

ALINE VILELA ANDRADE

**TEORIA DE AUSLANDER-REITEN EM CATEGORIAS
DERIVADAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2014**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

A553t Andrade, Aline Vilela, 1988-
2014 Teoria de Auslander Reiten em categorias derivadas / Aline
Vilela Andrade. – Viçosa, MG, 2014.
v, 56f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Rogério Carvalho Picanço.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.55-56.

1. Modelos matemáticos. 2. Teoria de Auslander-Reiten -
Modelos matemáticos. 3. Categoria derivada. 4. Triângulo de
Auslander-Reiten. 5. Sequência de Auslander-Reiten.
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 519.2

ALINE VILELA ANDRADE

**TEORIA DE AUSLANDER-REITEN EM CATEGORIA
DERIVADA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 14 de fevereiro de 2014.

Edson Ribeiro Alvares

Lia Feital Fusaro Abrantes

Rogério Carvalho Picanço
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente à Deus por me dar força, amparo e determinação nas horas difíceis desta caminhada.

Aos meus pais Marilda e João Carlos, às minhas irmãs Amanda e Anna Caroline e ao meu afilhado Bernardo pelos sorrisos nos momentos de vitória e pelo colo nas derrotas. À minha vó Marcela, obrigada por ser minha "cúmplice" e sempre estar ao meu lado, mesmo que distante. Sem o carinho e o apoio de vocês eu jamais conseguiria.

À Sabrina, Anna Paula e Renata, vocês fizeram parte de toda esta caminhada, me ajudaram a crescer e foram a minha fortaleza, foram e são a minha família do coração. Muito obrigada por tornar esta caminhada tão divertida!!!

Aos amigos do mestrado, Luiz Henrique, Carlos, Priscila, Serginei, Thiago, Filipe, Renno, Rondinei, Samara, Guemael, Maísa, Robledo, Gustavo, Alana N., Alana C., Michely, Michele, Victor, Lívia, Gleisiane, Anderson e Ygor. Foram duras as pedras no caminho, mas nós sempre conseguimos encontrar uma maneira de rir da situação ou de nós mesmos. Que estas amizades perdurem!!!

Ao meu orientador, Rogério, obrigada pela confiança, pela paciência, pelos ensinamentos e pelo exemplo de profissional.

Ao corpo docente e à Coordenação do programa, pelos ensinamentos e oportunidades.

Aos membros da banca, pela atenção dispensada à este trabalho.

Ao João Marcos, pelas palavras de incentivo e por estar sempre disposto à ajudar.

À Capes, pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

RESUMO	iv
ABSTRACT	v
INTRODUÇÃO	1
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Categorias e Funtores	3
1.1.1 Categorias	3
1.1.2 Categorias Aditivas	7
1.1.3 Categorias Abelianas	10
1.1.4 Categoria Quociente	12
1.1.5 Funtores	13
1.2 Álgebras e Módulos	16
2 Categoria Derivada	21
2.1 Categoria de complexos de módulos	21
3 Categorias Trianguladas	27
3.1 Categorias Trianguladas	27
3.2 Categorias de Frobenius	31
3.2.1 Categorias exatas	31
4 Teoria de Auslander-Reiten	37
4.1 Teoria de Auslander-Reiten na categoria de módulos	37
4.2 Teoria de Auslander-Reiten em categorias derivadas	42
4.2.1 Existência de triângulos de Auslander-Reiten em categorias trianguladas compactamente geradas via Representabilidade de Brown	46
4.2.2 Caracterização de triângulos de Auslander-Reiten em $D^b(\Lambda)$	48
4.3 De volta às Sequências de Auslander-Reiten	51
Referências Bibliográficas	55

RESUMO

ANDRADE, Aline Vilela, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2014. **Teoria de Auslander-Reiten em Categorias Derivadas**. Orientador: Rogério Carvalho Picanço.

Neste trabalho, apresentamos uma prova da existência de triângulos de Auslander-Reiten(TAR) para objetos compactos em categorias trianguladas compactamente geradas. A prova apresentada é uma aplicação do Teorema da Representabilidade de Brown em categorias derivadas para complexos compactos, ou seja, dado Z um complexo compacto e indecomponível, mostramos que existe um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ de Auslander-Reiten em $K^{-,b}(\Lambda)$ que é equivalente à $D^b(\Lambda)$, onde Λ é uma k -álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Além disso, temos que um triângulo de Auslander-Reiten que começa com a resolução projetiva de um módulo indecomponível não-injetivo

$$T^{-1}\mathbf{p}M \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} (\mathbf{p}DM)^* \xrightarrow{\gamma} \mathbf{p}M$$

induz uma sequência de Auslander-Reiten(SAR)

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\alpha^1}} \text{Cok}^1(Y) \xrightarrow{\overline{\beta^1}} \text{Tr } DM \longrightarrow 0.$$

Como $\text{Mod}(\Lambda)$ e $D(\Lambda)$ são Krull-Remak-Schmidt, e as classes de objetos indecomponíveis e os geradores de morfismos irredutíveis destas categorias ocorrem nas SAR's e nos TAR's, respectivamente, estes resultados nos fornecem uma hábil ferramenta para conhecer as estruturas de $\text{Mod}(\Lambda)$ e $D(\Lambda)$ de k -álgebras.

Além disso, apresentamos exemplos utilizando a teoria de representação de quivers de uma álgebra de caminhos.

ABSTRACT

ANDRADE, Aline Vilela, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february, 2014.
Auslander-Reiten theory in derived categories. Adviser: Rogério Carvalho Picanço.

In this paper, we prove the existence of Auslander-Reiten triangles (TAR) for compact objects in triangulated categories compactly generated. The prove presented is an application of the theorem of Brown representability in derived categories for compact complex, ie, given Z be a compact and indecomposable complex, we show that there is a Auslander-Reiten triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ in $K^b(\Lambda - \text{proj})$ which is equivalent to $D(\Lambda)$, where Λ is a finite-dimensional κ -algebra over an algebraically closed field. Furthermore, we have that a triangle Auslander-Reiten which start with the projective resolution of a indecomposable and non-injective module

$$T^{-1}\mathbf{p}M \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} (\mathbf{p}DM)^* \xrightarrow{\gamma} \mathbf{p}M$$

induces an Auslander-Reiten sequence(SAR)

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\alpha^1}} \text{Cok}^1(Y) \xrightarrow{\overline{\beta^1}} \text{Tr } DM \longrightarrow 0.$$

How $\text{Mod}(\Lambda)$ and $D(\Lambda)$ are Krull-Schmidt, and classes of indecomposable objects and generators of irreducible morphisms of these categories occur in the SAR's and TAR's, respectively, these results provide us with a skillful tool to know the structures $\text{Mod}(\Lambda)$ and $D(\Lambda)$ of k -algebras.

Moreover, we present examples using the representation theory of quivers of an algebra of paths.

INTRODUÇÃO

A Categoria Derivada foi introduzida por Jean-Louis Verdier em sua tese [25] sob a supervisão de Alexandre Grothendieck. Originalmente ela foi utilizada para estender a dualidade de Serre. Dada uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, a sua categoria derivada $D(\mathcal{A})$ é obtida através da localização da categoria de complexos de módulos $C(\mathcal{A})$ por quasi-isomorfismos, isto é, sob o funtor de localização $Q : C(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{A})$, os quasi-isomorfismos de $C(\mathcal{A})$ se tornam isomorfismos em $D(\mathcal{A})$ e esta propriedade é universal. Além disso, $D(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

A teoria de Auslander-Reiten para a categoria de $\mathcal{A}$ -módulos desenvolvida por Maurice Auslander e Idun Reiten em [3] é uma ferramenta importante no estudo dos objetos indecomponíveis e dos geradores de morfismos irredutíveis de tal categoria, uma vez que tais elementos são encontrados nas conhecidas sequências de Auslander-Reiten (SAR). Dieter Happel desenvolveu em $D^b(\mathcal{A})$ uma teoria semelhante, também conhecida como teoria de Auslander-Reiten, na qual o papel das SAR é substituído por uma classe de triângulos distinguidos, conhecidos como triângulos de Auslander-Reiten (TAR).

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar a existência de TAR em $D^b(\mathcal{A})$ e mostrar a relação de alguns destes triângulos com SAR em $\text{Mod}(\mathcal{A})$.

À seguir, apresentamos uma breve descrição dos capítulos desta dissertação.

No capítulo 1 são apresentados alguns conceitos básicos necessários para o entendimento desta dissertação. Neste capítulo definimos categorias e listamos algumas categorias importantes vistas ao longo do texto. Além disso, são apresentados alguns resultados importantes acerca de funtores, álgebras e módulos.

No capítulo 2 apresentamos a categoria derivada $D(\Lambda)$ da categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ de uma κ -álgebra Λ de dimensão finita. Primeiramente apresentamos as categorias $C(\Lambda)$ de complexos de Λ -módulos e a categoria homotópica $K(\Lambda)$. Depois construímos $D(\Lambda)$ através da localização de $K(\Lambda)$ por quasi-isomorfismos.

O capítulo 3 traz na seção 3.1 alguns resultados em categorias trianguladas. Já na seção 3.2 conhecemos as categorias de Frobenius que são um exemplo de categorias trianguladas. No exemplo do final do capítulo vimos que $C^b(\Lambda)$ é Frobenius e que sua categoria estável é equivalente à $K^b(\Lambda)$. E ainda, vimos que $D^b(\Lambda)$ é

triângulo equivalente à $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$ e $K^{+,b}(\text{inj}(\Lambda))$.

Finalmente no capítulo 4 apresentamos a teoria de Auslander-Reiten na categoria $\text{Mod}(\Lambda)$, demonstramos a existência de TAR em categorias trianguladas compactamente geradas utilizando o teorema da representabilidade de Brown. Depois utilizando a equivalência entre $D^b(\Lambda)$ e $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$, e o fato desta última ser triangulada e compactamente gerada mostramos que existem TAR em $D^b(\Lambda)$ e caracterizamos tais triângulos. Além disso, mostramos a relação de alguns TAR em $D^b(\Lambda)$ com SAR em $\text{Mod}(\Lambda)$. Para finalizar apresentamos alguns exemplos para ilustrar a teoria abordada no trabalho.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados preliminares e fixaremos algumas notações. As demonstrações deste capítulo serão omitidas, mas são encontradas em [1], [2] e [19].

1.1 Categorias e Funtores

Nesta seção abordaremos brevemente a linguagem de categorias e funtores, uma vez que aquela fornece uma linguagem geral para diferentes conceitos que serão abordados ao longo deste texto.

1.1.1 Categorias

Definição 1.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

(i) *Uma classe de objetos $Ob \mathcal{C}$;*

(ii) *Para todo par de objetos (A, B) , denotamos por $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o conjunto cujos elementos são chamados de morfismos e representados por $A \longrightarrow B$;*

(iii) *Para todo $A, B, C \in Ob \mathcal{C}$, temos uma composição*

$$\begin{array}{ccc} \circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

Satisfazendo:

(C1) *Se $(A, B) \neq (C, D)$ então $Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$, ou seja, cada morfismo determina seu início e seu final;*

(C2) *A composição de morfismos é associativa;*

(C3) *Para todo objeto A , existe $1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$, chamado **morfismo unidade ou identidade**, tal que, $f \circ 1_A = f$ e $1_A \circ g = g$ para quaisquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$. O morfismo 1_A é único.*

Observações: 1) Denotaremos $f \circ g$ por fg .

2) Denotaremos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ por $\text{Hom}(A, B)$, quando não houver dúvidas a respeito da categoria $\mathcal{C}$ a qual os objetos A e B pertencem.

Alguns exemplos de categorias estão listados à seguir:

Exemplos: 1) A categoria **Sets** cujos objetos são conjuntos e os morfismos são as funções entre conjuntos. A composição de morfismos é a composição de funções e os morfismos identidade são as funções identidade de cada conjunto;

2) Seja $\mathcal{A}$ um conjunto parcialmente ordenado. Então $\mathcal{A}$ é uma categoria, onde os objetos são os elementos do conjunto $\mathcal{A}$ e os morfismos entre objetos $a, b \in \mathcal{A}$ são definidos por $a \longrightarrow b$ se $a \leq b$ e $\emptyset$ caso contrário.

3) Seja κ um corpo. A categoria **Vec** $_{\kappa}$ cujos objetos são κ -espaços vetoriais e os morfismos são as transformações lineares. A composição de morfismos é a composição de aplicações e os morfismos identidade são as transformações identidade de cada κ -espaço vetorial.

4) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A **categoria oposta** de uma categoria $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^{op}$, é definida por: $Ob \mathcal{C}^{op} = Ob \mathcal{C}$ e os morfismos em $\mathcal{C}^{op}$ são obtidos pela inversão das setas nos morfismos de $\mathcal{C}$ e a composição é definida da maneira esperada.

Em Teoria de Categorias, um **diagrama** em uma categoria $\mathcal{C}$ é um grafo cujos vértices são objetos da categoria $\mathcal{C}$ e as flechas representam morfismos em $\mathcal{C}$, onde as composições são omitidas. Por exemplo, dado $X \in Ob \mathcal{C}$, representaremos o morfismo identidade como o diagrama $1_X : X \longrightarrow X$ ou apenas como $X \longequal{\quad} X$. Um diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

é dito **comutativo** se $fg = hk$.

Dado um determinado conceito em uma categoria $\mathcal{C}$, obtemos o seu conceito **dual**, na categoria $\mathcal{C}^{op}$, invertendo-se as setas do diagrama. Em outras palavras refletindo o diagrama da definição em um espelho obtemos o conceito dual.

Definição 1.2 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Uma categoria $\mathcal{C}'$ é uma **subcategoria** de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *A classe $Ob \mathcal{C}'$ de objetos de $\mathcal{C}'$ é uma subclasse da classe $Ob \mathcal{C}$ de objetos de $\mathcal{C}$;*

(ii) Se X e Y são objetos de $\mathcal{C}'$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;

(iii) A composição de morfismos em $\mathcal{C}'$ é a restrição da composição de $\mathcal{C}$;

(iv) Para cada objeto X de $\mathcal{C}'$, o morfismo identidade $1'_X$ em $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ coincide com o morfismo identidade 1_X em $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Uma subcategoria $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ é dita **completa** se $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathcal{C}'$.

Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é dito um **monomorfismo** (ou mono), se é cancelável à direita, ou seja, se $g_1, g_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ são tais que $g_1 f = g_2 f$, então $g_1 = g_2$. Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é dito um **epimorfismo** (ou epi), se é cancelável à esquerda, ou seja, se $h_1, h_2 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, D)$ são tais que $f h_1 = f h_2$, então $h_1 = h_2$. Em uma categoria $\mathcal{C}$ um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é dito um **isomorfismo** se existe um morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $fg = 1_A$ e $gf = 1_B$. Dois objetos $A, B \in \mathcal{C}$ são ditos **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles, denotamos $A \cong B$. Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ é dito um **endomorfismo** de A e denotamos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) = \text{End}_{\mathcal{C}}(A)$.

É fácil ver que todo isomorfismo é mono e epi. Porém existem categorias onde morfismos que são mono e epi não são isomorfismos. Por exemplo, na categoria formada por dois objetos distintos a e b , o morfismo identidade, e um único morfismo $A \xrightarrow{f} B$, f é mono e epi, porém não é um isomorfismo.

Definição 1.3 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $P \in \text{Ob } \mathcal{C}$ é **projetivo** se para qualquer epimorfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e para todo morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, B)$, existe $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, A)$ tal que $g = g'f$, ou seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow g' & \downarrow g & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De maneira dual definimos o objeto **injetivo** em uma categoria.

Exemplo: Em Vec_{κ} todo espaço vetorial é projetivo (e injetivo).

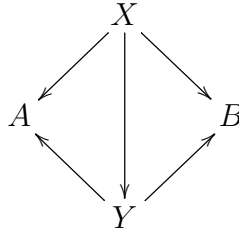
Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto $A \in \mathcal{C}$ é dito **inicial** se para todo objeto $B \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $A \longrightarrow B$. O conceito dual é dito objeto **final**. Se em uma categoria um objeto é final e inicial ele é dito **objeto zero ou nulo** e denotado por 0 . E mais, pelas definições de objeto final e inicial, o objeto nulo,

quando existe, é único, a menos de isomorfismo.

Exemplos: 1) Em $\mathbf{Sets}$, todo conjunto com um único elemento é um objeto final, mas não é inicial.

