resistência do material da ferramenta e da peça a ser usinada. Seu valor geralmente varia de $2°$ a $14°$.

3. Ângulo de saída lateral (λ_f)

4. Ângulo de direção do gume (κ_r)

   Influi na direção de saída do cavaco além de aumentar a resistência da ferramenta e sua capacidade de dissipação do calor. Também é um dos principais responsáveis pela redução das vibrações geradas pelo atrito *ferramenta – peça*. O seu valor geralmente varia entre de $30°$ a $90°$.

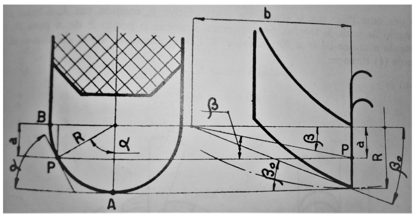
Esses ângulos estão relacionados pela fórmula

$$\tan\lambda_o = \tan\lambda_f \cos\lambda_p \operatorname{sen}\kappa_r + \tan\lambda_p \cos\lambda_p \cos\kappa_r$$

Já as fresas de perfil constante que, segundo Rossi [22] são fresas cujos dentes são perfilados segundo uma lei geométrica e são empregadas para reproduzir na peça o perfil exato da fresa que se emprega, como é descrito por Freire [19], também são fabricadas utilizando como fundamento a trigonometria.

Um exemplo muito interessante é encontrado na página 721 do livro *"Maquinas Operatrizes 2"* [22] que inicialmente define as *Fresas de Perfil Semicircular Convexo*, como a da Figura 5.11a, e *Semicircular Côncavo* e em seguida descreve que o valor efetivo do ângulo de saída (β) que é o ângulo que o material será "arrancado da peça" e cujo valor varia de um máximo até zero. Ele é demonstrado fazendo o uso de algumas relações trigonométricas.

(a) Fresa de perfil Semicircular Convexo.



(b) Gráfico para a determinação do ângulo efetivo de perfilagem medido num ponto (P) da fresa de perfil semicircular convexo.

Figura 5.11: Fresa de Perfil Semicircular Convexo e sua Vista Frontal em Corte

Para uma melhor definição desta variação, Rossi [22] sugere que examinemos a Figura 5.11b em que temos os desenhos, respectivamente, das projeções frontal e esquerda de um dos dentes dessa ferramenta de onde podemos retirar as seguintes relações

$$a = R\cos\alpha$$

e também

$$a = b\tan\beta$$

então

$$R\cos\alpha = b\tan\beta$$

colocando $\tan\beta$ em evidência, temos

$$\tan\beta = \frac{R}{b}\cos\alpha$$

mas

$$\frac{R}{b} = \tan\beta_0$$

substituindo este valor a $\frac{R}{b}$ da fórmula anterior, teremos

$$\tan\beta = \tan\beta_0\cos\alpha$$

Portanto, essa é a relação que, de acordo com Rossi [22], permite determinar prontamente o valor do ângulo de saída efetivo β medido de um ponto qualquer P.

Para a determinação do tipo de ferramenta (fresa) que será utilizada existem outros inúmeros exemplos de cálculo trigonométricos que são utilizados para que se possa determinar todos os parâmetros necessários para o processo de fresagem.

Na fabricação de engrenagens helicoidais, como a mostrada pela Figura 5.12, que

Figura 5.12: Quando duas engrenagens helicoidais encaixam seus dentes para trabalharem, eles são posicionados de modo transversal, em formato de hélice.

Freire [19] define como sendo *"engrenagens cujos dentes são inclinados em forma de hélice e que durante o seu trabalho, os dentes correm descrevendo hélices sobre o corpo das mesmas e cuja utilização consiste em sistemas de transmissão mecânica entre eixos paralelo ou não, no mesmo plano ou em planos distintos"* também utilizamos os conceitos de trigonometria. De acordo com o manual de fabricação de engrenagens da Empresa Sant'Ana Fresadora [2] nessas engrenagens, no momento em que dois de seus dentes se acoplam, é iniciado o contato em duas extremidades dos dentes. Depois disso, o sistema da engrenagem helicoidal faz com que o contato continue aumentando de forma gradual, enquanto as duas engrenagens giram. Isso acontece até que os dois dentes estejam perfeitamente acoplados um ao outro. O engate feito

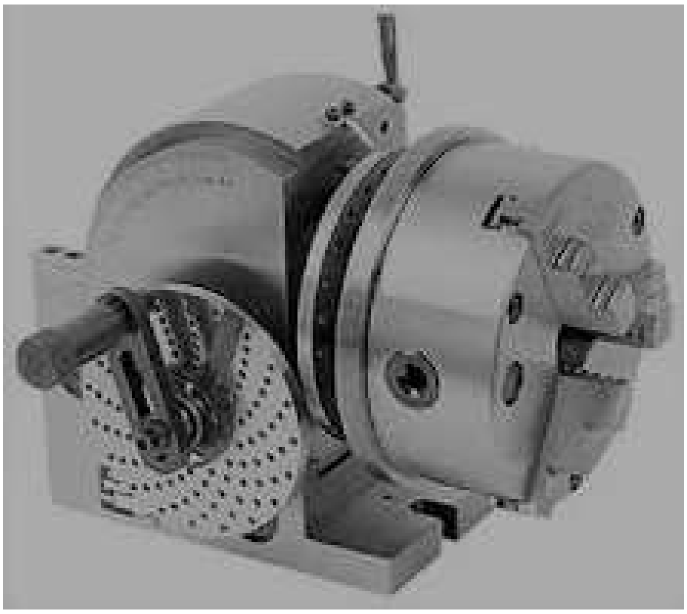


Figura 5.13: O Cabeçote Divisor é um dispositivo utilizado na fresadora para fazer divisões angulares em uma peça.

de maneira gradual na engrenagem helicoidal é o que permite uma atuação suave e silenciosa, se comparadas às engrenagens de dentes retos, por exemplo. Por conta disso, podem ser comumente encontradas em transmissões de carros. Sua fabricação nas fresadoras convencionais é realizada prendendo o material a qual deseja-se fazer os dentes em formato de hélice em um dispositivo que permite girar esse material sucessivamente de um determinado ângulo, de maneira a possibilitar, por exemplo, a abertura de dentes de engrenagens. Esse dispositivo é denominado *cabeçote divisor* mostrado na Figura 5.13.

Todo Cabeçote Divisor possui uma relação que é determinada pelo número de voltas que se dá na manivela para que sua placa dê um giro completo em torno de seu eixo. Então, por exemplo, dizer que a relação de um Cabeçote Divisor é 40 para 1, é o mesmo que dizer que se dermos 40 voltas na manivela do Divisor, a peça presa em sua placa dará uma volta completa em torno do seu eixo.

Para que se possa abrir os rasgos helicoidais na fresadora, é preciso que a mesa ou a ferramenta, possa girar de um ângulo correspondente ao complemento do ângulo que a hélice faz com a circunferência da base. É ainda necessário que haja uma combinação de movimentos de rotação e de avanço da peça que se consegue por intermédio de um trem de engrenagens como o mostrado no esquema da Figura 5.14. Esse trem se monta na fresadora e se acopla a manivela do aparelho divisor.

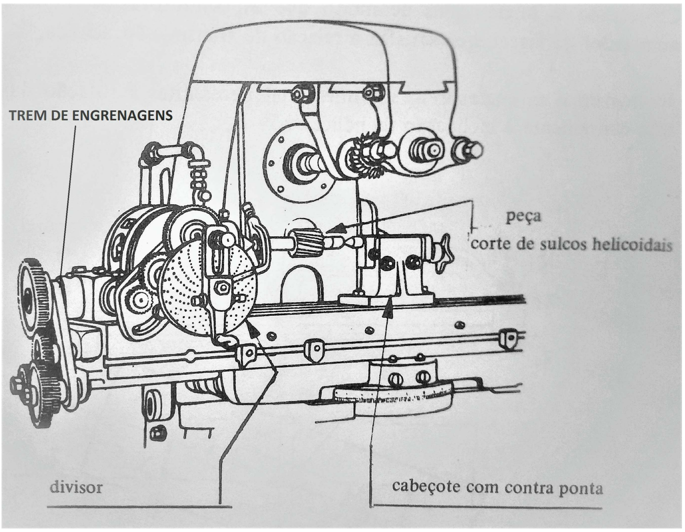


Figura 5.14: Fresadora montada com um trem de engrenagens.

