

ROSÂNGELA ASSIS PIRES

**INCOMPRESSIBILIDADE DE TORO TRANSVERSAL A
CAMPOS DE VETORES**

Dissertação apresentada à Universidade
Federal de Viçosa, como parte das exi-
gências do Programa de Pós-Graduação
em Matemática, para obtenção do título
de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

P667i Pires, Rosângela Assis, 1993-
2017 Incompressibilidade de toro transversal a campos de vetores
/ Rosângela Assis Pires. – Viçosa, MG, 2017.
v, 73f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.72-73.

1. Toro (Geometria). 2. Campos vetoriais. I. Universidade
Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de
Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22 ed. 512.2

ROSÂNGELA ASSIS PIRES

**INCOMPRESSIBILIDADE DE TORO TRANSVERSAL A
CAMPOS DE VETORES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 20 de fevereiro de 2017.

Carlos Arnaldo Morales Rojas

Alexandre Miranda Alves

Bulmer Mejía García
(Coorientador)

Enoch Humberto Apaza Calla
(Orientador)

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus.

Sou muitíssimo grata aos meus pais, pelo exemplo, carinho e motivação.

Agradeço ao meu orientador Enoch e ao meu coorientador Bulmer, pela paciência, aprendizado, pelas suas correções e incentivo.

Agradeço aos membros da banca de defesa pelas sugestões e correções.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, pelos momentos de descontração e de estudos.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos serviços prestados ao decorrer do curso, especialmente ao secretário da pós graduação em matemática, pela sua atenção e eficiência.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Conceitos de Sistemas Dinâmicos	4
1.1 Noções sobre variedades diferenciáveis	4
1.1.1 Diferenciabilidade entre variedades	6
1.1.2 Espaço Tangente	7
1.1.3 Imersões e Mergulhos	10
1.2 Noções de Sistemas dinâmicos	13
1.2.1 Função de Primeiro Retorno de Poincaré e Hiperbolicidade	23
2 Noções de Topologia Algébrica e Aspectos Topológicos	34
2.1 Conceitos básicos de Topologia Algébrica	34
2.1.1 Grupo Fundamental	42
2.2 Aspectos topológicos	50
3 Resultado Principal	57
3.1 Resultados preliminares	57
3.2 Prova do Teorema Principal	69
Considerações Finais	71
Referências Bibliográficas	72

Resumo

PIRES, Rosângela Assis, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Incompressibilidade de Toro Transversal a Campos de Vetores.** Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla. Coorientador: Bulmer Mejía García.

No presente trabalho, nosso objetivo principal é dar condições suficientes para um toro T mergulhado numa 3-variedade fechada orientável M ser incompressível, isto é, o homomorfismo $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ induzido pela aplicação inclusão é injetor. Nós assumimos que T é transversal a um campo de vetores X , exibindo uma única órbita O que não intersecta T . Se, além disso, O é hiperbólica e não homotópica a um ponto em M então T é incompressível e M é irreduzível (toda esfera mergulhada em M borda uma bola).

Abstract

PIRES, Rosângela Assis, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017.
Incompressibility of Torus Transverse to Vector Fields. Adviser: Enoch Humberto Apaza Calla. Co-adviser: Bulmer Mejía García.

In this paper, our main goal is to give sufficient conditions for a torus T embedded in a closed orientable 3-manifold M to be incompressible, this is, the homomorphism $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ induced by the inclusion map is injective. We assume that T is transverse to a vector field X , exhibiting a unique orbit O which does not intersect T . If, in addition, O is hyperbolic and not null homotopic in M then T is incompressible and M is irreducible (every embedded 2-sphere in M bounds a 3-ball).

Introdução

O estudo das órbitas dos pontos de um difeomorfismo ou de um campo de vetores numa variedade revela ou prediz o seu comportamento futuro e passado, este é o princípio básico de Sistemas Dinâmicos. Esta linha de pesquisa abrange: Geometria, Topologia, Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's), dentre outras áreas e subáreas da matemática. Tal é a aplicabilidade que surgiram teorias pertinentes a cada problema enfrentado, como hiperbolicidade, hiperbolicidade parcial e, recentemente, hiperbolicidade seccional.

As primeiras ideias dão origem aos fluxos Anosov e, as últimas aos fluxos Seccional-Anosov, os quais, em linhas gerais, são fluxos transversais a fronteira de uma variedade ambiente, cuja decomposição do fibrado tangente em um subfibrado estável e um central em cada ponto do conjunto invariante maximal é dominada e seccionalmente expansor no subfibrado central.

Dado um sistema dinâmico um dos questionamentos gerados são as relações entre a dinâmica e as propriedades topológicas das variedades que suporta tal dinâmica, tais como incompressibilidade de superfícies e irreduzibilidade da variedade.

Uma 3-variedade fechada que admite um campo de vetores Anosov de codimensão um, isto é, a dimensão do subfibrado estável ou do subfibrado instável é igual a um, é irreduzível. Outro importante resultado é que se X é um campo seccional Anosov numa 3-variedade compacta e irreduzível onde todas as singularidades são do tipo Lorenz e não apresenta órbitas periódicas homotópicas a um ponto então todo toro T transversal ao campo X é incompressível, [2].

Em fluxos Anosov não transitivos numa 3-variedade M , o conjunto dos pontos não errantes, denotado por $\Omega(X)$, onde X é o campo de vetores C^r ($r \geq 1$), admite uma decomposição espectral: $\Omega(X) = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ onde cada Ω_j (denominado conjunto básico) é fechado, disjuntos dois a dois, invariante pelo fluxo e transitivo ([18]). Em [4] prova-se que os conjuntos Ω_j ($j = 1, \dots, n$) podem ser separados por toros dois a dois disjuntos, não isotópicos e incompressíveis. Temos também que um toro T é incompressível numa 3-variedade irreduzível se T é transversal a um campo de vetores Anosov [2], [4] e [5].

A existência de superfícies incompressíveis disjuntas dois a dois em 3-variedades orientáveis, fechadas e irreduzíveis podem ajudar na classificação de variedades obtidas por um corte ao longo dessas superfícies incompressíveis, por

exemplo, ser uma variedade atratorial ou uma variedade de Seifert (ver [6]).

Esta dissertação tem como base o artigo *Incompressibility of torus tranverse to vector fields*, do professor Carlos A. Morales, publicado no *Topology Proceedings*, volume 28, No. 1, no ano de 2004, cujo objetivo principal é dar condições para que um toro mergulhado numa 3-variedade fechada e orientável M seja incompressível.

Assumimos que T é transversal ao campo de vetores X , mas não supomos que X é Anosov. Em vez disso, assumimos que X exibe uma única órbita periódica O a qual não intersecta T . Se além disso O é hiperbólico e não homotópico a um ponto em M , então T é incompressível e M é irredutível. Em resumo, este é o conteúdo do teorema principal do artigo.

No capítulo 1 nos dedicamos a apresentar ao leitor conceitos e resultados necessários para o entendimento do trabalho, o qual está estruturado em quatro seções que, em linhas gerais, abordando os seguintes temas: noções de variedades diferenciáveis e conceitos de sistemas dinâmicos.

Na seção 1, apresentaremos resultados sobre variedades diferenciáveis, tais como definições de variedade topológica e diferenciável, diferenciabilidade de funções entre variedades, conceito de espaço tangente e fibrado tangente de uma variedade diferenciável, isomorfismo entre o espaço tangente $T_p M$ e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n e p um ponto de M , definição e alguns resultados sobre variedades Riemannianas, dentre outros. Esta seção temo como principais referências [10] e [15].

Para a seção 2 utilizamos como principais fontes as referências [16], [18] e [21]. Esta seção possui conceitos sobre campos de vetores sobre uma variedade diferenciável, fluxo associado ao campo, hiperbolicidade, resultados importantes na teoria de sistemas dinâmicos como Teorema do Fluxo Tubular, Teorema da Variedade Estável ([8]), resultados sobre os conjuntos ω -limite e α -limite e o conjunto dos pontos não -errantes de um campo de vetores. Apresentamos também, um pouco da teoria da função de Primeiro Retorno de Poincaré.

O segundo capítulo é dedicado a noções de topologia algébrica e aspectos topológicos, este capítulo está estruturado em duas seções sobre os temas referidos. Na primeira seção, abordamos noções de homotopia entre caminhos em variedades, tipos de homotopias, grupo fundamental de uma variedade, além de conceitos sobre homomorfismo induzido, o qual tem grande relação com a incompressibilidade de superfícies numa 3-variedade ([6]). A segunda seção é destinada aos principais conceitos topológicos utilizados nesse trabalho, tais como incompressibilidade de superfícies e irredutibilidade de variedades, além de outros resultados importantes. Tendo como principal referência [6], [7] e [19].

No capítulo 3, apresentamos os principais lemas e teoremas com a finalidade de demonstrar o teorema principal do artigo de referência. Um exemplo de um toro satisfazendo as propriedades do teorema principal pode ser encontrado em [3].

Teorema Principal. Seja T um toro mergulhado em uma 3-variedade fechada e orientável M . Suponha que

1. T é transversal a um campo de vetores X, C^1 , em M .
2. Existe uma única órbita O de X que não intersecta T .
3. O é hiperbólico e não é homotópico a um ponto em M .

Então, T é incompressível e M é irreduzível.

Capítulo 1

Conceitos de Sistemas Dinâmicos

Neste capítulo serão introduzidos conceitos sobre variedades, campos de vetores, fluxos associados à campos de vetores numa variedade. Além da fixação da notação que será utilizada ao longo do trabalho. Tem-se como objetivo principal ajudar o leitor a se familiarizar com conceitos e resultados básicos que são fundamentais para o nosso trabalho.

1.1 Noções sobre variedades diferenciáveis

Nesta seção vamos definir conceitos e apresentar alguns resultados básicos sobre variedades diferenciáveis, os quais podem ser encontrados em [9], [10] e [15].

Definição 1.1.1. *Uma **variedade topológica** de dimensão n , é um espaço topológico M com as seguintes propriedades:*

- M é um espaço topológico de Hausdorff.
- M tem uma base enumerável de abertos.
- Para qualquer ponto $p \in M$ existem abertos $U \subset M$ contendo p e A em $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow A$, em outras palavras, cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.2. *Sejam M uma variedade topológica e $U \subset M$ aberto tal que $p \in U$ ($p \in M$), $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\phi : U \rightarrow A$ um homeomorfismo. O par (U, ϕ) é denominado **carta local** ou **sistema de coordenadas local** de M em p . U é denominado **vizinhança coordenada**.*

Às vezes, diremos que a aplicação $\phi : U \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$, com $U \subset M$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $p \in M$, é uma carta ou um sistema de coordenadas, em vez de (U, ϕ) é uma carta local ou sistema de coordenadas local de M em p .

Definição 1.1.3. Um **atlas** de dimensão n de M é uma coleção $\mathfrak{U} = \{\phi_i : U_i \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ de homeomorfismos onde $U_i \subset M$ aberto, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $\cup_{i \in I} U_i = M$. Os homeomorfismos:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset A_i \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \subset A_j$$

são chamados *mudanças de coordenadas*.

Um atlas $\mathfrak{U}$ é dito de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$, se todas as mudanças de coordenadas do atlas $\mathfrak{U}$ são de classe C^r .

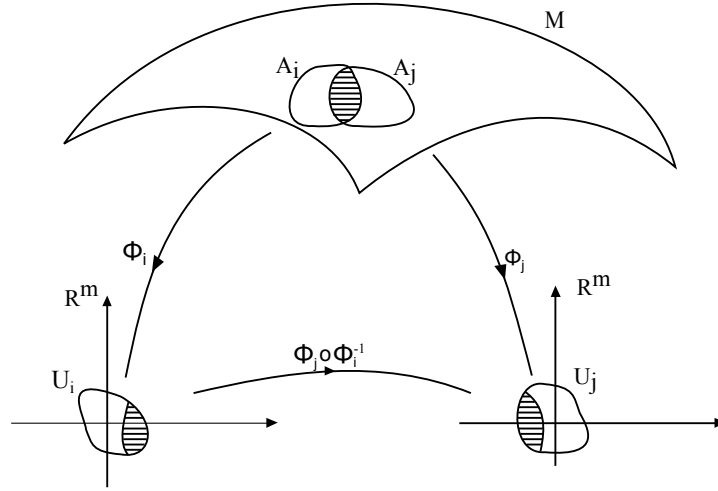


Figura 1.1

Um sistema de coordenadas $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M diz-se **admissível** relativamente a um atlas $\mathfrak{U}$ de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, de M se para todo $\phi \in \mathfrak{U}$ com $U \cap W \neq \emptyset$, onde $\phi : U \rightarrow A \subset \mathbb{R}^m$ tem-se que as mudanças de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1}$ e $\psi \circ \phi^{-1}$ são de classe C^r . Ou seja, $\mathfrak{U} \cup \{\psi\}$ é também um atlas de classe C^r .

Um atlas $\mathfrak{U}$ de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, de M é chamado **máximo** quando contém todos os sistemas coordenadas que são admissíveis em relação a $\mathfrak{U}$.

Vale ressaltar que todo atlas de dimensão m e de classe C^r , $r > 0$, de M , pode ser ampliado até se tornar um atlas máximo de classe C^r , para isso basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 1.1.4. Uma **variedade diferenciável** de dimensão m e classe C^r , $r > 0$, é um par $(M, \mathfrak{U})$, onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e $\mathfrak{U}$ é um atlas máximo de dimensão m e classe C^r .

A exigência de o atlas $\mathfrak{U}$ ser máximo não é necessária, mas é conveniente pois muitos resultados importantes, como alguns teoremas de **Whitney** necessitam dessa propriedade, assim como fato de M ser de Hausdorff e ter base enumerável.

Observação 1.1.5. Às vezes, usaremos a notação M^m para indicar que variedade diferenciável M é dimensão m , isto é, o atlas máximo $\mathfrak{A}$ tem dimensão m .

Observação 1.1.6. As superfícies são as chamadas variedades de dimensão dois. Enquanto uma curva é uma variedade de dimensão um.

1.1.1 Diferenciabilidade entre variedades

Definição 1.1.7. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de classe C^r , $r > 0$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **diferenciável em** $p \in M$ se existem cartas $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x(p)$.

Geralmente chamamos f_{xy} como a expressão da aplicação f nas coordenadas ou cartas x e y .

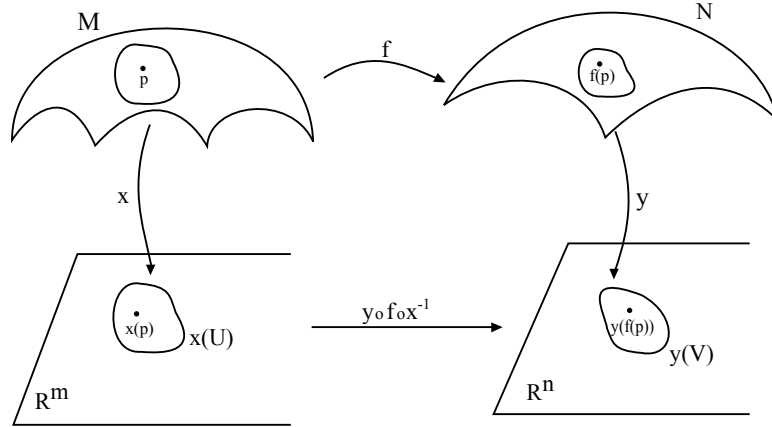


Figura 1.2

Vale ressaltar que a noção de diferenciabilidade entre variedades independe da escolha das cartas x e y . Considere as cartas $x' : U' \rightarrow x'(U') \subset \mathbb{R}^m$ em M e $y' : V' \rightarrow y'(V') \subset \mathbb{R}^n$ em N tais que $p \in U'$ e $f(U') \subset V'$. Então,

$$\begin{aligned}
 y' \circ f \circ (x')^{-1} &= y' \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ (x' \circ x^{-1} \circ x)^{-1} \\
 &= y' \circ y^{-1} \circ y \circ f \circ x^{-1} \circ x \circ (x')^{-1} \\
 &= y' \circ y^{-1} \circ f_{xy} \circ x \circ (x')^{-1} \\
 &= y' \circ y^{-1} \circ f_{xy} \circ ((x') \circ x^{-1})^{-1}.
 \end{aligned}$$

Como $y' \circ y^{-1}$ e $x' \circ x^{-1}$ são difeomorfismos e f_{xy} é diferenciável em $x(p)$ segue que $f_{x'y'} = y' \circ f \circ (x')^{-1}$ é diferenciável em $x'(p)$. Isto significa que a noção de diferenciabilidade entre variedades diferenciáveis está bem definida.

Definição 1.1.8. Dizemos que a aplicação $f : M \rightarrow N$ descrita da definição acima é **diferenciável** se f é diferenciável em todos os seus pontos.

Definição 1.1.9. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis de classe C^r , $r > 0$. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **diferenciável de classe C^r** , com $k \leq r$, para cada ponto $p \in M$ se existem cartas $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ em M , $y : V \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $f(U) \subset V$ tais que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k .*

Como as mudanças de coordenadas em M e N são difeomorfismos de classe C^r tem-se que a definição acima não depende da escolha das cartas x e y .

1.1.2 Espaço Tangente

Considere M^m uma variedade diferenciável de classe C^r , $r > 0$ e $x \in M$. Denotaremos por $\mathcal{C}_x$ o conjunto de todas as curvas $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\epsilon \geq 0$, tais que $\alpha(0) = x$ e diferenciável em 0. Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_x$, dizemos que elas tem o mesmo vetor tangente em x se para alguma carta $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m$, $x \in U_i$ tem-se que $(\phi_i \circ \alpha)'(0) = (\phi_i \circ \beta)'(0)$. Caso seja necessário considere $\epsilon \geq 0$ de tal forma que $\alpha((-\epsilon, \epsilon)) \subset U_i$.

Esta propriedade não depende da escolha da carta. Seja $\phi_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j \subset \mathbb{R}^m$, $x \in U_j$, uma outra carta. Assim,

$$(\phi_j \circ \alpha)'(0) = D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))(\phi_i \circ \alpha)'(0)$$

$$(\phi_j \circ \beta)'(0) = D(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(\phi_i(x))(\phi_i \circ \beta)'(0).$$

Como $(\phi_i \circ \alpha)'(0) = (\phi_i \circ \beta)'(0)$ segue que $(\phi_j \circ \alpha)'(0) = (\phi_j \circ \beta)'(0)$. Neste caso dizemos que tais curvas são equivalentes. Esta relação é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{C}_x$ e a classe de equivalência de α será denotada por $[\alpha]$, é chamada o vetor tangente a α no ponto $x \in M$. O espaço tangente a M no ponto x , denotado por $T_x M$, é o conjunto de tais vetores tangentes.

Uma carta $\phi_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$, $x \in U_i$, estabelece uma bijeção entre $T_x M$ e $\mathbb{R}^m$. Esta bijeção associa a cada classe de equivalência $[\alpha] \in T_x M$ o vetor $(\phi_i \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^m$, ou seja, $\bar{\phi}_i : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\bar{\phi}_i([\alpha]) = (\phi_i \circ \alpha)'(0)$$

é uma bijeção. De fato,

1. $\bar{\phi}_i$ é injetiva.

$$\bar{\phi}_i([\alpha]) = \bar{\phi}_i([\beta]) \Rightarrow (\phi_i \circ \alpha)'(0) = (\phi_i \circ \beta)'(0).$$

Então α e β são equivalentes, assim $[\alpha] = [\beta]$. Logo, $\bar{\phi}_i$ é injetiva.

2. $\bar{\phi}_i$ é sobrejetiva.

Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $\alpha \in \mathcal{C}_x$ dada por $\alpha(t) = \phi_i^{-1}(\phi_i(x) + tv)$ temos que $\bar{\phi}_i([\alpha]) = (\phi_i \circ \alpha)'(0) = v$.

Portanto, $\overline{\phi}_i$ é uma bijeção.

Assim, podemos munir $T_x M$ com a estrutura de um espaço vetorial real, de modo que $\overline{\phi}_i$ seja um isomorfismo. Em outras palavras, as operações de soma e produto por um número real serão definidas por:

$$\begin{aligned} [\alpha] + [\beta] &= (\overline{\phi}_i)^{-1}(\overline{\phi}_i([\alpha]) + \overline{\phi}_i([\beta])) \\ c \cdot [\alpha] &= (\overline{\phi}_i)^{-1}(c \cdot \overline{\phi}_i([\alpha])). \end{aligned}$$

Observe que esta definição não depende da escolha de ϕ_i . Seja $\phi_j : U_j \rightarrow \widetilde{U}_j$, $x \in U_j$, então:

$$\begin{aligned} (\overline{\phi}_j)([\alpha]) &= (\phi_j \circ \alpha)'(0) \\ &= ((\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}) \circ (\phi_i \circ \alpha))'(0) \\ &= D(\phi_j \circ (\phi_i)^{-1})(\phi_i(x)) \cdot \overline{\phi}_i([\alpha]). \end{aligned}$$

Como $D(\phi_j \circ (\phi_i)^{-1})(\phi_i(x))$ é um isomorfismo (pois $\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$ é um difeomorfismo), e $\overline{\phi}_i$ é um isomorfismo temos que $\overline{\phi}_j$ também é um isomorfismo. Assim, a estrutura de espaço vetorial independe da escolha da carta.

Dados uma carta $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ em M e um ponto $x \in U$ indicamos por $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(x)\}$ a base de $T_x M$ que é levada pelo isomorfismo $\overline{\phi} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sobre a base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$. O vetor $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_x M$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\alpha \in \mathcal{C}_x$ tal que $(\phi \circ \alpha)'(0) = e_i$.

Exemplo 1.1.10. $T_x \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$

Considere o seguinte sistema de coordenadas: $\phi = id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Então a aplicação:

$$\overline{\phi} : T_x \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dada por

$$\overline{\phi}([\alpha]) = (id \circ \alpha)'(0) = \alpha'(0)$$

Como já foi visto, $\overline{\phi}$ é um isomorfismo.

Com este isomorfismo estamos identificando a coleção $[\alpha] = \{\beta \in \mathcal{C}_x \mid \alpha'(0) = (id \circ \alpha)'(0) = (id \circ \beta)'(0) = \beta'(0)\}$ com o vetor $v \in \mathbb{R}^m$ tal que $\alpha'(0) = v$.

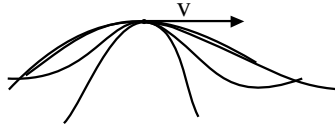


Figura 1.3

Proposição 1.1.11. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$. A aplicação $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que associa a cada vetor tangente $[\alpha] \in T_p M$ o elemento $[f \circ \alpha] \in T_{f(p)} N$ é uma transformação linear que não depende da escolha de α .

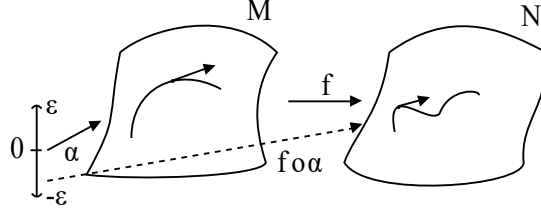


Figura 1.4

Demonstração. Ver [15] ou [10]. □

Definição 1.1.12. A transformação linear $Df(p)$ da Proposição 1.1.11 é chamada derivada de f no ponto p .

