ALDO HENRIQUE DE SOUZA MEDEIROS

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS DE BRESSE COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL E DISSIPAÇÃO NA FRONTEIRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T
M488c
2016

Medeiros, Aldo Henrique de Souza, 1992-
Comportamento assintótico de sistemas de Bresse com dissipação friccional e dissipação na fronteira / Aldo Henrique de Souza Medeiros. – Viçosa, MG, 2016.
viii, 97f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Margareth da Silva Alves.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 95-97.

1. Matemática aplicada. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Análise matemática. 4. Teoria assintótica. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 510

ALDO HENRIQUE DE SOUZA MEDEIROS

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SISTEMAS DE BRESSE COM DISSIPAÇÃO FRICCIONAL E DISSIPAÇÃO NA FRONTEIRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 19 de fevereiro de 2016.

Anderson Albuquerque de Araujo
(Coorientador)

André Junqueira da Silva Corrêa
(Titular Interno)

Huy Hoang Nguyen
(Titular Externo)

Margareth da Silva Alves
(Orientadora)

Dedico este trabalho aos meus pais,
Adão e Vera.

A fé e a razão constituem como
que as duas asas pelas quais o
espírito humano se eleva à
contemplação da verdade.

João Paulo II

Agradecimentos

Em primeiro lugar sou muitíssimo grato aos meus pais, Adão e Vera, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são sem dúvida os meus primeiros e eternos professores, graças a vocês consegui chegar onde estou, e sei que posso contar com vocês para conseguir ir mais além.

Agradeço à minha orientadora, Margareth, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções e incentivo. Enfim pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço aos meus irmãos e meus avós, pelo companheirismo, força e alegria.

Agradeço de uma forma especial minha namorada que sempre esteve ao meu lado me incentivando, dando apoio.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo

MEDEIROS,A. H. S., M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2016. **Comportamento assintótico de sistemas de Bresse com dissipação friccional e dissipação na fronteira**. Orientadora: Margareth da Silva Alves. Coorientador: Anderson Luiz de Albuquerque Araujo.

Neste trabalho estudaremos o comportamento assintótico de sistemas dissipativos com aplicações à modelagem de materiais elásticos. Mais especificamente, estuda-se a existência, unicidade e comportamento assintótico de dois sistemas tipo-Bresse, um com dissipação dada pelo atrito e outro com efeitos dissipativos na fronteira. O objetivo é estabelecer condições que assegurem a estabilidade exponencial e a polinomial do semigrupo associado. Para isso, usaremos a abordagem da teoria de semigrupos de operadores lineares de classe C_0, propriedades do conjunto resolvente e do operador resolvente do gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo e técnicas multiplicativas.

Abstract

MEDEIROS A. H. S., M.Sc. Universidade Federal de Viçosa, February, 2016. **Asymptotic behavior of Bresse systems with frictional dissipation and dissipation on the border**. Adiviser: Margareth da Silva Alves. Co-Adviser: Anderson Luiz de Albuquerque Araujo.

In this paper we study the asymptotic behavior of dissipative systems with applications to modeling of elastic materials. More specifically, it is studied existence, uniqueness and asymptotic behavior of two type-Bresse systems, with dissipation given by friction and one with dissipative effects at the border. The goal is establish conditions that ensure the exponential stability and polynomial the semigroup associated. For this, we will use the approach of semigroup theory operators linear class C_0 , resolvent set property and resolving operator infinitesimal generator of a C_0 -semigrupo and technical multiplicative.

Introdução

O estudo dos modelos para vigas com cargas atuantes interna ou externamente é de grande importância para o desenvolvimento da alta engenharia, já que a viga é um modelo de estrutura flexível amplamente utilizado em projetos de estrutura e mecânicos, tais como projetos de pontes, edifícios, aviões, plataformas de petróleo, dentre outros [1]. Nas últimas décadas, importantes mecanismos dissipativos foram utilizados para estabilizar modernas estruturas em engenharia quando submetidas a oscilações não desejáveis. De modo que conhecer e entender os efeitos de alguns mecanismos dissipativos se torna fundamental para controlar o movimento de grandes estruturas cujas oscilações são modeladas por equações diferenciais parciais que evolui com o tempo.

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um ramo fértil para a pesquisa em Equações Diferenciais Parciais. Para se obter esse comportamento, diferentes métodos analíticos têm sido utilizados por vários autores, sempre adequados aos problemas em questão. Neste trabalho, usaremos o método que explora as propriedades do semigrupo associado ao sistema dissipativo (ver [26], [27]).

O objetivo deste trabalho é investigar o comportamento assintótico das soluções de sistemas de Bresse, também conhecido como problema do arco circular (para mais detalhes veja Lagnese e outros [15]). Consideramos um arco circular de raio R e comprimento L em sua posição de equilíbrio, constituído de material linear, isotrópico e linearmente elástico; o movimento da viga é modelado pelas seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - S_x - lN &= F_1 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - M_x + S &= F_2 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_1 w_{tt} - N_x + lS &= F_3 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),
\end{aligned} \tag{1}$$

onde t denota a variável temporal e x a variável espacial. As funções $\omega = \omega(x,t)$, $\varphi = \varphi(x,t)$ e $\psi = \psi(x,t)$ são, respectivamente, os deslocamentos longitudinais, verticais e do ângulo de cisalhamento. Aqui,

$$N = k_0(\omega_x - l\varphi), \quad S = k(\varphi_x + \psi + l\omega) \quad \text{and} \quad M = b\psi \tag{2}$$

são as relações tensão-deformação para o comportamento elástico. Além disso, $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = k'GA$, $k_0 = EA$, $b = EI$, $l = R^{-1}$, ρ é a densidade do material, E é o módulo de elasticidade, G é o modulo de cisalhamento, k' é o fator de cisalhamento, A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia da seção tranversal e R é o raio de curvatura (figura 1). Finalmente, F_1, F_2 e F_3 são forças externas.

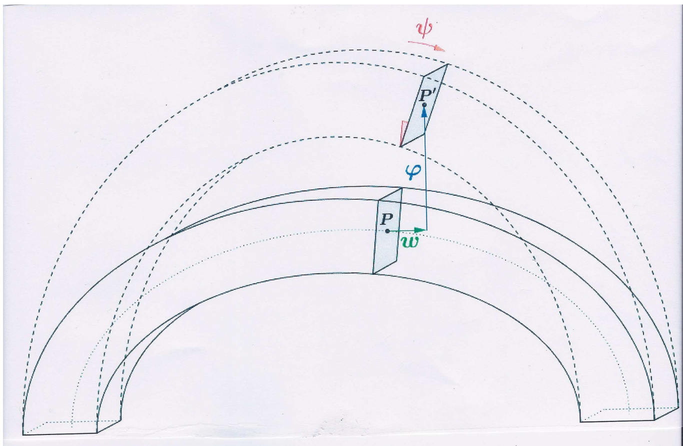

Figura 1: *Pedro Roberto de lima, Sistema de Bresse termoelástico não linear: Existência global e estabilidade exponencial, PGMAC 2015.*

Substituindo (2) em (1) encontramos o sistema de Bresse clássico

$$\begin{aligned}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) &= F_1 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) &= F_2 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),\\
\rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) &= F_3 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty).
\end{aligned} \tag{3}$$

Consideramos este modelo com as seguintes condições de fronteiras

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0, t \in (0,\infty), \tag{4}$$

ou

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = \omega_x(0,t) = \omega_x(L,t) = 0, t \in (0,\infty), \tag{5}$$

e condições iniciais

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \psi(\cdot,0) = \psi_0, \psi_t(\cdot,0) = \psi_1, \omega(\cdot,0) = \omega_0, \omega_t(\cdot,0) = \omega_1 \tag{6}$$

Seja $(\varphi,\ \psi,\ \omega)$ uma solução regular do sistema de Bresse (3)-(6), para $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. A energia total associada é dada por

$$\begin{aligned}
E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L &\left(\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2\right) dx\\
&+ \int_0^L \left(k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + b|\psi_x|^2 + k_0|\omega_x - l\varphi|^2\right) dx.
\end{aligned}$$

Com alguns cálculos simples vemos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Isto significa que a energia se mantém constante ao longo do tempo (o sistema (1) - (6) é conservativo) e, portanto, a solução do sistema não decai. Entretanto, acrescentando termos dissipativos ao sistema, podemos encontrar algum tipo de decaimento das soluções. Uma questão importante no sistema de Bresse é encontrar uma dissipação mínima, através da qual as suas soluções decaem uniformemente para zero com o tempo. Recentemente, pesquisadores da área têm se dedicado a investigar esses problemas.

Diferentes tipos de amortecimento (*damping*) foram introduzidos no sistema de Bresse e vários resultados de estabilidade exponencial e polinomial foram obtidos. Na maioria desses trabalhos, quando somente uma dissipação é efetiva sobre o sistema, a conclusão é que a estabilidade exponencial é válida se, e somente se, as velocidades de propagação de ondas são as mesmas, isto é,

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \quad \text{e} \quad k = k_0. \tag{7}$$

A seguir, recordamos alguns desses trabalhos.

Em Fatori e Rivera [16], os autores analisaram o sistema termoelástico de Bresse com $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ e leis constitutivas dadas por

$$S = \kappa(\varphi_x + \psi + lw), \quad M = b\psi_x - \delta\theta, \quad N = \kappa_0(w_x - l\varphi). \tag{8}$$

Em adição, eles usaram a Lei de Fourier para o fluxo do calor

$$q = \kappa\theta_x \quad (q \quad \text{fluxo}, \ \theta \text{ diferença de temperatura})$$

e a equação do balanço da energia é dada por

$$c\theta_t - k\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0. \tag{9}$$

Substituindo (8) em (1) temos o sistema

$$\begin{array}{rcll}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
c\theta_t - k\theta_{xx} + m\psi_{xt} & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty),
\end{array}$$

com condições de fronteira (4) e

$$\theta(0,\cdot) = \theta(0,\cdot) = 0, \qquad t \geq 0$$

ou (5) e

$$\theta_x(0,\cdot) = \theta_x(0,\cdot) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Foi mostrado que o semigrupo associado ao sistema é exponencialmente estável se, e só se, a condição (7) é válida e que onde há falta de estabilidade exponencial, existe estabilidade polinomial com taxas que dependem das velocidades de propagação de onda e da regularidade dos dados iniciais. Além disso, eles introduziram uma condição necessária para que um semigrupo dissipativo decaia polinomialmente. Este resultado permitiu-lhes mostrar alguma otimalidade para a taxa de decaimento polinomial. Este trabalho melhora os resultados de Liu e Rao [19].

O sistema de Bresse (1) com dissipação dada pelo atrito agindo sobre o ângulo de cisalhamento, isto é, quando

$$\begin{array}{l} S = \kappa(\varphi_x + \psi + lw), \quad M = b\psi_x, \quad N = \kappa_0(w_x - l\varphi), \\ F_1 = F_3 = 0 \ \text{ e } \ F_2 = -\gamma\psi_t, \end{array} \tag{10}$$

$\gamma > 0$, foi considerado em Alabau-Boussouira [10]. Substituindo (10) em (1) encontramos o sistema Bresse considerado

$$\begin{array}{rcl} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) & = & 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t & = & 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0, \end{array} \tag{11}$$

$(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$, sujeito às condições de fronteira (4) ou (5) e condições iniciais (6). Neste trabalho, os autores mostraram que esse mecanismo dissipativo é suficientemente forte para estabilizar o sistema desde que a condição (7) seja assegurada. Quando (7) não é válida, eles mostraram a falta de estabilidade exponencial do semigrupo associado ao sistema com condições de fronteira (5) do tipo Diriclet-Neumann-Neumann; supondo condições de fronteira (4) ou (5) encontraram a taxa de decaimento $t^{-6+\epsilon}$ para ϵ pequeno e que a taxa pode ser melhorada tomando dados iniciais mais regulares. O trabalho de Fatori [9] melhora o resultado de decaimento polinomial encontrado em Alabau-Boussouira [10]. Em [9], os autores provaram que o semigrupo associado ao sistema decai com taxa $t^{-1/2}$ ou $t^{-1/4}$, dependendo da relação entre os coeficientes. Em um caso particular, eles mostraram que a taxa de decaimento obtida é ótima.

Noun e Wehbe [23] estenderam o trabalho de Alabau-Boussouira [10] e consideraram o importante caso em que a dissipação é localmente distribuída, ou seja, $\gamma \in L^\infty(0, L)$, $\gamma(x) \leq 0$ q.t.p, e eles assumiram que existem a, b tais que $0 \leq a < b \leq L$ e $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ em $]a, b[$. Os autores encontraram para a estabilidade exponencial resultados análogos aos de [10], mas melhoraram as taxas de decaimento polinomial. Em [28], Soriano e outros provam a estabilidade do mesmo sistema no caso em que γ pode mudar de sinal (o sistema pode ser não-dissipativo) e $\overline{\gamma} = \frac{1}{L}\int_0^L \gamma(s)ds > 0$, desde que a condição (7) seja verificada e impondo algumas hipóteses sobre γ e $\overline{\gamma}$.

Santos e outros [17] consideraram o sistema de Bresse com história

$$\begin{array}{rcl} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) & = & 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \displaystyle\int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(t-s)ds + k(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0, \end{array}$$

para $(x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$, com o núcleo g satisfazendo

$$g \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+),\ g(t) > 0,\ q_0,\, q_1 > 0:\ -q_0 g(t) \leq g'(t) \leq -q_1 g(t), \forall\, t \geq 0.$$

Eles também obtiveram (7) como condição necessária e suficiente para a estabilidade exponencial do semigrupo correspondente. Em caso contrário, eles provaram que o sistema de Bresse é polinomialmente estável com taxa ótima de decaimento.

Najdi e Wehbe [22] consideram o sistema de Bresse no caso em que a dissipação termal é localmente distribuída no ângulo de filamento, dado por

$$\begin{array}{rcll}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \alpha(x)\theta_x & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty), \\
\rho_3\theta_t - \theta_{xx} + T_0(\alpha\psi_x)_t & = & 0 & \text{em} \quad (0,L)\times(0,\infty).
\end{array}$$

Os autores generalizaram os resultados de Fatori e Rivera [16], pois o coeficiente de *damping* α não é constante, mas ele é uma função positiva em $W^{2,\infty}(0,L)$ e estritamente positiva no intervalo $]a,b[\subset]0,L[$ (os casos $a = 0$ ou $b = L$ não são excluídos) e também melhoraram a taxa de decaimento.

Recentemente, Garbugio [12] em sua tese de Doutorado estudou as propriedades qualitativas e assintóticas para sistemas termoelásticos de Bresse, onde o fluxo de calor segue a lei de Fourier, a lei de Cattaneo e a termoelasticidade do tipo III. No Capítulo 2 de seu trabalho, *A modelagem da viga de Bresse*, ele apresenta a dedução das equações de movimento (1). Não apresentamos nesta dissertação o estudo dessa modelagem, mas nos referimos ao trabalho [12] para os interessados.

Para modelos de sistema de Bresse com dissipações na fronteira só conhecemos o trabalho de Alves et all [20] , no qual os autores mostraram a estabilidade exponencial do sistema

$$\begin{array}{rcl}
\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi) + k\theta_x & = & 0, \\
\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0, \\
\rho_1 w_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + l\omega) & = & 0,
\end{array} \tag{12}$$

$(x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$, com condições iniciais (6) e condições de fronteira

$$\begin{array}{l}
k(\varphi_x + \psi + l\omega)(0,t) = \gamma_1\, \varphi_t(0,t), \quad t \in (0,\infty), \\
b\psi_x(0,t) = \gamma_2\, \psi_t(0,t), \quad t \in (0,\infty), \\
k_0(\omega_x - l\varphi)(0,t) = \gamma_3\, \omega_t(0,t), \quad t \in (0,\infty),
\end{array} \tag{13}$$

onde $\gamma_i > 0$, para $i = 1, 2$ e 3, e

$$\varphi(L,t) = \psi(L,t) = \omega(L,t) = 0, \quad t \in (0,\infty). \tag{14}$$

Neste caso, não há restrições sobre os coeficientes do sistema.

O principal objetivo desta dissertação é estudar a boa colocação e obter as propriedades assintóticas (estabilidade exponencial e estabilidade polinomial) para os modelos estudados em Alabau-Boussouira [10], Fatori [9] e Alves et all [20].

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1 apresentamos as principais ferramentas da teoria da Análise Funcional, de espaços de Sobolev na reta, de semigrupos de classe C_0 e resultados sobre estabilidade exponencial e estabilidade polinomial. Estes resultados serão utilizados em todo o trabalho.

No Capítulo 2 provamos a existência e unicidade de solução para o sistema (11) com condições de fronteira do tipo (4) ou do tipo (5) e condições iniciais (6). Nossa principal ferramenta é a teoria de semigrupos lineares de classe C_0, especificamente o Teorema 1.56 (Lummer-Phillips) e o Teorema 1.58.

No Capítulo 3 mostramos que o semigrupo associado ao sistema (11) com as condições de fronteira (4) ou (5) é exponencialmente estável quando a hipótese (7) é válida. Mostramos também que para condições de fronteira (5) do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann a condição (7) é suficiente para garantir a estabilidade exponencial. Vale ressaltar que a principal ferramenta usada neste capítulo é o Teorema 1.65 devido à Prüss [26].

No Capítulo 4 mostramos que o semigrupo associado ao sistema (11) com as condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann é polinomialmente estável quando a condição (7) não é válida, ou seja, $\frac{k}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$ ou $k \neq k_0$. Quando $\frac{k}{\rho_1} \neq \frac{b}{\rho_2}$ e $k = k_0$ encontramos a taxa de decaimento $t^{-1/2}$ e quando $k \neq k_0$ encontramos a taxa $t^{-1/4}$. A principal ferramenta usada neste capítulo é o Teorema 1.67 devido à Borichev e Tomilov [4].

No Capítulo 5 mostramos que o semigrupo associado ao sistema (12)-(14) com as condições iniciais (6) é exponencialmente estável. Novamente a principal ferramenta utilizada é o Teorema 1.65 devido à Prüss [26].

Finalmente, observamos que em toda a dissertação, C representa uma constante genérica, não necessariamente a mesma em cada ocasião; ela poderá mudar de linha para linha.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos rever alguns conceitos e resultados importantes para o estudo dos capítulos seguintes.

1.1 Análise Funcional

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados de Análise Funcional. Para maiores detalhes, consultar Cavalcanti [8], Brezis [6] e Oliveira [24].

Definição 1.1. *Um espaço normado X que é também um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma é chamado de espaço de Banach.*

Definição 1.2 (Forma Sesquilinear)**.** *Seja V um espaço vetorial complexo. Uma* ***forma sesquilinear de*** V*, é uma aplicação $a : V \times V \to \mathbb{C}$, $(u, v) \to a(u, v)$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $a(u + v, w) = a(u, w) + a(v, w)$ *para todo* u, v, $w \in V$.

(ii) $a(\lambda u, w) = \lambda a(u, w)$ *para todo* u, $v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $a(u, v + w) = a(u, v) + a(u, w)$ *para todo* u, v *e* $w \in V$.

(iv) $a(u, \lambda w) = \overline{\lambda} a(u, w)$ *para todo* u, $w \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 1.3. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado $\mathcal{N}$, $a(\cdot, \cdot)$, é denominda* ***limitada*** *ou* ***contínua*** *se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{N}} \|v\|_{\mathcal{N}}, \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{N}.$$

Definição 1.4. *Uma forma sesquilinear sobre um espaço normado $\mathcal{N}$, $a(\cdot, \cdot)$, é dita* ***coerciva*** *se existe uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$|a(v, v)| \geq \beta \|v\|^2_{\mathcal{N}}, \quad \text{para todo } v \in \mathcal{N}.$$

Definição 1.5. *Seja V um espaço vetorial complexo. Um funcional $T : V \to \mathbb{C}$ é dito* ***linear*** *se*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para todo* u *e* $v \in V$.

(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ *para todo* $u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

e é dito ***antilinear*** *se*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para todo* u *e* $v \in V$.

(ii) $T(\lambda u) = \overline{\lambda} T(u)$ *para todo* $u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definição 1.6. *Um funcional $T : \mathcal{N} \to \mathbb{C}$, sobre um espaço normado $\mathcal{N}$, é dito* ***limitado*** *se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|T(u)| \leq C\|u\|_{\mathcal{N}}, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{N}.$$

Teorema 1.7. *Se $\mathcal{N}$ é um espaço normado e X um espaço de Banach, então $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, X) = \{f : \mathcal{N} \to X; \quad f \text{ é um operador linear limitado}\}$ com a norma $||f||_{\mathfrak{L}(\mathcal{N},X)} = \sup\{|f(x)| \; ; \; ||x||_{\mathcal{N}} = 1\}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Oliveira [24], p. 27. □

Definição 1.8. *Se $\mathcal{N}$ é um espaço vetorial normado, então o espaço de Banach $\mathfrak{L}(\mathcal{N}, \mathbb{C})$ será denotado por $\mathcal{N}'$ e chamado de espaço dual topológico de $\mathcal{N}$.*

Teorema 1.9 (Hahn-Banach)**.** *Sejam V um espaço vetorial complexo e uma aplicação $p : V \to [0, \infty)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} p(u+v) &\leq p(u) + p(v), \qquad \forall\, u, v \in V, \\ p(\alpha u) &= |\alpha| p(u), \qquad \forall\, u \in V, \;\; \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Se $f : Z \to \mathbb{C}$ é um funcional linear definido no subespaço $Z \subset V$ com $|f(w)| \leq p(w)$, então f possui uma extensão linear $F : V \to \mathbb{C}$ dominada por p, ou seja,

$$|F(u)| \leq p(u), \qquad \forall\, u \in V.$$

F é chamada de extensão de Hahn-Banach de f.

Demonstração. Ver Botelho *et al.* [5], p. 58. □

Teorema 1.10 (Lax-Milgran)**.** *Sejam H é um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear limitada e coerciva. Então, para todo funcional $T : H \to \mathbb{C}$ antilinear limitado existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = T(v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

Demonstração. Ver Cavalcanti, M. M e Cavalcanti, V. N. D., [8], p. 167. □

Proposição 1.11. *Sejam números reais $a, b \geq 0$ e $p \geq 1$. Então*

$$(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p).$$

Demonstração. Usando as propriedades do máximo obtemos

$$\begin{aligned}(a+b)^p &\leq (2\max\{a,b\})^p \\ &= 2^p \max\{a^p, b^p\} \\ &\leq 2^p(a^p+b^p).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.12 (Desigualdade de Young)**.** *Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver R.G. Bartle [3], p. 56. □

Uma variação da desigualdade de Young que será muito utilizado neste trabalho é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 1.13. *Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ tem-se*

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}ab &= (q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}} ab \\ &= \left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}ab &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{(q\varepsilon)^{\frac{1}{q}}}\right)^p + \frac{1}{q}\left((q\varepsilon)^{\frac{1}{q}} b\right)^q \\ &= \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}} a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Tomando $c(\varepsilon) = \frac{1}{p(q\varepsilon)^{\frac{p}{q}}}$ temos,

$$ab \leq c(\varepsilon)a^p + \varepsilon b^q \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

□

Teorema 1.14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Então para todos u, $v \in V$ temos*

$$|\langle u, v\rangle_V| \leq \|u\|_V \|v\|_V;$$

a igualdade ocorre se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

Demonstração. Ver Oliveira [24], p. 121. □

Teorema 1.15. *Se M é um subespaço fechado do espaço de Hilbert H, então $H = M \oplus M^\perp$, isto é, cada $u \in H$ admite uma única representação na forma*

$$u = p + q \text{ com } p \in M \text{ e } q \in M^\perp,$$

onde $M^\perp = \{q \in H : \langle p, q\rangle_H = 0 \text{ para todo } p \in M \}$.

Demonstração. Ver Botelho *et al.* [5], p. 111. □

Definição 1.16 (Resolvente). *Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está no **conjunto resolvente** de $\mathcal{A}$, o qual será denotado por $\varrho(\mathcal{A})$, se o operador*

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$$

existe, está bem definido em X e é limitado. Em outras palavras,

$$\varrho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{existe}, \;\; D\left((\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right) \text{ é denso em } X \text{ e } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{é limitado}\}.$$

*Neste caso, $R(\lambda, \mathcal{A})$ denomina-se o **operador resolvente** de $\mathcal{A}$.*

Definição 1.17 (Espectro). *O **espectro** de $\mathcal{A}$ é o conjunto*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \varrho(\mathcal{A})$$

formado por três subconjuntos disjuntos

*(i) O **espectro pontual** de $\mathcal{A}$ é o conjunto de seus autovalores, denotado por $\sigma_p(\mathcal{A})$;*

*(ii) O **espectro contínuo** de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma_c(\mathcal{A})$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - \mathcal{A}$ é um operador injetivo, tem imagem densa em X, mas $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : R(\lambda I - \mathcal{A}) \to X$ é não limitado;*

*(iii) O **espectro residual** de $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma_r(\mathcal{A})$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - \mathcal{A}$ é um operador injetivo mas sua imagem não é densa em X.*

Definição 1.18. *Um operador linear $T : D(T) \subset \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ é **fechado** se para toda sequência $(v_n) \subset D(T)$ tal que $v_n \to v \in \mathcal{N}_1$ and $Tv_n \to w \in \mathcal{N}_2$ tem-se $v \in D(T)$ e $Tv = w$.*

Lema 1.19. *Sejam X é um espaço de Banach e $S : X \to X$ um operador linear contínuo com inverso contínuo. Se $B \in \mathfrak{L}(X)$ satisfaz*

$$\|B\|_{\mathfrak{L}(X)} < \frac{1}{\|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}},$$

então $S + B$ é um operador linear inversível, com inversa contínua.