Em relação a trigonometria aplicada a esse processo de fabricação, podemos exemplificar o cálculo do ângulo da hélice desse tipo de engrenagem. Para tal, consideremos a Figura 5.15 onde temos as representação de uma engrenagem helicoidal. As medidas dessa engrenagem são

1. P_c é o passo circular, ou seja, é a distância entre dois dentes consecutivos;

2. P_n é o passo normal ou ortogonal aos dentes da engrenagem, ou seja, a distância entre dois dentes consecutivos nessa engrenagem medidos no plano normal;

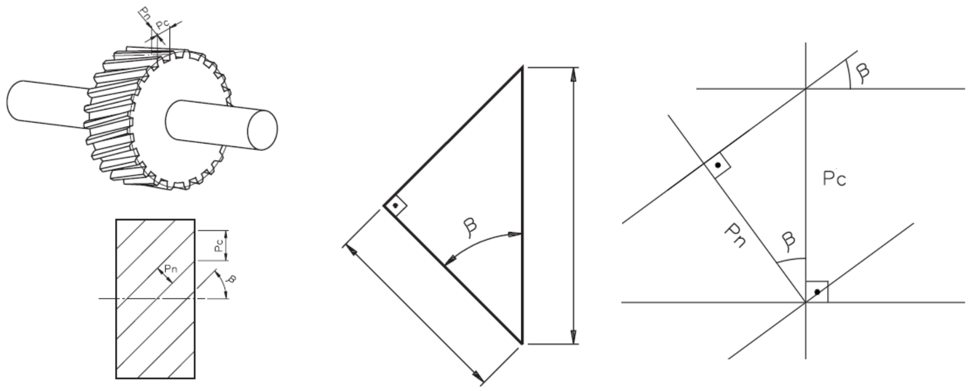


Figura 5.15: Nesse esquema de uma engrenagem helicoidal, temos que o cosseno do ângulo da hélice, β, será a razão do cateto adjacente, P_n, pela hipotenusa, P_c.

3. β é o ângulo de inclinação da hélice, em relação ao eixo de acoplamento da engrenagem.

Dessa forma, analisando a Figura 5.15, chegamos facilmente a seguinte relação

$$\cos\beta = \frac{P_n}{P_c}$$

As ranhuras de formato trapezoidal, também conhecidas como ranhuras de perfil Rabo de Andorinha (Figura 5.16), que são utilizadas na construção de guias para elementos de máquinas, também são um outro exemplo de aplicação da trigonometria em uma oficina mecânica. Encontramos na apostila do Telecurso 2000 profissionalizante [23] um exemplo prático de como calcular a medida entre dois cilindros que são inseridos para auxiliar a medição de tais rasgos para que se possa fazer a medida de maneira mais precisa. Descrevemos o exemplo a seguir.

Figura 5.16: As ranhuras no formato trapezoidal são muito utilizadas no acoplamento de guias de máquinas.

Imagine que você tenha de calcular a cota x da peça cujo desenho é mostrado na Figura 5.17, onde temos a vista frontal da peça superior mostrada na Figura 5.16. Nesse tipo de medição é necessário o uso de cilindros para que a medição seja mais precisa, sem que haja o risco do instrumento de medição, que normalmente nesse caso é o paquímetro, não atinja as "quinas" em que se medirá a peça.

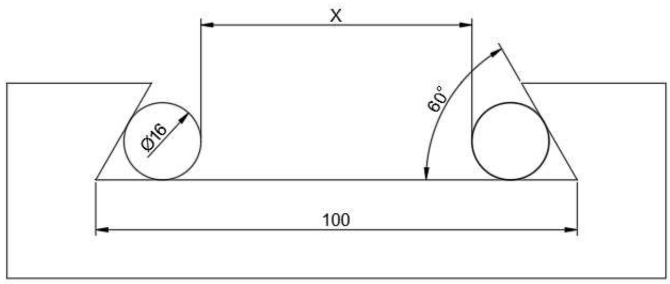


Figura 5.17: Projeção do perfil Rabo de Andorinha onde, as duas circunferência dentro do desenho não fazem parte da peça. São apenas dois cilíndros que são posicionados tangenciando o perfil do rasgo a fim de facilitar a medida do mesmo.

Para tal, tracemos um triângulo retângulo que ligue o centro da circunferência ao vértice inferior esquerdo do encaixe, como descrito na Figura 5.18.

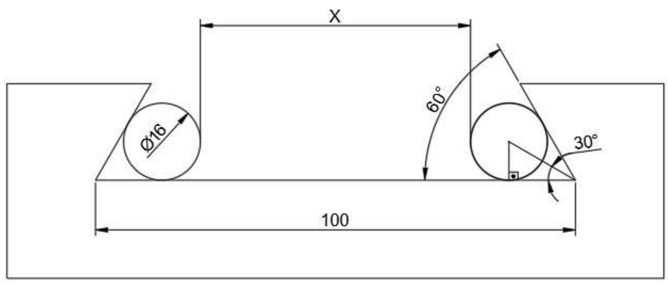


Figura 5.18: A medida x procurada corresponde à largura do rasgo da peça menos duas vezes o cateto adjacente do triângulo menos duas vezes o raio do cilíndro.

Para o cálculo do valor desejado, basta que determinemos a medida do cateto adjacente (ca) do triângulo desenhado com um dos vértices no centro da circunferência que representa a base do cilindro e depois basta subtrair da medida de 100 duas vezes o cateto adjacente e duas vezes o raio (R) da base do cilindro, ou seja

$$x = 100 - 2ca - 2R$$

onde

$$\tan 30 = \frac{\text{cateto oposto}(co)}{\text{cateto adjacente}(ca)}$$

rearranjando tempos

$$ca = \frac{8}{\tan 30} = \frac{8}{0{,}5774} = 13{,}85$$

Portanto

$$x = 100 - 2 \cdot 13{,}85 - 16 = 56{,}30$$

Na usinagem de superfícies que possuem certas inclinações, é possível que essas superfícies sejam usinadas utilizando a Mesa de Seno, que é um dispositivo de simples funcionamento, o que a torna apropriada para o uso no ensino, de fácil operação – o que a torna útil em uma oficina de usinagem – e precisa, afinal as medidas devem ser feitas com precisão de frações de milímetros. As imagens da Figura 5.19 ilustram a usinagem em fresadoras utilizando esse dispositivo. No Capítulo 6 descreveremos mais detalhadamente a Mesa de Seno.

(a) Mesa de Seno Montada em uma Fresadora.

(b) Peça Sendo Usinada em uma Fresadora com Mesa de Seno.

(c) Peça fixada em uma Mesa de Seno Magnética.

Figura 5.19: Mesas de Seno Instaladas em Fresadoras Convencionais.

5.4 Retificadoras

As retificadoras mecânicas são máquinas ferramentas especializadas na atividade de retificar, ou seja, corrigir e polir peças e componentes cilíndricos ou planos, a Figura 5.20 mostra um exemplo dessas máquinas. A retificadora é amplamente utilizada nos dias de hoje e de vital importância para as linhas de produção. Esse tipo de usinagem, na maioria das vezes, é posterior aos trabalhos realizados pelo torno ou pela fresadora, pois dessa forma, obtêm-se um melhor acabamento superficial das

Figura 5.20: Retificadora Mecânica

peças. Para que a medida precisa da peça seja obtida, é necessário que nos serviços anteriores ao da retificadora seja deixado na peças um sobremetal (medida maior do que a medida final) de cerca de 0,5 milímetros.

Em uma retificadora, o rebolo, uma ferramenta fabricada de material abrasivo cuja forma pode ser cilíndrica, ovalizada ou esférica, gira a uma alta rotação e retira pequenas quantidades de material da peça que esta sendo usinada. Isso faz com que a superfície acabada fique com um acabamento bem liso.

A forma, tamanho e a finalidade de uma retífica podem variar, mas todos os tipos de retíficas cilíndricas têm algumas características em comum. A peça de trabalho é usinada na máquina de tal forma que ela representa um eixo específico. Isso é fundamental para todos os tipos de retificadoras cilíndricas. Este eixo especificado permite que a máquina tenha também um parâmetro específico em torno do qual todo o trabalho seja feito na peça.