Proposição 1.1.13. (Regra da Cadeia) Sejam M^m , N^n , P^k variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável em um ponto $p \in M$ e $g : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável no ponto $f(p) \in N$. Então $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p) : T_p M \rightarrow T_{g(f(p))} P.$$

Demonstração. Considere as seguintes cartas $x : U \rightarrow x(U)$ em M e $y : V \rightarrow y(V)$ em N e $z : W \rightarrow z(W)$ em P , tais que $p \in U$, $f(U) \in V$ e $g(V) \in W$. Temos que, $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x(p)$ e $g_{yz} = z \circ g \circ y^{-1} : y(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow z(W) \subset \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $y(f(p))$. Pela regra da cadeia em espaços vetoriais reais, segue que:

$$g_{yz} \circ f_{xy} = z \circ (g \circ f) \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow z(W) \subset \mathbb{R}^p$$

é diferenciável no ponto $x(p)$. Assim, $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável no ponto $p \in M$.

Agora, dado $[\alpha] \in T_p M$ temos que

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(p)[\alpha] &= [g \circ f \circ \alpha] \\ &= [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &= Dg(f(p))[f \circ \alpha] \\ &= Dg(f(p)) \circ Df(p)[\alpha]. \end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f : M \rightarrow P$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p) : T_p M \rightarrow T_{g(f(p))} P$. □

Exemplo 1.1.14. Seja M^m uma variedade diferenciável de classe C^r , $r > 0$, e $\phi : U \subset M \rightarrow A \subset \mathbb{R}^m$ uma carta para o ponto $x \in M$. Então,

$$D\phi(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m$$

$$[\alpha] \mapsto [\phi \circ \alpha]$$

Pelo exemplo 1.1.10, pode ser definida como:

$$D\phi(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

tal que

$$D\phi(x)[\alpha] = (\phi \circ \alpha)'(0).$$

Assim, $D\phi(x)$ é um isomorfismo.

Definição 1.1.15. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um **difeomorfismo** se f é bijetora, diferencial e com inversa diferenciável. E f é difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p em M e V de $f(p)$ tal que $f|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

A noção de difeomorfismo é a de equivalência entre variedades diferenciáveis, ou seja, se existe um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M^m e N^n dizemos que elas são equivalentes. Assim como a noção de homeomorfismo entre variedades topológicas é a de equivalência em variedades topológicas.

Uma consequência do Teorema da Função Composta é que se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis M e N então $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é um isomorfismo para todo $p \in M$, em particular as dimensões de M e N são iguais. Uma recíproca deste fato é o teorema a seguir.

Teorema 1.1.16. Seja $f : M^n \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis M e N , tal que $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é um isomorfismo, com $p \in M$. Então, f é difeomorfismo local em p .

1.1.3 Imersões e Mergulhos

Definição 1.1.17. Seja M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **submersão** se $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é sobrejetiva para todo $p \in M$. Vale ressaltar que se f é uma submersão então $m \geq n$.

Definição 1.1.18. Seja M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $Df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se além disso, f for um homeomorfismo sobre a sua imagem $f(M) \subset N$ com a topologia induzida por N , dizemos que f é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho então M é chamada subvariedade de N .

Observe que para $f : M \rightarrow N$ ser uma imersão é necessário que $m \leq n$, a diferença $n - m$ é chamada de codimensão da imersão f . Os teoremas intitulados Teoremas de Whitney podem ser encontrados em [9].

Teorema 1.1.19. (Whitney) Se M é uma variedade diferenciável de dimensão m então existe um mergulho adequado $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

Seja M uma variedade diferenciável e $S \subset M$ uma subvariedade. Uma vizinhança tubular de S é o par (V, S) onde V é uma vizinhança de S em M e $\pi : V \rightarrow S$ é uma submersão de classe C^∞ tal que $\pi(p) = p, \forall p \in S$.

Teorema 1.1.20. ([10]) *Seja S uma subvariedade de M , compacta e sem bordo, de classe C^∞ então S possui uma vizinhança tubular.*

Toda variedade diferenciável M de classe $C^r, r > 0$, pode ser considerada como uma variedade de classe C^∞ .

Teorema 1.1.21. (Whitney) *Seja M^m uma variedade diferenciável de classe $C^r, r > 0$. Então existe um mergulho C^r $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ tal que $f(M)$ é uma variedade fechada de classe C^∞ em $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

Definição 1.1.22. *Seja M^m uma variedade diferenciável. Definimos o **fibrado tangente** de M como o conjunto:*

$$TM = \{(x, v); x \in M, v \in T_x M\}$$

.

Seja $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção $(x, v) \mapsto x$. Pode-se definir uma topologia e uma estrutura de variedade em TM .

Seja $\mathfrak{U} = \{\phi_i : U_i \subset M \rightarrow \tilde{U}_i \subset \mathbb{R}^m, i \in I\}$ um atlas maximal de M . Defina:

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \subset TM \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\Phi_i(x, v) = (x, D\phi_i(x)v).$$

1. Φ_i é injetiva.

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, v) = \Phi_i(y, w) &\Rightarrow (x, D\phi_i(x)v) = (y, D\phi_i(y)w) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = y, D\phi_i(x)v = D\phi_i(y)w. \end{aligned}$$

Como $x = y$ e $D\phi_i(x)$ é um isomorfismo, ver exemplo, segue que $v = w$ e, Φ é injetiva.

Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $\alpha \in \mathcal{C}_x$ dada por $\alpha(t) = \phi_i^{-1}(\phi_i(x) + tv)$ temos que $\overline{\phi_i}([\alpha]) = (\phi_i \circ \alpha)'(0) = v$.

2. Φ_i é sobrejetiva.

Dado $(x, v) \in U_i \times \mathbb{R}^m$ seja $\alpha \in \mathcal{C}_x$ dada por $\alpha(t) = \phi_i^{-1}(\phi_i(x) + tv)$ temos que $\Phi_i(x, [\alpha]) = (x, v)$

Portanto, Φ_i é uma bijeção. E também,

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$$

dada por

$$\Phi_j \circ \Phi_1^{-1}(x, w) = (x, D(\phi_j \circ \phi_1^{-1})(\phi_1(x))w).$$

Como $\phi_j \circ \phi_1^{-1}$ é um difeomorfismo, logo $\Phi_j \circ \Phi_1^{-1}$ é um difeomorfismo.

Definimos uma topologia em TM da seguinte maneira: $W \subset TM$ é aberto se, e somente se, $\Phi_i(W \cap \pi^{-1}(U_i))$ é aberto para todo $i \in I$. Desse modo, as aplicações Φ_i são homeomorfismos. Considere as seguintes aplicações para cada $i \in I$:

$$\tilde{\Phi}_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \tilde{U}_i \times \mathbb{R}^m$$

definida por

$$\tilde{\Phi}_i(x, v) = (\phi_i(x), D\phi_i(x)v).$$

Como $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = M$ e $D\phi_i(x)\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$ temos que $\bigcup_{i \in I} \tilde{\Phi}_i(\pi^{-1}(U_i)) = TM$, então esse conjunto de aplicações formam um atlas em TM .

Definição 1.1.23. *Seja M^m uma variedade diferenciável. Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) é uma lei que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ um produto interno em T_pM .*

Seja g uma métrica Riemanniana, denotaremos por $g(p; u, v)$ ou $\langle u, v \rangle_p$ o produto interno dos vetores $u, v \in T_pM$.

Definição 1.1.24. *O comprimento ou norma de um vetor $v \in T_pM$ pode ser definido como:*

$$|v|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

*Esta norma recebe o nome de **norma Riemanniana**.*

Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica Riemanniana é denominada **variedade Riemanniana**.

A cada carta em M^m , $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ associe a função:

$$g^x : X(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por,

$$g^x(x(p); a, b) = \langle (Dx_p)^{-1}a, (Dx_p)^{-1}b \rangle_p$$

Note que, para cada $p \in U$, tem-se definido um produto interno em $\mathbb{R}^m$ dado por:

$$(a, b) \mapsto g^x(x(p); a, b).$$

Considere as funções $g_{ij}^x : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq m$ definidas por:

$$g_{ij}^x(p) = g^x(x(p); e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right\rangle_p.$$

Sejam $a = (a^1, \dots, a^m)$ e $b = (b^1, \dots, b^m)$ vetores do $\mathbb{R}^m$ então,

$$(Dx_p)^{-1}a = \sum_{i=1}^m a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

$$(Dx_p)^{-1}b = \sum_{j=1}^m b^j \frac{\partial}{\partial x^j}(p).$$

$$\text{Logo, } g^x(x(p); a, b) = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}^x(p) a^i b^j.$$

Definição 1.1.25. Diz-se que uma métrica Riemanniana g numa variedade diferenciável M^m é de **classe** C^k , $k > 0$, se, para cada carta $x : U \subset M \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ a função $g^x : x(U) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k , ou equivalentemente, se as funções $g_{ij}^x : U \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^k .

Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismo, a definição acima não depende da carta x .

Proposição 1.1.26. Toda variedade diferenciável M de classe C^k , $k > 0$, admite uma métrica Riemanniana de classe C^{k-1} .

Demonstração. Ver [15], página 210. □

Definição 1.1.27. Duas variedades V e W são **transversais** em M se para qualquer ponto $q \in V \cap W$ temos que os espaços tangentes de T_qV e T_qW geram T_qM .

1.2 Noções de Sistemas dinâmicos

Nesta seção vamos definir e apresentar alguns resultados básicos sobre campos de vetores e fluxos numa variedade orientável e compacta. Dado um conjunto A numa variedade M denotaremos por $\text{int}A$, $\overline{A}$ e $\text{fr}A$, o interior, o fecho e a fronteira de A , respectivamente. As principais referências para esta seção foram [8], [13], [16], [17], e [18].

Definição 1.2.1. Um **campo de vetores** de classe C^r , $r > 0$, em uma variedade M^n é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$, $X \in C^r$. Definimos $\mathfrak{X}^r(M)$ como o conjunto dos campos de vetores de classe C^r em M .

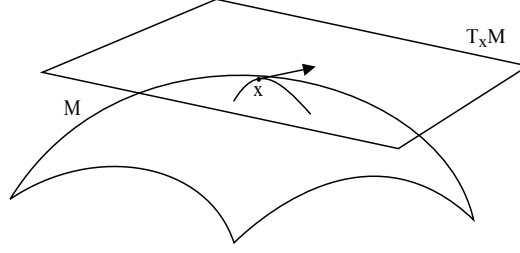


Figura 1.5

Apresentaremos uma topologia natural no espaço $\mathfrak{X}^r(M)$, $r > 0$, de campos de vetores de classe C^r numa variedade compacta. Nesta topologia dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ estarão próximos se os campos e suas derivadas até a ordem r estiverem próximos em todos os pontos de M .

Considere inicialmente o espaço $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ das aplicações de classe C^r , $0 \leq r < \infty$, definidas na variedade compacta M . Temos uma estrutura natural de espaço vetorial em $C^r(M, \mathbb{R}^s)$: $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ e $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tome em M uma cobertura finita por abertos $V_1, \dots, V_k$ tal que cada V_i esteja contido no domínio de uma carta local (x_i, U_i) com $x_i(U_i) = B(2)$ e $x_i(V_i) = B(1)$, onde $B(1)$ e $B(2)$ são bolas de raios 1 e 2 e centro na origem de $\mathbb{R}^n$. Para $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ denotamos por $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^s$. Definimos:

$$\|f\|_r = \max_i \sup_{u \in B(1)} \{\|f^i(u)\|, \|Df^i(u)\|, \dots, \|D^r f^i(u)\|\}.$$

Proposição 1.2.2. ([16]) $\|\cdot\|_r$ é uma norma completa em $C^r(M, \mathbb{R}^s)$.

Definição 1.2.3. Uma **curva integral** de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por $p \in M$ é uma aplicação de classe C^{r+1} $\alpha : I \rightarrow M$, onde I é um intervalo da reta real contendo o zero, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, $\forall t \in I$.

Dizemos que α é uma solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = X(x)$ com condição inicial $x(0) = p$. A imagem de uma curva integral é chamada **órbita** ou **trajetória**.

Definição 1.2.4. Um **fluxo local** de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ em $p \in M$ é uma aplicação:

$$\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V_p \rightarrow U$$

V_p é uma vizinhança de p tal que para cada $q \in V_p$ a aplicação $\varphi_q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ definida por $\varphi_q(t) = \varphi(t, q)$ é uma curva integral, isto é, $\varphi_q(0) = \varphi(0, q) = q$ e:

$$\varphi_q'(t) = \frac{d}{dt} \varphi_q(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, q) = X(\varphi(t, q))$$

$\forall (t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times V_p$.

Definição 1.2.5. Um **fluxo global** de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = X(\varphi(t, p)).$$

Logo, para cada $p \in M$ a aplicação $\varphi_p : M \rightarrow M$ definida por $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ é uma curva integral, ou seja, $\varphi_p(0) = \varphi(0, p) = p$ e,

$$\varphi_p'(t) = \frac{d}{dt}\varphi_p(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, p) = X(\varphi(t, p)).$$

Para quaisquer $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$.

Proposição 1.2.6. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe em M um fluxo global de classe C^r para X . Isto é, uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e $(\partial/\partial t)\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.*

Demonstração. Ver [16]. □

Corolário 1.2.7. *Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de X . Para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_t : M \rightarrow M$, $X_t(p) = \varphi(t, p)$, é um difeomorfismo de classe C^r . Além disso, $X_0 = \text{identidade}$, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \varphi(s, p))$, para $s, t \in \mathbb{R}$ e $p \in M$.

Sejam $\alpha(t) = \varphi(t + s, p)$ e $\beta(t) = \varphi(t, \varphi(s, p))$. Temos que α e β são curvas integrais do campo X e $\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(s, p)$, então pela unicidade das curvas integrais segue que $\alpha(t) = \beta(t)$, isto é, $\varphi(t + s, p) = \varphi(t, \varphi(s, p))$.

Pela definição de fluxos segue que $X_0(p) = \varphi(0, p) = p$, $\forall p \in M$, assim X_0 é a identidade de M . E, pela Proposição 1.2.6 temos que $X_t : M \rightarrow M$ é uma aplicação de classe C^r para todo $t \in \mathbb{R}$ fixado. Como,

$$X_t \circ X_{-t}(p) = \varphi(t, \varphi(-t, p)) = \varphi(t - t, p) = \varphi(0, p) = X_0(p) = p.$$

E,

$$X_{-t} \circ X_t(p) = \varphi(-t, \varphi(t, p)) = \varphi(-t + t, p) = \varphi(0, p) = X_0(p) = p.$$

Então, $X_t \circ X_{-t} = X_{-t} \circ X_t = \text{identidade}$, assim X_t é de classe C^r e tem inversa de classe C^r dada por X_{-t} . Portanto, a aplicação $X_t : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de classe C^r , para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e X_t o fluxo do campo X .

Definição 1.2.8. *A órbita de um ponto $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O_X(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 1.2.9. *A órbita positiva de um ponto $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O_X^+(p) = \{X_t(p); t \geq 0\}$. E a órbita negativa de $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O_X^-(p) = \{X_t(p); t \leq 0\}$.*

Definição 1.2.10. *Um ponto $p \in M$ é dito ponto fixo para o difeomorfismo X_t se $X_t(p) = p$, para cada $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.2.11. Se $X(p) = 0$ então dizemos que $p \in M$ é uma **singularidade** do campo X .

Observação 1.2.12. Se $p \in M$ é um ponto fixo para cada X_t , com $t \in \mathbb{R}$ então p é uma singularidade para o campo X . Reciprocamente, uma singularidade $p \in M$ para o campo X é um ponto fixo para X_t , para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado.

De fato, como $X_t(p) = p$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e, pelo Corolário 1.2.7 temos que $X_t(p) = \varphi(t, p)$, logo $(\partial/\partial t)\varphi(t, p) = 0$, assim $(\partial/\partial t)\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p)) = 0$ o que implica que $X(\varphi(t, p)) = X(p) = 0$.

Portanto $X(p) = 0$ e p é uma singularidade para o campo X .

Reciprocamente, temos a seguinte EDO com valor inicial:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= X(\alpha(t)) \\ \alpha(0) &= p.\end{aligned}$$

Logo, $\alpha(t) = p$ satisfaz a EDO acima. Assim, p é ponto fixo para cada X_t .

Definição 1.2.13. Um ponto $p \in M$ é chamado **periódico** para um fluxo X_t , se existe $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$ e $X_t(p) \neq p$, $\forall t < T$.

A órbita de um ponto periódico é chamada **órbita periódica**. Uma órbita fechada de um ponto $p \in M$ é quando $O(p)$ é um conjunto fechado, as órbitas que não são singularidades são ditas **órbitas regulares**. Os pontos regulares são os pontos para os quais o campo não se anula.

Exemplo 1.2.14. Seja $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária. Considere o fluxo definido pela rotação de cada ponto da esfera em torno do eixo NS , ver Figura 1.6. Temos que o polo norte e o polo sul tem como órbita o próprio ponto. E, as demais órbitas são os paralelos da esfera S^2 . Então, as singularidades são os polos norte e sul e as outras órbitas são órbitas regulares e periódicas.

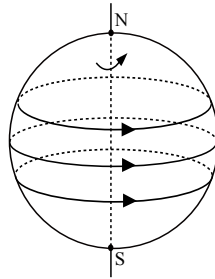


Figura 1.6. Fluxo em S^2

Definição 1.2.15. O conjunto ω -**limite** de um ponto $p \in M$ é dado por:

$$\omega(p) = \{x \in M; \exists t_n \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = x\}.$$

Assim, $\omega(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de p . Definimos também o conjunto α -**limite** de um ponto $p \in M$ dado por

$$\alpha(p) = \{x \in M; \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = x\}.$$

Então, o conjunto $\alpha(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de p .

Observamos que o α -limite de um ponto $p \in M$ é o ω -limite de p para o campo $-X$. Intuitivamente, $\alpha(p)$ é onde a órbita de p "nasce" e $\omega(p)$ é onde ela "morre".

Observação 1.2.16. Se p é uma singularidade do campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ então $\omega(p) = \alpha(p) = \{p\}$.

De fato,

$$X(p) = 0 \Leftrightarrow X_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall t_n \rightarrow \infty \text{ (ou } t_n \rightarrow -\infty) \Rightarrow X_{t_n}(p) \rightarrow p.$$

$$\text{Portanto, } \omega(p) = \alpha(p) = \{p\}.$$

No exemplo a seguir vamos exibir os conjuntos ω -limite e α -limite de um campo de vetores com singularidades.

Exemplo 1.2.17. Considere a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ centrada na origem e sejam (x, y, z) as coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^3$. Chamamos $p_N = (0, 0, 1)$ de polo norte e $p_S = (0, 0, -1)$ de polo sul de S^2 . Definimos o campo de vetores X de classe C^∞ em S^2 por:

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

As singularidades do campo X são os pontos $(x, y, z) \in S^2$ tais que:

$$X(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (-xz, -yz, x^2 + y^2) = (0, 0, 0).$$

Então,

$$x = y = 0.$$

Como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

temos que as singularidades são p_N e p_S .

Uma parametrização da esfera pode ser expressada como:

$$Y(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta).$$

Para cada φ fixado temos a parametrização de um meridiano de S^2 . Temos que o campo X é tangente aos meridianos de S^2 .

De fato, considere uma parametrização de um meridiano dada por:

$$\alpha(\theta) = (\cos\theta \sin\varphi, \cos\theta\varphi, \sin\theta).$$

Assim,

$$\alpha'(\theta) = (-\sin\theta \sin\varphi, -\sin\theta\varphi, \cos\theta).$$

E,

$$X(\alpha(\theta)) = \cos\theta(-\sin\theta \sin\varphi, -\sin\theta\varphi, \cos\theta) = \cos\theta\alpha'(\theta).$$

Portanto, o campo é tangente aos meridianos de S^2 apontando para cima segue que $\omega(p) = p_N$ e $\alpha(p) = p_S$, para todo $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$. E, $\omega(p_N) = \alpha(p_N) = \{p_N\}$, $\omega(p_S) = \alpha(p_S) = \{p_S\}$.

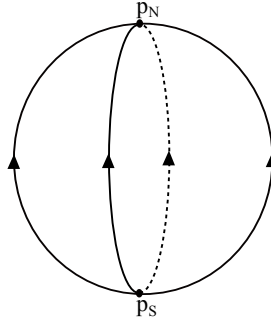


Figura 1.7

Observação 1.2.18. Sejam $p, q \in M$ se q pertence a órbita de p pelo campo X então $\omega(p) = \omega(q)$.

De fato, como q pertence a órbita positiva de p , segue que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X_{t_0}(p) = q$. E, pelo Corolário 1.2.7 temos que $X_{-t_0}(q) = p$. Vamos mostrar que $\omega(p) \subset \omega(q)$.

Seja $x \in \omega(p)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $X_{t_n}(p) \rightarrow x$. Pela continuidade do fluxo X_t e pelo Corolário 1.2.7, tem-se que:

$$\begin{aligned} X_{t_0}(X_{t_n}(p)) &\rightarrow X_{t_0}(x) \Rightarrow X_{t_0+t_n}(p) \rightarrow X_{t_0}(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_{t_n}(X_{t_0}(p)) \rightarrow X_{t_0}(x) \Rightarrow X_{t_n}(q) \rightarrow X_{t_0}(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_{-t_0}(X_{t_n}(q)) \rightarrow X_{-t_0}(X_{t_0}(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_{t_n-t_0}(q) \rightarrow x. \end{aligned}$$

Fazendo $s_n = t_n - t_0$, segue que $s_n \rightarrow \infty$ pois $t_n \rightarrow \infty$. Assim,

$$X_{s_n}(q) \rightarrow x.$$

Portanto, $x \in \omega(q)$ e, $\omega(p) \subset \omega(q)$.

Agora vamos mostrar que $\omega(q) \subset \omega(p)$.

Seja $x \in \omega(q)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $X_{t_n}(q) \rightarrow x$. Pela continuidade do fluxo X_t e pelo Corolário 1.2.7, tem-se que:

$$\begin{aligned} X_{-t_0}(X_{t_n}(q)) &\rightarrow X_{-t_0}(x) \Rightarrow X_{t_n-t_0}(q) \rightarrow X_{-t_0}(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_{t_n}(X_{-t_0}(q)) \rightarrow X_{-t_0}(x) \Rightarrow X_{t_n}(p) \rightarrow X_{-t_0}(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_{t_0}(X_{t_n}(p)) \rightarrow X_{t_0}(X_{-t_0}(x)) \Rightarrow X_{t_n+t_0}(p) \rightarrow x. \end{aligned}$$

Fazendo $k_n = t_n + t_0$, segue que $k_n \rightarrow \infty$ pois $t_n \rightarrow \infty$. Assim,

$$X_{k_n}(p) \rightarrow x.$$

Portanto, $\omega(q) \subset \omega(p)$ e, assim $\omega(p) = \omega(q)$, como queríamos.

