

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DEIVID TOLEDO DA CRUZ

A UTILIZAÇÃO DOS BILHARES PLANARES COMO RECURSO PARA
A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2025

DEIVID TOLEDO DA CRUZ

**A UTILIZAÇÃO DOS BILHARES PLANARES COMO RECURSO PARA
A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2025

DEIVID TOLEDO DA CRUZ

**A UTILIZAÇÃO DOS BILHARES PLANARES COMO RECURSO PARA
A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa

Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa
(Orientador – Universidade Federal de Viçosa)

Deivid Toledo da Cruz
(Estudante – Autor do Trabalho)

DEIVID TOLEDO DA CRUZ

**A UTILIZAÇÃO DOS BILHARES PLANARES COMO RECURSO PARA
A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa

BANCA AVALIADORA:

Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa
(Orientador – Universidade Federal de Viçosa)

Prof. Dr. Edson José Teixeira
(Professor – Universidade Federal de Viçosa)

Prof. Dr. Marco Antônio do Couto Fernandes
(Professor – Universidade Federal de Viçosa)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, à minha namorada, aos meus amigos e colegas de curso, e à Equipe da Sala de Estudo, da qual tenho orgulho de fazer parte.

Com gratidão e carinho, por todo apoio e incentivo nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e a São José, por guiarem meus passos e me concederem força, paciência e sabedoria ao longo desta jornada.

Agradeço à Universidade Federal de Viçosa e ao curso de Licenciatura em Matemática pela oportunidade de formação e crescimento pessoal e profissional.

Meu sincero reconhecimento ao Prof. Dr. André Junqueira da Silva Corrêa, pela orientação atenciosa, incentivo constante e confiança depositada ao longo da construção deste trabalho.

Aos meus familiares, à minha namorada e aos amigos, por todo carinho, apoio e compreensão durante os momentos de desafio e dedicação.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho se tornasse possível.

EPÍGRAFE

"O mundo é um livro, e quem fica sentado em casa lê somente uma página."

Santo Agostinho

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo investigar as implicações do uso dos bilhares planares como recurso didático para a aplicação e compreensão de conceitos geométricos no ensino médio. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi desenvolvida com uma turma do segundo ano do ensino médio e consistiu na aplicação de três aulas utilizando o software GeoGebra como ferramenta principal para a construção e análise das trajetórias dos bilhares em diferentes formatos geométricos. Durante as atividades, buscou-se promover uma aprendizagem significativa por meio da modelagem matemática e do uso de tecnologias digitais. As observações evidenciaram que, embora os alunos apresentassem inicialmente dificuldades com conceitos como reflexão, tangência e construção de ângulos, o uso do GeoGebra favoreceu a compreensão visual e a autonomia na realização das tarefas. O engajamento aumentou à medida que os estudantes identificaram padrões geométricos, como triângulos e quadrados, nas trajetórias construídas, o que reforçou a relação entre a prática experimental e o raciocínio espacial. Apesar das limitações decorrentes da curta duração do projeto e da ausência de respostas no formulário de devolutiva, os resultados apontam que o uso dos bilhares planares potencializa o interesse e a aprendizagem dos alunos, tornando o ensino de geometria mais interativo, contextualizado e significativo.

Palavras-chave: Geometria. Bilhares planares. Ensino de Matemática. GeoGebra. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This work aimed to investigate the implications of using planar billiards as a didactic resource for the application and understanding of geometric concepts in high school. The qualitative research was carried out with a second-year class and consisted of three lessons using GeoGebra software as the main tool for constructing and analyzing billiard trajectories in different geometric shapes. During the activities, meaningful learning was encouraged through mathematical modeling and the use of digital technologies. Observations showed that, although students initially had difficulties with concepts such as reflection, tangency, and angle construction, the use of GeoGebra facilitated visual comprehension and autonomy in performing tasks. Engagement increased as students identified geometric patterns, such as triangles and squares, within the trajectories, strengthening the relationship between experimental practice and spatial reasoning. Despite limitations due to the short duration of the project and the absence of feedback responses, the results indicate that the use of planar billiards enhances students' interest and learning, making the teaching of geometry more interactive, contextualized, and meaningful.

Keywords: Geometry. Planar billiards. Mathematics teaching. GeoGebra. Mathematical modeling.

Sumário

Lista de Figuras	8
1 Introdução	9
2 Justificativa	11
3 Objetivos	14
3.1 Objetivo Geral	14
3.2 Objetivos Específicos	14
4 Referencial Teórico	15
4.1 Ensino de Geometria	15
4.2 Modelagem Matemática	16
4.3 Bilhares Planares	18
4.3.1 Círculo	20
4.3.2 Quadrado	22
4.3.3 Triângulo	23
4.4 Potencial dos Bilhares Planares como recurso didático para o Ensino de Geometria	24
5 Metodologia	26
5.1 Etapa 1 – Avaliação Diagnóstica	26
5.1.1 Perfil dos Alunos	27
5.1.2 Motivações e Preferências dos Alunos	28
5.2 Etapa 2 - Intervenção no Laboratório de Informática	29
5.3 Instrumentos de Coleta de Dados	31
5.4 Limitações e Imprevistos	31
6 Resultados e Discussão	32
7 Considerações Finais	37
8 Referências	39
9 Apêndice A: Avaliação Diagnóstica	42
10 Apêndice B: Material Didático	43
11 Apêndice C: Perguntas da Entrevista Semiestruturada	51

LISTA DE FIGURAS

Lista de Figuras

1	Ilustração dos ângulos de incidência e reflexão. Fonte: Souza (2021)	20
2	Trajetórias no bilhar no círculo. Fonte: Souza (2021)	21
3	Exemplos de órbitas periódicas no círculo. Fonte: Autor.	22
4	Exemplos de órbitas periódicas no quadrado. Fonte: Chen; Osinga (2004).	23
5	Família de órbitas periódicas no triângulo retângulo isósceles. Fonte: Autor.	23
6	Construção geométrica para a visualização do Teorema 3. Fonte: Autor. . .	24
7	Construção geométrica para a visualização do Teorema 4. Fonte: Autor. . .	24
8	Bilhar feito pelo aluno 4 no primeiro dia.	33
9	Bilhar feito pelo aluno 6 no primeiro dia.	33
10	Bilhar feito pelo aluno 9 no primeiro dia.	33
11	Bilhar feito pelo aluno 16 no primeiro dia.	33
12	Bilhar feito pelo aluno 1 no segundo dia.	34
13	Bilhar feito pelo aluno 2 no segundo dia.	34
14	Bilhar feito pelo aluno 4 no segundo dia.	34
15	Bilhar feito pelo aluno 6 no segundo dia.	34
16	Bilhar feito pelo aluno 9 no terceiro dia.	35
17	Bilhar feito pelo aluno 15 no terceiro dia.	35
18	Bilhar feito pelo aluno 21 no terceiro dia.	35
19	Bilhar feito pelo aluno 27 no terceiro dia.	35

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da minha jornada acadêmica, tive a oportunidade de vivenciar uma ampla gama de experiências orientadas por excelentes professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa. Estudar em uma das melhores universidades federais do Brasil é motivo de grande alegria e orgulho, considerando que vim de uma família humilde e lavradora.

Uma das experiências mais satisfatórias que tive durante a graduação foi a Iniciação Científica com o professor e orientador deste trabalho, Dr. André Junqueira da Silva Corrêa, com o tema de Introdução aos Bilhares. Após um longo período de reflexão sobre todo o conteúdo estudado e conversa com professores e colegas estudantes, optei pelos Bilhares Planares como objeto de estudo da monografia. Um bilhar planar é uma ideia que vem da matemática pura e pode ser explicada de maneira bem simples. Toma-se uma sala com formato geométrico onde uma bola se move de forma idealizada, ou seja, sem atrito e sem perder velocidade. Quando a bola atinge uma das paredes, ela reflete como faria a luz em um espelho, com ângulo de reflexão igual ao ângulo de incidência. Tal modelo é interessante para observar se essa bola segue um padrão, baterá em algum canto da sala ou acabará fazendo uma trajetória complexa e difícil de ser explicada. Em termos matemáticos, dado $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ um domínio com fronteira suave ou suave por partes, o movimento livre de uma partícula no interior de \mathcal{D} com reflexões elásticas na fronteira $\partial\mathcal{D}$ é chamado de Bilhar Planar.

Mesmo quem não gosta de matemática pode se surpreender ao ver como algo aparentemente aleatório, como o movimento de uma bola, pode ser detalhado e previsto com lógica. Assim, os bilhares planos transformam o abstrato em algo tangível e intrigante. Não é apenas um estudo matemático, mas uma porta de entrada para a criatividade, a lógica e a beleza que a matemática pode oferecer a todos nós.

Este tema não está na matriz curricular da disciplina de matemática da educação básica por ser um tema particular e complexo da área de Sistemas Dinâmicos. Contudo, parte de sua teoria são conceitos e resultados ensinados nas disciplinas de matemática e física do ensino médio. Acreditamos que a apresentação de áreas avançadas da matemática como aplicação do conteúdo ensinado em uma atividade de modelagem matemática pode acarretar uma melhora significativa na aprendizagem dos alunos. A BNCC (Brasil, 2018, p. 529) diz: “novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos”. Utilizando modelagem matemática, o aluno consegue assimilar melhor os conceitos quando possui a oportunidade de ver como o que ele está aprendendo pode ser aplicado e o estimula a associar o abstrato com o concreto. Isso acaba despertando nele o interesse, colaborando com uma aprendizagem significativa. Sobretudo ao

ver o quão longe ele pode estudar e descobrir com o que recebe dos professores.

O ensino de geometria também pode ser beneficiado com isso. A geometria, uma das áreas mais antigas e fundamentais da matemática, desempenha um papel central na formação do pensamento lógico e visual dos estudantes. No ensino médio, ela se apresenta como um campo rico em possibilidades de exploração, desde definições básicas, como formas e ângulos, até observações com sólidos geométricos. Contudo, um dos principais problemas reside na fragmentação do currículo, que muitas vezes trata a geometria como um tema secundário em relação a outras áreas. Segundo Lorenzato (1995, p. 6), “A geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras”. Ainda segundo Lorenzato (1995, p. 4), “A geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo”. Apesar de sua importância, o ensino de geometria usualmente é deixado de lado e a interligação que deveria haver entre os três temas da Matemática, não ocorre. Crescenti (2005, p. 28) afirma que, com isso, os alunos não conseguem estabelecer relações que os campos da matemática têm com a realidade física, econômica, social e cultural. Essa abordagem não apenas limita o tempo destinado ao ensino de conceitos geométricos, mas também prejudica a conexão entre os diferentes ramos da matemática, dificultando uma visão integrada do conhecimento.

Considerando essas observações, destacamos a importância em abordar o ensino da Geometria com o auxílio de temas da matemática pura e da modelagem matemática, com o propósito de mostrar como essa área de conhecimento possui aplicações interessantes e relacionadas com as outras áreas da matemática. Portanto, neste estudo, investigaremos o uso dos bilhares planares como um recurso didático para explorar questões mencionadas anteriormente.

Este texto será estruturado apresentando, sequencialmente, a justificativa pela escolha do tema, os objetivos que pretendo alcançar através do estudo, o referencial teórico buscado, a metodologia que será utilizada, por fim, antecedendo a bibliografia, exponho os resultados, a discussão sobre eles e as considerações finais.

2 JUSTIFICATIVA

Do período de setembro de 2023 a agosto de 2024, tive a oportunidade de ser orientado pelo Professor Dr. André Junqueira da Silva Corrêa (DMA/UFV) em uma Iniciação Científica pelo edital PIBIC/CNPq 2023-2024 com o tema Introdução aos Bilhares. Neste trabalho realizamos um estudo introdutório da Teoria de Bilhares, com foco nos conhecimentos matemáticos nela contidos. Nesta teoria, consideramos um domínio do espaço bidimensional qualquer, cujo fecho é chamado mesa de bilhar. O bilhar é o movimento livre de uma partícula no interior do domínio, com reflexões elásticas na fronteira.

O estudo de bilhares se dá no âmbito de sistemas dinâmicos, por essa razão precisei aprender alguns conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos caóticos, definições elementares, hiperbolicidade, dinâmicas simbólicas, conjugação topológica e caos. Após termos feito esta identificação, desejamos estudar o comportamento da posição e velocidade da partícula com relação ao tempo, os tipos de colisão com a fronteira e sua trajetória.

Após isto, dirigimos os estudos a alguns bilhares interessantes, caracterizados pela região em que são definidos. As regiões estudadas foram o círculo, a elipse, o quadrado e o triângulo. Estudamos as suas propriedades particulares, as condições que fazem suas órbitas serem periódicas ou densas e apresentamos uma ilustração de cada uma delas. Por fim, apresentamos alguns exemplos de órbitas periódicas em bilhares triangulares. Para ilustrar os bilhares, utilizamos o software GeoGebra.

Usar o GeoGebra para ilustrar os bilhares foi satisfatório e importante para que visualizasse os resultados que estudava na prática. Além disso, o software é relativamente simples de usar, o que facilitou o trabalho. Nisto, pensei que trabalhar a construção dos bilhares planares poderia ter potencial para ser uma atividade no ensino de geometria no ensino médio, fase da educação básica onde os conteúdos utilizados nas construções são estudados.