5.4.1 Aplicações Trigonométricas no Uso da Retificadora

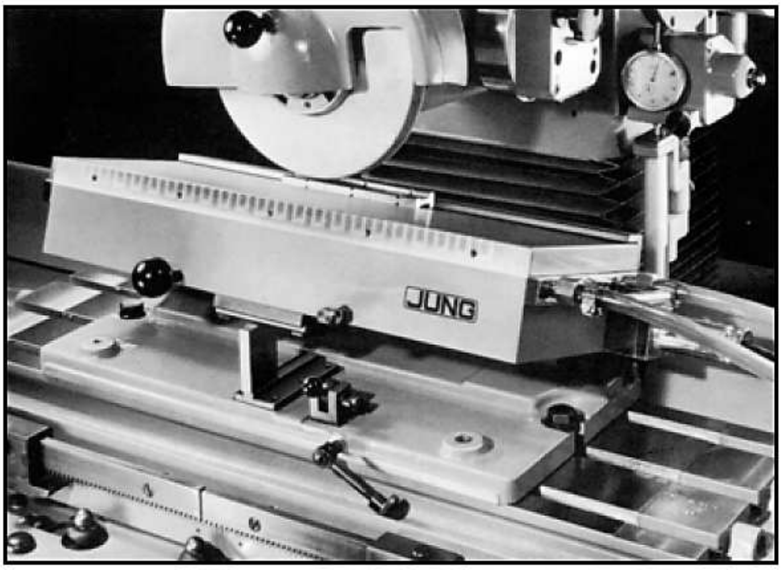


Figura 5.21: Retificadora utilizando uma Mesa de Seno Simples Magnética.

De acordo com Heirich Gerling [13] as peças planas que serão retificadas devem ser fixadas por meio de chapas e parafusos de apertos. Esse processo de fixação pode ser feito por meio de dispositivos especiais, como por exemplo as Mesas de Seno, como ilustra a Figura 5.21 em que temos a imagem de uma peça fixada à uma Mesa de Seno sendo retificada. Ainda de acordo com Gerling esses dispositivos especiais contribuem consideravelmente para a redução do tempo gasto para a fixação das peças, uma vez que, quando a superfície de fixação da peça está previamente usinada, essa poderá ser apoiada em cima de uma superfície magnética. Na verdade existem dois tipos de superfícies de fixação.

1. Superfície de fixação eletromagnética: necessitam de uma alimentação de corrente elétrica.

2. Superfície de fixação magnética permanente: não requerem qualquer tipo de alimentação de corrente elétrica, pois, com o simples acionamento de uma alavanca os ímãs permanentes são deslocados para uma posição de abertos, ou seja, de atração ou para a posição de fechados ou em curto-circuito magnético para desligar.

Em retificadoras é muito comum o uso de Mesas de Seno Magnéticas (Figura 5.21) para a fixação das peças que serão retificadas, pois, o uso dessas além de facilitar a fixação das peças, permite a execução de ângulos muito precisos nas peças.

6

Régua e Mesa de Seno

Na industria mecânica é necessário a fabricação ou medição de peças com geometria angular. Para que esse processo seja realizado de forma precisa, pode-se utilizar dois dispositivos bem semelhantes, a Régua e a Mesa de Seno. Neste capítulo vamos detalhar o uso e o funcionamento desses dispositivos. A principal diferença entre eles está em suas dimensões. Enquanto a Régua de Seno é uma barra estreita e rígida, a Mesa possui dimensões maiores, além de ser fabricada com até dois planos de inclinação.

No Capítulo 7 apresentamos sugestões de atividades de aula que utilizam esses dispositivos no ensino de trigonometria.

Vamos inicialmente descrever dois que auxiliam o uso da Mesa e da Régua de Seno o Relógio Comparador e os Blocos Padrão.

6.1 Relógio Comparador

Os relógios comparadores, como os mostrados na Figura 6.1a, são descritos por João Cirilo da Silva Neto [26] como sendo um *"instrumento de medição por comparação dotado de uma escala e um ponteiro, ligados por mecanismos diversos a uma ponta de contato capaz de perceber pequenas diferenças de planeza ou linearidade"*.

Estes instrumentos são apresentados em forma de relógio, com uma ponta apalpadora, de modo que, para um pequeno deslocamento linear do apalpador, obtém-se um deslocamento circular fortemente amplificado do ponteiro. Seu sistema é baseado em um mecanismo de engrenagens e cremalheiras.

A medição com o Relógio Comparador é denominada de medição indireta, porque o Relógio, como o próprio nome já diz, verifica as variações de medidas existentes em uma peça, ou seja, realiza medidas de pontos e o que é levado em consideração é o deslocamento do ponteiro do relógio ao longo de sua movimentação em uma direção qualquer da peça. A maioria dos relógios encontrados no mercado possuem a resolução de 0,01 mm, como descreve Lira [18], por isso, obtém-se grande precisão nas medidas quando utilizado.

Eles são utilizados em operações de nivelamento e alinhamento de peças e máquinas, como ilustra a Figura 6.1b, ou na avaliação de tolerâncias geométricas de peças [26].

(a) Relógio Comparador.

(b) Exemplo de utilização do Relógio Comparador.

Figura 6.1: Relógios Comparadores.

6.2 Blocos Padrão

Outro elemento importante na utilização da régua ou da mesa de seno são os chamados blocos padrão (Figura 6.2). Neto [26] descreve os Blocos Padrão como sendo peças em forma de pequenos paralelepípedos que possuem medidas com precisão em sua medida de mais ou menos 0,000 03 mm e são muito utilizados como padrões de referência na industria moderna, desde o laboratório até a oficina. Possuem uma enorme importância nas máquinas ferramentas para a usinagem de peças e em dispositivos de medição. A exatidão de um bloco padrão é garantida através do comprimento, da planicidade e do paralelismo entre as faces de medição.

Devido ao acabamento na superfície dos blocos padrão, eles aderem uns aos outros na montagem para atingir a medida desejada. João Cirilo da Silva Neto [26] define esse procedimento de *técnica do empilhamento*. Para a união dos blocos, posicionam-se um sobre o outro pelas superfícies de contato. Em seguida devem ser girados lentamente com uma ligeira pressão até que as faces fiquem alinhadas e perfeitamente aderidas.

Figura 6.2: Blocos Padrão.

6.3 Régua de Seno

A Régua de Seno, mostrada na Figura 6.3, é um instrumento de precisão empregado no dimensionamento e na execução da usinagem de peças com geometria angular e cujo princípio é o mesmo aplicado aos triângulos retângulos [17]. Sua utilização visa facilitar a medição de ângulos que não seriam possíveis com um transferidor (Figura 6.4), uma vez que a tolerância solicitada não é compatível com a resolução do instrumento. A Régua permite medir um ângulo qualquer utilizando relações trigonométricas.

Figura 6.3: Régua de Seno.

A régua de seno é uma barra de aço temperado e finamente acabada possuindo um formato retangular com dois rebaixos, um em cada extremidade, onde encontram-se fixados cilindros.

Seu funcionamento consiste em apoiar seus dois cilindros sobre uma superfície plana de referência deixando assim, a parte superior da régua de seno paralela a essa superfície.

A partir disso, eleva-se um dos lados dessa régua, apoiando o cilindro em um ou em uma associação de blocos padrão. Essa elevação permite compor ângulos exatos a partir da construção de um triângulo retângulo, como é descrito no livro *"Metrologia na Indústria"* [17]. O esquema da Figura 6.5 ilustra essa situação.

Uma vez que o comprimento L_1 é uma medida conhecida, e a altura E é a medida do Bloco Padrão utilizado para elevar a Régua, formamos um triângulo retângulo com hipotenusa e cateto oposto ao ângulo desejado conhecidos. Portanto para determinar o ângulo, α, basta utilizar a relação do seno, ou seja

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{E}{L_1} \tag{6.1}$$

Para que se possa realizar medições precisas, alguns cuidados devem ser observados

Figura 6.4: Modelo de um tipo de transferidor utilizado na indústria mecânica. Ele possui uma lamina que facilita o apoio da peça para a verificação do ângulo a ser medido.

