

DIOGO HENRIQUE GONÇALVES DUARTE

NÃO LOCALIDADE EM FÉRMIONS DE MAJORANA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Jakson Miranda Fonseca

VIÇOSA – MINAS GERAIS
2022

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

D812n Duarte, Diogo Henrique Gonçalves, 1994-
2022 Não localidade em férmions de Majorana / Diogo Henrique
Gonçalves Duarte. – Viçosa, MG, 2022.
1 dissertação eletrônica (103 f.): il. (algumas color.).

Orientador: Jakson Miranda Fonseca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa,
Departamento de Física, 2022.

Referências bibliográficas: f. 100-103.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2022.609>

Modo de acesso: World Wide Web.

1. Férmions de Majorana. 2. Teoria quântica. I. Fonseca,
Jakson Miranda, 1984-. II. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física.
III. Título.

CDD 22. ed. 539.721

Bibliotecário(a) responsável: Bruna Silva CRB-6/2552

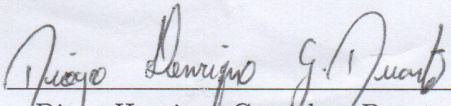
DIOGO HENRIQUE GONÇALVES DUARTE

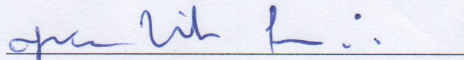
NÃO LOCALIDADE EM FÉRMIONS DE MAJORANA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 01 de agosto de 2022

Assentimento:


Diogo Henrique Gonçalves Duarte
Autor


Jakson Miranda Fonseca
Orientador

*Aos meus Pais,
Sr. Dedé e Vaninha.*

AGRADECIMENTOS

Por vezes ao final de trabalhos como a escrita de uma dissertação caímos na falácia da meritocracia e nos esquecemos de tudo e todos que trabalharam direta e indiretamente para a sua conclusão. Por isso, não poderia deixar de agradecer à algumas pessoas e afirmar que esse trabalho é um produto de suas contribuições também!

Aos meus pais, Dedé e Vânia, que além de todo apoio financeiro, por meio do exemplo diário me mostraram que apesar das dificuldades, devemos seguir em frente com um sorriso no rosto. Às minhas irmãs, que nunca pouparam esforços para ajudar a superar as diversas crises que surgiram ao longo de toda a vida, e principalmente nos dois últimos anos, e ao meu afilhado, que mesmo sem entender ao certo, alegrava meus dias com suas brincadeiras em todas as chamadas de vídeos diárias.

Agradeço a galera da salinha da pós, por todo o tempo dedicado a discussões matemáticas e muitas vezes filosóficas, que foram fundamentais na compreensão de quase tudo o que consta desse trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Jakson, por aceitar trabalhar com algo novo também para ele, e pela liberdade dada, as vezes incômoda, mas fundamental para meu crescimento como um pesquisador. Ao Ricardo, coorientador, que esteve sempre disposto a ajudar em todos os momentos de desespero quando acreditei que estava tudo perdido.

E por fim, agradeço a todo o povo brasileiro, que por meio da CAPES código 001, deu todo o apoio financeiro a execução desse trabalho.

*“If you’re going to try, go all the way
otherwise, don’t even start.
If you’re going to try, go all the way.”
(Charles Bukowski em *Roll the dice*)*

RESUMO

DUARTE, Diogo Henrique G., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, agosto de 2022. **Não localidade em férmions de Majorana** Orientador: Jakson Miranda Fonseca.

De acordo com Schrödinger, o emaranhamento é a principal característica da mecânica quântica, e hoje, 100 anos após essa afirmação, sabemos que, apesar da estranheza dessa característica, este é um recurso fundamental para a computação quântica. Além disso, o emaranhamento está intimamente relacionado a outro fenômeno fundamental à computação e informação quântica, a não-localidade. Um dos principais debates acerca do emaranhamento teve início com o trabalho de Einstein, Podolski e Rosen, que levantaram a possibilidade de a mecânica quântica não ser uma teoria completa. Apenas 50 anos depois, um trabalho brilhante de John Bell colocou o trabalho de EPR em questões matemáticas coerentes e possibilitou a sua verificação experimental. Dentre os diversos modelos propostos para a computação quântica, o mais promissor no que diz respeito à estabilidade e coerência de estados é a computação quântica topológica, tendo os modos de Majorana como os principais expoentes para a sua realização, e o modelo de Kitaev a abordagem mais simples apresentando uma solução analítica. Nessa dissertação, abordaremos aspectos de emaranhamento e não-localidade, seus fundamentos físicos e algumas aplicações a teoria da informação. Estudaremos as correlações entre medidas efetuadas nos estados de paridade dos modos de majoranas que surgem em cadeias de Kitaev, buscando uma possível violação de desigualdades de Bell para diferentes configurações de Majoranas modo zero.