Para fortalecer esse pensamento, pouco antes do término das atividades da Iniciação Científica, o professor André teve a ideia de montar alguns modelos de bilhares em figuras geométricas simples, círculo, quadrado e triângulo equilátero, para apresentar na Mostra Universitária de 2024. Nesse evento, a comunidade acadêmica prepara exposições de cursos, atividades e projetos que existem na UFV a fim de serem apresentados a alunos do Ensino Médio como forma de incentivá-los a ingressar na universidade e auxiliá-los na escolha profissional. As animações foram montadas de tal forma que os estudantes pudessem interagir com elas e perceber o movimento da partícula na mesa de bilhar e as equações algébricas envolvidas se modificando conforme ela ia se deslocando. Infelizmente, não foi possível apresentar as animações durante a Mostra. Contudo, durante o período de estágio no Colégio Ágora, foi possível mostrar a aplicação do GeoGebra no conteúdo estudado para as turmas de 7º e 9º anos do ensino fundamental e 1º ano do ensino

médio e foi possível perceber como isso aflora a curiosidade e instiga o interesse durante o aprendizado da matéria.

Vendo os feedbacks obtidos por meio dos alunos durante e após a realização das aulas e regências, percebe-se o quão enriquecedor pode ser a exploração dessas construções em softwares matemáticos. Foi possível notar que o trabalho com essa ferramenta tem a potencialidade em desconstruir as impressões ruins recorrentes que os estudantes têm de que a Matemática não tem aplicações práticas ou não pode ser vista no mundo, além de atrair a atenção dos alunos envolvidos que se empenham em ver como as áreas da matemática se relacionam em algo belo e compreensível. Neste sentido, o objetivo é utilizar os conhecimentos quanto aos bilhares planares, desenvolvendo, com o auxílio do GeoGebra, outras atividades que possam explorar os conteúdos estudados no ensino médio a fim de atingir melhores resultados.

Outro ponto relevante que contribuiu para guiar o processo investigativo está relacionado à pequena quantidade de pesquisas realizadas com os bilhares como atividade na Educação Básica. Em uma busca por esse termo no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES não foi encontrado nenhum trabalho sobre isso. Porém em outras plataformas, foram encontrados dois trabalhos que chamaram a atenção e que serviram de inspiração para desenvolver a metodologia que será explicada mais adiante. Na plataforma Google Acadêmico, encontra-se uma dissertação de projeto final de mestrado envolvendo a aplicação dos bilhares elípticos como proposta de ensino sob o título “Explorando o Bilhar Elíptico com ferramentas computacionais: Uma proposta de ensino”, defendida por Wagner José dos Santos e aprovada em 09 de agosto de 2013, em Recife, Estado de Pernambuco. Além de uma dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, no Locus UFV, sobre a construção de bilhares no GeoGebra, intitulada “Bilhares no GeoGebra”, defendida por Marcelo Machado de Souza e aprovada em 21 de outubro de 2021.

Santos (2013) apresentou uma maneira de se utilizar os softwares matemáticos GeoGebra e MatLab como auxiliares no aprendizado das seções cônicas e suas propriedades. A pesquisa se deu de forma mais aprofundada na Elipse. Santos (2013) ainda deu uma descrição detalhada da construção das seções cônicas e a construção do Bilhar Elíptico, além de toda a programação necessária para a simulação do bilhar no MatLab. Neste projeto, não será utilizado o Matlab, mas o trabalho deste autor é interessante e motivou o processo de elaboração da atividade foi aplicada.

Souza (2021), utilizou exclusivamente o software GeoGebra para montar algumas simulações para observar o comportamentos de alguns bilhares. Souza (2021) ainda deixou todas as construções realizadas no trabalho para serem reproduzidas por qualquer leitor dedicado e interessado em conhecer um pouco da teoria. Este trabalho ajudou a planejar as construções a serem abordadas neste projeto, bem como as propostas para os alunos resolverem.

Uma pesquisa mais aprofundada em plataformas mais abrangentes certamente poderia

render mais resultados. Contudo, a dificuldade de encontrar referências específicas sobre o assunto, mostra que esta área possui potencial para ser explorada e essa é uma das motivações que fizeram escolher o tema para o projeto.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

Investigar as implicações do uso dos Bilhares Planares, como recurso didático, para a aplicação e compreensão de conceitos geométricos.

3.2 Objetivos Específicos

- Estudar os bilhares planares, destacando seu potencial como recurso didático.
- Elaborar uma atividade de modelagem matemática, articulando a exploração dos bilhares planares com conceitos relativos à Geometria Plana.
- Entender os resultados provenientes de trazer um tema mais avançado da matemática para o contexto da sala de aula do ensino médio.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Ensino de Geometria

O ensino de geometria tem se tornado mais desafiador, sobretudo nos últimos anos. Muitos alunos têm dificuldade em ver a aplicabilidade da geometria no cotidiano ou em profissões práticas, o que diminui seu interesse pela matéria. Segundo a BNCC (Brasil, 2018, p. 271) “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”. Em particular, o ensino médio carrega todo o conhecimento acumulado desde o ensino fundamental - anos iniciais, sendo esperado que o pensamento geométrico desses alunos já esteja bem desenvolvido e que eles sejam capazes de investigar propriedades e elaborar argumentos lógicos convincentes.

A geometria, especialmente nos anos iniciais, costumava ser ensinada de forma visual e prática. No entanto, muitos currículos passam a priorizar conceitos algébricos e análises abstratas, tornando o aprendizado menos intuitivo para os alunos. Lorenzato (1995, p. 3) diz que na maioria dos livros didáticos a Geometria nada mais é do que um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas sem aplicações práticas. Já é comum os alunos terem dificuldade em ver a aplicabilidade da geometria no cotidiano ou em profissões práticas. Como os livros muitas vezes abordam a Geometria de forma superficial, não dando importância para trazer a contextualização do cotidiano, o interesse pela matéria apenas diminui. Conectar os conteúdos a situações do dia a dia pode ser uma forma eficaz de motivá-los.

Ensinar geometria exige domínio do conteúdo, criatividade para tornar as aulas interativas e capacidade de abordar diferentes níveis de abstração. Muitos professores enfrentam dificuldades devido à falta de formação específica ou à limitação de recursos disponíveis. Com relação a isso, Lorenzato (1995, p. 3) destaca que:

Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (LORENZATO, 1995, p. 3)

Dessa forma, o ensino de geometria tem se tornado mais desafiador por conta da falta de domínio dos conhecimentos geométricos por parte do professor e pela dependência do livro didático. Lorenzato (1995, p. 4) ainda afirma que a situação do ensino de Geometria possui outras causas, sendo uma delas

[...] o currículo (entendido diminutivamente como conjunto de disciplinas): nos nossos cursos de formação de professores, que possibilitam ao seu término o ensino de Matemática ou Didática da Matemática

(Licenciatura em Ciências, em Matemática, em Pedagogia e Formação para o Magistério), a Geometria possui uma fragilíssima posição, quando consta. Ora, como ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece, está aí mais uma razão para o esquecimento geométrico. (LORENZATO, 1995, p. 4)

E a outra são os programas e guias curriculares

Com raríssimas exceções, eles colocam a Geometria como complemento ou apêndice de modo fortemente fragmentado, por assunto ou por série; geralmente a Geometria é apresentada rigidamente separada da Aritmética e da Álgebra. Isto não parece ser grave, pois a maioria dos professores segue, na verdade, o livro didático e não a proposta curricular; no entanto os editores exigem que os autores de livros sigam as propostas curriculares. Dessa forma, os guias curriculares afetam indiretamente o ensino de Geometria em sala de aula. (LORENZATO, 1995, p. 4)

Além das reflexões clássicas de Lorenzato, pesquisas recentes mostram que essas dificuldades permanecem e assumem contornos estruturais no cenário contemporâneo. Frantz e Bisognin (2022) destacam que o ensino de Geometria continua marcado pela fragmentação curricular, pela pouca integração com outras áreas da Matemática e pela dependência quase exclusiva do livro didático, fatores que limitam o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. As autoras reforçam que, mesmo com avanços normativos como a BNCC, a formação inicial de professores ainda dedica pouco espaço à Geometria, o que repercute diretamente na qualidade do ensino e na capacidade docente de propor atividades investigativas, manipulativas ou contextualizadas. Assim, o diagnóstico atual confirma que os desafios apontados por Lorenzato na década de 1990 seguem presentes, exigindo metodologias mais ativas e práticas pedagógicas que devolvam à Geometria um papel central no processo de aprendizagem.

Em vista do mencionado, é necessário alterar as dinâmicas de ensino em sala de aula e utilizar de metodologias que tragam o aluno para o centro do processo de ensino. Sendo assim, defendemos a utilização da modelagem matemática para atender a essas expectativas, destacamos suas potencialidades e a forma como pretendemos trabalhá-la.

4.2 Modelagem Matemática

Em um contexto em que os alunos acham a matemática difícil e separada de qualquer interesse deles, é interessante para o professor buscar metodologias que conectam a matemática abstrata à realidade concreta, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

A Modelagem Matemática é um ótimo recurso que utiliza problemas reais como ponto de partida, o que torna o aprendizado mais agradável e relevante para os estudantes. Ao modelar situações do cotidiano, como o movimento de objetos, os alunos veem a aplicação prática da matemática. Para Bassanezi (2002, p. 16), “A modelagem matemática consiste

na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Burak (1992, p. 62), corrobora essa visão afirmando que a modelagem matemática é um conjunto de procedimentos que busca explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, através da construção de um paralelo, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões. A beleza neste método é que o indivíduo utiliza de tudo o que sabe para interpretar o problema, identificar as variáveis e imaginar a solução mais adequada para ele. Com isso, é possível criar uma gama rica de soluções diferentes, baseadas nas impressões de cada um. A respeito disso, Burak (1992, p. 94) afirma que nesse método

[...] a compreensão e significado de cada conteúdo, necessário à solução do problema proposto, adquire uma dimensão mais profunda, através da própria construção desse conhecimento. Esse método de trabalho torna o ensino de Matemática mais vivo, mais dinâmico e extremamente significativo para o aluno. (BURAK, 1992, p. 94)

Os alunos, desta forma, se tornam participantes ativos do processo de aprendizado, sendo estimulados a levantar hipóteses, propor soluções e verificar resultados.

A modelagem matemática segue uma sequência de procedimentos que norteiam o ato de compreender e elaborar o problema matemático referente a ele. Bassanezi (2002, p. 26-31) apresenta as etapas desse método como sendo:

1. **Experimentação:** É a atividade de obtenção de dados. Os métodos experimentais utilizados, quase sempre são definidos pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Pode-se adicionar técnicas e métodos estatísticos para obter um grau de confiabilidade maior aos dados obtidos.
2. **Abstração:** É a fase que leva à formulação dos Modelos Matemáticos. Procura-se inicialmente selecionar as variáveis de estado e de controle. Após isso, os problemas teóricos são formulados numa linguagem própria da área em que se está trabalhando. Eles tendem a ser específicos e indicarem exatamente o que se deseja resolver. Após isso, são formuladas as hipóteses que irão dirigir as investigações, podendo ao fim do experimento serem comprovadas ou refutadas. Por fim, simplificar as informações incorporadas ao problema de tal forma que não se perca o essencial referente ao problema original, mas que resulte em um problema matemático tratável e, ainda, relevante.
3. **Resolução:** O modelo matemático é obtido quando se substituem as hipóteses por uma linguagem matemática coerente. Feito isso, pode se dispor dos objetos matemáticos conhecidos para resolvê-lo. O grau de complexidade da resolução de um problema é diretamente proporcional ao de sua formulação e, em alguns casos, pode precisar do auxílio de um computador.

4. **Validação:** É o processo de aceitação ou recusa do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses formuladas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos. Após isso, compara-se suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões determinará sua validação.
5. **Modificação:** Devido a erros, insuficiências ou surgimento de outras variáveis consideráveis, o modelo pode precisar ser alterado e corrigido. Além disso, esse modelo pode levar à construção de outros ainda melhores capazes de observar situações mais complexas.
6. **Aplicação:** Chegado a versão final do modelo, ele pode ser usado para entender o fenômeno estudado.

Esse processo mostra como o processo de construção de um modelo matemático é rico e bastante produtivo. Ao trabalhar com modelos matemáticos, os estudantes aprendem que a matemática não é apenas um conjunto de fórmulas, mas uma ferramenta poderosa para compreender e resolver problemas reais. Além disso, sendo ele o procedimento usado pelos pesquisadores para descobrir os conceitos e ferramentas matemáticas que conhecemos, pode ser usado para mostrar aos alunos que os processos que levaram às suas descobertas são repletos de erros e recomeços.

Segundo Burak (1992, p. 94), “Um outro aspecto importante na prática educativa, fazendo uso do Método da Modelagem, é a oportunidade da integração da Matemática com outras áreas como Geografia, Ciências, Português e História”. Ou seja, esse método é uma forma de trabalhar a interdisciplinaridade, que vai de encontro à BNCC (Brasil, 2018, p. 16) que busca “decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem”.