2) Em $\mathbf{Vec}_\kappa$, os conjuntos formados por objetos nulos são iniciais e finais.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e sejam $A, B \in \mathcal{C}$. Vamos definir uma nova categoria, denotada por $A \longleftarrow \mathcal{C} \longrightarrow B$, onde os objetos são $A \longleftarrow X \longrightarrow B$, com $X \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $A \longleftarrow X \longrightarrow B$ para $A \longleftarrow Y \longrightarrow B$ é um morfismo $X \longrightarrow Y$ tal que o diagrama à seguir é comutativo:



Um objeto final de $A \longleftarrow \mathcal{C} \longrightarrow B$, quando existe, é dito **produto** de A e B em $\mathcal{C}$ e denotado por $A \times B$. O conceito dual é denominado **coproduto** e denotado por $A \sqcup B$.

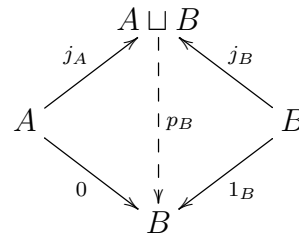
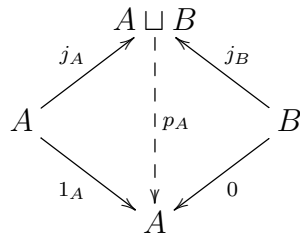
Seja $\mathcal{C}$ uma categoria que possui objeto nulo e sejam $A, B \in \mathcal{C}$. Suponhamos que existam o coproduto

$$A \xrightarrow{j_A} A \sqcup B \xleftarrow{j_B} B$$

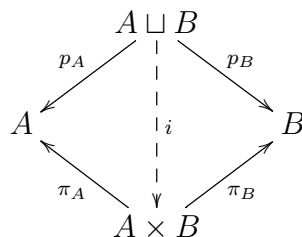
e o produto

$$A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B.$$

Então os diagramas abaixo produzem os morfismos p_A e p_B satisfazendo as igualdades $j_A \circ p_A = 1_A$, $j_B \circ p_A = 0$, $j_A \circ p_B = 0$ e $j_B \circ p_B = 1_B$



Pela propriedade universal do produto, obtemos $i : A \sqcup B \longrightarrow A \times B$ tal que o diagrama à seguir é comutativo:



ou seja, $i \circ \pi_A = p_A$ e $i \circ \pi_B = p_B$. Se i indicado é um isomorfismo, então dizemos que $A, B \in \mathcal{C}$ possuem **soma direta (ou biproduto)**. Identificamos p_A por π_A , p_B por π_B e assim é fácil verificar as seguintes relações $j_A \circ \pi_A = 1_A$, $j_B \circ \pi_A = 0$, $j_A \circ \pi_B = 0$, $j_B \circ \pi_B = 1_B$, $\pi_A \circ j_A + \pi_B \circ j_B = 1_{A \times B}$.

A última igualdade é válida pelas propriedades de produto $A \times B$ [1]. Reciprocamente, podemos verificar que morfismos j_A , j_B , π_A e π_B satisfazendo as relações acima definem uma soma direta.

De forma geral, podemos definir a soma direta de qualquer coleção de objetos. Vamos denotar a soma direta de uma coleção $(X_i, i \in I)$ por $\oplus_{i \in I} X_i$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathcal{C}$. Vamos definir a categoria $\mathcal{C} \longrightarrow X$, cujos objetos são os morfismos $\alpha : Y \longrightarrow X$ com $Y \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $\alpha : Y \longrightarrow X$ para $\beta : Z \longrightarrow X$ em $\mathcal{C} \longrightarrow X$ é um morfismo em $\gamma : Y \longrightarrow Z$ tal que o diagrama à seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\gamma} & Z \\ & \searrow \alpha & \swarrow \beta \\ & X & \end{array}$$

O produto de dois objetos $\alpha : Y \longrightarrow X$ e $\beta : Z \longrightarrow X$ nesta categoria, quando existe, é dito **Produto Fibrado ou Pullback** e denotado $Y \oplus_X Z$. É fácil verificar que o pullback entre α e β é dado pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} W & & & & \\ & \searrow t & \xrightarrow{h} & & \\ & & Y \oplus_X Z & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow k & \downarrow v & & \downarrow \alpha \\ & & Z & \xrightarrow{\beta} & X \end{array}$$

satisfazendo a propriedade universal de que para quaisquer h, k tais que $h\beta = k\alpha$, existe uma única $t : W \longrightarrow Y \oplus_X Z$ tal que $tv = k$ e $tu = h$.

O conceito dual é dito **Soma Amalgamada ou Pushout** e denotado $Y \oplus^X Z$.

1.1.2 Categorias Aditivas

Definição 1.4 Uma categoria $\mathcal{C}$ é **aditiva** se verifica as seguintes condições:

(i) Possui objeto nulo 0 ;

(ii) Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ temos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo abeliano tal que a composição satisfaz

$$f(g + h) = fg + fh$$

$$(g + h)f = gf + hf$$

(iii) Dados $X, Y \in \mathcal{C}$ existe o biproduto $X \oplus Y$.

Definição 1.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Um objeto não nulo $A \in \mathcal{C}$ é dito **indecomponível** se qualquer decomposição $A = X \oplus Y$, implica que ou X ou Y é o objeto nulo. Dizemos que um objeto A é **decomponível** se este não for indecomponível.*

Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita **Krull-Remak-Schmidt (KRS)** se todo objeto $X \in \mathcal{C}$ tem uma decomposição

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_m,$$

onde $X_1, \dots, X_m$ são objetos indecomponíveis. E tal decomposição é única, a menos de permutação de índices e de isomorfismos.

Exemplos: Na categoria Vec_κ os objetos indecomponíveis são os espaços vetoriais de dimensão 1. A categoria Vec_κ é Krull-Remak-Schmidt.

Exceto quando especificado o contrário, as categorias deste trabalho são Krull-Remak-Schmidt.

Definição 1.6 *Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é uma **seção** (respectivamente **retração**) se existe um morfismo $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $fg = 1_A$ (respectivamente $gf = 1_B$).*

Verifica-se que se f é seção (respectivamente retração) então f é mono (respectivamente epi).

Definição 1.7 *Sejam $A, B, C \in \mathcal{C}$.*

(i) *Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ **quase cinde à esquerda (q.c.e.)** se:*

a) *f não é seção;*

b) *todo morfismo $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ que não é seção é fatorado por f , ou seja, existe $u' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ tal que $fu' = u$.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \nearrow u' & \\ C & & \end{array}$$

(ii) *Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ **quase cinde à direita (q.c.d.)** se:*

a) f não é retração;

b) todo morfismo $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$ que não é retração é fatorado por f , ou seja, existe $v' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ tal que $v'f = v$.

Pelo lema à seguir, cuja demonstração para encontra-se em [1]¹, os morfismos que quase cindem estão intimamente ligados com objetos indecomponíveis.

Lema 1.8 *Seja $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

(i) *Se f quase cinde à esquerda, então o objeto A é indecomponível;*

(ii) *Se f quase cinde à direita, então o objeto B é indecomponível.*

Definição 1.9 *Sejam $A, B \in \mathcal{C}$.*

(i) *Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é **minimal à esquerda** se todo $h \in \text{End}(B)$ tal que $fh = f$ é um isomorfismo;*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & B \end{array}$$

(ii) *Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é **minimal à direita** se todo $k \in \text{End}(A)$ tal que $kf = f$ é um isomorfismo.*

Conforme a proposição à seguir, cuja demonstração encontra-se em [1]², os morfismos minimais que quase cindem determinam unicamente os extremos das setas.

Proposição 1.10 (i) *Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B')$ são minimais que quase cindem à esquerda, então existe um isomorfismo $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$ tal que $fh = f'$;*

(ii) *Se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B)$ são minimais que quase cindem à direita, então existe um isomorfismo $k \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$ tal que $kf' = f$.*

Como vimos, numa categoria KRS todo objeto se decompõe em objetos indecomponíveis. Esta decomposição permite limitar o estudo dos objetos de uma categoria aos objetos indecomponíveis. No caso dos morfismos, um papel similar (mas não igual) é desempenhado pelos morfismos irreduzíveis.

¹A demonstração em questão é feita para a categoria de módulos, a demonstração para uma categoria aditiva qualquer é semelhante.

²A demonstração em questão é feita para a categoria de módulos, a demonstração para uma categoria aditiva qualquer é semelhante.

Definição 1.11 Um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é dito **irredutível** se:

(i) f não é seção e nem retração;

(ii) se $f = f_1 f_2$, então f_1 é seção ou f_2 é retração.

1.1.3 Categorias Abelianas

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Definimos a categoria $\mathcal{C} \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$, cujos objetos são os morfismos $h : Z \longrightarrow X$ com $Z \in \mathcal{C}$, tais que $hf = 0$ e um morfismo entre $h : Z \longrightarrow X$ e $g : Z' \longrightarrow X$ é $k : Z \longrightarrow Z'$ tal que $kg = h$. O objeto final desta categoria, quando existe, é dito **kernel de f** e denotado por $\ker(f) : \ker(f) \xrightarrow{h} X$. De maneira dual, definimos o **cokernel de f** , denotado por $\text{coker}(f)$. É fácil ver que $\ker(f)$ é mono e $\text{coker}(f)$ é epi.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva onde todo morfismo tem núcleo e conúcleo. Dado um morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ temos o seguinte diagrama

$$\text{Ker } f \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{c} \text{CoKer } f$$

com k e c morfismos em $\mathcal{C}$. Assim existem $\text{CoKer } k$ e $\text{Ker } c$ e obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \text{CoKer } f \\ & & \downarrow u & & \uparrow v & & \\ & & \text{CoKer } k & & \text{Ker } c & & \end{array}$$

Como $kf = 0$ e u é cokernel de k , existe $h : \text{CoKer } k \longrightarrow Y$ tal que $uh = f$. Assim, $fc = 0$ implica em $uhc = 0$ e como u é epi, temos $hc = 0$. Como v é kernel de c existe $j : \text{CoKer } k \longrightarrow \text{Ker } c$ tal que $jv = h$. Obtemos então o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{c} & \text{CoKer } f \\ & & \downarrow u & \nearrow h & \uparrow v & & \\ & & \text{CoKer } k & \xrightarrow{j} & \text{Ker } c & & \end{array}$$

que é comutativo. O cokernel de k é também conhecido como **co-imagem de f** e o kernel de c é a **imagem de f** .

Definição 1.12 Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita uma categoria **abeliana** se todo morfismo tem núcleo e conúcleo e o morfismo j do diagrama acima é isomorfismo.

Pela definição, numa categoria abeliana temos a imagem isomorfa à coimagem para qualquer morfismo f . Existem exemplos onde j é mono e epi, mas não é isomorfismo, neste caso a categoria é dita **pré-abeliana** [13].

Exemplo: As categorias de grupos abelianos e de espaços vetoriais são categorias abelianas. Nestes casos o isomorfismo j é dado pelo **Teorema do Isomorfismo**.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana.

Definição 1.13 *Uma sequência*

$$\cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

(finita ou infinita) de objetos em $\mathcal{C}$ é dita **exata no nível n** se $\text{Im}(f_{n-1}) = \ker(f_n)$ e **exata** se é exata para todo n . Em particular,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

é chamada **sequência exata curta** se f é mono, g é epi e $\text{Im}(f) = \ker(g)$

Dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ em $\mathcal{C}$, se g é uma retração ou f é um seção, então $B \cong A \oplus C$. E neste caso dizemos que a sequência **cinde**.

Definição 1.14 *Seja X um objeto em $\mathcal{C}$, uma categoria abeliana.*

i) Um objeto $A \in \mathcal{C}$ é dito **supérfluo** em X , se para todo objeto $B \in \mathcal{C}$, tal que $A \oplus B = X$, temos $B = X$.

ii) Um epimorfismo $h : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ é **minimal** se $\ker(h)$ é *supérfluo* em X .

iii) Um epimorfismo $h : P \longrightarrow X$ em $\mathcal{C}$ é chamado de **cobertura projetiva de X** se P é um objeto projetivo e h é epimorfismo minimal.

Definição 1.15 *Seja X um objeto em $\mathcal{C}$. Dizemos que X possui uma **resolução projetiva** se existe uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0$$

onde $p_0 : P_0 \longrightarrow X$ é epimorfismo, os objetos P_i são projetivos para todo $i \geq 0$. A sequência

$$\mathbf{p}X : \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \longrightarrow 0$$

é chamada **resolução projetiva de X** .

Uma sequência exata

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0$$

em $\mathcal{C}$ é chamada uma **apresentação projetiva minimal de X** se $P_0 \xrightarrow{p_0} X$ e $P_1 \xrightarrow{p_1} \ker(p_0)$ são coberturas projetivas. Uma sequência exata

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0$$

em $\mathcal{C}$ é chamada de **resolução projetiva minimal de X** se $P_i \xrightarrow{p_i} \text{Im}(P_i)$ são coberturas projetivas para todo $i \geq 1$ e $P_0 \xrightarrow{p_0} X$ é uma cobertura projetiva. Dualmente, definimos **envolvente, apresentação e resolução injetiva** de um objeto $X \in \mathcal{C}$.

Lema 1.16 *Seja $M \in \text{Mod}(\Lambda)$ um módulo finitamente apresentável. Então M admite uma resolução projetiva minimal*

$$\dots \longrightarrow P^2 \xrightarrow{\mu^2} P^1 \xrightarrow{\mu^1} P^0 \longrightarrow 0$$

onde P_i é finitamente gerado, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Um resultado importante acerca de seqüências exatas curtas é visto à seguir.

Proposição 1.17 *Seja*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta em $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana.

(i) *Dado um morfismo $v \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V, N)$ existe um diagrama comutativo de linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{r} & V' & \xrightarrow{v'} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow g' & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se, e somente se, V' é o pull-back de $M \xrightarrow{g} N \xleftarrow{v} V$.

(ii) *Dado um morfismo $u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, U)$ existe um diagrama comutativo de linhas exatas:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow f' & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{u'} & U' & \xrightarrow{t} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

se, e somente se, U' é o push-out de $U \xleftarrow{u} L \xrightarrow{f} M$.

Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [2], página 75.

1.1.4 Categoria Quociente

Nesta seção vamos introduzir a noção de radical de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$, uma vez que o mesmo e suas potências fornecem importantes ferramentas para descrever a estrutura de uma categoria KRS.

Definição 1.18 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Uma classe $\mathcal{I}$ de morfismos de $\mathcal{C}$ é um **ideal bilateral** em $\mathcal{C}$ se $\mathcal{I}$ possui as seguintes propriedades:*

(i) *para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, $\mathcal{I}(A, B) = \mathcal{I} \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um subgrupo de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

(ii) *se $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathcal{I}(B, C)$ e $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$, então $fgh \in \mathcal{I}(A, D)$.*

Definimos a **categoria quociente** $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ e o espaço de morfismos entre os objetos A e B é dado pelo espaço quociente:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(A, B) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)}{\mathcal{I}(A, B)}$$

onde $\mathcal{I}(A, B)$ representa os morfismos de $\mathcal{C}$ no ideal $\mathcal{I}$.

Definição 1.19 (i) *O **radical** (de Jacobson) de uma κ -categoria $\mathcal{C}$ é um ideal bilateral em $\mathcal{C}$ denotado por $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ e definido como à seguir:*

$$\text{rad}_{\mathcal{C}}(A, B) = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B); 1_A - fg \text{ é invertível para qualquer } g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)\}$$

para quaisquer objetos $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$;

(ii) *Dado $m \geq 1$, nós definimos por: $\text{rad}_{\mathcal{C}}^m(A, B)$ como o subespaço de $\text{rad}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gerado por todos os morfismos f da forma*

$$A = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_m} X_m = B$$

f

onde $f_i \in \text{rad}_{\mathcal{C}}(X_{i-1}, X_i)$ com $i \in \{1, \dots, m\}$.

Observação: Se X e Y são objetos indecomponíveis, então $\text{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ consiste em todos os morfismos não invertíveis de X para Y .

1.1.5 Funtores

Um functor **covariante** (respectivamente **contravariante**) $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de uma categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{C}'$ é definido atribuindo a cada objeto X de $\mathcal{C}$ um objeto $T(X)$ de $\mathcal{C}'$ e cada morfismo $h : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ um morfismo

$T(h) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ (respectivamente $T(h) : T(Y) \longrightarrow T(X)$) em $\mathcal{C}'$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo objeto X de $\mathcal{C}$ temos $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

(ii) Para todo par de morfismos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ na categoria $\mathcal{C}$, temos $T(fg) = T(f)T(g)$ (respectivamente $T(fg) = T(g)T(f)$).

Exemplos: Dois funtores importantes são os **funtores representativos**

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$, que são, respectivamente covariante e contravariante.