Um resultado análogo a este se verifica para o conjunto α -limite.

Observação 1.2.19. *Seja $p \in M$, X_t um fluxo. Se $x \in \omega(p)$ temos que $O_X(x) \subset \omega(p)$. Analogamente, se $y \in \alpha(p)$, então $O_X(y) \subset \alpha(p)$.*

De fato, se $x \in \omega(p)$, temos que existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $X_{t_n}(p) \rightarrow x$. Pela continuidade do fluxo e pelo Corolário 1.2.7 temos que:

$$X_{t+t_n}(p) \rightarrow X_t(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $k_n = t + t_n$ temos que $k_n \rightarrow \infty$, pois $t_n \rightarrow \infty$, então:

$$X_{k_n}(p) \rightarrow X_t(x).$$

Portanto, $X_t(x) \in \omega(p)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $O_X(x) \subset \omega(p)$.

Repetindo o processo para $y \in \alpha(p)$ temos que $O_X(y) \subset \alpha(p)$.

Definição 1.2.20. *Um subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ é dito **invariante para um fluxo** X_t se $X_t(\Lambda) = \Lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, $\Lambda \subset M$ é dito **invariante positivamente (negativamente)** para um fluxo X_t se $X_t(\Lambda) \subset \Lambda$, $\forall t \geq 0$ ($\forall t \leq 0$).*

Definição 1.2.21. *Seja M uma variedade compacta e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Um subconjunto $\Lambda \subset M$ é **singular** se este possui uma singularidade; **não trivial** se Λ não é uma única órbita. E um conjunto compacto invariante Λ para o fluxo X_t é chamado **sumidouro** se:*

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Para alguma vizinhança U de Λ que satisfaz $X_t(U) \subset U$, $\forall t \geq 0$.

Definição 1.2.22. Um ponto $p \in M$ é denominado **ponto não-errante** para um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se, para qualquer vizinhança V de p e qualquer número real $T > 0$, existe $|t| > T$ tal que $X_t(V) \cap V \neq \emptyset$. Se p não é um ponto não-errante, então p é chamado **ponto errante**. Denotaremos por $\Omega(X)$ o conjunto dos pontos não errantes de X .

Denotaremos por $Per(X)$ e $Sing(X)$ os conjuntos dos pontos periódicos e singulares do campo X , respectivamente.

Proposição 1.2.23. O conjunto $\Omega(X)$ é invariante, fechado e $Per(X) \cup Sing(X) \subset \Omega(X)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\Omega(X)$ é invariante, isto é, $X_t(\Omega(X)) = \Omega(X)$. Provaremos que $X_t(\Omega(X)) \subset \Omega(X)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Seja $y \in X_t(\Omega(X))$, com $t \in \mathbb{R}$, assim $x = X_{-t}(y) \in \Omega(X)$. Como $x \in \Omega(X)$ então para qualquer vizinhança V de x e qualquer número real $T > 0$, existe $|t_0| > T$ tal que:

$$X_{t_0}(V) \cap V \neq \emptyset.$$

E, $y = X_t(x)$. Seja U uma vizinhança qualquer de y , temos que $x = X_{-t}(y) \in X_{-t}(U)$. Logo, $X_{-t}(U)$ é uma vizinhança de x , então:

$$X_{-t}(U) \cap X_{t_0}(X_{-t}(U)) \neq \emptyset.$$

Assim,

$$X_t(X_{-t}(U)) \cap X_t(X_{t_0}(X_{-t}(U))) \neq \emptyset.$$

Pelo Corolário 1.2.7 temos que,

$$U \cap X_{t_0}(U) \neq \emptyset.$$

Portanto, $y \in \Omega(X)$ e, assim $X_t(\Omega(X)) \subset \Omega(X)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Agora provaremos que $\Omega(X) \subset X_t(\Omega(X))$.

Seja $x \in \Omega(X)$, como $X_t(\Omega(X)) \subset \Omega(X)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ segue que $X_{-t}(x) \in \Omega(X)$, assim $x = X_t(X_{-t}(x)) \in X_t(\Omega(X))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Então, $\Omega(X) \subset X_t(\Omega(X))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\Omega(X)$ é invariante pelo fluxo X_t .

Finalmente vamos mostrar que $\Omega(X)$ é fechado.

Seja $p \in \overline{\Omega(X)}$, então para toda vizinhança U de p temos que,

$$U \cap \Omega(X) \neq \emptyset.$$

Assim, existe $x \in U$ tal que $x \in \Omega(X)$. Como $x \in \Omega(X)$ segue que para qualquer vizinhança V de x e qualquer número real $T > 0$, existe $|t| > T$ tal que $X_t(V) \cap V \neq \emptyset$. Temos que, U é uma vizinhança de x , então:

$$U \cap X_t(U) \neq \emptyset.$$

Logo, $p \in \Omega(X)$ e, portanto $\Omega(X)$ é fechado.

Devemos mostrar que $\Omega(X)$ contém o conjunto dos pontos periódicos.

De fato, se p é um ponto periódico então existe $t_0 > 0$ tal que $X_{t_0}(p) = p$. Assim, para qualquer vizinhança V de p e qualquer número real $T > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nt_0 > T$ e $X_{nt_0}(p) = p$ então,

$$X_{nt_0}(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Logo, $p \in \Omega(X)$.

Por último, seja p uma singularidade para o campo X , logo sua órbita se reduz somente ao ponto p , assim dado V uma vizinhança de p e qualquer número real $T > 0$, temos que $p \in X_t(V)$, $\forall t > 0$, isto é,

$$X_t(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Então, $p \in \Omega(X)$. Portanto, $\Omega(X)$ é invariante, fechado e $Per(X) \cup Sing(X) \subset \Omega(X)$. $\square$

A proposição a seguir será muito utilizada no texto e para evitar sua conglomeração de referências na dissertação, assumiremos que é conhecida.

Proposição 1.2.24. *Seja M uma variedade compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $p \in M$. Então:*

1. $\omega(p) \neq \emptyset$;
2. $\omega(p)$ é fechado;
3. $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo, isto é, $\omega(p)$ é a união de órbitas de X ;
4. $\omega(p)$ é conexo.

Demonstração. Sejam $t_n \rightarrow \infty$ e $p_n = X_{t_n}(p)$. Como M é compacta temos que p_n possui uma subsequência convergente cujo limite pertence a $\omega(p)$. Logo, $\omega(p) \neq \emptyset$.

Vamos provar que $\omega(p)$ é fechado. Suponha, por contradição, que existe $q \in \overline{\omega(p)}$ tal que $q \notin \omega(p)$. Como $q \notin \omega(p)$ então existe uma vizinhança V do ponto p disjunta de $\{X_t(p); t \geq T\}$, para algum $T > 0$. Isto implica que $V \cap \omega(p) = \emptyset$, um absurdo, pois $q \in \overline{\omega(p)}$. Portanto, $\omega(p)$ é fechado.

Seja $q \in \omega(p)$ então pela observação 1.2.19 segue que $O_X(q) \in \omega(p)$. Assim, $\omega(p)$ é invariante pelo fluxo.

Suponhamos agora que $\omega(p)$ não seja conexo. Podemos então escolher abertos A e B tais que $\omega(p) \subset A \cup B$, $A \cap \omega(p) \neq \emptyset$, $B \cap \omega(p) \neq \emptyset$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Como a órbita de p se acumula em pontos de A e B , dado $T > 0$ temos que existe $t > T$ tal que $X_t(p) \in K = M - (A \cup B)$. Logo, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ com $X_{t_n} \in K$, sendo K fechado e M compacto então K é compacto e, portanto existe uma subsequência de X_{t_n} que converge a um ponto $q \in K$. Então, $q \in \omega(p) \subset A \cup B$, o que é um absurdo. Portanto $\omega(p)$ é conexo. $\square$

Um resultado análogo se verifica para o conjunto $\alpha(p)$.

Observação 1.2.25. *Sejam M uma variedade compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $x \in M$ então $\omega(x) \subset \Omega(X)$ e $\alpha(x) \subset \Omega(X)$.*

Vamos provar que $\omega(x) \subset \Omega(X)$.

Seja $y \in \omega(x)$ então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, tal que $X_{t_n}(x) \rightarrow y$.

Dado uma vizinhança V de y e $T \in \mathbb{R}$, com $T > 0$. Devemos mostrar que existe $|t| > T$ tal que:

$$X_t(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Como $X_{t_n}(x) \rightarrow y$, quando $t_n \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$, segue que existe $t_{n_0} > T$ tal que $X_{t_{n_0}}(x) \in V$.

E, também $X_{t_n}(X_{t_{n_0}}(x)) \rightarrow y$ assim existe um $t_{n_1} > t_{n_0} > T$ tal que $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in V$.

Assim, $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in V$ e $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in X_{t_{n_1}}(V)$, pois $X_{t_{n_0}}(x) \in V$.

Então, se consideramos $t = t_{n_1} > T$ temos que

$$X_t(V) \cap V \neq \emptyset.$$

Portanto, $y \in \Omega(X)$. E, $\omega(x) \subset \Omega(X)$, $\forall x \in M$.

Provaremos que $\alpha(x) \subset \Omega(X)$.

Seja $p \in \alpha(x)$ então existe uma sequência $t_n \rightarrow -\infty$, $n \rightarrow \infty$, tal que $X_{t_n}(x) \rightarrow p$.

Dado uma vizinhança U de p e $T \in \mathbb{R}$, com $T > 0$. Precisamos mostrar que existe $|t| > T$ tal que:

$$X_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Sabendo que $X_{t_n}(x) \rightarrow p$, quando $t_n \rightarrow \infty$ com $n \rightarrow \infty$, então existe $t_{n_0} < -T$ e $X_{t_{n_0}}(x) \in U$.

$E, X_{t_n}(X_{t_{n_0}}(x)) \rightarrow p$ assim existe um $t_{n_1} < t_{n_0} < -T$ tal que $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in U$.

Portanto, $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in U$ e $X_{t_{n_1}}(X_{t_{n_0}}(x)) \in X_{t_{n_1}}(U)$, pois $X_{t_{n_0}}(x) \in U$.

Considere $t = t_{n_1} < -T$ então

$$X_t(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Logo, $p \in \Omega(X)$ e, conseqüentemente $\alpha(x) \subset \Omega(X)$, para qualquer $x \in M$.

Devido a essa observação, o conjunto $\Omega(X)$ é não vazio em M , quando M for uma variedade compacta, uma vez que para cada $x \in M$ o conjunto $\omega(x)$ é não vazio. O mesmo ocorre com o conjunto $\alpha(x)$.

1.2.1 Função de Primeiro Retorno de Poincaré e Hiperbolicidade

Na proposição a seguir usaremos a notação $\varphi^t(x)$ para indicar a curva integral de x avaliada no tempo t . De acordo com a definição 1.2.5 temos que $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$.

Proposição 1.2.26. *Seja M^n uma variedade diferenciável compacta e $f \in \mathfrak{X}^r(M)$.*

1. *Seja $\varphi^t(x)$ uma solução de $x' = f(x)$ então $D\varphi_x^t f(x) = f(\varphi^t(x))$ para qualquer t .*
2. *Se γ é uma órbita periódica de período T e $p \in \gamma$ então a derivada $D\varphi_p^T$ tem 1 como autovalor associado ao autovetor $f(p)$.*
3. *Se p e q são dois pontos na órbita periódica γ de período T então as derivadas $D\varphi_p^T$ e $D\varphi_q^T$ são linearmente conjugadas. Em particular, $D\varphi_p^T$ e $D\varphi_q^T$ têm os mesmos autovalores.*

Demonstração. 1. Como $\varphi^t(x)$ é uma solução de $x' = f(x)$ segue que:

$$f(\varphi^t(x)) = \frac{d}{ds} \varphi^s(x)|_{s=t} = \frac{d}{ds} \varphi^t \circ \varphi^s(x)|_{s=0} = D\varphi_x^t f(x).$$

2. Temos que $\varphi^T(p) = p$ então $D\varphi_p^T f(p) = f(\varphi^T(p)) = f(p)$. Assim, 1 é autovalor de $D\varphi_p^T f(p)$ associado ao autovetor $f(p)$.

3. Suponha que $q = \varphi^r(p)$. Então,

$$q = \varphi^T(q) = \varphi^T \circ \varphi^r(p) = \varphi^r(p) = \varphi^r \circ \varphi^T(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi^T \circ \varphi^r(p) = \varphi^r \circ \varphi^T(p).$$

Logo,

$$\begin{aligned} D\varphi_q^T D\varphi_p^r &= D\varphi_p^r D\varphi_q^T \Rightarrow \\ \Rightarrow D\varphi_q^T &= D\varphi_p^r D\varphi_p^T (D\varphi_p^r)^{-1}. \end{aligned}$$

Então, $D\varphi_p^T$ e $D\varphi_q^T$ são linearmente conjugadas e, assim têm os mesmos autovalores. $\square$

Definição 1.2.27. *Seja Σ uma variedade mergulhada em M de codimensão um e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r > 0$, Σ é uma **transversal ou seção transversal local** ao campo X em $p \in \Sigma \subset M$ se os vetores de uma base de $T_p\Sigma$ e o vetor $X(p)$ geram T_pM .*

Definição 1.2.28. *Seja M^n uma variedade compacta e $\mathfrak{X}^r(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^r , $r > 0$, de M^n munido de uma topologia C^r . Dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das trajetórias, isto é, se $p \in M$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que para $0 < t < \delta$, $h(X_t(p)) = Y_{\bar{t}}(h(p))$ para algum $0 < \bar{t} < \epsilon$. Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y .*

*Dizemos que os campos X e Y são **conjugados** se existe uma equivalência topológica h que preserva o parâmetro t , isto é, $h(X_t(p)) = Y_t(h(p))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $p \in M$.*

Definição 1.2.29. *Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r > 0$, e $p, q \in M$. X e Y são ditos **topologicamente equivalentes** em p e q se existem vizinhanças V_p e W_q de p e q respectivamente, e um homeomorfismo $h : V_p \rightarrow W_q$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das órbitas e $h(p) = q$.*

Observação 1.2.30. *Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^{r+1} , $r > 0$, onde M^m e N^n são variedades diferenciáveis. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, então $Y = f_*X$ definido por $Y(q) = Df_p X(p)$, com $q = f(p)$ é um campo de classe C^r em N , pois $f_*X = Df \circ X \circ f^{-1}$. Se $\alpha : I \rightarrow M$ é uma curva integral de X , então $f \circ \alpha : I \rightarrow N$ é uma curva integral em Y . Em particular, f leva trajetórias de X em trajetórias de Y .*

*Se $x : U \subset M \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ é uma carta em M , $Y = x_*X$ é um campo de vetores de classe C^r em V . Dizemos que Y é a expressão de X na carta local x .*

Teorema 1.2.31. (Fluxo Tubular) *Sejam M^n uma variedade diferenciável $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r > 0$ e $p \in M$ um ponto regular de X , isto é, $X(p) \neq 0$. Sejam $C = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n; |x^i| < 1, 1 \leq i \leq n\}$ e X_C um campo definido em C por $X_C(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r , $h : V_p \rightarrow C$, onde V_p é uma vizinhança de p em M , levando trajetórias de X em trajetórias de X_C .*

Demonstração. Seja $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^n$ uma carta tal que $p \in U$ com $x(p) = 0$. Seja x_*X o campo de classe C^r induzido por X em U_0 . Como $X(p) \neq 0$ temos

que $x_*X(0) = Dx_pX(x^{-1}(0)) = Dx_pX(p) \neq 0$ pois Dx_p é um isomorfismo. Seja $\varphi : [-\tau, \tau] \times V_0 \rightarrow U_0$ o fluxo local de x_*X e seja $H = \{w \in \mathbb{R}^n; \langle w, x_*X(0) \rangle = 0\}$.

Afirmção: H é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$.

O subespaço H_0 gerado por $x_*X(0)$ tem dimensão 1 em $\mathbb{R}^n$. Seja H_1 o subespaço complementar de H_0 em $\mathbb{R}^n$, logo dimensão de H_1 é igual a $n-1$. E uma base de $\mathbb{R}^n$ é dada pelo $n-1$ vetores da base de H_1 união com o vetor $x_*X(0)$ da base de H_0 . Pelo processo de ortogonalização de Gram Schmidt podemos tornar esses vetores um a um ortogonais, assim H terá como base $n-1$ vetores ortogonais a $x_*X(0)$. Portanto, H é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$.

Seja $\psi : [-\tau, \tau] \times S \rightarrow U_0$ onde $S = V_0 \cap H$. Considere uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R} \times H$, que é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ e $\{e_2, \dots, e_n\} \subset \{0\} \times H$, segue que:

$$D\psi_{(0,0)}e_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, 0)|_{t=0} = x_*X(\varphi(0, 0)) = x_*X(0) \text{ (pela definição de fluxo local)}$$

$$D\psi_{(0,0)}e_j = e_j, \quad 2 \leq j \leq n, \text{ pois } \psi(0, y) = y \quad \forall y \in S.$$

Logo $D\psi_{(0,0)} : \mathbb{R} \times H \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Função Inversa, ψ é um difeomorfismo de uma vizinhança de $(0, 0)$ em $[-\tau, \tau] \times S$ sobre uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^n$. Portanto, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno $C_\epsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times S; |t| < \epsilon, |x| < \epsilon\}$ e $\tilde{\psi} : C_\epsilon \rightarrow U_0$ é a restrição de ψ a C_ϵ então ψ é um difeomorfismo C^r sobre sua imagem em U_0 .

Além disso, $\tilde{\psi}$ leva órbitas do campo paralelo X_{C_ϵ} em C_ϵ em órbitas de x_*X . Considere o difeomorfismo $C^\infty f : C \rightarrow C_\epsilon$ dado por $f(y) = \epsilon y$ e defina $h^{-1} = x^{-1}\tilde{\psi}f : C \rightarrow M$ é um difeomorfismo C^r sobre sua imagem. Então $h : x^{-1}\tilde{\psi}(C_\epsilon) \rightarrow C$ é um difeomorfismo C^r . $\square$

Seja γ uma órbita periódica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Por um ponto $x_0 \in \gamma$ considere uma transversal ou seção transversal Σ ao campo X .

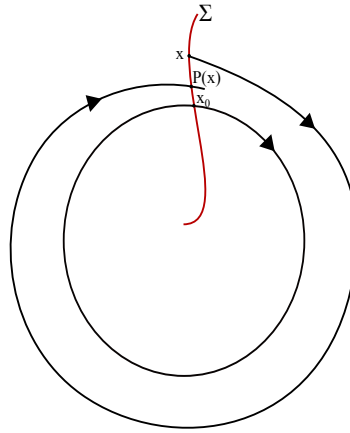


Figura 1.8. Transformação de Poincaré

A órbita por x_0 volta intersectar Σ no tempo τ , onde τ é o período de γ . Pela continuidade do campo, a órbita por um ponto em Σ suficientemente próximo a x_0 também volta a intersectar Σ em um tempo próximo a τ .

Seja $V \subset \Sigma$ uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 , podemos definir a aplicação $P : V \rightarrow \Sigma$ que cada ponto $x \in V$ associa $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a intersectar Σ . Esta aplicação é denominada **transformação de Poincaré** ou **função de Primeiro Retorno de Poincaré** associada a órbita γ e à transversal Σ .

Da continuidade dos campos X e $-X$ segue que P é um homeomorfismo de uma vizinhança de x_0 em Σ .

Definição 1.2.32. Um **fluxo tubular** de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é um par (F, f) onde F é um aberto de M e f é um difeomorfismo C^r de F sobre o cubo $I^n = I \times I^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}; |x| < 1 \text{ e } \|y^i\| < 1, 1 \leq i \leq n-1\}$, onde n é a dimensão da variedade M .

Se f_*X denota o campo induzido por f , isto é, $f_*X(x, y) = Df_{f^{-1}(x, y)}X(f^{-1}(x, y))$ então f_*X é paralelo ao campo constante $(x, y) \mapsto (1, 0)$.

O aberto F da definição acima é chamado uma **caixa de fluxo** para o campo X . No Teorema 1.2.31 temos que se $p \in M$ é um ponto regular podemos encontrar uma caixa de fluxo que contém p .

Teorema 1.2.33. (Fluxo Tubular Longo) Seja $\gamma \subset M$ um arco de uma trajetória de X compacto e não fechado. Então existe um fluxo tubular (F, f) de X tal que $\gamma \subset F$.

Demonstração. Seja $\alpha : [-\epsilon, a + \epsilon] \rightarrow M$ uma curva integral de X tal que $\alpha([0, a]) = \gamma$ e $\alpha(t) \neq \alpha(t')$ se $t \neq t'$. Considere o compacto $\tilde{\gamma} = \alpha([-\epsilon, a + \epsilon])$. Como os pontos de $\tilde{\gamma}$ são regulares, pelo Teorema do Fluxo Tubular (1.2.31), existe uma cobertura de $\tilde{\gamma}$ por caixas de fluxo. Como $\tilde{\gamma}$ é compacto, segue essa cobertura admite um número de Lebesgue, então considere $\delta > 0$ o número de Lebesgue desta cobertura. Seja $\{F_1, \dots, F_k\}$ uma cobertura finita por caixas de fluxo de diâmetro menor que $\delta/2$. Devido a escolha do diâmetro das caixas de fluxo, temos que se $F_i \cap F_j = \emptyset$ então $F_i \cup F_j$ está contido numa mesma caixa de fluxo de X . Usando essa propriedade podemos, diminuir os F_i , se necessário, agrupá-los de modo que cada F_i intersekte apenas F_{i-1} e F_{i+1} .

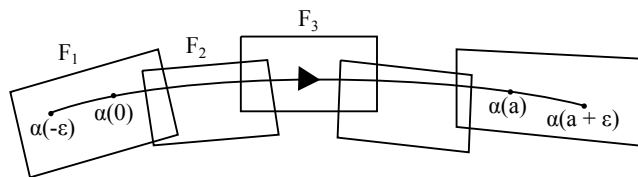


Figura 1.9

Sejam $-\epsilon = t_1 < t_2 < \dots < t_m = a + \epsilon$ tais que $p_i = \alpha(t_i) \in F \cap \tilde{\gamma}$ e denotemos por $I_d^{n-1} = \{(0, y) \in I \times I^{n-1}; |y_j| < d, 1 \leq j \leq n-1\}$. Sejam (F_i, f_i) os fluxos tubulares correspondentes as caixas F_i , $1 \leq i \leq k$. Temos que $\Sigma_1 = f_1(I_d^{n-1})$ é uma seção transversal a x , uma vez que f_1 é um difeomorfismo local e $p_1 \in \Sigma_1$. Seja $\Sigma_i = X_{t_i - t_1}(\Sigma)$ então Σ_i é uma transversal a X tal que $p_i \in \Sigma_i$. Considerando $d > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\Sigma_i \subset F_i$.