Palavras-chave: Férmions de Majorana. Emaranhamento. Não localidade.

ABSTRACT

DUARTE, Diogo Henrique G., M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2022.
Non-locality in Majorana fermion Adviser: Jakson Miranda Fonseca.

According to Schrödinger, entanglement is the main feature of quantum mechanics, and today, 100 years after that statement, we know that despite the strangeness concerning this characteristic, it is a fundamental resource for quantum computing. Furthermore, entanglement is closely related to another fundamental phenomenon related to computation and quantum information, the non-locality. One of the main debates about entanglement started with Einstein, Podowski and Rosen work, which raised the possibility that quantum mechanics is not a complete theory. Just 50 years later, a brilliant work by John Bell put EPR's work on a coherent mathematical approach and made it possible to verify it experimentally. Among the various models proposed for quantum computing, the most promising concerning state coherence stability is the topological quantum computation, with Majorana modes as the main exponents for its realization, and Kitaev's model the simplest approach presenting an analytical solution. In this dissertation, we will approach aspects of entanglement and non-locality, their physical foundations and some applications to information theory. We will study the correlations between measurements carried out in the parity states of the majorana modes that arise in Kitaev chains, looking for a possible violation of Bell inequalities for different settings of mode zero Majoranas.

Keywords: Majorana Fermion. Entanglement. Non-locality.

LISTA DE FIGURAS

3.1	Cenário de Bell (2,2,2), onde uma fonte F prepara e distribui a dois laboratórios L_A e L_B , que podem escolher cada um entre duas medidas possíveis, e cada medida escolhida tem como saída dois possíveis resultados.	33
3.2	Diagrama espaço tempo dos eventos de medição de Alice e Bob	34
3.3	Representação esquemática de uma seção bidimensional do politopo de correlações no cenário CHSH)	46
4.1	Representação de rotação de uma partícula ao redor da outra. Em 3D todos os caminhos podem ser comprimidos até um ponto, visto que não é necessário se manter a trajetória no plano. Em 2D os caminhos não podem ser comprimidos, visto que esbarrariam em uma partícula fixa no plano, retirada de [?]	49
4.2	a-c Representação gráfica de trajetórias no espaço real e d-g linhas de mundo das quasipartículas para sistemas com 3 partículas idênticas. As imagens a-c correspondem aos mesmos elementos do grupo de permutação S_3 , $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1)$, que determina unicamente a evolução do sistema em 3D (a), entretanto não em 2D (b,c). A evolução mostrada na figura (b) corresponde aos elementos de trança mostrados em (f). A evolução de (c) corresponde aos elementos de trança mostrados em (g). Todas essas operações podem ser construídas pelas operações elementares representadas em (d-e)	50
4.3	Correspondência no processo de fusão de um sistema com três anyons e canal de fusão fixo (d). As matrizes F podem ser vistas como rotações no espaço de fusão intermediário	52
4.4	Representação simbólica de uma trança no sentido anti-horário de anyons a e b que se fundem em uma partícula c. Esse processo de trança gera uma fase R_{ab}^c	53
4.5	Representação simbólica de uma trança como na figura 4.4 utilizando fitas e mundo. A deformação das fitas produz processos que são topologicamente equivalentes a meias torções que correspondem a rotações das partículas ao redor uma das outras.	53