Demonstração. Temos que $S + B$ é bijetivo. De fato, seja $w \in X$ e denotemos por P o operador

$$P(x) = S^{-1}(w) - S^{-1}B(x).$$

Note que P é uma contração, pois

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\|_X &= \|-S^{-1}B(x) + S^{-1}B(y)\|_X \\ &\leq \|S^{-1}\|_{\mathfrak{L}(X)}\|B\|_{\mathfrak{L}(X)}\|x - y\|_X \\ &\leq \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que existe um único $z \in X$ tal que $P(z) = z$, ou seja, existe um único $z \in X$ de modo que

$$z = S^{-1}(w) - S^{-1}B(z) \quad \Leftrightarrow \quad (S + B)(z) = w.$$

Logo, temos que $S + B$ é um operador bijetivo e, consequentemente, inversível.

Por outro lado, como $S + B$ é um operador contínuo, segue, pelo Teorema do Gráfico Fechado, que $(S + B)^{-1}$ também é um operador contínuo.

□

Teorema 1.20. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear fechado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que o operador resolvente $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ existe e é compacto para algum λ_0. Então o espectro $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$ é constituído apenas de autovalores de $\mathcal{A}$ com multiplicidade finita.*

Demonstração. Ver Kato T, [31], p. 187. □

1.2 Espaços funcionais e espaços de Sobolev

Nesta seção vamos descrever as notações e definições de espaços funcionais que serão usados ao longo deste trabalho. Para mais detalhes consultar Brézis [6].

Definiremos a seguir os espaços funcionais necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nestas definições, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Definição 1.21. *Seja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. O suporte de u, que será denotado por* $\operatorname{supp}(u)$, *é definido como o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Se* $\operatorname{supp}(u)$

for um compacto do Ω então dizemos que u possui suporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ ao espaço das funções contínuas em Ω com suporte compacto.

Definição 1.22. *$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas parciais de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro não-negativo ou $m = \infty$). Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.*

Definição 1.23. *O conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem todas as derivadas até a ordem m contínuas em Ω e que têm suporte compacto, sendo que esse suporte depende de φ, é denotado por $C_0^m(\Omega)$ (ou C_0^∞ se $m = \infty$).*

Definição 1.24. *Uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero quando existe $K \subset \Omega$ compacto tal que:*

* $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset K, \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}$;
* *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$D^\alpha\varphi_\nu \to 0 \quad \textit{uniformemente em } K,$$

onde D^α denota o operador derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},$$

com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.

Definição 1.25. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado espaço das funções testes em Ω.*

Definição 1.26. *Seja $1 \leq p \leq +\infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{R}$, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω com norma*

$$||u||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Para $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráves de u definidas sobre Ω que são essecialmente limitadas com a norma dada por

$$||u||_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega}\operatorname{ess}|u(x)| = \inf\left\{C \in \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \ \textit{q.t.p. em } \Omega\right\}.$$

Definição 1.27. *Sejam $1 \leq p < \infty$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer conjunto compacto $K \subset \Omega$ tivermos*

$$\int_K |f_1(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Teorema 1.28 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), f_2 \in L^{p_2}(\Omega), \cdots, f_n \in L^{p_n}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, *com* $p_1, \cdots, p_n > 1$ *e* $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$. *Então* $f_1 \cdot ... \cdot f_n \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f_1 \cdot ... \cdot f_n| \, \mathrm{d}x \leq ||f_1||_{L^{p_1}} \cdot ... \cdot ||f_n||_{L^{p_n}}.$$

Demonstração. Ver H. Brézis [6], p. 92. □

Teorema 1.29. *Sejam* $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *e seja* $u \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I u\varphi_x \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_0(I).$$

Então existe uma constante C *tal que* $u = C$ *em quase todo ponto de* I.

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 205. □

Definição 1.30. *Sejam* $I = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, *e* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *O* ***espaço de Sobolev*** $W^{1,p}(I)$ *é definido como sendo o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists u_x \in L^p(I) \text{ com } \int_a^b u\varphi_x \, \mathrm{d}x = -\int_a^b u_x\varphi \, \mathrm{d}x \ \forall \varphi \in C^1_0(I) \right\}$$

O espaço $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|^p_{L^p} + \|u_x\|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, *denotamos* $H^1(I) = W^{1,2}(I)$. *O espaço* $H^1(I)$ *é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \langle u_x, v_x\rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u_x v_x) \, \mathrm{d}x.$$

Teorema 1.31. *Seja* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $I \subset \mathbb{R}$ *limitado ou ilimitado. Então existe uma função* $\widetilde{u} \in C(\overline{I})$ *tal que*

$$u = \widetilde{u} \quad q.t.p. \quad em (0, L) \ \ e$$
$$\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u_x(t)dt \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 204. □

Proposição 1.32. *O espaço* $W^{1,p}(I)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$ *e separável para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 203. □

Definição 1.33. *Dado um inteiro $m \geq 2$ e um número real $1 \leq p \leq \infty$ definimos, por recorrência, o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \left\{u \in W^{m-1,p}(I); D^1u \in W^{m-1,p}(I)\right\},$$

com a notação $D^1u = u_x$, equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{m} \|D^i u\|_{L^p}.$$

E também definimos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

equipado com o produto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^2} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{m} \langle D^i u, D^i v\rangle_{L^2} = \int_a^b uv \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b D^i u D^i v \, \mathrm{d}x.$$

A seguir estão alguns resultados, dentre eles os de imersões, que serão usados nos demais capítulos. De modo geral, não apresentaremos as demonstrações, mas serão indicadas as respectivas referências bibliográficas.

Teorema 1.34. *Existe uma constante positiva C (que depende somente de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ com a imersão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, se I é um intervalo limitado então

A imersão $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ é compacta para todo $1 < p \leq \infty$.

A imersão $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < \infty$.

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 212. □

Corolário 1.35. *Suponha que I seja um intervalo ilimitado e $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \mapsto \infty}} u(x) = 0.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 214. □

Corolário 1.36. *Sejam u, $v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)_x = u_x\, v + u\, v_x.$$

Ademais, vale a formula de integração por partes

$$\int_y^z u_x v \,\mathrm{d}x = u(z)v(z) - u(y)v(y) - \int_y^z uv_x \,\mathrm{d}x, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 215. □

Corolário 1.37. *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, e seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad \text{e} \quad (G \circ u)_x = (G_x \circ u)u_x.$$

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 215. □

Definição 1.38. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, equipado com a norma de $W^{1,p}(I)$.*

O espaço $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ é equipado com o produto escalar de $H^1(I)$.

Teorema 1.39. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 217. □

Teorema 1.40 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponhamos I um intervalo limitado. Então existe uma constante $C_p \geq 0$, que depende apenas do comprimento do intervalo I, tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|u_x\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Em outras palavras, em $W_0^{1,p}(I)$, $\|u_x\|_{L^p}$ é uma norma equivalente à norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração. Ver H. Brezis [6], p. 218. □

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais até a ordem m também estão em $L^p(\Omega)$. É bem conhecido, ver H. Brezis [6], que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u$. Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e este é um espaço de Hilbert com o correspondente produto interno.

Proposição 1.41. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Existe uma constante positiva C dependendo apenas de Ω e Ntal que para todo $u \in H^1(\Omega)$ tem-se*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_\Omega u \, dx \right| \right)$$

Demonstração. Ver Liu e Zheng [33], p. 11. □

1.3 Semigrupos de classe C_0

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e alguns teoremas sobre semigrupo de classe C_0 que serão usados ao longo do trabalho. Para mais detalhes consultar Gomes [13] ou Pazy [25].

Definição 1.42 (Semigrupo)**.** *Seja X um espaço de Banach e $\mathfrak{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

I) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathfrak{L}(X)$.

II) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t,\, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

III) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|\,(S(t) - I)\, x\|_X = 0, \quad \forall\, x \in X$.

Definição 1.43 (Gerador Infinitesimal)**.** *Considere*

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X \ ; \ \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x \ \textit{existe}\}.$$

O operador $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A}x = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} x, \quad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Proposição 1.44. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$.*

i) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então $S(t)x \in D(\mathcal{A})$ $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}x.$$

ii) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t \mathcal{A}S(\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t S(\tau)\mathcal{A}x\,\mathrm{d}\tau.$$

iii) Se $x \in D(\mathcal{A})$, então $\displaystyle\int_0^t S(\tau)x\,\mathrm{d}\tau \in D(\mathcal{A})$ e

$$S(t)x - x = \mathcal{A}\int_s^t S(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 13. □

Proposição 1.45. *(i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

(ii) Um operador liner $\mathcal{A}$, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 15. □

Definição 1.46. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Assumindo $\mathcal{A}^0 = I$, $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}$ e, supondo que $\mathcal{A}^{n-1}$ esteja definido, consideremos*

$$D(\mathcal{A}^n) = \{x\ ;\quad x \in D(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}^{n-1}x \in D(\mathcal{A})\}.$$

Vamos definir $\mathcal{A}^n$ como:

$$\mathcal{A}^n x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}x), \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n).$$

Proposição 1.47. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal.*

i) $D(\mathcal{A}^n)$ é um subespaço denso de X e $\mathcal{A}^n$ é um operador linear de X.

ii) Se $x \in D(\mathcal{A}^n)$, então $S(t)x \in D(\mathcal{A}^n)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}S(t)x = \mathcal{A}^n S(t)x = S(t)\mathcal{A}^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii) É valida a fórmula de Taylor: se $x \in D(\mathcal{A}^n)$, então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^k}{k!}\mathcal{A}^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}\mathcal{A}^n S(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

iv) $$(S(t)-I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1\cdots\tau_n)\mathcal{A}^n x\,\mathrm{d}\tau_1\cdots\mathrm{d}\tau_n \quad \forall x \in D(\mathcal{A}^n).$$

v) $\bigcap_n D(\mathcal{A}^n)$ *é denso em* X.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 20. □

Proposição 1.48. *Seja* $\mathcal{A}$ *um operador linear fechado de* X. *Pondo, para cada* $x \in D(\mathcal{A}^k)$,

$$\|x\|_{D(\mathcal{A})} = \sum_{j=0}^{k} \|\mathcal{A}^j x\|_X, \tag{1.1}$$

o funcional $\|\cdot\|_{D(\mathcal{A})}$ *é uma norma em* $D(\mathcal{A}^k)$, *munido da qual* $D(\mathcal{A}^k)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 22. □

Definição 1.49. *A norma* (1.1) *é dita* ***norma do gráfico***. *O espaço de Banach que se obtém munido* $D(\mathcal{A}^k)$ *da norma* (1.1) *será representado por* $[D(\mathcal{A}^k)]$.

Proposição 1.50. *Se* $\mathcal{A}$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo,* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *de classe* C_0, *então,* $\forall x \in D(\mathcal{A}^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}\left([0,\infty)\,;\,[D(\mathcal{A}^k)]\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 23. □

Teorema 1.51. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *com gerador infinitesimal* $\mathcal{A}$. *Se* $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, *onde*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)}}{t},$$

então $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, *existe a integral*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t \quad \forall x \in X,$$

e

$$R(\lambda, \mathcal{A})x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 30. □

Teorema 1.52 (Hille-Yosida)**.** *Para que um operador linear* $\mathcal{A}$, *definido em* $D(\mathcal{A}) \subset X$ *e com valores em* X, *seja o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* C_0 *tal que* $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq e^{\omega t}$, $t > 0$, *é necessário e suficiente que:*

i) $\mathcal{A}$ *seja fechado e seu domínio seja denso em* X.

ii) Exista ω tal que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13],4.4 Teorema (Hille-Yosida) p. 32 e 4.5 Corolário p. 36. □

Definição 1.53. *Sejam X um espaço de Banach, X' o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X'. Ponhamos, para cada $x \in X$,*

$$J(x) = \{x^* \ ; \ \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X'}^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, $J(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in X$. Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \to X'$ tal que $j(x) \in J(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 1.54. *Diz - se que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,*

$$\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Proposição 1.55. *Se $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$ é dissipativo e $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é sobrejetor para algum $\lambda_0 > 0$, então*

(i) $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ *e* $\mathcal{A}$ *é fechado.*

(ii) $(0, \infty) \subset \varrho(\mathcal{A})$.

(iii) $\lambda I - \mathcal{A}$ *é sobrejetor, para todo* $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 38. □

Teorema 1.56 (Lummer-Phillips)**.** *Um operador linear $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$ se, e somente se,*

(i) o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo;

(ii) o operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é um operador sobrejetor, para algum $\lambda_0 > 0$;

(iii) o operador $\mathcal{A}$ é densamente definido.

Demonstração. Suponha inicialmente que o operador linear $\mathcal{A}$ seja gerador de um semigrupo de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$. Segue da Proposição 1.52 que o operador $\mathcal{A}$ é densamente definido e do Teorema 1.51 que o operador $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ é um operador sobrejetor para todo $\lambda_0 > 0$. Além disso, para cada aplicação dualidade, j, tem-se

$$\mathrm{Re}\,\langle S(t)x, j(x) \rangle \leq |\langle S(t)x, j(x) \rangle| \leq \|S(t)x\|_X \|j(x)\|_{X'} \leq \|x\|_X^2$$

visto que, por hipótese, $\|S(t)x\|_X \leq \|x\|_X$, para todo $x \in X$. Portanto,

$$\operatorname{Re}\langle S(t)x - x, j(x)\rangle = \operatorname{Re}\langle S(t)x, j(x)\rangle - \|x\|_X^2 \leq 0;$$

e dividindo por t e passando ao limite com $t \to 0^+$, pela continuidade da dualidade, temos que

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, j(x)\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in D(\mathcal{A})$$

e, assim, $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Reciprocamente, suponhamos válido $(i)-(iii)$. Segue da Proposição 1.55 que $\mathcal{A}$ é fechado e $(0,\infty) \subset \varrho(\mathcal{A})$ e segue da hipótese (iii) que $\mathcal{A}$ é fechado e seu domínio é denso em X.

Dados $x \in D(\mathcal{A})$ e $\lambda > 0$, como $\mathcal{A}$ é dissipativo, então de

$$\langle (\lambda I - \mathcal{A})\, x, j(x)\rangle = \lambda\|x\|_X^2 - \langle \mathcal{A}x, j(x)\rangle$$

vem

$$\lambda\|x\|_X^2 \leq \operatorname{Re}\langle(\lambda I - \mathcal{A})x, j(x)\rangle \leq |\langle(\lambda I - \mathcal{A})x, j(x)\rangle| \leq \|(\lambda I - \mathcal{A})x\|_X\|x\|_X,$$

donde

$$\|x\|_X = \|(\lambda I - \mathcal{A})(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X \geq \lambda\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall \lambda > 0,$$

ou seja,

$$\frac{\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}x\|_X}{\|x\|_X} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0.$$

Pela desigualdade acima, temos

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \forall \lambda \geq 0;$$

Pelo Teorema de Hille-Yosida, Teorema 1.52 para $\omega = 0$, temos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$. □

Corolário 1.57. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo com domínio $D(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Então, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo S de classe C_0 com $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$.*

Demonstração. Por hipótese $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, portanto existe e é limitado o operador $\mathcal{A}^{-1}$. Recorrendo ao Teorema 1.19, temos que $\lambda I - \mathcal{A}$ é invertível sempre que $0 < \lambda < \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}^{-1}$. Assim, segue do Teorema de Lummer-Phillips, Teorema 1.56, que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{H}$, de modo que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$. □

Teorema 1.58. *Se $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to X$, operador linear, é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $x \in D(\mathcal{A})$, o problema de Cauchy*

Abstrato,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} & = \mathcal{A}u(t) \quad t > 0, \\ u(0) & = x. \end{cases}$$

tem uma única solução

$$u \in C\left([0, \infty); [D(\mathcal{A})]\right) \cap C^1\left([0, \infty); X\right).$$

Demonstração. Ver Gomes A. M, [13], p. 104. □

Lema 1.59. *Sejam λ_1 , $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e f , $g \in L^2(0, L)$. Então existem $v \in H_0^1(0, L)$ e $u \in H^1(0, L)$ tais que*

$$\begin{aligned} u_x + \lambda_1 v &= f, \\ v_x - \lambda_2 u &= g. \end{aligned}$$

Além disso, se $\displaystyle\int_0^L g(x)dx = 0$, então $\displaystyle\int_0^L u(x)dx = 0$.

Demonstração. Seja

$$h(x) = g(x) + \lambda_2 \int_0^x f(z)dz.$$

Considere a EDO de segunda ordem

$$y_{xx}(x) + \lambda_1\lambda_2 y(x) = h(x).$$

Usando método de variação de parâmetros vemos que esta equação possui solução $y(x)$ tal que $y_x \in H_0^1(0, L)$, dada por

$$\begin{aligned} y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}x) - \cos(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}x) \int_0^x \frac{h(z)\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z)}{\lambda_1\lambda_2} dz \\ + \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}x) \int_0^x \frac{h(z)\cos(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z)}{\lambda_1\lambda_2} dz, \end{aligned}$$

onde

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \int_0^L h(z)\cos(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z)dz + \frac{\operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}L)}{\lambda_1\lambda_2} \int_0^L h(z)\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_1\lambda_2}z)dz.$$

Defina agora

$$v(x) = y_x(x) \text{ e } u(x) = \int_0^x f(z)dz - \lambda_1 \int_0^x v(z)dz. \tag{1.2}$$

Assim $v \in H_0^1(0, L)$ e $u \in H^1(0, L)$. Além disso,

$$\begin{aligned} u_x(x) + \lambda_1 v(x) &= f(x) - \lambda_1 v(x) + \lambda_1 v(x) = f(x) \\ v_x(x) - \lambda_2 u(x) &= y_{xx}(x) - \lambda_2 u(x) = h(x) - \lambda_1\lambda_2 y(x) - \lambda_2 u(x) = g(x) \end{aligned}$$

Observe, agora, que pela segunda equação acima temos

$$\int_0^L v_x(x)dx - \lambda_2 \int_0^L u(x)dx = \int_0^L g(x)dx.$$

Daí, se $\displaystyle\int_0^L g(x)dx = 0$ então $\displaystyle\int_0^L u(x)dx = 0.$ □

1.4 Espaços $L^p(0,T;X)$

Seja X um espaço de Banach separável. Uma função u definida em $(0,T)$ com valores em X é mensurável quando para toda $f \in X'$ (dual topológico de X) a função numérica $t \mapsto \langle f, u(t)\rangle_{X'\times X}$ for mensurável a Lebesgue em $(0,T)$.

A função $u : (0,T) \to X$ é integrável no sentido de Bochner em (0,T), se u for mensurável e a função $t \mapsto \|u(t)\|_X$ for integrável à Lebesgue em $(0,T)$. Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de X denotado por $\displaystyle\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$ e caracterizado por

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t \right\rangle_{X'\times X} = \int_0^T \langle f, u(t)\rangle_{X'\times X}\,\mathrm{d}t, \qquad \forall f \in X'.$$

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T > 0$ números reais. Denotamos por $L^p(0,T;X)$ o espaço vetorial das (classes) funções $u : (0,T) \mapsto X$ mensuráveis e tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é Lebesgue integrável em $(0,T)$. Em $L^p(0,T;X)$ define-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}},$$

em relação a qual $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.60. *Se $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X\,\mathrm{d}t, \qquad \forall u,v \in L^2(0,T;X).$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ estaremos denotando o espaço vetorial das (classes) funções mensuráveis $u : (0,t) \mapsto X$ tais que

$$\sup_{t\in(0,T)} \mathrm{ess}\|u(t)\|_X \leq \infty.$$

Neste espaço, definimos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \mathrm{ess}\|u(t)\|_X.$$

em relação a qual $L^\infty(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

Se $1 \leq p < \infty$, o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^{p'}(0,T;X')$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Demonstra-se também que se X for reflexivo (respectivamente separável) e $1 < p < \infty$ (respectivamente $1 \leq p < \infty$) então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo e (respectivamente separável). Com esta identificação temos

$$\langle f, u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{X'\times X}\,\mathrm{d}t,$$

para todo $f \in L^{p'}(0,T;X')$ e para todo $u \in L^p(0,T;X)$.

Temos também que o dual topológico de $L^1(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^\infty(0,T;X)$.

1.5 Distribuições vetoriais

No que segue, iremos supor que o espaço de Banach X é sempre real, sepáravel e reflexivo. Em muitas situações, X será um espaço de Hilbert.

Suponhamos $u \in L^p(0,T;X)$ e para $\varphi \in D(0,T)$ consideremos a aplicação $\widetilde{u} : D(0,t) \to X$ definida por

$$\langle \widetilde{u}, \varphi\rangle = \int_0^T u(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \ \in \ X, \tag{1.3}$$

onde a integral é entendida como a integral de Bochner em X. A equação (1.3) define uma aplicação linear e contínua de $D(0,T)$ em X. Portanto, $\widetilde{u}$ pertence ao espaço das distribuições vetoriais definidas em $D(0,T)$ com valores em X, o qual representa-se por $D'(0,T;X)$. Além disso, demonstra-se (ver por exemplo, R. Temam [30]) que a distribuição $\widetilde{u}$ é univocamente determinada por u, de modo que pode podemos identificar u com $\widetilde{u}$. Neste sentido, identifica-se $L^p(0,T;X)$ com a parte de $D'(0,T;X)$, isto é, $L^p(0,T;X) \subset D'(0,T;X)$. Desta forma, sendo todo elemento u de $L^p(0,T;X)$ uma distribuição, u possui derivada no sentido das distribuições, isto é, $u' \in D'(0,T;X)$ a qual é definido por:

$$\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_0^T u(s)\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Diz-se que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de $D'(0,T;X)$ converge para a distribuição u em $D'(0,T;X)$ se $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in D(0,T)$.

Sejam V e H espaços de Hilbert reais. Suponhamos que V é denso em H e que a injeção V em H é contínua. Escrevemos $V \hookrightarrow H$ para indicar tal situação. Identificando-se H com seu dual topológico H' segue que

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'.$$

A seguir enunciaremos resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [30].

Proposição 1.61. *Se* u *e* $v \in L^2(0,T;V)$ *e* u', $v' \in L^2(0,T;V)$ *então a aplicação* $t \mapsto (u(t), v(t))_H$ *é absolutamente contínua em* $[0,T]$ *e vale a seguinte igualdade*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(u(t),v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + \langle u(t), v'(t)\rangle_{V'\times V},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0,T)$ *das funções* $(u(t),v(t))_H$.

Demonstração. Ver Teman, [30], p. 261. □

Corolário 1.62. *Se* $v \in L^2(0,T;V)$, u, $v' \in L^2(0,T,H)$ *e* $u' \in L^2(0,T,V')$, *então*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(u(t),v(t))_H = \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + \langle u(t), v'(t)\rangle_{H}.$$

Demonstração. Ver Teman, [30], p. 261. □

Corolário 1.63. *Se* $u \in L^2(0,T;V)$ *e* $u' \in L^2(0,T;V')$, *então* u *é, após uma modificação eventual em um conjunto de medida nula, contínua de* $[0,T]$ *em* H, *isto é,* $u \in C([0,T],H)$. *Além disso, temos a seguinte igualdade no sentido das distribuições escalares sobre* $(0,T)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}.$$

Demonstração. Ver Teman, [30], p. 261. □

1.6 Estabilidade

Definição 1.64. *Um semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é dito ser **exponencialmente estável** se existirem constantes* $\alpha > 0$ *e* $M \geq 1$ *tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

O próximo teorema, devido a Prüss, caracteriza a estabildiade exponencial de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tal que $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(X)} \leq 1$.

Teorema 1.65. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0 *num espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *satisfazendo* $\|S(t)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ *e* $\mathcal{A}$ *o gerador infinitesimal de* S. *Então* $S(t)$ *é exponecialmente estável se, somente se,*

$$i\mathbb{R} = \{i\beta \;\; ; \;\; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \varrho(\mathcal{A})$$

e

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} < \infty.$$

Demonstração. Ver Prüss [26]. □

Definição 1.66. *Um semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *é dito* ***polinomialmente estável*** *se existirem constantes* $C > 0$ *e* $\gamma > 0$ *tais que*

$$\|S(t)u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\gamma}} \|u\|_{D(\mathcal{A})}, \qquad \forall\, u \in D(\mathcal{A}).$$

O próximo teorema, de A. Borichev e Y. Tomilov, caracteriza a estabilidade polinomial de semigrupos C_0 limitados sobre espaços de Hilbert.

Teorema 1.67. *Seja* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0*, com gerador infinitesimal* $\mathcal{A}$*, sobre um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$*. Então para* $\alpha > 0$ *fixado, as seguintes condições são equivalentes:*

(I) $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O\left(|\lambda|^{\alpha}\right), \qquad |\lambda| \to \infty.$

(II) $\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathfrak{L}(H)} = O\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}\right), \qquad t \to \infty.$

Demonstração. Ver Borichev, A., Tomilov, Y. [4]. □

Capítulo 2

Sistema de Bresse

2.1 Introdução

Neste capítulo consideramos o sistema de Bresse com dissipação friccional em uma de suas equações. Este sistema é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) \;= 0, \tag{2.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + \gamma\psi_t \;= 0, \tag{2.2}$$

$$\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) \;= 0, \tag{2.3}$$

para $x \in (0, L)$ e $t \in (0, \infty)$, sujeito às condições iniciais

$$\begin{aligned} &\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \;\; \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \;\; \psi(\cdot,0) = \psi_0, \;\; \psi_t(\cdot,0) = \psi_1, \\ &\omega(\cdot,0) = \omega_0, \;\; \omega_t(\cdot,0) = \omega_1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

e às condições de fronteira ou do tipo Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0, t > 0 \tag{2.5}$$

ou do tipo Dirichlet-Neumann- Neumann

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = \omega_x(0,t) = \omega_x(L,t) = 0.t > 0 \tag{2.6}$$

Para encontrarmos a energia do sistema, procedemos formalmente. Multiplicando a equação (2.1) por φ_t, integrando por partes de 0 a L e usando as condições de fronteira temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1(\varphi_t)^2 dx + \int_0^L k(\varphi_x + \psi + l\omega)\varphi_{tx} dx - k_0 l\int_0^L (\omega_x - l\varphi)\varphi_t dx = 0. \tag{2.7}$$

Multiplicando agora a equação (2.2) por ψ_t, integrando por partes e usando as condições de fronteira obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L [\rho_2(\psi_t)^2 + b(\psi_x)^2]dx + \int_0^L k(\varphi_x + \psi + l\omega)\psi_t dx + \int_0^L \gamma(\psi_t)^2 dx = 0. \quad (2.8)$$

Por fim, multiplicando a equação (2.3) por ω_t, integrando por partes e usando as condições de fronteira segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2(\omega_t)^2 dx + \int_0^L k_0(\omega_x - l\varphi)\omega_{tx} dx + \int_0^L kl(\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_t dx = 0. \quad (2.9)$$

Somando as equações (2.7) , (2.8) e (2.9) chegamos a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L [\rho_1(\varphi_t)^2 + \rho_2(\psi_t)^2 + \rho_1(\omega_t)^2 + b(\psi_x)^2]dx \\ &\qquad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L [k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + \kappa_0|\omega_x - l\varphi|^2]dx = -\int_0^L \gamma(\psi_t)^2 dx. \end{aligned}$$

Assim, definimos a energia associada ao sistema como sendo

$$\begin{aligned} E(t) = \ & \frac{1}{2}\int_0^L [\rho_1(\varphi_t)^2 + \rho_2(\psi_t)^2 + \rho_1(\omega_t)^2 + b(\psi_x)^2]dx \\ & + \frac{1}{2}\int_0^L [k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2]dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

e segue que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L \gamma(\psi_t)^2 dx \leq 0.$$

Desta forma, o sistema é dissipativo, ou seja, a energia é decrescente.