Sejam $T, T' : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ funtores covariantes. Uma **transformação natural** entre T e T' é uma família $\eta_{\bullet} = \{\eta_X; X \in \mathcal{C}\}$ de morfismos $\eta_X : T(X) \longrightarrow T'(X)$ tal que, para qualquer morfismo $f : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{C}$ o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_X} & T'(X) \\ T(f) \downarrow & & \downarrow T'(f) \\ T(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & T'(Y) \end{array}$$

em $\mathcal{C}'$ é comutativo. De forma dual definimos transformação natural entre funtores contravariantes. Com isto obtemos a **categoria de funtores** $\mathfrak{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$, onde os objetos são os funtores de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}'$ e os morfismos são as transformações naturais.

Observe que $\eta_{\bullet}$ é uma **equivalência natural** de funtores se, para qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$, o morfismo $\eta_X : T(X) \longrightarrow T'(X)$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}'$.

Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma **equivalência de categorias** se existe um funtor $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos funtoriais

$$\eta_{\bullet} : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cong} TF \quad \text{e} \quad \Phi_{\bullet} : 1_{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\cong} FT$$

onde $1_{\mathcal{C}'}$ e $1_{\mathcal{C}}$ são funtores identidade em $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$, respectivamente. Nesse caso, o funtor F é chamado **quase inverso** de T .

Se existe uma equivalência $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ de categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, então dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são **categorias equivalentes**, e escrevemos $\mathcal{C} \sim \mathcal{C}'$.

A equivalência entre duas categorias nem sempre é fácil de ser mostrada, uma vez que em alguns casos é difícil encontrar o funtor quase inverso. Vamos introduzir alguns conceitos, afim de tornar a caracterização de equivalência entre categorias um pouco mais simples.

Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é **denso** se, para qualquer objeto A de $\mathcal{C}'$, existe um objeto C em $\mathcal{C}$ tal que $T(C)$ é isomorfo a A , ou seja, $T(C) \cong A$.

Dizemos que um funtor covariante T é **pleno** (respectivamente **fiel**), se a aplicação

$$\begin{array}{ccc} T_{AB} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(A), T(B)) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$$

é sobrejetora (respectivamente injetora), para todos objetos A e B de $\mathcal{C}$.

Lema 1.20 *Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, T é denso, pleno e fiel.*

Um funtor contravariante $D : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$ é uma equivalência entre categorias se induz um funtor covariante $D : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ que é uma equivalência entre categorias, neste caso D é dito uma **dualidade**.

Exemplo: Seja κ um corpo. Um importante exemplo de dualidade é a **dualidade standard** $D = \text{Hom}_\kappa(-, \kappa) : \text{Mod } \Lambda \longrightarrow \text{Mod } \Lambda^{op}$, onde $\text{Mod } \Lambda$ é a categoria de Λ -módulos de uma κ -álgebra que serão definidos na próxima seção.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva, dizemos que um funtor T é **aditivo** se preserva somas diretas, e, para quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$, o funtor T_{AB} satisfaz $T(f + g) = T(f) + T(g)$, para quaisquer $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Ab})$ a categoria de funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ em Ab . Dado $X \in \mathcal{C}$ vimos que o funtor representativo $\text{Hom}(-, X) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Ab})$. Um importante teorema, conhecido na literatura como **Lema de Yoneda**, permite parametrizar, de forma natural, as transformações naturais de um funtor $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Sets})$ pelos funtores representativos.

Lema 1.21 (Lema de Yoneda): *Sejam F um funtor contravariante em $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Sets})$, $X \in \mathcal{C}$. Então*

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathcal{N}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y), F) & \rightarrow & FX \\ \phi & \mapsto & \phi_X(1_X) \end{array}$$

define uma bijeção. Em outras palavras, temos

$$\mathcal{N}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F) \cong FX.$$

Claramente, para cada transformação natural $\phi : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \longrightarrow F$, temos $\phi_X(1_X) \in FX$, então π define um morfismo entre $\mathcal{N}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y), F)$ e FX . Uma idéia da demonstração é contruir sua inversa $\sigma : FX \longrightarrow \mathcal{N}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), F)$. Sejam $z \in FX$ e $Y \in \mathcal{C}$. Vamos definir a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \sigma(z)_Y : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) & \rightarrow & FY \\ f & \mapsto & \sigma(z)_Y = F(f)(z) \end{array}$$

para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. É fácil verificar que $\sigma(z) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \longrightarrow F$ é um morfismo funtorial e que π e σ são mutuamente inversas.

Em particular, para todo $Y \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{N}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

O lema de Yoneda permite identificar a categoria $\mathcal{C}$ imersa na categoria de funtores contravariantes $\mathfrak{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Ab})$ pela identificação $X \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$. De fato, o lema mostra que o funtor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{C}^{op}, \text{Ab})$ é pleno e fiel.

1.2 Álgebras e Módulos

A partir desta seção vamos considerar κ um corpo algébricamente fechado. Esta restrição visa facilitar algumas demonstrações.

Definição 1.22 *Uma κ -álgebra Λ é um anel $(\Lambda, +, \cdot)$ com unidade (não necessariamente comutativo) que possui uma estrutura de κ -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que para todo $\lambda \in K$ e para todos $a, b \in \Lambda$ temos:*

$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

Uma κ -álgebra Λ pode ser vista como uma categoria formada por um único objeto X , cujos morfismos são $\text{Hom}(X, X) = \Lambda$. A composição é induzida pela multiplicação da álgebra.

Algumas álgebras, como por exemplo, a álgebra de polinômios $\kappa[x]$, a de matrizes de ordem n sobre um corpo κ e mais geralmente $\text{End} V$ de operadores lineares de um κ -espaço vetorial V possuem estruturas que são bem conhecidas. Porém existem álgebras, um pouco mais "complicadas".

Definição 1.23 *Uma representação de uma κ -álgebra Λ é um homomorfismo de álgebras*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \Lambda &\rightarrow \text{End}(V) \\ a &\mapsto \mathcal{R}(a) : V \rightarrow V, \end{aligned}$$

para algum κ -espaço vetorial V .

Obter representações de uma álgebra é uma ferramenta importante, também utilizada em outras áreas, reduzindo problemas de álgebra abstrata à problemas de álgebra linear.

As propriedades de homomorfismo de álgebras nos levam à uma definição equivalente de representação, são os módulos de uma álgebra.

Definição 1.24 *Sejam κ um corpo e Λ uma K -álgebra. Um Λ -módulo à direita é um espaço vetorial M com uma operação*

$$\begin{aligned} M \times \Lambda &\rightarrow M \\ (m, a) &\mapsto m \cdot a \end{aligned}$$

que satisfaz, para todos $x, y \in M$, $a, b \in \Lambda$ e $\lambda \in \kappa$, as propriedades:

$$(i) (x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a;$$

$$(ii) x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b;$$

$$(iii) x \cdot 1_\Lambda = x;$$

$$(iv) (x \cdot a) \cdot b = x \cdot (a \cdot b);$$

$$(v) (\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a) = \lambda(x \cdot a).$$

Dualmente definimos o conceito de Λ -módulo à esquerda. Em nosso trabalho vamos considerar espaços vetoriais de dimensão finita. Porém a teoria de representações abrange os casos de dimensão infinita. Com isto definimos a categoria $\text{mod } \Lambda$ dos Λ -módulos que é Krull-Remak-Schmidt. Sendo assim, é suficiente conhecermos os módulos indecomponíveis e os morfismos entre eles.

Observação: Do ponto de vista categórico, uma representação de uma álgebra (ou um módulo) é simplesmente um funtor $M : \Lambda^{op} \longrightarrow \text{Vec}_\kappa$, ou seja, um objeto na categoria de funtores.

Uma álgebra Λ é dita **local** se, possui um único ideal maximal à direita, ou equivalentemente, um único ideal maximal à esquerda. O lema a seguir será uma importante ferramenta na caracterização deste tipo de álgebra.

Lema 1.25 *Seja Λ uma κ -álgebra de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Λ é uma álgebra local;

(ii) Λ possui um único ideal maximal à esquerda;

(iii) O conjunto de todos os elementos não invertíveis de Λ é um ideal bilateral;

(iv) Para todo $a \in \Lambda$ ou a ou $1_\Lambda - a$ é invertível;

(v) Λ possui somente dois elementos idempotentes 0 e 1;

(vi) A κ -álgebra $\frac{\Lambda}{\text{rad } \Lambda}$ é isomorfa à κ .

O resultado à seguir é uma caracterização de Λ -módulos indecomponíveis utilizando álgebras locais.

Proposição 1.26 *Seja Λ uma κ -álgebra. Um Λ -módulo M é indecomponível se, e somente se, $\text{End}_\Lambda(M)$ é local.*

Uma demonstração deste resultado encontra-se em [1].

Seja M um Λ -módulo. Um **submódulo** $N \subset M$ é um subespaço fechado para a multiplicação pelos elementos de Λ . Dizemos que um módulo é **simple** se seus únicos submódulos são os triviais.

Seja Λ uma K -álgebra de dimensão finita e seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto de elementos idempotentes de Λ . Toda álgebra tem pelo menos dois idempotentes, 0_Λ e 1_Λ , chamados **idempotentes triviais**. Se e é um idempotente não trivial de Λ , então $1_\Lambda - e$ também é um idempotente não trivial e, mais, e e $1_\Lambda - e$ são ortogonais. Além disso, $\Lambda_\Lambda = e\Lambda \oplus (1_\Lambda - e)\Lambda$ é uma decomposição não trivial em Λ -módulos à direita. Dizemos que ele é um **conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos** de Λ , se $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1_\Lambda$, com $e_i^2 = e_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$ e, ainda, se $e_i = e' + e''$ com e' e e'' idempotentes, então $e' = 0$ ou $e'' = 0$. Como Λ tem dimensão finita, o Λ -módulo à direita Λ_Λ admite uma decomposição em Λ -módulos indecomponíveis, digamos

$$\Lambda_\Lambda = e_1\Lambda \oplus \dots \oplus e_n\Lambda.$$

Prova-se que, o módulo $e_i\Lambda$ é projetivo indecomponível, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ . Desta forma, obtemos uma decomposição de uma álgebra em módulos projetivos indecomponíveis.

Já vimos que os módulos indecomponíveis estão associados às álgebras locais, vamos verificar agora uma relação entre morfismos irredutíveis vistos na seção 1.11 na página 10 e o radical da categoria de módulos.

Lema 1.27 *Sejam $X, Y \in \text{mod}(\Lambda)$ módulos indecomponíveis. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}(X, Y) \setminus \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}^2(X, Y)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja f um morfismo irredutível, então $f \in \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}(X, Y)$.

Suponha que $f \in \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}^2(X, Y)$, então $f = gh$, com $g \in \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}(X, Z)$ e $h \in \text{rad}_{\text{Mod}(\Lambda)}(Z, Y)$, para algum $Z \in \text{Mod}(\Lambda)$. Decompondo $Z = \bigoplus_{i=1}^t Z_i$, com Z_i indecomponível, para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, podemos escrever

$$g = [g_1 \dots g_t] : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i \quad \text{e} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow Y$$

Como f é irredutível, então ou g é seção ou h é retração.

Se g é seção, então existe $g' = \begin{bmatrix} g'_1 \\ \vdots \\ g'_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow X$, tal que $1_X = gg' = \sum_{i=1}^t g_i g'_i$.

Logo $1_X \in \text{rad}_\Lambda(X, X)$, uma contradição.

Se h é retração, então existe $h' = [h'_1 \dots h'_t] : Y \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i$, tal que

$$1_Y = h'h = \sum_{i=1}^t h'_i h_i.$$

Logo $1_Y \in \text{rad}_\Lambda(Y, Y)$, uma contradição. Portanto, $f \notin \text{rad}_\Lambda^2(X, Y)$.

($\Leftarrow$) Como $f \in \text{rad}_\Lambda(X, Y)$ e X e Y são indecomponíveis, f não é isomorfismo. Logo não é seção, nem retração.

Suponha $f = gh$, com $g : X \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow Y$ e tome $Z = \bigoplus_{i=1}^t Z_i$, com Z_i indecomponível, para todo $i = 1, \dots, t$. Escrevendo

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_t \end{bmatrix} : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i \quad \text{e} \quad h = [h_1 \dots h_t] : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow Y,$$

temos $f = \sum_{i=1}^t g_i h_i$. Como $f \notin \text{rad}_\Lambda^2(X, Y)$ e Z_i é indecomponível, ou g_i é seção, ou h_i é retração para algum i . Assim, ou g é seção, basta tomar $g^{-1} = [0 \dots g_i^{-1} \dots 0]$,

e portanto seção, ou h é retração, basta tomar $h^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_i^{-1} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, e portanto

retração.

□

Uma outra caracterização de morfismos irredutíveis, que será utilizada neste trabalho é dada pelo lema à seguir, cuja demonstração encontra-se em [1].

Lema 1.28 *Seja*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta que não cinde em $\text{Mod}(\Lambda)$.

(i) *O morfismo $f : L \rightarrow M$ é irredutível se, e somente se, para cada morfismo $v : V \rightarrow N$, existe $v_1 : V \rightarrow M$ tal que $v = v_1 g$ ou existe $v_2 : M \rightarrow V$ tal que $g = v_2 v$.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & V & & \\ & & & & \downarrow v & & \\ & & & & N & & \\ & & & & \uparrow v_1 & & \\ & & & & M & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

(ii) O morfismo $g : M \rightarrow N$ é irreduzível se, e somente se, para cada morfismo $u : L \rightarrow U$, existe $u_1 : M \rightarrow U$ tal que $u = fu_1$ ou existe $u_2 : U \rightarrow M$ tal que $f = uu_2$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & \nearrow u_2 & \nwarrow u_1 & & \\ & & U & & & & \end{array}$$

Os resultados à seguir nos fornecem relações entre morfismos irreduzíveis e objetos indecomponíveis e sua demonstração pode ser vista em [1].

Corolário 1.29 (i) Se $f : L \rightarrow M$ é monomorfismo irreduzível então $N = \text{coker}(f)$ é indecomponível.

(ii) Se $g : M \rightarrow N$ é epimorfismo irreduzível então $L = \ker(g)$ é indecomponível.

Teorema 1.30 (a) Seja $f : L \rightarrow M$ minimal que quase cinde à esquerda. Então f é irreduzível. Além disso, $f' : L \rightarrow M'$ é irreduzível se, e somente se:

- (i) $M' \neq 0$;
- (ii) existe uma decomposição $M \cong M' \oplus M''$;
- (iii) existe um morfismo $f'' : L \rightarrow M''$ tal que $[f' f''] : L \rightarrow M' \oplus M''$ é minimal que quase cinde à esquerda.

(b) Seja $g : M \rightarrow N$ minimal que quase cinde à direita. Então g é irreduzível. Além disso, $g' : M' \rightarrow N$ é irreduzível se, e somente se:

- (i) $M' \neq 0$;
- (ii) existem uma decomposição $M \cong M' \oplus M''$;
- (iii) existe um morfismo $g'' : M'' \rightarrow N$ tal que $\begin{bmatrix} g' \\ g'' \end{bmatrix} : M' \oplus M'' \rightarrow N$ é minimal que quase cinde à direita.

O resultado à seguir será utilizado no capítulo 4 e sua demonstração pode ser vista em [1].

Teorema 1.31 Sejam Λ uma κ -álgebra, $(M_\lambda)_{\lambda \in I}$ uma família de Λ -módulos, $(q_\lambda : M_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in I} M_\lambda)$ as inclusões associadas à soma direta e N um Λ -módulo. Existe um isomorfismo de κ -módulos

$$\text{Hom } \Lambda(\bigoplus_{\lambda \in I} M_\lambda, N) \cong \prod_{\lambda \in I} (M_\lambda, N)$$

dado por $f \longmapsto (fq_\lambda)_{\lambda \in I}$.

Capítulo 2

Categoria Derivada

Categorias derivadas foram introduzidas na década de 1960 por Alexander Grothendieck e seu aluno Jean-Louis Verdier como consequência do desenvolvimento da Álgebra Homológica na década de 1950. Na teoria básica de Verdier, escrita em sua dissertação e depois publicada em [25], surge o conceito de categoria triangulada, e ainda a localização de uma categoria, como a generalização da localização de um anel comutativo. Categorias derivadas, desde então, tornaram-se importantes dentro e fora da geometria algébrica.

2.1 Categoria de complexos de módulos

Uma das principais idéias utilizadas na Álgebra Homológica é identificar objetos com complexos. Esta abordagem permite ampliar conceitos e generalizar importantes (bi)funtores, tais como $\text{Hom}(-, -)$ e $- \otimes -$.

Sejam κ um corpo algebricamente fechado e Λ uma κ -álgebra. A categoria $C(\Lambda)$ de complexos de Λ -módulos tem como objetos sequências $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ de Λ -módulos X^i e de Λ -homomorfismos d_X^i chamados **diferenciais** e denotados por

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^i} X^{i+1} \longrightarrow \dots$$

com $d_X^{i-1} d_X^i = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $C(\Lambda)$ é uma sequência de morfismos $f^i : X^i \rightarrow Y^i$ tais que $d_X^{i-1} f^i = f^{i-1} d_Y^{i-1}$ para todo i , ou seja, o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^{i-1} & & \downarrow f^i & & \downarrow f^{i+1} \\ \dots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Prova-se que $C(\Lambda)$ é uma categoria abeliana, para detalhes da demonstração veja [7].