4.3 Bilhares Planares

Ao longo deste trabalho, diversas propriedades e resultados clássicos da dinâmica de bilhares são empregados. Como essas demonstrações já se encontram expostas de maneira rigorosa, clara e amplamente consolidada na literatura, opta-se por não reproduzi-las aqui. O leitor interessado nos desenvolvimentos completos pode consultar os trabalhos de Azevedo (2023), Carvalho (2022), Chen e Osinga (2024), Chernov e Markarian (2006), Fernandes (2014), Santos (2013) e Souza (2021) onde cada argumento é conduzido com precisão e profundidade. Ademais, tais resultados foram previamente discutidos no Relatório Final de Iniciação Científica submetido em 2024, no qual são apresentados com

maior minúcia em Cruz e Corrêa (2024, p. 13–22). Essa abordagem permite concentrar a exposição atual nos aspectos geométricos e dinâmicos centrais do estudo, evitando repetições desnecessárias.

Definição 1. Dado $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$, um domínio, isto é, um conjunto aberto, limitado e conexo, com fronteira suave ou suave por partes, o movimento livre de uma partícula no interior de \mathcal{D} com reflexões elásticas na fronteira $\partial\mathcal{D}$ é chamado de **Bilhar Planar**.

Quando você joga uma bola, ela se move em linha reta até atingir a borda da mesa. Ao bater na borda, ela reflete e muda de direção, mas continua se movendo até bater em outra borda. O bilhar planar é um modelo matemático que descreve esse movimento, supondo que a mesa tem um formato qualquer (como um círculo, um retângulo ou até formas mais criativas) e que a bola segue sempre as regras de reflexão.

Definição 2. Uma **mesa de bilhar** é o fecho de um domínio aberto conexo \mathcal{D} tal que $\partial\mathcal{D}$ satisfaz as seguintes condições:

- I) A fronteira $\partial\mathcal{D}$ é formada por uma união finita de curvas suaves Γ_i , tal que $\partial\mathcal{D} = \Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r$.
- II) As curvas Γ_i são chamadas de **paredes** ou **componentes** da fronteira $\partial\mathcal{D}$.
- III) Cada curva Γ_i é descrita por uma função $f_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde I é um intervalo, parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, satisfazendo

$$\|f'_i(s)\| = 1 \quad \text{para todo } s \in I.$$

Na matemática, uma mesa de bilhar é uma área onde a bola pode se mover. A borda dessa área é a fronteira ou parede. Dependendo do formato da mesa, o comportamento da bola muda.

Definição 3. Uma colisão de uma partícula em uma mesa de bilhar pode ser classificada como:

1. **Regular**, se ocorre em um ponto regular da fronteira Γ e o vetor velocidade \vec{v} não é tangente à parede. Nesse caso, a velocidade da partícula muda segundo a lei da reflexão:

$$\vec{v}_+ = \vec{v}_- - 2\langle \vec{v}_-, \vec{n} \rangle \vec{n},$$

onde \vec{v}_+ é a velocidade após a colisão, \vec{v}_- é a velocidade antes da colisão e \vec{n} é o vetor normal à parede no ponto de colisão. Uma colisão desse tipo acontece quando a bola bate na borda com um ângulo, e ela reflete, mudando de direção.

2. **Tangencial**, se ocorre em um ponto regular da fronteira Γ e o vetor velocidade \vec{v}_- é tangente à parede. Nesse caso, a bola atinge a borda de forma paralela (ou muito próxima disso). Nesse caso, ela "desliza" pela borda e continua na mesma direção. A velocidade não muda, ou seja, $\vec{v}_+ = \vec{v}_-$.

O movimento de uma partícula em uma mesa de bilhar pode ser descrito como uma **trajetória retilínea** no interior do domínio \mathcal{D} , com reflexões elásticas nas paredes. A direção da trajetória após cada colisão depende do ângulo de incidência, de acordo com a lei:

$$\hat{\text{Ângulo de Incidência}} = \hat{\text{Ângulo de Reflexão}}.$$

Isso significa que o ângulo com que a bola chega à borda (medido em relação à perpendicular da borda) é o mesmo com que ela sai. Esse princípio é o mesmo usado em espelhos e é fácil de visualizar. A trajetória de uma bola é o caminho que ela faz na mesa. Se quisermos entender completamente o movimento, precisamos saber onde a bola está e para onde a bola está indo. Na matemática, chamamos isso de espaço de fase. É como se tivéssemos um mapa que nos mostra, em cada momento, a posição e a direção da bola.

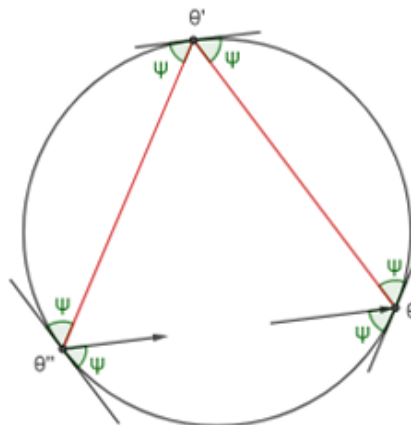


Figura 1: Ilustração dos ângulos de incidência e reflexão. Fonte: Souza (2021)

4.3.1 Círculo

Seja o círculo $S = \mathbb{S}^1$, de raio 1 e centro na origem O , parametrizado pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Considere $z_0 = (\theta_0, \Psi_0)$, onde Ψ_0 é o ângulo de reflexão em θ_0 , medido a partir da tangente. A posição da bola é representada por um ângulo θ , que mede o quanto giramos a partir do eixo horizontal. O ângulo Ψ é o ângulo de reflexão, ou seja, como a bola rebate ao bater na borda do círculo. Se a posição inicial da bola é (θ_0, Ψ_0) , podemos prever onde ela vai bater depois de cada reflexão.

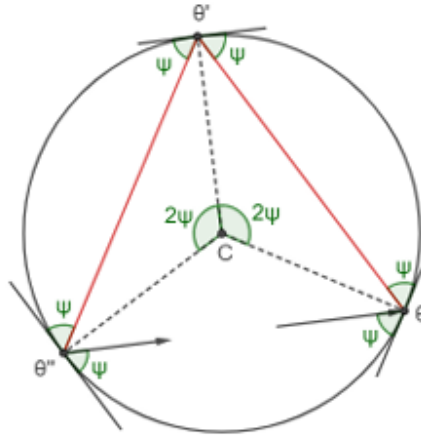


Figura 2: Trajetórias no bilhar no círculo. Fonte: Souza (2021)

Proposição 1. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, seja θ_n o n -ésimo ponto de colisão e Ψ_n o correspondente ângulo de reflexão. Então:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + 2\Psi_n \pmod{2\pi} \\ \Psi_{n+1} &= \Psi_n\end{aligned}\tag{1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A cada batida, a nova posição no círculo, θ_{n+1} , é calculado somando o dobro do ângulo de reflexão atual, ou seja, $\theta_n + 2\Psi_n \pmod{2\pi}$. O ângulo de reflexão, Ψ , não muda com o tempo. Isso significa que, em cada batida, a bola anda pelo círculo, avançando um pouco mais, sempre no mesmo ritmo.

Corolário 1. Sejam (θ_0, Ψ_0) os parâmetros iniciais de uma órbita. Então:

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_0 + 2n\Psi_0 \pmod{2\pi}, \\ \Psi_n &= \Psi_0.\end{aligned}$$

No espaço de fase $M = \{(\theta, \Psi); \theta \in [0, 2\pi], \Psi \in [0, \pi]\}$, cada nível $C_\Psi = \{\Psi \text{ é constante}\}$ é invariante pela aplicação T , que age como uma rotação por um ângulo 2Ψ em θ .

Definição 4. Dizemos que a rotação de um ângulo α é **irracional** se o número α/π é irracional, e dizemos que a rotação é **racional** caso contrário.

Proposição 2. Se $\Psi < \pi$ for um múltiplo racional de π , então a rotação do círculo C_Ψ é periódica de período n , ou seja, cada ponto no círculo é periódico de período n , ou ainda, que $T^n(\theta, \Psi) = (\theta, \Psi)$ para cada $0 < \theta < 2\pi$.

Seguem alguns exemplos de órbitas periódicas no círculo S :

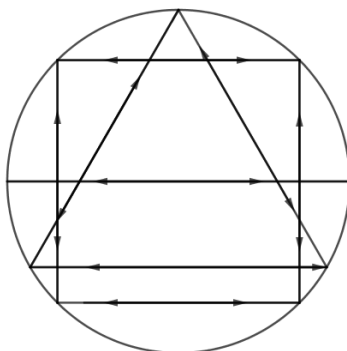


Figura 3: Exemplos de órbitas periódicas no círculo. Fonte: Autor.

4.3.2 Quadrado

Consideremos nesta seção uma região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \leq 1\}$, que compõe um quadrado.

Definição 5. *Trajetoórias que não tocam um vértice são ditas **trajetoórias regulares**, enquanto as trajetórias que tocam um vértice são ditas **trajetoórias excepcionais**.*

Teorema 1. *Se $v = (u, w)$ é o vetor velocidade da partícula, então após m colisões em uma parede vertical e n colisões em uma parede horizontal o vetor velocidade se torna*

$$v = ((-1)^m u, (-1)^n w).$$

Ao invés de refletir a trajetória da partícula podemos refletir o quadrado sobre o lado da colisão, fazendo a partícula se deslocar em linha reta sobre um toro. Essa construção é denominada **desdobramento da trajetória do bilhar**. Denotaremos as cópias de D como

$$D_{m,n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; m \leq x \leq m + 1, n \leq y \leq n + 1\}.$$

Podemos representar o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ como o quadrado unitário com os pares de lados opostos identificados.

Corolário 2. *Seja $v = (u_0, w_0)$ o vetor velocidade da partícula em um instante t . Se $\frac{w_0}{u_0} \in \mathbb{Q}$, então uma correspondente trajetória regular do bilhar no quadrado D é periódica. Se $\frac{w_0}{u_0} \notin \mathbb{Q}$, então a correspondente trajetória regular do bilhar é densa.*

As órbitas periódicas apresentadas para o bilhar quadrado possuem períodos pares. Isso não é uma coincidência. Em particular, não é possível existir uma órbita periódica com período três.

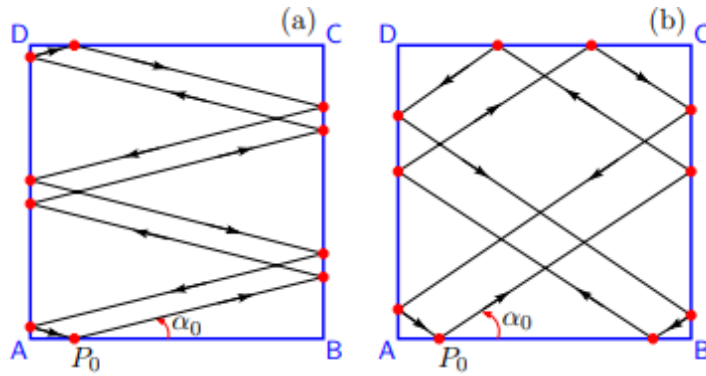


Figura 4: Exemplos de órbitas periódicas no quadrado. Fonte: Chen; Osinga (2004).

Teorema 2. *Qualquer órbita periódica no bilhar quadrado é gerada por um par $\langle P_0, \alpha_0 \rangle$, com P_0 um ponto no quadrado e $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\text{tg}(\alpha_0)$ seja racional, e o período dessa órbita é par.*

4.3.3 Triângulo

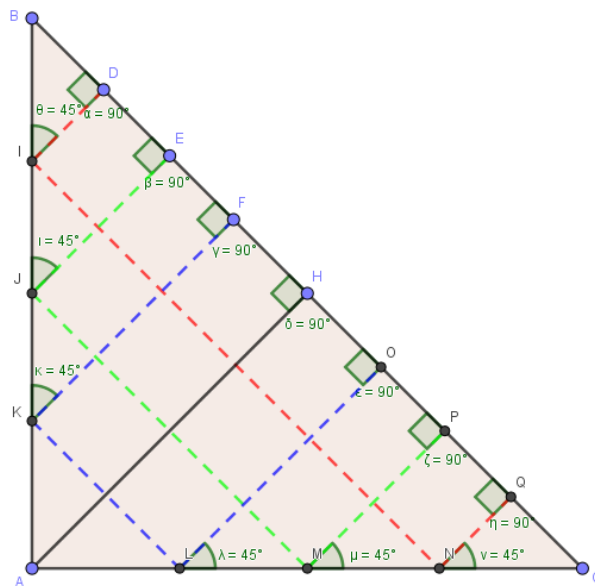


Figura 5: Família de órbitas periódicas no triângulo retângulo isósceles. Fonte: Autor.

Nesta figura temos um triângulo retângulo isósceles. A trajetória em preto incide no ângulo de 90° e termina, pois intercepta um dos vértices. Já as trajetórias em vermelho, azul e verde nos mostram algumas periódicas.