Nosso objetivo neste trabalho é averiguar quais as condições necessárias e suficientes para que se tenha $\lim_{t\to\infty} E(t) = 0$ uniformente em relação aos dados iniciais. Antes, porém, vamos mostrar que o sistema Bresse é bem posto. Para isto, usaremos a teoria de C_0-semigrupos de operadores lineares.

2.2 Existência e unicidade de solução

Aqui e nos capítulos seguintes, assumimos que $l \neq \frac{n\pi}{L}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2.1 Condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet

Considere nesta secção o sistema de Bresse (2.1) - (2.4) sujeito as condições de fronteira

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi(t,0) = \psi(t,L) = \omega(t,0) = \omega(t,L) = 0, t > 0. \tag{2.11}$$

O espaço de fase associado ao sistema

$$\mathcal{H} = \left[H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)\right]^3 \tag{2.12}$$

equipado com o produto interno

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle = & \int_0^L [\rho_1 \Phi^1 \overline{\Phi^2} + \rho_2 \Psi^1 \overline{\Psi^2} + \rho_1 W^1 \overline{W^2} + b\psi_x^1 \overline{\psi_x^2}] dx \\ + & \int_0^L [k(\varphi_x^2 + \psi^2 + l\omega^1)(\overline{\varphi_x^2 + \psi_x^2 + l\omega_x^2}) + k_0(\omega_x^1 - l\varphi^1)(\overline{\omega_x^2 - l\varphi^2})] dx, \end{aligned} \tag{2.13}$$

sendo $U_i = (\varphi^i, \Phi^i, \psi^i, \Psi^i, \omega^i, W^i) \in \mathcal{H}$ e com a norma induzida

$$\begin{aligned} ||U_1||_{\mathcal{H}} = & \int_0^L \left[\rho_1 |\Phi^1|^2 + \rho_2 |\Psi^1|^2 + \rho_1 |W^1|^2 + b|\psi_x^1|^2\right] dx \\ +k & \int_0^L \left[|\varphi_x^1 + \psi^1 + l\omega^1|^2 + k_0 |\omega_x^1 - l\varphi^1|^2\right] dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Esta norma é equivalente a norma usual de $\mathcal{H}$, conforme é mostrado na seguinte proposição.

Proposição 2.1. *A norma $\|U\|_{\mathcal{H}}$ é equivalente à norma*

$$\|U\|_*^2 = \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2.$$

Além disso, $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Usando a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 & \leq (\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + l\|\omega\|_{L^2})^2 \\ & \leq 4((\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2})^2 + l^2\|\omega\|_{L^2}^2) \\ & \leq 4(4(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2) + l^2\|\omega\|_{L^2}^2) \\ & \leq 16(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2) + 4l^2\|\omega\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \leq 4(\|\omega_x\|_{L^2}^2 + \|l\varphi\|_{L^2}^2).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\omega,W)\|_{\mathcal{H}} \\
&= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\
&\quad + k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + \max\{b,16\}\left(\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2\right) \\
&\quad + \max\{16,4l^2\}\left(\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2\right) + \max\{4,4l^2\}\left(\|\omega\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2\right) \\
&= \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + C_1\|\varphi\|_{H_0^1}^2 + C_2\|\psi\|_{H_0^1}^2 + C_3\|\omega\|_{H_0^1}^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré (1.40) temos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C^2\left(\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_{L^2}^2\right) = C^2\|U\|_*^2.$$

Extraindo a raiz em ambos os lados da desigualdade anterior obtemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|U\|_*. \tag{2.15}$$

Para mostramos que existe $C > 0$ tal que $\|U\|_* \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}$, consideremos

$$\varphi_x + \psi + l\omega = F \quad \Rightarrow \quad \varphi_x + l\omega = F - \psi, \tag{2.16}$$

$$\omega_x - l\varphi = G \quad \Rightarrow \quad \omega_x - l\varphi = G. \tag{2.17}$$

Multiplicando a equação (2.16) por $x\overline{\varphi}$ e (2.17) por $x\overline{\omega}$ vem

$$\begin{aligned}
x\varphi_x\overline{\varphi} + xl\omega\overline{\varphi} &= x(F-\psi)\overline{\varphi}, \\
x\omega_x\overline{\omega} - xl\varphi\overline{\omega} &= xG\overline{\omega}.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real destas equações, integrando-as de 0 a L e somando as equações resultantes obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^L x\frac{d}{dx}|\varphi|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L x\frac{d}{dx}|\omega|^2dx = \mathrm{Re}\int_0^L x(F-\psi)\overline{\varphi}dx + \mathrm{Re}\int_0^L xG\overline{\omega}dx.$$

Efetuando integração por partes segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^L(|\varphi|^2 + |\omega|^2)dx = -\mathrm{Re}\left[\int_0^L x(F-\psi)\overline{\varphi}dx + \int_0^L xG\overline{\omega}dx\right],$$

ou seja,

$$\int_0^L(|\varphi|^2 + |\omega|^2)dx \leq 2L\int_0^L|F-\psi||\varphi|dx + 2L\int_0^L|G||\omega|dx.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder e Young resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^L(|\varphi|^2 + |\omega|^2)dx &\leq 2L^2\int_0^L|F-\psi|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L|\varphi|^2dx \\
&\quad + 2L^2\int_0^L|G|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L|\omega|^2dx.
\end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$\int_0^L (|\varphi|^2 + |\omega|^2)dx \leq C\int_0^L (|F-\psi|^2 + |G|^2)dx, \tag{2.18}$$

onde $C = 4L^2$. Usando as equações (2.16) e (2.17) vemos

$$\begin{aligned} |\varphi_x|^2 &\leq |F-\psi|^2 + 2l\mathrm{Re}\,(F-\psi)\omega + l^2|\omega|^2, \\ |\omega_x|^2 &\leq |G|^2 + 2l\mathrm{Re}\, G\varphi + l^2|\varphi|^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Resulta das desigualdades (2.18) e (2.19) que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\omega_x|^2)dx &\leq \int_0^L (|F-\psi|^2 + |G|^2)dx + 2l\int_0^L (|F-\psi||\omega| + |G|\varphi|)dx \\ &\quad + l^2\int_0^L (|\varphi|^2 + |\omega|^2)dx \\ &\leq \int_0^L (|F-\psi|^2 + |G|^2)dx + 2l^2\int_0^L |F-\psi|^2dx + \frac{1}{2}\int_0^L |\omega|^2dx \\ &\quad + 2l^2\int_0^L |G|^2dx + \frac{1}{2}|\varphi|^2dx + Cl^2\int_0^L (|F-\psi|^2 + |G|^2)dx. \end{aligned}$$

Portanto, usando as desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\int_0^L (|\varphi_x|^2 + |\omega_x|^2)dx \leq C\int_0^L (|F-\psi|^2 + |G|^2)dx \leq C\int_0^L (|F|^2 + |G|^2 + \psi_x|^2)dx$$

onde C é a maior dentre as constantes encontradas acima. Logo

$$\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2 \leq C\left(\|F\|_{L^2}^2 + \|G\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2\right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \|U\|_*^2 &= \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\omega_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{b} + C\right)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{L^2}^2 + C\|G\|_{L^2}^2 \\ &= C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

e concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_* \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.20}$$

□

Vale ressaltar que na proposição anterior poderíamos concluir (2.20) usando argumento de contradição.

O próximo passo consiste em reescrever o problema (2.1)-(2.3) como um problema de Cauchy da forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t) \\ &U(0) = U_0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \Phi_0, \psi_0, \Psi_0, \omega_0, W_0)$. Com esta finalidade, considere $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$, $W = \omega_t$ e $U(t) = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)$. Assim, usando as equações (2.1)-(2.3) não é difícil obter (2.21) onde $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é o operador linear não-limitado definido por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k_0 l}{\rho_2}Id(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{k+k_0 l}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k}{\rho_2}Id(\cdot) & \frac{-\gamma}{\rho_2}Id(\cdot) & -\frac{k}{\rho_2}Id(\cdot) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) \\ -\frac{kl+k_0}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{-kl}{\rho_1}Id(\cdot) & 0 & \frac{k_0 l}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{kl^2}{\rho_1}Id(\cdot) & 0 \end{bmatrix},$$

cujo domínio é dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = [(H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)) \times H_0^1(0,L)]^2. \tag{2.22}$$

De fato, como $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$ então

$$\begin{aligned} &\Phi, \Psi, W \in H_0^1(0,L), \\ &\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + \omega)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) \in L^2(0,L), \\ &\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\Psi \in L^2(0,L), \\ &\frac{k_0}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) \in L^2(0,L). \end{aligned}$$

Como $U \in \mathcal{H}$ segue das equações acima que φ, ψ, $\omega \in H^2(0,L)$.

Proposição 2.2. *O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo, ou seja, se $U \in D(\mathcal{A})$ então*

$$\text{Re } \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$$

Demonstração. Considere $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então usando a definição do produto interno em $\mathcal{H}$ e do operador $\mathcal{A}$ encontramos

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^L & \left\{[k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi)]\overline{\Phi}\right\} dx \\
& + \left\{[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) - \gamma\Psi]\overline{\Psi}\right\} dx \\
& + \int_0^L \left\{[k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega)]\overline{\Theta} + b\Psi_x\psi_x\right\} dx \\
& + \int_0^L \left\{[k(\Phi_x + \Psi + l\Theta)\overline{(\varphi_x + \psi + l\omega)} + k_0(\Theta_x - l\Phi)\overline{(\omega_x - l\varphi)}\right\} dx.
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira segue que

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= b\int_0^L \left[\Psi_x\overline{\psi_x} - \psi_x\overline{\Psi_x}\right] dx - \gamma\int_0^L |\Psi|^2 dx \\
&+ k\int_0^L \left[(\Phi_x + \Psi + lW)\overline{(\varphi_x + \psi + l\omega)} - (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{(\Phi_x + \Psi + lW)}\right] dx \\
&+ k_0\int_0^L \left[(W_x - l\Phi)\overline{(\omega_x - l\varphi)} - (\omega_x - l\varphi)\overline{W_x - l\Phi)}\right] dx.
\end{aligned}
$$

Tomando-se a parte real do produto interno acima obtemos

$$
\text{Re}\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma\int_0^L |\Psi|^2 dx \leq 0. \tag{2.23}
$$

□

Agora, vamos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, $\mathcal{A}$ é bijetivo e $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e usando o Lema 1.19 teremos o resultado.

Sejam $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)$. A equação resolvente $\mathcal{A}U = F$ é equivalente ao sistema de equações

$$
\begin{aligned}
\Phi &= f^1 \text{ em } H_0^1(0,L), && (2.24)\\
\frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi_x + l\omega)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi) &= f^2 \text{ em } L^2(0,L), && (2.25)\\
\Psi &= f^3, \text{ em } H_0^1(0,L), && (2.26)\\
\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + l\omega) - \frac{\gamma}{\rho_2}\Psi &= f^4 \text{ em } L^2(0,L), && (2.27)\\
W &= f^5 \text{ em } H_0^1(0,L), && (2.28)\\
\frac{k}{\rho_1}(\omega_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + l\omega) &= f^6 \text{ em } L^2(0,L). && (2.29)
\end{aligned}
$$

Desta forma, basta considerarmos $\Phi = f^1, \Psi = f^3$ e $W = f^5$ e assim pelas equações (2.24) , (2.26) e (2.28) segue que $\Phi, \Psi, W \in H_0^1(0,L)$. Substituindo estas igualdades nas outras equações temos

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) = \rho_1 f^2, \text{ em } L^2(0,L) \tag{2.30}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f^4 + \gamma f^3 \text{ em } L^2(0,L), \tag{2.31}$$

$$k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_1 f^6 \text{ em } L^2(0,L). \tag{2.32}$$

Considerando $f = \rho_1 f^2$, $g = \rho_2 f^4 + \gamma f^3$ e $h = \rho_1 f^6$, multiplicando (2.30) por $\overline{\phi} \in H_0^1(0,L)$, (2.31) por $\overline{\eta} \in H_0^1(0,L)$ e (2.32) por $\overline{\xi} \in H_0^1(0,L)$ e integrando por partes de 0 a L resulta que

$$\begin{aligned} k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi_x}dx - \int_0^L k_0 l(\omega_x - l\varphi)\overline{\phi}dx &= -\int_0^L f\overline{\phi}dx, \\ b\int_0^L \psi_x\overline{\eta_x}dx + k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\eta}dx &= -\int_0^L g\overline{\eta}dx, \\ k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{\xi_x}dx + kl\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\xi}dx &= -\int_0^L h\xi dx. \end{aligned}$$

Somando as equações acima encontramos

$$\begin{aligned} b\int_0^L \psi_x\overline{\eta_x}dx \quad &+ \quad k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\overline{\phi_x + \eta + l\xi})dx \\ &+ \quad k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)(\overline{\xi_x - l\phi})dx = -\left[\int_0^L f\overline{\phi} + g\overline{\eta} + h\xi dx\right]. \end{aligned}$$

Esta igualdade nos induz a usar o teorema de Lax-Milgran para concluir a bijetividade do operador $\mathcal{A}$.

Seja o espaço de Hilbert $\mathcal{W} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$ munido com norma

$$\|(\phi,\eta,\xi)\|_{\mathcal{W}}^2 = \|\phi_x + \eta + l\xi\|_{L^2}^2 + \|\xi_x - l\phi\|_{L^2}^2 + \|\eta_x\|_{L^2}^2.$$

Definamos a forma sesquilinear $a : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right) = b\int_0^L \psi_x\overline{\eta_x}dx \quad &+ \quad k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)(\overline{\phi_x + \eta + l\xi})dx \\ &+ \quad k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{(\xi_x - l\phi)}dx. \end{aligned}$$

Lema 2.3. *A forma sesquilinear $a : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua e coerciva, isto é, existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que*
(i) $|a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right)| \leq C_1\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2\|(\phi,\eta,\xi)\|_{\mathcal{W}}^2$,

(ii) $a\left((\varphi,\psi,\omega),(\varphi,\psi,\omega)\right) \geq C_2\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2$,

para quaisquer $(\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi) \in \mathcal{W}$.

Demonstração. (ii) Para quisquer $(\varphi,\psi,\omega)\in\mathcal{W}$ tem-se

$$\begin{aligned}
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(\varphi,\psi,\omega)\right)| &= k\int_0^L \left[|\varphi_x+\psi+l\omega|^2+k_0|\omega_x-l\varphi|^2+b|\psi_x|^2\right]dx\\
&= b\|\psi\|_{L^2}^2+k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+k_0\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2dx\\
&\geq C\left(\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2+\|\psi_x\|_{L^2}^2\right)\\
&= C\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2,
\end{aligned}$$

onde $C=\min\{k,k_0,b\}$. Logo, a forma sesquilinear a é coerciva.

(i) Dados (φ,ψ,ω), $(\phi,\eta,\xi)\in\mathcal{W}$ temos

$$\begin{aligned}
a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right) &= k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\phi_x+\eta+l\xi})dx\\
&\quad+k_0\int_0^L(\omega_x-l\varphi)(\overline{\xi_x-l\phi})dx+b\int_0^L\psi_x\eta_x dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando a desigualdade $(a+b)^p\leq 2^p(a^p+b^p)$ vemos que

$$\begin{aligned}
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right)|^2 &\leq +16k^2\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2\|\phi_x+\eta+l\xi\|_{L^2}^2\\
&\quad+16k_0^2\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2\|\xi_x-l\phi\|_{L^2}^2+4b^2\|\psi_x\|_{L^2}^2\|\eta_x\|_{L^2}^2\\
&\leq \max\{16k^2,16k_0^2,4b^2\}\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2\|(\phi,\eta,\xi)\|_{\mathcal{W}}^2.
\end{aligned}$$

Enfim, denotando $C^2=\max\{16k^2,16k_0^2,4b^2\}$ temos

$$|a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right)| \leq C\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}\|(\phi,\eta,\xi)\|_{\mathcal{W}}.$$

Portanto, a forma sesquilinear a é contínua. □

Consideremos, agora, o funcional antilinear $\mathbf{f}:\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{C}$ dado por

$$\mathbf{f}((\phi,\eta,\xi))=-\left[\int_0^L f\overline{\phi}+g\overline{\eta}+h\overline{\xi}dx\right],$$

onde $f=\rho_1 f^2$, $g=\gamma f^3+\rho_2 f^4$ e $h=\rho_1 f^6$. Desta forma, $\mathbf{f}$ está bem definida, é antilinear e, além disso, usando a desigualdade de Hölder e de Poincaré resulta que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{f}((\phi,\eta,\xi))| &\leq \int_0^L\left(|f||\phi|+|g||\eta|+|h||\xi|\right)dx\\
&\leq \|f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}\|\eta\|_{L^2}+\|h\|_{L^2}\|\xi\|_{L^2}\\
&\leq \max\{\ |f\|_{L^2},\|g\|_{L^2},\|h\|_{L^2}\}\left(\|\phi\|_{L^2}+\|\eta\|_{L^2}+\|\xi\|_{L^2}\right)\\
&\leq C(\|\phi_x\|_{L^2}+\|\eta_x\|_{L^2}+\|\xi_x\|_{L^2}),\forall(\phi,\eta,\xi)\in\mathcal{W}\\
&\leq C\|(\phi,\eta,\xi)\|_S,\ \ \forall(\phi,\eta,\xi)\in\mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Segue pelas equivalência de normas que $\mathcal{W}$

$$|\mathbf{f}((\phi,\eta))| \leq C\|(\phi,\eta,\xi)\|_{\mathcal{W}}, \quad \forall(\phi,\eta,\xi) \in \mathcal{W}$$

Portanto, o funcional antilinear acima é contínuo. Pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi,\omega) \in \mathcal{W}$ tal que

$$a((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)) = \mathbf{f}(\phi,\eta,\xi), \quad \forall(\phi,\eta,\xi) \in \mathcal{W}. \tag{2.33}$$

Considerando em (2.33) $\eta = \xi = 0$ temos

$$k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi}_x dx - k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)l\overline{\phi}dx = -\int_0^L f\overline{\phi}dx, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(0,L)$$

ou seja,

$$\int_0^L k(\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\phi_x}dx = -\int_0^L \left[f - k_0 l(\omega_x - l\varphi)\right]\overline{\phi}dx.$$

Pela definição do espaço de Sobolev $H^1(0,L) = W^{1,2}(0,L)$ temos que

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega) \in H^1(0,L) \ \text{ e } k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x = f - k_0 l(\omega_x - l\varphi) \in L^2(0,L).$$

Daí concluímos que

$$\varphi \in H^2(0,L) \text{ e } k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) = f = \rho_1 f^1. \tag{2.34}$$

Usando novamente a expressão (2.33) com $\phi = \eta = 0$ temos

$$k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)l\overline{\xi}dx + k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)l\overline{\xi}dx = -\int_0^L h\overline{\xi}dx, \quad \forall\xi \in C_0^\infty(0,L).$$

E de um modo análogo ao anterior concluímos que

$$\omega \in H^2(0,L) \text{ e } k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = h = \rho_1 f^6. \tag{2.35}$$

Por fim usando a expressão (2.33) com $\phi = \xi = 0$ temos

$$k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\eta}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{\eta_x}dx = -\int_0^L g\overline{\eta}dx, \quad \forall\eta \in C_0^\infty(0,L).$$

De modo análogo aos anteriores vemos que

$$\psi \in H^2(0,L) \text{ e } b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) = g = \gamma f^3 + \rho_2 f^4. \tag{2.36}$$

Segue de (2.34) - (2.36) que existem únicos $\varphi,\psi,\omega \in H^2 \cap H_0^1$ satisfazendo as equações (2.31)- (2.32). Consequentemente, existe único $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfazendo $AU = F$, ou seja, operador $\mathcal{A}$ é um operador bijetivo.

Mostraremos agora que seu inverso $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado. Dado $F \in \mathcal{H}$ seja

$U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $AU = F$. Assim

$$\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Multiplicando a equação (2.25) por $\overline{\varphi} \in H_0^1(0,L)$, (2.27) por $\overline{\psi} \in H_0^1(0,L)$, (2.29) por $\overline{\omega} \in H_0^1(0,L)$, integrando de 0 a L e somando vem

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \quad &+ \quad k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 = \int_0^L \rho_1 f^2 \overline{\varphi} dx \\ &+ \quad \int_0^L (\gamma f^3 + \rho_2 f^4)\overline{\psi} dx + \int_0^L \rho_1 f^6 \overline{\omega} dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder no lado direito da igualdade anterior vemos que,

$$\begin{aligned} k\int_0^L &|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 \\ &\leq \rho_1\|f^2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \rho_1\|f^6\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} + \|\gamma f^3 + \rho_2 f^4\|_{L^2} \\ &\leq \rho_1\|F\|_{\mathcal{H}}(\|\varphi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}) + \max\{\gamma, \rho_2\}\|F\|_{\mathcal{H}}\|\psi\|_{L^2} \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}(\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|\omega_x\|_{L^2}) \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_S. \end{aligned}$$

Resulta usando a equivalência das normas que

$$\int_0^L \left[k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0|\omega_x - l\varphi|^2 + b|\psi_x|^2\right] dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.37)$$

Pela equação (2.24) temos

$$\int_0^L \rho_1|\Phi|^2 dx \leq \int_0^L \rho_1|f^1||\overline{\Phi}|dx \leq \frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\Phi|^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\|f^1\|_{L^2}^2.$$

Assim,

$$\int_0^L \rho_1|\Phi|^2 dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.38)$$

Com um argumento análogo ao anterior, levando em consideração as equações (2.26) e (2.28) chegamos em

$$\int_0^L \rho_2|\Psi|^2 dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \text{ e } \int_0^L \rho_1|W|^2 dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (2.39)$$

Juntando as equações (2.37), (2.38) e (2.39) concluímos que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \left[\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + \rho_1|W|^2 + b|\psi_x|^2\right] dx \\ &+ \ k \int_0^L \left[|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\varphi|^2\right] dx \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_4\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

E assim

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.40}$$

Portanto, o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado e, consequentemente, $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Proposição 2.4. *Existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, isto é, existe λ positivo tal que $(\lambda I - \mathcal{A})$ é inversivel com $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, usando o Lema 1.19 temos que $(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ é inversivel com inverso limitado desde que

$$\|\lambda\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|I^{-1}\|} = 1 \Leftrightarrow \lambda \in (-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}).$$

Logo, existe $0 < \lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. □

Lema 2.5. *O operador $\mathcal{A}$ é densamente definido , isto é, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Para mostrar que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, seja $U \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp}$ de modo que

$$\langle V, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad \forall\ V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Como existe $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$, tomando $V_0 = (\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}U$ temos

$$\begin{aligned}\lambda_0\|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle AV_0, V_0\rangle_{\mathcal{H}} &= 0 \\ \lambda_0\|V_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_0^L \gamma|\Psi|^2 dx &= 0 \Rightarrow V_0 = 0\end{aligned}$$

Portanto, $U = (\lambda_0 I - \mathcal{A})V_0 = 0$, ou seja, $\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\perp} = \{0\}$. Pelo Teorema 1.15 temos $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em $\mathcal{H}$. □

Proposição 2.6. *O operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$ de contrações de classe C_0.*

Demonstração. De fato, pois o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo , existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, então o resultado segue pelo Teorema de Lumer-Philips, Teorema 1.56. □

Considere $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$ o semigrupo da proposição anterior. Se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ temos que $U(t) = S_{\mathcal{A}}(t)U_0$ é a única solução forte do problema de Bresse com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet. Além disso, pelo Teorema 1.58 temos que $U \in C^0([0,\infty);\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty);\mathcal{H})$.

2.2.2 Condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann

Nesta secção, consideramos o sistema de Bresse (2.1) - (2.4) sujeito às condições de fronteira do tipo Dirichlet -Neumann-Neumann

$$\varphi(t,0) = \varphi(t,L) = \psi_x(t,0) = \psi_x(t,L) = \omega_x(t,0) = \omega_x(t,L) = 0, \tag{2.41}$$

para $t \in (0,\infty)$.

A energia do sistema será dada pela mesma expressão (2.10), porém agora o espaço de energia associado ao sistema será o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times \Big[H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L)\Big]^2 \tag{2.42}$$

onde

$$L_*^2(0,L) = \left\{u \in L^2(0,L);\ \int_0^L u dx = 0\right\} \text{ e } H_*^1(0,L) = H^1(0,L) \cap L_*^2(0,L).$$

Observamos que, devido à Proposição 1.41, em $H_*^1(0,L)$ é válida a desigualdade de Poincaré. De modo análogo, mostra-se que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\omega,W\|^2 \\ &= \int_0^L \Big[\rho_1|\Phi|^2 + \rho_2|\Psi|^2 + \rho_1|W|^2 + b|\psi_x|^2\Big]dx \\ &\quad + \int_0^L \Big[k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 + k_0|\omega_x - l\varphi|^2\Big]dx \end{aligned}$$

define uma norma em $\mathcal{H}$ equivalente à norma usual.