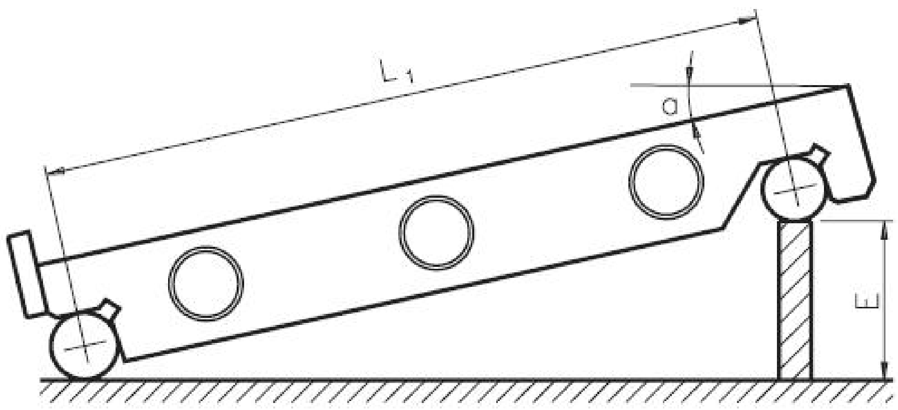


Figura 6.5: Esquema de utilização da régua seno.

durante a utilização da Régua de Seno

1. Colocar sobre a régua de seno a peça de trabalho de modo que a superfície de trabalho fique paralela a superfície de referência;

2. Fazer a verificação do paralelismo utilizando o Relógio Comparador e anotando a diferença encontrada, observando o lado mais baixo;

3. Fazer a correção da diferença da altura utilizando os Blocos Padrão, cuja medida deverá ser igual a diferença registrada pelo relógio comparador multiplicada pela razão entre comprimento da régua de seno e o comprimento medido na peça.

6.4 Mesa de Seno

As Mesas de Seno são dispositivos de grande precisão utilizados na indústria mecânica para dimensionar ou até mesmo realizar usinagem em peças que possuam algum ângulo a ser verificado ou usinado. Elas podem equipar diversos tipos de máquinas ferramentas, tais como Fresadoras convencionais ou CNC, Retificadoras planas, furadeiras, dentre outras. Descritivamente são duas placas de aço planas e paralelas. Entre elas, em extremos opostos, existem dois eixos de aço, com tratamento térmico superficial que espaçam as placas.

Seu funcionamento é bem semelhante ao de uma dobradiça de porta. A placa inferior pode ser fixada na mesa da Máquina operatriz. A parte superior é articulada em um dos eixos permitindo o ajuste da inclinação através dos blocos padrão para conseguir o ângulo desejado. A distância entre os eixos é muito importante no cálculo do ângulo, de modo que, as Mesas de Seno geralmente são identificadas por essa distância.

Assim como a Régua de Seno, a Mesa de Seno é assim nomeada porque para se obter a inclinação desejada, utiliza-se a relação trigonométrica Seno para calcular a altura dos Blocos Padrão.

6.4.1 Tipos de Mesa de Seno

A seguir, listaremos os principais modelos de Mesa de Seno encontradas no mercado

1. **Mesa de Seno Simples** (Figura 6.6): São utilizadas para a verificação de ângulos em peças com a geratriz paralela a base. Possuem um plano de inclinação que permite a verificação ou fabricação de planos inclinados com precisão angular. Quanto à face de assento da mesa, onde vai posicionada a peça de trabalho, podem ter a face com furação roscada (para prender a peça) ou face magnética que prende a peça rapidamente e dispensa o uso de parafusos, porcas e demais elementos de fixação.

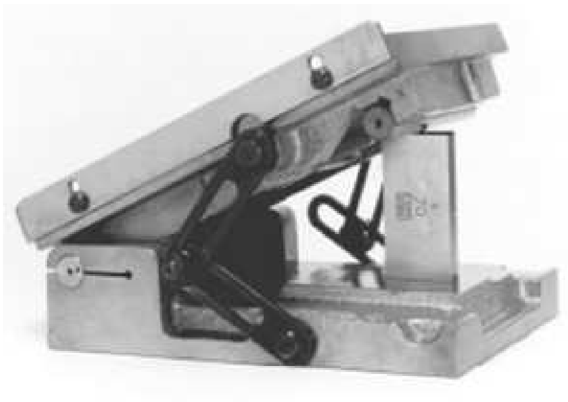


Figura 6.6: Mesa de Seno Simples.

2. **Mesa de Seno Dupla** (Figura 6.7): Possuem a mesma finalidade que a Mesa de Seno Simples, porém, possuem dois planos de inclinação que podem ser utilizados simultaneamente a fim de medir ou executar peças que possuem dois ângulos precisos em relação a um plano de referência. Também como a Mesa de Seno Simples, as peças podem ser fixadas nela através do sistema de porcas e parafusos ou através da atração magnética.

Figura 6.7: Mesa de Seno Dupla e Magnética.

3. **Mesa de Seno com Contrapontas** (Figura 6.8): Permitem a verificação ou fabricação de peças em formato cônico. As peças são fixadas através dos

chamados furos de centro, que são feitos nas faces das peças de formato cônico ou cilindro (Figura 6.9) com o objetivo de fixa-las entre pontas.

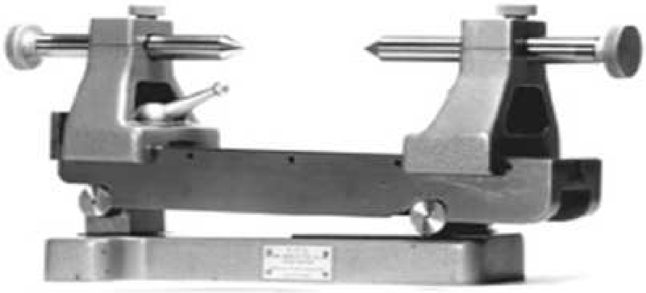


Figura 6.8: Mesa de Seno com Contraponta.

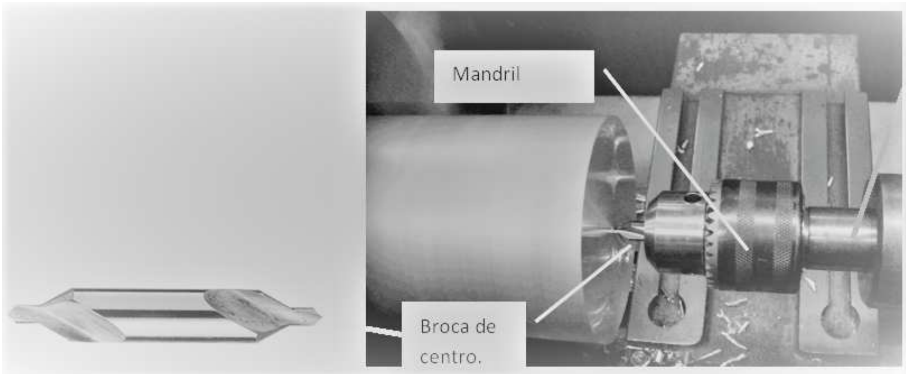


Figura 6.9: Execução de um furo de centro em uma peça para se fixada entre pontas.

6.4.2 Técnica de Utilização

Para utilizar a Mesa de Seno a fim de medir o ângulo de uma peça, é necessário que a mesa esteja sobre uma superfície plana e que se utilize como referência de comparação o Relógio Comparador.

Se o Relógio, ao se deslocar sobre a superfície a ser verificada, não alterar sua indicação, significa que o ângulo da peça é semelhante ao da Mesa (Figura 6.10).

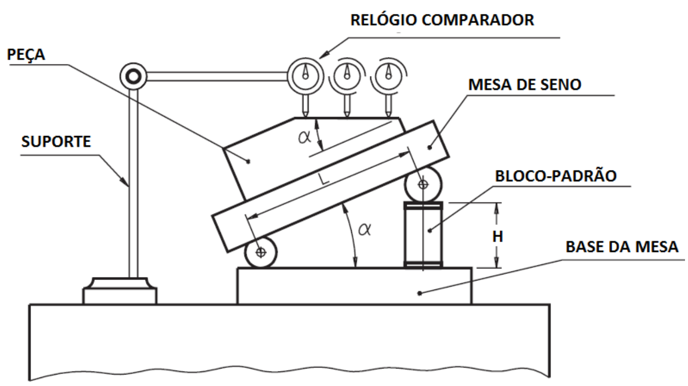


Figura 6.10: Esquema de utilização da Mesa de Seno.