Um complexo $X^\bullet$ é dito **limitado superiormente** (respectivamente **limitado inferiormente**) se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $X^i = 0$ para todo $i \geq n$, (respectivamente $i \leq n$). Um complexo $X^\bullet$ é dito **limitado** se é limitado inferiormente e superiormente. As subcategorias dos complexos limitados superiormente, limitados inferiormente e limitados são, respectivamente, denotadas por $C^-(\Lambda)$, $C^+(\Lambda)$ e $C^b(\Lambda)$.

Seja n um inteiro. Definimos o **funtor shift** $[n]$ como o automorfismo em $C(\Lambda)$ que envia $X^\bullet \longrightarrow X^\bullet[n]$, onde $X^\bullet[n]^i = X^{i+n}$ e $d_{X[n]}^i = (-1)^n d_X^{i+n}$.

Sejam $X^\bullet$ um complexo e i um inteiro. A i -ésima **cohomologia** de $X^\bullet$ é definida por $H^i(X^\bullet) = \frac{\ker(d_X^i)}{\text{Im}(d_X^{i-1})}$. Com isto, para cada $i \in \mathbb{Z}$ é fácil verificar a existência do **funtor cohomologia**: $H^i(-) : C(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda)$ que para objetos envia $X^\bullet$ em $H^i(X^\bullet) = \frac{\ker(d_X^i)}{\text{Im}(d_X^{i-1})}$ e para morfismos envia $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ em $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \longrightarrow H^i(Y^\bullet)$, definido por $(\bar{x})H^i(f^\bullet) = \overline{(x)f^i}$.

Definição 2.1 Um morfismo em $C(\Lambda)$ é dito **homotópico a zero**, e denota-se $f^\bullet \sim 0^\bullet$, se existem morfismos $k^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ tais que $f^i = k^i d_Y^{i-1} + d_X^i k^{i+1}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f^{i-1} & \swarrow k^i & \downarrow f^i & \swarrow k^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Dizemos que dois morfismos $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ são **homotópicos** se $(f^\bullet - g^\bullet) \sim 0^\bullet$. Além disso, mostra-se facilmente que morfismos homotópicos a zero formam um ideal em $\text{Hom}_{C(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ [7]. A **categoria homotópica** $K(\Lambda)$ é obtida pelo quociente por este ideal. De maneira similar obtemos as categorias $K^*(\Lambda)$ com $*$ $\in \{+, -, b\}$. Uma vantagem deste quociente é que uma quantidade maior de diagramas é comutativa. O problema é que, em geral, a categoria homotópica não é abeliana, pois nem todo morfismo possui coker.

O resultado à seguir garante que o funtor cohomologia pode ser passado ao quociente $K(\Lambda)$.

Proposição 2.2 Sejam $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ dois morfismos homotópicos, então $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$.

Demonstração: Como $f^\bullet \sim g^\bullet$, por definição, $f^\bullet - g^\bullet \sim 0^\bullet$. Logo, para todo $i \in \mathbb{Z}$, existe $k^i : X^i \longrightarrow Y^{i-1}$, tais que $f^i - g^i = k^i d_Y^{i-1} + d_X^i k^{i+1}$. Seja $x \in$

$\ker(d_X^i)$, então

$$\begin{aligned}(x)f^i - (x)g^i &= (x)(f - g)^i \\ &= (x)k^i d_Y^{i-1} + (x)d_X^i k^{i+1} \\ &= (x)k^i d_Y^{i-1} \in \text{Im} d_Y^{i-1}\end{aligned}$$

Logo $\overline{f^i(x)} = \overline{g^i(x)}$. Portanto, $H^i(f^\bullet)(\bar{x}) = H^i(g^\bullet)(\bar{x})$.

□

Observação: A recíproca é falsa!!! Tomando o complexo de $\mathbb{Z}$ -módulos

$$X^\bullet : \quad \dots \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \dots$$

e os morfismos $1^\bullet, 0^\bullet : X^\bullet \longrightarrow X^\bullet$, temos:

$$H^i(X^\bullet) = \frac{\ker k^i 2 + 2k^{i+1}}{\text{Im} k^i 2 + 2k^{i+1}} = \frac{\{\bar{0}, \bar{2}\}}{\{\bar{0}, \bar{2}\}} = \bar{0} \quad \text{e}$$

$$H^i(1^\bullet) = H^i(0^\bullet)$$

Mas $1^\bullet$ não é homotópico à $0^\bullet$, uma vez que é impossível criar morfismos

$k^i : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, tais que $1_{\mathbb{Z}_4} = k^i 2 + 2k^{i+1}$, pois a imagem de $k^i \bar{2} + \bar{2}k^{i+1}$ está contida em $\{\bar{0}, \bar{2}\}$.

Assim, temos o funtor cohomologia $H^i : K(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda)$ e o seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Proposição 2.3 *O funtor cohomologia envia uma sequência exata curta de complexos $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ em uma sequência exata longa*

$$\dots \rightarrow H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet) \rightarrow H^n(Z^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(X^\bullet) \rightarrow \dots$$

Um complexo $X^\bullet$ possui cohomologia limitada se $H^i(X^\bullet) \neq 0$ para um conjunto finito de índices $i \in \mathbb{Z}$. Dizemos que um complexo é **acíclico** se suas cohomologias são todas nulas. Denotamos $C^{+,b}(\Lambda)$ e $C^{-,b}(\Lambda)$, respectivamente, as categorias de complexos limitados inferiormente e superiormente com cohomologia limitada. Denotamos $K^{+,b}(\Lambda)$ e $K^{-,b}(\Lambda)$ as respectivas categorias homotópicas.

Um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet$ é um **quasi-isomorfismo** em $K(\Lambda)$ se o morfismo induzido entre cohomologias $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \longrightarrow H^i(Y^\bullet)$ é um isomorfismo para todo i .

Nosso objetivo agora é identificar complexos que possuem mesma cohomologia, ou seja, criar uma categoria na qual todos os quasi-isomorfismos se tornem isomorfismos. Para isto, vamos utilizar um procedimento similar a localização de um anel comutativo, ou seja, dados $\mathcal{A}$ um anel comutativo e $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ um sistema multiplicativo vamos tornar os elementos $s \in \mathcal{S}$ invertíveis em um novo anel. O raciocínio é semelhante ao utilizado na construção dos números racionais.

Definição 2.4 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{S}$ um conjunto de morfismos em $\mathcal{C}$. O conjunto $\mathcal{S}$ é um sistema multiplicativo se satisfaz as seguintes condições:*

(SM1) *se $f, g \in \mathcal{S}$, então $fg \in \mathcal{S}$, desde que a composição faça sentido. E $1_X \in \mathcal{S}$ para todo objeto $X \in \mathcal{C}$;*

(SM2) *Seja $\sigma : X \longrightarrow Y$ um morfismo em $\mathcal{S}$. Então para todo par de morfismos $Y' \longrightarrow Y$ e $X \longrightarrow X''$ em $\mathcal{S}$ existem os diagramas comutativos a seguir:*

$$\begin{array}{ccc} X' & \dashrightarrow & X \\ \sigma' \downarrow & & \downarrow \sigma \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X'' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma'' \\ Y & \dashrightarrow & Y'' \end{array}$$

tais que σ' e σ'' pertencem à $\mathcal{S}$;

(SM3) *Sejam $\alpha, \beta : X \longrightarrow Y$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então existe um morfismo $\sigma : X' \longrightarrow X$ em $\mathcal{S}$ com $\sigma\alpha = \sigma\beta$ se, e somente se, existe um morfismo $\tau : Y \longrightarrow Y'$ em $\mathcal{S}$ com $\alpha\tau = \beta\tau$.*

$$X' \dashrightarrow X \xrightarrow[\beta]{\alpha} Y \dashrightarrow Y'$$

Prova-se que a QIS, classe dos quasi-isomorfismos, é um sistema multiplicativo em $K(\Lambda)$.¹

Definição 2.5 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{S}$ um sistema multiplicativo. A localização de $\mathcal{C}$ em respeito à $\mathcal{S}$ é a categoria $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$, junto com o funtor de localização $Q : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ tais que:*

(L1) *$Q(\sigma)$ é isomorfismo para todo $\sigma \in \mathcal{S}$;*

(L2) *qualquer funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow D$, tal que $F(\sigma)$ é um isomorfismo para todo $\sigma \in \mathcal{S}$ é fatorado unicamente por Q , ou seja o diagrama à seguir é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}] \\ F \downarrow & \swarrow \text{---} & \\ D & & \end{array}$$

Vamos apresentar um esboço da construção de $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ Dados $X, Y \in \mathcal{C}$, considere

$$M_{X,Y}^{\mathcal{C}} = \{ X \xleftarrow{\tilde{s}} Z \xrightarrow{a} Y ; a \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \text{ e } \tilde{s} \in \mathcal{S} \} = \{(Z, \tilde{s}, a)\}.$$

¹Proposição 10, página 151, [7].

Vamos definir a seguinte relação sobre $M_{X,Y}^{\mathcal{C}}$, $(Z, \tilde{s}, a) \sim (W, \tilde{v}, b) \Leftrightarrow$ existe $(P, \tilde{t}, c)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow \tilde{s} & \uparrow m & \searrow a & \\ X & \xleftarrow{\tilde{t}} & P & \xrightarrow{c} & Y \\ & \nwarrow \tilde{v} & \downarrow n & \nearrow b & \\ & & W & & \end{array}$$

é comutativo. A relação $\sim$ é de equivalência, assim definimos a categoria $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$ pela categoria que possui os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ e os morfismos são dados por $M_{X,Y}^{\mathcal{C}}/\sim$. A composição entre $\alpha = \overline{(Q, \tilde{s}, a)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]}(X, Y)$ e $\beta = \overline{(W, \tilde{v}, b)} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]}(Y, Z)$ é dada por $\alpha\beta = \overline{(R, \tilde{r}s, cb)}$, conforme o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & \swarrow \tilde{r} & & \searrow c & \\ & Q & & W & \\ \swarrow \tilde{s} & & \searrow a & \swarrow \tilde{t} & \searrow b \\ X & & Y & & Z \end{array}$$

Definição 2.6 A categoria $K(\Lambda)[QIS]^{-1}$ obtida pela localização dos quasi-isomorfismos é chamada **Categoria Derivada** da categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ e denotada por $D(\Lambda)$, ou seja, $D(\Lambda) := K(\Lambda)[QIS]^{-1}$.

Como a categoria derivada $D(\Lambda)$ da categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ é obtida pela localização da categoria homotópica de complexos com relação aos quasi-isomorfismos, os objetos de $D(\Lambda)$ são complexos de Λ -módulos e os morfismos são classes de homotopias com inversos formais de quasi-isomorfismos. Desta forma, complexos quasi-isomorfos, ou seja, que apresentam mesmas cohomologias são isomorfos em $D(\Lambda)$. Definimos ainda as categorias $D^+(\Lambda)$, $D^-(\Lambda)$ e $D^b(\Lambda)$ de complexos, respectivamente, limitados inferiormente, limitados superiormente e limitados, pela localização das categorias $K^*(\Lambda)$ pelos respectivos sistemas multiplicativos.

Existe uma imersão $\text{Mod}(\Lambda) \hookrightarrow D(\Lambda)$ que associa cada Λ -módulo X ao complexo concentrado de grau zero

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

e os morfismos $X \xrightarrow{f} Y$ em morfismos entre complexos concentrados

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f & & \downarrow 0 \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

este mergulho é pleno e fiel. Em particular podemos identificar todo Λ -módulo com sua resolução projetiva (injetiva) em $D(\Lambda)$ por meio do quasi-isomorfismo abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d^2} & P_1 & \xrightarrow{d^1} & P_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Além disso, $D(\Lambda)$ é aditiva e Krull-Remak-Schmidt, ou seja, podemos resumir o seu estudo ao estudo do complexos indecomponíveis e dos morfismos irredutíveis.

Como será visto no capítulo 4 o estudo dos Λ -módulos indecomponíveis e dos morfismos irredutíveis na categoria de Λ -módulos, feito pela Teoria de Auslander-Reiten, utiliza sequências exatas curtas que quase cindem. Como $D(\Lambda)$ não é abeliana, uma vez que $K(\Lambda)$ nem sempre é abeliana, perdemos o conceito de sequências exatas. Desta forma, será que existe um outro tipo estrutura nesta categoria que substitua as sequências exatas e permita o estudo dos objetos indecomponíveis e dos morfismos irredutíveis? Existe! São os triângulos exatos que serão vistos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Categorias Trianguladas

As categorias homotópica $K(\Lambda)$ e derivada $D(\Lambda)$ de uma álgebra Λ , em geral, não são abelianas, desta forma, perdemos o conceito de sequências exatas. Mas elas possuem um outro tipo de estrutura que será visto neste capítulo.

3.1 Categorias Trianguladas

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e T um automorfismo de $\mathcal{C}$, chamado **functor suspensão**, cujo inverso será denotado por T^{-} . Um **triângulo** (α, β, γ) em $\mathcal{C}$ é dado por uma tripla de morfismos $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$. O nome triângulo é utilizado na literatura devido à seguinte notação:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \gamma \swarrow & & \nwarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

mas tendo em mente que γ é um morfismo de Z para TX .

Um morfismo entre os triângulos (α, β, γ) e $(\alpha', \beta', \gamma')$ é uma tripla de morfismos (f, g, h) tal que o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & Z' & \xrightarrow{\gamma'} & TX' \end{array}$$

Se f , g e h são isomorfismos em $\mathcal{C}$, então (f, g, h) é um isomorfismo entre triângulos.

Uma classe $\mathcal{T}$ de triângulos em $\mathcal{C}$, cujos elementos são chamados **triângulos exatos**, é dita uma **triangularização** de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições são satisfeitas: (TR1) i) Todo triângulo isomorfo a um triângulo exato é um triângulo exato;

ii) Todo morfismo $\alpha : X \rightarrow Y$ pode ser inserido em um triângulo exato (α, β, γ) ;

iii) O triângulo $(1_X, 0, 0)$ é um triângulo exato para todo $X \in \mathcal{C}$.

(TR2) (α, β, γ) é um triângulo exato se, e somente se, $(\beta, \gamma, -T\alpha)$ é um triângulo exato;¹

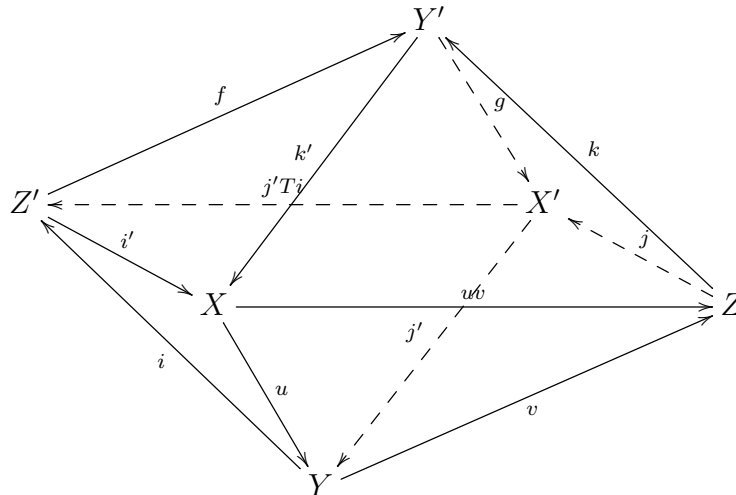
(TR3) Dados dois triângulos exatos (α, β, γ) e $(\alpha', \beta', \gamma')$, e morfismos $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ tais que $f\alpha' = \alpha g$, então existe um morfismo (f, g, h) do primeiro para o segundo triângulo;

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & Z' & \xrightarrow{\gamma'} & TX' \end{array}$$

(TR4) (**Axioma do octaedro**) Considere os triângulos exatos (α, i, i') , (β, j, j') e $(\alpha\beta, k, k')$, como o diagrama abaixo. Então existem morfismos $f : Z' \rightarrow Y'$ e $g : Y' \rightarrow X'$ tais que o seguinte diagrama é comutativo e a terceira linha é um triângulo exato.

$$\begin{array}{ccccccc} T^-Y' & \xrightarrow{T^-k'} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\ \downarrow T^-g & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha\beta & & \\ T^-X' & \xrightarrow{T^-j'} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} TY \\ & & \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} \downarrow Ti \\ & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' \xrightarrow{j'Ti} TZ' \\ & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & \\ & & TX & \xrightarrow{1_{TX}} & TX & & \end{array}$$

O axioma TR4 é conhecido por axioma do octaedro, pois o diagrama acima pode ser representado como à seguir:



¹Basta pedir a ida, a volta é consequência dos demais axiomas [9].

onde os triângulos estão representados nas faces do octaedro.

