

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

**Existência de solução para problemas elípticos do tipo subcrítico e crítico via
Método de Galerkin**

Jadyele Delmiro Guimarães
Magister Scientiae

**VIÇOSA - MINAS GERAIS
2026**

JADYELE DELMIRO GUIMARÃES

**Existência de solução para problemas elípticos do tipo subcrítico e crítico via
Método de Galerkin**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Anderson L. A. de Araujo

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

G963e
2026
Guimarães, Jadyele Delmiro, 1999-
Existência de solução para problemas elípticos do tipo
subcrítico e crítico via Método de Galerkin / Jadyele Delmiro
Guimarães. – Viçosa, MG, 2026.
1 dissertação eletrônica (70 f.)

Orientador: Anderson Luís Albuquerque de Araujo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Matemática, 2026.

Referências bibliográficas: f. 67-70.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2026.371>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Operadores não-lineares. 2. Análise funcional não-linear.
3. Equações diferenciais elípticas. 4. Operador laplaciano . I.
Araujo, Anderson Luís Albuquerque de, 1981-. II. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 515.7248

JADYELE DELMIRO GUIMARÃES

**Existência de solução para problemas elípticos do tipo subcrítico e crítico via
Método de Galerkin**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 5 de março de 2026.

Assentimento:

Jadyele Delmiro Guimarães
Autora

Anderson Luis Albuquerque de Araujo
Orientador

Essa dissertação foi assinada digitalmente pela autora em 16/06/2026 às 17:09:07 e pelo orientador em 17/06/2026 às 14:09:37. As assinaturas têm validade legal, conforme o disposto na Medida Provisória 2.200-2/2001 e na Resolução nº 37/2012 do CONARQ. Para conferir a autenticidade, acesse <https://siadoc.ufv.br/validar-documento>. No campo 'Código de registro', informe o código **FH3J.89MF.8C3U** e clique no botão 'Validar documento'.

Dedico à minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a Deus, por ter me sustentado, por não ter me deixado desistir e pelas grandes bênçãos e vitórias alcançadas desde o início do curso até o seu término.

Agradeço também aos meus pais, às minhas irmãs, aos meus parentes e amigos, por acreditarem que eu conseguiria e pelas orações.

Gostaria ainda de agradecer ao professor Anderson, pela orientação e por cada aprendizado transmitido ao longo deste trabalho.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

Este trabalho foi realizado com o apoio das seguintes agências de pesquisa brasileiras: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

"E tudo quanto fizerdes, fazei-o de todo o coração, como ao Senhor, e não aos homens, sabendo que recebereis do Senhor o galardão da herança, porque a Cristo, o Senhor, servis."
(Colossenses 3:23-24)

RESUMO

GUIMARÃES, Jadyele Delmiro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, março de 2026. **Existência de solução para problemas elípticos do tipo subcrítico e crítico via Método de Galerkin.** Orientador: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

Neste trabalho, utilizamos técnicas da Análise Funcional para estudar a existência de soluções fracas para problemas elípticos não lineares dos tipos subcrítico e crítico por meio do Método de Galerkin. Os problemas considerados envolvem, no caso subcrítico, um operador não local do tipo Kirchhoff sujeito a condições de Dirichlet homogêneas e com termo não linear composto por uma parcela côncava e uma parcela convexa. Nesse contexto, considera-se um domínio limitado com fronteira suave, um parâmetro positivo λ , expoente sublinear pertencente ao intervalo $(0,1)$ e expoente superlinear p estritamente menor que o expoente crítico de Sobolev.

No caso crítico, estuda-se um problema elíptico envolvendo o operador Laplaciano e condições de Dirichlet homogêneas, cuja não linearidade é formada por uma parcela sublinear e por um termo com crescimento crítico em relação à imersão de Sobolev. O domínio considerado possui fronteira suave, sendo λ um parâmetro positivo e um expoente pertencente ao intervalo $(0,1)$.

O estudo aborda as principais dificuldades associadas à natureza não local do operador de Kirchhoff e à perda de compacidade decorrente do crescimento crítico, empregando ferramentas da Análise Funcional, resultados de imersão de espaços de Sobolev e técnicas adequadas do Método de Galerkin para estabelecer a existência de soluções fracas para os problemas considerados.

Palavras-chave: operador laplaciano; operador de Kirchhoff; existência de solução; método de Galerkin; operadores monótonos

ABSTRACT

GUIMARÃES, Jadyele Delmiro, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March, 2026. **Existence of solutions for subcritical and critical elliptic problems via the Galerkin Method.** Adviser: Anderson Luis Albuquerque de Araujo.

In this work, we employ techniques from Functional Analysis to study the existence of weak solutions for nonlinear elliptic problems of subcritical and critical type through the Galerkin Method. In the subcritical case, the problem involves a nonlocal Kirchhoff-type operator subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions and a nonlinear term consisting of both concave and convex components. The setting considers a bounded domain with smooth boundary, a positive parameter λ , a sublinear exponent α belonging to the interval $(0,1)$, and a superlinear exponent p strictly below the critical Sobolev exponent.

In the critical case, we study an elliptic problem involving the Laplacian operator under homogeneous Dirichlet boundary conditions, whose nonlinearity consists of a sublinear term and a term with critical growth with respect to the Sobolev embedding. The domain is assumed to have a smooth boundary, while λ is a positive parameter and α belongs to the interval $(0,1)$.

The analysis addresses the main difficulties arising from the nonlocal nature of the Kirchhoff operator and from the lack of compactness associated with critical growth. Functional analytic techniques, Sobolev embedding results, and appropriate Galerkin methods are employed to establish the existence of weak solutions for the problems under consideration.

Keywords: laplacian operator; Kirchhoff operator; existence of solution; Galerkin method; monotone operators

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	15
1.1 Resultados de Análise Real	15
1.2 Espaços Métricos	17
1.3 Espaços Normados	19
1.4 Espaços de Banach	20
1.5 Espaços de Hilbert	20
1.6 Espaços de Lebesgue e resultados funcionais	22
1.7 Espaços de Sobolev	23
1.8 Resultados de EDP	26
1.9 Operador Monótono e Hemicontínuo	30
1.10 Método de Galerkin	32
2 Teorema de existência e unicidade do problema sub-crítico	34
2.1 Existência do Problema Sub-crítico	34
2.2 Problema Auxiliar	38
2.3 Prova do Teorema 0.1	48
2.4 Prova do Teorema 0.2	53
3 Teorema de existência do problema crítico	54
3.1 Existência do Problema Crítico	54
3.2 Problema Auxiliar	57
3.3 Prova do Teorema 0.3	63

Considerações Finais	66
Referências Bibliográficas	67

Introdução

Esta dissertação investiga problemas elípticos não lineares associados a operadores do tipo Kirchhoff em domínios limitados de \mathbb{R}^N . O foco principal consiste em estabelecer resultados de existência de soluções fracas tanto no regime subcrítico quanto em situações envolvendo crescimento crítico.

O problema subcrítico estudado neste trabalho é dado por:

$$\begin{cases} -(M + \|\varphi\|^2)\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde $M \geq 0$ é uma constante, $\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 1$ e $\lambda > 0$ um parâmetro.

Para o trabalho, vamos considerar as seguintes hipóteses:

$$(H1) \quad M > 0, 0 < \alpha < 1, 2 < p < 2^*, 2^* = \frac{2N}{N-2} \text{ e qualquer } p > 2 \text{ se } N = 1, 2$$

e

$$(H2) \quad M = 0, 0 < \alpha < 1, 4 < p < 6, \text{ se } N = 3 \text{ e qualquer } p > 4 \text{ se } N = 1, 2.$$

Note que em (H2), $2^* = 6$ quando $N = 3$.

Assim, a equação é formada pelo operador do tipo Kirchhoff, cujo coeficiente depende da norma do gradiente da solução em $H_0^1(\Omega)$, e por duas fontes não lineares de naturezas distintas: um termo sublinear e um termo superlinear representados da seguinte forma: $\lambda\varphi^\alpha$ com $0 < \alpha < 1$ e φ^{p-1} com $2 < p < 2^*$, respectivamente.

A característica não local do modelo decorre da dependência do coeficiente principal em relação à energia global da solução. Como consequência, o comportamento da equação em cada ponto do domínio passa a depender de informações distribuídas em toda a região considerada, o que introduz dificuldades analíticas adicionais.

Na grande maioria dos trabalhos sobre problemas do tipo Kirchhoff, assume-se a condição de não degenerescência, ou seja, $M > 0$ em (1). Neste contexto, apresentamos um dos principais resultados do trabalho.

Neste contexto, apresentamos um dos principais resultados do trabalho para o caso não degenerado.

Teorema 0.1. *Supondo (H1), existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (1) tem uma solução fraca positiva $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.*

Modelos de Kirchhoff surgem naturalmente na descrição de processos físicos em que propriedades globais do sistema influenciam sua dinâmica local. Um exemplo clássico é o estudo de vibrações de cordas elásticas, nas quais a tensão depende do alongamento total do material.

Tal equação hiperbólica é uma versão geral da equação de Kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (2)$$

apresentada por Kirchhoff [32]. Esta equação estende a equação de onda clássica de d'Alembert, considerando os efeitos das mudanças no comprimento das cordas durante as vibrações.

O desenvolvimento moderno da teoria de equações de Kirchhoff foi fortemente impulsionado pelos trabalhos de Lions, que estabeleceram uma estrutura funcional adequada para o tratamento de diversos problemas não locais.

Devemos salientar que problemas não locais também surgem em outras áreas, como, por exemplo, em sistemas biológicos, nos quais φ descreve um processo que depende da sua própria média (por exemplo, a densidade populacional). Ver, por exemplo, [4] e as referências ali contidas.

Entre as contribuições pioneiras para o estudo de equações elípticas não locais destacam-se os trabalhos de Chipot e Rodrigues [13], que motivaram diversas extensões posteriores envolvendo métodos variacionais, técnicas de ponto fixo e abordagens topológicas.

Motivados por esse resultado, Andrade e Ma [6] estudaram uma equação de operadores do tipo $\mathcal{M}(\|A^s \varphi\|_H^2) A \varphi = N \varphi$, onde $0 \leq s < 1$ e H é um espaço de Hilbert. Esse modelo corresponde ao problema (1) quando $A = -\Delta$, $s = \frac{1}{2}$ e $H = L^2(\Omega)$, e também foi considerado em Cousin *et al.* [18], no caso particular em que $Nu = f$.

Mais recentemente, Chen, Kuo e Wu [12] investigaram a multiplicidade de soluções para uma classe de problemas de valor de fronteira de Dirichlet do tipo (1), quando $\mathcal{M}(s) = as + b$, com $a, b > 0$ constantes, utilizando a variedade de Nehari. Por sua vez, Martinez, Castalani, Silva e Shirabayashi [38] estudaram uma equação do tipo

$$-\mathcal{M}(\|\nabla \varphi\|_2^2) \nabla \varphi' = q(t) f(t, \varphi, \nabla \varphi),$$

empregando teoremas clássicos de ponto fixo. Mais precisamente, os autores combinaram o teorema de Krasnoselskii com uma alternativa do tipo Leray–Schauder, a fim de estabelecer condições fortes de existência para a equação considerada.

Outros trabalhos, como [3, 4, 15, 14, 17, 16, 37, 36], abordaram problemas não locais de valor de fronteira e problemas unilaterais, com diversas aplicações.

Considerando não linearidades do tipo côncavo–convexo, ver também Figueiredo e Júnior [25].

Como visto anteriormente, o uso de teoremas de ponto fixo em problemas não locais não é algo novo; ver, por exemplo, [17, 38, 43]. Em Corrêa, Menezes e Ferreira [17], foi demonstrado um resultado de existência de solução positiva para um problema elíptico não local por meio de um argumento baseado na Teoria do Índice de Ponto Fixo, e os autores aprimoraram os resultados obtidos em [13, 15].

Trabalharemos sempre no espaço \mathbb{R}^N , com $N \geq 1$, uma vez que, nas demais dimensões $N = 1$ e 2 , os resultados seguem por meio de modificações padrão. Observe que, no caso considerado, tem-se $2^* = \frac{2N}{N-2}$, que é o conhecido expoente crítico de Sobolev.

Em Araujo [20] foi utilizado o teorema do ponto fixo de Leray–Schauder; contudo, esse teorema não é comumente empregado na literatura para tratar problemas elípticos não locais. Em geral, métodos variacionais são mais usuais, pois, sob hipóteses apropriadas sobre \mathcal{M} e f , as soluções do problema podem ser obtidas como pontos críticos do funcional

$$\frac{1}{2} \widetilde{\mathcal{M}}(\|\nabla\varphi\|_2^2) - \int_{\Omega} F(x, \varphi) dx,$$

onde $\widetilde{\mathcal{M}}(t) = \int_0^t \mathcal{M}(s) ds$ e $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ (ver [3] para mais detalhes).

A situação degenerada, caracterizada pelo desaparecimento do termo coercivo associado a M , permanece menos explorada quando comparada ao caso não degenerado, especialmente sob a presença simultânea de não linearidades denatureza distinta. Veja por exemplo Figueiredo e Santos [23] e Massa [39]. Os problemas estudados envolvem certos modelos que possuem como exemplos problemas do tipo

$$-\|\varphi\|^{\sigma-2} \Delta\varphi = \lambda\varphi^{p-1},$$

quando $\lambda > 0$ e, ou $\sigma > p$ ou $\sigma < p$. Em ambos os trabalhos foram usadas técnicas variacionais.

Agora, para o caso degenerado e considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N = 1, 2, 3$, apresentamos um dos principais resultados do trabalho.

Teorema 0.2. *Supondo (H2), existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (1) tem uma solução fraca positiva $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.*

Em contexto matemático, a combinação desses elementos coloca o problema em uma zona intermediária na qual não se aplica diretamente às hipóteses clássicas da teoria variacional. Em particular, quando $M = 0$, existe a dificuldade de provar que a solução é não trivial. Desta forma, é necessário o desenvolvimento de ferramentas analíticas alternativas, como o emprego de métodos de sub e super soluções adaptados à estrutura não local do operador, além de utilizar argumentos baseados em operadores pseudo-monótonos e técnicas de truncamentos que permitam recuperar uma estrutura variacional aproximada. Problemas deste tipo desempenham um papel

importante como modelos de teste para o avanço de novos métodos, onde não se tem a homogeneidade e a presença de termos globais gera dificuldade sobre compacidade e a regularidade das soluções. O resultado central desta dissertação demonstra a existência de soluções positivas para o modelo degenerado utilizando aproximações de Galerkin combinadas com argumentos de monotonicidade, fornecendo uma abordagem distinta das técnicas variacionais tradicionalmente empregadas.

De modo geral, o estudo deste problema se dá pela combinação de três fatores principais: sua ligação com modelos físicos, estrutura não linear e não local, e os desafios que impulsionam o desenvolvimento de métodos analíticos na teoria de problemas elípticos não lineares.