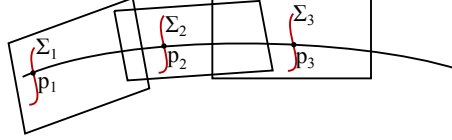


Figura 1.10

Para cada $p \in \tilde{\gamma}$ tome $t \in [0, a + 2\epsilon]$ tal que $p = X_{t_1}(p_1)$ e considere a seção $\Sigma_p = X_t(\Sigma_1)$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular temos que $\Sigma_p \cap \Sigma_q = \emptyset$ se $p \neq q$ e que $F = \bigcup_{p \in \tilde{\gamma}} \Sigma_p$ é uma vizinhança de γ .

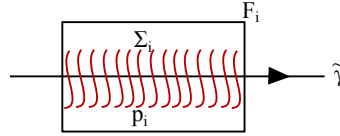


Figura 1.11

Na vizinhança está definida uma fibração C^r cuja fibra sobre o ponto p é Σ_p . Isto é, a projeção $\pi_1 : F \rightarrow \tilde{\gamma}$ que a cada $z \in F$ associa o ponto p tal que $z \in \Sigma_p$ é uma aplicação C^r . Temos que, se $z \in F$ então $z = X_t(x_0)$ com $x_0 \in \Sigma_1$, assim $\pi_1(z) = X_t(p_1) \in \tilde{\gamma}$.

Considere a projeção C^r , $\pi_2 : F \rightarrow \Sigma_1$ que a cada ponto $z \in F$ associa a interseção da órbita de z com Σ_1 , isto é, se $z \in \Sigma_p$ e $p = X_t(p_1)$ então $\pi_2(z) = X_{-t}(z)$. Sejam $g_1 : \tilde{\gamma} \rightarrow [-1, 1]$ e $g_2 : \Sigma_1 \rightarrow I^{n-1}$ dois difeomorfismos. Definimos, então $f : F \rightarrow I \times I^{n-1}$ dada por $f(z) = (g_1 \circ \pi_1(z), g_2 \circ \pi_2(z))$. Logo, (F, f) é um fluxo tubular que contém γ . $\square$

Observação 1.2.34. O difeomorfismo f encontrado acima leva órbitas do campo constante $C : I \times I^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $C(x, y) = (1, 0)$. Geralmente, f não preserva o parâmetro t , isto é, f_*X não é igual ao campo constante C . No entanto, podemos encontrar um difeomorfismo $\tilde{f} : \tilde{F} \rightarrow (-b, b) \times I^{n-1}$, onde $b > 0$, tal que $\tilde{f}_*X$ seja o campo constante.

Com efeito, seja $p \in \gamma$ e $b > 0$ tal que $\gamma \subset \bigcup_{t \in (-b, b)} X_t(p) \subset F$. Seja $\Sigma_p \subset F$ uma seção transversal a X pelo ponto p , suficientemente pequena para que $\tilde{F} = \bigcup_{t \in (-b, b)} X_t(p)$ esteja contido em F . Se $z \in \tilde{F}$ e $X_{-t}(z) \in \Sigma_p$, definimos $\tilde{f}(z) = (t, hX_{-t}(z))$, onde $h : \Sigma_p \rightarrow I^{n-1}$ é um difeomorfismo C^r .

Assim, $\tilde{f}$ é um difeomorfismo C^r . Temos que,

$$\begin{aligned} h^{-1} : I^{n-1} &\rightarrow \Sigma_p \\ \alpha &\mapsto h^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1} : (-b, b) \times I^{n-1} &\rightarrow \tilde{F} = \bigcup_{t \in (-b, b)} X_t(p) \\ (t, \alpha) &\mapsto X_t(h^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Seja, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(0) = X_t(h^{-1}(\alpha))$ e $\alpha'(0) = X(X_t(h^{-1}(\alpha)))$. Logo, $\tilde{f} \circ \alpha(0) = \tilde{f}(X_t(h^{-1}(\alpha))) = (t, h(h^{-1}(\alpha))) = (t, \alpha) \in (-b, b) \times I^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ então, $D\tilde{f}_{\tilde{f}^{-1}(t, \alpha)}(X(X_t(h^{-1}(\alpha))))$ é dado pelo vetor $(1, 0)$, assim $\tilde{f}_*X$ é o campo C .

Proposição 1.2.35. *Sejam γ uma órbita periódica de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, onde M^n é uma variedade diferenciável, e Σ é uma transversal a X por um ponto $p \in \gamma$. Se $P_\Sigma : U \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a transformação de Poincaré então P_Σ é um difeomorfismo de classe C^r de uma vizinhança V de p sobre um aberto de Σ .*

Demonstração. Sejam (F_1, f_1) um fluxo tubular contendo p e (F_2, f_2) um fluxo tubular longo tal que $\gamma \subset F_1 \cup F_2$ como na figura. Sejam Σ_1 e Σ_2 as componentes do bordo de F_2 que são transversais a X , isto é, $\Sigma_1 = f_2^{-1}(\{-1\} \times I^{n-1})$ e $\Sigma_2 = f_2^{-1}(\{1\} \times I^{n-1})$.

Denotaremos por $\pi_1 : V \subset \Sigma \rightarrow \Sigma_1$, $\pi_2 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ e $\pi_3 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ as projeções ao longo das trajetórias de X , onde V é uma vizinhança pequena de p .

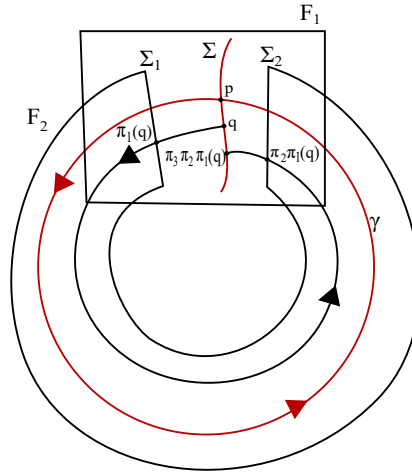


Figura 1.12

Assim $P_\Sigma = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Usando o Teorema do Fluxo Tubular Longo temos que π_1 , π_2 e π_3 são de classe C^r , logo P_Σ é de classe C^r . Como P_Σ tem uma inversa de classe C^r , que é a transformação de Poincaré correspondente ao campo $-X$,

segue que P_Σ é um difeomorfismo de classe C^r de uma vizinhança V de p sobre um aberto de Σ . $\square$

De forma mais geral, podemos definir a **transformação de Poincaré** para as extremidades de um arco compacto e não fechado de uma trajetória de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Sejam p, q as extremidades desse arco compacto, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, podemos construir transversais Σ_1 e Σ_2 passando pelos pontos p e q , respectivamente. Temos que $q = X_\tau(p)$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$, devido a continuidade do campo, numa vizinhança V de p suficientemente pequena os pontos desta vizinhança intersectam Σ_2 num tempo próximo a τ (se necessário considere a primeira interseção).

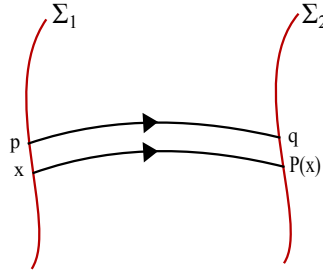


Figura 1.13

Definimos a **função ou transformação de Poincaré** pela aplicação $P : V \subset \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ tal que para cada ponto $x \in V$ associa o ponto $P(x)$, onde $P(x)$ é a primeira interseção da órbita de x com Σ_2 . Como feito anteriormente, temos que a **transformação de Poincaré** será um difeomorfismo de classe C^r de uma vizinhança p sobre um aberto de Σ_2 .

Definição 1.2.36. *Seja M^n uma variedade diferenciável compacta, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ e γ é uma órbita periódica de período T com $p \in \gamma$, pela Proposição 1.2.26, temos que os autovalores de $(DX_T)_p$ são $1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Então os $n - 1$ autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ são chamados de **multiplicadores característicos ou (autovalores)** da órbita periódica. Note que também pela Proposição 1.2.26 os autovalores não dependem da escolha do ponto $p \in \gamma$.*

Seja γ uma órbita periódica de período T de um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r > 0$ numa variedade diferenciável compacta M^n . Considere a seguinte decomposição do espaço tangente restrito a γ como um conjunto compacto e invariante em M :

$$T_p M = E_p^u \oplus E_p^X \oplus E_p^s,$$

para cada ponto $p \in \gamma$, com $D(X_t)_p E_p^\sigma = E^\sigma(p)$, para $\sigma = u, s, X$. Aqui $\oplus$ denota soma direta.

Considere $(DX_T)_p$ a derivada em p de $X_T : M \rightarrow M$ e, sejam $1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ os autovalores de $(DX_T)_p$, tais que $\lambda_k \neq 1, \forall k = 1, \dots, n - 1$. Os subfibrados E_p^s e E_p^u estão associados aos autovalores de $(DX_T)_p$ de modo que o subfibrado E_p^s está associado aos autovalores λ_i tais que $|\lambda_i| < 1$, enquanto E_p^u está associado aos autolavores λ_j tais que $|\lambda_j| > 1$. O subfibrado E_p^X gerado pelo campo está

associado ao autovalor 1, como $X(p) \neq 0$, para todo $p \in \gamma$ temos que $\dim E_p^X = 1$ e, podemos escrever $E_p^X = \langle X(p) \rangle$, onde $\langle X(p) \rangle$ denota o subespaço gerado pelo vetor $X(p)$. Para mais detalhes ver [17] e [18].

Uma órbita periódica com estas propriedades é dita ser uma órbita periódica **hiperbólica**.

Definição 1.2.37. *Uma órbita periódica γ hiperbólica é dita ser **tipo sela** quando $\dim E_p^s \neq 0$ e $\dim E_p^u \neq 0$, $p \in \gamma$.*

Definição 1.2.38. *Os conjuntos:*

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; d(X_t(p), X_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; d(X_t(p), X_t(q)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente **variedade estável** e **instável forte do ponto p para o campo de vetores X** . Onde d denota a métrica Riemanniana da variedade M .

Dado $\epsilon > 0$, a **variedade estável local de tamanho ϵ** do ponto $p \in M$ é o conjunto denotado por $W_\epsilon^{ss}(p)$ dos pontos $y \in M$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X_t(p), X_t(y)) = 0$$

e

$$d(X_t(p), X_t(y)) \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Analogamente, define-se a **variedade instável local de tamanho ϵ** de um ponto $p \in M$.

A noção de **hiperbólico**, assim como as **variedades estáveis e instáveis locais** podem ser generalizadas para um conjunto $\Lambda \subset M$ compacto e invariante pelo fluxo, o mesmo ocorre para o teorema a seguir e as definições relacionadas com hiperbolicidade, ver [8]. Para nosso trabalho consideraremos $\Lambda = \gamma$.

Teorema 1.2.39. (Teorema da Variedade Estável para Fluxos). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo X_t . Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada ponto $p \in \Lambda$ existem dois discos mergulhados $W_\epsilon^{ss}(p)$ e $W_\epsilon^{uu}(p)$ os quais são tangentes a E_p^s e E_p^u , respectivamente.*

Demonstração. Ver [8] ou [17]. □

Assim as variedades estável e instável forte de um ponto $p \in M$ para um campo de vetores X podem ser obtidas como

$$W^{ss}(p) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}(W_\epsilon^{ss}(X_t(p)))$$

$$W^{uu}(p) = \bigcup_{t \geq 0} X_t(W_\epsilon^{uu}(X_{-t}(p))).$$

Definimos a **variedade estável e instável** de um ponto $p \in M$ para o campo de vetores X como sendo respectivamente os conjuntos

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p)).$$

Se Λ é um conjunto hiperbólico para um fluxo X_t , então $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são variedades tangentes a $E^s \oplus E^X$ e $E^u \oplus E^X$, respectivamente, e dependem continuamente de p . Maiores detalhes ver [8] e [21].

Considere M uma 3-variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$, γ uma órbita periódica hiperbólica tipo sela de período $T > 0$. Neste caso, os autovalores de $(DX_T)_p$, com $p \in \gamma$, são $1, \lambda_1, \lambda_2$. Devemos ter que $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$, assim λ_1, λ_2 são números reais. Logo, $(DX_T)_p$ possui três autovalores reais e distintos dois a dois, então existe uma base $\{v_0, v_1, v_2\}$ de $T_p M$ (isomorfo a $\mathbb{R}^3$), onde v_i , $0 \leq i \leq 2$ são os autovetores associados aos autovalores $1, \lambda_1, \lambda_2$, respectivamente.

Assim, E_p^X é o subespaço gerado pelo autovalor $v_0 = X(p)$, associado ao autovalor 1 , E_p^s é o subespaço gerado por v_1 associado ao autovalor λ_1 , E_p^u é o subespaço gerado por v_2 associado ao autovalor λ_2 .

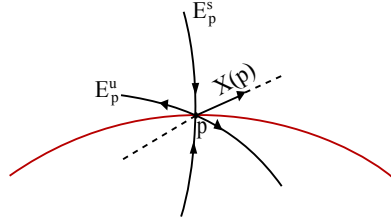


Figura 1.14

Devido as hipóteses podemos escrever $(DX_T)_p$ como:

$$(DX_T)_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Como $(DX_p)_T$ é um isomorfismo, tem-se que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Seja $W^{ss}(p)$ a variedade forte do ponto $p \in \gamma$, que é tangente ao subespaço E_p^s (ver Teorema 1.2.39). Temos que $X_T(W^{ss}(p)) = W^{ss}(p)$, pois se $y \in X_T(W^{ss}(p))$ então $y = X_T(x)$ com $x \in W^{ss}(p)$ então $x = X_{-T}(y)$, logo:

$$d(X_t(x), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d(X_t(X_{-T}(y)), X_t(X_{-T}(p))) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \\
&\Rightarrow d(X_{t-T}(y), X_{t-T}(p)) \rightarrow 0, t - T \rightarrow \infty \Rightarrow \\
&\Rightarrow y \in W^{ss}(p).
\end{aligned}$$

Portanto, $X_T(W^{ss}(p)) \subset W^{ss}(p)$. E, por outro lado, se $x \in W^{ss}(p)$ então $d(X_t(x), X_t(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Seja $s = t - T$ assim $s \rightarrow \infty$ e,

$$\begin{aligned}
&d(X_s(x), X_s(p)) \rightarrow 0, s \rightarrow \infty \Rightarrow \\
&\Rightarrow d(X_{t-T}(x), X_{t-T}(p)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \Rightarrow \\
&\Rightarrow d(X_t(X_{-T}(x)), X_t(X_{-T}(p))) \rightarrow 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow d(X_t(X_{-T}(x)), X_t(p)) \rightarrow 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow X_{-T}(x) \in W^{ss}(p) \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in X_T(W^{ss}(p)).
\end{aligned}$$

Logo, $X_T(W^{ss}(p)) = W^{ss}(p)$. Agora, fazendo a restrição de X_T a $W^{ss}(p)$ temos que:

$$X_T : W^{ss}(p) \rightarrow W^{ss}(p)$$

e,

$$(DX_T)_p|_{E_p^s} : E_p^s \rightarrow E_p^s$$

tal que

$$(DX_T)_p|_{E_p^s} v = \lambda_1 v, \quad \forall v \in E_p^s.$$

Como $W^{ss}(p)$ tem dimensão um e é tangente ao subespaço E_p^s gerado pelo autovetor v_1 temos que $W^{ss}(p)$ é homeomorfo a um intervalo da reta. Assim, podemos identificar $(DX_T)_p|_{E_p^s}$ positiva ou negativa dependendo do valor λ_1 . Caso, $\lambda_1 > 0$ teremos que $f = X_T|_{W^{ss}(p)}$ é uma função crescente.

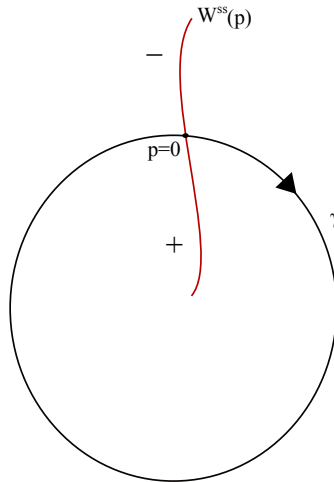


Figura 1.15. Variedade Estável Forte

Considere que $p = 0$ no intervalo real ao qual $W^{ss}(p)$ é homeomorfo, como ilustrado na Figura 1.15, onde $+$ indica a parte positiva e $-$ a parte negativa do intervalo real. Como $f(p) = f(0) = 0$ e, f é crescente temos que $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0$ e, também $f(y) \geq 0$, $\forall y \geq 0$.

A Figura 1.16 descreve o comportamento da órbita de dois pontos x, y na variedade tais que $x < 0 < y$. Note que, neste caso, o saturação de $W^{ss}(p)$ pelo fluxo nos dá uma variedade homeomorfa a um anel (ou cilindro), assim $W^s(\gamma)$ será homeomorfa a um anel.

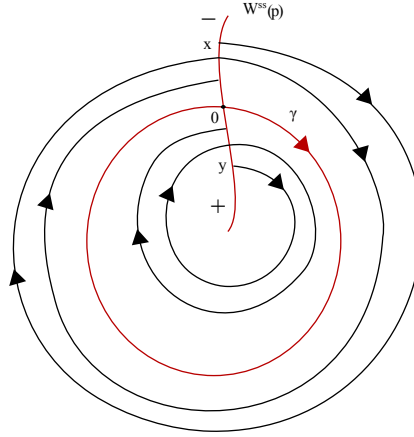


Figura 1.16. Variedade Estável

No caso, que f é decrescente temos que se $x \leq 0$ então $f(x) \geq f(0) = 0$ e, $y \geq 0 \Rightarrow f(y) \leq 0$. Geometricamente, o saturado pelo fluxo de $W^{ss}(p)$ será homeomorfo a uma faixa de Möebius, neste caso $W^s(\gamma)$ será homeomorfo a uma faixa de Möebius.

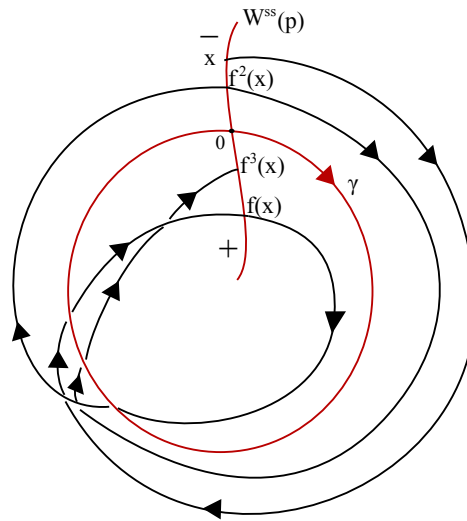


Figura 1.17

Capítulo 2

Noções de Topologia Algébrica e Aspectos Topológicos

Neste capítulo abordaremos conceitos introdutórios sobre topologia algébrica e alguns aspectos topológicos, que juntamente com o capítulo anterior, serão de extrema importância para uma melhor compreensão do trabalho.

2.1 Conceitos básicos de Topologia Algébrica

O objetivo principal dessa seção será definir e apresentar resultados importantes sobre o primeiro grupo fundamental. Para mais detalhes sobre o assunto indicamos as referências [14], [19] e [20].

Sejam M e N variedades, $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações contínuas e $I = [0, 1]$.

Definição 2.1.1. Dizemos que f e g são **homotópicas** quando existe uma aplicação contínua

$$H : M \times I \rightarrow N$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x) \forall x \in M$.

A aplicação H é chamada homotopia entre f e g . Notação: $H : f \simeq g$ ou $f \simeq g$.

A homotopia pode ser interpretada como uma deformação da aplicação f até a aplicação g num intervalo de tempo $I = [0, 1]$, onde no tempo zero temos a aplicação f e no tempo 1 temos a aplicação g .

Vale ressaltar a importância do contradomínio na homotopia, pois é nele que o processo de deformação ocorre.

Definição 2.1.2. Considere dois homeomorfismo $f : M \rightarrow N$ e $g : M \rightarrow N$. Dizemos que f e g são **isotópicas** quando existe uma aplicação contínua

$$H : M \times I \rightarrow N$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x) \forall x \in M$ e, para cada $t \in I$ tem-se que $H_t : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo.

Note que toda isotopia é também uma homotopia.

Proposição 2.1.3. *A relação de homotopia, $f \simeq g$ é uma relação de equivalência das aplicações contínuas de M em N .*

Demonstração. 1. Reflexiva:

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua, então considere, $F : M \times I \rightarrow N$ dada por:

$$F(x, t) = f(x).$$

Assim, F é uma homotopia entre f e f . Portanto, $\simeq$ é reflexiva.

2. Simétrica:

Sejam $f, g : M \rightarrow N$ aplicações contínuas, tais que $f \simeq g$, logo existe uma aplicação contínua:

$$F : M \times I \rightarrow N$$

tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$.

Defina, $K : M \times I \rightarrow N$ dada por:

$$K(x, t) = F(x, 1 - t).$$

Então,

$$K(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$$

$$K(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$$

e, K é contínua, pois F é contínua. Logo, K é uma homotopia entre g e f , ou seja, $g \simeq f$. Portanto, $\simeq$ é simétrica.

3. Transitiva:

Sejam $f, g, h : M \rightarrow N$ contínuas tais que $F : f \simeq g$ e $G : g \simeq h$. Então:

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

$$G(x, 0) = g(x), \quad G(x, 1) = h(x).$$

Defina

$$L : M \times I \rightarrow N$$

tal que

$$L(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como $L(x, \frac{1}{2}) = F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$, segue que L é contínua. Assim, L é uma homotopia entre f e h . Logo, $\simeq$ é transitiva.

Portanto, $\simeq$ é uma relação de equivalência. □

Proposição 2.1.4. *Sejam $f, f' : M \rightarrow N$ e $g, g' : N \rightarrow S$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$ então $g \circ f \simeq g' \circ f'$. Isto é, a composição de aplicações homotópicas preserva homotopias.*

Demonstração. Sejam:

$F : M \times I \rightarrow N$ uma homotopia ente f e f' , então:

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = f'(x)$$

e $G : N \times I \rightarrow S$ uma homotopia entre g e g' , assim:

$$G(x, 0) = g(x) \text{ e } G(x, 1) = g'(x).$$

Defina, $L : M \times I \rightarrow S$ dada por:

$$L(x, t) = G(F(x, t), t)$$

L é contínua (composta de funções contínuas) e:

$$L(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f(x), 0) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$L(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = G(f'(x), 1) = g'(f'(x)) = g' \circ f'(x).$$

Portanto, L é uma homotopia entre $f \circ g$ e $f' \circ g'$, ou seja, $g \circ f \simeq g' \circ f'$. $\square$

Definição 2.1.5. *As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são denominadas **classes de homotopia**.*

Exemplo 2.1.6. *Um campo de vetores contínuo tangente em S^n é uma aplicação contínua $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle x, v(x) \rangle = 0 \ \forall x \in S^n$. Se existe um campo contínuo de vetores tangentes e não-nulos em S^n então a aplicação antípoda $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ é homotópica a identidade.*

De fato, $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ contínuo, tangente e não-nulo em S^n , definimos a aplicação $f : S^n \rightarrow S^n$ dada por:

$$f(x) = \frac{x + v(x)}{\|x + v(x)\|}.$$

Então, f é contínua e $f(x) \neq x, \forall x \in S^n$ (assim, $f(x) \neq -\alpha(x) \ \forall x \in S^n$). Logo, $(1-t)f(x) + t\alpha(x) \neq 0, \forall t \in I = [0, 1]$ e $\forall x \in S^n$, temos que:

$$F : S^n \times I \rightarrow S^n$$

$$F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + t\alpha(x)}{\|(1-t)f(x) + t\alpha(x)\|}.$$

Segue que,

$$F(x, 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x)$$

$$F(x, 1) = \frac{\alpha(x)}{\|\alpha(x)\|} = \alpha(x).$$

Assim, F é uma homotopia entre f e α , então $f \simeq \alpha$. Por outro lado, definindo $H : S^n \times I \rightarrow S^n$ tal que

$$H(x, t) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}.$$

Logo,

$$H(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = id_{S^n}$$

$$H(x, 1) = \frac{x + v(x)}{\|x + v(x)\|} = f(x).$$

H é uma homotopia entre id_{S^n} e f . Então, $f \simeq \alpha$ e $id_{S^n} \simeq f$, como $\simeq$ é uma relação de equivalência, Proposição 2.1.3, temos que $id_{S^n} \simeq \alpha$.