Observação: No artigo [20] J. P. May mostra que o axioma TR3 é redundante, isto é, ele é uma consequência de TR1, TR2 e TR4.

Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ junto com o funtor suspensão T e uma triangularização $\mathcal{T}$, é dita uma **categoria triangulada**. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito exato se envia triângulos exatos em triângulos exatos. Se um funtor exato $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é uma equivalência entre categorias, ele é denominado uma **triângulo equivalência**, neste caso $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são ditas **triângulo equivalentes**.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Um funtor aditivo covariante $H : \mathcal{C} \rightarrow Ab$ é dito um **funtor cohomológico covariante** se dado (α, β, γ) um triângulo exato, então a sequência longa

$$\dots \longrightarrow H(T^i X) \xrightarrow{H(T^i \alpha)} H(T^i Y) \xrightarrow{H(T^i \beta)} H(T^i Z) \xrightarrow{H(T^i \gamma)} H(T^{i+1} X) \longrightarrow \dots$$

é exata. De maneira similar definimos funtor cohomológico para funtores contra-variantes.

Proposição 3.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Seja (α, β, γ) um triângulo exato e M um objeto ambos em $\mathcal{C}$. Então:*

(i) $\alpha\beta = \beta\gamma = 0$;

(ii) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ são funtores cohomológicos;

(iii) *Seja (f, g, h) um morfismo entre os triângulos (α, β, γ) e $(\alpha', \beta', \gamma')$. Se f e g são isomorfismos, então h também o é.*

Demonstração: (i) Por **(TR2)** é suficiente mostrarmos que $\alpha\beta = 0$, uma vez que $(\beta, \alpha, -T\alpha)$ é um triângulo. Por **(TR3)** temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX & \xrightarrow{-T\alpha} & TY \\ \beta \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow T\beta \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TZ \end{array}$$

assim, $(-T\alpha)T\beta = 0$. Como T é automorfismo, segue $\alpha\beta = 0$.

(ii) Vamos mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ é cohomológico. É suficiente mostrarmos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i X) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \alpha)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \beta)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i Z)$$

é exata. Por (i) $\alpha\beta = 0$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \alpha) \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \beta) = 0$, logo $\text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \alpha)) \subset \ker(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \beta))$. Seja $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i \alpha)$ tal que

$gT^i\beta = 0$, ou seja $g \in \ker(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i\beta))$, vamos mostrar que $g \in \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^i\alpha))$. De fato, como $gT^i\beta = 0$, temos $T^{-1}gT^{i-1}\beta = 0$. Assim, por **(TR3)** temos o morfismo entre os triângulos abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & M & \xrightarrow{1} & M \\ T^{-1}g \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow h & & \downarrow g \\ T^{i-1}Y & \xrightarrow{T^{i-1}\beta} & T^{i-1}Z & \xrightarrow{T^{i-1}\gamma} & T^iX & \xrightarrow{-T^i\alpha} & TY \end{array}$$

Logo $-hT^i\alpha = g$.

De forma similar $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ também é cohomológico.

(iii) Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ X & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & Z' & \xrightarrow{\gamma} & TZ \end{array}$$

com f e g isomorfismos. Aplicando o funtor cohomológico $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', -)$ obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \alpha)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \beta)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \gamma)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TX) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', g) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h) & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tf) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \alpha')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Y') & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \beta')} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z') & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', \gamma)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', TZ) \end{array}$$

Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', f)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', g)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tf)$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Tg)$ são isomorfismos, pelo **Lema das 5** [2], temos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', h)$ é isomorfismo, logo h é isomorfismo. □

Veremos agora que o morfismo γ determina quando um triângulo exato

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \text{ cinde, ou seja, quando } Y \cong X \oplus Z.$$

Lema 3.2 *Seja (α, β, γ) um triângulo exato. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\gamma = 0$;

(ii) α é seção;

(iii) β é retração.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $\gamma = 0$ considere o seguinte morfismo de triângulos, onde a existência de α' é garantida por **(TR3)**

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{0} & TX \\ \parallel & & \downarrow \alpha' & & \downarrow 0 & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\alpha'} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

assim $\alpha\alpha' = 1_X$, logo α é seção.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Se α é seção, existe α' tal que $(1_X, \alpha', 0)$ é um morfismo entre os triângulos (α, β, γ) e $(1_X, 0, 0)$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \parallel & & \downarrow \alpha' & & \downarrow 0 & & \parallel \\ X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & TX \end{array}$$

em particular $\gamma 1_{TX} = 0$, logo $\gamma = 0$. A demonstração de que (i) $\Leftrightarrow$ (iii) é similar. $\square$

Lema 3.3 *Sejam $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$ um triângulo exato e $f : W \rightarrow Z$. Existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $f'\beta = f$ se, e somente se, $f\gamma = 0$.*

Demonstração: Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, -)$ é cohomológico, temos a sequência exata

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \beta)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \gamma)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, TX)$$

Suponha que exista $f' : W \rightarrow Y$ tal que $f = f'\beta$. Logo temos $f \in \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \beta)) = \ker(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \gamma))$, pois a sequência é exata. Portanto $f\gamma = 0$.

Reciprocamente, como $f\gamma = 0$, temos $f \in \ker(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \gamma)) = \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \beta))$, pois a sequência é exata. Logo existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $f = f'\beta$. $\square$

Um importante exemplo de categoria triangulada são as categorias de Frobenius.

3.2 Categorias de Frobenius

3.2.1 Categorias exatas

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva que possui kernel e cokernel.

Definição 3.4 *Uma sequência de morfismos em $\mathcal{C}$*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

*também denotada por (f, g) , é uma **conflação** se f é kernel de g e g é cokernel de f . Neste caso, f é dito uma **inflação**, g é dito uma **deflação**.*

Um morfismo entre conflações é uma tripla (φ, ψ, θ) tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \theta \\ A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Um morfismo (φ, ψ, θ) é um isomorfismo de conflações se, e somente se, os três morfismos são isomorfismos.

Definição 3.5 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $\mathcal{S}$ uma classe de conflações em $\mathcal{C}$. O par $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ é dito exato, ou ainda, $\mathcal{C}$ é uma **categoria exata** se as seguintes condições são válidas:²*

(i) *qualquer conflação isomorfa à uma conflação em $\mathcal{S}$, está em $\mathcal{S}$;*

(ii) *para qualquer par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$, a sequência canônica*

$$A \xrightarrow{i_A} A \oplus B \xrightarrow{p_B} B$$

está em $\mathcal{S}$;

(iii) *a composição de duas deflações é uma deflação;*

(iv) *a composição de duas inflações é uma inflação;*

(v) *se $f : A \rightarrow C$ é uma deflação e $g : B \rightarrow C$ um morfismo qualquer, então existe o pull-back*

$$\begin{array}{ccc} A \oplus_C B & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

onde f' é deflação;

(vi) *se $f : C \rightarrow A$ é uma inflação e $g : C \rightarrow B$ um morfismo qualquer, então existe o push-out*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ B & \xrightarrow{f'} & B \oplus^C A \end{array}$$

f' inflação;

(vii) *seja $f : B \rightarrow C$ um morfismo com núcleo. Se existe um morfismo $g : A \rightarrow B$ tal que gf é uma deflação, então f é uma deflação;*

(viii) *seja $f : A \rightarrow B$ um morfismo com conúcleo. Se existe um morfismo $g : B \rightarrow C$ tal que fg é uma inflação, então f é uma inflação.*

²Bernhard Keller mostrou em [14] que $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ é exata se, e somente se, 1_0 é uma deflação e os itens (i), (iii), (iv), (v) e (vi) são válidos.

Exemplos: 1) Qualquer categoria abeliana é canonicamente uma categoria exata, para isto, basta tomar $\mathcal{S}$ como a classe de todas as sequências exatas curtas.

2) Se $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ é uma categoria exata, então $(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}^{op})$ é uma categoria exata, onde $\mathcal{S}^{op}$ é a classe de todas as confluções $C \xrightarrow{g^{op}} B \xrightarrow{f^{op}} A$ tais que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ está em $\mathcal{S}$.

Seja $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ uma categoria exata e seja

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

uma confluência em $\mathcal{S}$. Se g é uma retração ou f é um seção, então $B \cong A \oplus C$. E neste caso dizemos que a confluência é **cinde**.

Lema 3.6 *Considere o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} & & & E & \\ & & & \downarrow k & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow h & & & & \\ D & & & & \end{array}$$

onde a (f, g) é uma confluência em uma categoria exata $\mathcal{C}$. Então este diagrama pode ser completado em um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f'} & B \oplus C & \xrightarrow{p_2} & E & & \\ \parallel & & \downarrow p_1 & & \downarrow k & & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & & \\ \downarrow h & & \downarrow i_2 & & \parallel & & \\ D & \xrightarrow{i_1} & D \oplus A & \xrightarrow{g'} & C & & \end{array}$$

onde todas as linhas são confluências.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [12].

Definição 3.7 *Seja $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ uma categoria exata.*

i) Um objeto $I \in \mathcal{C}$ é $\mathcal{S}$ -injetivo se o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \text{Ab}$ leva confluências em confluências, ou seja, é exato.

ii) Um objeto $P \in \mathcal{C}$ é $\mathcal{S}$ -projetivo se o funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Ab}$ é exato.

iii) $\mathcal{C}$ possui suficientes $\mathcal{S}$ -injetivos se qualquer objeto $A \in \mathcal{C}$ está em uma confluência

$$A \longrightarrow I \longrightarrow B$$

com I injetivo.

iv) $\mathcal{S}$ possui suficientes $\mathcal{S}$ -projetivos se qualquer objeto $B \in \mathcal{B}$ está em uma conflagção

$$A \longrightarrow P \longrightarrow B$$

com P projetivo.

Exemplo: A categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ de uma álgebra Λ , onde $\mathcal{S}$ é o conjunto das sequências exatas curtas, é uma categoria exata que possui suficientes injetivos e suficientes projetivos.

Definição 3.8 Uma categoria exata $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ é chamada **categoria de Frobenius** se $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ possui suficientes $\mathcal{S}$ -injetivos e suficientes $\mathcal{S}$ -projetivos, e além disso, os $\mathcal{S}$ -injetivos e os $\mathcal{S}$ -projetivos coincidem.

Seja $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ uma categoria de Frobenius. Para cada par de objetos X e Y em $\mathcal{B}$ denotamos por $I(X, Y)$ o subgrupo do $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y)$ dos morfismos fatorados por um injetivo. Mostra-se que este subgrupo é um ideal de $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y)$. A **categoria estável** $\underline{\mathcal{C}}$ associada à $\mathcal{C}$ é a categoria obtida pelo quociente por este ideal, ou seja $\underline{\mathcal{C}}$ possui os mesmos objetos de $\mathcal{C}$ e $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(X, Y) = \frac{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)}{I(X, Y)}$.

Lema 3.9 (Lema de Schanuel) Seja $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ uma categoria exata. Dadas duas conflagções $X \longrightarrow I \longrightarrow Y$ e $X \longrightarrow I' \longrightarrow Y'$, com I e I' injetivos, então $Y \oplus I' \cong Y' \oplus I$. Em particular, Y e Y' são isomorfos na categoria $\underline{\mathcal{C}}$.

Demonstração: Dadas as duas conflagções podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & I & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ I' & \longrightarrow & I' \oplus^X I & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ Y' & \xlongequal{\quad} & Y' & & \end{array}$$

onde a linha do meio e as colunas são conflagções. Como I e I' são $\mathcal{S}$ -injetivos as conflagções que se iniciam com estes objetos cindem, logo $I' \oplus Y \cong I' \oplus^X I$ e $I \oplus Y' \cong I' \oplus^X I$. Portanto, $I' \oplus Y \cong I \oplus Y'$ e $Y \cong Y'$ em $\underline{\mathcal{C}}$.

□

Pelo lema anterior, dado um diagrama comutativo, cujas linhas são conflagções,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & I & \xrightarrow{g} & Y \\ \parallel & & \downarrow h & & \downarrow h' \\ X & \xrightarrow{f'} & I' & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array}$$

com I e I' injetivos, $\underline{h}' : Y \longrightarrow Y'$ é isomorfismo em $\underline{\mathcal{B}}$.

Vamos construir uma triangularização de $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$.

Seja $(\mathcal{B}, \mathcal{S})$ uma categoria de Frobenius. Para todo $X \in \mathcal{B}$, denotamos por $[X]$ a classe dos objetos isomorfos à X em $\underline{\mathcal{B}}$. E ainda, seja $X \longrightarrow I(X) \longrightarrow X'$, com $I(X)$ injetivo. Para todo $X \in \mathcal{B}$ vamos tomar $\eta_X : [X] \longrightarrow [X']$ que é uma bijeção em $\underline{\mathcal{B}}$. O lema de Schanuel garante que η_X independe da escolha de $X \longrightarrow I(X) \longrightarrow X'$.

Agora, para todo $X \in \mathcal{B}$, vamos tomar as confluções $X \xrightarrow{\mu(X)} I(X) \xrightarrow{\pi(X)} TX$, onde $TX = \eta_X[X]$ e $I(X)$ é injetivo. Seja $\alpha : X \rightarrow Y$ um morfismo, como $\mu(X)$ é inflação e $I(Y)$ é injetivo, existe $I(\alpha)$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\mu(X)} & I(X) & \xrightarrow{\pi(X)} & TX \\ \alpha \downarrow & & \downarrow I(\alpha) & & \\ Y & \xrightarrow{\mu(Y)} & I(Y) & \xrightarrow{\pi(Y)} & TY \end{array}$$

Em particular, temos $T(\alpha)$, tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\mu(X)} & I(X) & \xrightarrow{\pi(X)} & TX \\ \alpha \downarrow & & \downarrow I(\alpha) & & \downarrow T(\alpha) \\ Y & \xrightarrow{\mu(Y)} & I(Y) & \xrightarrow{\pi(Y)} & TY \end{array}$$

O morfismo $T(\alpha)$ não depende da escolha de $I(\alpha)$ em $\underline{\mathcal{B}}$. Assim, temos um funtor aditivo $T : \underline{\mathcal{B}} \longrightarrow \underline{\mathcal{B}}$. Prova-se que T é uma auto-equivalência de $\underline{\mathcal{B}}$.³

Dado um morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ em $\mathcal{B}$. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\mu(X)} & I(X) & \xrightarrow{\pi(X)} & TX \\ \alpha \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\beta} & C_\alpha & \xrightarrow{\gamma} & TX \end{array}$$

onde as linhas são confluções e C_α é o push-out de α e $\mu(X)$. A classe formada pelos **triângulos distingüidos**

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} C_\alpha \xrightarrow{\gamma} TX$$

e seus isomorfos produz uma triangularização da categoria estável de Frobenius $\underline{\mathcal{B}}$.⁴

³Proposição da página 13 de [10].

⁴Teorema 2.6, página 16 de [10].