Ainda no caso $M > 0$, o problema crítico que é dado por

$$\begin{cases} -(M + \|\varphi\|^2)\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui dificuldades cruciais na hora de recuperar a solução para o espaço original, e isso foi objeto de estudo na literatura nos últimos anos, veja por exemplo [2, 24, 26, 25], usando técnicas desenvolvidas em Lions [34]. Devido a dificuldades matemáticas sobre novas técnicas optamos por estudar o caso subcrítico, no qual a técnica do método de Galerkin pode ser aplicada em conjunto com a técnica dos operadores monótonos, que foi o objetivo principal deste trabalho. Possibilitando, inclusive abordar o caso quando $M = 0$.

Além disso, faremos um estudo sobre o problema crítico descrito da seguinte forma sem o termo do tipo Kirchhoff:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio de fronteira suave, $\lambda > 0$ um parâmetro, $0 < \alpha < 1$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$. Para este problema, estabelecemos o seguinte resultado de existência.

Teorema 0.3. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, o problema (3) admite uma solução fraca positiva $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.*

O estudo do problema crítico remonta aos trabalhos clássicos de Ambrosetti, Brezis e Cerami [5]. Nesta dissertação, adotamos uma estratégia diferente, baseada em aproximações finito-dimensionais e estimativas funcionais adequadas. Diferentemente, empregaremos o método de Galerkin para obter a existência de solução, adaptando as estimativas para contornar a falta de compacidade causada pelo expoente crítico.

Como técnica, usaremos o método de Galerkin para atacar os problemas (1) e (3). Os trabalhos de Corrêa e Menezes [16] e To Fu [37] são referências que aplicaram o

método de Galerkin. Dessa forma, a técnica possibilitou que as hipóteses sobre \mathcal{M} fossem enfraquecidas. Em [16], foi possível considerar o caso em que \mathcal{M} possui uma singularidade.

A estrutura do texto está organizada em três capítulos principais. O primeiro reúne os resultados preliminares necessários ao desenvolvimento da teoria. O segundo trata do problema subcrítico e contém as demonstrações dos resultados de existência correspondentes. O terceiro é dedicado ao problema crítico e à adaptação do método de Galerkin nesse contexto.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir as principais ferramentas matemáticas e os espaços nos quais se fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. Onde as informações oferecidas nas Seções 1.1 - 1.8 foram baseadas em [1, 9, 10, 21, 33, 22, 23, 28, 31, 42].

1.1 Resultados de Análise Real

Definição 1.1. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se convexa quando, para quaisquer $a, b \in I$ e $t \in [0, 1]$, tem-se $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

Proposição 1.2. Sejam $t \geq s > 0$ e $0 < p < 1$, então

$$|t^p - s^p| \leq |t - s|^p. \quad (1.1)$$

Demonstração. Seja $t = s + h, h \geq 0$, afirmamos que

$$(s + h)^p - s^p \leq h^p. \quad (1.2)$$

De fato, defina f da seguinte maneira:

$$f(h) = (s + h)^p - s^p - h^p, \quad \forall h \geq 0,$$

mostraremos que $f(h) \leq 0$. Para isto, derivemos $f(h)$

$$\begin{aligned} f'(h) &= p(s + h)^{p-1} - ph^{p-1} \\ &= \frac{p}{(s + h)^{1-p}} - \frac{p}{h^{1-p}} \\ &= p \left(\frac{h^{1-p} - (s + h)^{1-p}}{h^{1-p}(s + h)^{1-p}} \right) < 0, \quad \forall h > 0. \end{aligned}$$

Como $f'(h) < 0$ segue que f é decrescente e isto implica que $f(h) \leq f(0) = 0$, logo

$f(h) \leq 0, \forall h \geq 0$, e daí, (1.2) é verdadeira. Mas, observe ainda que:

$$\left. \begin{array}{l} t \geq s > 0 \Rightarrow t^p - s^p \leq (t - s)^p = |t - s|^p \\ s > t \Rightarrow s^p - t^p \leq (s - t)^p = |s - t|^p \end{array} \right\} = |t - s|^p.$$

Portanto,

$$\begin{cases} t^p - s^p \leq |t - s|^p, \\ s^p - t^p = -(t^p - s^p) \leq |t - s|^p, \end{cases}$$

o que implica

$$|t^p - s^p| \leq |t - s|^p, \forall t, s \geq 0.$$

□

Proposição 1.3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = |t|^{2^*-2}t.$$

Então, f é contínua em \mathbb{R} .

Demonstração. De fato, basta verificarmos a continuidade em $t = 0$, já que em $t \neq 0$ a função é composta por funções contínuas.

Seja $\epsilon > 0$. Definimos

$$\delta = \epsilon^{\frac{1}{2^*-1}} > 0.$$

Então, se $|t - 0| < \delta$, temos

$$|f(t) - f(0)| = |f(t)| = |t|^{2^*-1} < \delta^{2^*-1} = (\epsilon^{\frac{1}{2^*-1}})^{2^*-1} = \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em $t = 0$ e, como já observamos, também em $t \neq 0$.

□

Proposição 1.4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = |t|^{p-2}t,$$

com $2 < p \leq 2^*$. Então, $f(t)$ é monótona não decrescente.

Demonstração. Queremos mostrar que $f(t)$ é monótona não decrescente, para isso basta que ocorra $f'(t) \geq 0, \forall t$. Note que

$$f(t) = |t|^{p-2}t = \begin{cases} t^{p-1}, & t \geq 0 \\ -(-t)^{p-1}, & t < 0. \end{cases}$$

Derivando, obtemos

$$f'(t) = \begin{cases} (p-1)t^{p-2}, & t > 0 \\ (p-1)(-t)^{p-2}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} = (p-1)|t|^{p-2} \geq 0.$$

Logo, como $f'(t) \geq 0$, podemos concluir que $f(t)$ é crescente e portanto monótona não decrescente. Observe ainda que $\forall t, s \in \mathbb{R}$, vale:

$$(|t|^{p-2}t - |s|^{p-2}s)(t - s) \geq 0,$$

visto que, se $t > s$ tem-se

$$t - s > 0 \Rightarrow (|t|^{p-2}t - |s|^{p-2}s) > 0$$

e, se $t < s$ tem-se

$$t - s < 0 \Rightarrow (|t|^{p-2}t - |s|^{p-2}s) < 0.$$

□

Observação 1.5. Note que a seguinte desigualdade é válida:

$$|t^+ - s^+| \leq |t - s|, \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

onde $t^+ = \max\{t, 0\}$.

De fato, mostraremos dividindo em casos, então

- 1) Se $t \geq 0$ e $s \geq 0$, temos $|t^+ - s^+| = |t - s|$.
- 2) Se $t \geq 0$ e $s < 0$, temos $|t^+ - s^+| = |t| \leq t - s = |t - s|$.
- 3) Se $t < 0$ e $s \geq 0$, temos $|t^+ - s^+| = |-s| = s \leq s - t = |s - t| = |t - s|$.
- 4) Se $t < 0$ e $s < 0$, temos $|t^+ - s^+| = 0 \leq |t - s|$.

1.2 Espaços Métricos

Definição 1.6. Seja M um conjunto não vazio. Uma aplicação

$$d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$$

é denominada uma métrica em M quando, para quaisquer $x, y, z \in M$, satisfaz as propriedades:

1. $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

O número $d(x, y)$ é interpretado como a distância entre os pontos x e y .

A terceira propriedade é conhecida como *desigualdade triangular*. Sua origem está no fato geométrico de que, em qualquer triângulo, o comprimento de um lado não ultrapassa a soma dos comprimentos dos outros dois.

Em linguagem de métricas, essa propriedade expressa que a distância entre dois pontos não pode exceder a soma das distâncias obtidas ao se passar por um ponto intermediário. Em particular,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

para quaisquer $x, y, z \in M$.

A seguir apresentamos dois exemplos clássicos de métricas.

Exemplo 1.7. (Métrica discreta)

Seja $M \neq \emptyset$. Defina-se

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y, \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

A verificação das propriedades de métrica é imediata. Essa distância é denominada métrica discreta.

Exemplo 1.8. (Métrica usual em \mathbb{R})

Considere a função

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = |x - y|.$$

As propriedades de positividade e simetria decorrem diretamente das propriedades do valor absoluto. Além disso,

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|,$$

o que garante a validade da desigualdade triangular. Logo, d define uma métrica sobre \mathbb{R} .

Definição 1.9. Quando um conjunto M está munido de uma métrica d , o par (M, d) é denominado espaço métrico.

Os elementos de M serão chamados genericamente de pontos, independentemente de representarem números, vetores, funções ou outros objetos matemáticos.

Observação 1.10. Se S é um subconjunto não vazio de um espaço métrico (M, d) , a restrição de d ao conjunto $S \times S$ define naturalmente uma métrica em S .

Nesse caso, S recebe o nome de *subespaço métrico* de M . Por simplicidade de notação, costuma-se utilizar novamente o símbolo d para representar a métrica restrita.

Definição 1.11 (Sequência de Cauchy). *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n) \subset X$ é chamada de sequência de Cauchy quando seus termos tornam-se arbitrariamente próximos entre si.*

Mais precisamente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Definição 1.12. *Um espaço métrico (X, d) é dito completo quando toda sequência de Cauchy formada por elementos de X converge para algum ponto pertencente ao próprio conjunto X .*

1.3 Espaços Normados

Nesta seção recordamos alguns conceitos básicos relacionados a espaços vetoriais normados que serão utilizados ao longo do trabalho.

Definição 1.13. *Um espaço vetorial real é um conjunto E munido de operações de adição e multiplicação por escalar, definidas sobre \mathbb{R} , que satisfazem os axiomas usuais de compatibilidade algébrica. Os elementos de E serão chamados de vetores.*

Um exemplo fundamental é o espaço \mathbb{R}^N , equipado com as operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_N + y_N)$$

e

$$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_N),$$

para quaisquer $x = (x_1, \dots, x_N)$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 1.14. *Seja E um espaço vetorial real. Uma aplicação*

$$\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$$

é denominada norma em E quando satisfaz:

1. $\|\varphi\| = 0$ se, e somente se, $\varphi = 0$;
2. $\|\alpha\varphi\| = |\alpha| \|\varphi\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in E$;
3. $\|\varphi + v\| \leq \|\varphi\| + \|v\|$ para quaisquer $\varphi, v \in E$.

Definição 1.15. *Um espaço vetorial equipado com uma norma é denominado espaço normado.*

Toda norma determina naturalmente uma noção de distância. De fato, se E é um espaço normado, então a aplicação

$$d : E \times E \rightarrow [0, \infty), \quad d(\varphi, v) = \|\varphi - v\|,$$

define uma métrica em E .

Observação 1.16. *As propriedades de positividade, simetria e desigualdade triangular da métrica acima decorrem diretamente dos axiomas da norma. A distância obtida dessa maneira é denominada métrica induzida pela norma.*

1.4 Espaços de Banach

Nesta seção reunimos alguns conceitos e resultados clássicos da teoria dos espaços de Banach que serão empregados ao longo do trabalho.

Definição 1.17. *Um espaço normado E é denominado espaço de Banach quando é completo em relação à métrica induzida pela norma. Equivalentemente, toda sequência de Cauchy em E possui limite pertencente ao próprio espaço.*

Definição 1.18. *Seja E' o dual topológico de E e E'' o bidual. Dizemos que E é reflexivo quando a aplicação canônica*

$$J : E \longrightarrow E'',$$

identifica isometricamente E com todo o seu bidual, isto é, quando J é sobrejetiva.

Teorema 1.19 (Compacidade Fraca). *Se E é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em E possui uma subsequência convergente na topologia fraca. Mais precisamente, se (w_k) é limitada, existem $\varphi \in E$ e uma subsequência (w_{k_j}) tais que*

$$w_{k_j} \rightharpoonup \varphi.$$

Proposição 1.20. *Seja $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e semicontínua inferiormente na topologia associada à norma. Então ϕ permanece semicontínua inferiormente na topologia fraca. Consequentemente, para toda sequência $(x_n) \subset E$ tal que*

$$x_n \rightharpoonup x,$$

vale a estimativa

$$\phi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n).$$

1.5 Espaços de Hilbert

Definição 1.21. *Seja H um espaço vetorial. Um produto interno (φ, v) é uma forma bilinear em $H \times H$ com valores em \mathbb{R} (isto é, uma aplicação de $H \times H$ em \mathbb{R} que é*

linear em ambas as variáveis) tal que

$$\begin{aligned}(\varphi, v) &= (v, \varphi) \quad \forall \varphi, v \in H \quad (\text{simetria}), \\(\varphi, \varphi) &\geq 0 \quad \forall \varphi \in H \quad (\text{positividade}), \\(\varphi, \varphi) &\neq 0 \quad \forall \varphi \neq 0 \quad (\text{definição positiva}).\end{aligned}$$

Lembremos que um produto interno satisfaz a desigualdade de Cauchy–Schwarz

$$|(\varphi, v)| \leq (\varphi, \varphi)^{1/2} (v, v)^{1/2} \quad \forall \varphi, v \in H.$$

Proposição 1.22. *H é uniformemente convexo e, portanto, é reflexivo.*

Demonstração: Veja [9, p. 132].

Definição 1.23. *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H equipado com um produto interno tal que H é completo para a norma $|\cdot|$.*

Teorema 1.24. (Teorema da representação de Riesz–Fréchet). *Dado qualquer $\varphi \in H^*$ existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = (f, \varphi) = \int f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H.$$

Além disso,

$$|f| = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Demonstração. Ver [9, p. 135].

Definição 1.25. *Uma forma bilinear $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é dita*

(i) contínua se existe uma constante C tal que

$$|a(\varphi, v)| \leq C|\varphi| |v| \quad \forall \varphi, v \in H;$$

(ii) coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Definição 1.26. *Uma sequência $(e_n)_{n \geq 1}$ em H é dita uma **base ortonormal** de H (ou uma base de Hilbert) se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $|e_n| = 1 \quad \forall n$ e $(e_m, e_n) = 0 \quad \forall m \neq n$;

(ii) o espaço linear gerado pelos e_n é denso em H .

Corolário 1.27. *Seja (e_n) uma base ortonormal. Então para todo $\varphi \in H$, temos*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi, e_k) e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\varphi, e_k) e_k$$

e

$$|\varphi|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, e_k)|^2.$$

Demonstração: Veja [9, p. 143].

Teorema 1.28. *Todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal.*

Demonstração: Veja [9, p. 144].

1.6 Espaços de Lebesgue e resultados funcionais

Definição 1.29. (Espaço de Banach.) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto. Para $1 \leq p < \infty$, definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx < \infty \right\},$$

com a norma

$$\|\varphi\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \|\varphi\|_{L^{\infty}} < \infty \},$$

onde $\|\varphi\|_{L^{\infty}} = \inf\{M \geq 0 : |\varphi(x)| \leq M \text{ q.t.p. em } \Omega\}$.

Observação 1.30. *Quando $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\langle \varphi, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx$$

e, sua norma é dada por

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $\{w_i\}_{i \geq 1}$ a base ortonormal completa de $L^2(\Omega)$ composta pelas autofunções do operador $-\Delta$, associadas aos autovalores $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$, considerando condições de contorno de Dirichlet homogêneas. Em virtude da regularidade de $\partial\Omega$, temos que $w_i \in C^1(\overline{\Omega})$ (veja [22], Teorema 1, item (iii), pág. 335).