Definição 2.1.7. Uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ chama-se uma **equivalência homotópica** quando existe $g : N \rightarrow M$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_N$ e $f \circ g \simeq id_M$. Dizemos que g é um **inverso homotópico** de f e que M e N tem o mesmo **tipo de homotopia**. Notação: $f : M \equiv N$ ou $M \equiv N$.

Exemplo 2.1.8. O cilindro, $S^1 \times \mathbb{R}$, tem o mesmo tipo de homotopia do círculo, S^1 .

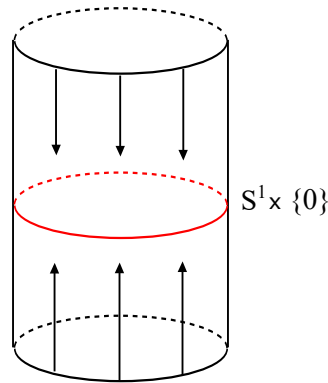


Figura 2.1

Vamos mostrar que $S^1 \times \mathbb{R} \equiv S^1 \times \{0\} \equiv S^1$. Considere, $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \{0\}$ definida por

$$f(x, t) = (x, 0).$$

E, a inclusão $i : S^1 \times \{0\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$. Defina:

$$H : (S^1 \times \mathbb{R}) \times I \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$H((x, t), s) = (x, ts).$$

H é contínua e,

$$H((x, t), 0) = (x, 0) = (g \circ f)(x, t)$$

$$H((x, t), 1) = id_{S^1 \times \mathbb{R}}(x, t).$$

Então, H é uma homotopia entre $g \circ f$ e $id_{S^1 \times \mathbb{R}}$. Além disso, $f \circ i(x, 0) = (x, 0) = id_{S^1 \times \{0\}}(x, 0)$. Logo, $S^1 \times \mathbb{R} \equiv S^1 \times \{0\}$.

Exemplo 2.1.9. A faixa de Möebius tem o mesmo tipo de homotopia de S^1 .

Ver [20].

Definição 2.1.10. Uma variedade M é dita **contrátil** quando tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

Proposição 2.1.11. M é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $id : M \rightarrow M$ é homotópica a uma aplicação constante de M .

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como M é contrátil temos que $f : M \rightarrow \{x\}$ é uma equivalência homotópica ($x \in M$), assim existe uma aplicação contínua $g : \{x\} \rightarrow M$ tal que g é o inverso homotópico de f , então $g \circ f \simeq id_M$.

Mas, $g \circ f : M \rightarrow \{x\}$ logo $g \circ f$ é uma aplicação constante de M . Sendo, $g \circ f \simeq id_M$, segue que a $id : M \rightarrow M$ é homotópica a uma aplicação constante em M .

($\Leftarrow$) Seja $f : M \rightarrow \{x\}$, $x \in M$, uma aplicação constante tal que $f \simeq id_M$. Então, pela Proposição 2.1.4, segue que $f \circ id_M \simeq id_M \circ id_M$, ou seja, $f \circ id_M \simeq id_M$. E, também que $id_M \circ f \simeq id_M \circ id_M$, logo $id_M \circ f \simeq id_M$.

Como $f \circ id_M \simeq id_M$ e $id_M \circ f \simeq id_M$, temos que f é uma equivalência homotópica assim M e $\{x\}$ tem o mesmo tipo de homotopia. Logo, M é contrátil. $\square$

Exemplo 2.1.12. $\mathbb{R}^n$ é contrátil.

De fato, considere a identidade de $\mathbb{R}^n$, $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e aplicação constante $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g(x) = p$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é convexo segue que o segmento $(1-t)x + tp$, $t \in [0, 1]$ está inteiramente contido em $\mathbb{R}^n$. Assim, podemos definir:

$$H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dada por}$$

$$H(x, t) = (1-t)x + tp.$$

Então,

$$H(x, 0) = x = id(x)$$

$$H(x, 1) = p = g(x).$$

Como H é contínua então H é uma homotopia entre a $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e aplicação constante $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, assim pela Proposição 2.1.11 temos que $\mathbb{R}^n$ é contrátil.

Proposição 2.1.13. *Se M ou N é contrátil então toda aplicação $f : M \rightarrow N$ é homotópica a uma constante.*

Demonstração. Suponha que M seja contrátil, então pela Proposição 2.1.11, existe uma homotopia:

$$H : M \times I \rightarrow M$$

entre a id_M e aplicação constante $g : M \rightarrow M$, tal que $g(x) = p, \forall x \in M$. Temos que,

$$H(x, 0) = id_M(x) = x, \quad \forall x \in M$$

$$H(x, 1) = g(x) = p, \quad \forall x \in M.$$

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua qualquer. Considere:

$$F : M \times I \rightarrow N \text{ dada por}$$

$$F(x, t) = (f \circ H)(x, t) = f(H(x, t)).$$

Assim,

$$F(x, 0) = f(H(x, 0)) = f(x)$$

$$F(x, 1) = f(H(x, 1)) = f(p).$$

Logo, F é uma homotopia entre f e a constante $f(p)$.

Agora, se consideramos N contrátil então existe uma homotopia: $K : N \times I \rightarrow N$ entre a id_N e a aplicação constante $c : N \rightarrow N$, tal que $c(x) = q \forall x \in N$. Defina:

$$L : M \times I \rightarrow N \text{ tal que}$$

$$L(x, t) = K(f(x), t).$$

Então,

$$L(x, 0) = K(f(x), 0) = id_N(f(x)) = f(x)$$

$$L(x, 1) = K(f(x), 1) = c(f(x)) = q.$$

Segue que, L é uma homotopia entre f e uma constante. Portanto, se M ou N é contrátil temos que qualquer aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua é homotópica a uma constante. $\square$

Diremos que (M, A) é um par de espaços topológicos quando $A \subset M$ for um subespaço de M . Dados os pares (M, A) e (N, B) uma aplicação contínua $f : (M, A) \rightarrow (N, B)$ tal que $f(A) \subset B$.

Definição 2.1.14. *Dadas as aplicações contínuas $f, g : (M, A) \rightarrow (N, B)$ uma homotopia de pares entre f e g é uma aplicação contínua:*

$$H : (M \times I, A \times I) \rightarrow (N, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x) \forall x \in M$.

Definição 2.1.15. Dadas $f, g : M \rightarrow N$ contínuas, dizemos que f é homotópica a g **relativamente a um subespaço** $A \subset M$ quando existe uma homotopia $H : f \simeq g$ tal que:

$$H(x, t) = f(x) = g(x), \quad \forall x \in A.$$

Denotamos por: $f \simeq g \text{ (rel } A)$.

Podemos perceber que para existir uma homotopia relativa a $A \subset M$ entre $f, g : M \rightarrow N$ é necessário que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Exemplo 2.1.16. A aplicação identidade $id : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ é homotópica à aplicação radial $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ relativamente ao subespaço S^{n-1} .

De fato, considere o segmento dado por $(1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, 1]$, está inteiramente contido em $\mathbb{R}^n$ (uma vez que $\mathbb{R}^n$ é convexo).

Afirmção: $(1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$ não contém a origem de $\mathbb{R}^n$, isto é, está contido em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Suponha, por absurdo, que $(1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$ contém a origem de $\mathbb{R}^n$, então:

$$(1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} = 0 \quad \text{para algum } t \in [0, 1].$$

Então,

$$x((1-t) + t\frac{1}{\|x\|}) = 0 \Rightarrow ((1-t) + t\frac{1}{\|x\|}) = 0.$$

Se $\|x\| = 1$ então $1 = 0$ um absurdo. Logo $\|x\| \neq 1$.

Assim,

$$t = \frac{\|x\|}{\|x\| - 1}.$$

Caso 1. Se $\|x\| < 1$ teríamos que $(\|x\| - 1) < 0$ assim $t < 0$, um absurdo pois $t \in [0, 1]$.

Caso 2. Se $\|x\| > 1$ então:

$$0 < \|x\| - 1 < \|x\|$$

$$\frac{\|x\| - 1}{\|x\|} < 1$$

$$\frac{\|x\|}{\|x\| - 1} > 1.$$

Logo, $t > 1$ (um absurdo pois $t \in [0, 1]$).

Temos que, $(1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$ está contido em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Assim podemos definir a aplicação contínua:

$$H : \mathbb{R}^n - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \text{tal que}$$

$$H(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

Então,

$$H(x, 0) = x = id(x)$$

$$H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|} = r(x).$$

Logo, H é uma homotopia entre $id : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Agora, se $x \in S^{n-1}$ temos que $id(x) = r(x)$ e,

$$H(x, t) = x = id(x) = r(x), \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Portanto, $id \simeq r$ (rel S^{n-1}).

Definição 2.1.17. Seja $A \subset M$, A é um **retrato** de M se existe uma função contínua sobrejetiva $r : M \rightarrow A$ tal que com a inclusão $i : A \rightarrow M$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{r} & A \\ \uparrow i & \nearrow id_A & \\ A & & \end{array}$$

Ou seja, $r \circ i = id_A$. A função r é dita **retração** entre M e A .

Definição 2.1.18. Seja $A \subset M$. A é dito **retrato por deformação** de M se existe uma retração $r : M \rightarrow A$ tal que

$$i \circ r \simeq id_M.$$

$i : A \rightarrow M$ denota inclusão de A em M .

Exemplo 2.1.19. $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}$ é um retrato por deformação do cilindro, $S^1 \times \mathbb{R}$.

Basta considerar $r = f$ no exemplo 2.1.8.

Observação 2.1.20. Se $A \subset M$ é um retrato por deformação de M , então $M \equiv A$.

De fato, temos que $i \circ r \simeq id_M$ e $r \circ i = id_A$, onde $r : M \rightarrow A$ denota a função retração e i denota a inclusão de A em M . Logo, $M \equiv A$.

2.1.1 Grupo Fundamental

Definição 2.1.21. Diremos que dois caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ são **caminhos homotópicos** com extremos fixos quando tivermos $\alpha \simeq \beta$ (rel ∂I). Assim uma homotopia $H : \alpha \simeq \beta$ é uma aplicação contínua:

$$H : I \times I \rightarrow M$$

tal que

$$H(s, 0) = \alpha(s), \quad H(s, 1) = \beta(s)$$

$$H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$$

$$H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1).$$

Para quaisquer que sejam $t, s \in I$. Denotaremos por $[\alpha]$ a classe de homotopia do caminho α , isto é, o conjunto de todos os caminhos que possuem as mesmas extremidades de α e que são homotópicos a α com extremos fixos durante a homotopia.

Observe que para dois caminhos α e β sejam caminhos homotópicos é necessário que tenham a mesma extremidade, ou seja, $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$.

Um caso particular da definição acima é quando os caminhos α e β são fechados (isto é, $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = x_0$), então $\alpha \simeq \beta$ se existe uma aplicação contínua:

$$H : I \times I \rightarrow M$$

tal que

$$H(s, 0) = \alpha(s), \quad H(s, 1) = \beta(s)$$

$$H(0, t) = H(1, t) = x_0.$$

Definição 2.1.22. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ caminhos que o fim de α coincide com a extremidade de β , ou seja, $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos o **produto** $\alpha\beta$ ou **justaposição** como sendo o caminho que consiste em percorrer α e depois β . Assim $\alpha\beta : I \rightarrow M$ é o novo caminho dado por:

$$\alpha\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Como $\alpha(1) = \beta(0)$ as regras acima definem bem uma aplicação $\alpha\beta : I \rightarrow M$ tal que $\alpha\beta|_{[0, \frac{1}{2}]}$ e $\alpha\beta|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ são contínuas. Então, $\alpha\beta$ é contínua e assim é um caminho que começa em $\alpha(0)$ e termina em $\beta(1)$.

Definição 2.1.23. O **caminho inverso** de $\alpha : I \rightarrow M$ é o caminho $\alpha^{-1} : I \rightarrow M$ dado por:

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Seja $j : I \rightarrow I$ a função dada por $j(s) = 1 - s$. Então $\alpha^{-1} = \alpha \circ j$. Denotaremos por ε_x o caminho constante em $x \in M$, isto é, $\varepsilon_x(s) = x, \forall s \in I$. Sua classe de homotopia será denotada por $[\varepsilon_x]$.

Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ caminhos tais que $\alpha(1) = \beta(0)$, então:

Proposição 2.1.24. *Se $\alpha \simeq \alpha'$ e $\beta \simeq \beta'$ então $\alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$ e $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1}$.*

Demonstração. Se $H : \alpha \simeq \alpha'$ e $K : \beta \simeq \beta'$ são homotópicos. Defina

$L : I \times I \rightarrow M$ dada por:

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, t \in I \\ K(2s - 1, t), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, t \in I. \end{cases}$$

Como $H(1, t) = K(0, t) = \alpha(1) = \beta(0)$, $\forall t \in I$, temos que L está bem definida. Além disso, $L_{([0, \frac{1}{2}] \times I)}$ e $L_{([\frac{1}{2}, 1] \times I)}$ são contínuas então L é contínua em $I \times I$. Temos que:

$$L(s, 0) = H(2s, 0) = \alpha(s), \quad s \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$L(s, 0) = K(2s - 1, 0) = \beta(s), \quad s \in [0, \frac{1}{2}].$$

Assim, $L(s, 0) = \alpha\beta(s)$.

Analogamente, tem-se que $L(s, 1) = \alpha'\beta'(s)$. E,

$$L(0, t) = H(0, t) = \alpha'(0) = \alpha(0) = \beta(0) = \alpha\beta(0) = \beta'(0) = \alpha'\beta'(0).$$

Temos que,

$$L(0, t) = \alpha\beta(0) = \alpha'\beta'(0)$$

$$L(1, t) = H(1, t) = \alpha'(1) = \alpha(1) = \beta(1) = \alpha\beta(1) = \beta'(1) = \alpha'\beta'(1).$$

Então,

$$L(0, t) = \alpha\beta(1) = \alpha'\beta'(1).$$

Com isso concluímos que L é uma homotopia entre $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$. Portanto, $\alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$.

Agora, considere:

$G : I \times I \rightarrow M$ definida por

$$G(s, t) = H(1 - s, t).$$

Assim,

$$G(s, 0) = H(1 - s, 0) = \alpha^{-1}$$

$$G(s, 1) = H(1 - s, 1) = (\alpha')^{-1}$$

$$G(0, t) = H(1, t) = \alpha(1) = \alpha^{-1}(0) = \alpha'(1) = (\alpha')^{-1}(0)$$

$$G(1, t) = H(0, t) = \alpha(0) = \alpha^{-1}(1) = \alpha'(0) = (\alpha')^{-1}(1).$$

Como G é contínua temos que G é uma homotopia entre α^{-1} e $(\alpha')^{-1}$. Portanto, $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1}$. $\square$

Considere as classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ dos caminhos em M que tem origem num ponto $x \in M$ e terminam num ponto $y \in M$ e que tem origem em y e terminam num ponto $z \in M$, respectivamente.

Definição 2.1.25. Definimos a **classe do produto** $[\alpha\beta]$ como sendo o conjunto de todos os caminhos homotópicos ao caminho $\alpha\beta$, onde $\alpha \in [\alpha]$ e $\beta \in [\beta]$. Por definição: $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$.

Definimos também, a **classe inversa de** $[\alpha]$ como sendo a classe do caminho α^{-1} , onde $\alpha \in [\alpha]$, denotada por $[\alpha^{-1}]$

A Proposição 2.1.24 mostra que $[\alpha\beta]$ não depende da escolha dos caminhos $\alpha \in [\alpha]$ e $\beta \in [\beta]$ e, também que $[\alpha^{-1}]$ não depende da escolha de $\alpha \in [\alpha]$. Portanto, $[\alpha\beta]$ e $[\alpha^{-1}]$ estão bem definidos.

Proposição 2.1.26. ([14]) Sejam $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow M$ caminhos tais que um deles terminam onde o seguinte começa. Considere suas classes de homotopia $[\alpha]$, $[\alpha]$, $[\gamma]$ e $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, onde $x, y \in M$. Sejam ε_x e ε_y os caminhos constantes de x e de y , respectivamente e $[\varepsilon_x]$, $[\varepsilon_y]$ as classes de homotopia desses caminhos constantes. Então:

1. $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\varepsilon_x]$.
2. $[\alpha^{-1}][\alpha] = [\varepsilon_y]$.
3. $[\varepsilon_x][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][\varepsilon_y]$.
4. $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$.

Em particular, se consideramos na proposição acima, os caminhos $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow M$ fechados tais que $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = \gamma(0) = \gamma(1) = x$, com $x \in M$, teríamos que:

$$\begin{aligned} [\alpha][\alpha^{-1}] &= [\varepsilon_x] \\ [\alpha^{-1}][\alpha] &= [\varepsilon_x] \\ [\varepsilon_x][\alpha] &= [\alpha] = [\alpha][\varepsilon_x]. \end{aligned}$$

Assim com estas propriedades e a propriedade 4 da Proposição 2.1.26, as classes de homotopias dos caminhos fechados num ponto $x \in M$ constitui um grupo com a operação de produto de caminhos. Com isso podemos dar a seguinte definição.

Definição 2.1.27. Considere pares do tipo (M, x_0) , $x_0 \in M$ será chamado **ponto básico** de M . Os caminhos $\alpha : (I, \partial I) \rightarrow (M, x_0)$ serão chamados **caminhos fechados com base no ponto** x_0 . O conjunto formado pelas classes de homotopias de caminhos fechados com base no ponto x_0 é chamado **grupo fundamental** de M com base no ponto x_0 , denotado por $\pi_1(M, x_0)$.

Teorema 2.1.28. *Dados $x_0, x_1 \in M$, se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de M então $\pi_1(M, x_0)$ e $\pi_1(M, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. Como x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de M , então existe um caminho $\gamma : I \rightarrow M$ que liga x_0 a x_1 , ou seja, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Se α é um caminho fechado de x_0 então $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ é um caminho fechado de x_1 .

Então, se $\alpha \simeq \alpha'$, pela Proposição 2.1.24 temos que $\gamma^{-1}\alpha\gamma \simeq \gamma^{-1}\alpha'\gamma$. Logo, se $[\alpha] = [\alpha']$ segue que $[\gamma^{-1}\alpha\gamma] \simeq [\gamma^{-1}\alpha'\gamma]$, portanto dado um elemento $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$ a aplicação $[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}\alpha\gamma]$ induz um único elemento $[\gamma^{-1}\alpha\gamma] \in \pi_1(M, x_1)$. Denotaremos essa aplicação por:

$$P_\gamma : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_1) \quad \text{dada por}$$

$$P_\gamma([\alpha]) = [\gamma^{-1}\alpha\gamma].$$

Dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, x_0)$ temos que

$$\begin{aligned} P_\gamma([\alpha][\beta]) &= [\gamma^{-1}][\alpha][\beta][\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}][\alpha][\gamma][\gamma^{-1}][\beta][\gamma] \\ &= ([\gamma^{-1}][\alpha][\gamma])([\gamma^{-1}][\beta][\gamma]) \\ &= P_\gamma([\alpha])P_\gamma([\beta]). \end{aligned}$$

Assim, P_γ é um homomorfismo. Considere a aplicação:

$$P_\gamma^{-1} : \pi_1(M, x_1) \rightarrow \pi_1(M, x_0) \quad \text{tal que}$$

$$P_\gamma^{-1}([\beta]) = [\gamma\beta\gamma^{-1}].$$

Temos que P_γ^{-1} é a inversa de P_γ . De fato, pois

$$\begin{aligned} P_\gamma^{-1} \circ P_\gamma([\alpha]) &= P_\gamma^{-1}([\gamma^{-1}\alpha\gamma]) \\ &= [\gamma\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que $P_\gamma \circ P_\gamma^{-1}([\beta]) = [\beta]$. Então, $P_\gamma^{-1} \circ P_\gamma = id_{\pi_1(M, x_0)}$ e $P_\gamma \circ P_\gamma^{-1} = id_{\pi_1(M, x_1)}$.

Portanto, P_γ é um isomorfismo. □

Corolário 2.1.29. *Se M é conexo por caminhos então para quaisquer pontos básicos $x_0, x_1 \in M$ tem-se que $\pi_1(M, x_0)$ e $\pi_1(M, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. Como M é conexo por caminhos, então possui uma única componente conexa por caminhos (o próprio M), a conclusão segue diretamente da aplicação do Teorema 2.1.28. □

O corolário acima mostra que quando M é conexo por caminhos o grupo fundamental independe do ponto base escolhido, assim podemos representar o grupo fundamental por $\pi_1(M)$ sem nenhuma referência explícita ao ponto básico.

Definição 2.1.30. Se $\pi_1(M, x) = \{[\varepsilon_x]\}$, para todo $x \in M$, onde $[\varepsilon_x]$ denota a classe de homotopia do caminho constante no ponto x , dizemos que M é **simplesmente conexo**. Isto significa que todo caminho fechado $\alpha : I \rightarrow M$ com base num ponto $x \in M$ tem-se que $\alpha \simeq \varepsilon_x$.

Exemplo 2.1.31. 1. Se M é contrátil então M é simplesmente conexo.
2. Se $n > 1$, então S^n é simplesmente conexo.

Ver [14].

Definição 2.1.32. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua induz um homomorfismo ($y_0 = f(x_0)$):

$$f_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$$

definido por:

$$f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

$f_{\#}$ é chamado **homomorfismo induzido** pela aplicação f .

Como $\alpha \simeq \alpha'$ segue que existe uma homotopia:

$$F : I \times I \rightarrow M$$

tal que

$$F(s, 0) = \alpha(s), \quad F(s, 1) = \alpha'(s)$$

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0.$$

Considere:

$$H : I \times I \rightarrow N \quad \text{dada por:}$$

$$H(s, t) = f \circ F(s, t).$$

H é contínua, pois é a composta de aplicações contínuas. E, também:

$$H(s, 0) = f \circ F(s, 0) = f \circ \alpha(s)$$

$$H(s, 1) = f \circ F(s, 1) = f \circ \alpha'(s)$$

$$H(0, t) = f \circ F(0, t) = f(x_0) = y_0$$

$$H(1, t) = f \circ F(1, t) = f(x_0) = y_0.$$

Então, $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$, assim $f_{\#}$ está bem definido.