Exemplo: Seja Λ uma κ -álgebra. A categoria de complexos limitados de Λ -módulos $C^b(\Lambda)$ possui uma estrutura de categoria exata $\mathcal{S}$ onde as confluções são dadas por sequências de complexos $X^\bullet \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow Z^\bullet$, que cindem em cada nível, ou seja, as sequências $0 \longrightarrow X^i \longrightarrow Y^i \longrightarrow Z^i \longrightarrow 0$ cindem, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Seja $X \in \text{mod}(\Lambda)$, vamos denotar por $I^i(X)^\bullet$ tal que $I^i(X)^{i-1} = I^i(X)^i = X$, $I^i(X)^j = 0$ para $j \neq i-1, i$ e $d_{I^i(X)}^{i-1} = 1_X$. O complexo $I^i(X)^\bullet$ e suas translações são $\mathcal{S}$ -injetivos e $\mathcal{S}$ -projetivos indecomponíveis em $C^b(\Lambda)$. Além disso, $C^b(\Lambda)$ admite suficientes $\mathcal{S}$ -injetivos. De fato, seja $X^\bullet \in C^b(\Lambda)$, vamos denotar por $I(X^\bullet)^\bullet$ o complexo $\bigoplus_i I^i(X^i)$. Agora vamos definir o morfismo $x^\bullet : X^\bullet \longrightarrow I(X^\bullet)^\bullet$ por $(1_X, d_X^{i-1}) : X^i \longrightarrow X^i \oplus X^{i+1}$. Assim, é fácil verificar que a sequência $x^\bullet : X^\bullet \longrightarrow I(X^\bullet)^\bullet \longrightarrow T(X^\bullet)^\bullet$ pertence à $\mathcal{S}$. A cobertura projetiva de $X^\bullet$ é obtida de forma similar. Segue que $C^b(\Lambda)$ é de Frobenius. Além disso, prova-se que a categoria estável de $C^b(\Lambda)$, para estas confluções, é equivalente a categoria homotópica $K^b(\Lambda)$ [10]. Com isso concluímos que $K^b(\Lambda)$ é triangulada, o funtor suspensão T coincide com o funtor shift [1] e C_α , o complexo chamado **cone**, é da forma

$$\dots \longrightarrow X^i \oplus Y^{i-1} \xrightarrow{d_{C_\alpha}^{i-1}} X^{i+1} \oplus Y^i \xrightarrow{d_{C_\alpha}^i} X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \longrightarrow \dots$$

onde

$$d_{C_\alpha}^i = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & \alpha^{i+1} \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix}$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Vamos denotar por $\text{proj}(\Lambda)$ (resp. $\text{inj}(\Lambda)$) a subcategoria completa de $\text{Mod}(\Lambda)$ cujos objetos são o Λ -módulos projetivos (resp. injetivos). Assim, $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ (resp. $K^b(\text{inj}(\Lambda))$) uma subcategoria completa de $K^b(\Lambda)$. Desta forma, obtemos os funtores $K^b(\text{proj}(\Lambda)) \longrightarrow K^b(\Lambda) \longrightarrow D^b(\Lambda)$ e

$K^b(\text{inj}(\Lambda)) \longrightarrow K^b(\Lambda) \longrightarrow D^b(\Lambda)$. Se Λ possui dimensão global finita esses funtores são triângulo equivalências [25]. Se Λ não possui dimensão global finita a situação se torna um pouco mais complicada, neste caso, $D^b(\Lambda)$ é equivalente triângulo equivalente à $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$ e $K^{+,b}(\text{inj}(\Lambda))$. Lembrando que existe um mergulho de $\text{Mod}(\Lambda)$ em $D^b(\Lambda)$, sejam $X, Y \in \text{Mod}(\Lambda)$, utilizando a resolução projetiva e a triângulo equivalência entre $D^b(\Lambda)$ e $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$ para $i > 0$ temos

$$\text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(T^i X, Y) = 0 \text{ e } \text{Hom}_{D^b(\Lambda)}(X, T^i Y) = \text{Ext}_{\text{Mod}(\Lambda)}^i(X, Y).$$

Capítulo 4

Teoria de Auslander-Reiten

Uma das técnicas mais eficientes para se estudar a estrutura da categoria de módulos de uma álgebra é a Teoria de Auslander-Reiten. Esta teoria permite explicitar as classes de módulos indecomponíveis e os geradores dos espaços de morfismos irredutíveis em sequências exatas curtas que quase cindem, chamadas sequências de Auslander-Reiten. Como a categoria de Λ -módulos é Krull-Schmidt, ou seja, todo módulo se decompõe em soma direta de módulos indecomponíveis de forma única, a menos de isomorfismo, conhecer as sequências de Auslander-Reiten de uma álgebra permite obter muitas informações da categoria de módulos (e portanto das representações) da álgebra.

Na primeira seção deste capítulo vamos descrever, de forma sucinta, a teoria de Auslander-Reiten para a categoria de Λ -módulos. Nosso objetivo, nas seções seguintes é apresentar a Teoria de Auslander-Reiten para a categoria derivada de complexos limitados e traçar um paralelo entre as duas teorias.

4.1 Teoria de Auslander-Reiten na categoria de módulos

A Teoria de Auslander-Reiten para categoria de módulos foi introduzida por Maurice Auslander e Idun Reiten em [3] onde os resultados omitidos desta seção podem ser encontrados.

Seja κ um corpo algebricamente fechado¹ e Λ uma κ -álgebra de dimensão finita. Ao longo deste capítulo, $\text{Mod}(\Lambda)$ representa a categoria de Λ -módulos à direita.

Definição 4.1 *Uma sequência exata curta em $\text{Mod}(\Lambda)$*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

é chamada sequência que quase cinde ou sequência de Auslander-Reiten (SAR) se:

¹O caso não algebricamente fechado é um pouco diferente, mas fundamentalmente igual.

(i) f é minimal que quase cinde à esquerda;

(ii) g é minimal que quase cinde à direita.

O teorema à seguir fornece uma caracterização para as SAR.

Teorema 4.2 *Seja*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta em $\text{Mod}(\Lambda)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) A sequência é SAR;

(ii) L é indecomponível e g quase cinde à direita;

(iii) N é indecomponível e f quase cinde à esquerda;

(iv) f é minimal que quase cinde à esquerda;

(v) g é minimal que quase cinde à direita;

(vi) L e N são indecomponíveis, f e g são irredutíveis.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [1], página 105.

Pelo teorema anterior podemos concluir que em uma SAR os objetos inicial e final são indecomponíveis e adicionando o teorema 1.30, página 20, podemos determinar todos os morfismos irredutíveis que partem de L ou que chegam em N . Mas será que dado um objeto indecomponível existe uma SAR começando ou terminando nele? Os próximos resultados mostram como Auslander e Reiten responderam à esta pergunta.

Primeiramente vamos considerar o funtor contravariante

$$(-)^t = \text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \text{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda^{op}).$$

Dado $M \in \text{Mod}(\Lambda)$, tome

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

uma apresentação projetiva minimal de M , que conforme visto na página 11 é uma sequência exata tal que $P_0 \xrightarrow{p_0} M$ e $P_1 \xrightarrow{p_1} \ker(p_0)$ são coberturas projetivas. Aplicando o funtor $(-)^t$, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \longrightarrow \text{coker}(p_1^t) \longrightarrow 0.$$

Denotamos $\text{coker}(p_1^t) = \text{Tr}M$ e o denominamos **transposta de M**. A transposta $\text{Tr} : \text{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda^{op})$ não define uma dualidade entre $\text{Mod}(\Lambda)$ e

$\text{Mod}(\Lambda^{op})$, mas define uma dualidade entre as categorias estáveis $\overline{\text{Mod}}(\Lambda)$ e $\overline{\text{Mod}}(\Lambda^{op})$.

Proposição 4.3 *A correspondência $\text{Tr} : \text{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda^{op})$ que envia $M \longmapsto \text{Tr}M$ induz um funtor dualidade $\text{Tr} : \overline{\text{Mod}}(\Lambda) \longrightarrow \overline{\text{Mod}}(\Lambda^{op})$.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [1], página 110.

A dualidade Tr definida em 4.3 é chamada **transposição**. Ela transforma Λ -módulos à direita em Λ -módulos à esquerda e vice-versa. Assim, para definir um funtor de $\text{Mod}(\Lambda)$ em $\text{Mod}(\Lambda)$ precisamos compô-lo com outra dualidade entre Λ -módulos à direita e à esquerda. Vamos utilizar a dualidade standard $D = \text{Hom}_\kappa(-, \kappa)$ vista na página 15.

Definição 4.4 *As translações de Auslander-Reiten são definidas pela composição de Tr e D , a saber,*

$$\tau = D\text{Tr} \quad \text{e} \quad \tau^{-1} = \text{Tr}D.$$

Definição 4.5 *O funtor definido $\nu = D\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \text{Mod}(\Lambda) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda)$ é chamado funtor de Nakayama.*

Lembrando que $\text{proj}(\Lambda)$ e $\text{inj}(\Lambda)$ representam, respectivamente, as subcategorias completas de $\text{Mod}(\Lambda)$ formada por módulos projetivos e injetivos. As translações de Auslander-Reiten induzem uma equivalência nas subcategorias estáveis, projetiva e injetiva. Antes de verificar tal fato, vejamos o seguinte resultado.

Proposição 4.6 *O funtor de Nakayama ν induz uma equivalência entre as subcategoria $\text{proj}(\Lambda)$ e $\text{Inj}(\Lambda)$, cujo funtor quase inverso é:*

$$\nu^{-1}(-) = \text{Hom}_\Lambda(D\Lambda, -)$$

ou seja,

$$\text{proj}(\Lambda) \xrightleftharpoons[\nu^{-1}]{\nu} \text{inj}(\Lambda)$$

Demonstração: Como os funtores são aditivos, é suficiente verificarmos para os módulos indecomponíveis.

Seja $e\Lambda \in \text{proj}(\Lambda)$, com e idempotente primitivo. temos

$$\nu(e\Lambda) = D\text{Hom}_\Lambda(e\Lambda, \Lambda) \cong D(\Lambda e) \in \text{inj}(\Lambda) \quad \text{e}$$

$$\nu^{-1}(D(\Lambda e)) = \text{Hom}_\Lambda(D\Lambda, D(\Lambda e)) \cong \text{Hom}_{\Lambda^{op}}(\Lambda e, \Lambda) \cong e\Lambda.$$

□

Corolário 4.7 *As translações de Auslander-Reiten τ e τ^{-1} induzem uma equivalência mutuamente inversas*

$$\overline{\text{Mod}}(\Lambda) \underset{\tau^{-1}}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \underline{\text{Mod}}(\Lambda).$$

O próximo resultado será de grande importância na demonstração da existência de SAR.

Teorema 4.8 (Fórmulas de Auslander-Reiten) *Sejam Λ uma κ -álgebra e $M, N \in \text{Mod } \Lambda$. Então existe um isomorfismo*

$$\text{Ext}_{\Lambda}^1(M, N) \cong D\overline{\text{Hom}}_{\Lambda}(\tau^{-1}N, M) \cong D\underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(N, \tau M)$$

que é funtorial nas duas variáveis.

A demonstração pode ser vista em [1], página 118.

O resultado à seguir é um dos mais importantes na teoria desenvolvida por Auslander e Reiten em [3], que leva o nome dos dois. O teorema à seguir garante a existência de sequência de Auslander-Reiten na categoria $\text{Mod}(\Lambda)$ de um κ -álgebra Λ de dimensão finita.

Teorema 4.9 (Existência de sequências de Auslander-Reiten)

(i) *Para todo módulo indecomponível não projetivo M , existe uma sequência de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$;*

(ii) *Para todo módulo indecomponível não injetivo L , existe uma sequência de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-1}L \longrightarrow 0$;*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [1] e [3]. Ela será também uma consequência dos resultados do último capítulo.

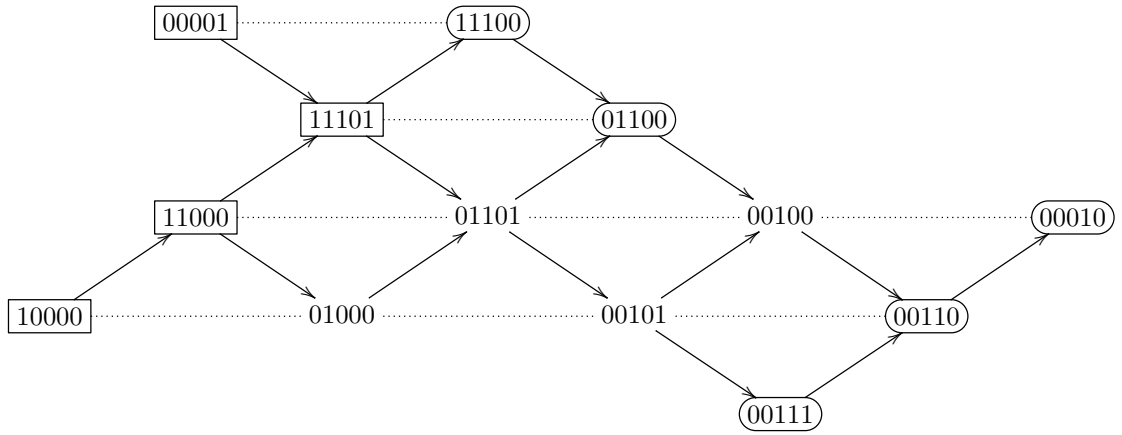
O exemplo à seguir e os demais exemplos deste capítulo utilizarão a linguagem de representação de quivers e a equivalência entre esta categoria e a categoria de módulos à esquerda sobre a respectiva álgebra de caminhos.²

Exemplo: Seja Λ a κ -álgebra de caminhos dada pelo quiver à seguir.

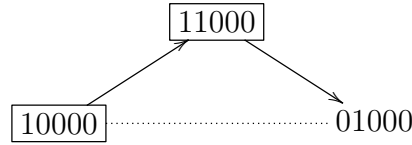
$$\begin{array}{ccccc} & & 5 & & \\ & & \circ & & \\ & & \downarrow d & & \\ 1 & \xrightarrow{a} & 2 & \xrightarrow{b} & 3 & \xrightarrow{c} & 4 \\ \circ & & \circ & & \circ & & \circ \end{array}$$

²Aos leitores que ainda não estão familiarizados com tal linguagem recomendamos uma breve leitura dos capítulos 2 e 3 de [1].

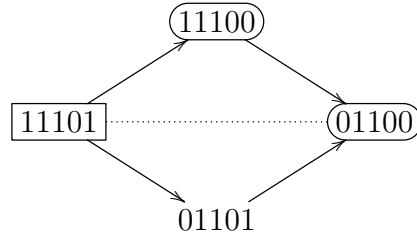
com $bc = 0$. Então seu quiver de Auslander-Reiten é dado à seguir



Os vértices do quiver representam classes de módulos indecomponíveis, as setas são os geradores de morfismos irreduzíveis e os segmentos pontilhados são as translações de Auslander-Reiten. Os módulos com moldura retangular são projetivos, já os módulos com moldura arredondada são injetivos. O módulo $\textcircled{00111}$ é injetivo e projetivo, por este motivo não existe SAR começando ou terminando no mesmo. Tomando o módulo $L = \boxed{10000}$, que não é injetivo, temos a SAR

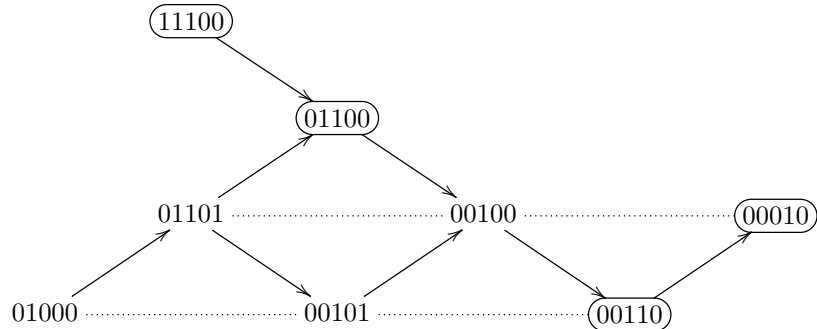


começando em L . Logo, $01000 = \tau^{-1}L$. Tomando o módulo $M = \textcircled{01100}$, que não é projetivo, temos a SAR

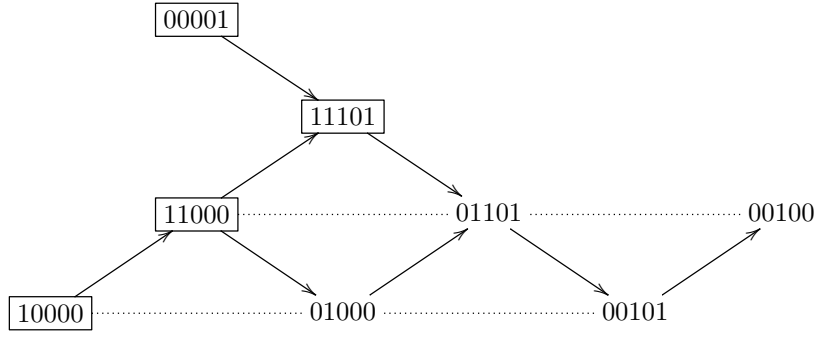


terminando em M . Logo, $\boxed{11101} = \tau M$.

E ainda, o quiver da categoria estável por projetivos



e da categoria estável por injetivos



são equivalentes.

4.2 Teoria de Auslander-Reiten em categorias derivadas

Embora a categoria de módulos e a categoria derivada possuam estruturas diferentes, uma é abeliana e a outra é triangulada, uma teoria similar, também conhecida como Teoria de Auslander-Reiten, existe no âmbito das categorias derivadas. Esta teoria foi desenvolvida por Dieter Happel em [10]. Neste contexto, o papel das SAR é desempenhado por triângulos de Auslander-Reiten, ou seja, os complexos indecomponíveis e os geradores de morfismos irreduzíveis ocorrem em triângulos de Auslander-Reiten.

Vamos apresentar nesta seção a teoria num âmbito mais geral, em categorias trianguladas compactamente geradas. Nas seções seguintes, particularizaremos os resultados para categorias derivadas de Λ -módulos.