Lema 1.31. *Sejam $\{w_i\}_{i \geq 1}$ as autofunções correspondentes dos autovalores (λ_i) . Assim, $\{w_i\}_{i \geq 1}$ são tais que*

$$\langle w_i, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \text{ para } 1 \leq i, j.$$

Além disso, essas autofunções satisfazem

$$\langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ para } i \neq j, 1 \leq i, j.$$

Demonstração: Veja [41, p. 35].

Teorema 1.32. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach separável se $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Ver [1, p. 32].

Teorema 1.33. Suponha que $1 < p < \infty$ e que $(\|f_n\|_{L^p})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Se $f_n \rightarrow f$ μ q. t. p., então $f_n \rightarrow f$ fracamente em L^p .

Demonstração. Ver [28, p. 207].

Proposição 1.34. (Desigualdade de Hölder.) Assuma que $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $fg \in L^1$ e

$$\int |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [9, p. 92].

Proposição 1.35. (Desigualdade de Young.) Assuma que $a \in L^p$ e $b \in L^{p'}$ com $1 < p < \infty$. Então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demonstração. Ver [9, p. 92].

Teorema 1.36. (Desigualdade de Minkowski.) Para $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p$ temos

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver [28, p. 191].

1.7 Espaços de Sobolev

Nesta seção reunimos alguns conceitos e resultados fundamentais que serão utilizados ao longo deste trabalho. Uma exposição mais detalhada pode ser encontrada em [9] e [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 1.37. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^p(\Omega); \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_{\Omega} \varphi \phi' = - \int_{\Omega} g \phi \quad \forall \phi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

Quando $p = 2$, utilizaremos a notação

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Além disso, para cada $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, identificamos g como o gradiente fraco de φ , escrevendo $\nabla\varphi = g$.

Consideraremos em $W^{1,p}(\Omega)$ a norma

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}} = \|\varphi\|_{L^p} + \|\nabla\varphi\|_{L^p},$$

a qual é equivalente, para $1 < p < \infty$, à norma

$$(\|\varphi\|_{L^p}^p + \|\nabla\varphi\|_{L^p}^p)^{1/p}.$$

Por outro lado, o espaço $H^1(\Omega)$ possui estrutura de Hilbert quando munido do produto interno

$$(\varphi, v)_{H^1} = (\varphi, v)_{L^2} + (\nabla\varphi, \nabla v)_{L^2} = \int_{\Omega} (uv + \nabla\varphi \nabla v),$$

cujas norma associada é dada por

$$\|\varphi\|_{H^1} = (\|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\varphi\|_{L^2}^2)^{1/2}.$$

Proposição 1.38. O espaço $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso, é reflexivo quando $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$. O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável.

Demonstração: O resultado é clássico; uma prova pode ser encontrada em [9, p. 203].

Definição 1.39. Para um inteiro $m \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos recursivamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\varphi \in W^{m-1,p}(\Omega); \nabla\varphi \in W^{m-1,p}(\Omega)^N\}.$$

Também utilizaremos a notação

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Definição 1.40. Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^1(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Definimos ainda

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Em $W_0^{1,p}(\Omega)$ consideramos a norma induzida por $W^{1,p}(\Omega)$, enquanto $H_0^1(\Omega)$ herda o produto interno definido em $H^1(\Omega)$.

O espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach separável e reflexivo quando $p > 1$.

Por sua vez, $H_0^1(\Omega)$ constitui um espaço de Hilbert separável.

Teorema 1.41. *Seja $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. Então,*

$$\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff \varphi = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Notação 1.7.1. *O dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$, será indicado por*

$$W^{-1,p'}(\Omega),$$

onde p' representa o expoente conjugado de p .

Indicaremos por $C^0(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas em Ω com valores em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . De maneira análoga, $C^1(\Omega)$ designará o espaço das funções continuamente diferenciáveis.

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$C^k(\Omega) = \left\{ \varphi \in C^{k-1}(\Omega); \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}.$$

Definição 1.42. *Seja $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ contínua. O suporte de φ , denotado por $\text{supp}(\varphi)$, é definido como o fecho em Ω do conjunto*

$$\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\},$$

isto é,

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Quando esse conjunto é compacto em \mathbb{R}^N , dizemos que a função φ possui suporte compacto.

Definição 1.43. *Denotamos por $C_0^1(\Omega)$ o conjunto das funções continuamente diferenciáveis em Ω com suporte compacto em Ω .*

Corolário 1.44. (Desigualdade de Poincaré.) *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e que Ω seja aberto e limitado. Então existe uma constante $C > 0$, dependente apenas de Ω e de p , tal que*

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como consequência, $\|\nabla \varphi\|_{L^p(\Omega)}$ define uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente à norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$.

Em $H_0^1(\Omega)$, a expressão

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

define um produto interno cuja norma induzida é equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9, p. 290].

Definição 1.45. *Em $C_0^1(\Omega)$ consideramos a quantidade*

$$\|\varphi\|_{1,2} := \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{1/2},$$

a qual define uma norma nesse espaço.

Definição 1.46. Denotamos por $H_0^{1,2}(\Omega)$ o complemento de $C_0^1(\Omega)$ em relação à norma $\|\cdot\|_{1,2}$. Também escreveremos

$$H_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega).$$

Em virtude da desigualdade de Poincaré, uma norma equivalente em $H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$\|\varphi\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observação. Denotaremos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Proposição 1.47. (Desigualdade de Jensen.) Seja Ω um conjunto mensurável. Então, para toda função convexa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e toda função $\varphi \in L^1(\Omega)$, vale

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \varphi dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\varphi) dx.$$

Demonstração. Ver [22, p. 705]. □

Definição 1.48. Consideremos em $H_0^1(\Omega)$ a forma bilinear

$$a(\omega, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} \nabla\omega \nabla v dx. \quad (1.3)$$

Associada à forma bilinear anterior, consideraremos a forma quadrática

$$a(\omega) = a(\omega, \omega) = \|\omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla\omega|^2 dx.$$

Observemos ainda que a forma bilinear definida acima é contínua em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, pois, pela desigualdade de Hölder,

$$|a(\omega, v)| = |\langle \omega, v \rangle| \leq \|\omega\| \|v\|.$$

1.8 Resultados de EDP

Lema 1.49. Se $0 < \alpha < 1$. Então existe uma única solução fraca $v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ da equação

$$\begin{cases} -\Delta v = v^\alpha & \text{em } \Omega, \\ v > 0 & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Ver [10, 59].

Lema 1.50. *Suponha que $f(t)$ seja uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Sejam $v \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ subsolução e $w \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ supersolução, isto é,*

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(v) & x \in \Omega, \\ v > 0 & x \in \Omega \\ v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w \geq f(w) & x \in \Omega, \\ w > 0 & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $w \geq v$ em Ω .

Demonstração. Ver [29, p. 429] (ver também [5, p. 07]).

Teorema 1.51. (O Princípio do Máximo.) *Seja Ω um domínio limitado. Suponha que*

$$\Delta\varphi \geq 0 \ (\leq 0) \text{ em } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ em } \Omega,$$

com $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Então o máximo (mínimo) de φ em $\bar{\Omega}$ é atingido em $\partial\Omega$, isto é,

$$\sup_{\Omega} \varphi = \sup_{\partial\Omega} \varphi \quad (\inf_{\Omega} \varphi = \inf_{\partial\Omega} \varphi). \quad (1.4)$$

Além disso, se φ não é assumido contínuo em $\bar{\Omega}$, a conclusão de (1.4) pode ser substituída por

$$\sup_{\Omega} \varphi = \limsup_{\partial\Omega} \varphi \quad (\inf_{\Omega} \varphi = \liminf_{\partial\Omega} \varphi).$$

Demonstração. Ver [27, p. 31].

Teorema 1.52. *Seja $\Delta\varphi \geq 0$ (≤ 0) no domínio Ω (não necessariamente limitado). Então se φ atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω , φ é constante.*

Demonstração. Ver [27, p. 35].

Considere o operador

$$Lu := - \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \partial_{ij} \varphi + b \nabla \varphi + cu,$$

e suponha que a condição de coercividade

$$\begin{cases} \exists \alpha > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ a(x) \xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \end{cases}$$

seja satisfeita.

Teorema 1.53. (Teorema de Schauder.) Suponha que os coeficientes a_{ij} , b e c pertençam a $C^{k,\theta}(\bar{\Omega})$ para algum $\theta \in (0, 1)$ e um inteiro $k \geq 0$, que $c \geq 0$ e que a condição de coercividade definida anteriormente seja satisfeita. Então, se o aberto Ω é limitado e de classe $C^{k+2,\theta}$, e se $\varphi \in C^{k+2,\theta}(\bar{\Omega})$ bem como $f \in C^{k,\theta}(\bar{\Omega})$ são dados, existe uma única função

$$\varphi \in C^{k+2,\theta}(\bar{\Omega})$$

tal que

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ \varphi = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e, além disso, para uma constante C dependente apenas de Ω , θ , α e das normas dos coeficientes a_{ij} , b_i , c em $C^{k,\theta}(\bar{\Omega})$, vale

$$\|\varphi\|_{C^{k+1}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\theta}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^k(\bar{\Omega})} \right),$$

$$\|D^2\varphi\|_{C^{k,\theta}(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\theta}(\bar{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\theta}(\bar{\Omega})} \right).$$

(Observe-se que esse teorema não é válido para $\theta = 0$ nem para $\theta = 1$; ver Exercícios [30, p. 70].)

Demonstração. Ver [30, p. 46].

Teorema 1.54. Suponha que os coeficientes a_{ij} pertençam a $C(\bar{\Omega})$, que b e c pertençam a $L^\infty(\Omega)$, que $c \geq 0$ e que a condição de coercividade definida anteriormente seja satisfeita. Então, se o aberto Ω é limitado e de classe $C^{1,1}$, e se $f \in L^p(\Omega)$ é dada para $1 < p < \infty$, existe uma única função

$$\varphi \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

tal que

$$\begin{cases} L\varphi = f & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e, além disso, para uma constante C independente de f e de φ , vale

$$\|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Em particular, se $p > \frac{N}{2}$ e $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, existe uma única solução

$$\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cap W_{loc}^{2,p}(\Omega)$$

do problema de Dirichlet

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Demonstração. Ver [30, 46].

No caso quando $L = -\Delta$, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.55. *Seja Ω um domínio de classe $C^{1,1}$ em \mathbb{R}^N , e seja o operador Laplaciano $-\Delta$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $-\Delta\varphi = f$ em Ω , $\varphi = \phi$ sobre $\partial\Omega$ tem uma única solução $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [27, p. 241].

O seguinte corolário é uma adaptação do Exemplo 11.6 de [30, p. 47].

Corolário 1.56. *Suponha que Ω seja um aberto limitado de classe $C^{2,\theta}$ para algum $\theta \in (0, 1)$ e que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ satisfaça a equação semilinear*

$$-\Delta\varphi = a(x)(1 + |\varphi|^{q-1}\varphi),$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$ e $1 \leq q \leq \frac{N+2}{N-2}$. Então, $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Se $N = 1$, como $H_0^1(\Omega) \subset C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$, conclui-se que $\Delta\varphi \in L^\infty(\Omega)$ e, conseqüentemente, $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ e, em particular, $\varphi \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$.

Se $N = 2$, então, pelas imersões de Sobolev, para todo $p < \infty$ tem-se $\varphi \in L^p(\Omega)$ e $a(\cdot)(1 + |\varphi|^{q-1}\varphi) \in L^p(\Omega)$. Nesse caso, o Teorema 1.54 implica que $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p < \infty$, e pelas desigualdades de Morrey–Sobolev conclui-se que $\varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Se $N \geq 3$, então $H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ com $2^* = \frac{2N}{N-2}$. Conseqüentemente, tomando $p_0 := 2^*/q$ e $f := a(\cdot)(1 + |\varphi|^{q-1}\varphi)$, obtém-se $f \in L^{p_0}(\Omega)$, e o Teorema 1.54 implica que $\varphi \in W^{2,p_0}(\Omega)$ (observa-se que $p_0 > 1$). Se $2p_0 > N$, então pelas desigualdades de Morrey–Sobolev, $\varphi \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ com $\theta := 1 - \frac{N}{2p_0}$.

Se $2p_0 = N$, então, para todo $p < \infty$, tem-se $\varphi \in L^p(\Omega)$ e, pelo Teorema 1.54, como $\Delta\varphi \in L^p(\Omega)$, obtém-se $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p finito, logo $\varphi \in C^{0,\theta}(\overline{\Omega})$ para todo $\theta < 1$.

Finalmente, se $2p_0 \geq N$, sabe-se que φ é Hölder contínua e, usando novamente o fato de que φ satisfaz a equação, conclui-se que $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p e, em particular, $\varphi \in C^{1,1}$.

Se $2p_0 < N$, sabendo-se que, pelas desigualdades de Sobolev, tem-se $\varphi \in L^{r_1}(\Omega)$ com $r_1 > 2^*$ dado por

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N},$$

pode-se afirmar que

$$-\Delta\varphi = f = a(1 + |\varphi|^{q-1}\varphi) \in L^{p_1}(\Omega),$$

com $p_1 := r_1/q > p_0$ e, conseqüentemente, $\varphi \in W^{2,p_1}(\Omega)$.

Repetindo esse procedimento um número finito de vezes (por exemplo, k vezes), constrói-se uma sequência $p_0 < p_1 < \dots < p_k$ tal que $-\Delta\varphi \in L^{p_k}(\Omega)$ com $2p_k > N$, obtendo-se então $\varphi \in W^{2,p_k}(\Omega)$. Finalmente, como acima, conclui-se que $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ para todo p finito e $\varphi \in C^{1,1}$. \square

Esse procedimento, chamado *argumento de bootstrap*, é constantemente utilizado para passar de uma solução fraca (obtida, por exemplo, por um método variacional) a uma solução clássica.

1.9 Operador Monótono e Hemicontínuo

Nesta seção, apresentamos propriedades do operador monótono e hemicontínuo, cujas demonstrações podem ser encontradas em [42]. Enunciamos apenas os resultados relevantes, com adaptações ao espaço de Sobolev considerado e às normalizações adotadas neste trabalho.

Proposição 1.57. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se f' é crescente, então f é convexa.*

Proposição 1.58. *Sejam $f(x) = x^p$, com $x \geq 0$ e $p \geq 2$, e $g(\varphi) = \|\varphi\|$, então $f \circ g$ é convexa.*

Definição 1.59. *Dizemos que um operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é hemicontínuo se para todos $\varphi, v, w \in H_0^1(\Omega)$ a aplicação*

$$\lambda \rightarrow \langle \mathcal{A}(\varphi + \lambda v), w \rangle$$

é contínua de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 1.60. *Se um operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é contínuo, então é hemicontínuo.*

Definição 1.61. *Um operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é monótono, se*

$$\langle \mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}v, \varphi - v \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi, v \in H_0^1(\Omega).$$

Definição 1.62. *Dizemos que um funcional $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é Gateaux-diferenciável em $\varphi \in H_0^1$ se*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\varphi + \lambda v) - J(\varphi)}{\lambda} = J'(\varphi) \cdot v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 1.63. *Se $v \rightarrow J(v)$ é Gateaux-diferenciável sobre $H_0^1(\Omega)$ e convexo, então a aplicação $\varphi \rightarrow J'(\varphi)$ de $H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é monótona.*

Sejam $M(\lambda)$, $\lambda > 0$, uma função contínua e derivável tal que

$$M(\lambda) \geq m_0 > 0, \quad \frac{d}{d\lambda} M(\lambda) \geq 0 \quad \text{e} \quad M(\lambda) \leq \alpha\lambda + \beta$$

e defina o operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ por

$$\mathcal{A}(\varphi) = -M(a(\varphi))\Delta\varphi.$$

Então \mathcal{A} aplica conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$ em conjuntos limitados de $H^{-1}(\Omega)$.