Para a utilização da Mesa de Seno com Contrapontas, a peça cônica será fixada nas duas pontas da Mesa através dos furos de centro que se localizam nas duas faces da peça. Em seguida a Mesa será inclinada até que a superfície superior da peça fique paralela à base da mesa. Assim, a inclinação da mesa será igual a da peça, como ilustra a Figura 6.11.

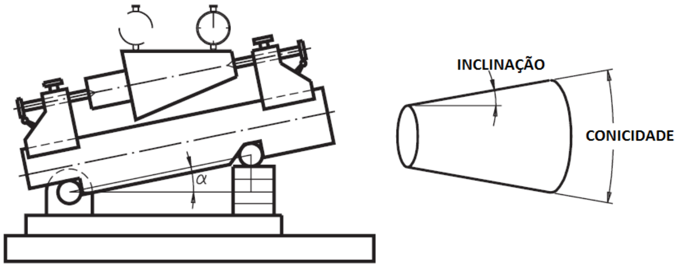


Figura 6.11: Esquema de utilização da Mesa de Seno com Contrapontas.

Um exemplo de aplicação extraído do manual técnico da revendedora *"Ital Produtos Industriais Ltda"* [1] ilustra a utilização de uma Mesa de Seno na usinagem de um plano inclinado, incluindo os cálculos necessários para determinar a elevação do plano móvel.

Para usinar um ângulo de 37,3° em um bloco de formato prismático utilizando uma mesa de seno simples onde a distância entre as duas barras cilíndricas (eixos) é igual a 100 mm, deve-se elevar o plano móvel (utilizando blocos padrão) a uma altura, h_{BP}, que será determinada através da relação trigonométrica seno, e o cálculo seria feito da seguinte maneira

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{altura dos Blocos Padrão } (h_{BP})}{\text{distância entre barras (eixos)}}$$

ou seja

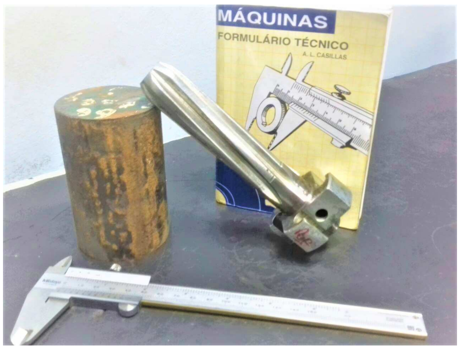
$$\operatorname{sen} 37{,}3° = \frac{h_{BP}}{100} \qquad\qquad h_{BP} = 100 \operatorname{sen} 37{,}3°$$

Verificando o valor do seno de 37,3° em uma tabela temos que

$$h_{BP} = 100 \cdot 0{,}6059884 = 60{,}598\,84\,\text{mm}$$

No que tange a utilização da Mesa de Seno Dupla, o método é igual ao mostrado anteriormente, porém há a formação de um plano com duas inclinações em relação ao plano que está apoiado na Mesa de Seno Dupla Nessa situação há necessidade do cálculo da altura dos Blocos Padrão para a inclinação dos dois planos da Mesa.

É muito comum em oficinas de Usinagem Mecânica o uso de tabelas trigonométricas e/ou o uso de Manuais de Usinagem. Um exemplo de manual muito comum em oficinas é o *"Cassilas, Manual Prático do Mecânico"* [8], mostrado pela Figura 6.12, que contém, dentre outras, as tabelas de seno, cosseno e tangente, nas unidades de medidas gruas e minutos.



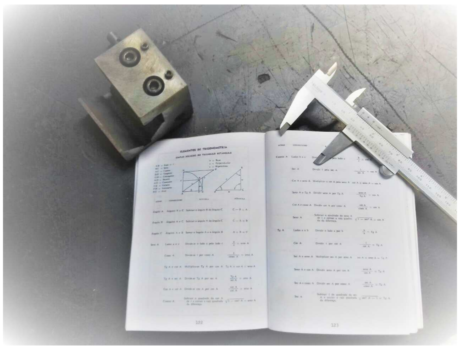


TABELA TRIGONOMÉTRICA

Graus (°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1
46	0,80	0,71934	0,694658	1,03553
47	0,82	0,731354	0,681998	1,072369
48	0,84	0,743145	0,669131	1,110613
49	0,86	0,75471	0,656059	1,150368
50	0,87	0,766044	0,642788	1,191754
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	*ñ existe*
180	3,14	0	1	0
270	4,71	-1	0	*ñ existe*
360	6,28	0	1	0

Figura 6.12: O Manual Prática do Mecânico Cassilas é um manual muito utilizado em oficinas de usinagem por possuir diversas tabelas trigonométricas, além de fórmulas e normas importantes para a fabricação de peças.

7

Planos de Aula

Baseados no que é proposto pela BNCC (página 16)

> "[. . .] contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares [. . .] com base no lugar e no tempo nos quais as aprendizagens estão situadas."
>
> "[. . .] conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar o alunos nas aprendizagens [. . .]"

iremos propor, neste capítulo, algumas experiências práticas para ensino de trigonometria utilizando uma Mesa de Seno construída com recursos simples, como mostrado no Apêndice C. Essas atividades foram realizadas com os alunos da escola SESI de Minas Gerais. As escolas da Rede SESI são destinadas prioritariamente para os filhos de industriários, ou seja, é uma escola que forma os alunos com o foco na indústria. Também, devido a esse fato, provavelmente, alguns pais dos alunos da escola tem contato com as máquinas ferramentas citadas nesse trabalho.

Iniciaremos com uma atividade para ser desenvolvida com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental Anos Finais, Seção 7.1. Em seguida, na Seção 7.2 apresentamos uma atividade semelhante para alunos do nono ano. Por fim apresentamos uma atividade interdisciplinar para o primeiro ano do Ensino Médio na Seção 7.3.

7.1 Cálculo da Altura de Um Galpão pelo Teorema de Tales

Como dito anteriormente, está atividade é destinada ao alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. Nela fazemos referência ao Teorema de Tales.

Objetivo Geral

- Desafiar os alunos a descobrirem a altura de um galpão (quadra da escola) sem precisar medi-lo diretamente.

Objetivos Específicos

- Medir distâncias;
- Relacionar segmentos proporcionais;
- Determinar a razão de proporcionalidade entre dois segmentos;

Objetos de Aprendizagem

- Unidades de Medidas;
- Porcentagem;
- Regra de Três Simples;
- Semelhança de Triângulos;
- Teorema de Tales.

Metodologia

Uma vez que os alunos já possuem como conhecimento prévio a Regra de Três Simples, eles irão ler um texto histórico que descreve como Tales determinou a altura da Pirâmide de Quéops. A partir dessa discussão, apresentaremos a Mesa de Seno mostrando que ela funciona como um triângulo retângulo em que a Hipotenusa é um dos planos e os cateto oposto é determinado a partir da medida dos Blocos Padrão utilizados para levanta-la.

Material Necessário

- Mesa de Seno;
- Apontador laser;
- Fita Métrica ou Trena.

Após a apresentação de todos os conteúdos supracitados, o aluno deverá, utilizando os materiais descritos, tentar obter uma forma de determinar a altura do galpão da quadra da escola.

Procedimentos Esperados

Os alunos utilizarão os conceitos do Teorema de Tales para determinar, a partir dos valores obtidos, a altura do galpão solicitado.

Deverão, inicialmente preparar todo o equipamento que irão utilizar, posicionando o laser de maneira correta em um dos planos da Mesa de Seno. Em seguida, medirão a distância entre uma das extremidades da Mesa de Seno e a parede mais próxima da quadra. Após, deverão erguer o plano da Mesa de Seno utilizando os Blocos Padrão até que a luz do laser atinja o ponto mais alto da quadra. Quando isso ocorrer, eles deverão utilizar os conceitos aprendidos e calcular a altura da quadra, de posse dos valores obtidos com o experimento.

Para finalizar, iremos comparar os resultados e verificar através da planta da escola, o percentual de erro da medida.

7.2 Cálculo da Altura de Um Galpão Utilizando Trigonometria

Está atividade, tem objetivo similar ao da anterior, porém utiliza outros objetos de aprendizagem. Uma vez que esta atividade será realizada por alunos do 9º ano, eles utilizarão os conceitos de trigonometria para resolvê-lo.