Definição 4.10 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada e KRS. Dizemos que*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX,$$

*um triângulo exato em $\mathcal{C}$, é um **triângulo de Auslander-Reiten (TAR)** se as seguintes condições são satisfeitas:*

(AR1) X, Z são indecomponíveis;

(AR2) $\gamma \neq 0$;

(AR3) Se $f : W \rightarrow Z$ não é uma retração, então existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $f'\beta = f$.

A condição **(AR2)** garante por 3.2, página 30, que o triângulo não cinde, e segundo 3.3, página 31, a condição **(AR3)** pode ser substituída por $f\gamma = 0$. Ou ainda, pela condição dual dada pelo lema à seguir.

Lema 4.11 *Sejam $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$ um triângulo exato em $\mathcal{C}$ que satisfaz as condições (AR1), (AR2) e (AR3). Se $X \xrightarrow{f} W$ não é seção, então existe $Y \xrightarrow{f'} W$, tal que $\alpha f' = f$.*

Demonstração: Aplicando (TR1) no morfismo $X \xrightarrow{f} W$ temos um triângulo $X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W' \xrightarrow{h} TX$ aplicando (TR2) temos

$$T^{-1}W' \xrightarrow{-T^{-1}h} X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} W'$$

e aplicando (TR4) à composição $(-T^{-1}h)\alpha$, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}W' & \xlongequal{\quad} & T^{-1}W' & & & & \\ \downarrow -T^{-1}h & & \downarrow -T^{-1}h\alpha & & & & \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow r & & \parallel & & \downarrow Tf \\ W & \xrightarrow{t_1} & Y' & \xrightarrow{t_2} & Z & \xrightarrow{\gamma Tf} & TW \\ \downarrow g & & \downarrow s & & & & \\ W' & \xlongequal{\quad} & W' & & & & \end{array}$$

Se t_2 não é retração por (AR3) existe $t'_2 : Y' \rightarrow Y$ tal que $t'_2\beta = t_2$. Então por (TR3) temos o seguinte morfismo entre triângulos:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow r & & \parallel & & \downarrow Tf \\ W & \xrightarrow{t_1} & Y' & \xrightarrow{t_2} & Z & \xrightarrow{\gamma Tf} & TW \\ \downarrow k & & \downarrow t'_2 & & \parallel & & \downarrow Tk \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \end{array}$$

Como f não é seção e X é indeconponível, fk é nilpotente. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(fk)^n = 0$. Então temos

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow 0 & & \downarrow (rt'_2)^n & & \parallel & & \downarrow 0 \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \end{array}$$

um morfismo entre triângulos. Então $\gamma = 0$, uma contradição. Logo t_2 é retração, então por 3.2, t_1 é seção. Portanto, existe $t'_1 : Y' \rightarrow W$ tal que $t_1 t'_1 = 1_W$. Tomando $f' = rt'_1$, temos $\alpha f' = \alpha rt'_1 = f t_1 t'_1 = f$.

□

Considere $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada. Vamos apresentar alguns resultados que serão aplicados na caracterização dos TAR.

Lema 4.12 *Se $\alpha : X \rightarrow Y$ é um morfismo que quase cinde à esquerda, então $\text{End}(X)$ é local.*

Demonstração: Como α quase cinde à esquerda, pelo lema 1.8, página 9, X é indecomponível, logo pela proposição 1.26, da página 17, $\text{End}(X)$ é local. □

Lema 4.13 *Seja $\alpha : X \rightarrow Y$ um morfismo não nulo. Se $\text{End}(Y)$ é local, então α é minimal à esquerda.*

Demonstração: Seja $\phi \in \text{End}(Y)$ tal que $\alpha\phi = \alpha$. E sejam $M = \langle \alpha \rangle$ e $I = \langle \phi \rangle$ os $\text{End } Y$ -submódulos gerados por α e ϕ , respectivamente. Supondo $I \subseteq \text{rad}(\text{End}(Y))$, como $\alpha\phi = \alpha$, temos $M I = M$, e pelo lema de Nakayama [1], segue $M = 0$. Mas $M \neq 0$, pois α é não nulo. Assim $I \not\subseteq \text{rad}(\text{End}(Y))$, logo $\phi \notin \text{rad}(\text{End}(Y))$ e como $\text{End}(Y)$ é local ϕ é isomorfismo. □

Lema 4.14 *Seja $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$ um triângulo. O morfismo β é minimal à direita se, e somente se, γ é minimal à esquerda.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que exista $\psi \in \text{End}(TX)$ tal que $\gamma\psi = \gamma$, então aplicando (TR3) temos o homomorfismo entre triângulos

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX & \xrightarrow{-T\alpha} & TY \\ \phi \downarrow & & \parallel & & \downarrow \psi & & \downarrow T\phi \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX & \xrightarrow{-T\alpha} & TY \end{array}$$

Como $\phi\beta = \beta$ e por hipótese β é minimal à direita, temos ϕ isomorfismo. Logo ψ é isomorfismo e γ é minimal à esquerda.

($\Leftarrow$) Similar. □

Como prometido, apresentamos agora outras caracterizações dos TAR.

Proposição 4.15 *Seja $\varepsilon : X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$ um triângulo exato e suponha que β quase cinde à direita. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\text{End}(X)$ é local;
- (ii) β é minimal à direita;
- (iii) α quase cinde à esquerda;
- (iv) ε é um triângulo de Auslander-Reiten.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $\text{End}(X) \cong \text{End}(TX)$, logo $\text{End}(TX)$ é local e pelo lema 4.13, γ é minimal à esquerda. Pelo lema 4.14, β é minimal à direita.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótese β quase cinde à direita, logo β não é retração e pelo lema 3.2, α não é seção. Agora suponha que $\phi : X \rightarrow X'$ não é seção. Completando $-(T\gamma)\phi$ em um triângulo, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \parallel & & \downarrow T\phi \\ T^{-1}Z & \xrightarrow{-(T\gamma)\phi} & X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & Z \\ & & & & & & \downarrow \gamma T\phi \\ & & & & & & TX' \end{array}$$

Vamos mostrar que α' é seção. Suponha que α' não é seção então, pelo lema 3.2, β' não é retração. Por hipótese, β quase cinde à esquerda, logo existe $\psi' : Y' \rightarrow Y$ tal que $\psi'\beta = \beta'$. Aplicando (TR3) temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{\beta'} & Z & \xrightarrow{\gamma T\phi} & TX' \\ \downarrow \phi' & & \downarrow \psi' & & \parallel & & \downarrow T\phi' \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xrightarrow{\beta} & Z & \xrightarrow{\gamma} & TX \end{array}$$

Como por (ii) β é minimal à direita e $\beta = \psi\beta' = \psi\psi'\beta$, temos $\psi\psi'$ isomorfismo. Assim $\phi\phi'$ é isomorfismo e portanto ϕ é seção, uma contradição. Como α' é seção, existe $\alpha'' : Y' \rightarrow X'$ tal que $\alpha'\alpha'' = 1_{X'}$. Logo $\phi = \phi\alpha'\alpha'' = \alpha\psi\alpha''$ e então ϕ se fatora por α via $\psi\alpha''$ e portanto α quase cinde à esquerda.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Segue do lema 4.12.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) Segue da definição 4.10.

□

Dizemos que uma categoria triângulada $\mathcal{C}$ possui triângulos de Auslander-Reiten se para todo objeto indecomponível $Z \in \mathcal{C}$ existe um triângulo de Auslander-Reiten

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\beta} TX.$$

A existência de tais triângulos em categorias derivadas foi estudada por Dieter Happel em [10] e uma fórmula para os (TAR) foi desenvolvida por Henning Krause e Jue Le em [17], este último ainda mostrou em [18] uma relação entre Sequências de Auslander-Reiten e Triângulos de Auslander-Reiten. Antes de estudarmos estes resultados, vamos estudar a existência de TAR em categorias derivadas compactamente geradas, usando o teorema da Representabilidade de Brown.

4.2.1 Existência de triângulos de Auslander-Reiten em categorias trianguladas compactamente geradas via Representabilidade de Brown

Nesta seção vamos mostrar a existência de triângulos de Auslander-Reiten em categorias trianguladas compactamente geradas utilizando o Teorema da Representabilidade de Brown. Primeiramente, vamos definir alguns resultados e conceitos necessários.

Definição 4.16 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva. Um objeto $X \in \mathcal{C}$ é compacto se, e somente se, o funtor representável $\text{Hom}(X, -)$ preserva coprodutos infinitos.*

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada que possui coprodutos infinitos e é compactamente gerada, isto é, $\mathcal{C}$ é a menor categoria triangulada que contém os objetos compactos, em outras palavras, se $\text{Hom}(C, X) = 0$ para todo objeto C compacto, então $X = 0$.

Sabemos que o funtor contravariante $\text{Hom}(-, X)$ é cohomológico e leva coprodutos em produtos [2]. Um importante teorema, devido à Edgar Brown [5], conhecido como Teorema da Representabilidade de Brown mostra que estas propriedades caracterizam os funtores representáveis.

Teorema 4.17 (da Representabilidade de Brown) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria triangulada compactamente gerada. Um funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ é isomorfo à um funtor representável $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$, para algum $X \in \mathcal{C}$ se, e somente se, F é cohomológico e leva coprodutos arbitrários em produtos.*

Uma demonstração do teorema via funtores coerentes encontra-se em [16].

Vamos fixar $Z \in \mathcal{C}$ um objeto compacto e denotar por $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(Z)$ a álgebra de endomorfismos de Z . Dado I um Γ -módulo injetivo. O funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, -)$ é um Γ -módulo à esquerda onde multiplicação é dada pela composição de morfismos, ou seja, para todo $X \in \mathcal{C}$ temos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Obtemos o funtor

$$\text{Hom}_{\text{Mod } \Gamma}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, -), I) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$$

é contravariante e cohomológico. Além disso, este funtor leva coprodutos arbitrários em produtos. De fato, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, -)$ é um Γ módulo e o funtor $\text{Hom}_{\text{Mod}(\Gamma)}(-, I)$ é contravariante e exato, pois I é injetivo. Além disso, dado $Y = \bigsqcup Y_i \in \mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Mod}(\Gamma)}(\text{Hom}(Z, Y), I) &= \text{Hom}_{\Gamma}(\text{Hom}(Z, \bigsqcup Y_i), I) && Z \text{ compacto} \\ &\cong \text{Hom}_{\Gamma}(\bigsqcup \text{Hom}(Z, Y_i), I) && 1.31 \\ &\cong \prod \text{Hom}_{\Gamma}(\text{Hom}(Z, Y_i), I). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Representabilidade de Brown existe $W_Z \in \mathcal{C}$ tal que

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, -), I) \cong \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-, W_Z).$$

Segue do Lema de Yoneda, página 15, que W_Z é único a menos de isomorfismo.

Agora, suponha que o objeto compacto Z seja indecomponível em $\mathcal{C}$, pela 1.26, página 17, segue que $\Gamma = \mathrm{End}(Z)$ é local. Seja

$$\mu : \frac{\Gamma}{\mathrm{rad}_\mathcal{C} \Gamma} \rightarrow I$$

uma envolvente injetiva na categoria de Γ -módulos. Pelas condições acima, o teorema da Representabilidade de Brown fornece um isomorfismo entre funtores

$$\Psi_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(\Gamma)}(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, -), I) \rightarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(-, W_Z).$$

Aplicando o funtor em Z , obtemos $\gamma = (\pi\mu)\Psi_Z \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, W_Z)$, onde $\pi : \Gamma \rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{rad}_\mathcal{C} \Gamma}$ é a projeção canônica. Aplicando **(TR1)** e **(TR2)** em γ temos o triângulo

$$T^{-1}W_Z \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} W_Z$$

onde $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é o automorfismo suspensão.

Teorema 4.18 *O triângulo $T^{-1}W_Z \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} W_Z$ obtido acima é de Auslander-Reiten em $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Para demonstrar o teorema vamos utilizar a equivalência da proposição 4.15 mostrando que β quase cinde à direita e $\mathrm{End}(T^{-1}W_Z)$ é local.

Como Ψ_Z é isomorfismo e $\pi\mu \neq 0$, temos $(\pi\mu)\Psi_Z = \gamma \neq 0$ e pelo lema 3.2, α não é seção e β não é retração.

Agora vamos mostrar que β quase cinde à direita. Dado $f : V \longrightarrow Z$ que não é retração, aplicando $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, -)$, temos

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, V) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, f)} \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, Z) = \Gamma$$

cuja imagem está contida em $\mathrm{rad} \Gamma$, pois f não é retração. Segue que $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, f)\pi\mu = 0$. Como $\Psi_\bullet$ é isomorfismo natural entre funtores, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, Z), I) & \xrightarrow{\Psi_Z} & \mathrm{Hom}(Z, W_Z) \\ \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, f), I) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(f, W_Z) \\ \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(Z, V), I) & \xrightarrow{\Psi_V} & \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(V, W_Z) \end{array}$$

Assim

$$(\pi\mu)\Psi_Z \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, W_Z) = (\pi\mu) \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)\Psi_V$$

$$\gamma \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f, W_Z) = (0)\Psi_V$$

$$f\gamma = 0$$

Pelo lema 3.3, obtemos que β quase cinde à direita.

Resta agora mostrar que $\operatorname{End}(T^{-1}W_Z)$ é local. De fato, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(T^{-1}W_Z) &\cong \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(W_Z) && T \text{ automorfismo} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Gamma}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W_Z), I) && \Psi_Z \text{ isomorfismo} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Gamma}(\operatorname{Hom}_{\Gamma}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z), I), I) && \Psi_Z \text{ isomorfismo} \\ &= \operatorname{Hom}_{\Gamma}(\operatorname{Hom}_{\Gamma}(\Gamma, I), I) && \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) = \Gamma \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\Gamma}(I, I) && \operatorname{Hom}_{\Gamma}(\Gamma, I) \cong I \\ &= \operatorname{End}_{\Gamma}(I) \end{aligned}$$

Como o Γ -módulo $\frac{\Gamma}{\operatorname{rad}(\Gamma)}$ é simples [1], sua envolvente injetiva I é indecomponível, logo $\operatorname{End}_{\Gamma}(I)$ é local.

□

Observações: 1) A unicidade de W_Z , a menos de isomorfismo, garante a unicidade do triângulo de Auslander-Reiten a menos de isomorfismo;

2) Pela definição de TAR o objeto W_Z é indecomponível.

4.2.2 Caracterização de triângulos de Auslander-Reiten em $D^b(\Lambda)$

Seja Λ uma κ -álgebra de dimensão finita. Nosso objetivo nesta seção é aplicar os resultados da seção anterior à categoria derivada limitada $D^b(\Lambda)$. Observe que $D^b(\Lambda)$ é uma categoria triangulada compactamente gerada, mais especificamente, $D^b(\Lambda)$ é gerada por Λ . Tendo em vista a equivalência entre $D^b(\Lambda)$ e $K^{-,b}(\operatorname{proj}(\Lambda))$, descrita no capítulo 3, página 36, trabalharemos na categoria homotópica. Os objetos compactos em $K^{-,b}(\operatorname{proj}(\Lambda))$ foram caracterizados por Neeman em [23]. Um complexo é compacto se, e somente se, ele é limitado e formado por módulos projetivos finitamente gerados.

Seja $Z^{\bullet} \in K^b(\operatorname{proj}(\Lambda))$ um complexo compacto indecomponível. Assim, a álgebra de endomorfismos $\Gamma = \operatorname{End}(Z^{\bullet})$ é local. Então, pelo lema 1.25, página 17,

$\frac{\Gamma}{\text{End}(\Gamma)} \cong \kappa$ e sua envolvente injetiva é κ . O que permite reescrever o isomorfismo da seção anterior da seguinte forma

$$D \text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(Z^\bullet, -) \cong \text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(-, W_z).$$

O objeto W_z é caracterizado pelo seguinte teorema.

Teorema 4.19 *Sejam Z e Y complexos de Λ -módulos projetivos e suponha Z um objeto compacto em $K(\Lambda - \text{proj})$. Temos o isomorfismo*

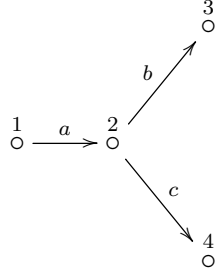
$$D \text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(Z, Y) \cong \text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(Y, \mathbf{p}\nu Z)$$

é natural em Z e Y . Onde $\mathbf{p}$ é a resolução projetiva.