De fato, dados $\varphi, v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle \mathcal{A}(\varphi), v \rangle = \langle -M(a(\varphi))\Delta\varphi, v \rangle = -M(a(\varphi)) \int_{\Omega} \Delta\varphi v dx.$$

Pela 1ª Identidade de Green obtemos

$$-\int_{\Omega} \Delta \varphi v dx = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla v dx.$$

Logo,

$$\langle \mathcal{A}(\varphi), v \rangle = M(a(\varphi)) \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla v dx = M(a(\varphi)) a(\varphi, v).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz, segue que

$$|\langle \mathcal{A}(\varphi), v \rangle| \leq M(a(\varphi)) \|\varphi\| \|v\|$$

e tomando o supremo sobre $\|v\| = 1$, obtemos

$$\|\mathcal{A}(\varphi)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq M(a(\varphi)) \|\varphi\|.$$

Lema 1.64. *A aplicação $\varphi \rightarrow -M(a(\varphi))\Delta\varphi$ de $H_0^1(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$ é monótona e hemicontínua.*

Consideremos o caso particular em que

$$M(a(\varphi)) = \|\varphi\|^2.$$

Pela definição do operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ temos

$$\mathcal{A}\varphi = -\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \Delta\varphi$$

e assim, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ resulta

$$\langle \mathcal{A}\varphi, v \rangle = \|\varphi\|^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla v dx = \|\varphi\|^2 a(\varphi, v).$$

Utilizando novamente a desigualdade de Cauchy–Schwarz e tomando o supremo sobre $\|v\| = 1$, obtemos

$$\|\mathcal{A}\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup |\langle \mathcal{A}\varphi, v \rangle| \leq \|\varphi\|^3,$$

o que mostra que \mathcal{A} aplica conjuntos limitados de $H_0^1(\Omega)$ em conjuntos limitados de $H^{-1}(\Omega)$.

Além disso, tomando $v = \varphi$, obtemos

$$\langle \mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle = \|\varphi\|^2 a(\varphi, \varphi) = \|\varphi\|^4.$$

Lema 1.65. *O operador $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por*

$$\mathcal{A}\varphi = -\|\varphi\|^2 \Delta\varphi$$

é hemicontínua.

1.10 Método de Galerkin

Nesta seção descreveremos o principal método que utilizamos nos problemas deste trabalho, para mais informações veja [40] e [42].

O método de Galerkin foi desenvolvido pelo engenheiro e matemático russo Boris Grigoryevich Galerkin (1871-1945), o método representa uma contribuição fundamental para a resolução numérica de equações diferenciais. Apresentado em sua primeira publicação relevante em 1915, titulada como “*Sterzhni i plastinki Riady v nekotorykh voprosah uprugogo ravnovesia sterzhnei i plastinok*”, o método e suas generalizações são utilizadas até hoje em equações diferenciais parciais, análise, entre outros. Para mais informações veja [40, p. 6].

Em suma, o Método de Galerkin constitui uma abordagem de projeção para resolver problemas de operadores em espaços de dimensão infinita através de aproximações em subespaços de dimensão finita. Considere um espaço de Banach B e uma equação funcional da forma $Fu = y$, onde $F : B \rightarrow B$ é um operador possivelmente não-linear. A ideia central consiste em construir uma sequência de problemas aproximados $F_m \varphi_m = y_m$ definidos em subespaços $B_m \subset B$ de dimensão finita, de modo que as soluções φ_m convirjam, em algum sentido, para a solução φ do problema original.

Trabalharemos em particular, quando B admite uma base hilbertiana $(w_k)_{k=1}^{\infty}$, consistindo em tomar B_m como o subespaço gerado pelas primeiras m funções da base, isto é,

$$B_m = [w_1, w_2, \dots, w_m].$$

Sejam $P_m : B \rightarrow B_m$ projeções definidas por $P_m \varphi = \sum_{k=1}^m x_k w_k$ com $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k w_k$.

Com isso o problema de Galerkin associado à equação $Fu = y$ é então definido por:

$$P_m F \varphi_m = P_m y, \quad \text{para } \varphi_m \in B_m \quad (1.5)$$

com $F_m = P_m \circ F|_{B_m}$. A equação (1.5) é chamado *Método ou Aproximação de Galerkin* da equação $Fu = y$.

A estratégia geral para demonstrar a convergência das soluções aproximadas φ_m para uma solução φ do problema original segue as seguintes etapas fundamentais:

1. **Estimativas a priori:** Estabelecer que a sequência de soluções aproximadas (φ_m) são uniformemente limitadas em B , ou seja, existe uma constante $C > 0$, independente de m , tal que $\|\varphi_m\|_B \leq C$. Em espaços reflexivos, esta limitação garante a existência de uma subsequência (φ_{m_j}) que converge fracamente para algum elemento $\varphi \in B$.
2. **Passagem ao limite:** Utilizar propriedades de compacidade e continuidade do operador F , juntamente com a estrutura específica da aproximação de Galerkin, para demonstrar que o limite φ satisfaz a equação original $Fu = y$.

Em resumo, o que gostaríamos de obter é que essa sequência aproximada (φ_m) tenha uma subsequência (u_{m_j}) convergindo para uma solução do problema no espaço todo, isto é, convergindo em B .

Capítulo 2

Teorema de existência e unicidade do problema sub-crítico

Neste capítulo mostraremos a existência de solução para o problema sub-crítico do tipo Kirchhoff, utilizando aproximações de Galerkin juntamente com propriedades de operadores monótonos e hemicontínuos.

2.1 Existência do Problema Sub-crítico

Nosso objetivo é provar a existência de solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} -(M + \|\varphi\|^2)\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx$ em $H_0^1(\Omega)$, M é um número positivo, $N \geq 1$, $\lambda > 0$ um parâmetro, $0 < \alpha < 1$ e $2 < p < 2^*$.

Definição 2.1. Dizemos que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca positiva do problema (2.1) se

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2)\nabla\varphi\nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} \varphi^\alpha v dx - \int_{\Omega} \varphi^{p-1} v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dizer que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca positiva do problema dado é equivalente dizer que para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$L(\varphi, v) - N(\varphi, v) = 0$$

com $L, N : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$L(\varphi, v) = \int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2)\nabla\varphi\nabla v dx$$

e

$$N(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} \varphi^{\alpha} v dx + \int_{\Omega} \varphi^{p-1} v dx.$$

Vamos trabalhar inicialmente com o problema adaptado da seguinte forma:

$$L(\varphi, v) = \int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla v dx$$

e

$$N(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx + \int_{\Omega} |\varphi|^{p-2} \varphi v dx.$$

Observe ainda que L e N estão bem definidos e são contínuos.

1) L está bem definido. De fato,

$$\begin{aligned} |L(\varphi, v)| &= \left| \int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &= \left| (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &= (M + \|\varphi\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &\leq (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla v| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (M + \|\varphi\|^2) \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (M + \|\varphi\|^2) \|\varphi\| \|v\| < \infty. \end{aligned}$$

2) N está bem definido. De fato,

$$\begin{aligned} |N(\varphi, v)| &= \left| \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} v dx + \int_{\Omega} |\varphi|^{p-2} \varphi v dx \right| \\ &\leq \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} v dx \right| + \left| \int_{\Omega} |\varphi|^{p-2} \varphi v dx \right| \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} |\varphi| |v| dx + \int_{\Omega} |\varphi|^{p-2} |\varphi| |v| dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha} |v| dx + \int_{\Omega} |\varphi|^{p-1} |v| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \lambda \|\varphi\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha} \|v\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$ então $1 < \alpha + 1 < 2 < p$, daí pela desigualdade de Poincaré temos

$$\begin{aligned} |N(\varphi, v)| &\leq c_1 \lambda \|\varphi\|^{\alpha} \|v\| + c_2 \|\varphi\|^{p-1} \|v\| \\ &= (c_1 \lambda \|\varphi\|^{\alpha} + c_2 \|\varphi\|^{p-1}) \|v\| < \infty. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que L e N são contínuos. Para mostramos que L e N são

contínuos, tome primeiramente $(\varphi_n, v_n) \rightarrow (\varphi, v)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ou seja, vale

$$\|(\varphi_n, v_n) - (\varphi, v)\| = \|\varphi_n - \varphi\| + \|v_n - v\| \rightarrow 0.$$

Além disso, temos que $(\varphi_n, v_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, isto é, existe Q tal que:

$$\|\varphi_n\| \leq Q \text{ e } \|v_n\| \leq Q, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) L é contínuo. Com efeito

$$\begin{aligned} |L(\varphi_n, v_n) - L(\varphi, v)| &= |L(\varphi_n, v_n) - L(\varphi_n, v) + L(\varphi_n, v) - L(\varphi, v)| \\ &\leq |L(\varphi_n, v_n) - L(\varphi_n, v)| + |L(\varphi_n, v) - L(\varphi, v)| \\ &\leq \left| (M + \|\varphi_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v_n dx - (M + \|\varphi_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx \right| + \\ &+ \left| (M + \|\varphi_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx - (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &\leq (M + \|\varphi_n\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v_n dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx \right| + \\ &+ \left| (M + \|\varphi_n\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx - (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx \right| + \\ &+ (M + \|\varphi\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &= (M + \|\varphi_n\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi_n (\nabla v_n - \nabla v) dx \right| + \\ &+ \left| M + \|\varphi_n\|^2 - M - \|\varphi\|^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx \right| + \\ &+ (M + \|\varphi\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &\leq (M + \|\varphi_n\|^2) \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi_n (\nabla v_n - \nabla v) dx \right| + \\ &+ \left| \|\varphi_n\|^2 - \|\varphi\|^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla v dx \right| + \\ &+ (M + \|\varphi\|^2) \left| \int_{\Omega} (\nabla \varphi_n - \nabla \varphi) \nabla v dx \right|. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |L(\varphi_n, v_n) - L(\varphi, v)| &\leq (M + \|\varphi_n\|^2) \|\varphi_n\| \|v_n - v\| + \left| \|\varphi_n\|^2 - \|\varphi\|^2 \right| \|\varphi_n\| \|v\| + \\ &+ (M + \|\varphi\|^2) \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| \\ &\leq (M + Q^2) Q \|v_n - v\| + \left| \|\varphi_n\|^2 - \|\varphi\|^2 \right| Q \|v\| + \\ &+ (M + \|\varphi\|^2) \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| \\ &= (M + Q^2) Q \|v_n - v\| + \left| \|\varphi_n\|^2 - \|\varphi\|^2 \right| Q \|v\| + \\ &+ M \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| + \|\varphi\|^2 \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Já que $\|(\varphi_n, v_n) - (\varphi, v)\| \rightarrow 0$. Logo, podemos dizer que $L(\varphi_n, v_n) \rightarrow L(\varphi, v)$ e

portanto L é contínuo.

- 2) $N(\varphi, v)$ é contínuo. De fato, para mostrarmos que $N(\varphi, v)$ é contínuo iremos adaptá-lo da seguinte forma:

$$N(\varphi, v) = f(\varphi, v) + g(\varphi, v)$$

onde $f, g : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por

$$f(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx$$

e

$$g(\varphi, v) = \int_{\Omega} |\varphi|^{p-2} \varphi v dx.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} |f(\varphi_n, v_n) - f(\varphi, v)| &= \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v_n dx - \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx \right| \\ &= \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v_n - |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v + |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx \right| \\ &\leq \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n (v_n - v) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi) v dx \right|. \end{aligned}$$

Note que, por Hölder e pela desigualdade de Poincaré tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n (v_n - v) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} |\varphi_n| |v_n - v| dx \\ &= \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha} |v_n - v| dx \\ &\leq \|\varphi_n\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha} \|v_n - v\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|\varphi_n\|^{\alpha} c_2 \|v_n - v\| \\ &= c \|\varphi_n\|^{\alpha} \|v_n - v\|. \end{aligned}$$

Analogamente, pela Proposição 1.2, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi) v dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left| |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi \right| |v| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi|^{\alpha} |v| dx \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha} \|v\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|\varphi_n - \varphi\|^{\alpha} c_2 \|v\| \\ &= c \|\varphi_n - \varphi\|^{\alpha} \|v\|. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0$, $\|\varphi_n\| \leq Q$ e $\|v_n\| \leq Q, \forall n$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n (v_n - v) dx \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi) v dx \right| = 0.$$

Logo, f é contínua. Agora, mostraremos que g é contínua.

De fato, segue novamente da Proposição 1.4, do Teorema do Valor Médio, das desigualdades de Hölder e Poincaré que

$$\begin{aligned}
|g(\varphi_n, v_n) - g(\varphi, v)| &= \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n v_n - |\varphi|^{p-2} \varphi v dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n v_n - |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n v + |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n v - |\varphi|^{p-2} \varphi v dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n (v_n - v) + (|\varphi_n|^{p-2} \varphi_n - |\varphi|^{p-2} \varphi) v dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{p-1} |v_n - v| dx + \int_{\Omega} | |\varphi_n|^{p-2} \varphi_n - |\varphi|^{p-2} \varphi | |v| dx \\
&\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{p-1} |v_n - v| dx + \int_{\Omega} c_1 (|\varphi_n|^{p-2} + |\varphi|^{p-2}) |\varphi_n - \varphi| |v| dx \\
&\leq \|\varphi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} + c_1 \|\varphi_n\|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} + \\
&\quad + c_1 \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq c_1 \|\varphi_n\|^{p-1} \|v_n - v\| + c_2 \|\varphi_n\|^{p-2} \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| + \\
&\quad + c_2 \|\varphi\|^{p-2} \|\varphi_n - \varphi\| \|v\|.
\end{aligned}$$

Como $\|v_n - v\| \rightarrow 0$, $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$, $\|\varphi_n\|^{p-2} \leq Q^{p-2}$, $\forall n$.

Concluimos que, g é contínua. Como, f e g são contínuas segue que $N(\varphi, v) = f(\varphi, v) + g(\varphi, v)$ também é contínuo.

2.2 Problema Auxiliar

Para a prova do Teorema 0.1, provaremos primeiramente a existência de uma solução para o seguinte problema auxiliar. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos o problema

$$\begin{cases} -(M + \|\varphi\|^2) \Delta \varphi = \lambda (\varphi^+)^{\alpha} + (\varphi^+)^{p-1} + \frac{1}{n} & \text{em } \Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

onde a solução é definida da seguinte maneira

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} v dx - \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} v dx - \frac{1}{n} = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que o termo $\frac{1}{n}$ é introduzido para garantir que o problema não tenha solução trivial. Denotaremos por φ_n uma solução do problema (2.2); no entanto, para simplificar a notação, escreveremos apenas φ sempre que não houver risco de ambiguidade. Posteriormente, passaremos ao limite quando $n \rightarrow \infty$ para recuperar o problema original.