4.6	Representação de uma decomposição da cadeia de Kitaev na base de Majorana. Cada sitio (região retangular) é escrito como uma soma de dois majoranas (pontos cinzaz).	62
4.7	Cadeia de Kitaev na base de Majorana em fase trivial. Cada um dos majoranas do sitio se acopla com seu parceiro no mesmo sitio. Situação onde não existem estados de borda.	62
4.8	Cadeia de Kitaev na base de Majorana em estado topológico. O segundo majorana de cada sitio se acopla com o primeiro majorana do sitio adjacente, restando os majoranas de borda “livres”, que juntos configuram um elétron não local.	62
4.9	(a) Linhas de mundo para um conjunto de dois pares de majorana que surgem do vácuo. (b) Linhas de mundo para os mesmos pares de majorana que surgiram do vácuo, porém trançando um majorana de cada par antes da fusão. Vemos que nessa situação é possível alterar o canal de fusão de cada par.	64
5.1	a Representação esquemática de um único qubit. São necessários 2 pares de majoranas para configurar um qubit lógico, devido a preservação da paridade total do sistema b,c e d esquema para troca de dois majoranas que pertencem a fios diferentes dando origem a combinações de estados lógicos	67
5.2	Diagrama de tranças para troca de majoranas oriundos de regiões topológicas diferentes, dando origem a uma sobreposição de estados. Essa operação é conhecida como porta de Hadamard.	69
5.3	Rede de majoranas, onde cada linha demonstra um estado topológico de Kitaev e as regiões não preenchidas por linhas encontram-se em estados triviais, podendo ser transformadas em regiões topológicas de acordo com a necessidade de transporte dos majoranas para operações lógicas.	69
5.4	Configuração de Majoranas dados por um subespaço da rede geral. Os Majoranas do lado esquerdo, em verde, serão os disponíveis a Alice, enquanto que os do lado direito, em azul, os de Bob.	70
5.5	Três configurações possíveis de medida. Os pontos verdes representam os Majoranas em posse de Alice, enquanto os azuis são os majoranas de Bob.	74

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. MECÂNICA QUÂNTICA	14
2.1 Postulados da mecânica quântica	14
2.2 Emaranhamento	19
2.2.1 Fundamentos do Emaranhamento	20
2.2.2 Critérios de separabilidade	22
2.3 Quantificação do emaranhamento	23
2.4 Origem do emaranhamento	26
2.5 Teletransporte	27
3. NÃO LOCALIDADE	29
3.1 O argumento EPR	29
3.2 Probabilidades conjuntas e marginais	32
3.3 Correlações	32
3.4 Desigualdade de Bell	36
3.4.1 Desigualdade CHSH	39
3.5 Conjuntos de correlações e politopos	42
3.6 Loophole e testes experimentais	45
4. FÉRMIONS DE MAJORANA	48
4.1 Anyons	48
4.1.1 Tranças	50
4.1.2 Propriedades fundamentais de anyons	51
4.2 Férmions de Majorana na matéria condensada	54
4.2.1 Formalismo de Bogoliubov de-Gennes	54
4.2.2 Cadeia de Kitaev	57
4.2.3 Invariante de Kitaev	59
4.3 Computação quântica com MZM	63

5. EMARANHAMENTO DE MAJORANAS	66
5.1 Qubit de Majorana	66
5.2 Rede de Majoranas	68
6. Considerações Finais	76
Bibliografia	77

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um dos conceitos que mais diferenciam a mecânica quântica de toda a física clássica é a não localidade, que está intimamente relacionada ao emaranhamento e que, apesar de localidade dizer respeito à não possibilidade da ação a distância, a não localidade quântica também não permite tal fenômeno, estando de acordo com a localidade relativística.

O emaranhamento é a propriedade de alguns sistemas quânticos compostos que faz com que as partes do sistema não possam ser descritas de maneira separada uma da outra, sendo então disponível apenas a sua descrição global, estando, portanto, o sistema “correlacionado” mesmo que as partes estejam muito distantes entre si.

A estranheza do emaranhamento levou grandes nomes da história da física a questionar a completude da teoria quântica, sendo um dos maiores críticos Albert Einstein, que junto de Boris Podolsky e Nathan Rosen publicaram um trabalho [1] (Famoso até os dias de hoje sob o nome “paradoxo EPR”) onde colocava em cheque a capacidade da teoria quântica ser uma teoria completa.

Anos depois, Bell [2] reformulou as críticas de EPR denotando um caráter matemático às correlações possíveis entre teorias que se julgavam locais, e, com poucas hipóteses aparentemente básicas, pode mostrar uma incapacidade da conciliação da mecânica quântica com o conceito de realismo local.