Objetivo Geral

- Desafiar os alunos a descobrirem a altura de um galpão (quadra da escola) sem precisar medi-lo diretamente.

Objetivos Específicos

- Medir distâncias;
- Utilizar as Relações Trigonométricas.

Objetos de Aprendizagens

- Unidades de Medidas;
- Porcentagem;
- Ângulos;
- Sistema e Equações;
- Triângulo Retângulo;
- Trigonometria.

Metodologia

Utilizando a Mesa de Seno e com os conhecimentos prévios de trigonometria, os alunos do 9º ano serão desafiados a determinar a altura do galpão da quadra da escola.

Material Necessário

- Mesa de Seno;
- Blocos Padrão;
- Apontador laser;
- Fita Métrica ou Trena.

Depois da apresentação de todos os itens citados, os alunos deverão determinar a altura do galpão da escola, utilizando os conteúdos aprendidos de trigonometria.

Procedimentos Esperados

Como os alunos do 9º ano já conhecem as relações trigonométricas no triângulo retângulo, eles terão que, utilizando a Mesa de Seno juntamente com os Blocos Padrão e o laser, posicioná-la em algum ponto e erguer um de seus planos utilizando os Blocos Padrão até que o laser atinja o ponto mais alto do galpão. Em seguida, utilizando a relação dos Senos irão calcular o ângulo em que ela foi elevada. Posteriormente, irão avançar a mesa a uma determinada distância, por eles mesmos definida, e novamente erguerão um de seus planos utilizando os Blocos até que a luz do laser atinja o ponto mais alto do galpão. Baseados nessa nova medida, calcularão o novo ângulo em que a Mesa foi elevada.

A partir dos valores obtidos nas duas medições, incluindo a distância em que eles deslocaram a mesa, eles, utilizando as relações trigonométricas básicas, irão calcular a altura do galpão.

Para finalizar, iremos comparar os resultados e verificar através da planta da escola, o percentual de erro da medida.

7.3 Utilização da Mesa de Seno para o Cálculo de Forças

Essa atividade visa atender a BNCC [11] na competência específica número 3 da Matemática que sugere atividades interdisciplinares.

> "Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções."

Aqui além dos conhecimentos de Trigonometria, se faz necessário o conhecimento de conteúdos físicos para solucionar um problema contextualizado.

Objetivo Geral

- Simular as forças necessárias para erguer uma carga a partir de um plano inclinado.

Objetivos Específicos

- Ler e interpretar tabelas;
- Construir sentenças ou esquemas para a resolução de problemas;
- Reconhecer a natureza dos fenômenos envolvidos, situando-os dentro do conjunto de fenômenos da Física e identificar as grandezas relevantes em cada caso;
- Reconhecer a relação entre diferentes grandezas.

Objetos de Aprendizagens

- Leis de Newton;
- Força de atrito;
- Decomposição de vetores;
- Unidades de Medida;
- Ângulos;
- Triângulo Retângulo;
- Trigonometria.

Metodologia

Utilizando os instrumentos solicitados para essa montagem, os alunos irão determinar, através dos conhecimentos prévios de Dinâmica, as condições necessárias para que dois corpos ligados por meio de uma corda permaneçam em equilíbrio e, após chegarem a uma conclusão, testarão o resultado obtido na prática, usando a Mesa de Seno como o plano inclinado.

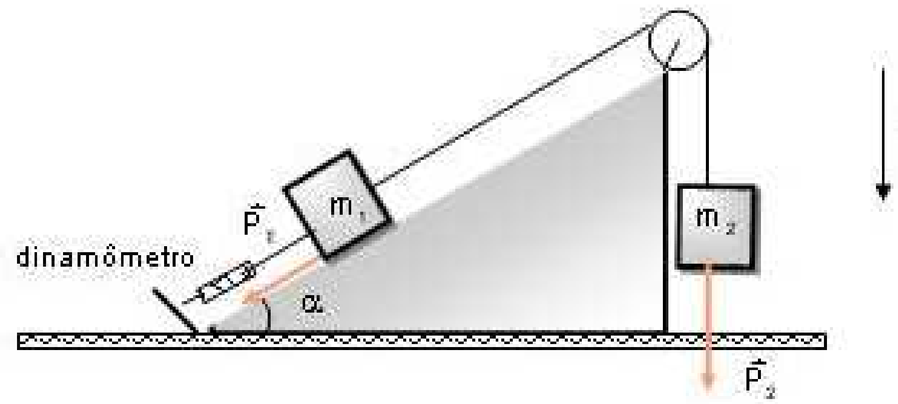


Figura 7.1: Dois corpo em equilíbrio unidos por uma corda em um plano inclinado.

Materiais Necessários

- Mesa de Seno;
- Blocos Padrão;
- dinamômetro;
- pesos;
- roldana fixa;
- fitas adesivas para fixação dos elementos.

Procedimentos Esperados

Os alunos deverão realizar essa experiência prática determinando as relações necessárias para que os dois pesos que estarão unidos por uma corda que passa por uma roldana, assim como ilustrado pela Figura 7.1, permaneçam em equilíbrio para cada ângulo em que a Mesa de Seno, que nesse caso funcionara como um plano inclinado e, após realizados os cálculos, testarão os resultados obtidos na prática.

8 Considerações Finais

A possibilidade de aplicar os conceitos aprendidos dentro de uma sala de aula dá sentido ao aprendizado, principalmente quando o público em questão são os alunos da Educação Básica que necessitam de uma maior motivação para que possam desenvolver de forma efetiva todas as competências e habilidades que devem ser consolidadas nesse nível de ensino.

Este trabalho descreveu algumas aplicações da trigonometria dentro de uma Oficina de Usinagem Mecânica, usando como justificativa as competências propostas na Base Nacional Comum Curricular, com o intuito de criar possibilidades de mostrar aos alunos que os objetos de aprendizagem que são trabalhados na escola, são conhecimentos que diversos profissionais utilizam em seu dia a dia.

A partir da análise de um dispositivo utilizado tanto na aferição, quanto na execução de peças, vimos a possibilidade de construir a Mesa de Seno e aplica-lá no desenvolvimento de alguns conteúdos escolares, tanto diretamente na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, e dessa forma, possibilitar projetos interdisciplinares.

Atividades práticas como as propostas no Capítulo 7 proporcionam maior envolvimento dos alunos, além de desenvolver o trabalho em equipe e a cooperação, que a BNCC cita como uma das dez competências gerais que a Educação Básica deve garantir aos docentes.

A

Base Nacional Comum Curricular

Apresentamos aqui uma análise os principais tópicos de cada eixo no Ensino Fundamental Anos Finais presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A.1 Números

Essa unidade temática tem como objetivo desenvolver o pensamento numérico que implica no conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Durante o desenvolvimento da ideia de números é necessário que o aluno desenvolva as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, dentre outros. E, para que o processo de desenvolvimento de competências ocorra, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos e, no estudo desses campos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

No segmento Ensino Fundamental Anos Finais a expectativa é que o alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados e utilizando estratégias diversas com a compreensão dos processos neles envolvidos. É interessante que para o aprofundamento na noção de número sejam utilizados problemas, principalmente os geométricos, além do estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos.

Porém, como o "pensamento numérico" não se completa apenas com os objetos de estudo (conjunto de conteúdos a serem estudados) citados, esse pensamento é ampliado e aprofundado com situações-problema que envolvam conteúdos das demais unidades temáticas.

A.2 Álgebra

A finalidade dessa unidade temática é o desenvolvimento do "pensamento algébrico" que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas com a utilização de letras e outros símbolos.

Para que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário que os alunos sejam capazes de identificar regularidades e padrão de sequencias numéricas e não numéricas. Estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre diversas representações gráficas e simbólicas para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Nesse eixo, as ideias fundamentais da matemática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

Resumidamente, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações.

No que tange o Ensino Fundamental Anos Finais, é nessa fase que o alunado deverá compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer a generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequencia numérica, indicar um valor desconhecido em uma sequencia algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. Também será nessa fase que os discentes estabeleceram as conexões: variável $\Rightarrow$ função e incógnita $\Rightarrow$ equação.