Usaremos o método de Galerkin juntamente com os seguintes resultados.

Lema 2.2. Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua com $(f(x), x) \geq 0$ para todo x verificando $\|x\| = R > 0$. Então existe $z_0 \in B[0, r]$ tal que $f(z_0) = 0$.

Demonstração. Ve [31, p. 219].

Teorema 2.3. Suponha (H1) ou (H2). Existe $\lambda^* > 0$ e $n^* > 0$ tal que (2.2) tem uma solução fraca positiva todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e para todo $n \geq n^*$.

Demonstração. Seja (w_m) uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e considere W_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores w_1, \dots, w_m da base Hilbertiana (w_m) de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$W_m = [w_1, \dots, w_m].$$

Como $(W_m, \|\cdot\|)$ e $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ são isométricos e isomorfos, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ e $|\cdot|$ é a norma Euclidiana em \mathbb{R}^m , (\cdot, \cdot) é o produto interno correspondente, nós podemos considerar a identificação

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m), \quad \|\varphi\| = |\xi|.$$

Definimos o produto interno em W_m como

$$\langle \varphi | v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^m \xi_i \beta_i,$$

onde usamos que $\langle w_i, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$, definida no Lema 1.31.

Defina a função $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(\xi) = (F_1(\xi), \dots, F_m(\xi))$, onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$,

$$F_i(\xi) = \int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} |\varphi^+|^{\alpha} w_i dx - \int_{\Omega} |\varphi^+|^{p-1} \varphi^+ w_i dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx.$$

em que $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$.

Observe que, $F_i(\xi) = L(\varphi, w_i) - N(\varphi^+, w_i) - \frac{1}{n}$ é contínua. De fato, seja $\xi_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_m^k) \rightarrow \xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$. Queremos mostrar que $F_i(\xi_k) \rightarrow F_i(\xi_0), \forall i = 1, \dots, m$.

Seja $\varphi^k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k w_i$ e $\varphi^0 = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 w_i$, temos então que

$$\begin{aligned} \|\varphi^k - \varphi^0\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i^k w_i - \sum_{i=1}^m \xi_i^0 w_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\xi_i^k - \xi_i^0| \max_{1 \leq i \leq m} \|w_i\| \rightarrow 0, \text{ já que } |\xi_i^k - \xi_i^0| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi^k \rightarrow \varphi^0$ em $H_0^1(\Omega)$, e como a aplicação $\varphi \mapsto \varphi^+$ é Lipschitz contínua, segue que $(\varphi^k)^+ \rightarrow (\varphi^0)^+$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, $(\varphi^k, w_i) \rightarrow (\varphi^0, w_i)$ e $((\varphi^k)^+, w_i) \rightarrow ((\varphi^0)^+, w_i)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \forall i = 1, \dots, m$.

Então, pela continuidade de L e N temos

$$L(\varphi^k, w_i) \rightarrow L(\varphi^0, w_i), \quad N((\varphi^k)^+, w_i) \rightarrow N((\varphi^0)^+, w_i)$$

e pelo fato de $-\frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx$ ser constante, segue que

$$F_i(\xi^k) = L(\varphi^k, w_i) - N((\varphi^k)^+, w_i) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx \rightarrow L(\varphi^0, w_i) - N((\varphi^0)^+, w_i) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx = F_i(\xi^0).$$

Portanto, $F_i(\xi^k) \rightarrow F_i(\xi^0), \forall i = 1, \dots, m$. Logo, $F = (F_1, \dots, F_m)$ é contínua.

Agora, considerando $\varphi_m = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i$ e $v_m = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$ e multiplicando cada $F_i(\xi)$ por ξ_i temos e realizando o somatório de 1 até m , temos

$$\begin{aligned} (F(\xi), \xi) &= \sum_{i=1}^m \xi_i \left(\int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) \nabla \varphi_m \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w_i dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} w_i dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx \right) \\ &= \int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) \nabla \varphi_m \sum_{i=1}^m \xi_i \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i \\ &= \int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) \nabla \varphi_m \nabla \varphi_m dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \varphi_m dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} \varphi_m dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\ &= \int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) \nabla \varphi_m \nabla \varphi_m dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \varphi_m^+ dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} \varphi_m^+ dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\ &= \int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) |\nabla \varphi_m|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha+1} dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^p dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\ &\geq (M + \|\varphi_m\|^2) \|\varphi_m\|^2 - \lambda \|\varphi_m^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - \|\varphi_m^+\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{1}{n} |\Omega|^{\frac{1}{p'}} \|\varphi_m\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Recorde que, $|\varphi_m| = \varphi_m^+ + \varphi_m^-$, daí

$$\begin{cases} \varphi_m^+ \leq |\varphi_m|, \\ \varphi_m^- \leq |\varphi_m|. \end{cases}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} (F(\xi), \xi) &\geq (M + \|\varphi_m\|^2)\|\varphi_m\|^2 - \lambda\|\varphi_m\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - \|\varphi_m\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{1}{n}|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|\varphi_m\|_{L^p(\Omega)} \\ &\geq (M + \|\varphi_m\|^2)\|\varphi_m\|^2 - c_1\lambda\|\varphi_m\|^{\alpha+1} - c_2\|\varphi_m\|^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\|\varphi\|. \end{aligned}$$

Defina $|\xi| := \|\varphi_m\| = \rho$. Daí,

$$\begin{aligned} (F(\xi), \xi) &\geq (M + \rho^2)\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\rho \\ &= M\rho^2 + \rho^4 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\rho. \end{aligned}$$

Suponha que (H1) vale. Em particular, temos que $M > 0$, logo

$$\begin{aligned} (F(\xi), \xi) &\geq (M + \rho^2)\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\rho \\ &= M\rho^2 + \rho^4 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\rho \\ &\geq M\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}\rho. \end{aligned}$$

Tomando $c = c_3|\Omega|^{\frac{1}{p'}}$ teremos

$$(F(\xi), \xi) \geq M\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - c_2\rho^p - \frac{1}{n}c\rho.$$

Para garantir que $(F(\xi), \xi) > 0$ na esfera $\|\varphi\| = \rho_0 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} M\rho^2 - c_2\rho^p &\geq \frac{M}{2}\rho^2 \iff M\rho^2 - \frac{M}{2}\rho^2 \geq c_2\rho^p \\ &\iff \frac{M}{2}\rho^2 \geq c_2\rho^p \\ &\iff \frac{M}{2c_2} \geq \rho^{p-2} \\ &\iff \left(\frac{M}{2c_2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \geq \rho > 0. \end{aligned}$$

Portanto, tome $\rho_0 = \left(\frac{M}{2c_2}\right)^{\frac{1}{p-2}}$.

Logo,

$$(F(\xi), \xi) \geq \frac{M}{2}\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - \frac{1}{n}c\rho.$$

Com $0 < \rho < \rho_0$ fixado, encontraremos $\lambda^* > 0$ tal que

$$\frac{M}{2}\rho^2 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} > 0$$

ou seja,

$$\lambda c_1 \rho^{\alpha+1} < \frac{M}{2}\rho^2 \Leftrightarrow \lambda < \frac{M}{2c_1}\rho^{1-\alpha} = \lambda^*.$$

Tomando $\beta = \frac{M}{2c_1}\rho^2 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1}$ temos $\beta > 0$ para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Se $0 < \rho \leq \rho_0$ e $0 < \lambda < \lambda^*$ temos

$$(F(\xi), \xi) \geq \beta - \frac{1}{n}c\rho.$$

Portanto,

$$\beta - \frac{1}{n}c\rho \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \frac{1}{n}c\rho \Leftrightarrow n \geq \frac{c\rho}{\beta} = n^*$$

então, $(F(\xi), \xi) \geq 0$, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $n \geq n^*$.

Suponha que (H2) vale. Em particular, temos que $M = 0$, logo

$$(F(\xi), \xi) \geq (\rho^2)\rho^2 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} - c_2 \rho^p - \frac{1}{n}c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}} \rho.$$

Tomando $c = c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}}$ teremos

$$(F(\xi), \xi) \geq \rho^4 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} - c_2 \rho^p - \frac{1}{n}c\rho.$$

Para garantir que $(F(\xi), \xi) > 0$ na esfera $\alpha = \|\varphi\| = \rho_0 > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \rho^4 - c_2 \rho^p &\geq \frac{1}{2}\rho^4 \Leftrightarrow \rho^4 - \frac{1}{2}\rho^4 \geq c_2 \rho^p \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho^4 \geq c_2 \rho^p \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2c_2} \geq \rho^{p-4} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{p-4}} \geq \rho > 0. \end{aligned}$$

Portanto, tome $\rho_0 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{p-4}}$, ($p > 4$).

Logo,

$$(F(\xi), \xi) \geq \frac{1}{2}\rho^4 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} - \frac{1}{n}c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p}} \rho.$$

Com $0 < \rho < \rho_0$ fixado, encontraremos $\lambda^* > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\rho^4 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} > 0$$

ou seja,

$$\lambda c_1 \rho^{\alpha+1} < \frac{1}{2}\rho^4 \Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{2c_1}\rho^{3-\alpha} = \lambda^*$$

e, tomando $\beta = \frac{1}{2}\rho^4 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1}$, temos $\beta > 0$ para todo $\lambda < \lambda^*$.

Assim, se $0 < \rho \leq \rho_0$ e $0 < \lambda < \lambda^*$ temos

$$(F(\xi), \xi) \geq \beta - \frac{1}{n}c\rho.$$

Portanto,

$$\beta - \frac{1}{n}c\rho \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \frac{1}{n}c\rho \Leftrightarrow n \geq \frac{c\rho}{\beta} = n^*$$

então, $(F(\xi), \xi) \geq 0$, para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ e $n \geq n^*$.

Dadas estas condições, as hipóteses do teorema do ponto fixo de Brouwer, Lema 2.2, são satisfeitas. Deste modo, existe $\varphi_m \in W_m \Rightarrow \varphi_m \subset B_{\rho_0}(0)$ ($B_{\rho_0}(0) = \{\varphi \in W_m; \|\varphi\| \leq \rho_0\}$) tal que $F(\varphi_m) = 0$, ou seja,

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi_m\|^2) \nabla \varphi_m \nabla w dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} w dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx = 0, \forall w \in W_m. \quad (2.3)$$

Como os vetores w_1, \dots, w_m são l.i.'s, segue que para cada m fixo φ_m é solução do problema auxiliar. Além disso, segue que $\|\varphi_m\| \leq \rho_0$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, podemos extrair uma subsequência que continuaremos denotando por φ_m tal que

$$\begin{aligned} \varphi_m &\rightharpoonup \varphi \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ \varphi_m &\rightarrow \varphi \text{ em } L^q(\Omega), \quad 1 < q < 2^*, \text{ (Imersão Compacta)} \\ \varphi_m &\rightarrow \varphi \text{ q.t.p em } \Omega. \end{aligned}$$

Observe que, fixado $k \in \mathbb{N}$ temos $W_k \subseteq W_m$, para todo $m \geq k$.

Agora, fazendo $m \rightarrow \infty$ temos:

$$\int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} w dx, \forall w \in W_k.$$

Como $\varphi_m \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω , temos em particular que $\varphi_m^+ \rightarrow \varphi^+$ q.t.p. em Ω . Por continuidade da aplicação $f(t) = t^{p-1}$, temos

$$(\varphi_m^+)^{p-1} \rightarrow (\varphi^+)^{p-1} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ continuamente segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(\varphi_m^+)^{p-1}|^{\frac{p}{p-1}} dx &= \int_{\Omega} (|\varphi_m^+|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} |\varphi_m^+|^p dx \\ &\leq c \|\varphi_m^+\|^p \\ &\leq c \rho_0^p. \end{aligned}$$

Logo, $((\varphi_m^+)^{p-1})_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.33 segue que

$$(\varphi_m^+)^{p-1} \rightarrow (\varphi^+)^{p-1} \text{ fracamente em } L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} w dx, \forall w \in L^p(\Omega).$$

Em particular, $\forall w \in W_k \subset H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Seguindo o mesmo raciocínio temos, pela convergência q.t.p. em Ω , pela imersão contínua e pelo Teorema de Riesz que

$$\lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w dx \rightarrow \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx, \forall w \in W_k.$$

Observe que queremos mostrar ainda que

$$M \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w dx \rightarrow M \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx, \forall w \in W_k.$$

E de fato isto acontece por definição de convergência fraca, escrita via o Teorema de Representação de Riesz, da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx, \forall w \in W_k.$$

E, como M é uma constante não-negativa, a convergência continua válida.

Além disso, pela definição de $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{A}\varphi_m, w \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \|\varphi_m\|^2 \nabla \varphi_m \nabla w dx \right| \\
&\leq \|\varphi_m\|^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m \nabla w| dx \\
&\leq \|\varphi_m\|^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m| |\nabla w| dx \\
&\leq \|\varphi_m\|^2 \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\varphi_m\|^2 \|\varphi_m\| \|w\| \\
&= \|\varphi_m\|^3 \|w\| = \rho_0^3 \|w\|, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\varphi_m\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|w\| \leq 1} |\langle \mathcal{A}\varphi_m, w \rangle| \\
&\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \|\varphi_m\|^3 \|w\| \\
&= \|\varphi_m\|^3 = \rho_0^3
\end{aligned}$$

ou seja, $\|\mathcal{A}\varphi_m\|_{H^{-1}} \leq \rho_0^3$, e conseqüentemente $(\mathcal{A}\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ é uma seqüência limitada em $H^{-1}(\Omega)$. E como o nosso espaço $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, segue que o seu dual, $H^{-1}(\Omega)$ também o é, então existe uma subseqüência de $\mathcal{A}\varphi_m$ convergente, digamos

$$\mathcal{A}\varphi_m \rightarrow \theta, \quad \text{fracamente em } H^{-1}(\Omega).$$

Como, $\langle \mathcal{A}\varphi_m, v \rangle = \|\varphi_m\|^2 \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla v dx$, obtemos de (2.3),

$$\langle \mathcal{A}\varphi_m, w \rangle = \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w dx + \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} w dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \quad \forall w \in W_k. \quad (2.4)$$

Mediante as convergências mostradas teremos então

$$\langle \theta, w \rangle = \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx + \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} w dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \quad \forall w \in W_k. \quad (2.5)$$

Logo, (2.5) vale $\forall v \in \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, mas como $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k} = H_0^1(\Omega)$ segue por densidade e continuidade que para todo w :

$$\langle \theta, w \rangle = \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx + \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} w dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, queremos mostrar que $\theta = \mathcal{A}\varphi$. Usaremos então o fato do nosso operador

ser monótono, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\varphi_m - \mathcal{A}w, \varphi_m - w \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle \mathcal{A}\varphi_m, \varphi_m \rangle + \langle \mathcal{A}\varphi_m, -w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_m - w \rangle &\geq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Por (2.4), tem-se

$$\lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \varphi_m dx + \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{p-1} \varphi_m dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_m dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m - \langle \mathcal{A}\varphi_m, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_m - w \rangle \geq 0$$

e daí

$$\lambda \|\varphi_m^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi_m^+\|_{L^p(\Omega)}^p - M \|\varphi_m\|^2 + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi dx - \langle \mathcal{A}\varphi_m, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_m - w \rangle \geq 0, \quad (2.6)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando o lim sup em (2.6) obtemos a seguinte desigualdade

$$\lambda \|\varphi^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi^+\|_{L^p(\Omega)}^p - M \|\varphi\|^2 + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi dx - \langle \theta, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

visto que $\varphi_m \rightharpoonup \varphi \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 &\leq (\liminf \|\varphi_m\|)^2 = \liminf (\|\varphi_m\|)^2 \\ \Rightarrow -\|\varphi\|^2 &\geq -\liminf \|\varphi_m\|^2 = \limsup (-\|\varphi_m\|)^2 \\ \Rightarrow -M \|\varphi\|^2 &\geq \limsup (-M \|\varphi_m\|)^2. \end{aligned}$$