Além disso, $f \circ (\alpha\beta) = (f \circ \alpha)(f \circ \beta)$.

De fato, $\alpha\beta : I \rightarrow M$ tal que:

$$\alpha\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Logo, $f \circ (\alpha\beta) : I \rightarrow N$ é dada por:

$$f \circ (\alpha\beta)(s) = \begin{cases} f \circ \alpha(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ f \circ \beta(2s-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Assim, $f \circ (\alpha\beta)(s) = (f \circ \alpha(s))(f \circ \beta(s))$, $\forall s \in I$. Portanto, $f \circ (\alpha\beta) = (f \circ \alpha)(f \circ \beta)$. Então $f_{\#}([\alpha\beta]) = f_{\#}([\alpha])f_{\#}([\beta])$, concluímos que $f_{\#}$ é um homomorfismo.

Se $id : M \rightarrow M$ é a aplicação identidade então $id_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ é o homomorfismo identidade.

Observação 2.1.33. Temos que se $h : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo então $h_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$, $h(x_0) = y_0$, é um isomorfismo.

De fato, como $h : M \rightarrow N$ é contínua já temos que $h_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$, $h(x_0) = y_0$, dado por $h_{\#}([\alpha]) = [h \circ \alpha]$ é um homomorfismo induzido por h .

Sendo h um homeomorfismo existe $h^{-1} : N \rightarrow M$ e h^{-1} é contínua, logo $h_{\#}^{-1} : \pi_1(N, y_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$ dado por $h_{\#}^{-1}([\beta]) = [h^{-1} \circ \beta]$ é um homomorfismo induzido por h^{-1} .

Então,

$$\begin{aligned} h_{\#}^{-1} \circ h_{\#}([\alpha]) &= h_{\#}^{-1}([h \circ \alpha]) \\ &= [h^{-1} \circ h \circ \alpha] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} h_{\#} \circ h_{\#}^{-1}([\beta]) &= h_{\#}([h^{-1} \circ \beta]) \\ &= [h \circ h^{-1} \circ \beta] \\ &= [\beta]. \end{aligned}$$

Logo, $h_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$ é invertível e sua inversa é dada por $h_{\#}^{-1} : \pi_1(N, y_0) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$. Portanto, $h_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$ é um isomorfismo. Com isso, observa-se que variedades homeomorfas possuem grupos fundamentais isomorfos.

Definição 2.1.34. Dizemos que dois caminhos fechados $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ são **livremente homotópicos** quando existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow M$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(s, 1) &= \beta(s) \\ H(0, t) &= H(1, t). \end{aligned}$$

Para quaisquer $s, t \in I$. A última igualdade significa que para todo $t \in I$ o caminho $H_t : I \rightarrow M$ dado por $H_t(s) = H(s, t)$ é um caminho fechado. Note que a relação de caminhos livremente homotópicos é uma relação de equivalência.

Exemplo 2.1.35. Os caminhos α e γ no cilindro são livremente homotópicos, ver Figura 2.2.

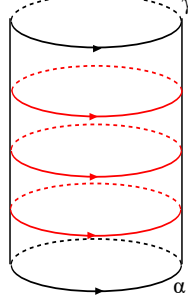


Figura 2.2. Livremente Homotópicos

A proposição a seguir relaciona os conceitos de caminhos livremente homotópicos com caminhos homotópicos.

Proposição 2.1.36. ([14]) Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ caminhos fechados, com base nos pontos x e y respectivamente. Os caminhos α e β são livremente homotópicos se e somente se existe um caminho $\gamma : I \rightarrow M$, ligando x a y tal que $\alpha \simeq \gamma\beta\gamma^{-1}$.

Observação 2.1.37. Seja M conexa por caminhos e $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ dois caminhos fechados, com base nos pontos x e y , respectivamente, são livremente homotópicos e, o caminho β é homotópico a uma constante. Então α também é homotópico a uma constante.

Vamos denotar os caminhos constantes em x e y por ε_x e ε_y , respectivamente. Pela Proposição 2.1.36 temos que $\alpha \simeq \gamma\beta\gamma^{-1}$, onde γ é o caminho que liga os pontos x e y , isto é, $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Assim,

$$\beta \simeq \varepsilon_y \Rightarrow \gamma\beta \simeq c\varepsilon_y \Rightarrow \gamma\beta\gamma^{-1} \simeq \gamma\varepsilon_y\gamma^{-1}.$$

Como $\gamma\varepsilon_y\gamma^{-1} \simeq \varepsilon_x$ e $\gamma\beta\gamma^{-1} \simeq \alpha$ temos que $\alpha \simeq \varepsilon_x$. Portanto, α é homotópico a uma constante.

Corolário 2.1.38. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ contínuas e homotópicas. Então os homomorfismos induzidos:

$$f_{\#} : \pi_1(M, x) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$$

$$g_{\#} : \pi_1(M, x) \rightarrow \pi_1(N, y_1).$$

$y_0 = f(x)$ e $y_1 = g(x)$ estão relacionados por $f_{\#} = P_{\gamma} \circ g_{\#}$, onde $P_{\gamma} : \pi_1(N, y_1) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$ é um isomorfismo definido na forma do Teorema 2.1.28.

Demonstração. Seja $H : M \times I \rightarrow N$ uma homotopia entre f e g , então $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. O caminho $\gamma : I \rightarrow M$ dado por $\gamma(t) = H(x, t)$

é um caminho ligando $\gamma(0) = H(x, 0) = f(x) = y_0$ a $\gamma(1) = H(1, x) = g(x) = y_1$. Para todo caminho fechado $\alpha : I \rightarrow M$ com base em x considere a aplicação:

$$\begin{aligned} F : I \times I &\rightarrow N \\ (s, t) &\mapsto H(\alpha(s), t). \end{aligned}$$

Tem-se que,

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= H(\alpha(s), 0) = f(\alpha(s)) = f \circ \alpha(s) \\ F(s, 1) &= H(\alpha(s), 1) = g(\alpha(s)) = g \circ \alpha(s) \\ F(0, t) &= H(\alpha(0), t) = H(x, t) = H(\alpha(1), t) = F(1, t). \end{aligned}$$

Assim, $f \circ \alpha$ e $g \circ \alpha$ são livremente homotópicos. Pela Proposição 2.1.36 segue que $f \circ \alpha \simeq \gamma(g \circ \alpha)\gamma^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} f_{\#}([\alpha]) &= [f \circ \alpha] \\ &= [\gamma(g \circ \alpha)\gamma^{-1}] \\ &= \gamma g_{\#}([\alpha])\gamma^{-1} \\ &= P_{\gamma}(g_{\#}(\alpha)). \end{aligned}$$

Portanto, $f_{\#} = P_{\gamma} \circ g_{\#}$, isto significa que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M, x) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_1(N, y_0) \\ g_{\#} \downarrow & \nearrow P_{\gamma} & \\ \pi_1(N, y_1) & & \end{array}$$

□

Proposição 2.1.39. ([20]) *Sejam M e N conexos por caminhos e $f : M \rightarrow N$ é uma equivalência homotópica, ou seja, M e N tem o mesmo tipo de homotopia. Então,*

$$f_{\#} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0)$$

com $y_0 = f(x_0)$ é um isomorfismo de grupo.

Demonstração. Sejam $f : M \rightarrow N$ uma equivalência homotópica e $g : N \rightarrow M$ seu inverso homotópico, então $f \circ g = id_N$ e $g \circ f = id_M$. Seja $x_0 \in M$, $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$ e $y_1 = f(x_1)$. Considere os homomorfismos induzidos:

$$\begin{aligned} f_{\#} &: \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(N, y_0) \\ f_{\#}^1 &: \pi_1(M, x_1) \rightarrow \pi_1(N, y_1) \\ g_{\#} &: \pi_1(N, y_0) \rightarrow \pi_1(M, x_1). \end{aligned}$$

Como $g \circ f \simeq id_M$, pela Corolário 2.1.38 temos que $g_{\#} \circ f_{\#} = P_{\gamma} : \pi_1(M, x_0) \rightarrow$

$\pi_1(M, x_1)$, onde P_γ é o isomorfismo definido da forma do Teorema 2.1.28, com γ um caminho ligando x_1 a x_0 .

Analogamente, da homotopia $f \circ g \simeq id_N$ concluimos que $f_\#^1 \circ g_\# = P_\delta : \pi_1(N, y_0) \rightarrow \pi_1(N, y_1)$ é o isomorfismo definido da forma do Teorema 2.1.28, com δ um caminho ligando y_1 a y_0 . Assim, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(N, y_0) \\ P_\gamma \downarrow & \swarrow g_\# & \downarrow P_\delta \\ \pi_1(M, x_1) & \xrightarrow{f_\#^1} & \pi_1(N, y_1) \end{array}$$

Sendo $g_\# \circ f_\#$ um isomorfismo segue que $g_\#$ é sobrejetiva. E, $f_\#^1 \circ g_\#$ é isomorfismo logo $g_\#$ é sobrejetiva. Então $g_\#$ é um isomorfismo e, portanto $f_\#$ e $f_\#^1$ são também isomorfismos. Concluimos que $\pi_1(M, x_0) \approx \pi_1(N, y_0)$. $\square$

Corolário 2.1.40. *Se $A \subset M$ é um retrato por deformação de M , então a retração $r : M \rightarrow A$, $x \in A$, induz um isomorfismo:*

$$\pi_1(M, x) \approx \pi_1(A, x).$$

Demonstração. Pela observação 2.1.20 tem-se que $M \equiv A$, então pela Proposição 2.1.39 segue o resultado. $\square$

Proposição 2.1.41. ([14]) *Sejam M e N variedades conexas por caminhos então $\pi_1(M \times N)$ e $\pi_1(M) \times \pi_1(N)$ são isomorfos.*

Exemplo 2.1.42. *Seja T o toro bidimensional, temos que S^1 e T são variedades conexas por caminhos, e $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (ver [14]).*

Como $T = S^1 \times S^1$, pela Proposição 2.1.41 segue que $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.2 Aspectos topológicos

Em todo trabalho chamaremos de bola, às vezes denotada por B^3 , uma variedade homeomorfa à bola unitária tridimensional do $\mathbb{R}^3$, e um toro sólido será uma variedade compacta tridimensional homeomorfa à $D^2 \times S^1$, D^2 denota o disco unitário de dimensão 2. A esfera S^2 será uma variedade homeomorfa à esfera unitária de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$. As variedades consideradas aqui serão 3-variedades e conexas, exceto quando for mencionado o contrário. Esta seção tem como principais referências [1], [2], [6], [7], [10] e [19]

Definição 2.2.1. *Uma variedade é **fechada** se for compacta, conexa e sem bordo.*

Exemplo 2.2.2. *O toro é uma variedade fechada.*

Definição 2.2.3. *Uma superfície S mergulhada em M **separa** M se $M - S$ não é conexa.*

Exemplo 2.2.4. Um toro T mergulhado em M bordando um toro sólido ($ST \subset M$), separa a variedade M , produzindo duas componentes conexas A, B para $M - T$, onde $A = \text{int}(ST)$ e $B = M - ST$

Definição 2.2.5. Uma variedade M é dita **irredutível** se toda esfera $S^2 \subset M$ é bordo de uma bola $B^3 \subset M$. Se M não é irredutível dizemos que M é redutível.

Exemplo 2.2.6. O toro sólido e S^3 são variedades irredutíveis.

Ver [1] e [6].

Definição 2.2.7. Uma superfície $S \subset M$ é dita **transversal** ao campo de vetores X em M se $X(x) \notin T_x S$, para todo $x \in S$.

Definição 2.2.8. Considere o semi-espço superior $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m; x_m \geq 0\}$. Uma m -**variedade com bordo** de classe C^k , $k \geq 0$, M , é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável munido de um atlas $\{\Phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{H}^m\}$ cujas mudanças de coordenadas são de classe C^k .

O **bordo** de M , denotado por ∂M , são os pontos $x \in M$ tais que $\Phi_i(x) \in \partial \mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m; x_m = 0\}$. O bordo de M tem dimensão $m - 1$ e $\text{int}M$ é uma variedade sem bordo, mais detalhes ver [10].

Proposição 2.2.9. ([11]) Se M é uma 3-variedade com bordo, então ∂M é uma superfície.

Proposição 2.2.10. Se M é uma m -variedade orientável com bordo então ∂M também é orientável.

Demonstração. Ver [10] ou [11]. □

Definição 2.2.11. ("**Colagem de variedades**") Sejam M_1 e M_2 3-variedades com bordos, $A \subset \partial M_1$ e $B \subset \partial M_2$ abertos e fechados e $\phi : A \rightarrow B$ um difeomorfismo, então escrevemos:

$$M_1 \bigcup_{\phi} M_2 = M/\tau.$$

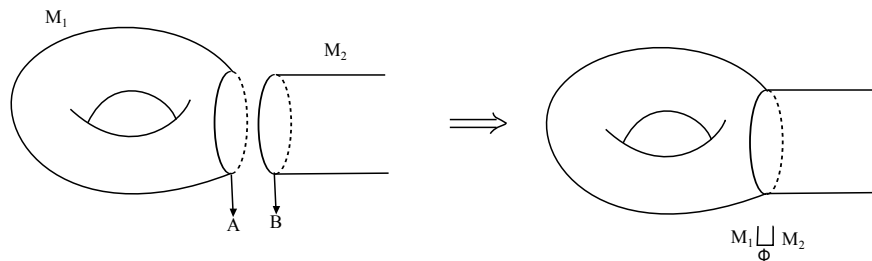


Figura 2.3

Onde $M = M_1 \cup M_2$ (união disjunta) e $\tau : A \cup B \rightarrow A \cup B$ tal que $\tau|_A = \phi$ e $\tau|_B = \phi^{-1}$.

Em particular, se M e N são 3-variedades com bordo e $\partial M = \partial N$ e $id : \partial M \rightarrow \partial N$ a identidade então $M \bigcup_{id} N$ é uma variedade sem bordo.

Exemplo 2.2.12. Considere dois toros sólidos $S^1 \times D^2$, podemos colá-los pelo bordo e produzir uma variedade $S^1 \times D^2 \bigcup_{id} S^1 \times D^2$, $id : \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial(S^1 \times D^2)$ homeomorfa a $S^1 \times S^1$. Neste caso, estamos identificando paralelos com paralelos e meridianos com meridianos em $\partial(S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1$.

E , $S^1 \times D^2 \bigcup_f S^1 \times D^2$, $f : \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial(S^1 \times D^2)$ tal que $f(x, y) = (y, x)$ produz uma variedade homeomorfa a S^3 . O difeomorfismo f indica que a colagem é feita através da identificação de paralelos com meridianos em $\partial(S^1 \times D^2) = S^1 \times S^1$. Ver [6].

Exemplo 2.2.13. Podemos obter S^3 pela colagem de duas bolas pelo bordo. Ver [10].

Definição 2.2.14. Seja S uma superfície fechada mergulhada em M . Dizemos que S é **2-lados** se existe um mergulho $h : S \times [-1, 1] \rightarrow M$ tal que $h(x, 0) = x$.

Intuitivamente, podemos enxergar a propriedade 2-lados como sendo uma "folga" que a superfície S tem na variedade M para se deslocar, quer dizer que S admite uma vizinhança conexa em M . Observamos, também que em cada $t \in [-1, 1]$ fixado a imagem do mergulho $h(S \times \{t\})$ é homeomorfa a superfície S . Geometricamente, é como se em cada $t \in [-1, 1]$ enxergarmos a superfície S depois de um deslocamento na variedade.

A imagem de $S \times [-1, 1]$ pelo mergulho h é chamado um **bicolar** de S . Mais geral, em vez do intervalo $[-1, 1]$ podemos ter um intervalo de $I = [a - \epsilon, a + \epsilon]$, $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, tal que $h(x, a) = x$, uma vez que todos intervalos fechados são difeomorfos.

Observação 2.2.15. Seja T um toro 2-lados numa 3-variedade M e $h : T \times [-1, 1] \rightarrow M$ o mergulho então a 3-variedade $M_0 = M - h(T \times (-1, 1))$ é chamada de o resultado **do corte de M ao longo de T** , e $M - h(T \times [-1, 1])$ é homeomorfa a $M - T$, denotaremos que $M - h(T \times [-1, 1]) \sim M - T$. Mais detalhes ver [7].

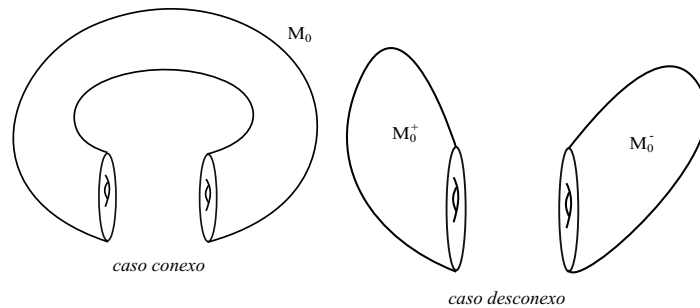


Figura 2.4. Figura baseada em [2]

Ao realizarmos este corte podemos obter M_0 conexa ou não. Caso seja desconexa obtemos duas componentes conexas. Em ambos os casos, obtemos como

bordo de M_0 duas cópias do toro T (se M é uma 3-variedade com bordo então produzimos mais duas componentes de bordo para M_0).

Ao colarmos os bordos produzidos via um difeomorfismo podemos obter uma nova 3-variedade M' (em geral, M' não é homeomorfa a M), este caso também pode ser visto como cirurgia de Dehn. Ver [2]

Definição 2.2.16. Seja S uma superfície, dizemos que S está **devidamente mergulhada** em M se S está mergulhada em M e $\partial M \cap S = \partial S$.

Definição 2.2.17. Uma superfície $S \subset M$ 2-lados sem componente S^2 ou D^2 é dita ser **incompressível** se para todo disco $D \subset M$ com $D \cap S = \partial D$ existe outro disco $D' \subset S$ com $\partial D' = \partial D$. Se S não é incompressível dizemos que é **compressível**.

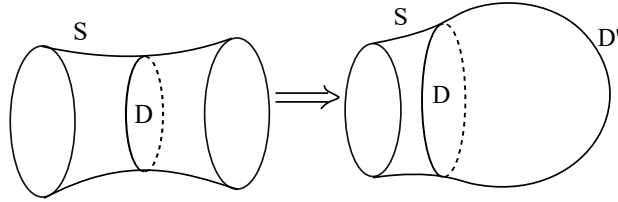


Figura 2.5

Observação 2.2.18. Uma superfície $S \subset \text{int}M$ transversal a um campo de vetores X de classe C^1 numa 3-variedade M é necessariamente 2-lados.

Considere o fluxo $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow M$ o fluxo associado ao campo X , temos que $\varphi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times S} : (-\epsilon, \epsilon) \times S \rightarrow M$ é um mergulho, uma vez que S é transversal ao campo e a transversalidade é uma propriedade aberta, isto é, é preservada numa pequena vizinhança (Teorema da Transversalidade ou Teorema de Tohm [16]).

Proposição 2.2.19. ([6]) Uma variedade 2-lados $S \subset M$ é incompressível se o homomorfismo induzido pela inclusão for injetivo.

Exemplo 2.2.20. Todo toro $T = S^1 \times S^1$ em S^3 é compressível.

De fato, como $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e S^3 é simplesmente conexa logo $\pi_1(S^3) = \{0\}$, então o homomorfismo induzido pela aplicação inclusão: $i_{\#} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$ não é injetivo. Pela Proposição 2.2.19 segue que T em S^3 é compressível.

Os seguintes teoremas podem ser encontrados em [19].

Teorema 2.2.21. (Teorema da Separação de Brouwer): Se K^{n-1} é topologicamente uma esfera de dimensão $n - 1$ em $\mathbb{R}^n$, então $\mathbb{R}^n - K$ tem exatamente duas componentes e K é o bordo de cada uma.

O teorema acima para caso $n = 2$ é conhecido como **teorema da curva de Jordan**.

Teorema 2.2.22. (Teorema de Schönflies) Dado um mergulho $f : S^1 \rightarrow S^2$, o fecho de cada uma das componentes de $S^2 - f(S^1)$ é homeomorfa ao disco D^2 .

Proposição 2.2.23. Seja T um toro 2-lados em uma 3-variedade M irredutível, então T é incompressível ou T é bordo de um toro sólido ou está contido em uma bola contida em M .

Demonstração. Se T é incompressível então temos o resultado. Agora, se T é compressível, existe um disco $D \subset M$ com $D \cap T = \partial D$, tal que ∂D não borda um disco em T . Então numa pequena vizinhança em T todos círculos bordam um disco, realizando uma cirurgia em T ao longo desse disco D obtemos uma superfície homeomorfa a uma esfera, como M é irredutível devemos ter que S^2 borda uma bola B em M . Temos duas possibilidades: $D \cap B = \emptyset$ ou $D \subset B$.

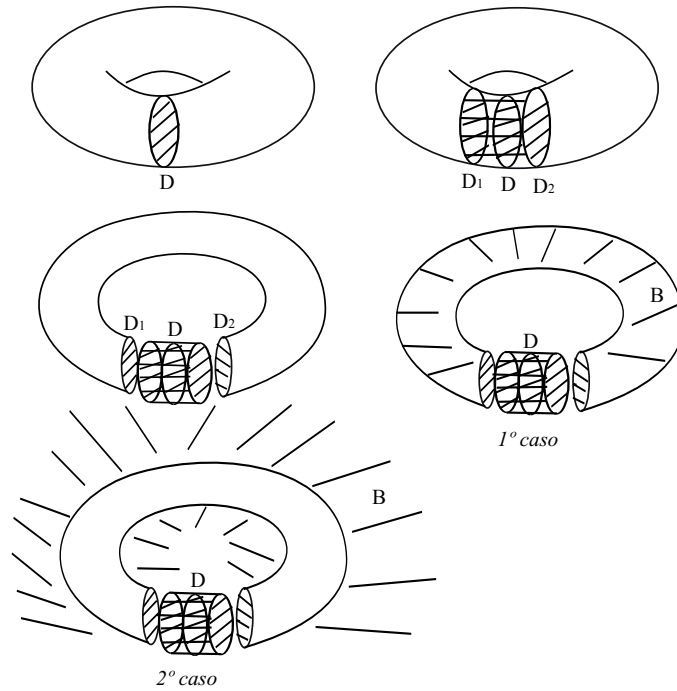


Figura 2.6

No primeiro caso, isto é, $D \cap B = \emptyset$, desfazemos a cirurgia e temos que T é bordo de um toro sólido. No segundo caso, quando $D \subset B$ então T está contido em B .

Como T é 2-lados podemos supor que T está no interior da bola B . □

Teorema 2.2.24. ([19]) (Teorema do Toro Sólido). Seja T um toro mergulhado em S^3 , então T divide este espaço em duas partes sendo pelo menos uma delas homeomorfa ao toro sólido $D^2 \times S^1$.