O sistema novamente pode ser escrito na forma de um problema de Cauchy do tipo

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \\ &U(0) = U_0, \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde o operador $\mathcal{A}$ será dado por

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k_0 l}{\rho_2} Id(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{k+k_0 l}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k}{\rho_2} Id(\cdot) & \frac{-\gamma}{\rho_2} Id(\cdot) & -\frac{k}{\rho_2} Id(\cdot) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) \\ -\frac{kl+k_0}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{-kl}{\rho_1} Id(\cdot) & 0 & \frac{k_0 l}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{kl^2}{\rho_1} Id(\cdot) & 0 \end{bmatrix}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{(\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in \mathcal{H}; \varphi, \psi, \omega \in H^2, \Phi \in H_0^1, \Psi, W \in H_*^1, \psi_x, \omega_x \in H_0^1\right\}.$$

Para concluírmos pelo Teorema de Lummer-Phillips , Teorema 1.56, que existe uma única solução para o problema (2.43) ou, equivalentemente para o sistema (2.1) - (2.4), basta mostrarmos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, pois pela Proposição 2.2 o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. Além disso, pelo Lema 2.5 segue que $\mathcal{A}$ é densamente definido.

Sejam $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)$. A equação resolvente $\mathcal{A}U = F$ é equivalente ao sistema de equações (2.24)-(2.29). Desta forma basta considerarmos $\Phi = f^1, \Psi = f^3$ e $W = f^5$ e assim pelas equações (2.24) , (2.26) e (2.28) segue que $\Phi, \Psi, W \in H_*^1(0, L)$. Substituindo estas igualdades nas outras equações temos

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) = \rho_1 f^2, \text{ em } L^2(0, L), \tag{2.44}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_2 f^4 + \gamma f^3, \text{ em } L^2(0, L), \tag{2.45}$$

$$k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = \rho_1 f^6, \text{ em } L^2(0, L). \tag{2.46}$$

Lema 2.7. *Dados $g_1 \in L^2(0, L)$, g_2 , $g_3 \in L_*^2(0, L)$, o sistema*

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) = g_1, \text{ em } L^2(0, L), \tag{2.47}$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) = g_2, \text{ em } L_*^2(0, L), \tag{2.48}$$

$$k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = g_3, \text{ em } L_*^2(0, L) \tag{2.49}$$

possui única solução $(\varphi, \psi, \omega) \in [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)] \times [H^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)]^2$ com ψ_x , $\varphi_x \in H_0^1(0, L)$.

Demonstração. **Existência:** Pelo Lema 1.59 temos que existem $v \in H_0^1(0, L)$ e $u \in H^1(0, L)$ tais que

$$ku_x + k_0 lv = g_1,$$
$$k_0 v_x - klu = g_3.$$

Além disso, como $g_3 \in L^2_*(0,L)$ temos

$$\int_0^L g_3(x)dx = 0.$$

Logo

$$\int_0^L u(x)dx = 0,$$

ou seja, $u \in H^1_*(0,L)$. Defina,

$$\psi(x) = \frac{1}{b}\int_0^x \int_0^z (g_2(s) + ku(s))dsdz - \frac{1}{bL}\int_0^L \int_0^r \int_0^z (g_2(s) + ku(s))dsdrdz.$$

Observe que como $g_2, u \in L^2_*(0,L)$ segue que $\psi \in H^2(0,L) \cap H^1_*(0,L)$. Note ainda que

$$\psi_x(x) = \frac{1}{b}\int_0^x (g_2(s) + ku(s))ds,$$

daí $\psi_x \in H^1_0(0,L)$.

Aplicando, novamente, o Lema 1.59 resulta que existem $\varphi \in H^1_0(0,L)$ e $\omega \in H^1_*(0,L)$ tais que

$$\begin{aligned} &\omega_x - l\varphi = v, \\ &\varphi_x + l\omega = u - \psi. \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\begin{aligned} &\omega_x = v + l\varphi \in H^1_0(0,L) \Rightarrow \omega \in H^2(0,L) \\ &\varphi_x = u - \psi - l\omega \in H^1_*(0,L). \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} &k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) = ku_x + k_0 lv = g_1, \\ &k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = k_0 v_x - klu = g_3. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} b\psi_{xx} &= b\frac{1}{b}\left(\int_0^x (g_2(s) + ku(s))dx\right)_x \\ &= g_2(x) + ku(x) = g_2 + k(\varphi_x + \psi + l\omega). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (2.47)-(2.49) tem solução com regularidade desejada.

Unicidade: Considere o espaço de Hilbert $\mathcal{W} = H^1_0(0,L) \times H^1_*(0,L) \times H^1_*(0,L)$

equipado com a norma

$$\|(\phi,\eta,\xi)\|^2_{\mathcal{W}} = \|\phi_x+\eta+l\xi\|^2_{L^2} + \|\xi_x - l\phi\|^2_{L^2} + \|\eta_x\|^2_{L^2}.$$

Defina a forma sesquilinear, $a : \mathcal{W}\times\mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} a\left((\varphi,\psi,\omega),(\phi,\eta,\xi)\right) = b\int_0^L \psi_x\overline{\eta_x}dx \quad &+ \quad k\int_0^L (\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\phi_x+\eta+l\xi})dx \\ &+ \quad k_0\int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{(\xi_x - l\phi)}dx. \end{aligned}$$

Já foi mostrado que a é uma forma sesquilinear continua e coerciva. Além disso, consideramos o funcional antilinear $\mathbf{f} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\mathbf{f}((\phi,\eta,\xi)) = -\left[\int_0^L f\overline{\phi} + g\overline{\eta} + h\overline{\xi}dx\right],$$

onde $f=\rho_1 f^2$, $g=\gamma f^3+\rho_2 f^4$ e $h=\rho_1 f^6$. Desta forma, $\mathbf{f}$ está bem definida e usando a desigualdade de Hölder e de Poincaré resulta que $\mathbf{f}$ é contínuo. Pelo Teorema de Lax-Milgran existe único $(\varphi,\psi,\omega)\in\mathcal{W}$ tal que

$$a((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)) = \mathbf{f}(u,v,p)\ ,\ \forall(u,v,p)\in\mathcal{W}.$$

Consequentemente, o sistema (2.47)-(2.49) tem única solução com regularidade desejada. □

Considerando no Lema 2.7 $g_1=\rho_1 f^1$, $g_2=\rho_2 f^4+\gamma f^3$ e $g_3=\rho_1 f^5$, vemos que o sistema (2.44)-(2.46) tem única solução

$$(\varphi,\psi,\omega)\in\left[H^2(0,L)\cap H^1_0(0,L)\right]\times\left[H^2(0,L)\cap H^1_*(0,L)\right]^2$$

com ψ_x , $\omega_x\in H^1_0(0,L)$. Mostrando assim que existe único $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $AU=F$, ou seja, o operador $\mathcal{A}$ é bijetor.

Procedendo de modo análogo ao que foi feito para o caso das condições de Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, concluímos que $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado. Portanto, $0\in\rho(\mathcal{A})$. E assim a existência e unicidade de solução do sistema de Bresse com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann segue do Teorema de Lummer-Philips, Teorema 1.56, e Teorema 1.58.

Capítulo 3

Estabilidade exponencial do sistema de Bresse

3.1 Estabilidade exponencial

Neste capítulo, trataremos da estabilidade exponencial do sistema

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) \; = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t \; = 0, \tag{3.2}$$

$$\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) \; = 0, \tag{3.3}$$

para $x \in (0, L)$ e $t \in (0, \infty)$, sujeito às condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi(L, \cdot) = \psi(0, \cdot) = \psi(L, \cdot) = \omega(0, \cdot) = \omega(L, \cdot) = 0 \;\text{ em }\; (0, \infty), \tag{3.4}$$

e às condições iniciais

$$u(\cdot, 0) = u_0, \;\; u_t(\cdot, 0) = u_1, \;\; \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \;\; \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \;\text{ em }\; (0, L). \tag{3.5}$$

Para simplificar, adotaremos as seguintes notações

$$\chi_0 = \left|\frac{k\rho_2 - b\rho_1}{k}\right| \qquad \text{e} \qquad \nu_0 = \left|\frac{k_0 - k}{k_0}\right|. \tag{3.6}$$

Antes de começarmos a obter várias estimativas, distribuídas em diferentes lemas, necessárias para chegarmos ao nosso principal resultado, observamos que estas estimativas também são válidas quando se considera o sistema Bresse sujeito às condições de fronteira (2.6) do tipo Dirichlet-Neumann-Newmann. Contudo, mostrar a estabilidade exponencial para o sistema (3.1)-(3.3) com as condições de fronteira (3.4) é mais difícil, pois neste caso aparecem termos pontuais que também devem ser estimados.

Os resultados que apresentamos a seguir se baseiam no trabalho de Alabau-Boussouira, Rivera e Almeida Júnior[10].

Antes de prosseguirmos, chamamos a atenção novamente para as diversas constantes positivas que aparecem no texto, representadas pela letra C. Na maioria das vezes, a constante C tem diferentes valores mudando de uma linha para outra linha.

Nossa principal ferramenta, neste capítulo, é o Teorema 1.65.

Dados $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução da equação resolvente $(i\beta I - \mathcal{A})U = F$, a qual em termos de suas componentes pode ser escrita como o sistema de equações

$$\begin{aligned}
i\beta\varphi - \Phi &= f_1 \text{ em } H_0^1(0,L), &(3.7)\\
i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) &= \rho_1 f_2 \text{ em } L^2(0,L), &(3.8)\\
i\beta\psi - \Psi &= f_3 \text{ em } H^1(0,L), &(3.9)\\
i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\Psi &= \rho_2 f_4 \text{ em } L^2(0,L), &(3.10)\\
i\beta\omega - W &= f_5 \text{ em } H^1(0,L), &(3.11)\\
i\beta\rho_1 W - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) &= \rho_1 f_6 \text{ em } L^2(0,L). &(3.12)
\end{aligned}$$

Lema 3.1. *O eixo imaginario está contido no resolvente do operador $\mathcal{A}$, ou seja, $\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo, segue que $\mathcal{A}$ é fechado. Além disso, devido às imersões de Sobolev $\mathcal{A}^{-1}$ é compacto. Segue do Teorema 1.20 que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A})$, ou seja, $\sigma(\mathcal{A})$ é constituído apenas de autovalores de $\mathcal{A}$. Suponha, por absurdo, que exista $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$. Daí, existe $0 \neq U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(i\beta I - \mathcal{A})U = 0$. Desta forma,

$$\langle (i\beta I - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow i\beta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

Tomando a parte real da expressão anterior segue que $\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ e assim pela expressão (2.23) temos que $\Psi = 0$. Usando a equação (3.9) temos que $\psi = 0$. Substituindo estes valores no sistema (3.7)-(3.12)obtemos

$$\begin{aligned}
-\rho_1\beta^2\varphi - k(\varphi_x + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) &= 0, &(3.13)\\
k(\varphi_x + l\omega) &= 0, &(3.14)\\
-\rho_1\beta^2\omega - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \omega) &= 0. &(3.15)
\end{aligned}$$

Pela equação (3.14) resulta que $\varphi_x + l\omega = 0$, usando esta igualdade nas equações (3.13) e (3.15) no sistema anterior temos que

$$\begin{aligned}
\rho_1\beta^2\varphi + k_0 l(\omega_x - l\varphi) &= 0, &(3.16)\\
\rho_1\beta^2 l\omega + k_0 l(\omega_x - l\varphi)_x &= 0.
\end{aligned}$$

Derivando a equação (3.16) obtemos

$$\rho_1\beta^2\varphi_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi)_x = 0,$$
$$\rho_1\beta^2 l\omega + k_0 l(\omega_x - l\varphi)_x = 0.$$

Assim vemos que $\varphi_x - l\omega = 0$. Portanto,

$$\varphi_x + l\omega = 0,$$
$$\varphi_x - l\omega = 0.$$

Resolvendo este sistema de equações obtemos que $\varphi_x = \omega = 0$, ou seja, φ é constante em relação à x, como $\varphi(L) = 0$ temos que $\varphi = 0$. Logo, pelas equações (3.7) e (3.11) concluímos que $U = 0$. Esta contradição mostra que $\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$. □

Agora, veremos alguns lemas que serão importantes para podermos concluir que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}} < \infty,$$

desde que $\chi_0 = 0$ e $\nu_0 = 0$.

Lema 3.2. *Sob as condições anteriores temos*

$$\int_0^L \left(|\Phi|^2 + |\omega|^2\right) dx \leq C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para uma constante positiva C e $|\beta|$ suficientemente grande.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.8) por $\overline{\varphi}$ obtemos

$$i\beta\rho_1\Phi\overline{\varphi} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x\overline{\varphi} - k_0 l(\omega_x - l\varphi)\overline{\varphi} = \rho_1 f_2\overline{\varphi}, \tag{3.17}$$

usando a equação (3.7) em (3.17) e integrando de 0 a L resulta que

$$-\rho_1\int_0^L \Phi\overline{(\Phi + f_1)}dx - k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)_x\overline{\varphi}dx - k_0 l\int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{\varphi}dx$$
$$= \rho_1\int_0^L f_2\overline{\varphi}dx.$$

Daí, usando integração por partes e tomando a parte real, temos que

$$\rho_1\int_0^L |\Phi|^2 dx = k\,\mathrm{Re}\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\varphi}_x dx + k_0 l^2\int_0^L |\varphi|^2 dx$$
$$+\; k_0 l\,\mathrm{Re}\int_0^L \omega\overline{\varphi_x}dx - \rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L f_2\overline{\varphi}dx - \rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L \Phi\overline{f_1}dx.$$

Reajustando os termos na equação acima encontramos

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2dx \;&= k\,\mathrm{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{\varphi}_xdx+k_0l\int_0^L\left(\omega\overline{\varphi_x}+l|\varphi|^2\right)dx\\&-\;\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L f_2\overline{\varphi}dx-\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L\Phi\overline{f_1}dx.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Somando e subtraindo termos à equação anterior obtemos

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2dx \;&= k\,\mathrm{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{\varphi}_xdx+k\,\mathrm{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\psi+l\omega})dx\\&-\;k\,\mathrm{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\psi+l\omega})dx+k_0l\,\mathrm{Re}\int_0^L\omega(\overline{\psi+l\omega})dx\\&+\;k_0l\,\mathrm{Re}\int_0^L\omega\overline{\varphi_x}dx-k_0l\,\mathrm{Re}\int_0^L\omega(\overline{\psi+l\omega})dx+k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx\\&-\;\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L f_2\overline{\varphi}dx-\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L\Phi\overline{f_1}dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2dx \;+\; k_0l^2\int_0^L|\omega|^2dx &=\\&= k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+k_0l\,\mathrm{Re}\int_0^L\omega(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx\\&-\;k\,\mathrm{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\psi+l\omega})dx-k_0l\,\mathrm{Re}\int_0^L\omega\overline{\varphi}dx\\&+\;k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx-\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L\Phi\overline{f_1}dx-\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L f_2\overline{\varphi}dx.\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L|\Phi|^2dx \;+\; k_0l^2\int_0^L|\omega|^2dx &\le\\&\le k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+k_0l\int_0^L|\omega||\varphi_x+\psi+l\omega|dx\\&+\;k\int_0^L|\varphi_x+\psi+l\omega||\psi+l\omega|dx+k_0l\int_0^L|\omega||\varphi|dx\\&+\;k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx+\rho_1\int_0^L|\Phi||f_1|dx+\rho_1\int_0^L|f_2||\varphi|dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder resulta que

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2 dx \ + k_0 l^2 \int_0^L |\omega|^2 dx \ \leq & \\
\leq k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\psi + l\omega\|_{L^2} & \\
+ \ k_0 l\|\omega\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \rho_1\|\Phi\|_{L^2}\|f_1\|_{L^2} + \rho_1\|f_2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} & \\
+ \ k_0 l\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} + k_0 l^2\|\varphi\|_{L^2}^2. &
\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
k\|\psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} \ &\leq \frac{k}{2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|\psi\|_{L^2}^2 \\
kl\|\omega\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} \ &= \left(\frac{l\sqrt{k_0}}{\sqrt{3}}\|\omega\|_{L^2}\right)\left(\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{k_0}}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\right) \\
&\leq \ \frac{k_0 l^2}{6}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{3k^2}{2k_0}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 \\
k_0 l\|\omega\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} \ &= k_0\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\|\omega\|_{L^2}\right)\left(\sqrt{3}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\right) \\
&\leq \ \frac{k_0 l^2}{6}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{3k_0}{2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 \\
k_0 l\|\omega\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \ &= k_0\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\|\omega\|_{L^2}\right)\left(\sqrt{3}\|\psi\|_{L^2}\right) \\
&\leq \ \frac{k_0 l^2}{6}\|\omega\|_{L^2}^2 + \frac{3k_0}{2}\|\psi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Concluímos pelas últimas desigualdades que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |\Phi|^2 dx + \frac{k_0 l^2}{2} \int_0^L |\omega|^2 dx \ \ &\leq \ \ C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|\psi\|_{L^2}^2 \\
&\quad + k_0 l^2\|\varphi\|_{L^2}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Pela equação (3.7) temos

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\Phi + f_1}{i\beta}.$$

Como

$$\begin{aligned}
k_0 l^2\|\varphi\|_{L^2}^2 = k_0 l^2\left\|\frac{\Phi + f_1}{i\beta}\right\|_{L^2}^2 &\leq \ \frac{2k_0 l^2}{|\beta|^2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{2k_0 l^2}{|\beta|^2}\|f_1\|_{L^2}^2 \\
&\leq \ \frac{2k_0 l^2}{|\beta|^2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

consideramos $|\beta|$ suficientemente grande de modo que $\dfrac{k_0 l^2}{|\beta|^2} \ \leq \ \dfrac{\rho_1}{4}$, ou seja,

$|\beta| \geq 2\sqrt{\dfrac{k_0}{\rho_1}}l$. Assim,

$$k_0 l^2 \|\varphi\|_{L^2}^2 \leq \frac{\rho_1}{2}\|\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2$$

e segue de (3.19) que

$$\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\Phi|^2 dx + \frac{k_0 l^2}{2}\int_0^L |\omega|^2 dx \leq C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

se $|\beta| \geq 2\sqrt{\dfrac{k_0}{\rho_1}}l$. O lema está provado.

□

Lema 3.3. *Sob as condições anteriores existe uma constante C positiva tal que*

$$\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\beta| > 1$.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.10) por $\overline{\psi}$ obtemos

$$i\beta\rho_2\Psi\overline{\psi} - b\psi_{xx}\overline{\psi} + k(\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi} + \gamma\Psi\overline{\psi} = \rho_2 f_4\overline{\psi}, \tag{3.20}$$

Integrando a equação (3.20) por partes de 0 a L e tomando a parte real obtemos

$$\begin{aligned} b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \; &= \; -k\,\mathrm{Re}\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi}dx + \rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^L \Psi(\overline{i\beta\psi})dx \\ &- \; \gamma\,\mathrm{Re}\int_0^L \Psi\overline{\psi}dx + \rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^L f_4\overline{\psi}dx. \end{aligned}$$

Pela a equação (3.9) temos que $\overline{i\beta\psi} = -(\overline{f_3 + \Psi})$, daí

$$\begin{aligned} b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \; &= \; -k\,\mathrm{Re}\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi}dx - \rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^L \Psi(\overline{f_3 + \Psi})dx \\ &+ \; \gamma\,\mathrm{Re}\int_0^L \Psi\left(\frac{\overline{f_3 + \Psi}}{i\beta}\right)dx + \rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L f_4\overline{\psi}dx. \end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\begin{aligned} b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \; &\leq k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|\left|\frac{\Psi + f_3}{i\beta}\right|dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2 dx + \rho_2\int_0^L |\Psi||f_3|dx \\ &+ \; \frac{\gamma}{|\beta|}\int_0^L |\Psi|^2 dx + \frac{\gamma}{|\beta|}\int_0^L |\Psi||f_3|dx + \rho_1\int_0^L |f_4||\psi|dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder resulta que

$$\begin{aligned} b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \;\; &\leq \;\; k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + \left(\rho_2 + \frac{\gamma}{|\beta|}\right)\|\Psi\|_{L^2}^2 \\ &+ \;\left(C+\frac{C}{|\beta|}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora, note que

$$(i\beta I-\mathcal{A})U = F \Leftrightarrow \langle (i\beta I-\mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}$$

e, assim,

$$-\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq |\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, de (2.23) temos

$$\gamma\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.22}$$

Resulta usando a desigualdade (3.22) em (3.21) que existe $C>0$ tal que

$$b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.23}$$

para $|\beta|>1$. □

Agora, introduzimos as seguintes notações

$$\begin{aligned} I_\psi \;&=\; |\psi_x(L)|^2 \;+\; |\psi_x(0)|^2, \\ I_\omega \;&=\; |\omega_x(L)|^2 \;+\; |\omega_x(0)|^2, \\ I_\varphi \;&=\; |\varphi_x(L)|^2 \;+\; |\varphi_x(0)|^2. \end{aligned}$$

Lema 3.4. *Existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\begin{aligned} &(a)\;\; I_\psi \;\leq\; C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \\ &(b)\;\; I_\omega \;\leq\; C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \\ &(c)\;\; I_\varphi \;\leq\; C\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$I_\varphi \leq C\mathcal{N}, \tag{3.24}$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \;&= \|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \;\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Demonstração. (a) Substituindo a equação (3.9) em (3.10) temos

$$-\rho_2\beta^2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\Psi = \rho_2 f_4 + i\beta\rho_2 f_3. \tag{3.26}$$

Multiplicando a equação acima por $q\psi_x$, onde $q(x) = x - \frac{L}{2}$, e integrando de 0 a L obtemos

$$-\rho_2\beta^2 \int_0^L q\psi\overline{\psi_x}dx - b\int_0^L q\psi_{xx}\overline{\psi_x}dx + k\int_0^L q(\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi_x}dx \\ + \gamma\int_0^L q\Psi\overline{\psi_x}dx = \int_0^L q(\rho_2 f_4 + i\beta\rho_2 f_3)\overline{\psi_x}dx.$$

Tomando-se a parte real da expressão anterior resulta que

$$-\frac{\rho_2\beta^2}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\psi|^2dx - \frac{b}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\psi_x|^2dx + k\,\mathrm{Re}\int_0^L q(\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{\psi_x}dx \\ + \gamma\,\mathrm{Re}\int_0^L q\Psi\overline{\psi_x}dx = \mathrm{Re}\int_0^L q(\rho_2 f_4 + i\beta\rho_2 f_3)\overline{\psi_x}dx.$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira $\psi(0) = \psi(L) = 0$, obtemos

$$\frac{\rho_2\beta^2}{2}\int_0^L |\psi|^2dx - \frac{bL}{4}\left(|\psi_x(0)|^2 + |\psi_x(L)|^2\right) + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx + \gamma\,\mathrm{Re}\int_0^L q\Psi\overline{\psi_x}dx \\ + k\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi_x}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx = \mathrm{Re}\int_0^L q(\rho_2 f_4 + i\beta\rho_2 f_3)\overline{\psi_x}dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{bL}{4}I_\psi &= \underbrace{\frac{\rho_2\beta^2}{2}\int_0^L |\psi|^2dx}_{:=I_1} + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2dx + \underbrace{k\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi_x}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx}_{:=I_2} \\ &+ \underbrace{\gamma\,\mathrm{Re}\int_0^L q\Psi\overline{\psi_x}dx}_{:=I_3} - \mathrm{Re}\int_0^L q(\rho_2 f_4 + i\beta\rho_2 f_3)\overline{\psi_x}dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Agora, vamos obter estimativas para I_1, I_2 e I_3. Usando integração por partes e as condições de fronteira de Dirichilet temos

$$\begin{aligned} I_2 &= -k\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi}[(\varphi_x + \psi + l\omega)_x]dx - k\,\mathrm{Re}\int_0^L \overline{\psi}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\ &\overset{(3.8)}{=} -k\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi}\left[i\beta\rho_1\Phi - k_0 l(\omega_x - l\varphi) - \rho_1 f_2\right]dx - k\,\mathrm{Re}\int_0^L \overline{\psi}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx \\ &= k\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L q[\overline{i\beta\psi}]\Phi dx + k_0 kl\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi}(\omega_x - l\varphi)dx + k\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L q\overline{\psi}f_2dx \\ &- k\,\mathrm{Re}\int_0^L \overline{\psi}(\varphi_x + \psi + l\omega)dx. \end{aligned}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq \frac{k\rho_1 L}{2}\int_0^L |\Phi[i\beta\psi|dx + \frac{k_0 k l L}{2}\int_0^L |\psi||\omega_x - l\varphi|dx + \frac{\rho_1 k L}{2}\int_0^L |\psi||f_2|dx \\
+ \ \frac{kL}{2}\int_0^L |\psi||\varphi_x + \psi + l\omega|dx. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.9) em (3.28) obtemos

$$
\begin{aligned}
I_2 \ \leq \ & \frac{k\rho_1 L}{2}\int_0^L |\Phi(\Psi + f_3)|dx + C\|\psi\|_{L^2}\underbrace{(\|\omega_x - l\varphi\|_{l^2} + \|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2})}_{\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \ \frac{\rho_1 k L}{2}\|\psi\|_{L^2}\|f_2\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Desta forma, concluímos que

$$
I_2 \leq C\int_0^L |\Phi\Psi|dx + C\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
$$

Além disso, observe que

$$
I_1 = \frac{\rho_2\beta^2}{2}\int_0^L |\psi|^2 dx = C\int_0^L |i\beta\psi|^2 dx = \int_0^L |f_3 + \Psi|^2 dx
$$

e ainda pela desigualdade de Young temos

$$
I_3 = \gamma \operatorname{Re}\int_0^L q\Psi\overline{\psi_x}dx \leq C\int_0^L |\Psi|^2 dx + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx.
$$