Como $1 < p < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, então existe uma subsequência o qual continuaremos denotando por φ_m tal que $\varphi_m \rightarrow \varphi$ fortemente em $L^p(\Omega)$, e assim, pela Observação 1.5, segue que

$$\|\varphi_m^+\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow \|\varphi^+\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Como $\alpha + 1 < p < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$ é compacta, então existe uma subsequência o qual continuaremos denotando por φ_m tal que $\varphi_m \rightarrow \varphi$ fortemente em $L^{\alpha+1}(\Omega)$, e assim, pela Observação 1.5 segue que

$$\|\varphi_m^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \rightarrow \|\varphi^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1}.$$

Como w é fixo, $\mathcal{A}w \in H^{-1}(\Omega)$ é um funcional linear contínuo em $H_0^1(\Omega)$. Pela convergência fraca $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$ segue $\varphi_m - w \rightharpoonup \varphi - w$ e, portanto,

$$\langle \mathcal{A}w, \varphi_m - w \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle.$$

Por outro lado, temos que

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \lambda \|\varphi^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi^+\|_{L^p(\Omega)}^p - M \|\varphi\|^2 + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi dx,$$

daí,

$$\langle \theta, \varphi \rangle - \langle \theta, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle \theta - \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle \geq 0, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando $w = \varphi - \lambda v$, com $\lambda > 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrários e substituindo na última desigualdade teremos,

$$\langle \theta - \mathcal{A}(\varphi - \lambda v), v \rangle \geq 0. \quad (2.7)$$

Mas como o operador \mathcal{A} é hemicontínuo segue que

$$\langle \theta - \mathcal{A}(\varphi - \lambda v), v \rangle \rightarrow \langle \theta - \mathcal{A}\varphi, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega), \lambda \rightarrow 0.$$

Dessa convergência e de (2.7) segue que

$$\langle \theta - \mathcal{A}\varphi, v \rangle \geq 0, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Substituindo v por $-v$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \theta - \mathcal{A}\varphi, -v \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow -\langle \theta - \mathcal{A}\varphi, v \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle \theta - \mathcal{A}\varphi, v \rangle &\leq 0, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Daí, de (2.8) e (2.9) segue que

$$\langle \theta - \mathcal{A}\varphi, v \rangle = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $\mathcal{A}\varphi = \theta$ em $H^{-1}(\Omega)$. Logo, $\mathcal{A}\varphi_m \rightarrow \mathcal{A}\varphi$ e assim φ é solução do problema auxiliar. Para cada $n \geq n^*$ denotemos por $\varphi = \varphi_n$ a solução do problema auxiliar (2.2).

Podemos então concluir que

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla w \, dx = \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w \, dx + \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} w \, dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w \, dx, \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Note que, se $\|\varphi\| = 0$, então $\varphi = 0$ e de (2.10) temos

$$\frac{1}{n} \int_{\Omega} w \, dx = 0, \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

o que é um absurdo. Logo, $\|\varphi\| > 0$.

Agora, mostraremos que $\varphi > 0$. Para tal, considere $w = \varphi^- \in H_0^1(\Omega)$ como função teste em (2.10) e obtemos

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi\|^2) \nabla \varphi \nabla \varphi^- \, dx = \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} \varphi^- \, dx + \int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} \varphi^- \, dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- \, dx. \quad (2.11)$$

Desta igualdade, obtemos

$$-(M + \|\varphi\|^2) \|\varphi^-\|^2 = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- \, dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi^- dx &= (M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} (\nabla \varphi^+ - \nabla \varphi^-) \nabla \varphi^- dx \\
 &= (M + \|\varphi\|^2) \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \nabla \varphi^- dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi^- \nabla \varphi^- dx \right) \\
 &= -(M + \|\varphi\|^2) \int_{\Omega} |\nabla \varphi^-|^2 dx \\
 &= -(M + \|\varphi\|^2) \|\varphi^-\|^2.
 \end{aligned}$$

Daí temos que,

$$\lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} \varphi^- dx = 0,$$

e,

$$\int_{\Omega} (\varphi^+)^{p-1} \varphi^- dx = 0.$$

Logo, (2.11) se escreve como

$$(M + \|\varphi\|^2) \|\varphi^-\|^2 = -\frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- dx.$$

Como $\|\varphi\| > 0$, segue que

$$(M + \|\varphi\|^2) \|\varphi^-\|^2 = -\frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- dx \leq 0.$$

E isto implica, em particular que

$$\|\varphi\|^2 \|\varphi^-\|^2 \leq 0 \Rightarrow \|\varphi^-\|^2 = 0 \Rightarrow \varphi^- \equiv 0.$$

Logo, $\varphi = \varphi^+ \geq 0$ e $\|\varphi\| > 0$. Assim, temos que φ é solução da equação

$$-\Delta \varphi = \frac{\lambda}{(M + \|\varphi\|^2)} \varphi^{\alpha} + \frac{\varphi^{p-1}}{(M + \|\varphi\|^2)} + \frac{1}{n(M + \|\varphi\|^2)} \geq 0.$$

Ou seja, se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, segue do Teorema do Princípio do Máximo e 1.52 que

$$\varphi \equiv \text{constante}.$$

Logo, $\varphi \equiv 0$, o que é um absurdo já que 0 não é solução de (2.2). Assim, a solução do problema auxiliar $\varphi := \varphi_n$, para cada $n \geq n^*$ satisfaz $\varphi > 0$ em Ω . Portanto, φ é solução do problema auxiliar. \square

2.3 Prova do Teorema 0.1

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 o problema (2.2) tem uma solução fraca $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$. Como $0 < \alpha < 1 < p-1$, e observando que para toda $|\varphi_n| \geq 0$

vale a estimativa $(1 + |\varphi_n|)^{p-1} \leq 2^{p-1}(1 + |\varphi_n|^{p-1})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2} \left| \lambda \varphi_n^\alpha + \varphi_n^{p-1} + \frac{1}{n} \right| &\leq \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2} \left(\lambda |\varphi_n|^\alpha + |\varphi_n|^{p-1} + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2} (\lambda(1 + |\varphi_n|)^\alpha + (1 + |\varphi_n|)^{p-1} + 1) \\ &\leq \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2} (\lambda(1 + |\varphi_n|)^{p-1} + (1 + |\varphi_n|)^{p-1} + (1 + |\varphi_n|)^{p-1}) \\ &= \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2} (\lambda + 2)(1 + |\varphi_n|)^{p-1} \\ &\leq \frac{C}{M + \|\varphi_n\|^2} (1 + |\varphi_n|^{p-1}). \end{aligned}$$

com $2 < p < 2^*$. Pelo Teorema 1.54 e Corolário 1.56, $\varphi_n \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, $\varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Observe ainda que φ_n satisfaz

$$\begin{cases} -(M + \|\varphi_n\|^2)\Delta\varphi_n \geq \lambda\varphi_n^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \varphi_n > 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi_n = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

e conseqüentemente

$$-\Delta\varphi_n \geq \frac{\lambda}{M + \|\varphi_n\|^2} \varphi_n^\alpha. \quad (2.13)$$

Além disso, como $\varphi_m \in B_{\rho_0}(0)$ temos que, em particular

$$\begin{cases} \|\varphi_m\| \leq \rho_0 \\ \varphi_m \rightharpoonup \varphi_n \text{ em } H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

e assim

$$\|\varphi_n\| \leq \liminf \|\varphi_m\| \leq \rho_0 \Rightarrow \varphi_n \in B_{\rho_0}(0)$$

onde ρ_0 não depende de n .

Com isso, podemos extrair uma subseqüência de (φ_n) , que continuaremos denotando por (φ_n) tal que

$$\begin{aligned} \varphi_n &\rightharpoonup \varphi \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ em } L^q(\Omega), \quad 1 < q < 2^*, \quad (\text{Imersão Compacta}) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ q.t.p em } \Omega \end{aligned}$$

para algum $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Logo, usando novamente a semicontinuidade inferior da norma, temos que

$$\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\| \leq \rho_0 \Rightarrow \varphi \in B_{\rho_0}(0).$$

Além disso, note que

$$M + \|\varphi_n\|^2 \leq M + \rho_0^2 \Rightarrow \frac{1}{M + \rho_0^2} \leq \frac{1}{M + \|\varphi_n\|^2}$$

e juntamente com (2.13) obtemos

$$-\Delta\varphi_n \geq \frac{\lambda}{M + \rho_0^2} \varphi_n^\alpha.$$

Reescalando, $w_n = \left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \varphi_n$ resulta

$$-\Delta \left(\frac{w_n}{\left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right) \geq \frac{\lambda}{M + \rho_0^2} \left(\frac{w_n}{\left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \right)^\alpha = \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} w_n^\alpha,$$

e portanto

$$-\Delta w_n \geq w_n^\alpha.$$

Logo, pelo Lema 1.50 temos $w_n \geq v > 0$, onde v é dada no Lema 1.49 e logo,

$$\varphi_n \geq \left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} v > 0. \quad (2.14)$$

Como $\varphi_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω , segue que $\varphi \geq \left(\frac{\lambda}{M + \rho_0^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} v > 0$ q.t.p. em Ω .

Mostraremos agora que φ é solução de (2.1).

Observe que, como $\varphi_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω segue que

$$\varphi_n^{p-1} \rightarrow \varphi^{p-1} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Lembre-se de (2.10) que

$$\int_{\Omega} (M + \|\varphi_n\|^2) \nabla \varphi_n \nabla w dx = \lambda \int_{\Omega} \varphi_n^\alpha w dx + \int_{\Omega} \varphi_n^{p-1} w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\langle \mathcal{A}\varphi_n, w \rangle = \lambda \int_{\Omega} \varphi_n^\alpha w dx + \int_{\Omega} \varphi_n^{p-1} w dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.15)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.15) e procedendo de forma similar aos argumentos usados na Seção 2.2, segue da convergência q.t.p. em Ω , continuidade, Teorema 1.33 e pelo Teorema de Riesz, que

$$\int_{\Omega} \varphi_n^{p-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi^{p-1} w dx \text{ e } \int_{\Omega} \varphi_n^\alpha w dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi^\alpha w dx, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, conforme mostrado na Seção 2.2, como $(\mathcal{A}\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada em $H^{-1}(\Omega)$, e $H^{-1}(\Omega)$ é reflexivo, segue que existe uma subsequência de $\mathcal{A}\varphi_n$ convergente, digamos que

$$\mathcal{A}\varphi_n \rightarrow \Theta, \text{ fracamente em } H^{-1}(\Omega).$$

Resultando então em

$$\langle \Theta, w \rangle = \lambda \int_{\Omega} \varphi^{\alpha} w dx + \int_{\Omega} \varphi^{p-1} w dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Agora, nos resta mostrar que $\Theta = \mathcal{A}\varphi$. Seguindo o mesmo raciocínio, usando o fato do nosso operador ser monótono, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\varphi_n - \mathcal{A}w, \varphi_n - w \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle \mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n \rangle + \langle \mathcal{A}\varphi_n, -w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_n - w \rangle &\geq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Por (2.15) tem-se

$$\lambda \int_{\Omega} \varphi_n^{\alpha} \varphi_n dx + \int_{\Omega} \varphi_n^{p-1} \varphi_n dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_n dx - M \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n dx - \langle \mathcal{A}\varphi_n, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_n - w \rangle \geq 0.$$

Então,

$$\lambda \|\varphi_n\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_n dx - M \|\varphi_n\|^2 - \langle \mathcal{A}\varphi_n, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi_n - w \rangle \geq 0, \quad (2.16)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Tomando o lim sup em (2.16) obtemos

$$\lambda \|\varphi\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p - M \|\varphi\|^2 - \langle \theta, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle \geq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

usando que $\varphi_n \rightharpoonup \varphi \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$\|\varphi\|^2 \leq (\liminf \|\varphi_n\|)^2 = \liminf (\|\varphi_n\|)^2 \Rightarrow -M \|\varphi\|^2 \geq \limsup (-M \|\varphi_n\|)^2.$$

Como $2 < p < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é compacta, então existe uma subsequência a qual continuaremos denotando por φ_n tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ fortemente em $L^p(\Omega)$, e assim

$$\|\varphi_n\|_{L^p(\Omega)}^p \rightarrow \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Como $\alpha + 1 < p < 2^*$, a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$ é compacta, então existe uma subsequência a qual continuaremos denotando por φ_n tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ fortemente em $L^{\alpha+1}(\Omega)$, segue que

$$\|\varphi_n\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \rightarrow \|\varphi\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1}.$$

Como w é fixo, $\mathcal{A}w \in H^{-1}(\Omega)$ é um funcional linear contínuo em $H_0^1(\Omega)$. Pela convergência fraca $\varphi_n \rightharpoonup \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$ segue $\varphi_n - w \rightharpoonup \varphi - w$ e, portanto,

$$\langle \mathcal{A}w, \varphi_n - w \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle.$$

Por outro lado, temos que $\langle \Theta, \varphi \rangle = \lambda \|\varphi\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} + \|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p - M\|\varphi\|^2$, daí,

$$\begin{aligned} \langle \Theta, \varphi \rangle - \langle \Theta, w \rangle - \langle \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle \Theta - \mathcal{A}w, \varphi - w \rangle &\geq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Considerando $w = \varphi - \lambda w$, com $\lambda > 0$ e $w \in H_0^1(\Omega)$ arbitrários e substituindo na última desigualdade temos

$$\langle \theta - \mathcal{A}(\varphi - \lambda w), w \rangle \geq 0. \quad (2.17)$$

Como o operador \mathcal{A} é hemicontínuo segue que

$$\langle \Theta - \mathcal{A}(\varphi - \lambda w), w \rangle \rightarrow \langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, w \rangle, \forall w \in H_0^1(\Omega), \lambda \rightarrow 0.$$

e assim, de (2.17) segue que

$$\langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, w \rangle \geq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.18)$$

Substituindo w por $-w$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, -w \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow -\langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, w \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, w \rangle &\leq 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.19)$$

De (2.18) e (2.19) segue que

$$\langle \Theta - \mathcal{A}\varphi, w \rangle = 0, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Ou seja, $\mathcal{A}\varphi = \Theta$ em $H^{-1}(\Omega)$. Logo, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é solução positiva da equação

$$-(M + \|\varphi\|^2)\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{p-1}.$$

Como $\varphi_n \geq \left(\frac{\lambda}{M+\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} v > 0$, com v sendo solução de (2.14), da convergência q.t.p, tem-se $\varphi \geq \left(\frac{\lambda}{M+\rho_0^2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} v > 0$.