Finalmente, em 2015, um experimento completamente livre de buracos pode mostrar que realmente a mecânica quântica não pode satisfazer as hipóteses levantadas por Bell, violando uma de suas desigualdades e, com isso, passou-se a cogitar a não localidade como um recurso útil para a informação e computação quântica [3], sendo hoje emaranhamento e não localidade fundamentais em protocolos de criptografia e teletransporte quântico.

Em uma busca por computadores quânticos que pudessem ser tolerantes à falhas, Kitaev [4] deu início a uma busca pela computação quântica topológica (CQT), que seria inerentemente protegida contra ruídos locais e executaria códigos universais sem grandes

custos.

Para executar a computação de maneira topológica, era necessário a utilização de anyons (partículas em 2D que possuem uma estatística de troca “qualquer”), sendo um dos primeiros candidatos viáveis proposto também pelos estudos de Kitaev [5], com um modelo de excitações em matéria condensada que possuem características semelhantes a férmions de majorana, modelo de uma cadeia unidimensional com solução exata que elevou a busca pela CQT a um dos principais problemas na física.

Dado então a importância da não localidade em protocolos de informação quântica, nessa dissertação investigamos a não localidade em sistemas de férmions de majorana. Sendo o principal objetivo identificar emaranhamentos em configurações distintas de cadeias de Kitaev, a fim de discutir a viabilidade desses sistemas em protocolos reais.

No capítulo 2, discutimos alguns fundamentos de mecânica quântica, além de emaranhamento e algumas de suas propriedades.

Já no capítulo 3, é discutido a não localidade, suas propriedades e consequências.

Em seguida, no capítulo 4 visitamos o modelo de Kitaev, discutindo as principais propriedades do modelo e das excitações, investigando as propriedades que as fazem principais candidatos à computação quântica topológica.

Por fim, no capítulo 5, discutimos a não localidade dos férmions de Majorana em uma configuração mínima de 6 majoranas que configuram 2 qubits lógicos. Vemos condições para que se detecte emaranhamento nesse sistema e calculamos a entropia de von Neumann para as configurações consideradas.

Capítulo 2

MECÂNICA QUÂNTICA

2.1 Postulados da mecânica quântica

Um dos pilares da física moderna, a mecânica quântica, ao lado da relatividade geral, vem sendo verificada em laboratórios ao longo do último século. Tendo sua origem com Planck, em seu estudo sobre a radiação de corpo negro, no qual se considera que a energia deveria ser dividida em pequenos pacotes, intitulados quanta. Essa ideia, utilizada posteriormente por Einstein na quantização da radiação que levou à explicação do efeito fotoelétrico.

Apesar de a compreensão moderna da mecânica quântica ser um pouco diferente dessa que hoje chamamos de “antiga mecânica quântica”, foi exatamente essa ideia de dividir quantidades físicas em pacotes discretos que nos trouxe a “revolução quântica”.

Dentre todas as coisas intrigantes que a mecânica quântica trouxe à física moderna, é exatamente sua simplicidade a que mais surpreende, sendo capaz de explicar uma quantidade incontável de fenômenos e efeitos derivados a partir de poucos postulados. Com a intenção de ter uma rápida visão de tudo isso, introduziremos a seguir os postulados da mecânica quântica em uma visão um pouco mais moderna, introduzindo estados, observáveis e outros conceitos de modo que a ideia de quanta de informação possa ser derivada.

Uma das consequências desse pensamento é a elevação do emaranhamento de uma simples consequência ou estranheza a um dos pontos centrais da teoria. A abordagem difere um pouco daquela encontrada em livros texto tradicionais [6, 7], que consideram ondas em caixas, ou dinâmica de pacotes de onda, sendo aqui tratada uma visão um pouco mais abstrata, em que se introduz somente os postulados e a matemática associada. Adotaremos, pois, tal abordagem, tendo em vista que os resultados aqui apresentados são completamente gerais, não sendo restritos a um sistema físico experimental específico.