Proposição 2.2.25. Seja S uma coleção finita de superfícies disjuntas incompressíveis. M é irredutível se, e somente se $M - S$ é irredutível.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja M irreduzível, então toda esfera em $M - S \subset M$ borda uma bola B em M . Temos dois casos para analisar :

1. $B \subset M - S$, então o segue o resultado.
2. B contém S ,

No caso 1 segue o resultado. No caso 2, teríamos $S \subset B \subset M$ assim as componentes de S é compressível em B (uma vez que B é contrátil) e, conseqüentemente S será compressível em M , uma contradição com a hipótese.

Portanto, $M - S$ é irreduzível.

($\Leftarrow$) Suponha que $M - S$ seja irreduzível. Seja $S^2 \subset M$ uma esfera, podemos assumir que S^2 é transversal a S . Assim, $S \cap S^2$ consiste de um número finitos de círculos.

Considere um círculo em $S \cap S^2$ bordando um disco D em S^2 de tal forma que $D \cap S = \partial D$, ou seja, $\text{int} D \subset M - S$. Seja S_i a componente de S tal que $D \cap S_i = \partial D$, pela incompressibilidade de S_i temos que ∂D borda um disco $D' \subset S_i$.

S é 2-lados então cada componente de S é 2-lados em M , isto é, S_i admite um bicoar V_i em M , assim podemos deslocar $\partial D'$ nessa vizinhança V_i em direção ao interior do disco D de modo que todos os círculos bordam um disco D^* em $M - S$ com $\partial D^* \cap D = \partial D^*$ e seja $D_i \subset D$ o disco tal que $\partial D_i = \partial D^*$.

Como a esfera $D^* \cup D_i \subset M - S$ borda uma bola em $M - S$, segue que a esfera $D' \cup D$ borda uma bola B em M . Devemos ter que $B \cap S = D'$, caso contrário, teríamos S_i contida numa bola, um absurdo com o fato de cada componente de S ser incompressível.

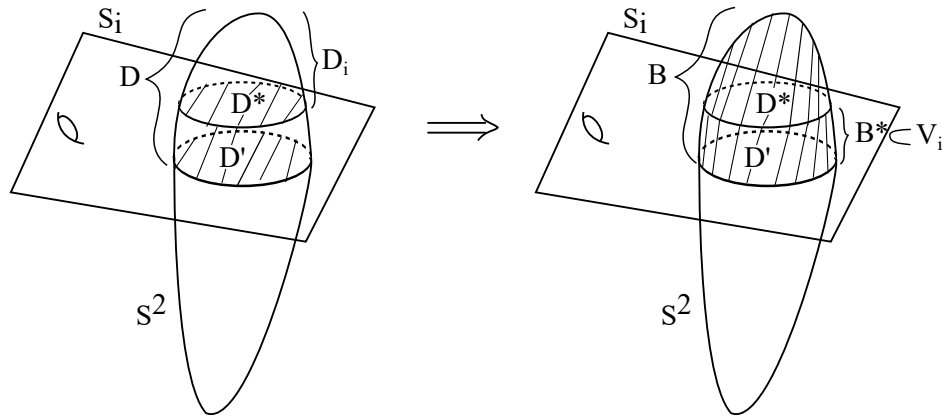


Figura 2.7

Por uma isotopia em S^2 podemos levar o disco D para o interior de B em direção ao disco D' e, um pouco mais além na vizinhança V_i de modo que o novo disco D não interseja S_i , eliminando ∂D e qualquer outro círculo de $S^2 \cap S_i$ que esteja no interior de D' .

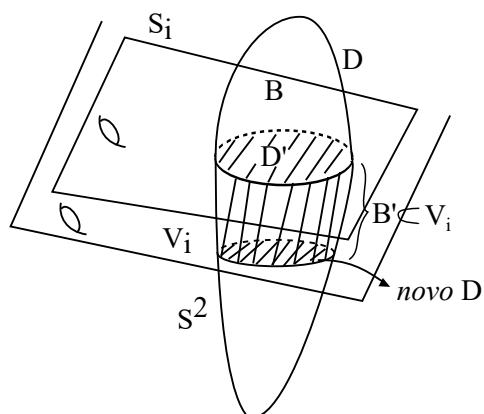


Figura 2.8

Repetindo este processo eliminamos todos os círculos de $S^2 \cap S$ assim teremos $S^2 \subset M - S$. Então S^2 borda uma bola e M é irredutível. $\square$

Capítulo 3

Resultado Principal

Neste capítulo apresentaremos a prova do teorema que motivou este estudo. Para isto, utilizaremos os resultados e conceitos apresentados nos capítulos anteriores, bem como os resultados encontrados na primeira seção desse capítulo. As principais referências são [12] e [13].

3.1 Resultados preliminares

Teorema 3.1.1. *Seja T um toro transversal a um campo de vetores X , C^1 , em uma 3-variedade fechada e irredutível M . Se a união de órbitas de X que não intersectam T é conexa em M , então T é incompressível.*

A prova desse teorema é consequência dos seguintes dois lemas.

Lema 3.1.2. *Se M é uma 3-variedade fechada e irredutível e T é um toro 2-lados mergulhado em M , então T é incompressível ou separa M .*

Demonstração. Suponha que T não é incompressível. Como M é irredutível e T é 2-lados, pela Proposição 2.2.23, segue que T borda um toro sólido ou está contido no interior de uma bola B em M .

No primeiro caso, T separa M e temos o resultado. No segundo caso, vamos provar que T também separa M .

Para isso considere uma bola B' , colando as bolas B e B' pelo bordo via um difeomorfismo obtemos uma S^3 que contém T . Segue do Teorema do Toro Sólido que T separa S^3 . Denote por H_1 e H_2 as duas componentes conexas de $S^3 \setminus T$.

Como $T \subset \text{int}(B)$ temos que $B' \cap T = \emptyset$. Assim, podemos supor que $B' \subset \text{int}(H_1)$ e então $H_1 \setminus B' = B \setminus H_2$ logo $\partial(H_1 \setminus B') = T \cup \partial B$ pois $\partial B' = \partial B$. Além disso, $\partial(M \setminus B) = \partial B$. Então, podemos colar $H_1 \setminus B'$ e $M \setminus B$ ao longo de ∂B de forma ordenada para obter uma 3-variedade A conexa com bordo $\partial A = T$.

Analogamente, H_2 é conexa e satisfaz $\partial H_2 = T$. Colando A e H_2 ao longo de T de um modo adequado produzimos M . Assim $M \setminus T$ tem duas componentes, A e H_2 . Então, T separa M neste caso também, como queríamos. $\square$

Se $S \subset M$ é uma superfície compacta transversal a um campo de vetores X , C^1 , numa 3-variedade compacta M , denotaremos por σ_S a união das órbitas de X que não intersectam S , isto é,

$$\sigma_S = \{x \in M : O_X(x) \cap S = \emptyset\}.$$

Proposição 3.1.3. *Considere uma superfície compacta $S \subset M$ transversal a um campo de vetores X , C^1 , numa 3-variedade compacta M , então σ_S é invariante pelo fluxo X_t e σ_S é um conjunto fechado em M , assim σ_S é um conjunto compacto.*

Demonstração. A invariância pelo fluxo segue da definição de σ_S , uma vez que se $x \in \sigma_S$ então para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos que $X_t(x) \in \sigma_S$, pois a órbita do ponto x coincide com a órbita do ponto $X_t(x)$. Assim, σ_S é um conjunto invariante pelo fluxo.

Agora vamos mostrar que σ_S é um conjunto fechado. Suponha, por contradição, que existe $p \in \bar{\sigma}_S$ e $p \notin \sigma_S$. Como $p \notin \sigma_S$ existe um tempo T tal que $y = X_T(p) \in S$.

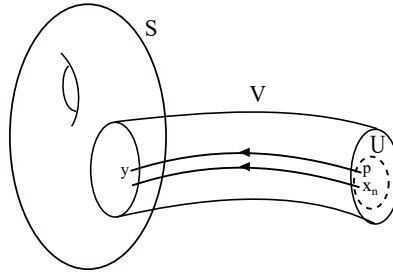


Figura 3.1

E, $p \in \bar{\sigma}_S$ assim para qualquer vizinhança U de p tem-se que $U \cap \sigma_S \neq \emptyset$. Considere V uma vizinhança tubular do segmento de órbita de p até o ponto y suficientemente pequena e de tal forma que contém uma vizinhança U de p , então existe $x_n \in \sigma_S$ tal que $x_n \in U \subset V$. Pelo Teorema Fluxo Tubular Longo devemos ter que as órbitas dos pontos em V intersectam S num tempo próximo ao tempo T , em particular a órbita de x_n deve intersectar S , o que contradiz o fato de $x_n \in \sigma_S$.

Portanto, $p \in \sigma_S$ e, σ_S é um conjunto fechado. Sendo M um compacto e σ_S um fechado temos que S é um compacto. $\square$

Lema 3.1.4. *Seja T um toro transversal a um campo de vetores X , C^1 , em uma 3-variedade fechada M . Se σ_T é conexa, então T não separa M .*

Demonstração. Suponha, por contradição, que T separa M e denote por A e B as componentes conexas de $M \setminus T$.

Considere que $\sigma_T \neq \emptyset$ e que o campo X aponta para dentro de A em $T = \partial A$ e para fora de B em $T = \partial B$. Como $M \setminus T$ é desconexo, segue que uma órbita positiva com ponto inicial em T não pode retornar a T . O mesmo ocorre com as órbitas negativas com ponto inicial em T .

Então numa vizinhança pequena compacta de T em M , digamos $V' = \{x \in X_t(T); t \in [-\epsilon, \epsilon]\}$ ($\epsilon > 0$), temos que o campo continua transversal em $X_t(T)$ ($t \in [-\epsilon, \epsilon]$) apontando para o interior de A , dado um ponto $y \in \Omega(X)$ tal que a órbita de y intersecta T num ponto x , então $x \in \Omega(X)$. Considere o segmento de órbita compacto de $x_0 = X_{-\epsilon}(x)$ até $x_1 = X_{\epsilon}(x)$, tomando uma vizinhança tubular V suficientemente pequena desse segmento de órbita, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, segue que as órbitas dos pontos nessa vizinhança também tem o mesmo comportamento da órbita de x e, além disso $M \setminus T$ é desconexo. Então, existe uma pequena vizinhança $W \subset V$ de x tal que para todo $|t| > 2\epsilon$ tem-se que $X_t(W) \cap W = \emptyset$, uma contradição pois $x \in \Omega(X)$.

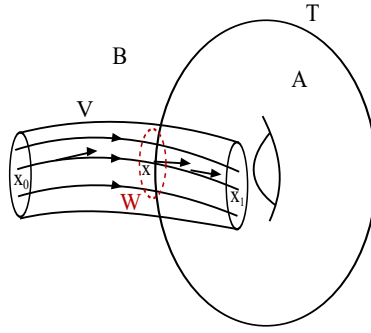


Figura 3.2

Disso concluímos que $\Omega(X) \subset \sigma_T$. e, como $\omega_X(p) \cup \alpha_X(p) \subset \Omega(X)$, (ver observação 1.2.25), temos que $\omega_X(p) \cup \alpha_X(p) \subset \sigma_T$ para cada $p \in M$ (isto é verdade em particular quando $p \in T$).

Fixe $p \in T$. Por um lado, $\omega_X(p) \subset \text{int}(A)$. Então $\sigma_T \cap \text{int}(A) \neq \emptyset$. Por outro lado, $\alpha_X(p) \subset \text{int}(B)$. Então $\sigma_T \cap \text{int}(B) \neq \emptyset$. Segue que σ_T não é conexo, uma contradição. Temos o resultado.

Caso, $\sigma_T = \emptyset$ temos que todas as órbitas intersectam T . Considere a órbita de um ponto $p \in T$, então a órbita negativa de p não retorna a T e, pela escolha do campo, $O_X^-(p) \subset \text{int}(B)$. Seja $q \in \alpha(p)$ e $\alpha(p) \subset \text{int}(B)$, porque o campo aponta para fora de B em $\partial B = T$.

Além disso a órbita do ponto q deverá intersectar T e, como o campo aponta para dentro de A então $O_X(q) \cap \text{int}(A) \neq \emptyset$. O conjunto $\alpha(p)$ é invariante pelo fluxo, então $\alpha(p) \cap \text{int}(A) \neq \emptyset$, um absurdo, pois $\alpha(p) \subset \text{int}(B)$. Logo, T não separa M , como queríamos.

Portanto, em ambos os casos T não separa M . □

Demonstração do Teorema 3.1.1: Pelo Lema 3.1.2 segue que T é incompressível ou T separa M . E por hipótese, σ_T é conexa, então pelo Lema 3.1.4, tem-se que T não separa M . Assim, T é incompressível. $\square$

Teorema 3.1.5. *Seja M uma 3-variedade fechada e orientável. Suponha que M apresenta um campo de vetores X , C^1 , com um toro transversal T satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Existe uma única órbita O de X que não intersecta T .*
2. *O é hiperbólico e não é homotópico a um ponto em M .*

Então, M é irredutível.

Observe que, pelo fato da órbita O não ser homotópica a um ponto, O deverá ser uma órbita periódica, pois singularidades são homotópicas a um ponto e órbitas regulares, que não são periódicas, são imagens de curvas integrais cujo domínio é contrátil, como não se trata de uma homotopia onde os extremos são fixados (porque não é um caminho fechado), pela Proposição 2.1.13, segue que a órbita é homotópica a um ponto. Logo, a única possibilidade para a órbita O é ser uma órbita periódica.

Para provar esse teorema faremos uso dos seguintes lemas.

Lema 3.1.6. *Seja M uma 3-variedade fechada. Suponha que M apresente um toro mergulhado que não separa M tal que a variedade M_0 , obtida por um corte de M ao longo de T é irredutível. Então, M é irredutível.*

Demonstração. Vamos provar que T é incompressível em M .

T é 2-lados em M , por hipótese temos que $M - T$ é irredutível. Suponha, por contradição, que T é compressível em M então existe uma cirurgia ao longo de um disco D (onde $D \cap T = \partial D$ e ∂D não borda um disco D' em T) que transforma T numa esfera S^2 . S^2 borda uma bola $B \subset M$, já que $M - T$ é irredutível. Procedendo como na prova da Proposição 2.2.23 temos que T borda um toro sólido ou T está contido no interior de B .

Usando o mesmo argumento da prova do Lema 3.1.2 segue que T separa M , uma contradição com a hipótese sobre T .

Portanto, T é incompressível em M . E, pela Proposição 2.2.25 concluímos que M é irredutível. $\square$

Lema 3.1.7. *Seja M uma 3-variedade fechada e seja X um campo de vetores, C^1 , com um toro transversal T . Suponha que existe uma única órbita O de X que não intersecta T . Se O é hiperbólico, então O é tipo sela.*

Demonstração. Vamos mostrar que o conjunto $\sigma_T = O$ não é um sumidouro para o campo X e nem um sumidouro para o campo $-X$. Defina, o seguinte conjunto:

$$l_T = \{x \in T; X_t(x) \cap T = \emptyset, \forall t > 0\}$$

Isto é, l_T é o conjunto dos pontos de T cuja órbita positiva não retorna a T . Suponha, por absurdo, que σ_T é um sumidouro para o campo X .

Como σ_T é um sumidouro para o campo X existe uma vizinhança U invariante positiva, isto é, $X_t(U) \subset U$, $\forall t \geq 0$ e,

$$\sigma_T = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Além disso σ_T é fechado (ver Proposição 3.1.3) e T compacto então $d(T, \sigma_T) > 0$. E, se $0 \leq s \leq l$ temos que $l = s + \epsilon$, $\epsilon \geq 0$ assim:

$$\begin{aligned} X_\epsilon(U) \subset U &\Rightarrow X_s(X_\epsilon(U)) \subset X_s(U) \Rightarrow \\ &\Rightarrow X_l(U) \subset X_s(U). \end{aligned}$$

Logo, $X_l(U) \subset X_s(U)$, para todo $0 \leq s \leq l$.

Assim devemos ter um tempo $n \geq 0$ tal que o aberto $X_n(U) \cap T = \emptyset$. Caso contrário, se $X_t(U) \cap T \neq \emptyset$, $\forall t \geq 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} X_l(U) \subset X_s(U), \quad 0 \leq s \leq l &\Rightarrow \\ \Rightarrow \emptyset \neq X_l(U) \cap T \subset X_s(U) \cap T, \quad 0 \leq s \leq l &\Rightarrow \\ \Rightarrow \bigcap_{t \geq 0} X_t(U) \cap T \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Mas,

$$\sigma_T = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Assim, $\sigma_T \cap T \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Portanto existe $n \geq 0$ tal que $X_n(U) \cap T = \emptyset$. Podemos escrever,

$$\sigma_T = \bigcap_{t \geq n} X_t(U).$$

Seja $V = X_n(U)$, dado $t \geq n \geq 0$ temos que $t = n + s$, onde $s = t - n \geq 0$, então

$$\begin{aligned} X_s(U) \subset U &\Rightarrow X_n(X_s(U)) \subset X_n(U) = V \Rightarrow \\ \Rightarrow X_s(X_n(U)) \subset V &\Rightarrow X_s(V) \subset V, \quad \forall s \geq 0. \end{aligned}$$

E,

$$\sigma_T = \bigcap_{s \geq 0} X_s(V).$$

Portanto podemos escolher U aberto e tal que $U \cap T = \emptyset$.

Sendo σ_T fechado e U aberto então existe $x \in U \setminus \sigma_T$. E, $X_t(x) \notin T, \forall t > 0$, pois $U \cap T = \emptyset, X_t(U) \subset U, \forall t > 0$ e $x \in U$.

Por outro lado, como $x \notin \sigma_T$, segue que existe um primeiro $t_x > 0$ tal que $y = X_{-t_x}(x) \in T$. Note que $X_t(y) = X_{t-t_x}(x)$. Se $t \in (0, t_x]$ temos que $|t - t_x| < t_x$ assim $X_t(y) \notin T$ pela definição de t_x .

Além disso, $X_t(y) = X_{t-t_x}(x) \in U$, para todo $t - t_x > 0$, isto é, $\forall t > t_x$ então $X_t(y) \notin T, \forall t > t_x$.

Isto prova que $X_t(y) \notin T, \forall t > 0$, portanto $y \in l_T$, ou seja, $l_T \neq \emptyset$.

Afirmção 1: l_T é fechado em T .

Temos que $l_T \subset \overline{l_T} \cap T$. Agora, vamos mostrar que $\overline{l_T} \cap T \subset l_T$.

Seja $p \in \overline{l_T} \cap T$ então existe $x_n \in l_T, n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \rightarrow p$. Suponha que $p \notin l_T$, então a órbita positiva de p retorna a T , isto é, existe um tempo $t > 0$ tal que $X_t(p) \in T$.

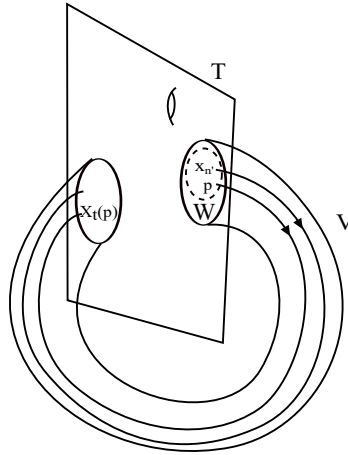


Figura 3.3

Seja V vizinhança tubular suficientemente pequena do segmento de órbita de p até $X_t(p)$, considere W um aberto de T contido em V tal que $p \in W$ tem-se que existe um ponto $x_{n'} \in W \subset V \cap l_T$. Então, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, segue que a órbita positiva de $x_{n'}$ deverá retornar a T , uma contradição com a definição do conjunto l_T . Assim, $\overline{l_T} \cap T \subset l_T$.

Portanto, l_T é fechado em T .

Afirmção 2: $O_X^+(q) \cap U \neq \emptyset, \forall q \in l_T$.

Suponha por contradição que existe $q \in l_T$ tal que $O_X^+(q) \cap U = \emptyset$ então $O_X(q) \cap U = \emptyset$. Temos que $\omega(q) \neq \emptyset$. Seja $x \in \omega(q)$ devemos ter que $O_X(x) \cap U = \emptyset$ se $O_X(q) \cap U = \emptyset$. Considere $x \in \omega(q)$ de modo que $x \notin T$ e existe $N > 0$ com $y = X_N(x) \in T$ (isso é possível pois $O_X(x) \subset \omega(q)$, T é transversal ao campo X e, além disso só existe uma única órbita que não intersecta T).

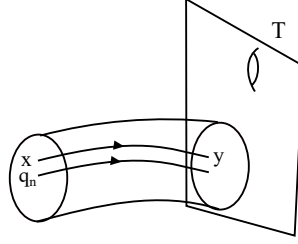


Figura 3.4

Tome uma vizinhança tubular suficientemente pequena V do segmento de órbita de x a $y = X_N(x)$. Como $O_X(x) \in \omega(q)$ existe um $t_n > 0$ suficientemente grande com $q_n = X_{t_n}(q) \in V$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, devemos ter que $q_n \in V$ intersecta T num tempo próximo a N . Assim $O_X^+(q)$ deverá retornar a T , uma contradição pois $q \in l_T$.

Logo, existe um $t > 0$ de modo que $X_t(q) \in U$. E, devido as propriedades de U para todo $\bar{t} > t$ tem-se que $X_{\bar{t}}(q) \in U$.

Afirmção 3: l_T é aberto em T .

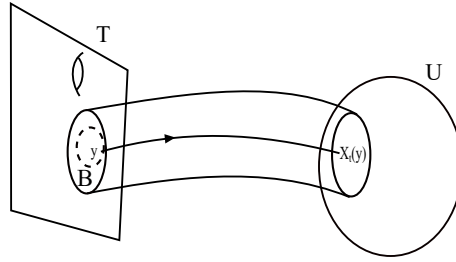


Figura 3.5

Seja $y \in l_T$, então existe $t > 0$ tal que $X_t(y) \in U$, pela afirmação anterior, tome uma vizinhança tubular V do segmento de órbita de y até $X_t(y)$ suficientemente pequena, existe um aberto B de T contendo y em V , pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, devemos ter que para todo $q \in B$ temos que existe um $t_q > 0$ com $X_{t_q}(q) \in U$.

Além disso, $X_t(q) \in U$, $\forall t > t_q$ e $U \cap l_T = \emptyset$, consequentemente $q \in l_T$, assim $B \subset l_T$.

Portanto, l_T é aberto em T . Sendo T conexo e $l_T \subset T$ é um conjunto não vazio, aberto e fechado em T , então $l_T = T$.

Afirmção 4: $\Omega(X) \subset \sigma_T$.

Suponha que existe $x \in \Omega(X)$ e $x \notin \sigma_T$, então a órbita de x intersecta T num ponto y . Como $\Omega(X)$ é invariante temos que $y \in \Omega(X)$. Mas, $l_T = T$ logo $y \in l_T$.

Assim, existe um $t_y > 0$ e uma vizinhança W de y com $W \cap U = \emptyset$ tal que $X_{t_y}(W) \subset U$. Logo, para todo $t > t_y$ tem-se que $X_t(W) \subset U$ e, $X_t(W) \cap W = \emptyset$.