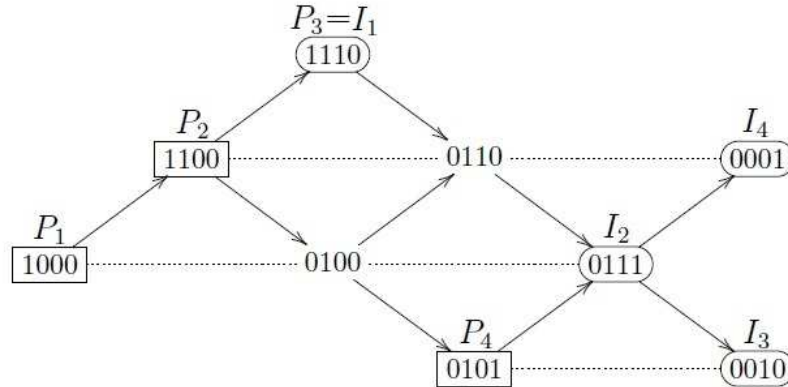
A demonstração deste resultado encontra-se em [9] e [18].

Assim, concluímos que $W_Z = \mathbf{p} \nu Z^\bullet$. este resultado também é conhecido como **Fórmula de Auslander-Reiten para complexos**.

Exemplo 1: Seja Λ a κ -álgebra de caminhos dada pelo quiver à seguir,



com $ac = 0$. Então seu quiver de Auslander-Reiten, no qual os módulos são Λ -módulos à esquerda, é dado à seguir



Em [24] foram construídos os TAR da categoria derivada desta classe de álgebras

de caminhos. Aplicando estes resultados obtemos o triângulo abaixo.

$$\begin{array}{c}
X^\bullet \\
\alpha \downarrow \\
Y^\bullet \\
\beta \downarrow \\
Z^\bullet \\
\gamma \downarrow \\
X^\bullet[1]
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 & \xrightarrow{c} & P_4 \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_4 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 & \xrightarrow{c} & P_4 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
\end{array}$$

Tomando o complexo concentrado $Z^\bullet = \overset{\bullet}{P}_4$ e aplicando o funtor de Nakayama obtemos, $\overset{\bullet}{I}_4$. O complexo $\overset{\bullet}{I}_4$, como previsto pelo teorema, possui resolução projetiva $P_1 \xrightarrow{a} P_2 \xrightarrow{c} P_4 = X^\bullet[1]$, ou seja, $X^\bullet[1] = \mathbf{p}\nu Z^\bullet$.

Exemplo 2: Considere agora o TAR abaixo, da categoria derivada da álgebra de caminhos do exemplo anterior, também extraído de [24].

$$\begin{array}{c}
X^\bullet \\
\alpha \downarrow \\
Y^\bullet \\
\beta \downarrow \\
Z^\bullet \\
\gamma \downarrow \\
X^\bullet[1]
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow (1 \ 0) & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{(a \ 0)} & P_2 \oplus P_3 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{ab} & P_3 & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow a & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Aplicando o funtor de Nakayama no complexo $Z^\bullet = 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{ab} P_3 \longrightarrow 0$, obtemos o complexo $\nu Z^\bullet = 0 \longrightarrow I_1 \xrightarrow{\nu(ab)} I_3 \longrightarrow 0$, mas ainda não existe uma ferramenta disponível para calcular a resolução projetiva de um complexo quando este não é concentrado, pois é necessário calcular o pull-back de tais objetos. Ainda assim, podemos verificar se o complexo $0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ é a resolução projetiva de $\nu Z^\bullet$, para isto vamos verificar se estes complexos são quasi-isomorfos. Calculando as cohomologias de $\nu Z^\bullet$ e $X^\bullet[1]$, temos

$$\begin{aligned}
H^{-1}(X^\bullet[1]) &= \frac{P_2}{0} \cong P_2, & H^i(X^\bullet[1]) &= \frac{0}{0} \cong 0 \text{ para todo } i \neq -1 \text{ e} \\
H^{-1}(\nu Z^\bullet) &= \frac{P_2}{0} \cong P_2, & H^0(\nu Z^\bullet) &= \frac{I_3}{I_3} \cong 0 \text{ e } H^i(\nu Z^\bullet) = \frac{0}{0} \cong 0 \text{ para todo} \\
&& i &\neq -1, 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\nu Z^\bullet$ e $X^\bullet[1]$ são quasi isomorfos. Portanto $X^\bullet[1] \cong \mathbf{p}\nu Z^\bullet$ em $K^{-,b}(\text{proj}(\Lambda))$.

4.3 De volta às Sequências de Auslander-Reiten

Ainda considerando a κ -álgebra da seção anterior, vamos tomar o módulo não injetivo $M = 0100$. Pelo teorema 4.2, da página 38, existe uma SAR que começa com M . Além disso, como visto no final do capítulo 2, o complexo concentrado $M^\bullet$ pode ser identificado em $D^b(\Lambda)$ com sua resolução projetiva $X^\bullet = 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{a} P_2 \longrightarrow 0$, facilmente calculada com o auxílio do quiver de Auslander-Reiten apresentado no exemplo 1 da seção anterior.

Considere o TAR

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^\bullet & & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 \longrightarrow 0 \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow (b \ c) \\
 Y^\bullet & & 0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{(ab \ 0)} & P_3 \oplus P_4 \longrightarrow 0 \\
 \beta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow a & & \parallel \\
 Z^\bullet & & 0 & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{(b \ c)} & P_3 \oplus P_4 \longrightarrow 0 \\
 \gamma \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\
 X^\bullet[1] & & P_1 & \xrightarrow{a} & P_2 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

na categoria derivada da álgebra do exemplo anterior.³ Para cada complexo $W^\bullet$ do triângulo, vamos calcular o cokernel do morfismo d_W^{-1} , ou seja, o módulo, $\frac{W^0}{\text{Im}(d_W^{-1})}$. Assim, para $X^\bullet$ obtemos

$$\text{coker}(a) = \frac{P_2}{\text{Im}(a)} = 0100,$$

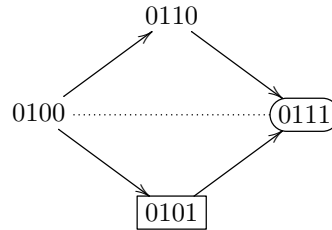
para $Y^\bullet$ obtemos

$$\text{coker}(ab \ 0) = \frac{P_3 \oplus P_4}{\text{Im}(ab \ 0)} = 0110 \oplus 0101,$$

e para $Z^\bullet$ obtemos

$$\text{coker}(b \ c) \frac{P_3 \oplus P_4}{\text{Im}(b \ a)} = 0111.$$

Por conseguinte, obtemos a sequência



que como vimos no Exemplo 1 da seção anterior é de Auslander-Reiten iniciando em M .

³O cálculo deste TAR também encontra-se em [24].

Este fato curioso também ocorre com outros triângulos e não é coincidência. Nosso objetivo nesta seção é identificar tais triângulos. Para isto, precisamos caracterizar os TAR a partir de seu começo, faremos isto utilizando o funtor

$$\mathbf{t} : K(\Lambda - \text{proj}) \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)} K(\Lambda^{op} - \text{proj}) \xrightarrow{D} K(\Lambda - \text{inj}) \xrightarrow{\mathbf{p}} K(\Lambda - \text{proj})$$

que se restringe à uma equivalência

$$\mathbf{t} : K^c(\text{proj}(\Lambda)) \rightarrow \mathfrak{C}$$

onde $K^c(\text{proj}(\Lambda))$ é a subcategoria completa de $K(\text{proj}(\Lambda))$ de objetos que são compactos, e $\mathfrak{C}$ é a subcategoria completa de $K(\text{proj}(\Lambda))$ de complexos isomorfos à X da forma:⁴

- (i) $X^n = 0$ para $n \geq 0$;
- (ii) $H^n(X) = 0$ para $n \leq 0$;
- (iii) $H^n(X)$ é módulo de dimensão finita Λ para todo n .

Cada complexo $X^\bullet \in K(\text{proj}(\Lambda))$ que satisfaz (i), (ii) e (iii) é levado pelo funtor quase inverso da equivalência $\mathbf{t}$ em $\text{Hom}_\Lambda(\mathbf{p}DX, \Lambda) \in K^b(\text{proj}(\Lambda))$, para facilitar a notação vamos denotar $\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda)$ por $(-)^*$. Ou seja,

$$\mathbf{t}^{-1} : K(\Lambda - \text{proj}) \xrightarrow{K(\Lambda^{op} - \text{inj})} K(\Lambda^{op} - \text{inj}) \xrightarrow{(-)^*} K(\Lambda - \text{proj}).$$

Consequentemente para cada $X^\bullet \in K(\text{proj}(\Lambda))$ indecomponível que satisfaz (i), (ii) e (iii), mas não é necessariamente compacto, existe um triângulo de Auslander-Reiten

$$X^\bullet[-1] \longrightarrow Y^\bullet \longrightarrow (\mathbf{p}DX^\bullet)^* \longrightarrow X^\bullet \quad (4.1)$$

Seja $M \in \text{Mod}(\Lambda)$ um módulo indecomponível não-injetivo finitamente apresentável, ou seja, sua resolução projetiva possui um número finito de módulos projetivos. Como vimos anteriormente o complexo concentrado, que será denotado por $M^\bullet$ é quasi-isomorfo à $\mathbf{p}M^\bullet$. Como D é um funtor cohomológico, $D\mathbf{p}M^\bullet$ e $DM^\bullet$ também são quasi-isomorfos, logo $\mathbf{p}D\mathbf{p}M^\bullet \cong \mathbf{p}DM^\bullet$ em $K^b(\text{proj}(\Lambda))$ e por 4.1, temos

$$\mathbf{p}M^\bullet[-1] \xrightarrow{\alpha} Y^\bullet \xrightarrow{\beta} (\mathbf{p}DM^\bullet)^* \xrightarrow{\gamma} \mathbf{p}M^\bullet \quad (4.2)$$

Pelo lema 1.16, da página 12, $\mathbf{p}DM^\bullet$ é formada por componentes finitamente gerados, pois $DM^\bullet$ é finitamente apresentável.

Além disso, $K(\text{proj}(\Lambda))$ é a categoria estável da categoria de Frobenius $C(\text{proj}(\Lambda))$. Assim, sem perda de generalidade (trocando por objetos isomorfos se necessário)

$$\mathbf{p}M^\bullet[-1] \xrightarrow{\alpha} Y^\bullet \xrightarrow{\beta} (\mathbf{p}DM^\bullet)^* \quad (4.3)$$

⁴Tal caracterização pode ser vista com detalhes em [4].

é uma conflação e as sequências

$$0 \longrightarrow \mathbf{p}M^\bullet[-1]^i \xrightarrow{\alpha^i} Y^{\bullet i} \xrightarrow{\beta^i} ((\mathbf{p}DM^\bullet)^*)^i \longrightarrow 0$$

cindem, para todo i .

Dado $M^\bullet \in K(\text{proj}(\Lambda))$ vamos denotar por $\text{Cok}^1(M^\bullet)$ o cokernel de d_M^{-1} , ou seja, $\text{Cok}^1(M^\bullet)$ é o Λ -módulo $\frac{M^0}{\text{Im } d_M^{-1}}$. Não é difícil verificar que $\text{Cok}^1 : K(\text{proj}(\Lambda)) \longrightarrow \text{Mod}(\Lambda)$ é um funtor covariante exato. Desta forma, aplicando o funtor Cok^1 na conflação 4.3 obtemos a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Cok}^1(\mathbf{p}M^\bullet[-1]) \xrightarrow{\overline{\alpha^{-1}}} \text{Cok}^1(Y^\bullet) \xrightarrow{\overline{\beta^{-1}}} \text{Cok}^1((\mathbf{p}DM^\bullet)^*) \longrightarrow 0.$$

Note que $\text{Cok}^1(\mathbf{p}M^\bullet[-1]) = M$ e $\text{Cok}^1((\mathbf{p}DM^\bullet)^*) = \text{Tr } DM = \tau^{-1}M$, assim temos a sequência

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\alpha^{-1}}} \text{Cok}^1(Y^\bullet) \xrightarrow{\overline{\beta^{-1}}} \text{Tr } DM \longrightarrow 0$$

que conforme o teorema à seguir é sequência de Auslander-Reiten.

Teorema 4.20 *Seja $M \in \text{Mod}(\Lambda)$ um módulo indecomponível não-injetivo finitamente apresentável. A sequência*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\alpha^{-1}}} \text{Cok}^1(Y^\bullet) \xrightarrow{\overline{\beta^{-1}}} \text{Tr } DM \longrightarrow 0,$$

obtida conforme a construção anterior, é sequência de Auslander-Reiten.

Demonstração: Para demonstrar que a sequência é de Auslander-Reiten, vamos utilizar a equivalência do teorema 4.2, da página 38. Primeiramente, vamos mostrar que $\overline{\alpha^{-1}}$ quase cinde à esquerda. O morfismo $\overline{\alpha^{-1}}$ não é seção, caso contrário α^{-1} poderia ser levantado para se obter uma inversa à esquerda de α , uma contradição, uma vez que α quase cinde à esquerda.

Agora, observe que Cok^1 induz uma bijeção

$$\phi : \text{Hom}_{K(\text{proj}(\Lambda))}(\mathbf{p}M^\bullet[1], \mathbf{p}N^\bullet[1]) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}(\Lambda)}(M, N)$$

para todo $N \in \text{Mod}(\Lambda)$. Assim, para todo $h \in \text{Hom}_{\text{Mod}(\Lambda)}(M, N)$ que não é seção, $\phi^{-1}(h)$ não é seção em $K(\text{proj}(\Lambda))$ e como 4.3 é conflação, existe $f : N \longrightarrow \mathbf{p}N^\bullet[1]$ tal que $\phi^{-1}(h) = \alpha f$. Aplicando ϕ temos $h = \overline{\alpha^{-1}}\phi(f)$. Portanto $\overline{\alpha^{-1}}$ quase cinde

à esquerda.

Por fim, como $TrDM = \tau^{-1}X$ é indecomponível concluímos que a sequência é Auslander-Reiten.

□

Este resultado é de extrema relevância, uma vez que a partir dele é possível ver como as teoria de Auslander-Reiten para a categoria deriva e para a categoria de módulos estão intimamente interligadas.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem; D. Simson; A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [2] I. Assem. *Algèbres et Modules*. Université de Sherbrooke, Quebec (1995).
- [3] M. Auslander; I. Reiten; S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [4] A. K. Bousfield.
- [5] E. H. Brown. *Abstract homotopy theory*. Trans. Amer. Math. Soc. **119** (1965), 79-85.
- [6] P. Gabriel. *Unzerlegbare Darstellungen*. Manuscripta Math. **6** (1972) 71–103.
- [7] S. Gelfand; Y. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer, Berlin (1996).
- [8] P. Grivel. *Catégories dérivées et foncteurs dérivés*. In: Borel, A. (ed.) Algebraic D-modules. Academic, London (1987).
- [9] D. Happel. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Math. Soc. Lectures Note Series, vol. 119. Cambridge University Press, Cambridge (1988).
- [10] D. Happel. *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras*. London Math. Soc. **112** (3) (1991) 641–648.
- [11] D. Happel. *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. Comment. Math. Helvetici **62** (1987) 339–389.
- [12] C. Holdaway; K. Zatloukal. *The stable category of a frobenius category is triangulated*. Presentation topic of Autumn course of Homological Algebra, Washington, (2012).
- [13] T. Holm. *Exact categories*
- [14] B. Keller. *Chain Complexes and Stable Categories*. Manus. Math **67** (1990) 379-417.

- [15] B. Keller. *Derived categories and Tilting*. In: Handbook of Tilting Theory, London Math. Soc., LNS 332 (5), Cambridge University Press (2007).
- [16] H. Krause. *Derived categories, Resolutions and Brown Representability*. Notes of a Course at the Summer School - Interactions between Homotopy Theory and Algebras, Chicago, 2004. Disponível em [arXiv:math/0511047](https://arxiv.org/abs/math/0511047).
- [17] H. Krause; J. Le. *The Auslander-Reiten formula for complexes of modules*. Disponível em [arXiv:math/0412085v2](https://arxiv.org/abs/math/0412085v2)
- [18] J. Le. *Auslander-Reiten theory on the homotopy category of projective modules*. in Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009) 1430-1437.
- [19] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer (1971).
- [20] J. P. May. *The additivity of traces in triangulated categories*. Advances in Mathematics **163**(2001), 34-73.
- [21] K. Morita. *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition*. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. **6**, (1958).
- [22] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. J. London Math. Soc. **39** (1989) 436–456.
- [23] A. Neeman. *The homotopy category of flat modules, and Grothendieck duality*. Invent. Math. 174 (2) (2008) 255-308.
- [24] R. C. Picanço. *Morfismos Irredutíveis na Categoria Derivada de Álgebras Gentle*. Tese de doutorado. UFMG (2010)
- [25] J. Verdier. *Catégories dérivées, état 0*. SGA 4 1/2, Springer LNM **569** (1977) 262–311.