Portanto, a prova do Teorema 0.1 está completa. □

2.4 Prova do Teorema 0.2

Demonstração. Assumindo a hipótese (H2). Pelo Teorema 2.3 o problema (2.2) tem uma solução fraca $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$. Como $0 < \alpha < 1$,

$$\frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \left| \lambda \varphi_n^\alpha + \varphi_n^{p-1} + \frac{1}{n} \right| \leq \frac{C}{\|\varphi_n\|^2} (1 + |\varphi_n|^{p-1}),$$

com $4 < p < 6$ quando $N = 3$. Pelo Teorema 1.54 e Corolário 1.56, $\varphi_n \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, $\varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Com um argumento similar à demonstração do Teorema 0.1, podemos extrair uma subsequência de (φ_n) que converge para uma função $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ solução positiva do problema

$$-\|\varphi\|^2 \Delta \varphi = \lambda \varphi^\alpha + \varphi^{p-1}.$$

□

Capítulo 3

Teorema de existência do problema crítico

Neste capítulo mostraremos a existência para o problema crítico utilizando o método de Galerkin. Além disso, assumiremos alguns cálculos realizados no capítulo anterior para que a leitura possa ser mais fluida.

3.1 Existência do Problema Crítico

Nosso objetivo é mostrar a existência de solução fraca para o seguinte problema crítico dado por

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \varphi > 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) é um domínio de fronteira suave, $\lambda > 0$ um parâmetro, $\|\varphi\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx$ em $H_0^1(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$ e $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Queremos encontrar uma solução $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz a equação dada. A formulação fraca do problema é dada da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \nabla v dx - \left(\lambda \int_{\Omega} \varphi^\alpha v dx + \int_{\Omega} \varphi^{2^*-1} v dx \right) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A formulação fraca do problema é equivalente a dizer que, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca positiva, se para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ tem-se

$$L(\varphi, v) - N(\varphi, v) = 0$$

com $L, N : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$L(\varphi, v) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx$$

e

$$N(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} \varphi^\alpha v dx + \int_{\Omega} \varphi^{2^*-1} v dx.$$

Vamos trabalhar inicialmente com o problema adaptado da seguinte forma

$$L(\varphi, v) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx$$

e

$$N(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx + \int_{\Omega} |\varphi|^{2^*-2} \varphi v dx.$$

Tendo isso em mente, mostraremos agora que L, N estão bem definidas.

1) L é bem definido. De fato,

$$\begin{aligned} |L(\varphi, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla v| dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\varphi\| \|v\| < \infty. \end{aligned}$$

Logo L está bem definido. Observe ainda que $L(\varphi, v)$ é uma forma bilinear, que por definição é contínuo.

2) N é bem definido. Com efeito, como vimos no capítulo anterior temos que

$$|N(\varphi, v)| \leq (c_1 \lambda \|\varphi\|^\alpha + c_2 \|\varphi\|^{2^*-1}) \|v\| < \infty.$$

Logo, N está bem definida.

Agora, mostraremos que N é contínuo. Para mostrarmos que N é contínuo tome primeiramente $(\varphi_n, v_n) \rightarrow (\varphi, v)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$ vale

$$\|(\varphi_n, v_n) - (\varphi, v)\| = \|\varphi_n - \varphi\| + \|v_n - v\| \rightarrow 0.$$

Além disso, temos que $(\varphi_n, v_n)_{n=1}^\infty$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, ou seja, existe Q tal que

$$\|\varphi_n\| \leq Q \text{ e } \|v_n\| \leq Q, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$N(\varphi, v)$ é contínuo. De fato, para mostrarmos que $N(\varphi, v)$ é contínuo iremos reescrever-lo da seguinte forma:

$$N(\varphi, v) = f(\varphi, v) + g(\varphi, v)$$

com

$$f(\varphi, v) = \lambda \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx$$

e

$$g(\varphi, v) = \int_{\Omega} |\varphi|^{2^*-2} u v dx.$$

Note que

$$\begin{aligned} |f(\varphi_n, v_n) - f(\varphi, v)| &= \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v_n dx - \int_{\Omega} |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v dx \right| \\ &= \lambda \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n (v_n - v) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v) dx \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

uma vez que pela desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n (v_n - v) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} |\varphi_n| |v_n - v| dx \\ &\leq c \|\varphi_n\|^{\alpha} \|v_n - v\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

visto que $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ e $\|\varphi_n\|^{\alpha} \leq Q, \forall n$.

Também, pela Proposição 1.1, desigualdade de Hölder e Imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{\alpha-1} \varphi_n v - |\varphi|^{\alpha-1} \varphi v) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\varphi_n|^{\alpha-1} |\varphi_n| |v| - |\varphi|^{\alpha-1} |\varphi| |v| dx \\ &\leq c \|\varphi_n - \varphi\|^{\alpha} \|v\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

visto que $\|\varphi_n - \varphi\|^{\alpha} \rightarrow 0$ e $\|v\|$ é constante.

Com isso, podemos concluir que f é contínua.

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, pelas desigualdades de Hölder e Poincaré que

$$\begin{aligned} |g(\varphi_n, v_n) - g(\varphi, v)| &= \left| \int_{\Omega} |\varphi_n|^{2^*-2} \varphi_n v_n - |\varphi|^{2^*-2} \varphi v dx \right| \\ &\leq c_1 \|\varphi_n\|^{2^*-1} \|v_n - v\| + c_2 \|\varphi_n\|^{2^*-2} \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| + \\ &\quad + c_2 \|\varphi\|^{2^*-2} \|\varphi_n - \varphi\| \|v\| \end{aligned}$$

uma vez que $\|v_n - v\| \rightarrow 0, \|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0, \|\varphi_n\|^{2^*-2} \leq Q^{2^*-2}, \forall n$.

Logo, g é contínua. Como, f e g são contínuas segue que $N(\varphi, v) = f(\varphi, v) + g(\varphi, v)$ também é contínuo.

3.2 Problema Auxiliar

Para a prova do Teorema 0.3, provaremos inicialmente, usando o método de Galerkin, a existência de uma solução para o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda(\varphi^+)^{\alpha} + (\varphi^+)^{2^*-1} + \frac{1}{n} & \text{em } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

onde a solução é definida da seguinte maneira

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} v dx - \int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} v dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que o termo $\frac{1}{n}$ é introduzido para garantir que o problema não tenha solução trivial. Denotaremos por φ_n uma solução do problema (2.2); no entanto, para simplificar a notação, escreveremos apenas φ sempre que não houver risco de ambiguidade. Posteriormente, passaremos ao limite quando $n \rightarrow \infty$ para recuperar o problema original. Mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que (3.2) tem uma solução fraca não negativa e não trivial para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$.*

Demonstração. Seja (w_m) uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e considere W_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores w_1, \dots, w_m da base Hilbertiana (w_m) de $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$W_m = [w_1, \dots, w_m].$$

E seja $\varphi, v \in W_m$ com $\varphi = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i$ e $v = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$. Definimos o produto interno em W_m como

$$\langle \varphi | v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^m \xi_i \beta_i.$$

Como $(W_m, \|\cdot\|)$ e $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ são isométricos e isomorfos, onde $\|\cdot\|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ e $|\cdot|$ é a norma Euclidiana em \mathbb{R}^m , (\cdot, \cdot) é o produto interno correspondente, nós podemos considerar a identificação

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m), \quad \|\varphi\| = |\xi|.$$

Definimos o produto interno em W_m como

$$\langle \varphi | v \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^m \xi_i \beta_i,$$

onde usamos que $\langle w_i, w_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}$, definida no Lema 1.31.

Defina a função $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(\xi) = (F_1(\xi), \dots, F_m(\xi))$, onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$,

$$F_i(\xi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} |\varphi^+|^{\alpha} w_i dx - \int_{\Omega} |\varphi^+|^{2^*-1} w_i dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx.$$

onde, $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$.

Observe que, $F_i(\xi) = L(\varphi, w_i) - N(\varphi, w_i) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx$ é contínua. De fato, seja $\xi^k = (\xi_1^k, \dots, \xi_m^k) \rightarrow \xi_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$. Queremos mostrar que $F_i(\xi^k) \rightarrow F_i(\xi_0)$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Seja $\varphi^k = \sum_{i=1}^m \xi_i^k w_i$ e $\varphi^0 = \sum_{i=1}^m \xi_i^0 w_i$, temos então que

$$\begin{aligned} \|\varphi^k - \varphi^0\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i^k w_i - \sum_{i=1}^m \xi_i^0 w_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |\xi_i^k - \xi_i^0| \max_{1 \leq i \leq m} \|w_i\| \rightarrow 0, \text{ já que } |\xi_i^k - \xi_i^0| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi^k \rightarrow \varphi^0$ em $H_0^1(\Omega)$, e como a aplicação $\varphi \mapsto \varphi^+$ é Lipschitz contínua, segue que $(\varphi^k)^+ \rightarrow (\varphi^0)^+$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto, $(\varphi^k, w_i) \rightarrow (\varphi^0, w_i)$ e $((\varphi^k)^+, w_i) \rightarrow ((\varphi^0)^+, w_i)$ em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Então, pela continuidade de L e N temos

$$L(\varphi^k, w_i) \rightarrow L(\varphi^0, w_i), \quad N((\varphi^k)^+, w_i) \rightarrow N((\varphi^0)^+, w_i)$$

e pelo fato de $-\frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx$ ser constante, segue que

$$F_i(\xi^k) = L(\varphi^k, w_i) - N((\varphi^k)^+, w_i) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx \rightarrow L(\varphi^0, w_i) - N((\varphi^0)^+, w_i) - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx = F_i(\xi^0).$$

Portanto, $F_i(\xi^k) \rightarrow F_i(\xi^0)$, $\forall i = 1, \dots, m$. Logo, $F = (F_1, \dots, F_m)$ é contínua.

Agora, considerando $\varphi_m = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i$ e $v_m = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$ e multiplicando cada $F_i(\xi)$ por ξ_i e, realizando o somatório de 1 até m , temos

$$\begin{aligned}
(F(\xi), \xi) &= \sum_{i=1}^m \xi_i \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w_i dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} w_i dx - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w_i dx \right) \\
&= \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \sum_{i=1}^m \xi_i \nabla w_i dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i dx - \\
&\quad - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \xi_i w_i \\
&= \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_m dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \varphi_m dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} \varphi_m dx - \\
&\quad - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla \varphi_m dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} \varphi_m^+ dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} \varphi_m^+ dx - \\
&\quad - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla \varphi_m|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha+1} dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*} dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi_m dx \\
&\geq \|\varphi_m\|^2 - \lambda \|\varphi_m^+\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - \|\varphi_m^+\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} - \frac{1}{n} |\Omega| \|\varphi_m\|_{L^{2^*}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Recorde que, $|\varphi_m| = \varphi_m^+ + \varphi_m^-$ e portanto

$$\begin{cases} \varphi_m^+ \leq |\varphi_m|, \\ \varphi_m^- \leq |\varphi_m|. \end{cases}$$

Daí, pela desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
(F(\xi), \xi) &\geq \|\varphi_m\|^2 - \lambda \|\varphi_m\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} - \|\varphi_m\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} - \frac{1}{n} |\Omega| \|\varphi_m\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\geq \|\varphi_m\|^2 - c_1 \lambda \|\varphi_m\|^{\alpha+1} - c_2 \|\varphi_m\|^{2^*} - \frac{1}{n} c_3 |\Omega| \|\varphi_m\|.
\end{aligned}$$

Assim, se $|\xi| := \|\varphi_m\| = \rho$ temos

$$(F(\xi), \xi) \geq \rho^2 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} - c_2 \rho^{2^*} - \frac{1}{n} c_3 |\Omega| \rho$$

e tomando $c = c_3 |\Omega|^{\frac{1}{p^*}}$ resulta

$$(F(\xi), \xi) \geq \rho^2 - \lambda c_1 \rho^{\alpha+1} - c_2 \rho^{2^*} - \frac{1}{n} c \rho.$$

Para garantir que $(F(\xi), \xi) > 0$ na esfera $\|\varphi\| = \rho_0 > 0$, observe que

$$\begin{aligned} \rho^2 - c_2\rho^{2^*} \geq \frac{1}{2}\rho^2 &\iff \rho^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \geq c_2\rho^{2^*} \\ &\iff \frac{1}{2}\rho^2 \geq c_2\rho^{2^*} \\ &\iff \frac{1}{2c_2} \geq \rho^{2^*-2} \\ &\iff \left(\frac{1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} \geq \rho > 0. \end{aligned}$$

logo basta tomar $\rho_0 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ e obtemos

Logo,

$$(F(\xi), \xi) \geq \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} - \frac{1}{n}c\rho,$$

para todo $\|\varphi\| = \rho \leq \rho_0$.

Com $0 < \rho < \rho_0$ fixado, encontraremos $\lambda^* > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} &> 0 \\ \iff \lambda c_1\rho^{\alpha+1} &< \frac{1}{2}\rho^2 \\ \iff \lambda < \frac{1}{2c_1}\rho^{1-\alpha} &:= \lambda^*. \end{aligned}$$

Daí, se $0 < \rho \leq \rho_0$ e $0 < \lambda < \lambda^*$ temos $\beta = \frac{1}{2}\rho^2 - \lambda c_1\rho^{\alpha+1} > 0$ e

$$(F(\xi), \xi) \geq \beta - \frac{1}{n}c\rho.$$

Agora, note que

$$\beta - \frac{1}{n}c\rho \geq 0 \iff \beta \geq \frac{1}{n}c\rho \iff n \geq \frac{c\rho}{\beta} = n^*.$$

Assim, $(F(\xi), \xi) \geq 0$, para todo $0 < \lambda < \lambda^*$, $n \geq n^*$ e $|\xi| = \rho \leq \rho_0$.

Dadas estas condições as hipóteses do teorema do Lema 2.2 são satisfeitas. Logo, existe $\varphi_m \in W_m$, com $\varphi_m \subset B_{\rho_0}(0)$ ($B_{\rho_0}(0) = \{\varphi \in W_m; \|\varphi\| \leq \rho_0\}$) tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w dx - \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} w dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx = 0, \forall w \in W_m. \quad (3.3)$$

Como os vetores w_1, \dots, w_m são l.i.'s, segue que para cada m fixo φ_m é solução do problema auxiliar. Além disso, segue que (φ_m) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Então, podemos

extrair uma subsequência, que continuaremos denotando por φ_m , tal que

$$\begin{aligned}\varphi_m &\rightharpoonup \varphi \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ \varphi_m &\rightarrow \varphi \text{ em } L^q(\Omega), \quad 1 < q < 2^*, \quad (\text{Imersão Compacta}) \\ \varphi_m &\rightarrow \varphi \text{ q.t.p em } \Omega.\end{aligned}$$

Observe que, pela construção de W_m , fixado $k \in \mathbb{N}$ temos $W_k \subseteq W_m$, para todo $m \geq k$.