Teorema 3. *Uma trajetória perpendicular à hipotenusa em um triângulo retângulo é periódica contanto que atinja os outros dois lados antes de retornar.*

Teorema 4. *No triângulo retângulo isósceles, qualquer trajetória perpendicular a um dos lados dele é periódica contando não atinja um dos vértices do triângulo.*

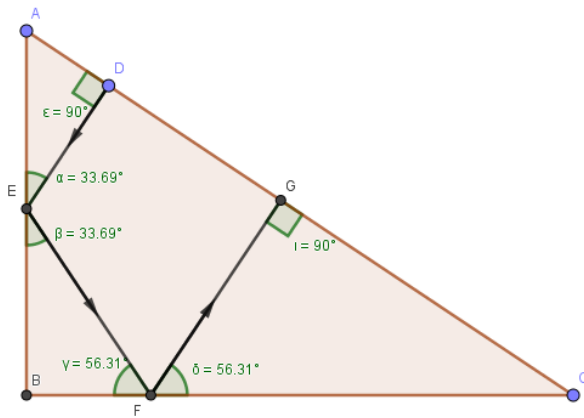


Figura 6: Construção geométrica para a visualização do Teorema 3. Fonte: Autor.

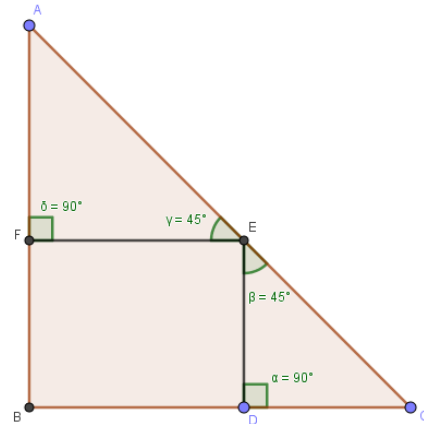


Figura 7: Construção geométrica para a visualização do Teorema 4. Fonte: Autor.

4.4 Potencial dos Bilhares Planares como recurso didático para o Ensino de Geometria

Valorizamos a importância da incorporação de recursos didáticos para aprimorar o ensino da Matemática, posto que desejamos despertar o interesse dos alunos em estudar geometria. A análise da potencialidade dos bilhares planares para ser um recurso didático válido é um pouco delicada e passa pelo entendimento do que é um recurso didático e do que faria deles uma atividade matemática eficiente para promover o aprendizado. Souza (2007, p. 111) vai dizer que o recurso didático é todo material utilizado pelo professor com os seus alunos para auxiliar no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto. Com isso, o recurso didático deve ser elaborado com calma para que ele cumpra sua função de ajudar o aluno a compreender a matéria.

O ponto mais importante para considerar os bilhares planares como um recurso em potencial é a possibilidade do estudante fazer a criação deles a partir de seus conhecimentos e utilizando de uma ferramenta computacional. Souza (2007, p. 112) afirma que

O recurso didático pode ser fundamental para que ocorra desenvolvimento cognitivo da criança, mas o recurso mais adequado, nem sempre será o visualmente mais bonito e nem o já construído. Muitas vezes, durante a construção de um recurso, o aluno tem a oportunidade de aprender de forma mais efetiva e marcante para toda sua vida. (SOUZA, 2007, p. 112)

Com isso, a interação do aluno com o processo de construção dos bilhares pode proporcionar uma experiência magnífica, ao passo que o faz utilizar os conceitos geométricos que já estudou ou está estudando.

O acervo matemático que os professores tem à disposição tem origem em seis atividades universais. São elas: contagem, localização, medição, desenho, jogo e explicação (BISHOP, 1991 apud MOREIRA, 2016, p. 52). No estudo sobre bilhares, encontramos essas seis atividades.

Podemos contar as interações da partícula com a borda ou o número de trajetórias que seguem um padrão repetitivo. Os bilhares exigem que identifiquemos onde a partícula está em um dado momento e para onde ela vai. Essa ideia de localização se relaciona diretamente com conceitos de coordenadas e geometria, ajudando os alunos a compreender noções espaciais de maneira prática.

A medição aparece naturalmente nos bilhares quando analisamos ângulos de reflexão, distâncias percorridas e até tempos entre colisões. Essas razões são fundamentais para entender o comportamento da trajetória e como ela se ajusta à forma do domínio.

Os bilhares desafiam os estudantes a desenhar trajetórias e diagramas, podendo usar softwares como o GeoGebra também, representando graficamente os movimentos da bola. Essa atividade visualiza o abstrato, tornando o conceito acessível e atraente, enquanto desenvolve habilidades geométricas. Apesar de não tão visível, ele se permite ser um jogo matemático, pois envolve regras simples, como leis de reflexão, mas também análises complexas como prever o trajeto da bola ou determinar condições para que ela percorra toda a mesa. Por fim, entender os bilhares planos requer explicações claras sobre por que a bola segue determinadas trajetórias, como as reflexões funcionam, ou por que certos padrões emergem. Esse processo de explicar desenvolve habilidades comunicativas e cognitivas essenciais para o aprendizado matemático.

Incorporar os bilhares no ensino básico, portanto, não apenas enriquece o conteúdo matemático, mas também promove essas atividades universais de maneira natural e integrada. Em vista dos argumentos apresentados, é válido realizar essa tentativa no ensino médio.

5 METODOLOGIA

A pesquisa adota uma abordagem qualitativa que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 3), busca compreender os fenômenos em seu contexto natural, interpretando-os a partir dos significados atribuídos pelos participantes. Ela é voltada para a análise das percepções e aprendizados dos estudantes durante a aplicação de uma proposta didática envolvendo o estudo de bilhares planares. O público participante foi composto por 26 alunos do 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Effie Rolfs, localizada no município de Viçosa (MG).

A sequência de atividades foi elaborada tomando como referência as propostas de Santos (2013) e Souza (2021), que exploraram o uso de softwares matemáticos na modelagem de bilhares e seções cônicas. Inspirado nesses trabalhos, este projeto adaptou as construções para o contexto do Ensino Médio, utilizando exclusivamente o GeoGebra como ferramenta principal.

A metodologia foi estruturada em três etapas principais: (1) avaliação diagnóstica, (2) intervenção no laboratório de informática e (3) aplicação de um formulário de impressão final.

5.1 Etapa 1 – Avaliação Diagnóstica

Inicialmente, após obter a autorização da direção e dos professores da escola, o projeto foi apresentado aos alunos com o intuito de despertar o interesse e convidá-los a participar voluntariamente. Em seguida, foi aplicada uma avaliação diagnóstica, cujo objetivo foi identificar o perfil dos participantes, suas concepções sobre Geometria, seus níveis de afinidade com a Matemática e o domínio de conceitos básicos necessários para a compreensão da proposta sobre bilhares.

O questionário foi dividido em seções, cada uma com um propósito específico:

- compreender o que os alunos entendem por Geometria;
- avaliar o grau de interesse e motivação pela área;
- verificar o conhecimento prévio sobre conteúdos fundamentais.

A versão completa da avaliação diagnóstica encontra-se disponível no Apêndice A.

A análise das respostas possibilitou traçar um panorama claro sobre as preferências, dificuldades e expectativas dos alunos em relação à Matemática. Observou-se uma turma heterogênea, composta por estudantes com diferentes níveis de envolvimento com a disciplina, mas que, em sua maioria, demonstram interesse em aprender de forma mais prática, interativa e significativa.

5.1.1 Perfil dos Alunos

Entre os conteúdos matemáticos mais apreciados, destacaram-se equações do 1º e 2º grau, o Teorema de Pitágoras, multiplicação e média aritmética. Alguns alunos também mencionaram cálculo e geometria, embora esta última tenha aparecido de modo ambíguo, tanto entre os conteúdos preferidos quanto entre os mais rejeitados.

Essa contradição revela que, apesar de reconhecerem a importância e aplicabilidade da Geometria, muitos alunos ainda a percebem como uma área difícil, abstrata e excessivamente formal, marcada pela memorização de fórmulas. Por outro lado, parte da turma demonstrou desejo explícito de superar essa dificuldade, afirmando querer “aprender a gostar de Geometria”, o que representa uma oportunidade significativa para a implementação de estratégias didáticas diferenciadas.

Em contrapartida, temas como logaritmos, funções e razões trigonométricas foram frequentemente apontados como os menos atrativos, sendo associados à falta de clareza nas explicações tradicionais e à ausência de contextualização prática. Esse resultado sugere que as dificuldades enfrentadas não estão relacionadas apenas à complexidade dos conteúdos, mas também à forma como são apresentados em sala de aula.

Quando questionados sobre os tipos de atividades que mais os motivam, a maioria mencionou resolver problemas, realizar cálculos e utilizar o computador. Muitos associam o prazer de calcular ao desafio cognitivo e ao sentimento de superação ao compreender um conceito ou resolver uma questão. Outros destacaram a importância de atividades digitais e interativas, observando que as ferramentas tecnológicas tornam o aprendizado mais visual, dinâmico e compreensível.

Alguns também mencionam o gosto por desenhar figuras e por atividades ligadas à criatividade, indicando que abordagens visuais e geométricas podem ser mais bem recebidas quando trabalhadas de forma concreta e contextualizada.

As experiências marcantes relatadas são variadas. Afirmam que muitos nunca tiveram uma experiência significativa, o que aponta para uma lacuna de vivências positivas com a Matemática ao longo da trajetória escolar. Por outro lado, algumas mencionam momentos de superação, como aprender um conteúdo após ter ido mal em provas, e participações em projetos como a OBMEP ou o Projeto de Iniciação Científica (PIC), experiências descritas como produtivas e motivadoras. Há também quem associa a Matemática às situações do cotidiano, como jogos de sinuca, em que identificam intuitivamente conceitos de ângulo, força e trajetória.

As respostas sobre o que é Geometria revelam um entendimento fragmentado, mas em formação. Muitos associaram o tema ao estudo de formas geométricas, áreas, perímetros e medidas, enquanto outros afirmam simplesmente “não saber” ou “não lembrar”. Isso mostra que o conceito de Geometria ainda é percebido como algo distante da realidade e fortemente ligado à memorização de fórmulas.

No entanto, quando solicitado a relacionar Geometria a situações práticas, boa parte dos alunos identifica sua presença em construções, desenhos, jogos e esportes. Esse dado é promissor, pois revela que, mesmo com lacunas conceituais, há uma percepção intuitiva de que a Geometria está presente no mundo real.

A totalidade dos alunos afirma já ter visto ou jogado sinuca ou bilhar, e quase todos acreditam que é possível estudar Matemática observando esses jogos, especialmente por meio do raciocínio envolvido nos ângulos, trajetórias e forças aplicadas. Quando questionados sobre o que poderia ser treinado matematicamente em uma mesa de bilhar, destacamos termos como trajetória, grau, ângulo, força e espaço, demonstrando uma base intuitiva para a modelagem geométrica e física do movimento.

Além disso, grande parte dos estudantes relatados já utilizou celulares, tablets ou computadores em aulas de matemática e se sente confortável com ferramentas digitais, considerando-as práticas, facilitadoras e mais próximas do seu cotidiano. Embora muitos não conheçam profundamente o GeoGebra, as experiências com o software foram, em geral, positivas, ainda que breves. Isso indica um terreno fértil para o uso de tecnologias educacionais como apoio ao ensino da Geometria e da modelagem matemática.

5.1.2 Motivações e Preferências dos Alunos

Quando questionados sobre o que esperamos aprender ao participar do projeto, as respostas variam entre o desejo de entender melhor a Geometria, melhorar o raciocínio lógico, aprender de forma mais clara e prática e descobrir como a Matemática se aplica ao cotidiano. Alguns associaram diretamente o projeto à preparação para o ENEM, confirmando o valor formativo e entregue do aprendizado. A tônica geral é de curiosidade, expectativa positiva e disposição para aprender de um jeito diferente.

De modo geral, o grupo demonstrou abertura significativa para novas metodologias, especialmente aquelas que rompem com o formato tradicional de ensino e se aproximam da Matemática presente no cotidiano. A dificuldade com a Geometria, portanto, não se mostrou resultado de rejeição absoluta, mas de uma relação marcada por experiências pouco significativas. Muitos alunos afirmaram querer “aprender a gostar” da área, o que revela potencial de engajamento quando o conteúdo é apresentado de forma concreta, visual e aplicada.

O uso de jogos, simulações e tecnologias destacou-se como uma estratégia eficaz para despertar o interesse e consolidar o aprendizado. Nesse contexto, o projeto de bilhares planares e modelagem geométrica apresentou-se como uma oportunidade ideal para conectar conceitos geométricos e trigonométricos a situações reais, estimulando o raciocínio espacial, a lógica e o pensamento investigativo dos alunos.

5.2 Etapa 2 - Intervenção no Laboratório de Informática

A intervenção foi realizada em três aulas, todas ministradas durante o 6º horário de aulas regulares.

Na primeira aula, apenas sete estudantes compareceram, dentre os vinte e seis que haviam respondido à avaliação diagnóstica. Esse baixo comparecimento gerou certa preocupação quanto ao tamanho da amostra, caso o mesmo comportamento se repetisse. No entanto, a aula inicial tinha caráter introdutório, voltado à apresentação dos conceitos fundamentais da teoria de bilhares, incluindo a definição de bilhar, o conceito de trajetória e o uso básico das ferramentas do GeoGebra que seriam utilizadas nas modelagens.

O material didático elaborado para essa etapa, contendo uma introdução aos bilhares e às ferramentas do GeoGebra, encontra-se disponível no Apêndice B.