Portanto, usando as estimativas obtidas para I_1, I_2 e I_3 em (3.27) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{bL}{2}I_\psi \ & \leq C\int_0^L |f_3 + \Psi|^2 dx + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx + C\int_0^L |\Phi|^2 dx + C\int_0^L |\Psi|^2 dx \\
& + \ C\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}
\end{aligned}
$$

Usando agora os Lemas 3.2 e 3.3 e a estimativa

$$
\gamma\int_0^L |\Psi|^2 dx \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}
$$

resulta que

$$
\begin{aligned}
I_\psi \ \leq \ & C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
& + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \ + \ C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto, para $|\beta|$ suficientemente grande resulta que

$$
I_\psi \leq C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
$$

(c) Multiplicando, agora, a equação (3.8) por $q(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})$ e integrando de 0 a L temos

$$k\int_0^L q(\varphi_x+\psi+l\omega)_x(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx = \rho_1 i\beta\int_0^L \Phi q(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx$$
$$-\ k_0\int_0^L q(\omega_x-l\varphi)(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx-\rho_1\int_0^L qf_2(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx.$$

Tomando a parte real da expressão acima resulta que

$$\frac{k}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\varphi_x+\psi+l\omega|^2dx = \underbrace{\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L i\beta\Phi q(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx}_{:=I_4}$$
$$-k_0\operatorname{Re}\int_0^L q(\omega_x-l\varphi)(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qf_2(\overline{\varphi_x+\psi+l\omega})dx. \tag{3.29}$$

Note que

$$\begin{aligned}
I_4 =&-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{i\beta\varphi_x})dx-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{i\beta\psi})dx-l\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{i\beta\omega})dx\\
=&\ -\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{\Phi_x+f_{1x}})dx-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{\Psi+f_3})dx\\
&-\ \rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi(\overline{W+f_5})dx\\
=&\ -\rho_1\int_0^L q\frac{d}{dx}|\Phi|^2dx-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi\overline{f_{1x}}dx-\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi\overline{\Psi}dx\\
&-\ \rho_1\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi\overline{f_3}dx-\rho_1 l\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi\overline{W}dx-\rho_1 l\operatorname{Re}\int_0^L q\Phi\overline{f_5}dx.
\end{aligned}$$

Portanto, usando integração por partes resulta que

$$\begin{aligned}
I_4 \ \leq\ & \underbrace{-\frac{\rho_1 L}{2}\left(|\Phi(L)|^2+|\Phi(0)|^2\right)}_{:=0}+C\int_0^L|\Phi|^2dx+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&+C\int_0^L|\Phi||\Psi|dx+C\int_0^L|\Phi||W|^2dx,
\end{aligned}$$

para uma constante $C>0$. Desta forma, chegamos a

$$I_4\leq C\|\Phi\|_{L^2}^2+C\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\ |F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando esta estimativa em (3.29) resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{kL}{4}\left(|(\varphi_x+\psi+l\omega)(L)|^2+|(\varphi_x+\psi+l\omega)(0)|^2\right)\\
&\quad\leq k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|\Phi\|_{L^2}^2+C\|\Phi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\
&\qquad+\ \frac{k_0L}{2}\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}+\frac{\rho_1 L}{2}\|f_2\|_{L^2}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$I_\varphi \leq C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\right).$$

Além disso, pelos Lemas 3.2 e 3.3 encontramos

$$I_\varphi \leq C\mathcal{N}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &+ \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

(b) Multiplicando agora a equação (3.12) por $q(\overline{\omega_x - l\varphi})$ e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned}\frac{k_0}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\omega_x - l\varphi|^2dx &= \underbrace{\rho_1 \operatorname{Re}\int_0^L i\beta q W(\overline{\omega_x - l\varphi})dx}_{:=I_5}\\ &+ kl\operatorname{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)(\overline{\omega_x-l\varphi})dx - \rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qf_5(\overline{\omega_x-l\varphi})dx. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

Estimando I_5, temos

$$\begin{aligned}I_5 &= -\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW(\overline{i\beta\omega_x})dx + l\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW(\overline{i\beta\varphi})dx\\ &= -\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW(\overline{W_x+f_{5x}})dx + l\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW(\overline{\Phi+f_1})dx\\ &= -\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|W|^2dx - \rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW(\overline{f_{5x}-lf_1})dx + l\rho_1\operatorname{Re}\int_0^L qW\overline{\Phi}dx.\end{aligned}$$

Portanto, usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}I_5 &\leq -\frac{\rho_1 L}{2}\left(|W(L)|^2+|W(0)|^2\right) + \rho_1\int_0^L|W|^2 + \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^L|W||f_{5x}|dx\\ &+ \frac{l\rho_1 L}{2}\int_0^L|W||\Phi|dx + \frac{l\rho_1 L}{2}\int_0^L|W||f_1|dx.\end{aligned}$$

Devido às condições de fronteira obtemos

$$I_5 \leq \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|W\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando esta estimativa em (3.30) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{k_0 L}{4}\left(|(\omega_x - l\varphi)(L)|^2 + |(\omega_x - l\varphi)(0)|^2\right) &\leq C\|W\|_{L^2}^2 + C\|W\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2} \\
&+ C\|\omega_x - l\varphi\|_{L^2}\|f_6\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Segue daí e da desigualdade de Young que

$$I_\omega \leq C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\right).$$

□

Lema 3.5. *Sob as condições anteriores, dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| \;\leq\; & \varepsilon\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Pelo Lema 3.4 segue que

$$I_\psi \leq C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2} + C\mathcal{R}, \tag{3.31}$$

onde

$$\mathcal{R} = \|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Além disso, observe que

$$I_\psi I_\varphi = \left(|\psi_x(L)|^2 + |\psi_x(0)|^2\right)\left(|\varphi_x(L)|^2 + |\varphi_x(0)|^2\right) \geq |\psi_x(L)|^2|\varphi_x(L)|^2.$$

Logo

$$|\psi_x(L)||\varphi_x(L)| \leq I_\psi^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}}.$$

Do mesmo modo, encontramos que $|\psi_x(0)||\varphi_x(0)| \leq I_\psi^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}}$. Daí resulta que

$$\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| = \left|(\psi_x\varphi_x)(L) - (\psi_x\varphi_x)(0)\right| \leq |\psi_x(L)\varphi_x(L)| + |\psi_x(0)\varphi_x(0)| \leq 2I_\psi^{\frac{1}{2}} I_\varphi^{\frac{1}{2}}.$$

Ainda pelo Lema 3.4 temos

$$I_\varphi^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\right).$$

A estimativa acima juntamente com (3.31) implica que

$$\begin{aligned}\left|\psi_x\varphi_x\big|_{x=0}^{x=L}\right| &\leq C\left(\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|\Psi\|_{L^2}+\mathcal{R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|U\|_{\mathcal{H}}+\|F\|_{\mathcal{H}}\right)\\ &\leq C\underbrace{\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}}_{=:J_1}+\underbrace{C\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}}_{=:J_2}\\ &\quad+\underbrace{C\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}}_{=:J_3}+\underbrace{C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}}_{=:J_4}.\end{aligned}$$

Segue pela desigualdade de Poincaré que

$$\|\psi\|_{L^2}\leq C_p\|\psi_x\|_{L^2}\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{\frac{1}{2}} &= \left(\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\|\psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

e, assim,

$$J_3\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}. \tag{3.32}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}J_2 &\leq C\left(\|\psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}+\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq C\left(\|\psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+\|F\|_{\mathcal{H}}\right)\|U\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq C\left\|\frac{\Psi+f_3}{i\beta}\right\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq \frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|\Psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}+\frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\\ &\leq \frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}}+\frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

devido à estimativa (3.22). Segue que

$$J_2\leq \frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{L^2}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.33}$$

para $|\beta|>1$. Da mesma forma,

$$J_4\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.34}$$

Além disso, dado $\varepsilon>0$, aplicando a desigualdade de Young para $p=4$ e $q=\frac{4}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(\sqrt[4]{\varepsilon}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\|\psi\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\mathcal{H}}\right) \\ &\le \frac{\varepsilon}{4}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{4}{3}}, \end{aligned}$$

devido à estimativa (3.22). Ou seja,

$$J_1 \le \frac{\varepsilon}{4}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}}. \tag{3.35}$$

Segue das estimativas (3.32)-(3.35) que

$$\begin{aligned} \left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| &\le \varepsilon\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \\ &+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}}+\frac{C}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}}+C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para $|\beta|>1$. □

Lema 3.6. *Nas condições do lema anterior existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\left|\omega_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| \le C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right). \tag{3.36}$$

Demonstração. Observe que

$$I_\omega I_\varphi=\left(|\omega_x(0)|^2+|\omega_x(L)|^2\right)\left(|\varphi_x(0)|^2+|\varphi_x(L)|^2\right)\ge|\omega_x(L)\varphi_x(L)|^2.$$

Logo,

$$|\omega_x(L)\varphi_x(L)|\le\sqrt{I_\omega I_\varphi}.$$

Do mesmo modo encontramos que

$$|\omega_x(0)\varphi_x(0)|\le\sqrt{I_\omega I_\varphi}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left|\omega_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| &= |\omega_x(L)\varphi_x(L)-\omega_x(0)\varphi_x(0)| \\ &\le |\omega_x(L)\varphi_x(L)|+|\omega_x(0)\varphi_x(0)|\le 2\sqrt{I_\omega I_\varphi}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.4 temos

$$\begin{aligned} I_\varphi &\le C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right), \\ I_\omega &\le C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left|\omega_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| &\le 2I_\omega^{\frac{1}{2}}I_\varphi^{\frac{1}{2}}\le C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right). \end{aligned}$$

□

Lema 3.7. *Com as mesmas hipóteses anteriores temos que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$k\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2dx \ \le C\chi_0\left|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\right| + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + \ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + b\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right|,$$

for $|\beta| > 1$.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.10) por $\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}$ e integrando de 0 a L temos

$$k\int_0^L |(\varphi_x+\psi+l\omega)|^2dx = \rho_2\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx - i\beta\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx + \ b\int_0^L \psi_{xx}\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx - \gamma\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx,$$

ou seja,

$$k\int_0^L |(\varphi_x+\psi+l\omega)|^2dx \ = \rho_2\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx + \underbrace{\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(i\beta\varphi_x)}dx}_{=:J_5} + \ \underbrace{\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(i\beta\psi)}dx}_{=:J_6} + \underbrace{b\int_0^L \psi_{xx}\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx}_{=:J_7} - \ \underbrace{\gamma\int_0^L \Psi\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)}dx}_{=:J_8} + \underbrace{\rho_2 l\int_0^L \Psi\overline{(i\beta\omega)}dx}_{=:J_9}.$$

Observemos agora que

$$J_5 \ = \rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\Phi_x+f_{1x})}dx = \rho_2\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx + \rho_2\int_0^L \Psi\overline{f_{1x}}dx,$$
$$J_6 \ = \rho_2\int_0^L \Psi\overline{(\Psi+f_3)}dx = \rho_2\int_0^L |\Psi|^2dx + \rho_2\int_0^L \Psi\overline{f_3}dx,$$
$$J_9 \ = l\rho_2\int_0^L \Psi\overline{(W+f_5)}dx = l\rho_2\int_0^L \Psi\overline{W}dx + l\rho_2\int_0^L \Phi\overline{f_5}dx$$

e usando integração por partes temos

$$J_7 = -b\int_0^L \psi_x(\varphi_x+\psi+l\omega)_x\,dx + b\psi_x\overline{\varphi_x}|_{x=0}^{x=L}.$$

Segue da equação (3.8) que

$$k(\varphi_x+\psi+\omega)_x = i\rho_1\lambda\Phi - k_0 l(\omega_x - l\varphi) - \rho_1 f_2.$$

Assim

$$
\begin{aligned}
J_7 &= - \frac{b}{k}\int_0^L \psi_x\overline{[i\beta\rho_1\Phi - k_0 l(\omega_x - l\varphi) - \rho_1 f_2]}dx + b\psi_x\overline{\varphi_x}|_{x=0}^{x=L} \\
&= \frac{\rho_1 b}{k}\int_0^L [i\beta\psi_x]\overline{\Phi}dx + \frac{k_0 l b}{k}\int_0^L \psi_x\overline{(\omega_x - l\varphi)}dx + \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{f_2}dx + b\psi_x\overline{\varphi_x}|_{x=0}^{x=L} \\
&= -\frac{\rho_1 b}{k}\int_0^L (\Psi + f_3)\overline{\Phi_x}dx + \frac{bk_0 l}{k}\int_0^L \psi_x\overline{(\omega_x - l\varphi)}dx \\
&+ \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{f_2}dx + b\psi_x\overline{\varphi_x}|_{x=0}^{=L} \\
&= -\frac{\rho_1 b}{k}\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx + \frac{\rho_1 b}{k}\int_0^L f_{3x}\overline{\Phi}dx + \frac{bk_0 l}{k}\int_0^L \psi_x\overline{(\omega_x - l\varphi)}dx \\
&+ \frac{b\rho_1}{k}\int_0^L \psi_x\overline{f_2}dx + b\psi_x\overline{\varphi_x}|_{x=0}^{x=L}.
\end{aligned}
$$

Aplicando as desigualdades de Hölder e Young obtemos

$$
\begin{aligned}
J_8 &\leq \gamma\int_0^L |\Psi||\varphi_x + \psi + l\omega|dx \\
&\leq \frac{\gamma}{2k}\int_0^L |\Psi|^2 dx + \frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx
\end{aligned}
$$

Substituindo J_5, J_6, J_7, J_9 e usando a estimativa obtida para J_8 temos

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \ &\leq \ \left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b}{k}\right)\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx + \left(\rho_2 + \frac{\gamma}{2k}\right)\int_0^L |\Psi|^2 dx \\
&+ \ b\operatorname{Re}\left(\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right) + R_1 + R_2
\end{aligned}
$$

onde para simplificar a notação consideramos

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \rho_2\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{f_{1x}}dx + \rho_2\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{f_3}dx + l\rho_2\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{f_5}dx \\
&+ \frac{\rho_1 b}{k}\operatorname{Re}\int_0^L f_{3x}\overline{\Phi}dx + \frac{b\rho_1}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi_x\overline{f_2}dx + \rho_2\operatorname{Re}\int_0^L f_4\overline{(\varphi_x + \psi + l\omega)}dx, \\
R_2 &= \frac{bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi_x\overline{(\omega_x - l\varphi)}dx + +l\rho_2\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx.
\end{aligned}
$$

Desta forma, usando as desigualdades de Hölder e Poincaré, juntamente com a equivalência das normas, encontramos

$$
|R_1| \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.37}
$$

Por outro lado, pelas equações (3.7) e (3.12) resulta que

$$\begin{aligned}
R_2 &= -\frac{bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi[\overline{(\omega_x - l\varphi)_x}]dx + l\rho_2 \operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx \\
&= -\frac{bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi\overline{[i\beta\rho_1 W + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) - \rho_1 f_6]}dx + l\rho_2 \operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx \\
&= \frac{\rho_1 bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L [i\beta\psi]\overline{W}dx - bk_0 l^2 \operatorname{Re}\int_0^L \psi\overline{(\varphi_x + \psi + l\omega)}dx \\
&+ \frac{\rho_1 bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi\overline{f_6}dx + l\rho_2 \operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx \\
&= \frac{\rho_1 bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx + \frac{\rho_1 bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L f_3\overline{W}dx + \frac{\rho_1 bk_0 l}{k}\operatorname{Re}\int_0^L \psi\overline{f_6}dx \\
&- bk_0 l^2 \operatorname{Re}\int_0^L \psi\overline{(\varphi_x + \psi + l\omega)}dx + l\rho_2 \operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}dx.
\end{aligned}$$

Assim usando a desigualdade de Hölder vemos que

$$|R_2| \leq C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|\psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.38}$$

Devido às estimativas (3.37) e (3.38) e às desigualdades de Young e Poincaré obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx &\leq \frac{[k\rho_2 - \rho_1 b]}{k}\left|\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \frac{k}{4}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + b\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right|.
\end{aligned}$$

Logo, como $\chi_0 = \left|\frac{\rho_2 k - \rho_1 b}{k}\right|$ concluímos que

$$\begin{aligned}
k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx &\leq 4\chi_0\left|\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + b\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right|.
\end{aligned}$$

Como pela desigualdade (3.22), Lema 3.4 desigualdade de Young

$$C\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq \frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$$

para uma constante $C > 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx &\leq 4\chi_0\left|\int_0^L \Psi\overline{\Phi_x}dx\right| + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + b\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right|.
\end{aligned}$$

A prova do Lema está completa.

$\square$

Observação 3.8. *Tomando no Lema 3.5, $\epsilon = \frac{k}{4}$, obtemos*

$$\begin{aligned}\left|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\right| \ &\le \ \frac{k}{4}\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Usando a estimativa acima no Lema 3.7 encontramos

$$\begin{aligned}k\int_0^L|\varphi_x+\psi+l\omega|^2dx \ &\le \ C\chi_0\left|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\right| + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \ C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} + \ C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{5}{3}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{3}} \\ &+ \ \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{7}{4}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{4}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}\|F\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2\end{aligned} \tag{3.39}$$

para $|\beta| > 1$.

Observação 3.9. *Resulta da estimativa (3.22), do Lema 3.7 e da desigualdade de Young que para todo $\eta > 0$ dado existe $C =: C(\eta)$ tal que*

$$\mathcal{N} \le C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|^2 + \eta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde $\mathcal{N}$ é dado em (3.25). Assim, de (3.24) resulta que

$$\begin{aligned}\left|\varphi_x\omega_x|_{x=0}^{x=L}\right| &\le I_\varphi^{1/2}I_\omega^{1/2} \le C\mathcal{N}\big(\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\big) \\ &\le C\big(\|\varphi_x+\psi+l\omega\| + \eta\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\big)\big(\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}\big) \\ &\le C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|\|U\|_{\mathcal{H}} + \eta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Concluímos, aplicando novamente a desigualdade de Young, que para todo $\epsilon > 0$ existe $C := C(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left|\varphi_x\omega_x|_{x=0}^{x=L}\right| \le C\|\varphi_x+\psi+l\omega\|^2 + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Lema 3.10. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}k_0\int_0^L|\omega_x-l\varphi|^2dx \ + \ \rho_1\int_0^L|W|^2dx &\le C\int_0^L|\varphi_x+\psi+l\omega|^2dx \\ &+ \ C\nu_0\beta^2\int_0^L|\Phi|^2dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + k\left|\varphi_x\omega_x|_{x=0}^{x=L}\right|.\end{aligned}$$

para $|\beta|$ suficientemente grande.

Demonstração. Multiplicando a equação (3.8) por $\overline{(\omega_x - l\varphi)}$ e integrando por partes a equação resultante sobre $(0,\ L)$ obtemos

$$\begin{aligned} k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\,dx &= \int_0^L i\rho_1\beta\Phi\overline{(\omega_x - l\varphi)}\,dx - \int_0^L \rho_2 f_1\overline{(\omega_x - l\varphi)}\,dx \\ &\quad + \int_0^L k(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(\omega_x - l\varphi)_x}\,dxr + k\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L}. \end{aligned}$$

Como

$$i\rho_1\beta\Phi\overline{(\omega_x - l\varphi)} = i\rho_1\beta\Phi\overline{\omega_x} + l\rho_1|\Phi|^2 + l\rho_1\Phi\overline{f_1}$$

e

$$k(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(\omega_x - l\varphi)_x} = \frac{k}{\kappa_0}(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{[i\beta\rho_1 W + kl(\varphi_x+\psi+l\omega) - \rho_1 f_6]}$$

resulta que

$$\begin{aligned} k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\,dx &\leq \operatorname{Re}\int_0^L i\beta\rho_1\Phi\overline{\omega_x}\,dx + l\rho_1\int_0^L|\Phi|^2\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{k}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{[i\beta\rho_1 W + kl(\varphi_x+\psi+l\omega)]}\,dx}_{:=J_{10}} \\ &\quad + k\operatorname{Re}\left(\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L}\right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} J_{10} &= \frac{k}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{i\beta\rho_1 W}\,dx + \frac{k^2 l}{k_0}\int_0^L|\varphi_x+\psi+l\omega|^2\,dx \\ &= \underbrace{\frac{k}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\varphi_x\overline{i\beta\rho_1 W}\,dx}_{:=J_{11}} + \underbrace{\frac{k}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\psi\overline{i\beta\rho_1 W}\,dx}_{:=J_{12}} + \underbrace{\frac{kl}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\omega\overline{i\beta\rho_1 W}\,dx}_{:=J_{13}} \\ &\quad + \frac{k^2 l}{k_0}\int_0^L|\varphi_x+\psi+l\omega|^2\,dx. \end{aligned}$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} J_{13} = -\frac{kl\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L(f_5+W)\overline{W}dx &\leq -\frac{kl\rho_1}{k_0}\int_0^L|W|^2\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \\ J_{12} = -\frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L(\Psi+f_3)\overline{W}dx &\leq -\frac{\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\Psi\overline{W}\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

e temos também

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L(\Phi+f_1)_x\overline{W}dx = \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\Phi\overline{W_x}\,dx - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L f_{1x}\overline{W}\,dx \\ &= -\frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L\Phi[i\beta\overline{w_x} - \overline{f_{5x}}]\,dx - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L f_{1x}\overline{W}\,dx \\ &\leq -\frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L i\beta\overline{w_x}\Phi\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Portanto usando as estimativas para J_{11}, J_{12} e J_{13} obtemos

$$\begin{aligned} J_{10} \leq & -\frac{kl\rho_1}{k_0}\int_0^L |W|^2\, dx - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}\, dx - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L i\beta\overline{\omega_x}\Phi\, dx \\ & + \frac{k^2 l}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Usando a estimativa (3.41) em (3.40) resulta que

$$\begin{aligned} k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\, dx \leq & \operatorname{Re}\int_0^L i\beta\rho_1\Phi\overline{\omega_x}\, dx + l\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\, dx - \frac{kl\rho_1}{k_0}\int_0^L |W|^2\, dx \\ & - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}\, dx - \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L i\beta\overline{\omega_x}\Phi\, dx + k|\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L} \\ & + \frac{k^2 l}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

ou seja, somando e subtraindo obtemos

$$\begin{aligned} k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\, dx \leq \rho_1\left(1-\frac{k}{k_0}\right)\operatorname{Re}\int_0^L i\beta\Phi\overline{(\omega_x - l\varphi)}\, dx + l\rho_1\int_0^L |\Phi|^2\, dx \\ - \rho_1 l\left(1-\frac{k}{k_0}\right)\operatorname{Re}\int_0^L \Phi\overline{i\beta\varphi}\, dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} - \frac{k\rho_1 l}{k_0}\int_0^L |W|^2\, dx \\ + \frac{k^2}{k_0}l\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx + \frac{k\rho_1}{k_0}\operatorname{Re}\int_0^L \Psi\overline{W}\, dx + k\left|\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L}\right|. \end{aligned}$$

Usando agora as desigualdades de Young e Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} \frac{k_0 l}{2}\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\, dx + \frac{k\rho_1 l}{2k_0}\int_0^L |W|^2\, dx \leq \frac{k^2 l}{k_0}\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx \\ + C\left|1-\frac{k}{k_0}\right|\beta^2\|\Phi\|^2 + C\|\Phi\|^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|^2 + k\left|\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L}\right|, \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2 encontramos

$$\begin{aligned} \frac{k_0 l}{2}\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\, dx + \frac{k\rho_1 l}{2k_0}\int_0^L |W|^2\, dx \leq C\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx \\ + C\nu_0\beta^2\int_0^L |\Phi|^2\, dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + k\left|\varphi_x\overline{\omega_x}|_{x=0}^{x=L}\right|, \end{aligned}$$

para $|\beta|$ suficientemente grande. $\square$

Observação 3.11. *Segue da observação 3.9 e do Lema 3.10 que para todo $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\, dx + \rho_1\int_0^L |W|^2\, dx \leq C\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2\, dx \\ + C\nu_0\beta^2\int_0^L |\Phi|^2\, dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

para $|\beta|$ suficientemente grande. Usando a estimativa (3.39) *obtemos*

$$\begin{aligned} k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2\,dx + \rho_1\int_0^L |W|^2\,dx &\leq C\chi_0\Big|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\Big| \\ &+ C\nu_0\beta^2\int_0^L |\Phi|^2\,dx + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}}, \quad (3.42) \\ &+ C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{5}{3}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{3}}_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|}\|U\|^{\frac{7}{4}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

para $|\beta|$ suficientemente grande.

Teorema 3.12. *Se $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$ e $k = k_0$ então o semigrupo $\{S_{\mathcal{A}}(t)\}_{t\geq 0}$ associado ao sistema* (3.1)-(3.3) *é exponencialmente estavél.*

Demonstração. Primeiramente, relembremos a definição da norma de U em $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\mathcal{H}} = \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} + \rho_2\|\Psi\|^2_{L^2} + \rho_1\|W\|^2_{L^2} + b\|\psi_x\|^2_{L^2} + k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2_{L^2} \\ + k_0\|\omega_x - l\varphi\|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b}$ e $k = k_0$ temos que $\chi_0 = \nu_0 = 0$. Então somando as estimativas (3.39) e (3.42) resulta que para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2_{L^2} + k_0\|\omega_x - l\varphi\|^2_{L^2} + \rho_1\|W\|^2_{L^2} \\ &\quad \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \epsilon\|U\|^2_{\mathcal{H}} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C\|U\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{5}{3}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{3}}_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|^{\frac{7}{4}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, dos Lemas 3.2 e 3.3, juntamente com a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \rho_1\|\Phi\|^2_{L^2} &\leq C\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2_{L^2} + C\|\psi_x\|^2_{L^2} + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}} \\ b\|\psi_x\|^2_{L^2} &\leq C\|\Psi\|_{L^2}\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Desta forma, somando as três últimas estimativas, aplicando a desigualdade de Young e usando (3.22) e (3.39) encontramos

$$\begin{aligned} (1-\epsilon)\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|F\|^2_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}} \\ + C\|U\|^{\frac{5}{3}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{3}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{7}{4}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{4}}_{\mathcal{H}} + C\|U\|^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}\|F\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

para $|\beta| > 1$ suficientemente grande e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Aplicando novamente a desigualdade de Young e usando (3.22) chegamos a

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Daí, temos

$$\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}F\|_{\mathcal{H}}=\|U\|_{\mathcal{H}}\leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

para $|\beta|>1$ suficientemente grande. Como a função $\beta\in\mathbb{R}\to(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}$ é contínua, temos

$$\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}\leq C,\ \ \forall\ \beta\in\mathbb{R}.$$

Portanto temos que $i\mathbb{R}\subset\rho(\mathcal{A})$ e $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}<\infty$, mostrando então que o semigrupo é exponencialmente estável quando $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{k}{b}$ e $k=k_0$.