A.3 Geometria

É nessa unidade que grande parte do conteúdo matemático dessa dissertação se "encaixa", obviamente, com a ressalva de que, como descrito na BNCC [11]: "cinco unidades correlacionadas", ou seja, não elas não são totalmente independentes. A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Dessa forma, o "pensamento geométrico" se desenvolverá com o estudo de posição e deslocamento no espaço, formas e relações de elementos de figuras planas e espaciais. Esse pensamento se faz necessário para a investigação de propriedades, a criação de conjecturas e a produção de argumentos geométricos convincentes.

Nessa temática, as principais ideias matemáticas e fundamentais são: construção, representação e interdependência.

No Ensino Fundamental Anos Finais, deve-se priorizar as tarefas que analisam e produzam transformações e ampliações/ reduções de figuras planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ser destacados nesse segmento de modo que os alunos consigam reconhecer as condições necessárias e suficientes para a obtenção de triângulos congruentes ou semelhantes e para que saibam aplicar esse conhecimento na realização de demonstrações simples de forma a contribuir com o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo.

Nesse contexto, há de se destacar a aproximação da Álgebra com a Geometria no estudo do plano cartesiano, por meio da Geometria Analítica. Dessa forma, pretende-se que a Geometria não fique reduzida a mera aplicação de fórmulas e sim seja uma ferramenta para a construção do pensamento.

A.4 Grandezas e Medidas

Esse eixo temático favorece a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento ao propor o estudo das medidas e das relações entre elas. Além disso, essa unidade contribui para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico.

O que se espera para o Ensino Fundamental Anos Finais é que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas que envolvam essas grandezas com o uso das unidades de medida padronizadas mais usuais. Também é esperado que os alunos ao final desse segmento, sejam capazes de estabelecer e utilizar as relações entre essas grandezas e entre elas e grandezas não geométricas, para o estudo de grandezas derivadas como a densidade e a velocidade.

Nessa fase de escolaridade, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de triângulos, quadriláteros e círculos, além de, volumes de prismas e cilindros.

A.5 Probabilidade e Estatística

Nessa unidade temática são estudados o tratamento de dados e a incerteza. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Portanto, é necessário desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de forma a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos.

Nessa unidade temática o uso de tecnologias como calculadoras (para auxiliar na avaliação e comparação dos resultados) e as planilhas eletrônicas (para a construção de tabelas e gráficos) merecem um destaque especial.

O desenvolvimento desse eixo temático no Ensino Fundamental Anos Finais deve ser feito por meio de atividades nas quais os alunos fazem experimentos aleatórios e simulações para comparar os resultados obtidos com a probabilidade teórica. Nesse segmento também é esperado que os alunos sejam capazes de planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas, incluindo medidas de tendência central além da construção de tabelas e de gráficos.

A BNCC também trás um quadro para cada ano letivo dos Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais, ou seja, do 1º ao 9º ano, descrevendo todas as unidades temáticas, objetos de aprendizagem e habilidades, sendo que as habilidades sempre se articulam entre si, uma vez que, as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes.

A seguir, será apresentada uma lista, com a descrição dos conteúdos importantes para o estudo da trigonometria, incluindo as habilidades desenvolvidas em cada fase, em cada ano do Ensino Fundamental Anos Finais:

6º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados. Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*. Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. (EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc).
Grandezas e medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume. Ângulos: noção, usos e medida.	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento. (EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.

		(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

7º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Triângulos: construção de existência e soma das medidas dos ângulos internos	(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
	Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. (EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Grandezas e medidas	Problemas envolvendo medições	(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

		(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência por áreas.

8º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º e polígonos regulares.
	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas.	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Grandezas e medidas	Área de figuras planas	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), como o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica. (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de áreas de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medidas de terrenos.

9º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
	Relações métricas no triângulo retângulo	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
	Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

Grandezas e medidas	Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas	(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

B

Habilidades e Competências Desenvolvidas na Rede SESI

Lista de Habilidades e competências desenvolvidas na Rede SESI do Ensino Fundamental Anos Finais [24].

6º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.
	Características das figuras planas	H2. Reconhecer, em contextos diversos, lados, vértices e ângulos de formas geométricas planas.
	Perímetros de figuras planas	H3. Identificar, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem.
		H4. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.
		H5. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.
Grandezas e medidas	Medidas de comprimento	H1. Compreender as transformações das unidades de medida de comprimento, utilizando-as em situações-problema.
	Evolução histórica	H2. Compreender a evolução das medidas de tempo e dos seus instrumentos na história da civilização.

	Transformações de medidas de comprimento	H3. Compreender as unidades usuais de medidas de comprimento, utilizando-as em situações-problema.
	Transformações de medidas de superfície	H1. Reconhecer as conversões entre unidades usuais de medidas de superfície, utilizando-as em situações-problema.

7º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.
	Características das figuras planas	H2. Reconhecer, em contextos diversos, lados, vértices e ângulos de formas geométricas planas.
	Perímetros de figuras planas	H3. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.
	Área de figuras planas	H4. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.

8º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Relacionar os conceitos de ponto, retas e planos.
	Características das figuras planas	H2. Compreender o conceito de ângulo, suas partes, propriedades e lugares geométricos.
	Perímetros de figuras planas	H4. Compreender, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem.
	Áreas de figuras planas	H5. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que os compõem.
	Semelhanças de figuras planas	H6. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.

		H7. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana. H8. Compreender, em contextos diversos, a congruência de figuras planas. H9. Compreender, em contextos diversos, simetria em figuras geométricas.

9º ANO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana	H1. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas.
	Características das figuras planas	H2. Compreender, em contextos diversos, os polígonos e os elementos que os compõem.
	Perímetros de figuras planas	H3. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que os compõem.
	Áreas de figuras planas	H4. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas.
	Semelhanças de figuras planas	H5. Compreender em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana.
	Congruência de figuras planas	H6. Compreender, em contextos diversos semelhança de figuras planas.
	Relações métricas no triângulo retângulo	H7. Compreender, em contextos diversos, as relações métricas do triângulo retângulo.
	Relações trigonométricas nos triângulos	H8. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas no triângulo retângulo. H9. Compreender, em contextos diversos, simetria em figuras geométricas.

Em relação a Matriz Curricular da rede SESI/MG, habilidades referentes à Trigonometria só são estudados no 2º Ano [25]. A seguir, listamos na integra, todos os conteúdos referentes a esse objeto de aprendizagem descritos na Matriz Curricular dessa rede de ensino.

2º ANO - ENSINO MÉDIO

Unidades Temáticas	**Objetos de Conhecimento**	**Habilidades**
Espaço e Forma	Noções fundamentais da geometria plana Características das figuras planas Perímetros de figuras planas Áreas de figuras planas Semelhanças de figuras planas Congruência de figuras planas Relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência Relações trigonométricas nos triângulos e na circunferência	H1. Compreender conceitos de ponto, reta e plano. H2. Compreender, em contextos diversos, as principais propriedades das figuras planas. H3. Compreender lados e vértices e ângulos de formas geométricas planas. H4. Compreender, em contextos diversos, a circunferência, o círculo e os elementos que o compõem. H5. Reconhecer, em contextos diversos, a composição e decomposição de figuras planas. H6. Compreender, em contextos diversos, o conceito de perímetro e área de uma figura plana. H7. Compreender semelhança de figuras planas. H8. Compreender congruência de figuras planas. H9. Compreender relações métricas no triângulo retângulo. H10. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas em um triângulo qualquer. H11. Compreender, em contextos diversos, as relações trigonométricas na circunferência. H12. Resolver problemas de simetrias em figuras geométricas.

C

Construindo uma Mesa de Seno

Nessa seção, proporemos a construção de uma Mesa de Seno. Ela poderá ser utilizada em diversas atividades práticas, como as sugeridas no Capítulo 7 para que os alunos possam ter contato com algumas aplicações da trigonometria e, também, utiliza-lá como ferramenta em outras áreas do conhecimento, como a Ciência da Natureza em especial na Física onde, por exemplo, é muito importante o conhecimento das forças atuantes em um corpo situado em um plano inclinado e, dessa forma, com a utilização da Mesa de Seno, o aluno poderá controlar o ângulo de inclinação do plano.