Na primeira aula, os estudantes utilizaram o software GeoGebra para construir um círculo por meio da ferramenta Círculo dados Centro e um de seus Pontos. Em seguida, foi traçada a tangente no ponto selecionado, a partir da qual se iniciou a primeira trajetória. O ponto de interseção dessa trajetória com a circunferência foi identificado, permitindo a construção de uma nova tangente nesse local.

A partir dessas tangentes, foram definidos pontos auxiliares que possibilitaram o uso da ferramenta Ângulo para a determinação dos ângulos de incidência e reflexão em cada etapa do percurso. Cada estudante delineou a trajetória resultante após a primeira rebatida, ajustando os ângulos conforme necessário. Durante a atividade, foram testadas diferentes configurações de entrada e saída, de modo a observar o comportamento da trajetória no interior do círculo.

Posteriormente, o ângulo foi ajustado para 90° , o que produziu um bilhar com duas rebatidas, permitindo a visualização da lei da reflexão e do caráter periódico dessas trajetórias. Nesse momento, foi proposto aos estudantes que identificassem se tal trajetória remetia a algum segmento notável do círculo.

Na segunda aula, que contou com a participação de quinze estudantes, retomou-se o uso de retas tangentes nos pontos de rebatida da trajetória para determinar os ângulos de incidência e, conseqüentemente, de reflexão, mantendo a mesma lógica construtiva introduzida na primeira etapa. Nessa aula, foram exploradas trajetórias de bilhar com maior número de rebatidas em mesas circulares.

Utilizando o software GeoGebra, os estudantes reconstruíram o círculo e traçaram uma trajetória inicial arbitrária. Diferentemente da aula anterior, solicitou-se que determinassem apenas o ângulo de incidência em cada ponto de rebatida, replicando-o com a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa ao inserir no campo de valor do ângulo o nome do ângulo de incidência. Essa ferramenta automatizou a criação de novos pontos, de modo que cada segmento posterior representasse a continuidade da trajetória conforme o ângulo previamente definido.

A partir desses pontos gerados, os estudantes fizeram o mesmo processo mais vezes e ampliaram as trajetórias, produzindo o maior número possível de rebatidas. Em seguida, ajustaram os ângulos de modo a obter trajetórias que se aproximassem de figuras geométricas conhecidas. Quando alcançavam tais configurações, registravam o valor do ângulo que permitia sua formação. Durante essa exploração, analisaram diferentes possibilidades, registrando os ângulos de incidência e reflexão até que o comportamento das trajetórias se tornasse claro e intuitivo. Em alguns casos, as construções resultaram em trajetórias que formavam um triângulo; em outros, um quadrado.

Nesse contexto, foi proposto aos estudantes que identificassem uma regra capaz de determinar os valores adequados de ângulos de incidência e reflexão para que a trajetória constituísse um polígono regular.

Essa atividade teve como propósito levar os estudantes a identificar padrões, analisar sistematicamente os ângulos de incidência e reflexão e compreender como surgem órbitas periódicas. Nessa etapa, privilegiaram-se a experimentação e a observação dos resultados provenientes das simulações realizadas no GeoGebra.

Na terceira e última aula, que contou com a presença de quinze estudantes — incluindo dois ausentes na aula anterior e dois novos participantes — foram investigadas trajetórias de bilhar em mesas de formato quadrado e triangular retângulo. A escolha desses formatos mostrou-se adequada, uma vez que as construções são mais rápidas e intuitivas, além de envolverem conceitos recentemente estudados pelos alunos, como paralelismo e ângulos notáveis. Diferentemente das modelagens circulares, essas configurações dispensaram o uso de retas tangentes, tornando o processo mais acessível e estimulante.

Após definirem o formato da mesa, os estudantes selecionaram um ponto em um dos lados e traçaram a primeira trajetória. Em seguida, utilizaram o ponto de interseção entre essa trajetória e o lado subsequente, juntamente com o ponto inicial e o vértice correspondente, para determinar o ângulo de incidência. A ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa foi novamente empregada para replicar esse ângulo e obter o correspondente ângulo de reflexão, preenchendo o campo de valor com a medida previamente construída.

Nesse processo, duas restrições foram estabelecidas: (i) a trajetória não poderia ser iniciada a partir de um vértice e (ii) os estudantes deveriam evitar que a partícula atingisse algum vértice durante seu percurso, pois, conforme discutido na primeira aula, a incidência em vértices interrompe a trajetória, inviabilizando a continuidade do movimento.

Os estudantes ampliaram as trajetórias tanto quanto possível e, posteriormente, ajustaram os ângulos para obter figuras geométricas reconhecíveis. Após essa etapa exploratória, foram questionados sobre a limitação dessas modelagens e sobre a quantidade de rebatidas que seriam incapazes de produzir.

5.3 Instrumentos de Coleta de Dados

Para preservar a identidade dos participantes, os nomes foram omitidos. Ao longo da análise, cada estudante será identificado como Aluno X, sendo X o número correspondente à ordem de preenchimento do formulário diagnóstico.

Os instrumentos utilizados para a coleta e análise dos dados incluíram:

- Fotografias tiradas durante as aulas, registrando o processo de construção e interação dos alunos;
- Arquivos digitais (.ggb) gerados pelos estudantes no GeoGebra;
- Imagens exportadas desses arquivos, utilizadas para análise e ilustração dos resultados.

A observação das construções e das interações no laboratório constitui uma importante fonte de dados qualitativos, uma vez que permite captar aspectos do comportamento e da compreensão dos participantes no contexto natural da aprendizagem como defende Lüdke e André (1986, p. 11-13).

Além disso, planejou-se a realização de uma entrevista semiestruturada, com o objetivo de obter informações qualitativas sobre as experiências dos alunos e feedbacks sobre as atividades desenvolvidas. A entrevista foi disponibilizada por meio de formulário online, mas não houve retorno dentro do prazo previsto para a redação e envio deste trabalho.

Ainda assim, o instrumento permanece neste trabalho (Apêndice C), como registro do planejamento metodológico.

5.4 Limitações e Imprevistos

Durante o desenvolvimento da pesquisa, ocorreram alguns imprevistos que impactaram o cronograma. A realização da intervenção foi adiada devido às férias docentes no início de outubro e à ocorrência de eventos culturais na escola nas semanas anteriores ao recesso. Assim, a aplicação das atividades ocorreu posteriormente ao período inicialmente planejado.

Apesar da utilização de uma linguagem simplificada e de exemplos intuitivos, alguns alunos apresentaram dificuldade em compreender o propósito da proposta, especialmente nas primeiras aulas, o que exigiu mediações adicionais durante o processo.

Adicionalmente, observa-se que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não faz menção explícita aos bilhares planares, o que dificulta sua justificativa como conteúdo obrigatório no ensino médio. Dessa forma, o tema foi apresentado como atividade complementar, com o objetivo de ampliar a compreensão geométrica dos estudantes sem competir com os conteúdos curriculares regulares.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação do projeto sobre bilhares planares revelou aspectos importantes sobre o ensino e aprendizagem de Geometria no ensino médio, especialmente quando se propõe uma abordagem prática, visual e apoiada em recursos tecnológicos como o GeoGebra. As três aulas desenvolvidas mostraram um processo gradual de envolvimento, compreensão e superação de dificuldades por parte dos alunos, o que possibilitou analisar tanto os limites quanto as potencialidades da proposta.

No início das atividades, observou-se que os estudantes estavam cansados e desmotivados, o que é compreensível considerando que a intervenção ocorreu no sexto horário, momento em que muitos deles se preparavam para retornar para casa ou para o trabalho. Apesar disso, houve certa curiosidade e entusiasmo pelo fato de a aula ocorrer em um formato diferente, utilizando computadores e um software que a maioria não conhecia, mas demonstrava interesse em explorar.

Durante a primeira aula, os alunos tiveram o primeiro contato com a ideia de bilhar planar. Apesar de possuírem algumas noções intuitivas sobre reflexão e tangência, houve confusão inicial entre os conceitos de “bilhar”, “mesa” e “trajetória”. Muitos acreditavam que o bilhar correspondia apenas à mesa e ao ponto de impacto, não ao movimento da partícula ou da bola. Essa dificuldade inicial mostra o quanto a linguagem matemática e o vocabulário técnico podem ser barreiras no ensino, como pontua Duval (1993, p. 38) ao tratar da importância das diferentes representações semióticas no processo de aprendizagem matemática. A intervenção docente, nesse momento, foi essencial para reconstruir o sentido do termo e estabelecer conexões entre o fenômeno físico e sua modelagem geométrica.

A construção do primeiro bilhar, o de duas rebatidas em uma mesa circular, foi realizada com relativa facilidade. Os alunos seguiram instruções para criar uma circunferência, determinar um raio e traçar o segmento correspondente à trajetória. Embora simples, essa atividade serviu como diagnóstico do domínio das ferramentas básicas do GeoGebra e permitiu observar o raciocínio geométrico emergindo em situações concretas. Além disso, os alunos foram capazes de associar essa trajetória ao diâmetro da circunferência. Segundo Moreira (2011, p. 13 apud COELHO; MARQUES; SOUZA, 2019), "aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe", e, nesse caso, o reconhecimento de propriedades básicas da circunferência e de ângulos retos funcionou como ponto de partida para a compreensão de reflexões.

Seguem algumas construções feitas pelos alunos:

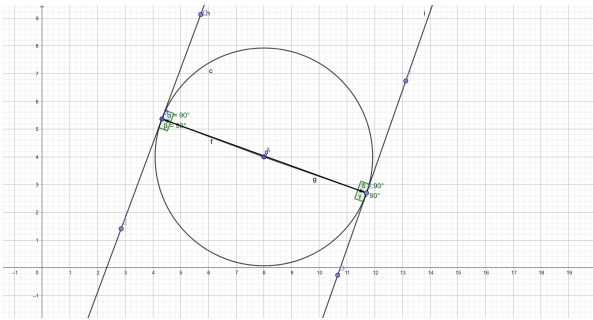


Figura 8: Bilhar feito pelo aluno 4 no primeiro dia.

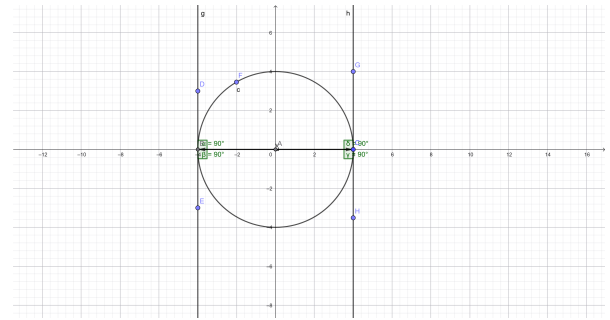


Figura 10: Bilhar feito pelo aluno 9 no primeiro dia.

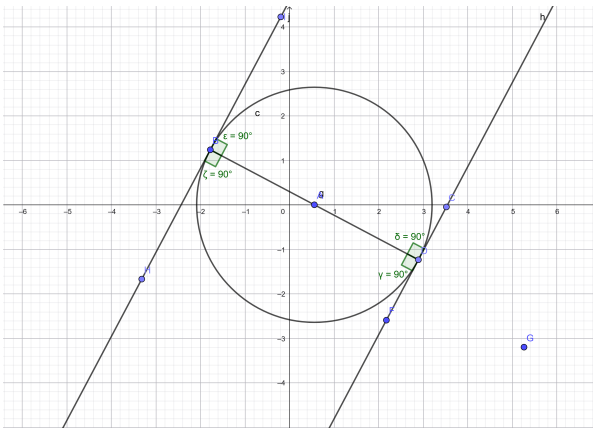


Figura 9: Bilhar feito pelo aluno 6 no primeiro dia.

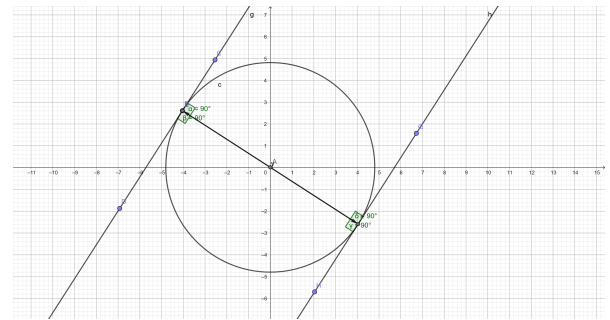


Figura 11: Bilhar feito pelo aluno 16 no primeiro dia.

Na segunda aula, com maior adesão, foi possível avançar na complexidade das trajetórias. Ao solicitar que os estudantes criassem bilhares com mais rebatidas, percebeu-se que a principal dificuldade estava na reprodução das etapas para gerar ângulos iguais de incidência e reflexão. Essa dificuldade técnica não se limitava ao uso do software, mas revelava fragilidades conceituais relacionadas à construção de ângulos e à percepção da tangente como reta de apoio à análise geométrica. Nesse ponto, a intervenção docente foi novamente essencial, e o uso da ferramenta “Ponto em objeto” no GeoGebra contribuiu para reduzir erros e consolidar procedimentos.