Postulado 1 (Vetores de estado). *Todo sistema físico fechado tem associado a si um espaço vetorial, denominado espaço de estados. Esse espaço é dotado de produto interno e é conhecido como espaço de Hilbert (\mathcal{H}). Um único estado (conhecido como estado puro) do sistema físico em questão é descrito por um vetor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, que possui comprimento unitário e é chamado de vetor de estado. Um ensemble de estados puros, que chamamos de estado misto pode ser descrito por uma matriz densidade ρ , que é um operador agindo sobre esse espaço.*

Estado puro

Um estado puro é descrito, na notação de Dirac, como $|\psi\rangle$ (lê-se ket psi). Esse objeto é um vetor de norma unitária, sendo o exemplo mais simples um sistema de dois níveis, ao qual nos referenciaremos daqui por diante como qubit. Uma diferença fundamental entre a mecânica quântica e clássica é que o sistema quântico pode existir em uma superposição, tal como $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Em geral, se um grau de liberdade quântico possui d valores possíveis, ele pode ser descrito por $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d v_i |\psi_i\rangle$, em um espaço vetorial $\mathcal{H} \sim \mathbb{C}^d$. Os números complexos $v_i \in \mathbb{C}$ são amplitudes, sobre as quais são impostas a condição de normalização $\sum_i v_i^* v_i = 1$. O conjunto de vetores $\{|\psi_i\rangle\}$ é chamado de base, e pode ser utilizado para expandir qualquer vetor $|\psi\rangle$ como dado anteriormente escolhendo amplitudes apropriadas.

Os kets possuem contrapartes, conhecidas como 'bras' $\langle\phi|$, que são funções lineares sob o espaço vetorial \mathcal{H} , i. e., para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle\phi|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\langle\phi|0\rangle + \beta\alpha\langle\phi|1\rangle. \quad (2.1)$$

Esses objetos em si formam uma base de um espaço vetorial diferente, \mathcal{H}' , que é o adjunto de \mathcal{H} . Podemos notar que a contraparte do vetor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ é $\langle\phi| \in \mathcal{H}'$. Isso nos permite dizer que as bases são ortonormais se $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij} \forall i, j \in [1, d]$.

Uma função útil associada ao espaço \mathbb{C}^d é o produto interno, que é uma função $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\langle\psi|\phi\rangle = \left(\sum_i \psi_i |\psi\rangle_i, \sum_j \phi_j |\phi\rangle_j \right) = \sum_{i=1}^d \psi_i^* \phi_i, \quad (2.2)$$

e a condição de normalização pode ser denotada por $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Por último, ressaltamos

que os estados $|\psi\rangle$ e $e^{i\theta}|\psi\rangle$ são estados fisicamente indistinguíveis, e a quantidade $\theta \in \mathbb{R}$ é chamada de fase global, que não tem efeito na realidade física.

Estados mistos

O vetor de estado não é a forma mais geral de se descrever um estado quântico. A abordagem de operador densidade nos permite uma descrição de um ensemble de estados puros, que pode ser utilizado para descrever um sistema físico cujo estado não é completamente conhecido. O operador densidade de um ensemble de estados $\{|\psi\rangle_i\}$, cada um ocorrendo com uma probabilidade p_i , é dado por

$$\rho \equiv p_i |\psi\rangle_i \langle\psi|_i \quad (2.3)$$

e com isso a mecânica quântica pode ser completamente formulada em termos de operadores densidade, sendo o estado puro um caso particular.

É possível interpretar o operador densidade como descrevendo alguma suposta máquina que cria o estado $|\psi\rangle_i$ com uma probabilidade p_i . Fisicamente, o estado seria algum dos $\{|\psi\rangle_i\}$, porém com uma ignorância do observador com relação a qual i . Entretanto, essa interpretação, apesar de auxiliar na abstração, não é completamente correta, pois, de acordo com um teorema descoberto por Schrödinger, que pode ser encontrado em [3], existe um número infinito de ensembles que podem dar origem ao mesmo operador densidade.

Postulado 2 (Medidas). *A medida de uma quantidade física em um dado sistema quântico é representada por um conjunto de operadores de medida $\{M_i\}$ que age sob o espaço de estados em questão. Esse conjunto de operadores corresponde a uma única quantidade física, onde o índice i diz respeito aos possíveis resultados da medida. Quando uma medida é feita sob um estado misto ρ , o estado do sistema se torna*

$$\rho_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}(M_i^\dagger M_i \rho)} \quad (2.4)$$

com probabilidade $p_i = \text{Tr} M_i^\dagger M_i \rho$. Os operadores de medida satisfazem a condição $\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{I}$, o que leva que a soma das probabilidades é igual a 1.