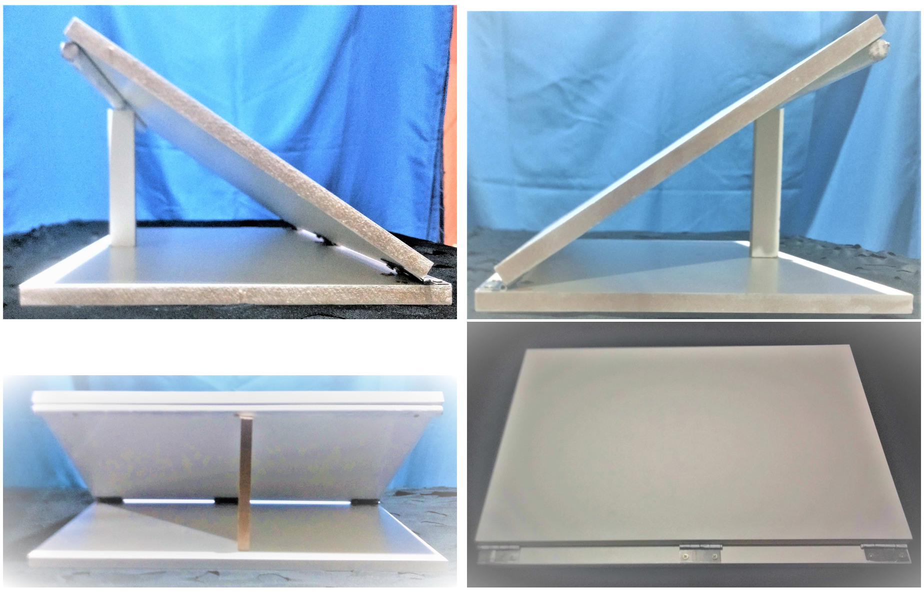


Figura C.1: Vistas frontal, laterais esquerda e direita e vista posterior da Mesa de Seno de madeira

Para a construção da Mesa de Seno, serão necessários os seguintes materiais:

- Duas placas de MDF de 15mm de espessura com 80cm de comprimento por 40 cm de largura.
- Três dobradiças pequenas.

- Dez parafusos para madeira.
- Uma chave Philips.
- Uma furadeira (opcional)
- Uma broca para madeira de 3mm de diâmetro.

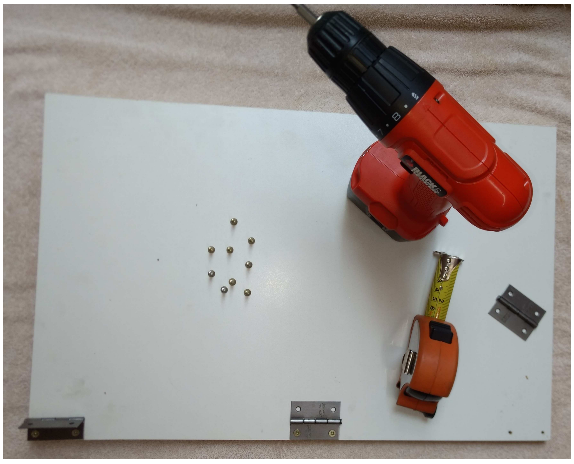


Figura C.2: Materiais necessários para a construção de uma Mesa de Seno Didática.

Passos para a montagem da Mesa:

1. Posicione as duas chapas de MDF de maneira que elas fiquem perfeitamente alinhadas na direção da largura e, recuada cerca de 5 cm para que possa ser fixado o pedaço de madeira cilíndrico e não atrapalhe o fechamento delas.
2. Fixe as três dobradiças de maneira equidistante.
3. Fixe o pedaço cilíndrico de madeira (pode ser um pedaço de cabo de vassoura) do lado oposto as dobradiças.

Fixadas as chapas, agora resta cortar os calços de madeira que funcionarão como "Blocos Padrão" e serão muito importantes para elevar a mesa e determinar seu ângulo de inclinação. Para isso, basta serrar alguns pedaços de MDF ou, até mesmo de cabo de vassoura. Esses Blocos Padrão precisam ter várias medidas disponíveis para que se possa controlar a elevação do plano a Mesa.

Após a execução desses simples passos, teremos disponível um dispositivo que ajudará o professor a colocar em prática alguns conceitos de trigonometria e poderá, com isso, desmistificar aquela famosa pergunta que citei no início desse trabalho e que intriga parte de docentes e discentes: "Para que serve isso".

Bibliografia

[1] *ITAL Produtos Industriais LTDA.* http://www.italpro.com.br/uploads/produtos/manuais, Acessado em 15/12/2017.

[2] *Sant'Ana Fresadora.* http://fresadorasantana.com.br/site/downloads.html, Acessado em 20/01/2018.

[3] Aaboe, Asger: *Episódios da História Antiga da Matemática.* SBM, 3ª edição, 2013, ISBN 9788585818951.

[4] Antunes, Izildo e Geraldo Alves Dionisio: *Torno Mecânico.* Érica, 1ª edição, 1996, ISBN 8571943222.

[5] Barbosa, João Lucas Marques: *Geometria Euclidiana Plana.* SBM, 10ª edição, 2006, ISBN 8585818026.

[6] Bini, Edson, Ivone D. Rabello e Márcio Pugliesi: *Máquinas Ferramentas.* Hemus, 1975.

[7] Boyer, Carl B.: *História da Matemática.* Blücher, 2ª edição, 1996, ISBN 9788521200239.

[8] Casillas., A. L.: *Máquinas - Formulário Técnico.* Editora Mestre Jou, 3ª edição, 1996, ISBN 8587068032.

[9] Costa, Nielce M. Lobo da: *A História da Trigonometria.* PUC SP. http://ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf, Acessado em 25/01/2018.

[10] Dolce, Osvaldo e José Nicolau Pompeo: *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 9.* Editora Atual, 7ª edição, 1985, ISBN 8570562683.

[11] Educação Brasil, Ministério da e Conselho Nacional de Secretários de Educação.: *Base Nacional Comum Curricular*, Dezembro 2016. http://basenacionalcomum.meg.gov.br/#/site/inicio, Acessado em 18/03/2018.

[12] Freire, José Mendonça: *Introdução às Máquinas Ferramentas.* Editora Interciência LTDA, 1989.

[13] Gerling, Heirich: *À volta da Máquina - Ferramenta.* Editora Reverté LTDA, 1977.

[14] Iezzi, Gelson: *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 3.* Atual, 1998, ISBN 8570562691.

[15] Kiyukawa, Rokusaburo, Carlos Tadaschi e Kazuhito Yamamoto: *Os Elos da Matemática - Volume 1.* Editora Saraiva, 1ª edição, 1991, ISBN 8502008609.

[16] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.* SBM, 10ª edição, 2012, ISBN 9788585818838.

[17] Lira, Francisco Adval de: *Metrologia na Indústria.* Érica, 9ª edição, 2013, ISBN 9788536503899.

[18] Lira, Francisco Adval de: *Metrologia Dimensional: Técnicas de Medição e Instrumentos para Controle e Fabricação Industrial.* Érica, 2015, ISBN 9788536512150.

[19] Mendonça Freire, José de: *Tecnologia Mecânica - Volume 4.* Livros Técnicos E Científicos Editora S.A., 1975.

[20] Pavanello, Regina Maria: *A Pesquisa na Formação de Professores para a Escola Básica.* Educação Matemática em Revista, 2003.

[21] Pitombeira, João Bosco e Tatiana Marins Roque: *Tópicos de História da Matemática.* SBM, 1ª edição, 2012, ISBN 8585818026.

[22] Rossi, Mário: *Máquinas Operatrizes Modernas - Volume 2.* Urico Hoepli - Milano, 1970.

[23] Scaramboni, Antonio, Carlos Alberto Gaspar e Celia Regina Domingos Talavera: *TeleCurso 2000 - Mecânica - Cálculo Técnico*, 1997, ISBN 9788525015297.

[24] SESI: *Matriz Curricular de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais*, 2014.

[25] SESI: *Matriz Curricular de Matemática do Ensino Médio*, 2014.

[26] Silva Neto, João Cirilo da: *Metrologia e Controle Dimensional - Conceitos, Normas e Aplicações.* Campus, 2012, ISBN 9788535255799.

[27] Stemmer, Caspar Erich: *Ferramentas de Corte II.* Editora da UFSC, 1995.