O engajamento dos alunos aumentou significativamente à medida que começaram a perceber padrões nas construções. Ao movimentarem as trajetórias e observarem o surgimento de figuras conhecidas, como triângulos e quadrados, o interesse cresceu. Esse momento foi um ponto-chave da aprendizagem, pois os estudantes passaram a relacionar ângulos, simetrias e medidas com formas geométricas concretas. Com mediação pontual do docente, concluíram que a soma entre o ângulo de incidência/reflexão e o ângulo interno do polígono deveria totalizar 180° . A partir dessa observação, retomaram a expressão para o cálculo dos ângulos internos de polígonos regulares, aplicando-a aos casos do triângulo e do quadrado obtidos nas construções, bem como ao caso hipotético do pentágono. Esse

tipo de descoberta dialoga com a perspectiva construtivista defendida por Piaget (1972, p. 22), segundo a qual o conhecimento é construído ativamente pela interação entre o sujeito e o objeto de estudo. Mais ainda, exemplifica a proposta de D'Ambrosio (2001, p. 56-57) sobre a etnomatemática, ao situar o aprendizado em um contexto culturalmente significativo, no caso, o jogo de bilhar, familiar a muitos deles.

Segue algumas das construções feitas no segundo dia:

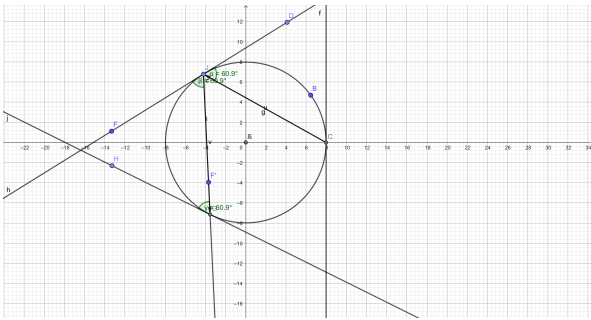


Figura 12: Bilhar feito pelo aluno 1 no segundo dia.

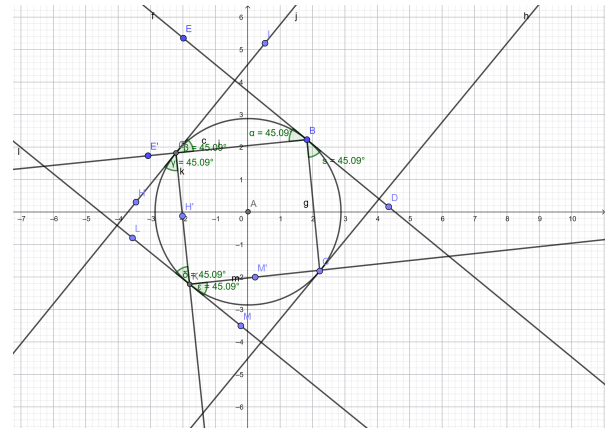


Figura 14: Bilhar feito pelo aluno 4 no segundo dia.

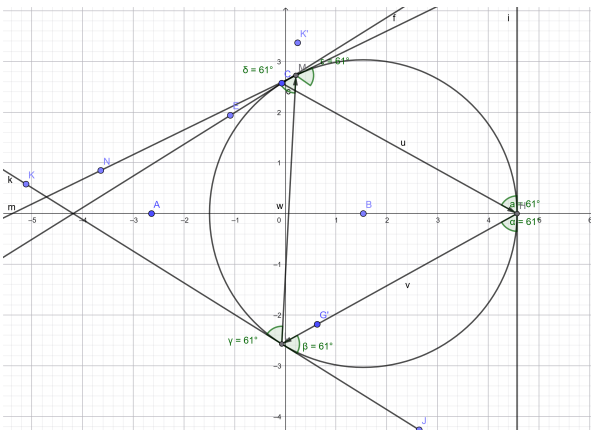


Figura 13: Bilhar feito pelo aluno 2 no segundo dia.

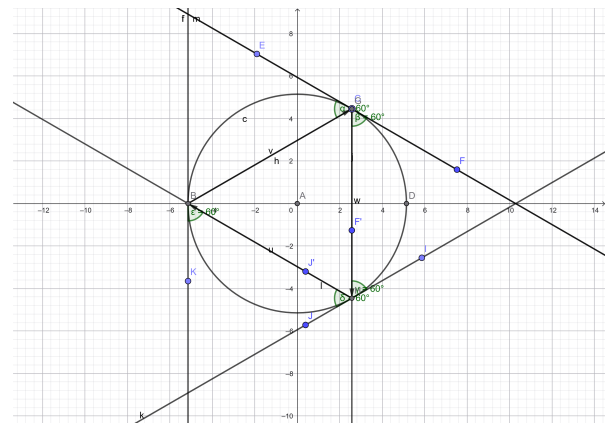


Figura 15: Bilhar feito pelo aluno 6 no segundo dia.

Na terceira e última aula, com novas ausências e substituições, observou-se novamente a dificuldade de continuidade, um reflexo das condições reais do ambiente escolar. Os alunos que haviam participado das aulas anteriores demonstraram notável progresso: conseguiram realizar as construções com maior autonomia e precisão, especialmente nos bilhares no quadrado. A ausência da necessidade de tangentes facilitou o trabalho e tornou a atividade mais acessível. Já os novatos tiveram dificuldades em acompanhar o raciocínio, o que indica a importância de um acompanhamento contínuo e de um tempo maior para consolidação.

Observou-se que, sem intervenção, os estudantes não conseguiram explicar por que

não é possível obter trajetórias com número de rebatidas diferente de potências de dois no bilhar quadrado, nem por que no bilhar triangular retângulo as trajetórias só podem gerar figuras semelhantes a retângulos. A identificação dessas limitações envolve a análise de ângulos que, ao serem ajustados, resultam em valores incompatíveis com a formação de figuras geométricas consistentes. A mediação docente tornou-se necessária, com a apresentação de exemplos, como a tentativa de construir uma trajetória com três rebatidas no bilhar quadrado, ilustrando por que tal caso é inviável. A partir dessa intervenção e da observação das inconsistências surgidas em suas próprias construções, os estudantes passaram a reconhecer essas restrições estruturais dos modelos trabalhados.

Segue algumas das construções feitas no terceiro dia:

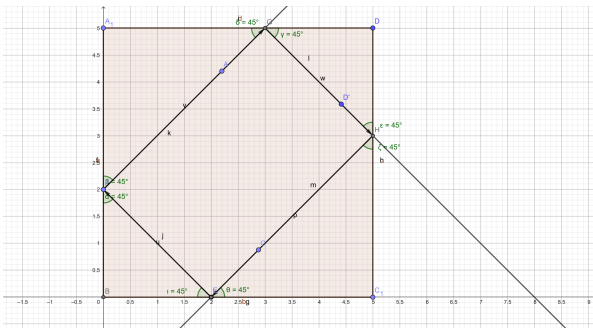


Figura 16: Bilhar feito pelo aluno 9 no terceiro dia.

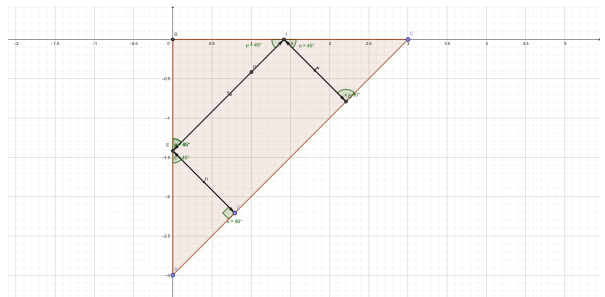


Figura 18: Bilhar feito pelo aluno 21 no terceiro dia.

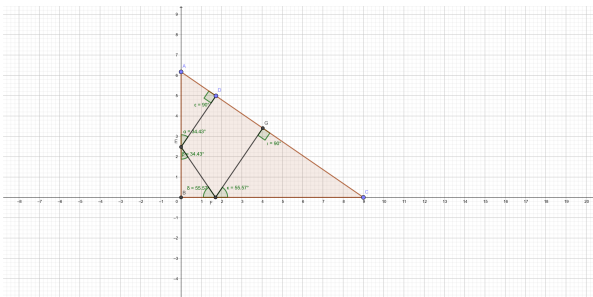


Figura 17: Bilhar feito pelo aluno 15 no terceiro dia.

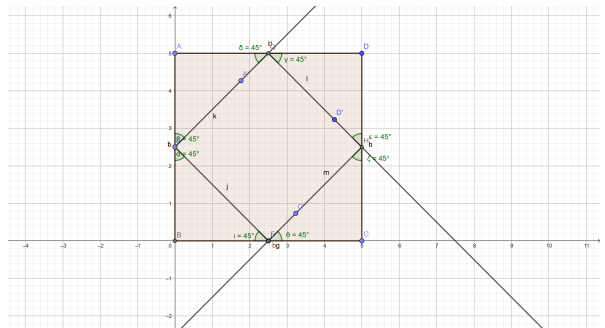


Figura 19: Bilhar feito pelo aluno 27 no terceiro dia.

As interações sociais entre os alunos, observadas durante as construções, também merecem destaque. A tendência de sentarem-se próximos aos amigos e reproduzirem construções semelhantes mostra tanto um aspecto positivo, a colaboração e troca de ideias, quanto um risco, que é a dispersão e a execução mecânica das tarefas. Segundo Vygotsky (1998, p. 41), a aprendizagem se dá em um contexto social mediado pela linguagem e pela interação, e o papel do professor é essencial para transformar essas interações em oportunidades de avanço cognitivo. Nesse sentido, o diálogo, as perguntas instigantes e a exploração conjunta das descobertas foram estratégias fundamentais para manter o foco e favorecer a reflexão.

Em termos conceituais, o desenvolvimento das atividades permitiu que os alunos compreendessem, ainda que de forma inicial, as relações entre ângulo de incidência e reflexão, simetrias e periodicidade das trajetórias. A percepção de que certos ângulos geravam figuras fechadas (como triângulos e quadrados) despertou neles a curiosidade e o prazer da descoberta, demonstrando que o conteúdo, quando contextualizado e visualmente explorado, torna-se mais significativo. Essa observação converge com os princípios da BNCC (Brasil, 2018), que defende o protagonismo do aluno e o uso de tecnologias para promover a compreensão conceitual.

Entretanto, também surgiram limitações claras. A curta duração do projeto, a dificuldade de alguns alunos com a manipulação do software e a ausência de uma etapa final de reflexão (por falta de respostas no formulário de impressão) restringiram a análise mais profunda dos impactos da intervenção. Ainda assim, o progresso observado nas produções e nas falas espontâneas dos estudantes sugere que a proposta atingiu seu objetivo principal: mostrar que é possível ensinar e aprender geometria de modo prazeroso, significativo e investigativo.

Em síntese, os resultados indicam que o uso dos bilhares planares como recurso didático favorece a aprendizagem ativa, estimula o raciocínio espacial e reforça a importância de estratégias que conectem a matemática escolar com situações concretas. Mais do que uma simples atividade com tecnologia, o projeto se mostrou uma experiência de reconstrução de sentido da geometria, uma disciplina que, quando tratada de forma viva e contextualizada, pode despertar o mesmo encantamento que motivou os antigos gregos a estudarem as formas e as trajetórias do mundo ao seu redor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho permitiu compreender de maneira mais ampla as potencialidades pedagógicas do uso dos bilhares planares como recurso didático no ensino da Geometria. Mais do que uma proposta de atividade diferenciada, a experiência revelou-se um campo fértil para a articulação entre teoria e prática, mostrando que a aprendizagem matemática se torna mais significativa quando o estudante é colocado em posição ativa na construção do conhecimento.

Ao longo das etapas da pesquisa, ficou evidente que a exploração do bilhar no GeoGebra despertou nos alunos a curiosidade e o desejo de compreender os fenômenos geométricos de forma visual e interativa. O envolvimento dos participantes nas discussões, a formulação de hipóteses e a busca por justificativas para as trajetórias observadas confirmaram o potencial desse tipo de abordagem para promover o raciocínio geométrico. O conhecimento é fruto da ação do sujeito sobre o objeto, e é nesse processo de experimentação que o aprendizado se consolida.

Além disso, o trabalho evidenciou a importância da mediação docente. O papel do professor como orientador das descobertas, incentivando o diálogo e a reflexão coletiva, mostrou-se essencial para que os alunos transformassem suas percepções intuitivas em conceitos matemáticos mais elaborados.

A utilização do GeoGebra foi um ponto central neste processo, funcionando não apenas como ferramenta de construção, mas como um ambiente de investigação e de pensamento matemático dinâmico. A incorporação de tecnologias digitais no ensino da Matemática altera profundamente a natureza das práticas pedagógicas, pois possibilita que o aluno visualize, manipule e compreenda relações antes restritas ao papel e à abstração. Essa experiência reforçou o papel transformador da tecnologia quando usada de forma intencional e crítica.

No entanto, o trabalho também revelou desafios concretos: a limitação do tempo escolar, a falta de infraestrutura tecnológica adequada e a necessidade de formação continuada para que o professor se sinta seguro em propor atividades mais abertas e investigativas. Esses fatores, embora restritivos, não anulam a potência da proposta, mas evidenciam o quanto ainda é preciso avançar para consolidar uma prática pedagógica que una criatividade, rigor e reflexão.