□

3.2 Falta de estabilidade exponencial

Veremos nesta secção que o sistema de Bresse com condições de fronteira do tipo Dirichilet-Neumann-Neumann não é exponencialmente estável quando supomos

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\neq\frac{k}{b}\quad\text{ou}\quad k\neq k_0.$$

Exibiremos uma sequência $|\lambda_n|\to\infty$ tal que

$$\|(\lambda_n I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}\to\infty$$

Mais precisamente, mostraremos que existe uma sequência limitada $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{H}$ e uma sequência de complexos $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $i\mathbb{R}$ tais que

$$|\lambda_n|\to\infty\quad\text{e}\quad\|(\lambda_n I-\mathcal{A})^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}}\to\infty,n\to\infty.$$

Se $U_n=(\lambda_n I-\mathcal{A})^{-1}F_n$ então $(\lambda_n I-\mathcal{A})U_n=F_n$, ou seja,

$$\lambda_n\varphi^n-\Phi^n=f_n^1\text{ em }H_0^1(0,L),\tag{3.43}$$
$$\rho_1\lambda_n\Phi^n-k(\varphi_x^n+\psi^n+l\omega^n)_x-k_0l(\omega_x^n-l\varphi^n=f_n^2\text{ em }L^2(0,L),\tag{3.44}$$
$$\lambda_n\psi^n-\Psi^n=f_n^3,\text{ em }H_*^1(0,L)\tag{3.45}$$
$$\rho_2\lambda_n\Psi^n-b\psi_{xx}^n+k(\varphi_x^n+\psi^n+l\omega^n)+\gamma\Psi^n=f_n^4\text{ em }L_*^2(0,L),\tag{3.46}$$
$$\lambda_n\omega^n-W^n=f_n^5,\text{ em }H_*^1(0,L)\tag{3.47}$$
$$\rho_1\lambda_nW^n-k_0(\omega_x^n-l\varphi^n)_x+kl(\varphi_x^n+\psi^n+l\omega^n)=f_n^6\text{ em }L_*^2(0,L).\tag{3.48}$$

Começaremos a exibir a sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tomando $f_n^1 = f_n^3 = f_n^5 = 0$. Assim das equações (3.43), (3.45) e (3.47) resulta que

$$\begin{aligned}\lambda_n\varphi^n &= \Phi^n \text{ em } H_0^1(0,L),\\ \lambda_n\psi^n &= \Psi^n \text{ em } H_*^1(0,L),\\ \lambda_n\omega^n &= W^n \text{ em } H_*^1(0,L).\end{aligned}$$

Substituindo as igualdades em (3.44), (3.46) e (3.48) obtemos,

$$\rho_1\lambda_n^2\varphi^n - k(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)_x - k_0 l(\omega_x^n - l\varphi^n) = f_n^2 \text{ em } L^2(0,L), \tag{3.49}$$

$$\rho_2\lambda_n^2\psi^n - b\psi_{xx}^n + k(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) + \gamma\lambda_n\psi^n = f_n^4 \text{ em } L_*^2(0,L), \tag{3.50}$$

$$\rho_1\lambda_n^2\omega^n - k_0(\omega_x^n - l\varphi^n)_x + kl(\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) = f_n^6 \text{ em } L_*^2(0,L). \tag{3.51}$$

Consideremos, agora,

$$f_n^2 = \alpha\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad f_n^4 = \beta\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad f_n^6 = \xi\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Desta forma, temos que $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6) \in \mathcal{H}$ e existe $C > 0$ tal que $\|F_n\|_{\mathcal{H}} \leq C$. Devido às condições de fronteira

$$\varphi(t,L) = \varphi(t,0) = \psi_x(t,L) = \psi_x(t,0) = \omega_x(t,L) = \omega_x(t,0) = 0$$

podemos supor que

$$\varphi^n = A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \psi^n = B_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \omega^n = C_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Daí

$$\Phi^n = \lambda_n A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \Psi^n = \lambda_n B_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{e} \quad \omega^n = \lambda_n C_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

e substituindo essas expressões nas equações (3.49)-(3.51) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\left[\rho_1\lambda_n^2 + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_0 l^2\right]A_n + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)B_n + (k+k_0)l\left(\frac{n\pi}{L}C_n\right) = \alpha, \tag{3.52}$$

$$k\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n + \left[\rho_2\lambda_n^2 + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \gamma\lambda_n\right]B_n + klC_n = \beta, \tag{3.53}$$

$$(k+k_0)l\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n + klB_n + \left[\rho_1\lambda_n^2 + k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right]C_n = \xi. \tag{3.54}$$

1° Caso Primeiramente iremos supor que

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \text{ e } k = k_0.$$

Seja (λ_n) uma sequência definida por

$$\rho_1\lambda_n^2 + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + kl^2 = 2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right). \tag{3.55}$$

Considerando esta sequência nas equações (3.52)-(3.54) com $\alpha = 1,\ \beta = 0$ e $\xi = 0$ obtemos

$$2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)B_n + 2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right)C_n = 1, \tag{3.56}$$

$$k\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n + \left[\rho_2\lambda_n^2 + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k + \gamma\lambda_n\right]B_n + klC_n = 0, \tag{3.57}$$

$$2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n + kl\left(\frac{n\pi}{L}\right)B_n + 2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right)C_n = 0. \tag{3.58}$$

Fazendo a diferença entre as equações (3.56) e (3.58) temos

$$\left[k\left(\frac{n\pi}{L}\right) - kl\right]B_n = 1 \Rightarrow B_n = \frac{1}{k\left(\frac{n\pi}{L} - l\right)}. \tag{3.59}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0.$$

Usando agora a equação (3.58) encontramos

$$A_n = -C_n - \frac{1}{\frac{2kn\pi}{L}\left(\frac{n\pi}{L} - l\right)}.$$

Substituindo (3.59) em (3.57) segue que

$$\frac{1}{k\left(\frac{n\pi}{L} - l\right)}\left[\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right) - k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - kl^2\right) + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k + \gamma\lambda_n\right]$$
$$+k\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left[-C_n - \frac{1}{\frac{2kn\pi}{L}(\frac{n\pi}{L} - l)}\right] + klC_n = 0.$$

Logo,

$$C_n = \frac{1}{k^2\left(\frac{n\pi}{L} - l\right)^2}\left[(b - k\frac{\rho_2}{\rho_1})\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}2kl\left(\frac{n\pi}{L}\right) - k\frac{\rho_2}{\rho_1}kl^2 + \gamma\lambda_n + k\right]$$
$$- \frac{1}{2k\left(\frac{n\pi}{L} - l\right)^2}.$$

Assim, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{k^2}\left(b - k\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \frac{b}{k} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \neq 0.$$

Daí, temos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{b}{k} \neq 0.$$

Portanto existem sequências complexas $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que as funções φ^n, ψ^n e ω^n são não identicamente nulas e satisfazem à equação $(\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \|U_n\|^2_{\mathcal{H}} &\geq \int_0^L k_0|\omega^n_x - l\varphi^n|^2 dx = k_0 \int_0^L \left| \left(-C_n(\frac{n\pi}{L}) - lA_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right|^2 dx \\ &= k_0 \left| C_n\left(\frac{n\pi}{L}\right) + LA_n \right|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{k_0 L}{2} \left| C_n\left(\frac{n\pi}{L}\right) + lA_n \right|^2 \end{aligned}$$

Logo, $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \to \infty$, ou seja, $\|(\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}} \to \infty$.

<u>2° Caso</u> Iremos supor agora que,

$$k \neq k_0.$$

Considerando $\alpha = 1, \beta = 0$ e $\xi = -1$, a equação (3.58) pode ser escrita como

$$k\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_n + \frac{k^2}{(k+k_0)} B_n + \frac{k}{(k+k_0)l}\left[\rho_1\lambda_n^2 + k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right] C_n = 0.$$

Neste caso, escolhamos uma sequência (λ_n) tal que

$$\frac{k}{(k+k_0)}\left(\rho_1\lambda_n^2 + k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + kl^2\right) = kl.$$

Assim

$$\rho_1\lambda_n^2 + k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + kl^2 = kl^2 + k_0 l^2 \Rightarrow \rho_1\lambda_n^2 + k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - k_0 l^2 = 0.$$

Substituindo (λ_n) no sistema (3.56)-(3.58) obtemos

$$\left[2k_0 l^2 + (k-k_0)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] A_n + k\left(\frac{n\pi}{L}\right) B_n + (k+k_0)l\left(\frac{n\pi}{L}\right) C_n = 1, \quad (3.60)$$

$$k\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_n + \left[\rho_2\lambda_n^2 + b\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k + \gamma\lambda_n\right] B_n + klC_n = 0, \quad (3.61)$$

$$k\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_n + \frac{k^2}{(k+k_0)} B_n + klC_n = -1. \quad (3.62)$$

Da equação (3.62) resulta que

$$C_n = -\frac{1}{kl}\left[k\left(\frac{n\pi}{L}\right) A_n + \frac{k^2}{k+k_0} B_n + 1\right]. \quad (3.63)$$

Substituindo (3.63) em (3.60) temos

$$\left[2k_0l^2 + (k-k_0)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]A_n + k\left(\frac{n\pi}{L}\right)B_n$$
$$+\ (k+k_0)l\left(\frac{n\pi}{L}\right)\left[-\frac{1}{l}\left(\frac{n\pi}{L}\right)A_n - \frac{k}{l(k+k_0)}B_n - \frac{1}{kl}\right] = 1.$$

reajustando os termos encontramos

$$\left[2k_0l^2 - 2k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]A_n = 1 + \frac{klL}{n\pi}$$

Tomando limite com $n \to \infty$ temos que $\lim_{n\to\infty} n^2A_n = -\frac{L^2}{2k_0\pi^2}$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(n^2A_n\right) = 0. \tag{3.64}$$

Fazendo a diferença entre as equações (3.61) e (3.62) e substituindo a sequência (λ_n) encontramos

$$\left[-\left(\frac{\rho_2k_0}{\rho_1} - b\right)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k + \gamma\lambda_n + \frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1} - \frac{k^2}{k+k_0}\right]B_n = 1. \tag{3.65}$$

Logo

$$\left[-\left(\frac{\rho_2k_0 - b\rho_1}{\rho_1}\right)\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{k}{n^2} + \gamma\frac{\lambda_n}{n^2} + \frac{\rho_2k_0l^2}{n^2\rho_1} - \frac{k^2}{n^2(k+k_0)}\right]n^2B_n = 1, \tag{3.66}$$

(i) Suponha que $\rho_2k_0 - b\rho_1 \neq 0$. Tomando o limite na expressao (3.66) temos que

$$\lim_{n\to\infty} n^2B_n = \frac{L^2\rho_1}{\pi^2(b\rho_1 - \rho_2k_0)}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(n^2B_n\right) = 0. \tag{3.67}$$

Portanto, usando (3.64) e (3.67) em (3.63) temos

$$\lim_{n\to\infty} C_n = -\frac{1}{kl}.$$

(ii) Suponha agora que $\rho_2k_0 - b\rho_1 = 0$. Usando este fato na equação (3.65) temos

$$\left[\gamma\lambda_n + k + \frac{\rho_2k_0l^2}{\rho_1} - \frac{k^2}{k+k_0}\right]B_n = 1.$$

Daí encontramos

$$\left[\frac{\gamma\lambda_n}{n} + \frac{k}{n} + \frac{\rho_2k_0l^2}{n\rho_1} - \frac{k^2}{n(k+k_0)}\right]nB_n = 1. \tag{3.68}$$

Como $\lambda_n^2 = \frac{1}{\rho_1}\left[k_0 l^2 - k_0\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right]$ resulta que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k_0 l^2}{\rho_1} - \frac{k_0}{\rho_1}\left(\frac{n\pi}{L}\right)} = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{k_0}{\rho_1}}i.$$

Passando limite em (3.68) encontramos

$$\lim_{n\to\infty} nB_n = -\frac{L}{\pi\gamma}\sqrt{\frac{\rho_1}{k_0}}i. \tag{3.69}$$

Usando novamente (3.64) e (3.69) em (3.63) segue que

$$\lim_{n\to\infty} C_n = -\frac{1}{kl}.$$

Logo, em ambos os casos existe uma sequência complexa $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ talque ω^n é não identicamente nula e $(\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$. Além disso,da equação resolvente temos

$$\begin{aligned}\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \rho_1\|W_n\|_{L^2}^2 &= \rho_1\int_0^L |\lambda_n\omega^n|^2 dx\\ &= \rho_1\int_0^L |\lambda_n|^2|C_n|^2\cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \rho_1\frac{L}{2}|\lambda_n|^2|C_n|^2 \to \infty.\end{aligned}$$

Portanto, supondo $\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}$ ou $k \neq k_0$ temos que o problema de Bresse (2.1)-(2.3) com condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann não é exponencialmente estável.

Observação 3.13. *A falta de estabilidade do sistema Bresse para condições de fronteira do tipo Dirichlet-Dirichlet- Dirichlet é um problema em aberto.*

Capítulo 4

Estabilidade polinomial do sistema de Bresse

4.1 Estabilidade polinomial

Considere o sistema de Bresse

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \tag{4.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\psi_t = 0, \tag{4.2}$$

$$\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \tag{4.3}$$

com as condições iniciais

$$\varphi(\cdot,0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1, \psi(\cdot,0) = \psi_0, \psi_t(\cdot,0) = \psi_1, \omega(\cdot,0) = \omega_0, \omega_t(\cdot,0) = \omega_1 \tag{4.4}$$

e as condições de fronteira

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi_x(0,t) = \psi_x(L,t) = \omega_x(0,t) = \omega_x(L,t) = 0. \tag{4.5}$$

Confome sabemos, veja o Capítulo 2, este sistema possui solução única. Veremos, agora, que o semigrupo associado a tal sistema é polinomialmente estável quando há falta de estabilidade exponencial, ou seja, quando

$$\chi_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \nu_0 = 0.$$

Os resultados que apresentamos a seguir se baseiam no trabalho de Fatori e Monteiro [9].

No que segue, $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ é a solução da equação resolvente $(\beta I - \mathcal{A})U = F$, para $\beta \in \mathbb{R}$ e $F \in \mathcal{H}$. Equivalentemente, U verifica o sistema (3.7)-(3.12). Relembremos a primeira estimativa obtida. Como

$$\mathrm{Re}\langle (i\beta I - \mathcal{A})U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\,\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}$$

segue que

$$||\Psi||_{L^2}^2 \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{4.6}$$

Lema 4.1. *Sob as condições acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C\Bigg[||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Bigg].$$

Demonstração. Pelo Lema 3.3 temos que existe $C > 0$ tal que

$$b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C\Bigg[||\Psi||_{L^2}||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Bigg].$$

Como

$$||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2} \leq \frac{1}{k}||U||_{\mathcal{H}},$$

resulta que

$$b\int_0^L |\psi_x|^2 dx \leq C\Bigg[||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Bigg].$$

□

Lema 4.2. *Com as mesmas notações anteriores existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \leq C\Bigg[\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + |\beta|^2\chi_0^2||\Psi||_{L^2}^2\Bigg].$$

Demonstração. Segue pelo Lema 3.7 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \ &\leq C\chi_0\Bigg|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\Bigg| + C||\psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + b\big|\psi_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\big|. \end{aligned} \tag{4.7}$$

para $|\beta| > 1$. Devido às condições de fronteira de Dirichlet-Neumann-Neumann segue que $\varphi_x\psi_x|_{x=0}^{x=L} = 0$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \chi_0\Bigg|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\Bigg| &= \chi_0\Bigg|\int_0^L \Psi(i\beta\varphi_x - f_x^1)dx\Bigg| \leq \chi_0\int_0^L \left[|i\beta\Psi||\varphi_x| + |\Psi||f_x^1|\right] dx \\ &\leq \chi_0|\beta|\int_0^L |\Psi||\varphi_x + \psi + l\omega|dx + \chi_0|\beta|\int_0^L |\Psi||\psi + l\omega|dx \\ &\quad + \chi_0\int_0^L |\Psi||f_x^1|dx. \end{aligned}$$

Como $\psi + lw = \dfrac{1}{i\beta}(\Psi + lW + f_3 + lf_5)$ resulta que

$$\begin{aligned}\chi_0|\beta|\int_0^L |\Psi||\psi + lw|\,dx &\leq C\|\Psi\|_{L^2}^2 + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Portanto, usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned}\chi_0\left|\int_0^L \Psi\Phi_x dx\right| &\leq C\chi_0^2|\beta|^2||\Psi||_{L^2}^2 + \frac{k}{2}||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2} + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ C||U||_{\mathcal{H}}||\Psi||_{L^2}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Usando a desigualdade (4.8) em (4.7) obtemos

$$k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|\Psi\|_{L^2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\chi_0^2|\beta|^2||\Psi||_{L^2}^2.$$

Nosso resultado segue.

□

Lema 4.3. *Sob as condições acima, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\rho_1\int_0^L |\Phi|^2 dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2 dx + \rho_1\int_0^L |W|^2 dx + k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx\\ \leq C\Big[||F||_{\mathcal{H}}^2 + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + \|\Psi|\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\Big]\\ +\ C(|\beta|^2\nu_0 + 2)||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2}^2,\end{aligned}$$

para $|\beta| > 1$ suficientemente grande.

Demonstração. Pelo Lema 3.10 temos

$$\begin{aligned}k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + \rho_1\int_0^L |W|^2 dx &\leq C\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ C\nu_0|\beta|^2\int_0^L |\Phi|^2 dx + k\big|\omega_x\varphi_x|_{x=0}^{x=L}\big|.\end{aligned}$$

Devido às condições de fronteira obtemos

$$\begin{aligned}k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + \rho_1\int_0^L |W|^2 dx &\leq C\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\\ &+ C\nu_0|\beta|^2\left[\int_0^L |\Phi|^2 dx\right].\end{aligned}$$

Segue pelo Lema 3.2 que

$$k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2dx + \rho_1\int_0^L |W|^2dx \leq C\int_0^L |\varphi_x+\psi+l\omega|^2dx + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$
$$+ C\nu_0|\beta|^2\Big(||\varphi_x+\psi+l\omega||^2_{L^2} + ||\psi||^2_{L^2} + \frac{1}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}\Big).$$

Consequentemente, somando termos em ambos os membros da desigualdade anterior e usando novamente o Lema 3.2 segue que

$$k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2dx + \rho_1\int_0^L |W|^2dx + \Big[\rho_1\int_0^L |\Phi|^2dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2dx\Big]$$
$$\leq C\big[||\Psi||^2_{L^2}\big] + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F|_{\mathcal{H}} + C\Big(\nu_0|\beta|^2+1\Big)||\varphi_x+\psi+l\omega||^2_{L^2}$$
$$+ C\nu_0\|i\beta\psi\|^2_{L^2} + C\Big[||\varphi_x+\psi+l\omega||^2_{L^2} + ||\psi||^2_{L^2} + \frac{1}{|\beta|^2}||F||^2_{\mathcal{H}}\Big]$$
$$+\ C\nu_0||F||^2_{\mathcal{H}}.$$

Lembrando que $i\beta\psi = f_3 + \Psi$ e usando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade (4.6) resulta que

$$k_0 l\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2dx + \rho_1\int_0^L |W|^2dx + \rho_1\int_0^L |\Phi|^2dx + \rho_2\int_0^L |\Psi|^2dx$$
$$\leq C\Big[(\nu_0|\beta|^2+2)||\varphi_x+\psi+l\omega||^2_{L^2} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + ||F||^2_{\mathcal{H}} + ||\psi_x||_{L^2}\Big],$$

para $|\beta|$ suficientemente grande. Portanto, da desigualdade anterior e do Lema 4.1 temos o resultado. □

O teorema seguinte garante que se

$$\frac{k}{b} \neq \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad \text{ou} \quad k \neq k_0$$

o decaimento do semigrupo será do tipo polinomial.

Teorema 4.4. *O semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *associado ao sistema de Bresse* (4.1)-(4.5) *é polinomialmente estável se* $\frac{k}{b} \neq \frac{\rho_1}{\rho_2}$ *ou* $k \neq k_0$. *Mais especificamente*

$$i)\quad ||S_{\mathcal{A}}(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq Ct^{-\frac{1}{2}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \ \ se\ \ \frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b}\ e\ k = k_0,$$
$$ii)\quad ||S_{\mathcal{A}}(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq Ct^{-\frac{1}{4}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \ \ se\ \ k \neq k_0,$$

para valores grandes de $t > 0$.

Demonstração. Pelos Lemas 4.1 , 4.2 e 4.3 obtemos que existe uma constante

$C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1 \int_0^L |\Phi|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |\Psi|^2 dx + \rho_1 \int_0^L |W|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\
&\quad + k \int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0 \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx \\
&\leq C\Big[||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + ||F||_{\mathcal{H}}^2\Big] \\
&\quad + C\chi_0^2|\beta|^2||\Psi||_{L^2}^2 + C\nu_0|\beta|^2||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2}^2
\end{aligned}$$

para $|\beta|$ suficientemente grande.

Como para todo $\eta > 0$ existe constante $C(\eta) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \leq C(\eta)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \eta\|U\|_{\mathcal{H}}^2, \\
&C\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C(\eta)\|\Psi\|_{L^2}^2 + \eta\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tfrac{C^2(\eta)}{\eta}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \eta\|U\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

para η suficientemente pequeno obtemos

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq C||F||_{\mathcal{H}}^2 + C\chi_0^2|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\nu_0|\beta|^2||\varphi_x + \psi + l\omega||_{L^2}^2$$

para $|\beta|$ suficientemente grande. Usando o Lema 4.2 novamente chegamos a

$$\begin{aligned}
||U||_{\mathcal{H}}^2 &\leq C||F||_{\mathcal{H}}^2 + C\chi_0^2|\beta|^2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + C\nu_0|\beta|^2 C\Big[\|\Psi\|_{L^2}\|U\|_{\mathcal{H}} + ||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} + |\beta|^2\chi_0^2||\Psi||_{L^2}^2\Big].
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos encontramos

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq C||F||_{\mathcal{H}}^2 + C|\beta|^2\Big[\nu_0||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + (\nu_0 + \chi_0^2 + \nu_0\chi_0^2|\beta|^2)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Big] \tag{4.9}$$

para $|\beta| > 1$ suficientemente grande.

i) Suponha que $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} \neq \dfrac{k}{b}$ e $k = k_0$. Assim, $\chi_0 \neq 0$ e $\nu_0 = 0$ e por (4.9) obtemos

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq C||F||_{\mathcal{H}}^2 + C|\beta|^2\chi_0^2||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Usando a desigualdade de Young resulta que

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq C|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow ||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^2||F||_{\mathcal{H}},$$

pois $|\beta| > 1$. Como $(i\beta I - \mathcal{A})U = F$ temos

$$||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^2||F||_{\mathcal{H}} \Rightarrow \frac{||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}}}{||F||_{\mathcal{H}}} \leq C|\beta|^2,$$

o que implica pela definição da norma em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ em

$$||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C|\beta|^2.$$

Pelo Teorema 1.67 concluímos que

$$||S_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{A}^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}||F||_{\mathcal{H}},$$

para valores grandes de $t > 0$. Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$ existe $F_0 \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}^{-1}F_0 = U_0$, daí

$$||S_{\mathcal{A}}(t)U_0||_{\mathcal{H}} = ||S_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{A}^{-1}F_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}||\mathcal{A}U_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

para valores grandes de $t > 0$.

ii) Suponhamos agora que $k \neq k_0$. Assim, $\nu_0 \neq 0$ e por (4.9) obtemos

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq C||F||^2_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2\Big[\nu_0||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + \nu_0||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Big] \tag{4.10}$$

para $|\beta| > 1$ suficientemente grande. Não é difícil mostrar usando (4.6) e a desigualdade de Young que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^8||F||^2_{\mathcal{H}} \Rightarrow ||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}},$$

pois $|\beta| > 1$. Pelo Teorema 1.67 concluímos que

$$||S_{\mathcal{A}}(t)\mathcal{A}^{-1}F||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}}||F||_{\mathcal{H}},$$

de modo que

$$||S_{\mathcal{A}}(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

para valores grandes de $t > 0$.