Se para $t < -t_y$ tivermos que $X_t(W) \cap W \neq \emptyset$ então existe $p \in W$ tal que $X_t(p) \in W$, como $0 < t_y < -t$ tem-se que $p = X_{-t}(X_t(p)) \in U$ portanto $W \cap U \neq \emptyset$, uma contradição. Então, $X_t(W) \cap W = \emptyset, \forall |t| > t_y$. Isto contradiz o fato de $y \in \Omega(X)$

Logo, $\Omega(X) \subset \sigma_T$.

Agora, seja $x \in T$ e $q \in \alpha(x)$, como $\alpha(x) \subset \Omega(X)$ (observação 1.2.25), segue que $q \in \Omega(X)$ e, assim $q \in \sigma_T$. Então, $X_{-t_n}(x) \in U$, para algum $t_n > 0$ e,

$$q' = X_{-t_n}(x) \in U \Rightarrow X_{t_n}(q') = x \in T.$$

Um absurdo, pois se $q' \in U$ então $X_{t_n}(q') \in X_{t_n}(U) \subset U$ e $U \cap T = \emptyset$.

Portanto, σ_T não é um sumidouro para o campo X . Aplicando um argumento análogo ao campo reverso $-X$, temos que σ_T não é um sumidouro para o campo $-X$. Assim, σ_T é hiperbólico tipo sela. $\square$

Lema 3.1.8. *Seja M_0 uma 3-variedade compacta orientável cuja fronteira ∂M_0 consiste de dois toros T_1, T_2 . Suponha que existe um campo de vetores Y, C^1 , transversal a ∂M_0 , apresentando uma única órbita O que não intersecta ∂M_0 e satisfazendo:*

1. Y aponta para dentro em T_1 e para fora em T_2 .
2. O é uma órbita periódica hiperbólica tipo sela.
3. O não é homotópico a um ponto em M_0 .

Então, M_0 é irredutível.

Antes de iniciar a demonstração deste lema, apresentaremos uma proposição e algumas observações que serão úteis durante a sua prova.

Proposição 3.1.9. *Seja M uma 3-variedade compacta e orientável $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e X_t o fluxo associado a X com uma superfície S transversal. Se o conjunto das órbitas de X que não intersectam X consiste em uma única órbita O periódica hiperbólica tipo sela, então existem curvas fechadas simples $C^j \subset S \cap W^i(O)$ ($i = u, s, \quad j = 1, 2$), tais que*

$$Dom\Pi = S \setminus (C_1^s \cup C_2^s)$$

$$Im\Pi = S \setminus (C_1^u \cup C_2^u).$$

Onde Π denota a função de Primeiro Retorno de Poincaré.

Demonstração. Vamos construir $C_j^s, (j = 1, 2)$ e aplicando o mesmo argumento ao campo $-X$ construímos C_i^u .

Seja O a órbita hiperbólica tipo sela que não intersecta S . Fixe um ponto $p \in O$, então $W^{ss}(p)$ e $W^s(p)$ são unidimensionais.

Denote por $t_0 > 0$ o período de O , temos que $X_{t_0}(W^\gamma(p)) = W^\gamma(p)$ para $\gamma = uu, ss$. Em particular, $W^s(p)$ é um cilindro (se X_t preserva a orientação), ou uma faixa de Möebius (se X_t inverte a orientação). O mesmo ocorre com $W^u(p)$.

Um intervalo fechado em $W^{ss}(p)$ é chamado domínio fundamental se os pontos do bordo são a e $b = X_{t_0}(a)$ (caso X_t preserva a orientação) ou a e $X_{2t_0}(a) = b$ (caso X_t não preserva a orientação).

Tome um domínio fundamental I de $W^{ss}(p)$ suficientemente próximo da órbita de p . Por hipótese, $\forall q \in I$ temos que a órbita de q intersecta S . Denotaremos por π a primeira interseção de cada ponto de I em S pelo campo X .

Afirmção: $\pi(a) = \pi(b)$

Seja $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $X_{t_1}(b)$ é a primeira interseção em S .

$$b = X_{t_0}(a) \Rightarrow X_{t_1}(b) = X_{t_0+t_1}(a) \in S.$$

Suponha que existe um $N \in \mathbb{R}$ tal que $N < t_1 + t_0$ e $X_N(a) \in S$. $a = X_{-t_0}(b) \Rightarrow X_N(a) = X_{N-t_0}(b) \in S$, $N - t_0 < t_1$, uma contradição pois t_1 é a primeira interseção da órbita de b em S .

Logo, $\pi(a) = \pi(b)$.

Observe que no caso que X_t preserva a orientação (ou seja, $W^s(p)$ é um cilindro), podemos tomar um domínio fundamental diferente de I em $W^{ss}(p)$ tal que este domínio produz uma curva simples fechada distinta de C_1^s (basta considerar a primeira interseção como anteriormente).

Como $C_1^s \cup C_2^s \subset W^s(p)$ temos que para o futuro os pontos de $C_1^s \cup C_2^s$ se acumulam em O logo $Dom\Pi = S \setminus C_1^s \cup C_2^s$. Além disso, os pontos que não retornam a S estão necessariamente contidos em $W^s(p)$. $\square$

Observação 3.1.10. Considere uma variedade M_0 e um campo Y e todas as hipóteses descritas no enunciado do lema anterior, pela Proposição 3.1.9, temos que existem curvas fechadas simples $C_j^s \subset T_1 \cap W^s(O)$ e $C_j^u \subset T_1 \cap W^u(O)$ ($j = 1, 2$) tais que

$$Dom\Pi = T_1 \setminus (C_1^s \cup C_2^s)$$

$$Im\Pi = T_2 \setminus (C_1^u \cup C_2^u).$$

Onde $\Pi : T_1 \rightarrow T_2$ denota a função de Poincaré. Neste caso, estamos considerando que a função de Poincaré entre duas transversais: T_1 e T_2 .

No caso que $W^s(O)$ é homeomorfa a um cilindro temos que duas curvas fechadas simples C_1^s e C_2^u e, no caso que $W^s(O)$ é homeomorfa a uma faixa de Möebius teremos uma única curva fechada simples C_1^s . Analogamente, para $W^u(O)$.

De acordo com as hipóteses devemos ter que as curvas $C_j^s \subset T_1 \cap W^s(O)$ e $C_j^u \subset T_1 \cap W^u(O)$ ($j = 1, 2$) estão no bordo de $W^s(O)$ e $W^u(O)$, respectivamente. No caso em que $W^s(O)$ é um cilindro teremos que o bordo de $W^s(O)$ intersecta o T_1 , produzindo duas curvas fechadas simples C_1^s e C_2^s , caso contrário, se existisse um ponto $x \in T_1 \cap W^s(O)$ tal que este ponto não pertence ao bordo de $W^s(O)$ (ver Figura 3.6), como $W^s(O)$ é invariante pelo fluxo, a órbita para o futuro de x se aproxima de O e a órbita para o passado de x pertence a $W^s(O)$, T_1 é bordo de M_0 assim a órbita de x deveria ser tangente a T_1 , o que contradiz a hipótese do campo ser transversal T_1 .

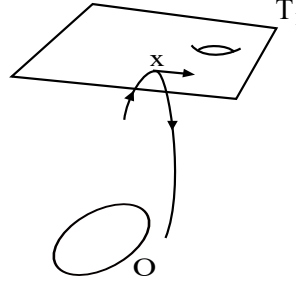


Figura 3.6. Tangência

O mesmo ocorre com $W^u(O)$, e para o caso que $W^i(O)$, ($i = u, s$) são faixas de Möebius temos que a curva C_1^i ($i = u, s$) é o bordo da faixa de Möebius.

Observação 3.1.11. Na observação anterior descrevemos o domínio e a imagem da função $\Pi : \text{Dom}\Pi \subset T_1 \rightarrow T_2$. Temos que:

$$\text{Dom}\Pi = T_1 \setminus (C_1^s \cup C_2^s)$$

$$\text{Im}\Pi = T_2 \setminus (C_1^u \cup C_2^u).$$

Onde $C_j^s \subset T_1 \cap W^s(O)$ e $C_j^u \subset T_1 \cap W^u(O)$ ($j = 1, 2$).

Além disso, Π é um homeomorfismo, então $\text{Dom}\Pi$ e $\text{Im}\Pi$ são homeomorfos. Assim, no caso que $W^s(O)$ é um cilindro obtemos duas curvas fechadas simples C_1^s e C_2^s que não pertencem ao domínio da Π e, não são homotópicas a um ponto em T_1 (pois, O não é homotópica a um ponto em M_0), nessas condições temos que $\text{Dom}\Pi$ é homeomorfo a dois cilindros (ou anéis). Como $\text{Dom}\Pi$ e $\text{Im}\Pi$ são homeomorfos temos que $\text{Im}\Pi$ é homeomorfa a dois cilindros em T_2 . Logo, $W^u(O)$ deverá produzir duas curvas C_1^u e C_2^u em T_2 que não pertencem a imagem da Π , então $W^u(O)$ é homeomorfa a um cilindro.

Para o caso que $W^s(O)$ é homeomorfa a uma faixa de Möebius produzimos uma curva fechada simples C_1^s em T_1 que não pertence ao domínio da Π e não homotópica a um ponto em T_1 , devido ao fato de O não ser homotópica a um ponto em M_0 , assim $\text{Dom}\Pi$ é homeomorfo a um cilindro, logo $\text{Im}\Pi$ será homeomorfa a um cilindro. Portanto, $W^u(O)$ deverá produzir uma curva C_1^u em T_2 tal que $\text{Im}\Pi = T_2 \setminus C_1^u$, então $W^u(O)$ deverá ser homeomorfa a uma faixa de Möebius.

Concluimos que, nas hipóteses do Lema 3.1.8, $W^s(O)$ e $W^u(O)$ são ambas homeomorfas a cilindros ou faixas de Möebius.

Demonstração do Lema 3.1.8. Seja $\Pi : \text{Dom}\Pi \subset T_1 \rightarrow T_2$ a primeira função retorno de Poincaré. Vamos analisar o caso que $W^i(O)$, $i = u, s$, são cilindros e, por simplicidade, denotaremos $W^s(O)$ por A^s e $W^u(O)$ por A^u . Sejam C_j^s , $j = 1, 2$ os bordos de A^s e C_j^u , $j = 1, 2$ os bordos de A^u , então

$$\text{Dom}\Pi = T_1 \setminus (C_1^s \cup C_2^s)$$

$$\text{Im}\Pi = T_2 \setminus (C_1^u \cup C_2^u).$$

C_j^s , $j = 1, 2$ não são homotópicas a um ponto em T_1 , pois C_j^s e O são livremente homotópicos (ver exemplo 2.1.35) e, O não é homotópica a um ponto em M_0 , assim C_j^s não é homotópico a um ponto em M_0 , em particular C_j^s não é homotópico a um ponto em $T_1 \subset M_0$. Analogamente, C_j^u , $j = 1, 2$ não é homotópico a um ponto em T_2 .

Podemos fixar duas vizinhanças anelares pequenas e disjuntas R_1^s, R_2^s em T_1 de C_1^s e C_2^s , respectivamente, satisfazendo $T_1 \setminus (R_1^s \cup R_2^s) \subset \text{Dom}\Pi$ e

$$\Pi(T_1 \setminus (R_1^s \cup R_2^s)) = T_2 \setminus (R_1^u \cup R_2^u).$$

Como as curvas $\{C_1^s, C_2^s\}$ e $\{C_1^u, C_2^u\}$ não são homotópicas a um ponto em T_1 e T_2 , respectivamente. Então, encolhendo $\{R_1^s, R_2^s\}$ e $\{R_1^u, R_2^u\}$, os anéis $\{R_1^s, R_2^s\}$ e $\{R_1^u, R_2^u\}$ podem ser escolhidos como não contrateis (isto é, não tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto) em T_1 e T_2 , respectivamente. Segue que $\{R_1^s, R_2^s\}$ e $\{R_1^u, R_2^u\}$ são paralelos em T_1 e T_2 , respectivamente.

Devido à hiperbolicidade da órbita O e a continuidade do campo temos que a união da saturação de $R_1^s \cup R_2^s$ (pelo fluxo de Y) e o anel A^u é um homeomorfo a toro sólido ST que contém O (por exemplo, na Figura 3.7). Este toro sólido tem oito anéis na fronteira, correspondendo a quatro anéis $\{R_1^s, R_2^s, R_1^u, R_2^u\}$ na fronteira de M_0 e outros quatro no interior $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ (ver Figura 3.7).

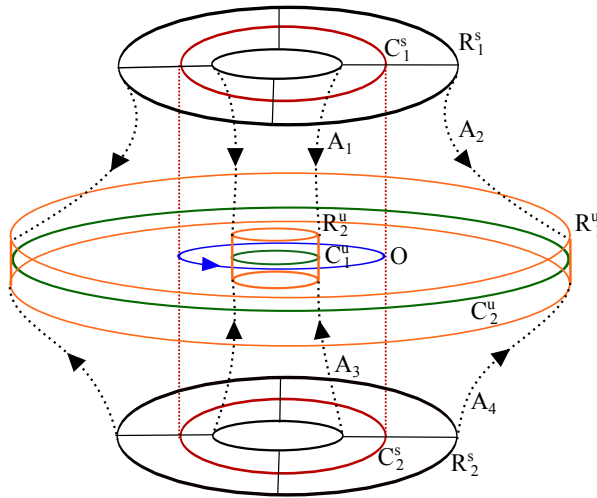


Figura 3.7. Saturação pelo Fluxo

De acordo com a hipótese, os anéis do interior são incompressíveis em M_0 , pois seus bordos não são homotópicos a um ponto em M_0 (os bordos desses anéis são formados pelos bordos de R_1^s , R_2^s , R_1^u , R_2^u , que não são homotópicos a um ponto em M_0), então esses anéis são incompressíveis em M_0 .

O restante de T_1 são dois anéis cuja saturação de cada um é homeomorfa a um toro sólido. Assim, a variedade M_0 foi dividida em três toros sólidos colados pelo bordo, cuja interseção são anéis incompressíveis em M_0 . Cada toro sólido é irreduzível, assim $M_0 - S$, onde S denota a união desses anéis disjuntos e incompressíveis, é irreduzível, então pela Proposição 2.2.25 tem-se que M_0 é irreduzível.

O segundo caso, em que $W^s(O)$ e $W^u(O)$ são faixas de Möebius, é muito similar ao primeiro. Neste caso temos que

$$Dom\Pi = T_1 \setminus C_1^s$$

$$Im\Pi = T_2 \setminus C_1^u.$$

Sejam R^s uma vizinhança anelar de C_1^s em T_1 e R^u uma vizinhança anelar de C_1^u em T_2 de tal forma que:

$$\Pi(T_1 \setminus R^s) = T_2 \setminus R^u.$$

Além disso C_1^s e C_1^u não são homotópicas a um ponto em M e, consequentemente em T_1 e T_2 , respectivamente, pois O é não homotópica a um ponto em M_0 . Denote por C_1 e C_2 os bordos do anel R^s e por C_3 e C_4 os bordos do anel R^u , como C_1^s e C_1^u não são homotópicas a um ponto em T_1 e T_2 , respectivamente, segue que C_j , $j = 1, 4$ não são homotópicas a um ponto no bordo (e, também em M_0).

A saturação pelo fluxo do anel R^s união com $W^u(O)$ é homeomorfo a um toro sólido, ST_0 , com quatro anéis no bordo $\{R^s, R^u, A_1, A_2\}$, onde A_1 é o anel cujos bordos são um bordo do anel R^s e um bordo do anel R^u e A_2 é um anel cujo bordo é o outro bordo do anel R^s e o outro bordo do anel R^u , por exemplo, os bordos do anel A_1 são C_1 e C_3 e os bordos do anel A_2 são C_2 e C_4 .

E, também $T_1 \setminus R^s$ é um anel em T_1 cujos bordos são C_1 e C_2 , assim como $T_2 \setminus R^u$ é um anel em T_2 cujos bordos são C_3 e C_4 . A saturação pelo fluxo de $T_1 \setminus R^s$ será homeomorfo um toro sólido, ST_1 , colado pelo bordo com o toro sólido ST_0 , onde $\partial(ST_0) \cap \partial(ST_1) = A_1 \cup A_2$. Os anéis A_1 e A_2 são incompressíveis em M_0 , uma vez que seus bordos (C_1 , C_2 , C_3 e C_4) não são homotópicos a um ponto em M_0 .

Assim, a variedade M_0 foi dividida em dois toros sólidos colados pelo bordo, cuja interseção são anéis incompressíveis em M_0 . Usando o mesmo argumento do primeiro caso podemos concluir que M_0 é irreduzível. $\square$

Demonstração do teorema 3.1.5. Sejam M , X , T e O como no enunciado. Assim existe uma única órbita O de X que não intersecta T então $\sigma_T = O$ e,

portanto σ_T é conexa.

Segue que do Lema 3.1.4 que T não separa M , então para provar o Teorema 3.1.5 é suficiente pelo Lema 3.1.6 provar que a variedade M_0 obtida pelo corte de M ao longo de T é irredutível.

Para provar que M_0 é irredutível, observamos que M_0 é uma 3-variedade compacta, conexa cuja fronteira consiste de dois toros, T_1, T_2 . Seja Y o campo de vetores induzido por X em M_0 , podemos enxergar Y como sendo a restrição de X a M_0 . Temos que O é a única órbita de Y que não intersecta ∂M_0 .

Afirmção: O campo Y em M_0 satisfaz as propriedades 1, 2 e 3 do Lema 3.1.8.

Seja $M_0 \sim M - V_T$ onde $V_T = \{x \in X_t(T); t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Denote $T_1 = X_\epsilon(T)$ e $T_2 = X_{-\epsilon}(T)$, temos que o campo X é transversal a T_1 e a T_2 .

Se $q_1 \in T_1$ então $q_1 = X_\epsilon(q)$, $q \in T$, assim para $0 < \delta < 2\epsilon$ temos que $X_{-\delta}(q_1) \notin M_0$.

Então, o campo aponta para dentro de T_1 em q_1 .

Analogamente, se $p_2 \in T_2$ então $p_2 = X_{-\epsilon}(p)$, $p \in T$ e, para $0 < \lambda < 2\epsilon$ segue que $X_\lambda(p_2) \notin M_0$.

Logo, o campo aponta para fora de T_2 em p_2 . Portanto Y aponta para dentro em T_1 e para fora em T_2 , satisfazendo 1.

Temos que O não é homotópica a um ponto em M_0 , pois O é não homotópica a um ponto em M . Além disso, O é hiperbólico (por hipótese), tipo sela (pelo Lema 3.1.7) e periódica assim não é homotópica a um ponto em M_0 , satisfazendo 2 e 3.

Então, pelo Lema 3.1.8 M_0 é irredutível. E, por 3.1.7 segue que M é irredutível. $\square$

3.2 Prova do Teorema Principal

Teorema 3.2.1. *Seja T um toro mergulhado em uma 3-variedade fechada e orientável M . Suponha que*

1. *T é transversal a um campo de vetores X, C^1 , em M .*
2. *Existe uma única órbita O de X que não intersecta T .*
3. *O é hiperbólico e não é homotópico a um ponto em M .*

Então, T é incompressível e M é irredutível.

Demonstração. Sejam T, X, M, O como no enunciado. Por um lado, T, M, X, O satisfazem a hipótese do Teorema 3.1.5 então M é irredutível.

Por outro lado, existe uma única órbita O que não intersecta T temos que $\sigma_T = O$ e, assim, σ_T é conexa. Como M é irredutível, segue do Teorema 3.1.1 que T é incompressível. $\square$

Considerações Finais

O artigo da referência [3], tem como objetivo principal dar uma resposta a seguinte pergunta: Seja M é uma 3-variedade compacta e orientável com um fluxo X_t Anosov transitivo transversal a um toro T . Então M é topologicamente equivalente a uma suspensão de um difeomorfismo de Anosov?

Para responder essa questão, os autores construíram um exemplo numa 3-variedade M com um fluxo Anosov transitivo apresentando um toro transversal que não é topologicamente equivalente a uma suspensão de um difeomorfismo de Anosov. Constroem uma 3-variedade M_0 compacta orientável cujo bordo consiste de dois toros e com um campo de vetores Y transversal ao bordo de M_0 e a variedade M , obtida pela identificação dos toros do bordo de M_0 , satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.1.

Uma última observação sobre um campo X como no enunciado Teorema 3.2.1 é que este campo não possui singularidades.

Caso $p \in M$ é uma singularidade temos que $p \in T$ ou $p \in M - T$. Se $p \in T$ então $0 = X(p) \in T_p T$, o que contradiz o fato de T ser transversal ao campo X . Agora, se $p \in M - T$ então $\{p\} = O_X(p) \cap T = \emptyset$ logo $p \in \sigma_T$, um absurdo pois σ_T é uma única órbita O (O é uma órbita periódica) e $O \neq O_X(p)$. Portanto, X é um campo sem singularidades.

Referências Bibliográficas

- [1] Apaza, E. *Sobre Atratores e Consequências Topológicas*. Tese de Doutorado (2006), UFRJ.
- [2] Bautista, S.; Morales C. *Lectures on sectional Anosov*. Disponível em: http://www.preprint.impa.br/Shadows/SERIE_D/2011/86.html. Último acesso em: 5 de dezembro de 2016.
- [3] Bonatti, C.; Lanvegin R. *Un exemple de flot d'Anosov transitif transverse à un tore et non conjugué à une suspension* (French), Ergodic Theory & Dynam. Sys. **14** (1994), 633-643.
- [4] Brunella, M. *Separating the basic sets of a nontransitive Anosov flow*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 487-490.
- [5] Fenley, S. *Surfaces transverse to pseudo-Anosov flows and virtual fibers in 3-manifolds*, Topology **38** (1999), 823-859.
- [6] Hatcher, A. *Basic Topology of 3-Manifolds*. Preprint available at <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [7] Hempel, J. *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies, 86. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976.
- [8] Hirsch, M. W.; Pugh, C. C.; Shub, M. *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 583. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [9] Hirsch, M. W. *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, v. 33, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [10] Melo, W. *Topologia das Variedades*. Disponível em: w3.impa.br/~demelo/topologiadiferencial2011. Último acesso em: 20 de novembro de 2016.
- [11] Moise, E. E. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag. New York, 1977.
- [12] Morales, C. A. *Axiom A flows with a transverse torus*, Trans. Amer. Math. Soc **355** (2003), 735-745.
- [13] Morales, C. A. *Incompressibility of Torus transverse to vector fields*. Topology Proceedings, Vol. 28, No. 1, 2004, 219-228.

- [14] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1993.
- [15] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [16] Palis, J.; Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 1978.
- [17] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2011.
- [18] Robinson, C. *Dynamical System. Stability, Symbolic Dynamics, and chaos*. Second edition. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [19] Rolfsen, D. *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, No. 7. Berkeley, Calif.: Publish or Perish, Inc., 1976.
- [20] Vilches, M. A. *Introdução à Topologia Algébrica*, Departamento de Análise - IME, UERJ. Rio de Janeiro.
- [21] Katok, A.; Hasselblatt B. *A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos*. Cambridge University Press(1999).