Como $\varphi_m \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω , temos em particular que $\varphi_m^+ \rightarrow \varphi^+$ q.t.p. em Ω . Pela continuidade da aplicação $f(t) = t^{2^*-1}$, temos

$$(\varphi_m^+)^{2^*-1} \rightarrow (\varphi^+)^{2^*-1} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ continuamente segue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |(\varphi_m^+)^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &= \int_{\Omega} (|\varphi_m^+|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} |\varphi_m^+|^{2^*} dx \\ &\leq c \|\varphi_m^+\|^{2^*} \\ &\leq c \rho_0^{2^*}.\end{aligned}$$

Logo, $((\varphi_m^+)^{2^*-1})_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.33 segue que

$$(\varphi_m^+)^{2^*-1} \rightarrow (\varphi^+)^{2^*-1} \text{ fracamente em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{2^*-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} w dx, \quad \forall w \in L^{2^*}(\Omega).$$

Em particular, $\forall w \in W_k \subset H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Seguindo o mesmo raciocínio anterior temos, pela convergência q.t.p. em Ω , pela imersão contínua e pelo Teorema de Riesz que

$$\lambda \int_{\Omega} (\varphi_m^+)^{\alpha} w dx \rightarrow \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx, \quad \forall w \in W_k.$$

Note ainda que pela definição de convergência fraca, escrita via o Teorema de Representação de Riesz, temos

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_m \nabla w dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx, \quad \forall w \in W_k.$$

Mediante as convergências mostradas resulta

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx - \int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} w dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx = 0, \forall w \in W_k. \quad (3.4)$$

Logo, (3.4) vale $\forall v \in \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, mas como $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k} = H_0^1(\Omega)$ segue por densidade e continuidade que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx - \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} w dx - \int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} w dx - \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx = 0, \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (3.5)$$

Note que $\|\varphi\| > 0$. De fato, se $\|\varphi\| = 0$, então $\varphi = 0$ e, de (3.5) temos

$$\frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx = 0, \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

o que é um absurdo.

Agora, mostraremos que $\varphi > 0$. Para tal, considerando $w = \varphi^- \in H_0^1(\Omega)$ como função teste em (3.4), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi^- dx = \lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} \varphi^- dx + \int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} \varphi^- dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- dx, \forall \varphi^- \in H_0^1(\Omega)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \varphi^- dx &= \int_{\Omega} (\nabla \varphi^+ - \nabla \varphi^-) \nabla \varphi^- dx \\ &= \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi^+ \nabla \varphi^- dx - \int_{\Omega} \nabla \varphi^- \nabla \varphi^- dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla \varphi^-|^2 dx \\ &= -\|\varphi^-\|^2. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$\lambda \int_{\Omega} (\varphi^+)^{\alpha} \varphi^- dx = 0,$$

e

$$\int_{\Omega} (\varphi^+)^{2^*-1} \varphi^- dx = 0.$$

Logo

$$\|\varphi^-\|^2 = -\frac{1}{n} \int_{\Omega} \varphi^- dx \leq 0.$$

Em particular temos

$$\|\varphi^-\|^2 \leq 0 \Rightarrow \varphi^- \equiv 0.$$

Logo, $\varphi = \varphi^+ \geq 0$ e $\|\varphi\| > 0$. Assim, temos que φ é solução da equação

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi^\alpha + \varphi^{2^*-1} + \frac{1}{n} \geq 0.$$

Se existir $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, segue dos Teoremas 1.51 e 1.52 que

$$\varphi \equiv \text{constante}.$$

Logo, $\varphi \equiv 0$, o que é um absurdo já que 0 não é solução do nosso problema auxiliar (3.2) e portanto, segue que $\varphi_n = \varphi > 0$ em Ω para cada $n \geq n^*$. Portanto, φ é solução positiva do problema auxiliar.

□

3.3 Prova do Teorema 0.3

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 o problema (3.2) tem uma solução fraca $\varphi_n \in H_0^1(\Omega)$ para cada $n \geq n^*$. Como $0 < \alpha < 1$,

$$\left| \lambda\varphi_n^\alpha + \varphi_n^{2^*-1} + \frac{1}{n} \right| \leq C(1 + |\varphi_n|^{2^*-1}).$$

Pelo Teorema 1.54 e Corolário 1.56, $\varphi_n \in C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, $\varphi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Observe ainda que φ_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_n \geq \lambda\varphi_n^\alpha & \text{em } \Omega, \\ \varphi_n > 0 & \text{em } \Omega \\ \varphi_n = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

e como $\varphi_m \in B_{\rho_0}(0)$ temos em particular que

$$\begin{cases} \|\varphi_m\| \leq \rho_0 \\ \varphi_m \rightharpoonup \varphi_n \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Dáí,

$$\|\varphi_n\| \leq \liminf \|\varphi_m\| \leq \rho_0 \Rightarrow \varphi_n \in B_{\rho_0}(0).$$

onde ρ_0 não depende de n . Assim, existe $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tal que, para alguma subsequência, que continuaremos denotando por (φ_n) temos

$$\varphi_n \rightharpoonup \varphi \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Com isso, podemos extrair uma subsequência de (φ_n) , que continuaremos

denotando por (φ_n) , satisfazendo

$$\begin{aligned}\varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ em } L^q(\Omega), \quad 1 < q < 2^*, \quad (\text{Imersão Compacta}) \\ \varphi_n &\rightarrow \varphi \text{ q.t.p em } \Omega\end{aligned}$$

para algum $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Usando novamente a semicontinuidade inferior da norma, temos que

$$\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\| \leq \rho_0 \Rightarrow \varphi \in B_{\rho_0}(0).$$

Logo, de (3.6) temos que $w_n = \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} \varphi_n$ é uma super solução do problema auxiliar

$$-\Delta v = v^\alpha, \quad v > 0, \quad v = 0 \text{ na } \partial\Omega. \quad (3.7)$$

E, pelo Lema 1.50 temos que $\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} \varphi_n \geq v > 0$, em particular, $\varphi_n \geq \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} v > 0$ e pela da convergência q.t.p. segue que $\varphi \geq \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} v > 0$ q.t.p em Ω .

Provaremos agora que φ é solução de (2.1).

Observe que, como $\varphi_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω segue que

$$\varphi_n^{2^*-1} \rightarrow \varphi^{2^*-1} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

De (3.5) temos que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla w dx = \lambda \int_{\Omega} \varphi_n^\alpha w dx + \int_{\Omega} \varphi_n^{2^*-1} w dx + \frac{1}{n} \int_{\Omega} w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (3.8)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.8) e procedendo de forma similar aos argumentos usados na Seção 2.2, segue da convergência q.t.p em Ω , da limitação de (φ_n) em $H_0^1(\Omega)$, Teorema 1.33 e pelo Teorema de Riesz, que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla w dx &\rightarrow \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla w dx, \\ \int_{\Omega} \varphi_n^{2^*-1} w dx &\rightarrow \int_{\Omega} \varphi^{2^*-1} w dx \text{ e } \int_{\Omega} \varphi_n^\alpha w dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi^\alpha w dx, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

Para facilitar a leitura mostremos que para todo $w \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \varphi_n^{2^*-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi^{2^*-1} w dx \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

De fato, como $\varphi_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω , temos em particular que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ q.t.p. em Ω .

Pela continuidade da aplicação $f(t) = t^{2^*-1}$, temos

$$(\varphi_n)^{2^*-1} \rightarrow (\varphi)^{2^*-1} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ continuamente segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(\varphi_n)^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx &= \int_{\Omega} (|\varphi_n|^{2^*-1})^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} |\varphi_n|^{2^*} dx \\ &\leq c \|\varphi_n\|^{2^*} \\ &\leq c \rho_0^{2^*}. \end{aligned}$$

Logo, $((\varphi_n)^{2^*-1})_{n=1}^{\infty}$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.33 segue que

$$(\varphi_n)^{2^*-1} \rightarrow (\varphi)^{2^*-1} \text{ fracamente em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} (\varphi_n)^{2^*-1} w dx \rightarrow \int_{\Omega} (\varphi)^{2^*-1} w dx, \forall w \in L^{2^*}(\Omega).$$

e em particular, $\forall w \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.

Como $\varphi_n \geq \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} v > 0$, com v sendo solução de (3.7) definido no Lema 1.49, a convergência q.t.p nos garante que $\varphi \geq \lambda^{\frac{1}{\alpha-1}} v > 0$. Concluindo a prova do Teorema 0.3

Logo, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é solução positiva do problema

$$-\Delta \varphi = \lambda \varphi^{\alpha} + \varphi^{2^*-1}.$$

□

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos problemas elípticos não lineares envolvendo os operadores do tipo Kirchhoff e operador Laplaciano, com o objetivo de estudar existência de soluções fracas nos casos críticos e subcríticos.

No caso subcrítico, mostramos a existência de solução fraca para o problema proposto, utilizando o Método de Galerkin juntamente com propriedades de monotonicidade e hemicontinuidade. Neste contexto pelo fato do coeficiente $(M + \|\varphi\|^2)$ estar relacionado à norma do gradiente da solução tivemos que recorrer a ferramentas da Análise Funcional.

Para o caso crítico, analisamos o problema sem o termo do tipo Kirchhoff, pelo fato da perda de compacidade e à recuperação de soluções no espaço original.

Os resultados obtidos evidenciam a importância do Método de Galerkin e de argumentos funcionais alternativos no estudo de equações elípticas não lineares com estrutura não local, contribuindo para a compreensão matemática dessa classe de problemas.

Como perspectivas para trabalhos futuros, destacam-se o estudo do problema supercrítico com operador do tipo Kirchhoff.

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, Robert A. **Sobolev Spaces**. New York: Academic Press, 1975.
- [2] Alves, C. O.; Corrêa, F. J. S. A.; Figueiredo, G. M. **On a class of nonlocal elliptic problems with critical growth**. *Differential Equations and Applications*, v. 2, n. 3, p. 409–417, 2010.
- [3] Alves C. O.; Corrêa, F. J. S. A. **On existence of solutions for a class of problems involving a nonlinear operator**, *Communications on Applied Nonlinear Analysis* 8 (2) (2001) 43–56.
- [4] Alves, C.O.; Corrêa, F.J.S.A.; Ma, T.F. **Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type**, *Comput. Math. Appl.*, 49 (2005), 85–93.
- [5] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. **Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems**. *J. Funct. Anal.* 122 (2), (1994) 519–543.
- [6] Andrade D.; Ma T. F. **An operator equation suggested by a class of nonlinear stationary problems**, *Comm. Appl. Nonl. Anal.* 4 (1997), 65-71.
- [7] Araujo, A. L. A.; Silva, S. L. M. **Navier-Stokes Equations with Variable Viscosity in Nonstationary Form**. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 90, 173–188, 2015.
- [8] Arosio A.; Panizzi S. **On the well-posedness of the Kirchhoff string**, *Trans. Amer. Math. Soc.* 348 (1996) 305-330.
- [9] Brezis, Haim. **Function Analysis, Sobolev Spaces e Partial Differential Equations**. Springer, 2011.
- [10] Brezis, H.; Oswald, L. **obss on sublinear elliptic equations**. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 10, p. 55–64, 1986.
- [11] Cavalcanti, M.M.; Cavalcanti, V.N.D. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2011.
- [12] Ching-yu Chen, Yueh-cheng Kuo, Tsung-fang Wu, **The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions**, *J. Differential Equations* 250 (2011) 1876-1908.

- [13] Chipot, M.; Rodrigues J.F. **On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems**, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér. 26 (1992) 447–467.
- [14] Chipot, M.; Valente V.; Vergara Caffarelli G. **obss on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy**, Rendiconti Sem. Mat. Padova 110 (2003) 199-220.
- [15] Chipot, M.; Lovat B. **Some obss on non local elliptic and parabolic problems**, Nonlinear Anal. 30 (1997) 4619-4627.
- [16] Corrêa, F. J. S., Menezes, S. D., **Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method**, Electron. J. Differential Equations 2004 (2004) 1-10.
- [17] Corrêa, F. J. S. A.; Menezes, S.D.B.; Ferreira, J. **On a class of problems involving a nonlocal operator**, Applied Mathematics and Computation 147 (2004) 475-489.
- [18] Cousins, A.T.; Frota, C.L.; Lar'kin, N.A.; Medeiros, L.A. **On the abstract model of the Kirchhoff-Carrier equation**, Commun. Appl. Anal. 1,389-404, (1997).
- [19] D'Ancona, P.; Spagnolo, S. **Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data**, Invent. Math. 108, 247-262, (1992).
- [20] De Araujo, A. L., **Another approach on an elliptic equation of Kirchhoff type**. Portugaliae Mathematica, 70(1) (2013) 11–22.
- [21] Domingues, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Ed. Atual, 1982.
- [22] Evans, Lawrence C. **Partial Differential Equations**. Berkeley: University of California, 1998.
- [23] Figueiredo, G. M.; Massa, E.; Santos, J. A. **Existence of positive solutions for a class of semipositone problems with Kirchhoff operator**. Annales Fennici Mathematici, 46(2) (2021) 655–666.
- [24] Figueiredo, Giovany M. **Existence of a positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 401, n. 2, p. 706–713, 2013.
- [25] Figueiredo, G. M.; Junior, J. R. S. **Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth**. Differential and Integral Equations, 25(9-10) (2012) 853–868.
- [26] Garcia Azorero, J.; Peral Alonso, I. **Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term**. Transactions of the American Mathematical Society, v. 323, n. 2, p. 877–895, 1991.
- [27] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. 2nd ed. Berlin: Springer, 1977.

- [28] Hewitt, Edwin; Stromberg, Karl. **Real and Abstract Analysis: A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable**. New York: Springer-Verlag, 1963.
- [29] Kajikiya, R. **Comparison theorem and uniqueness of positive solutions for sublinear elliptic equations**. Arch. Math. 91 (2008), 427–435.
- [30] Kavian, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques**. Springer-Verlag, 1993.
- [31] Kesavan, S. **Topics in Functional Analysis and Applications**. Wiley, New York, 1989.
- [32] Kirchhoff, G., “**Mechanik**”, Teubner, Leipzig, 1883.
- [33] Lima, Elon Lages. **Análise Real, Volume 2: Funções de n Variáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [34] Lions, P.-L. **The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case**. Revista Matemática Iberoamericana, v. 1, p. 145–201, 1985.
- [35] Lions, J.L., **On some questions in boundary value problems of mathematical physics**, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro (1977), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284–346.
- [36] Ma, T.F.; Munoz Rivera, J.E. **Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem**, Appl. Math. Lett. 16 (2003) 243–248.
- [37] Ma, T. F.; **obss on an elliptic equation of Kirchhoff type**. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 63(5-7) (2005) 1967–1977.
- [38] Martinez, A.L.M.; Castelani, E. V.; Silva, J. da; Shirabayashi, W.V.I. **A note about positive solutions for an equation of Kirchhoff type**, Applied Mathematics and Computation 218 (2011) 2082-2090.
- [39] Massa, E. **Concave-convex behavior for a Kirchhoff type equation with degenerate nonautonomous coefficient**. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 28(6) (2021) 58.
- [40] Rezende, V. **O Método de Galerkin**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2005.
- [41] SILVA, Rondinei Almeida da, **Uma Análise Matemática de um Sistema Não Isotérmico do Tipo Allen-Cahn**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Viçosa (UFV), 2014.
- [42] Silva, S. L. M. **Equações de Navier–Stokes com viscosidade variável na forma não-estacionária**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Viçosa (UFV), 2013.

- [43] Vasconcellos, C.F. **On a nonlinear stationary problem in unbounded domains**, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 5 (1992) 309-318.