Agora, assuma $\dfrac{k}{b} \neq \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ e $k \neq k_0$. Desta forma, temos que $\chi_0 \neq 0$ e $\nu_0 \neq 0$ e assim

$$\begin{aligned}||U||^2_{\mathcal{H}} &\leq C||F||^2_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2\Big[||\Psi||_{L^2}||U||_{\mathcal{H}} + (1+|\beta|^2)||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}\Big]\\ &\leq \Big(C|\beta|^2||F||^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{27}}||U||^{\frac{3}{2}} + \Big(C|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}}\Big)\Big(\frac{1}{2}||U||_{\mathcal{H}}\Big).\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young obtemos

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^8||F||^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}||U||^2_{\mathcal{H}}.$$

Portanto

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}},$$

para $|\beta| > 1$ suficientemente grande. Como $(i\beta I - \mathcal{A})U = F$ temos

$$||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{A}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C|\beta|^4||F||_{\mathcal{H}} \Rightarrow \frac{||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}}}{||F||_{\mathcal{H}}} \leq C|\beta|^4.$$

Pela definição da norma em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ temos

$$||(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C|\beta|^4.$$

Pelo Teorema 1.67 obtemos

$$||S_{\mathcal{A}}(t)U_0||_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{1}{4}}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})},$$

para t suficientemente grande. □

Observação 4.5. *Para mostrar a estabilidade polinomial para sistema Bresse* (3.1) - (3.3) *com condições de fronteira Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet procedemos como feito no teorema acima, observando que neste caso aparecem termos pontuais já estimados anteriormente. As taxas de decaimento que serão encontradas não serão as mesmas do Teorema 4.4.*

Capítulo 5

Estabilidade exponencial para um sistema Bresse com controle na fronteira

Neste capítulo estudamos o problema do arco circular dado por

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \tag{5.1}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x = 0, \tag{5.2}$$

$$\rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega)_x = 0, \tag{5.3}$$

para $x \in (0, L)$ e $t \in (0, \infty)$, sujeito às condições de fronteira

$$k(\varphi_x + \psi + l\omega)(0, t) = \gamma_1 \ \varphi_t(0, t), \quad t \in (0, \infty), \tag{5.4}$$

$$b\psi_x(0, t) = \gamma_2 \ \psi_t(0, t), \quad t \in (0, \infty), \tag{5.5}$$

$$k_0(\omega_x - l\varphi)(0, t) = \gamma_3 \ \omega_t(0, t), \quad t \in (0, \infty), \tag{5.6}$$

onde $\gamma_i > 0$, para $i = 1, 2$ e 3, e

$$\varphi(L, t) = \psi(L, t) = \omega(L, t) = 0, \quad t \in (0, \infty). \tag{5.7}$$

As condições iniciais são as seguintes

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1, \omega(\cdot, 0) = \omega_0, \omega_t(\cdot, 0) = \omega_1 \tag{5.8}$$

O sistema (5.1)-(5.8), como veremos, é completamente dissipativo, ou seja, não serão necessárias restrições sobre as constante constitutivas do sistema para assegurar sua estabilidade exponencial. Um problema ainda em aberto é estudar a estabilidade do sistema obtido "diminuindo” a dissipação na fronteira.

O resultado que apresentamos neste capítulo se baseia no trabalho de Alves e outros.[20].

Antes de prosseguirmos, chamamos a atenção novamente para as diversas constantes positivas que aparecem no texto, representadas pela letra C. Na maioria das vezes, a constante C tem diferentes valores mudando de uma linha para outra linha.

5.1 Energia associada ao sistema

Como foi feito anteriormente, procedemos formalmente para encontrar a energia do sistema. Multiplicando a equação (5.1) por φ_t e integrando de 0 a L obtemos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi_{tt} dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\varphi_t dx - k_0 l \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\varphi_t dx = 0.$$

Usando o metodo de integração por partes resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\varphi_t)^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\varphi_{tx} dx - k_0 l \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\varphi_t dx \\ = k(\varphi_x + \psi + l\omega)(L)\varphi_t(L) - k(\varphi_x + \psi + l\omega)(0)\varphi_t(0) \end{aligned}$$

Daí usando as condições de fronteira temos que

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L (\varphi_t)^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\varphi_{tx} dx \\ - k_0 l \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\varphi_t dx = -\gamma_1(\varphi_t(0))^2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Multiplicando, agora, a equação (5.2) por ψ_t temos

$$\rho_2 \int_0^L \psi_t \psi_{tt} dx - b \int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\psi_t dx = 0$$

Usando o metodo de integração por partes e as condições de fronteira encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\rho_2(\psi_t)^2 + b(\psi_x)^2\right] dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\psi_t dx = -\gamma_2(\psi_t(0))^2. \tag{5.10}$$

Do mesmo modo multiplicando a equação (5.3) por ω_t integrando de 0 a L e usando as condições de fronteira encontramos

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{d}{dt} \int_0^L (\omega_t)^2 dx + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_t dx \\ + k_0 \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\omega_{tx} dx = -\gamma_3(\omega_t(0))^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Somando as equações (5.9), (5.10) e (5.11) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left[\rho_1(\varphi_t)^2 + \rho_2(\psi_t)^2 + \rho_1(\omega_t)^2 + b(\psi_x)^2\right] dx \tag{5.12}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2\right] dx \tag{5.13}$$
$$= -\gamma_1(\varphi_t(0))^2 - \gamma_2(\psi_t(0))^2 - \gamma_3(\omega_t(0))^2. \tag{5.14}$$

Definimos a energia do sistema como sendo

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho_1(\varphi_t)^2 + \rho_2(\psi_t)^2 + \rho_1(\omega_t)^2 + b(\psi_x)^2\right] dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi + l\omega)^2 + k_0(\omega_x - l\varphi)^2\right] dx. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Desta forma

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma_1(\varphi_t(0))^2 - \gamma_2(\psi_t(0))^2 - \gamma_3(\omega_t(0))^2 \leq 0.$$

Concluímos que o sistema é dissipativo, ou seja, a energia decai de acordo com o tempo. Nosso objetivo é mostrar que existem constantes positivas $M \geq 1$ e $\delta > 0$ tais que

$$||E(t)||_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\delta t}, \quad t > 0.$$

onde $||.||_{\mathcal{H}}$ será definida a seguir.

5.2 Existência e unicidade

Usaremos, novamente, a teoria de C_0-semigrupos de operadores lineares, para mostrar que o sistema é bem posto. No que segue usaremos as seguintes notações

$$H^1_L(0,L) = \left\{\phi \in H^1(0,L); \phi(L) = 0\right\}, \tag{5.16}$$

e $U(t) = (\varphi(t), \Phi(t), \psi(t), \Psi(t), \omega(t), W(t))^T$ onde $\Phi = \varphi_t$, $\Psi = \psi_t$ e $W = \omega_t$.

Lema 5.1. *Seja $u \in H^1_L(0,L)$. Então vale a desigualdade de Poincaré*

$$\|u\|_{H^1} \leq C_p\|u_x\|_{L^2}.$$

para alguma constante $C_p > 0$.

Demonstração. Pelo teorema 1.31 existe $\widetilde{u} \in C([0,L])$, $\widetilde{u}(L) = 0$, tal que

$$u = \widetilde{u} \quad q.t.p. \quad \text{em}(0,L) \ \text{ e}$$
$$\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u_x(t)dt.$$

Desta forma,

$$\widetilde{u}(L) - \widetilde{u}(x) = \int_x^L u_x(t)dt \ \text{ em } \ (0,L).$$

Portanto, como $\widetilde{u}(L) = 0$ segue que

$$\big|u(x)\big| = \left|\int_x^L u_x(t)dt\right| \leq \int_0^L |u_x(t)|dt.$$

Aplicando agora a desigualdade de Hölder

$$\big|u(x)\big| \leq \left(\int_0^L dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}\|u_x\|_{L^2}.$$

Assim, obtemos que

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx \leq \int_0^L L\|u_x\|_{L^2}^2 dx.$$

Portanto, chegamos a

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq L^2\|u_x\|_{L^2}^2 \Leftrightarrow \|u\|_{L^2} \leq L\|u_x\|_{L^2}.$$

□

O espaço de fase associado ao sistema é o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \left[H_L^1(0,L) \times L^2(0,L)\right]^3 \tag{5.17}$$

munido da norma

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}} =& \rho_1\|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2\|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1\|W\|_{L^2}^2 + b\|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &+ k\|\varphi_x + \psi + l\omega\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x - L\varphi\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Com essas notações e considerações temos que o sistema (5.1)-(5.3) é equivalente ao problema de Cauchy

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t)\\ &U(0) = U_0,\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde $\mathcal{A}$ é o operador linear não-limitado

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k_0 l}{\rho_2}Id(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{k+k_0 l}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{b}{\rho_2}\partial_x^2(\cdot) - \frac{k}{\rho_2}Id(\cdot) & \frac{-\gamma}{\rho_2}Id(\cdot) & -\frac{k}{\rho_2}Id(\cdot) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Id(\cdot) \\ -\frac{kl+k_0}{\rho_1}\partial_x(\cdot) & 0 & \frac{-kl}{\rho_1} & 0 & \frac{k_0 l}{\rho_1}\partial_x^2(\cdot) - \frac{kl^2}{\rho_1}Id(\cdot) & 0 \end{bmatrix}$$

cujo domínio é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big\{(\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\omega,W) \in \mathcal{H}: \quad & \varphi,\psi,w \in H^2(0,L),\ \Phi,\Psi,W \in H^1_L(0,L), \\ k(\varphi_x+\psi+lw)(0) = \gamma_1\,\Phi(0), b\,\psi_x(0) = \gamma_2\,\Psi(0),\ & k_0\,(w_x-\varphi)(0) = \gamma_3 W(0)\big\}\,. \end{aligned}$$

Proposição 5.2. *O operador $\mathcal{A}$ é dissipativo, isto é,* $\mathrm{Re}\langle\mathcal{A}U,U\rangle \le 0$*, para todo* $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Demonstração. Considere $U = (\varphi,\Phi,\psi,\Psi,\omega,W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então, usando a definição do produto interno em $\mathcal{H}$ e a do operador $\mathcal{A}$ encontramos

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} = & \int_0^L \big\{[k(\varphi_x+\psi+l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi)]\overline{\Phi}\big\}\,dx \\ & + \big\{[b\psi_{xx} - k(\varphi_x+\psi+l\omega) - \gamma\Psi]\overline{\Psi}\big\}\,dx \\ & + \int_0^L \big\{[k_0(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x+\psi+l\omega)]\overline{W} + b\Psi_x\psi_x\big\}\,dx \\ & + \int_0^L \Big\{[k(\Phi_x+\Psi+lW)\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)} + k_0(W_x - l\Phi)\overline{(\omega_x - l\varphi)}\Big\}\,dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes segue que

$$\begin{aligned} \langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} = & \, b\int_0^L \big[\Psi_x\overline{\psi_x} - \psi_x\overline{\Psi_x}\big]\,dx - b\psi_x(0)\overline{\Psi(0)} - k(\varphi_x+\psi+l\omega)(0)\overline{\Phi(0)} \\ & + k\int_0^L \Big[(\Phi_x+\Psi+lW)\overline{(\varphi_x+\psi+l\omega)} - (\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(\Phi_x+\Psi+lW)}\Big]\,dx \\ & + k_0\int_0^L \Big[(W_x - l\Phi)\overline{(\omega_x - l\varphi)} - (\omega_x - l\varphi)\overline{W_x - l\Phi)}\Big]\,dx - k_0(\omega_x - l\varphi)(0)\overline{W(0)}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real do produto interno acima e usando as condições de fronteira encontramos

$$\mathrm{Re}\,\langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1(\varphi_t(0))^2 - \gamma_2(\psi_t(0))^2 - \gamma_3(\omega_t(0))^2 \le 0. \tag{5.20}$$

Portanto, o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo. □

Agora vamos mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, ou seja, $\mathcal{A}$ é bijetivo e $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mostraremos que $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e usando o Lema 1.19 teremos o resultado.

Sejam $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ e $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W)$. A equação resolvente $\mathcal{A}U = F$ é equivalente ao sistema de equações

$$\begin{aligned}
\Phi &= f^1 \quad \text{em} \quad H^1_L(0,L), && (5.21)\\
k(\varphi_x + \psi_x + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi) &= \rho_1 f^2 \quad \text{em} \quad L^2(0,L), && (5.22)\\
\Psi &= f^3 \quad \text{em} \quad H^1_L(0,L), && (5.23)\\
b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + l\omega) &= \rho_2 f^4 \quad \text{em} \quad L^2(0,L), && (5.24)\\
\Psi &= f^5 \quad \text{em} \quad H^1_L(0,L), && (5.25)\\
k(\omega_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + l\omega) &= \rho_1 f^6 \quad \text{em} \quad L^2(0,L). && (5.26)
\end{aligned}$$

Desta forma, basta considerarmos $\Phi = f^1, \Psi = f^3$ e $W = f^5$ e, assim, pelas equações (5.21) , (5.23) e (5.25) segue que $\Phi,\ \Psi,\ W \in H^1_L(0,L)$.

Multiplicando, agora, a equação (5.22) por $\overline{u} \in H^1_L(0,L)$ obtemos

$$k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)_x \overline{u} dx + k_0 l \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{u} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u} dx.$$

Integrando por partes de 0 a L e usando as condições de fronteira resulta que

$$\begin{aligned}
k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{u_x} dx + k_0 l \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{(-lu)} dx \\
= -\rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u} dx - \gamma_1 f^1(0)\overline{u(0)}. \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

Multiplicando, agora, a equação (5.24) por $\overline{v} \in H^1_L(0,L)$, integrando por partes e usando as condições de fronteira encontramos

$$\begin{aligned}
k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{v} dx + b\int_0^L \psi_x \overline{(v_x)} dx \\
= -\rho_2 \int_0^L f^4 \overline{v} dx - \gamma_2 f^3(0)\overline{v(0)}. \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

Por fim, multiplicando a equação (5.26) por $\overline{p} \in H^1_L(0,L)$, integrando de 0 a L e usando as condições de fronteira obtemos

$$\begin{aligned}
k\int_0^L (\varphi_x + \psi + l\omega)\overline{(lp)} dx + k_0 \int_0^L (\omega_x - l\varphi)\overline{(p_x)} dx \\
= -\rho_1 \int_0^L f^6 \overline{p} dx - \gamma_3 f^5(0)\overline{p(0)} \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Somando as equações (5.27) a (5.29) resulta que

$$
\begin{aligned}
k\int_0^L (\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(u_x+v+lp)}dx + k_0\int_0^L (\omega_x-l\varphi)\overline{(p_x-lu)}dx + b\int_0^L \psi_x\overline{(v_x)}dx \\
= -\rho_1\int_0^L f^2\overline{u}dx - \rho_2\int_0^L f^4\overline{v}dx - \rho_1\int_0^L f^6\overline{p}dx \\
-\gamma_1 f^1(0)\overline{u(0)} - \gamma_2 f^3(0)\overline{v(0)} - \gamma_3 f^5(0)\overline{p(0)}. \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

Nosso objetivo é usar o Teorema de Lax-Milgram para mostrar a existência das funções φ , ψ, ω acima. Com esse intuito consideremos o espaço

$$\mathcal{W} = H_L^1(0,L)\times H_L^1(0,L)\times H_L^1(0,L),$$

o qual é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}} = \|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + \|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2.$$

Não é difícil verificar que esta norma é equivalente à norma usual.

Considere a forma sesquilinear $a:\mathcal{W}\times\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por

$$
\begin{aligned}
a\left((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\right) = b\int_0^L \psi_x\overline{v_x}dx \quad + \quad k\int_0^L (\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(u_x+v+lp)}dx \\
+ \quad k_0\int_0^L (\omega_x-l\varphi)\overline{(p_x-lu)}dx.
\end{aligned}
$$

Lema 5.3. *A forma sesquilinear $a(.,.)$ é contínua e coerciva.*

Demonstração. Para quaisquer $(\varphi,\psi,\omega)\in\mathcal{W}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(\varphi,\psi,\omega)\right)| &= \int_0^L \left[k|\varphi_x+\psi+l\omega|^2 + k_0|\omega_x-l\varphi|^2 + b|\psi_x|^2\right]dx \\
&= b\|\psi\|_{L^2}^2 + k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + k_0\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\geq C\left(\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2 + \|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2\right) \\
&= C\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2,
\end{aligned}
$$

onde $C=\min\{k,k_0,b\}$. Logo, a forma sesquilinear a é coerciva.

Por outro lado, dados $(\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\in\mathcal{W}$ temos

$$
\begin{aligned}
a\left((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\right) = k\int_0^L (\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{(u_x+v+lp)}dx \\
+ k_0\int_0^L (\omega_x-l\varphi)\overline{(p_x-lu)}dx + b\int_0^L \psi_x v_x dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$
\begin{aligned}
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\right)| \leq\ & k\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}\|u_x+p+lv\|_{L^2}+b\|\psi_x\|_{L^2}\|p_x\|_{L^2}\\
&+k_0\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}\|p_x-lv\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Assim, usando a desigualdade $(a+b)^p\leq 2^p(a^p+b^p)$ vemos que

$$
\begin{aligned}
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\right)|^2 \leq\ & 16k^2\|\varphi_x+\psi+l\omega\|_{L^2}^2\|u_x+v+lp\|_{L^2}^2\\
&+16k_0^2\|\omega_x-l\varphi\|_{L^2}^2\|p_x-lu\|_{L^2}^2+4b^2\|\psi_x\|_{L^2}^2\|v_x\|_{L^2}^2\\
&\leq \max\{16k^2,16k_0^2,4b^2\}\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}^2\|(u,v,p)\|_{\mathcal{W}}^2.
\end{aligned}
$$

Considerando $C^2=\max\{16k^2,16k_0^2,4b^2\}$ temos

$$
|a\left((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p)\right)| \quad\leq\quad C\|(\varphi,\psi,\omega)\|_{\mathcal{W}}\|(u,v,p)\|_{\mathcal{W}}.
$$

Portanto, a forma sesquilinear $a(.,.)$ é contínua. □

Consideremos, agora, o funcional antilinear $\mathbf{f}:\mathcal{W}\longrightarrow\mathbb{C}$ dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(u,v,p)=&-\rho_2\int_0^L f^4\overline{v}dx-\rho_1\int_0^L f^6\overline{p}dx\\
&-\gamma_1 f^1(0)\overline{u(0)}-\gamma_2 f^3(0)\overline{v(0)}-\gamma_3 f^5(0)\overline{p(0)}.
\end{aligned}
$$

Desta forma, $\mathbf{f}$ está bem definida, é antilinear e, além disso, usando a desigualdade de Hölder e de Poincaré, juntamente com a imersão de $H^1(0,L)$ em $L^\infty(0,L)$, resulta que

$$
|f^j(0)|\leq C\|f^j\|_{H^1}\leq C\|f_x^j\|_{L^2},\quad j=1,2,3,
$$

sendo que a mesma majoração é válida para u, v e p. Portanto

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{f}((u,v,p))| \leq&\rho_1\int_0^L|f^1||u|dx+\rho_2\int_0^L|f^3||v|dx+\rho_1\int_0^L|f^5||p|dx\\
&+\gamma_1|f^1(0)||u(0)|+\gamma_2|f^3(0)||v(0)|+\gamma_3|f^5(0)||p(0)|\\
\leq& C\left(\|f_x^1\|_{L^2}\|u_x\|_{L^2}+\|f_x^3\|_{L^2}\|v_x\|_{L^2}+\|f_x^5\|_{L^2}\|p_x\|_{L^2}\right)
\end{aligned}
$$

para todo $(u,v,p)\in\mathcal{W}$. Devido à equivalência das normas obtemos que existe uma constante C tal que

$$
|\mathbf{f}((u,v,p))|\leq C\|(u,v,p)\|_{\mathcal{W}},\forall(u,v,p)\in\mathcal{W}. \tag{5.31}
$$

Portanto, o funcional antilinear acima é contínuo. Pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi,\psi,\omega)\in\mathcal{W}$ tal que

$$
a((\varphi,\psi,\omega),(u,v,p))=\mathbf{f}(u,v,p),\forall(u,v,p)\in\mathcal{W}.
$$

Tomando $v=p=0$ obtemos

$$
a((\varphi,\psi,\omega),(u,0,0))=\mathbf{f}(u,0,0),\ \forall\ u\in H_L^1(0,L), \tag{5.32}
$$

ou seja, temos

$$\begin{aligned}k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{u_x}dx-k_0l\int_0^L(\omega_x-l\varphi)\overline{u}dx\\ =-\rho_1\int_0^L f^2\overline{u}dx-\gamma_1f^1(0)\overline{u(0)},\end{aligned}\tag{5.33}$$

para todo $u\in H_L^1(0,L)$. Como $C_0^\infty(0,L)\subset H_L^1(0,L)$ resulta que

$$k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{u_x}dx=-\int_0^L\left[\rho_1f^2-k_0l(\omega_x-l\varphi)\right]\overline{u}dx,\quad\forall u\in C_0^\infty(0,L).$$

Logo, pela definição do espaço de Sobolev $H^1(0,L)=W^{1,2}(0,L)$ obtemos

$$\varphi_x+\psi+l\omega\in H^1(0,L)\ \text{ e }\ (\varphi_x+\psi+l\omega)_x=-k_0l(\omega_x-l\varphi)+\rho_1f^2.$$

Desta forma, vemos que

$$\varphi\in H^2(0,L)\text{ e }(\varphi_x+\psi+l\omega)_x+k_0l(\omega_x-l\varphi)=\rho_1f^2.\tag{5.34}$$

Multiplicando a equação (5.34) por $\overline{u}\in H_L^1(0,L)$ e integrando de 0 a L resulta que

$$k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)_x\overline{u}dx+k_0l\int_0^L(\omega_x-l\varphi)\overline{u}dx=\int_0^L\rho_1f^2\overline{u}dx$$

e integrando por partes segue que

$$\begin{aligned}&k(\varphi_x+\psi+l\omega)(L)\overline{u(L)}-k(\varphi_x+\psi+l\omega)(0)\overline{u(0)}\\ &\quad=k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)\overline{u_x}dx-k_0l\int_0^L(\omega_x-l\varphi)dx\overline{u}+\rho_1\int_0^L f^2\overline{u}dx.\end{aligned}$$

Pela equação (5.33) resulta que

$$-k(\varphi_x+\psi+l\omega)(0)\overline{u(0)}=-\gamma_1f^1(0)\overline{u(0)},\ \forall u\in H_L^1(0,L).$$

Pela equação (5.21) e considerando $\overline{u}\in H_L^1(0,L)$ tal que $\overline{u(0)}\neq 0$ obtemos

$$k(\varphi_x+\psi+l\omega)(0)=\gamma_1\Phi(0).\tag{5.35}$$

De modo análogo, tomando $u=p=0$ e $u=v=0$ obtemos, respectivamente, $\psi\in H^2(0,L)$ e $\omega\in H^2(0,L)$, satisfazendo as equações (5.24) e (5.26) com

$$\begin{aligned}b\psi_x(0)&=\gamma_2\Psi(0)\\ k_0(\omega_x-l\varphi)(0)&=\gamma_3W(0).\end{aligned}$$

Portanto, dado $F\in\mathcal{H}$ existe um único $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}(U)=F$, ou seja, o operador $\mathcal{A}$ é bijetivo.

Mostraremos agora que seu inverso $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado. Dado $F\in\mathcal{H}$ seja

$U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $AU = F$. Assim

$$\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \|U\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Multiplicando a equação (5.22) por $\overline{\varphi} \in H^1_L(0,L)$, (5.24) por $\overline{\psi} \in H^1_L(0,L)$, (5.26) por $\overline{\omega} \in H^1_L(0,L)$, integrando de 0 a L e somando vem

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 \\ =&\rho_1\int_0^L f^2\overline{\varphi}dx + \rho_2\int_0^L f^4\overline{\psi}dx + \rho_1\int_0^L \rho_1 f^6\overline{\omega}dx \\ &+ \gamma_1 f^1(0)\varphi(0) + \gamma_2 f^3(0)\Psi(0) + \gamma_3 f^5(0)\omega(0). \end{aligned}$$

Devido à desigualdade de Hölder e às imersões de Sobolev, usadas na desigualdade anterior, chegamos à

$$\begin{aligned} k\int_0^L |\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0\int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + b\int_0^L |\psi_x|^2 \\ \leq&\rho_1\|f^2\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \rho_2\|f^4\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} + \rho_1\|f^6\|_{L^2}\|\omega\|_{L^2} \\ &+ \gamma_1|f^1(0)||\varphi(0)| + \gamma_2|f^3(0)||\Psi(0)| + \gamma_3|f^5(0)||\omega(0)| \\ \leq&C\|F\|_{\mathcal{H}}(\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|\omega_x\|_{L^2}) \\ \leq&C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_S. \end{aligned}$$

Resulta, pela equivalência das normas, que

$$\int_0^L \left[k|\varphi_x + \psi + l\omega|^2 dx + k_0|\omega_x - l\varphi|^2 + b|\psi_x|^2\right] dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (5.36)$$

Pela equação (5.21) temos

$$\int_0^L \rho_1|\Phi|^2 dx \leq \int_0^L \rho_1|f^1||\overline{\Phi}|dx \leq \frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\Phi|^2 dx + \frac{\rho_1}{2}\|f^1\|^2_{L^2}.$$

Assim,

$$\int_0^L \rho_1|\Phi|^2 dx \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (5.37)$$

Com um argumento análogo ao anterior, levando em consideração as equações (5.23) e (5.25) chegamos em

$$\int_0^L \rho_2|\Psi|^2 dx \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}} \text{ e } \int_0^L \rho_1|W|^2 dx \leq C\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \quad (5.38)$$

Juntando as equações (5.36), (5.37) e (5.38) concluímos que

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_0^L \left[\rho_1|\Phi|^2+\rho_2|\Psi|^2+\rho_1|W|^2+b|\psi_x|^2\right]dx\\ &+\ k\int_0^L \left[|\varphi_x+\psi+l\omega|^2+k_0|\omega_x-l\varphi|^2\right]dx\\ &\le C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+C_4\|F\|_{\mathcal{H}}^2\\ &\le C\|F\|_{\mathcal{H}}^2+\frac{1}{2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

E assim

$$\|U\|_{\mathcal{H}}\le C\|F\|_{\mathcal{H}}\Rightarrow\|\mathcal{A}^{-1}F\|_{\mathcal{H}}\le\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.39}$$

Portanto, o operador $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado e, consequentemente, $0\in\rho(\mathcal{A})$.