Em termos pessoais e formativos, esta pesquisa representou um exercício de amadurecimento docente. Ao planejar, aplicar e observar a atividade, foi possível perceber que ensinar Matemática é um processo vivo, que exige sensibilidade, adaptação e escuta. Cada reação dos alunos, cada dúvida surgida e cada descoberta construída em grupo reforçaram que o papel do professor é menos o de fornecer respostas e mais o de criar condições para que o conhecimento emergja de forma significativa.

Conclui-se, portanto, que o uso dos bilhares planares no ensino da Geometria constitui

uma prática didática inovadora e fecunda. Ao articular ludicidade, tecnologia e reflexão teórica, a proposta contribui para a compreensão de conceitos matemáticos e, sobretudo, para o desenvolvimento de uma postura investigativa nos estudantes. Mais do que uma experiência pontual, o trabalho indica caminhos possíveis para uma Matemática mais interativa, crítica e humana, uma Matemática que se constrói no diálogo entre o raciocínio lógico e a curiosidade de quem aprende.

8 REFERÊNCIAS

- [1] AZEVEDO, P. H. M. **Bilhares no Círculo, Quadrado e Elipse**. 2023. 56 f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2023.
- [2] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. ResearchGate, [s. l.], ago. 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256007243_Ensino_-_aprendizagem_com_Modelagem_matematica>. Acesso em: 3 jan. 2025.
- [3] BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- [5] BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.
- [6] CARVALHO, M. A. **Trajetórias Periódicas em Bilhares Poligonais**. 2022. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2022.
- [7] CHEN, H. H.; OSINGA, H. M. **Periodic orbits for square and rectangular billiards**. Department of Mathematics, University of Auckland, Auckland, New Zealand, 2024.
- [8] CHERNOV, N.; MARKARIAN, R. **Chaotic Billiards**. Providence: American Mathematical Society, 2006. (Mathematical Surveys and Monographs, v. 127). ISBN 978-0-8218-4096-2. DOI: <<https://doi.org/10.1090/surv/127>> .
- [9] COELHO, L. M.; MARQUES, A. J.; SOUZA, D. G. A teoria da aprendizagem significativa e o ensino de História. **Revista Educação Pública**, v. 19, n. 31, 26 nov. 2019. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/19/31/a-teoria-da-aprendizagem-significativa-e-o-ensino-de-historia>. Acesso em: 5 nov. 2025.
- [10] CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria: opiniões so-**

bre a área e seu ensino. 2005. Tese (Doutorado em Ciências Humanas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

[11] CRUZ, D. T.; CORRÊA, A. J. S. **Introdução aos bilhares.** Relatório Final de Iniciação Científica – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2024.

[12] D’AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** 4. ed., 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

[13] DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento matemático.** Tradução de Méricles Thadeu Moretti e Célia Maria Carolino Pires. Campinas, SP: Papirus, 2003.

[14] FERNANDES, W. T. R. **Propriedades Geométricas de Bilhares Planares.** 2014. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

[15] FRANTZ, D. S. F. S.; BISOGNIN, V. **Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico.** Revista Educar Mais, v. 6, 2022, p. 28–45. DOI: 10.15536/reducarmais.6.2022.2648.

[16] LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista – Geometria,** Blumenau, SC: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 3–13, 1º sem. 1995.

[17] LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

[18] MOREIRA, M. D. D. **Matemática@ XXI: conexões surpreendentes.** 2016. Tese (Doutorado em Ensino e Divulgação das Ciências) – Universidade do Porto, Porto, 2016.

[19] PIAGET, J. Development and learning. In: LAVATELLY, C. S.; STENDLER, F. (Eds.). **Reading in child behavior and development.** New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1972. p. 19–28.

[20] SANTOS, W. J. **Explorando o bilhar elíptico com ferramentas computacionais: uma proposta de ensino.** 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

[21] SOUZA, M. M. **Bilhares no GeoGebra**. 2021. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2021.

[22] SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. **I Encontro de Pesquisa em Educação – Arq. Mudi**, v. 11, supl. 2, p. 110–114, 2007.

[23] VYGOTSKI, L. S. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998. Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche.

9 APÊNDICE A: AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Informações iniciais

Nome: _____

Ano/série: _____

Parte 1 – Relação com a Matemática

1. Como você se sente em relação à Matemática?
() Gosto muito () Gosto um pouco () Não gosto muito () Não gosto
2. Qual área da Matemática você mais gosta? E qual gosta menos? Por quê?
3. Que tipo de atividade matemática te motiva mais: fazer contas, resolver problemas, desenhar figuras, usar computador, entre outros? Explique.
4. Você já teve alguma experiência marcante com Matemática (positiva ou negativa)?
Se sim, qual?

Parte 2 – Experiências com Geometria

5. O que você entende por Geometria? Dê um exemplo do que você considera um conteúdo de Geometria.
6. Você se lembra de algum conteúdo geométrico que aprendeu nos últimos anos?
Qual?
7. Você já aplicou conhecimentos de Geometria fora da escola? Em que situação?
8. Você costuma associar Geometria a jogos, esportes, construções ou desenhos? Dê um exemplo.

Parte 3 – Conhecimentos prévios sobre bilhares e trajetórias

9. Você já viu ou jogou sinuca, bilhar ou outro jogo com bolas em uma mesa?

10. Você acredita que dá para estudar Matemática observando esses jogos? Por quê?
11. O que você imagina que pode ser estudado matematicamente em uma mesa de bilhar?

Parte 4 – Experiência com tecnologia na escola

12. Você já utilizou computadores, celulares ou tablets em aulas de Matemática?
13. Você conhece ou já usou o software GeoGebra? Em caso afirmativo, conte como foi sua experiência.
14. Você se sente confortável em usar ferramentas digitais para aprender Matemática? Por quê?

Parte 5 – Expectativas sobre o projeto

15. Você acha que aprender Matemática de forma diferente – com jogos, simulações ou situações do cotidiano – pode ser interessante? Por quê?
16. O que você espera aprender ou descobrir ao participar deste projeto sobre bilhares e modelagem matemática?

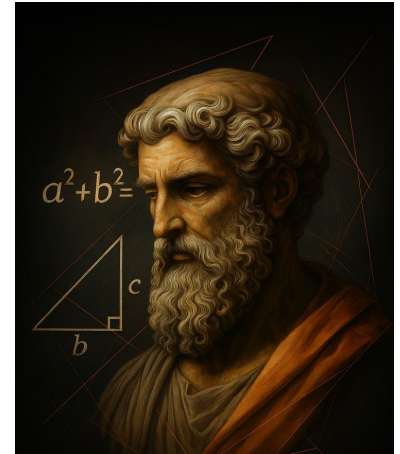
10 APÊNDICE B: MATERIAL DIDÁTICO

1. O QUE É GEOMETRIA?

Desde os tempos mais antigos, a Geometria está presente na história da humanidade. Os egípcios já a utilizavam para medir terras depois das cheias do Nilo; os gregos a transformaram em uma ciência de raciocínio e demonstração, e hoje ela está em praticamente tudo o que nos cerca, das construções que abrigam nossas cidades até os aplicativos de navegação que usamos no celular.

De forma simples, podemos dizer que a Geometria é a área da Matemática que estuda as formas, as medidas, as posições e as relações entre os objetos no espaço. Ela nos permite compreender o mundo visualmente, raciocinar sobre distâncias, ângulos, áreas e volumes, e até criar modelos que explicam fenômenos da natureza ou simulam situações do cotidiano.

Quando você desenha, joga sinuca, monta uma maquete, pratica esportes ou até organiza os móveis de um quarto, está usando raciocínio geométrico, mesmo sem perceber. A Geometria está presente no traçado das ruas, na estrutura de uma ponte, na curvatura de uma bola em movimento e até nas interfaces dos jogos e aplicativos que usamos todos os dias. Ela é uma forma de pensar o espaço e de resolver problemas de maneira lógica e visual ao mesmo tempo.



Além disso, a Geometria é uma ponte entre a Matemática abstrata e o mundo real. Enquanto a Álgebra lida com símbolos e fórmulas, a Geometria nos ajuda a ver o que a Matemática quer dizer. Ela transforma números em imagens, equações em figuras, e ideias em representações concretas. Por isso, aprender Geometria é também aprender a enxergar matematicamente o mundo.

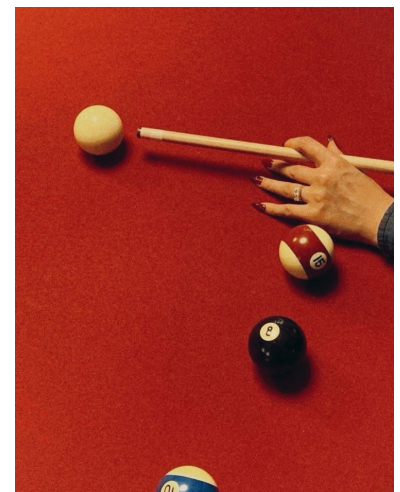
No nosso projeto, essa visão será fundamental. Vamos estudar a Geometria de um modo diferente, explorando trajetórias de bolas em mesas de bilhar planas. Vamos descobrir como ângulos, reflexões e medidas determinam o caminho que as bolas percorrem e como o raciocínio geométrico pode explicar movimentos aparentemente imprevisíveis.

2. BILHARES PODEM ENSINAR GEOMETRIA?

O jogo de bilhar é muito mais do que uma simples competição de mira e força, ele é **um laboratório natural de Geometria em movimento**. Cada tacada representa uma aplicação direta de conceitos geométricos como ângulos, trajetórias, simetrias e reflexões. Ao observar uma bola quicando nas bordas da mesa, podemos enxergar, literalmente, a Matemática em ação.

Quando a bola atinge uma borda, ela **reflete formando o mesmo ângulo que tinha ao chegar**, esse é o chamado ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão, o mesmo princípio usado nos espelhos planos. Assim, a mesa de bilhar se transforma em um cenário perfeito para **explorar a geometria dos espelhos, as propriedades das retas e dos planos e a ideia de simetria**.

Além disso, a análise das jogadas permite discutir noções de distância mínima, trajetórias ideais e até modelagem matemática: podemos prever o caminho da bola, estimar pontos de colisão e analisar padrões que surgem a partir



de diferentes posições iniciais. Esses conceitos estão diretamente ligados à Geometria Analítica e à Trigonometria, áreas fundamentais para compreender o espaço de forma precisa e racional.

Estudar Geometria através do bilhar é, portanto, trazer o conteúdo para o mundo real. **É uma forma de mostrar que a Matemática não vive apenas nos livros ou nas provas, mas nos gestos, nas trajetórias e nas estratégias que usamos intuitivamente todos os dias.**

Ao longo deste material, vamos usar o GeoGebra para representar essas trajetórias, construir modelos digitais de mesas de bilhar e observar o que acontece quando variamos os ângulos, os pontos de colisão e as posições iniciais. Assim, o aluno deixa de ser apenas espectador e passa a ser investigador do próprio raciocínio geométrico.

O GeoGebra é um software gratuito e interativo que combina Geometria, Álgebra e Cálculo em um só ambiente. Ele permite criar figuras, fazer medições, visualizar equações e simular movimentos. Em outras palavras, ele é a régua, o compasso e o papel milimetrado do século XXI, só que muito mais poderoso.

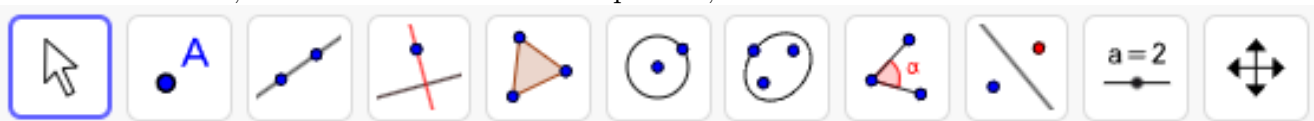
Com ele, você pode construir desde um simples triângulo até modelos complexos, como as trajetórias de bolas em uma mesa de bilhar, que é exatamente o que faremos neste projeto.

O GeoGebra está disponível tanto online (no navegador) quanto offline (para baixar no computador).

3. Conhecendo um pouquinho do GeoGebra

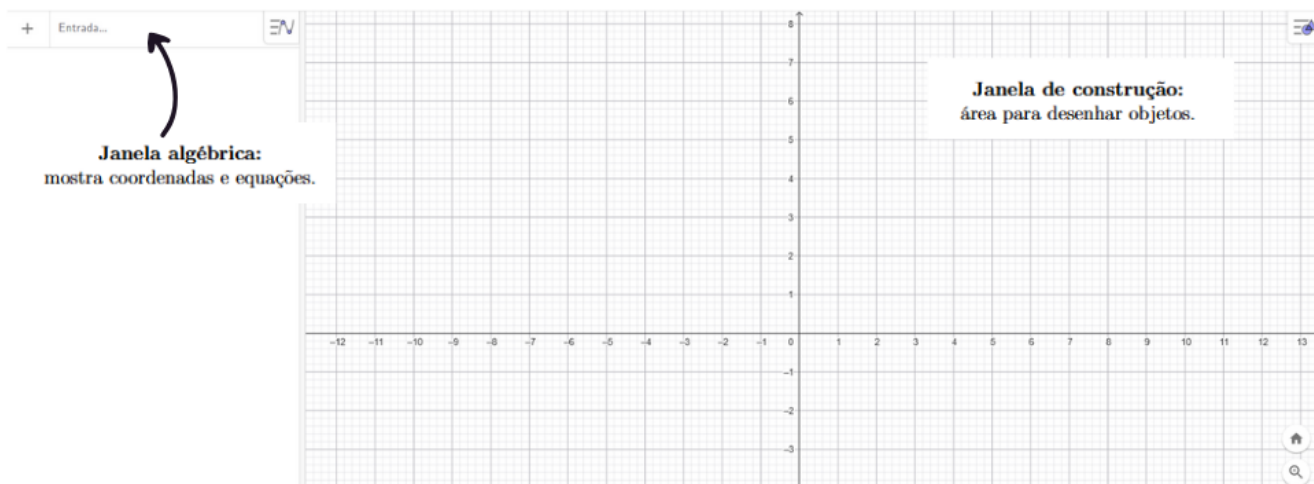
3.1. Barra de Ferramentas

A Barra de ferramentas, localizada abaixo dos menus, é utilizada para inserir elementos sem a utilização da caixa de entrada. As opções estão organizadas em grupos de semelhantes, e para acessar as demais, basta clicar no ícone de expansão, no canto inferior direito de cada botão.



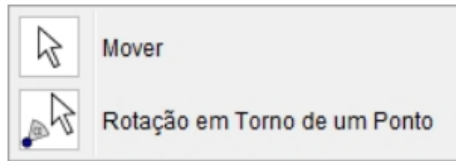
Para utilizar uma ferramenta, basta selecioná-la e, em seguida, selecionar ou criar os objetos necessários para a criação ou modificação do objeto envolvido. Após sua utilização, ela continua selecionada até que uma outra seja escolhida. As ferramentas padrão do GeoGebra são divididas em grupos, exibidos ao selecionar o botão do canto inferior direito de cada botão. Os grupos variam de acordo com cada Janela.

3.2. Janelas



4. Ferramentas

1. Primeiro Grupo de Ferramentas



- **Mover**: move um objeto na janela de visualização. Basta selecioná-lo e arrastá-lo.
- **Rotação em Torno de um Ponto**: rotaciona um objeto em torno de outro ponto, mantendo a distância fixa entre eles.

2. Segundo Grupo de Ferramentas



- **Ponto**: cria pontos livres, com restrição (sobre objetos) ou fixos (em interseções).
- **Ponto em Objeto**: insere um ponto vinculado a um objeto.
- **Vincular/Desvincular Ponto**: liga ou separa um ponto de um objeto.
- **Interseção de Dois Objetos**: cria um ponto fixo comum a dois objetos.
- **Ponto Médio ou Centro**: gera o ponto central entre dois pontos.
- **Número Complexo**: cria um ponto (x, y) representando $z = x + yi$.
- **Extremum (Otimização)**: mostra os extremos locais de uma função.
- **Roots (Raízes)**: exibe as raízes de uma função.

3. Terceiro Grupo de Ferramentas



- **Reta**: depende de dois pontos; cria a reta passando por eles.
- **Segmento**: cria um segmento entre dois pontos.
- **Segmento com Comprimento Fixo**: cria segmento com comprimento definido.
- **Semirreta**: gera uma semirreta a partir de dois pontos.
- **Caminho Poligonal**: conecta vértices de um polígono formando um caminho.
- **Vetor**: segmento de reta orientado com propriedades vetoriais.
- **Vetor a Partir de um Ponto**: cria vetor com origem em outro ponto.

4. Quarto Grupo de Ferramentas



- **Reta Perpendicular:** cria reta perpendicular passando por um ponto.
- **Reta Paralela:** cria reta paralela passando por um ponto.
- **Mediatriz:** reta perpendicular ao segmento, passando pelo ponto médio.
- **Bissetriz:** lugar geométrico de pontos equidistantes de duas retas.
- **Reta Tangente:** define reta tangente a função, cônica ou círculo em ponto escolhido.
- **Reta Polar ou Diametral:** gera reta específica a partir de ponto e cônica.
- **Reta de Regressão Linear:** determina a reta que melhor se ajusta a pontos.
- **Lugar Geométrico:** cria lugar geométrico com relação de dependência entre pontos.

5. Quinto Grupo de Ferramentas



- **Polígono:** cria polígono ligando vértices selecionados.
- **Polígono Regular:** cria polígono com arestas iguais.
- **Polígono Rígido:** polígono que não pode ser modificado.
- **Polígono Semideformável:** mover primeiro ponto move todo o polígono; outros pontos são livres.

6. Sexto Grupo de Ferramentas



- **Círculo dados Centro e Um Ponto:** cria círculo a partir do centro e um ponto.
- **Círculo dados Centro e Raio:** cria círculo a partir de centro e raio definido.
- **Compasso:** cria círculo com raio determinado por dois pontos.
- **Círculo definido por Três Pontos:** cria círculo ou reta a partir de três pontos.
- **Semicírculo Definido por Dois Pontos:** gera semicírculo com diâmetro definido.

- **Arco Circular:** cria arco definido por três pontos.

- **Arco Circuncircular:** cria arco seguindo contorno do círculo.
- **Setor Circular:** gera setor circular definido por três pontos.
- **Setor Circuncircular:** cria setor dentro do círculo definido por três pontos.

7. Sétimo Grupo de Ferramentas



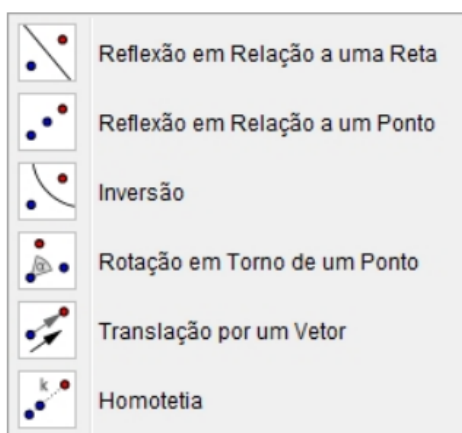
- **Elipse:** cria elipse a partir de três pontos (dois focos e ponto na curva).
- **Hipérbole:** cria hipérbole a partir de três pontos (dois focos e ponto na curva).
- **Parábola:** cria parábola a partir de foco e reta diretriz.
- **Cônica por Cinco Pontos:** gera cônica a partir de cinco pontos.

8. Oitavo Grupo de Ferramentas



- **Ângulo:** determina ângulo entre dois segmentos.
- **Ângulo com Amplitude Fixa:** cria ângulo de amplitude definida.
- **Distância, Comprimento ou Perímetro:** exibe medida de objeto(s).
- **Área:** exibe área de objeto selecionado.
- **Inclinação:** mostra coeficiente angular de reta, semirreta ou segmento.
- **Lista:** usada em conjunto com a planilha para exibir dados.

9. Nono Grupo de Ferramentas



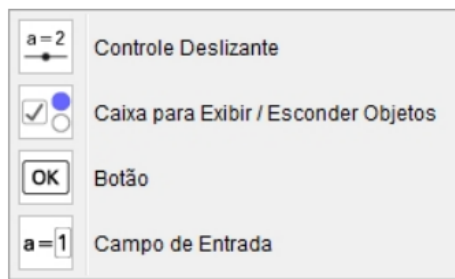
- **Reflexão em Relação a uma Reta:** espelha objeto em relação a uma reta.
- **Reflexão em Relação a um Ponto:** espelha objeto em relação a um ponto.
- **Inversão:** inverte objeto em relação a um círculo.
- **Rotação em Torno de um Ponto:** cria objeto rotacionado em torno de ponto.
- **Translação por um Vetor:** move objeto pelo vetor selecionado.
- **Homotetia:** multiplica distância de ponto a ponto fixo por fator.

10. Décimo Grupo de Ferramentas



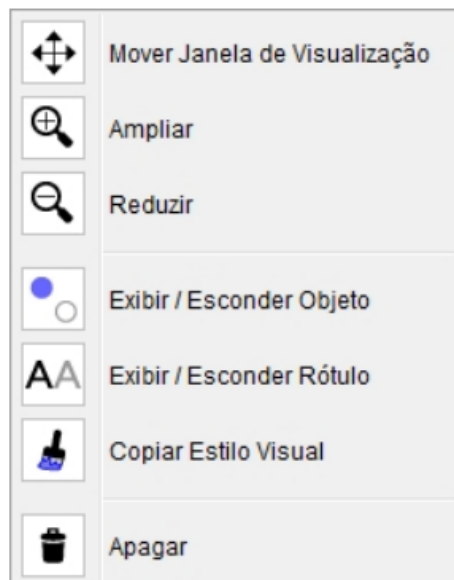
- **Texto**: insere texto na janela de visualização.
- **Inserir Imagem**: adiciona imagem com pontos móveis para configuração.
- **Caneta**: desenha livremente na janela.
- **Função à Mão Livre**: cria função desenhando o percurso.
- **Relação**: mostra relação entre dois objetos.
- **Inspetor de Funções**: exibe propriedades de função.

11. Décimo Primeiro Grupo de Ferramentas



- **Controle Deslizante**: cria botão rolante para alterar valor de objeto.
- **Caixa para Exibir/Esconder Objetos**: seleciona quais objetos aparecerão.
- **Botão**: cria botão que executa código GeoGebra.
- **Campo de Entrada**: permite inserir valor de variável manualmente.

12. Décimo Segundo Grupo de Ferramentas



- **Mover Janela de Visualização**: movimenta conteúdo da janela.
- **Ampliar**: aumenta a visualização com foco.
- **Reduzir**: diminui a visualização com foco.
- **Exibir/Esconder Objeto**: mostra ou oculta objeto(s) temporariamente.
- **Exibir/Esconder Rótulo**: mostra ou oculta rótulo do objeto.
- **Copiar Estilo Visual**: aplica estilo de um objeto a outro.
- **Apagar**: remove objetos selecionados.

5. Um pouco sobre os Bilhares

Quando jogamos uma bola em uma mesa de bilhar, ela sai rolando em linha reta até bater na borda. Ao encostar nela, muda de direção e continua se movendo, batendo em outras bordas e criando um caminho cheio de reflexões. Agora imagine que essa mesa pode ter qualquer formato — redonda, quadrada, triangular ou até com curvas diferentes. O que muda é a forma do caminho

que a bola faz. É isso que chamamos de **bilhar planar**: o estudo das trajetórias de uma bola que se move dentro de uma mesa e reflete nas bordas, sempre de acordo com uma regra simples:

$$\hat{\text{Ângulo de Incidência}} = \hat{\text{Ângulo de Reflexão}}.$$

Isso quer dizer que a bola “bate” na borda com o mesmo ângulo com que ela “sai”. Essa é a mesma ideia que vemos quando a luz reflete em um espelho!

A **mesa de bilhar** é a área onde a bola pode se mover. As bordas da mesa são chamadas de **paredes**, e são elas que fazem a bola mudar de direção. Dependendo do formato da mesa, a trajetória pode ser bem diferente:

- Em uma mesa **retangular**, o movimento da bola é previsível e segue padrões simétricos.
- Em uma mesa **triangular**, a bola muda de direção de forma mais rápida e interessante.
- Em uma mesa **circular**, as trajetórias podem ficar parecidas com espirais.

Existem dois tipos de “batidas”:

1. **Batida normal**: quando a bola chega na borda e muda de direção, seguindo a lei do espelho — o ângulo de entrada é igual ao de saída.
2. **Batida tangente**: quando a bola chega quase paralela à borda, deslizando um pouco sem mudar de direção.

O bilhar é uma maneira divertida de estudar Geometria e movimento! Podemos usar o **GeoGebra** para desenhar mesas diferentes e ver o que acontece com a trajetória da bola. Às vezes ela volta para o ponto de partida, às vezes entra em um caminho que se repete e, em outras, parece nunca repetir o mesmo trajeto.

No fundo, estudar o bilhar é uma forma de ver como a Geometria aparece no movimento — uma mistura de lógica, visualização e até um pouco de surpresa. E é justamente isso que vamos explorar a seguir!

11 APÊNDICE C: PERGUNTAS DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

Parte 1 – Impressões gerais sobre a experiência

1. Como você se sentiu participando das atividades sobre bilhares e modelagem no GeoGebra?
2. O que mais chamou sua atenção durante as aulas?
3. Em algum momento você se sentiu perdido ou teve dificuldade em entender algo? Se sim, o que foi?
4. Você acredita que aprendeu algo novo com essa experiência? O quê?

Parte 2 – Relação com a Matemática e a tecnologia

5. Você acha que o uso do GeoGebra ajudou a entender melhor os conceitos de geometria e trajetória?
6. Comparando com outras aulas de Matemática, como você avalia esta proposta?
7. O uso do computador e da simulação tornou a Matemática mais interessante para você? Por quê?

Parte 3 – Reflexões e sugestões

8. Você vê alguma relação entre os bilhares estudados e situações do cotidiano?
9. O que você mudaria nas atividades para que elas fossem mais interessantes ou fáceis de entender?
10. Você indicaria esse tipo de atividade para outros colegas? Por quê?
11. Gostaria de aprender outros conteúdos de Matemática por meio de atividades parecidas? Quais?