Proposição 5.4. *Existe $\lambda_0>0$ tal que $\lambda_0\in\rho(\mathcal{A})$, isto é, existe λ_0 positivo tal que $(\lambda_0 I-\mathcal{A})$ é inversível com $(\lambda_0 I-\mathcal{A})^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Demonstração. Como $0\in\rho(\mathcal{A})$, usando o Lema 1.19 temos que $(\lambda I-\mathcal{A})=\mathcal{A}(\lambda\mathcal{A}^{-1}-I)$ é inversível com inverso limitado desde que

$$\|\lambda\mathcal{A}^{-1}\|\le\frac{1}{\|I^{-1}\|}=1\Leftrightarrow\lambda\in(-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1},\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}).$$

Logo, existe $0<\lambda_0\in\rho(\mathcal{A})$. □

Lema 5.5. *O operador $\mathcal{A}$ é densamente definido , isto é, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$.*

Demonstração. Para mostrar que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}=\mathcal{H}$, seja $U\in\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^{\perp}$ de modo que

$$\langle V,U\rangle_{\mathcal{H}}=0,\ \ \forall\, V\in\mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Como existe $\lambda_0\in\rho(\mathcal{A})$, tomando $V_0=(\lambda_0 I-\mathcal{A})^{-1}U$ temos

$$\begin{aligned}\langle V_0,U\rangle_{\mathcal{H}}=\langle V_0,(\lambda_0V_0-\mathcal{A}V_0)\rangle_{\mathcal{H}} &= 0\\ \lambda_0\|V_0\|_{\mathcal{H}}^2-\langle AV_0,V_0\rangle_{\mathcal{H}} &= 0\end{aligned}$$

Tomando a parte real da igualdade acima encontramos

$$\lambda_0\|V_0\|_{\mathcal{H}}^2+\gamma_1|\Phi(0)|^2+\gamma_2|\Psi(0)|^2+\gamma_3|W(0)|^2=0\Rightarrow V_0=0.$$

Portanto $U=(\lambda_0 I-\mathcal{A})V_0=0$, ou seja, $\mathcal{D}(\mathcal{A})^{\perp}=\{0\}$. Logo, pelo Teorema 1.15 temos $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em $\mathcal{H}$. □

Pelo Teorema de Lummer-Philips, Teorema 1.56, o operador $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contações $\{S_A(t)\}_{t>0}$. Pelo Teorema 1.58 , dado $U_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ o problema de Cauchy (5.19) ou, equivalentemente, o sistema (5.1)-(5.8) tem uma única solução $U(t)=S_{\mathcal{A}}(t)U_0$ satisfazendo

$$U\in C\left([0,\infty);[D(\mathcal{A})]\right)\cap C^1\left([0,\infty);\mathcal{H}\right).$$

5.3 Estabilidade exponencial

Nesta secção, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema de Bresse (5.1)-(5.8) é exponencialmente estável. Para isso usaremos o Teorema 1.65.

Lema 5.6. *O eixo imaginário $i\mathbb{R}$ está contido no conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Como o operador $\mathcal{A}$ é um operador fechado e $\mathcal{A}^{-1}$ é um operador compacto em $\mathcal{H}$, segue do teorema 1.20 que o espectro de $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathcal{A})$ é constituído apenas de autovalores. Suponha, por contradição, que exista $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$. Daí existe $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfazendo $U \neq 0$ e $\mathcal{A}U = i\beta U$. Equivalentemente,

$$i\beta\varphi - \Phi = 0 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.40}$$

$$i\beta\rho_1\,\Phi - k\,(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0 \quad \text{em } L^2(0,L), \tag{5.41}$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.42}$$

$$i\beta\rho_2\,\Psi - b\,\psi_{xx} + k\,(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad \text{em } L^2(0,L), \tag{5.43}$$

$$i\beta w - W = 0 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.44}$$

$$i\beta\rho_1\,W - k_0\,(\omega_x - l\varphi)_x + kl\,(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0 \quad \text{em } L^2(0,L). \tag{5.45}$$

Então, tomando o produto interno em $\mathcal{H}$ segue que

$$\langle i\beta U - \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow i\beta\|U\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Assim,

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \Leftrightarrow \gamma_1|\Phi(0)|^2 + \gamma_2|\Psi(0)|^2 + \gamma_3|W(0)|^2 = 0$$

Logo

$$\Phi(0) = 0, \;\; \Psi(0) = 0, \;\; W(0) = 0. \tag{5.46}$$

Das equações (5.40), (5.42) e (5.44) obtemos

$$\varphi(0) = 0, \;\; \psi(0) = 0, \;\; \omega(0) = 0. \tag{5.47}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &k(\varphi_x + \psi + l\omega)(0) = \gamma_1\Phi(0) \Rightarrow \varphi_x(0) = 0 \\ &b\psi_x(0) = \gamma_2\Psi(0) \Rightarrow \psi_x(0) = 0 \\ &k_0(\omega_x - l\varphi)(0) = \gamma_3 W(0) \Rightarrow \omega_x(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Por outro lado, usando as equações (5.41) ,(5.43) e (5.45) temos

$$\begin{aligned} &-\beta^2\rho_1\,\varphi - k\,(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ &-\beta^2\rho_2\,\psi - b\,\psi_{xx} + k\,(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ &-\beta^2\rho_1\,w - k_0\,(w_x - l\varphi)_x + kl\,(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Considere $X=(\varphi,\psi,\omega,\varphi_x,\psi_x,\omega_x)$. Então de (5.47), (5.48) e (5.49) obtemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}X &= BX, \\ X(0) &= 0, \end{aligned} \tag{5.50}$$

onde

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_0 l^2}{k} & -1 & 0 & -\frac{\rho_1\beta^2}{k} & 0 & -\frac{(k_0+k)l}{k} \\ 0 & \frac{-\rho_2\beta^2+k}{b} & \frac{kl}{b} & \frac{k}{b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{kl}{k_0} & \frac{-\rho_1\beta^2+kl^2}{k_0} & \frac{(k_0+k)l}{k_0} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Picard para existência e unicidade de solução de EDO, o sistema (5.50) tem uma única solução $X=0$. Portanto, concluímos que $\varphi=0,\ \psi=0,\ w=0$. Segue de (5.40), (5.42) e (5.44) que $\Phi=0,\ \Psi=0,\ W=0$, isto é, $U=0$, o que é um absurdo. $\square$

Mostraremos agora que $\lim\limits_{|\beta|\to\infty}\|(i\beta I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}}<\infty$. Consideremos a equação resolvente $(i\beta\, I-\mathcal{A})U=F$, equivalentemente,

$$i\beta\varphi-\Phi=f^1 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.51}$$

$$i\beta\rho_1\,\Phi-k\,(\varphi_x+\psi+l\omega)_x-k_0 l(\omega_x-l\varphi)=\rho_1 f^2 \quad \text{em } L^2(0,L), \tag{5.52}$$

$$i\beta\psi-\Psi=f^3 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.53}$$

$$i\beta\rho_2\,\Psi-b\,\psi_{xx}+k\,(\varphi_x+\psi+l\omega)=\rho_2 f^4 \quad \text{em } L^2(0,L), \tag{5.54}$$

$$i\beta w-W=f^5 \quad \text{em } H^1_L(0,L), \tag{5.55}$$

$$i\beta\rho_1\,W-k_0\,(\omega_x-l\varphi)_x+kl\,(\varphi_x+\psi+l\omega)=\rho_1 f^6 \quad \text{em } L^2(0,L), \tag{5.56}$$

onde $F=(f^1,f^2,f^3,f^4,f^5,f^6)^\top\in\mathcal{H}$. Tomando o produto interno em $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}U$ com U e usando (5.20) encontramos

$$|\mathrm{Re}\langle\mathcal{A}U,U\rangle_{\mathcal{H}}|\le\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Daí

$$|\Phi(0)|^2+|\Psi(0)|^2+|W(0)|^2\le C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.57}$$

e usando as equações (5.51) , (5.53) e (5.55) temos, resulta que

$$|\varphi(0)|^2+|\psi(0)|^2+|\omega(0)|^2\le\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\ +\ \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.58}$$

Além disso, como

$$|\varphi_x(0)+\psi(0)+l\omega(0)|^2+|\psi_x(0)|^2+|\omega_x(0)-l\varphi(0)|^2\le C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \tag{5.59}$$

usando as desigualdades triangular e de Young obtemos

$$|\varphi_x(0)|^2+|\psi_x(0)|^2+|w_x(0)|^2\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\;+\;\frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\;+\;\frac{C}{|\beta|^2}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{5.60}$$

Consideremos, agora, as seguintes notações

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_\varphi(s)=\rho_1|\Phi(s)|^2+k|\varphi_x(s)|^2,\\
&\mathcal{I}_\psi(s)=\rho_2|\Psi(s)|^2+b|\psi_x(s)|^2,\\
&\mathcal{I}_\omega(s)=\rho_1|W(s)|^2+\kappa_0|\omega_x(s)|^2,\\
&\mathcal{E}_\psi(L)=\int_0^L\mathcal{I}_\psi(s)\;ds,\;\;\mathcal{E}_\varphi(L)=\int_0^L\mathcal{I}_\varphi(s)\;ds,\;\;\mathcal{E}_\omega(L)=\int_0^L\mathcal{I}_\omega(s)\;ds.
\end{aligned}$$

Lema 5.7. *Seja $q\in H^1(0,\ell)$. Temos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varphi(L)=&q\mathcal{I}_\varphi\big|_0^L-k_0l^2q|\varphi|^2\big|_0^L+2k\,Re\int_0^L q\psi_x\overline{\varphi}_xdx+k_0l^2\int_0^L q'(x)|\varphi|^2dx \\
&+2(k+k_0)lRe\int_0^L q\,\omega_x\,\overline{\varphi_x}dx+R_1
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\psi(L)\;\;=&\;\;q\mathcal{I}_\psi\big|_0^L-kq|\psi|^2\big|_0^L-2kRe\int_0^L q\varphi_x\overline{\psi_x}\;dx\\
&+k\int_0^L q'(s)|\psi|^2dx-2klRe\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}\;dx+R_2.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\omega(L)\;\;=&\;\;q\mathcal{I}_\omega\big|_0^L-kl^2q|\omega|^2\big|_0^L-2kl\,Re\int_0^L q\psi\overline{\omega}_x\;dx-2(k+k_0)l\,Re\int_0^L q\varphi_x\overline{\omega}_x\;dx\\
&+k\,l^2\int_0^L q'(s)|\omega|^2dx+R_3,
\end{aligned} \tag{5.63}$$

onde R_i satisfaz

$$|R_i|\leq C\|U\|\|F\|,\;\;i=1,\;2,\;3,$$

para uma constante positiva C.

Demonstração. Multiplicando a equação (5.52) por $q\overline{\varphi_x}$ e integrando de 0 a L encontramos

$$\begin{aligned}
i\beta\rho_1\int_0^L\Phi q\overline{\varphi_x}dx-k\int_0^L(\varphi_x+\psi+l\omega)_x\,q\,\overline{\varphi_x}dx&\\
-k_0l\int_0^L(\omega_x-l\varphi)q\overline{\varphi_x}dx&=\rho_1\int_0^L f^2\,q\,\overline{\varphi_x}dx
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$-\rho_1\int_0^L \Phi q\overline{(i\beta\varphi_x)}dx - k\int_0^L q\,\varphi_{xx}\,\overline{\varphi_x}dx - k\int_0^L q\,\psi_x\,\overline{\varphi_x}dx + k_0 l^2\int_0^L q\varphi\,\overline{\varphi_x}$$
$$-(k+k_0)l\int_0^L q\,\omega_x\,\overline{\varphi_x}dx = \rho_1\int_0^L f^2\,q\,\overline{\varphi_x}dx.$$

Tomando a parte real e usando a equação (5.51) encontramos

$$-\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\Phi|^2dx - \frac{k}{2}\int_0^L q\,\frac{d}{dx}|\varphi_x|^2dx = \rho_1\ \mathrm{Re}\int_0^L f^2\,q\,\overline{\varphi_x}dx$$
$$+\rho_1\ \mathrm{Re}\int_0^L \Phi q\overline{f_x^1}dx + k\ \mathrm{Re}\int_0^L q\psi_x\overline{\varphi}_x dx + (k+k_0)l\,\mathrm{Re}\int_0^L q\,\omega_x\,\overline{\varphi_x}dx$$
$$-\frac{k_0l^2}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\varphi|^2.$$

Como $\frac{d}{dx}|u|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(u_x\overline{u})$, usando integração por partes obtemos

$$\int_0^L q'(s)[\rho_1|\Phi(s)|^2 \quad + \quad k|\varphi_x(s)|^2]\,ds = q\mathcal{I}_\varphi\Big|_0^L - k_0l^2q|\varphi|^2\Big|_0^L + 2k\ \mathrm{Re}\int_0^L q\psi_x\overline{\varphi}_x dx$$
$$+k_0l^2\int_0^L q'(s)|\varphi|^2 + 2(k+k_0)l\,\mathrm{Re}\int_0^{L_1} q\,\omega_x\,\overline{\varphi_x}dx$$
$$\underbrace{+\,2\rho_1\ \mathrm{Re}\int_0^L \Phi q\overline{f_x^1}dx + 2\rho_1\ \mathrm{Re}\int_0^L f^2\,q\,\overline{\varphi_x}dx}_{=R_1}.$$

Assim, temos a igualdade (5.61) com

$$|R_1| \le \int_0^L |q||f^2||\varphi_x|dx + \rho_1\int_0^L |q||\Phi||f_x^1|dx \le C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Similarmente, multiplicando a equação (5.54) por $q\overline{\psi}_x$, integrando em $(0,L)$ e tomando a parte real resulta que

$$-\frac{\rho_2}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\Psi|^2dx - \frac{b}{2}\int_0^L q\,\frac{d}{dx}|\psi_x|^2dx = \rho_2\ \mathrm{Re}\int_0^L f^4\,q\,\overline{\psi_x}dx$$
$$+\rho_2\ \mathrm{Re}\int_0^L \Psi q\overline{f_x^3}dx - k\,Re\int_0^L q\psi_x\overline{\varphi}_x dx - klRe\int_0^L q\,\omega\,\overline{\psi_x}dx$$
$$-\frac{k}{2}\int_0^L q\frac{d}{dx}|\psi|^2.$$

Usando integração por partes e a equação (5.53) vem que

$$\begin{aligned}\int_0^L q'(s)[\rho_2|\Psi(s)|^2 \quad + \quad & b|\psi_x(s)|^2]\,ds = q\mathcal{I}_\psi\big|_0^L - kq|\psi|^2\big|_0^L - 2k\,\mathrm{Re}\int_0^L q\varphi_x\overline{\psi_x}\,dx \\ & +k\int_0^L q'(s)|\psi|^2dx - 2kl\,\mathrm{Re}\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}\,dx \\ & +\underbrace{2\rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^L \Psi q\overline{f_x^3}dx + 2\rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^L f^4\,q\,\overline{\psi_x}dx}_{=R_2}.\end{aligned}$$

Desta forma, segue a igualdade (5.62) com

$$|R_2| \leq \rho_2\int_0^L |q||f^4||\psi_x|dx + \rho_2|\int_0^L |q||f_x^3||\Psi|dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Por fim, multiplicando a equação (5.56) por $\overline{q\omega_x}$, integrando em $(0,L)$ e tomando a parte real resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^L q'(s)[\rho_1|W(s)|^2 \quad + \quad & k_0|\omega_x(s)|^2]\,ds = q\mathcal{I}_\omega\big|_0^L + kl^2q|\omega|^2\big|_0^L + 2kl\,\mathrm{Re}\int_0^L q\psi_x\overline{\omega_x}\,dx \\ & -kl^2\int_0^L q'(s)|\omega|^2dx + 2(k+k_0)l\,\mathrm{Re}\int_0^L q\varphi_x\overline{\omega_x}\,dx \\ & +\underbrace{2\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L qW\overline{f_x^5}dx + 2\rho_1\,\mathrm{Re}\int_0^L qf^6\overline{\omega_x}dx}_{=R_3}\end{aligned}$$

Desta forma encontramos a equação (5.63) com

$$|R_3| \leq 2\rho_1\int_0^L q|W||f_x^5|dx + 2\rho_1\int_0^L q|f^6||\omega_x|dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

$\square$

Lema 5.8. *O operador $\mathcal{A}$ satisfaz* $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}} < \infty.$

Demonstração. Dados $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in \mathcal{H}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, seja $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \omega, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(i\beta I - \mathcal{A})U = F$, ou seja , $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfaz o sistema de equações (5.51) - (5.56). Consideramos no Lema 5.7,

$$q(x) = x - L,$$

e somamos as equações (5.61), (5.62) e (5.63), de modo que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varphi(L)+\mathcal{E}_\psi(L)+\mathcal{E}_\omega(L) &= L\mathcal{I}_\varphi(0)+L\mathcal{I}_\psi(0)+L\mathcal{I}_{\omega(0)}-Lk_0l^2|\varphi(0)|^2-Lk|\psi(0)|^2\\
&-Lk_0|\omega(0)|^2+2k\operatorname{Re}\int_0^L q(\psi_x\overline{\varphi_x}-\varphi_x\overline{\psi_x})dx-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\psi\overline{\omega_x}dx\\
&+2(k+k_0)l\operatorname{Re}\int_0^L q(\omega_x\overline{\varphi_x}-\varphi_x\overline{\omega_x})dx-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}dx\\
&+k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx+k\int_0^L|\psi|^2dx+kl^2\int_0^L|\omega|^2dx+R,
\end{aligned}
$$

onde $|R|=|R_1+R_2+R_3|\leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}$.

Como $\operatorname{Re}(u\overline{v}-v\overline{u})=0$ segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varphi(L)+\mathcal{E}_\psi(L)+\mathcal{E}_\omega(L) &= L\left(\mathcal{I}_\varphi(0)+\mathcal{I}_\psi(0)+\mathcal{I}_{\omega(0)}\right)-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\psi\overline{\omega_x}dx\\
&-L\left(k_0l^2|\varphi(0)|^2+k|\psi(0)|^2+k_0|\omega(0)|^2\right)-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}dx\\
&+k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx+k\int_0^L|\psi|^2dx+kl^2\int_0^L|\omega|^2dx+R.
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\psi\overline{\omega_x}dx-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}dx &= -2kl\operatorname{Re}\Bigg(q\psi\overline{\omega}\Big|_0^L\\
&-\int_0^L[\psi\overline{\omega}+q\psi_x\overline{\omega}]dx\Bigg)-2kl\operatorname{Re}\int_0^L q\omega\overline{\psi_x}dx\\
&=-2klL\psi(0)\omega(0)+2kl\operatorname{Re}\int_0^L\psi\overline{\omega}dx.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varphi(L)+\mathcal{E}_\psi(L)+\mathcal{E}_\omega(L) &= L\left(\mathcal{I}_\varphi(0)+\mathcal{I}_\psi(0)+\mathcal{I}_{\omega(0)}\right)-2kl\psi(0)\omega(0)\\
&-L\left(k_0l^2|\varphi(0)|^2+k|\psi(0)|^2+k_0|\omega(0)|^2\right)+2kl\operatorname{Re}\int_0^L\psi\overline{\omega}dx\\
&+k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx+k\int_0^L|\psi|^2dx+kl^2\int_0^L|\omega|^2dx+R.
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Young resulta que existe uma constante $C>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\varphi(L)+\mathcal{E}_\psi(L)+\mathcal{E}_\omega(L) &\leq L\left(\mathcal{I}_\varphi(0)+\mathcal{I}_\psi(0)+\mathcal{I}_{\omega(0)}\right)+k_0l^2\int_0^L|\varphi|^2dx\\
&+L\left(k_0l^2|\varphi(0)|^2+k|\psi(0)|^2+k_0|\omega(0)|^2\right)+k(1+l)\int_0^L|\psi|^2dx\\
&+kl^2\int_0^L|\omega|^2dx+C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades (5.58) e (5.60) encontramos

$$\mathcal{E}_\varphi(L) + \mathcal{E}_\psi(L) + \mathcal{E}_\omega(L) \leq k_0 l^2 \int_0^L |\varphi|^2 dx + k(1+l) \int_0^L |\varphi|^2 dx + kl^2 \int_0^L |\psi|^2 dx$$
$$+ \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\Phi + f_1}{i\beta} \Rightarrow k_0 l^2 \int_0^L |\varphi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|^2}(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2), \\
\psi &= \frac{\Psi + f_2}{i\beta} \Rightarrow k(1+l) \int_0^L |\psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|^2}(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2), \\
\omega &= \frac{W + f_3}{i\beta} \Rightarrow kl^2 \int_0^L |\omega|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|^2}(\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|F\|_{\mathcal{H}}^2).
\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C(\mathcal{E}_\varphi(L) + \mathcal{E}_\psi(L) + \mathcal{E}_\omega(L)) \\
&\leq \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young chegamos a

$$\left(1 - \frac{C_0}{|\beta|^2}\right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \text{ para } \beta > \sqrt{C_0},$$

para constantes C_0 e C_1 positivas.

Pela continuidade da função $\beta \to (i\beta I - \mathcal{A})^{-1}$ segue que

$$\limsup_{|\beta| \to \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}} < \infty.$$

□

Pelo Teorema (1.65), o semigrupo $\{S_\mathcal{A}(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao sistema (5.1)-(5.8) é exponencialmente estável, ou seja, existem constante $M > 1$ e $\delta > 0$ tais que a solução $U(t) = S(t)U_0$ do sistema de Bresse satisfaz

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|U_0\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\delta t}.$$

Considerações Finais

Neste trabalho, usamos a teoria de semigrupos lineares para provar a existência e unicidade de solução para um sistema Bresse com dissipação por atrito, o qual representa um modelo para vigas circulares que na posição de equilíbrio apresenta comprimento L. Usamos propriedades do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema para mostrar que ele é exponencialmente estável se, e só se, $\dfrac{\rho_1}{k} = \dfrac{\rho_2}{b}$ e $k = k_0$. Quando não há estabilidade exponencial mostramos a estabilidade polinomial para condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neumann-Neumann. Além disso, mostramos a existência e unicidade de solução para um sistema Bresse completamente dissipativo, com dissipação atuando sobre as condições de fronteira. Novamente, usando as propriedades do gerador infinitesimal do semigrupo associado ao sistema mostrarmos que ele é exponencialmente estável.

Referências Bibliográficas

[1] A. Malacarne, **Comportamento assintótico dos sistemas de vigas viscoelásticas de Timoshenko e de Bresse**, *Tese de Doutorado*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2014.

[2] Adams, R.A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.

[3] Bartle, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[4] Borichev, A.; Tomilov, Y. **Optimal polynomial decay of funcions and operator semigroup**. Math. Ann.,347,455-478, 2000.

[5] Botelho, G.; Pelegrino D.; Teixeira. E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012

[6] Brezis, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations**. Paris: Spinger, 2011.

[7] Cavalcanti, M. M.; Cavalcanti, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: UEM/DMA, Vol. 1, 2000.

[8] Cavalcanti, M. M.; Cavalcanti, V. N. D. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: UEM/DMA, 2007.

[9] Fatori, L. H. and Monteiro, R. N., **The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system**, *Appl. Math. Lett. 25 , (3), 600604,(2012).*

[10] F. Alabau-Boussouira, J M. Rivera, D. Almeida-Júnior, **Stability to weak dissipative Bresse system**,*Journal os Mathematical Analysis and Applications , Volume 374, Issue 2, pages 481 498, (2011).*

[11] Fernadez Sare, H. D.; Munõz Rivera, J. E. **Exponential decay of Timoshenko systems with past memory**. J. Mathemmatical Analysis and Applications, 339, 482-502, 2008.

[12] Garbugio, G., **Modelagem e estabilidade uniforme de vigas curvas termoelásticas**, *Tese de Doutorado*, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2014.

[13] Gomes. A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicaçoes às Equações de Evolução**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM , 200

[14] Kreyszig, E. **Introductory Functional Analysis with Applicatins**. New Yourk: John Wiley & Sons. Inc, 1978.

[15] Lagnese, J. E., Leugering, G. and Schmidt, E.J.P.G., **Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures, Systems & Control: Foundations & Applications**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.

[16] L. H. Fatori, J. M. Rivera, **Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system**, *IMA J. Appl. Math. Vol. 75 , (6), 881904(2010).*

[17] Lima, M, Soufyane, A. and Almeida-Júnior; **Asymptotic behavior to Bresse system with past history**, *Quarterly of Applied Mathematics Vol. 73,(1) , 2354(2015).*

[18] Liu, Z. and Zheng, S., **Semigroups associated with dissipative systems**, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[19] Liu, Z., ,k Rao, B. **Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system**, *Z. Angew. Math. Phys., 60, 54 69(2009).*

[20] M. S. Alves, Octavio Vera, Jaime Rivera e Amelie Rambaud, **Exponential stability to the Bresse System with boundary dissipation conditions**, arXiv.org, arXiv: 150601657.

[21] Medeiros, L. A. da J.; Miranda, M. A. M. **Espaços de Sobolev : Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000

[22] N. Najdi e A. Wehbe, **Weakly locally thermal stabilization of Bresse systems**, *Eletronic Journal od Differential Equations*, Vol. 182, 1-19, 2014.

[23] Noun, N. and Wehbe, A., **Stabilisation faible interne locale de système élastique de Bresse** (English, with English and French summaries), *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Vol.350 , (9- 10), 493498, (2012).*

[24] Oliveira, César R. DE. **Introdução À Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[25] Pazy, A. **Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[26] Prüss J. **On the Spectrum of C_0-Semigroups**. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro.2, pp 847-857, 1983.

[27] Prüss J.; Bátkai A.; Engel K.; Schnaubelt R. **Polynomila Stability of Operator Semigroups**. Math. Nachr. Vol. 279, (1), pages 1425-1440, 2006.

[28] Soriano, J. A., Rivera , J.M and Fatori, L.H., **Bresse system with indefinite damping**,*J. Math. Anal. Appl. Vol. 387 , (1), 284290,(2012) .*

[29] Soufyane, Abdelaziz; **Stabilisation de la poutre de Timoshenko**, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. Vol. 328, (8), pages 731- 734, (1999).*

[30] Teman, R. **Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis**. New York, American Mathamatical Society, 2001.

[31] Tosio Kato . **Pertubation Theory for Linear Operators**.Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1980.

[32] Xu , G. Q. and Yung , S. P., **Exponential decay rate for a Timoshenko beam with boundary damping**, *Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 123, (3), pages 669- 693, (2004).*

[33] Zhuanguy Liu ; Songmu Zheng. **Semigroups Associeted with Dissipative Systems**. Chapman and Hall/CRC, 1999.