Para medida sob um estado puro $|\psi\rangle$, o estado pós medida se reduz a

$$|\psi\rangle_i = \frac{M_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}} \quad (2.5)$$

com probabilidade $p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$.

Uma das diferenças mais marcantes entre mecânica clássica e quântica é que o observador assume papel central na descrição da natureza quando estamos tratando de sistemas quânticos. Na mecânica clássica, é assumido que o estado físico do sistema é definido e independente de estar sendo medido ou não. Entretanto, a mecânica quântica possui uma descrição definida de como observações afetam um sistema físico.

Medidas projetivas

Nessa dissertação, trabalharemos em sua maior parte com a forma mais simples de medida, que é a medida de von Neumann (projetiva). Nesse caso, o observável \mathcal{O} possui decomposição espectral

$$\mathcal{O} = \sum_i o_i P_i, \quad (2.6)$$

onde $P_i = |o_i\rangle\langle o_i|$ é o projetor sobre o espaço, com autovalor o_i . Os autovalores $\{o_i\}$ são os possíveis resultados das medidas. Se o sistema se encontra inicialmente no estado puro $|\psi\rangle$, então, após obter o resultado da medida o_i , o estado é projetado sobre

$$\frac{P_i |\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}$$

onde $p_i = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$ é a probabilidade desse resultado ocorrer.

Toda quantidade física possui um operador hermitiano associado, garantindo assim que todos os autovalores são reais [6]. A recíproca não é verdadeira, existem operadores hermitianos que não possuem observável associado (regras de superseleção ditam o que pode ou não ser medido).

No que tange aos observáveis, um aspecto muito importante na mecânica quântica (e fundamental nesse trabalho) é a existência de medidas incompatíveis. Isso significa que existem observáveis que nenhum estado pode diagonalizar simultaneamente. Esse conceito pode ser matematizado por meio do comutador: se $[A, B] = AB - BA = 0$, então é possível diagonalizar simultaneamente A e B, caso contrário, não. E isso traz o princípio da incerteza. Se a 'incerteza' em observáveis (dado uma medida em um conjunto infinito

de sistemas igualmente preparados) é $(\Delta\alpha)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ e $(\Delta\beta)^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$, então

$$\Delta\alpha\Delta\beta \geq \frac{1}{2} | \langle [A, B] \rangle |.$$

A implicação disso é que o sistema não pode possuir simultaneamente valores de observáveis que não comutam. Geralmente é dito que isso diz respeito a um limite fundamental à precisão em que podemos descrever o mundo físico: um aumento no conhecimento sobre resultados de A decai o conhecimento sobre B. Entretanto, a afirmação correta não é que não podemos observar esses valores com precisão arbitrária e sim que o valor preciso desses observáveis simplesmente não existe!

Postulado 3 (Evolução temporal). *A evolução temporal de um sistema físico fechado, descrito no tempo t_1 pela matriz densidade $\rho(t_1)$ é uma transformação que depende apenas dos tempos t_1 e t_2 , i.e., o estado do sistema em t_2 dado por ρ_2 , é*

$$\rho(t_2) = U(t_1, t_2)\rho(t_1)U(t_1, t_2)^\dagger. \quad (2.7)$$

Para um estado puro $|\psi\rangle(t_1)$, isso se reduz a

$$|\psi\rangle(t_2) = U(t_1, t_2)|\psi(t_1)\rangle. \quad (2.8)$$

Equação de Schrödinger

No caso de uma evolução temporal unitária contínua, esse postulado pode ser um pouco diferente, na forma de equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H\psi, \quad (2.9)$$

onde H é um operador hermitiano e \hbar é a constante de Planck. Essa equação possui solução simples no caso em que H não depende explicitamente do tempo, sendo $U(t_1, t_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)H}$. Temos assim uma correspondência 1 para 1 entre uma evolução temporal contínua e uma evolução onde o estado é descrito apenas pelos tempos t_1 e t_2 .

A quantidade H é chamada de Hamiltoniano, o qual efetivamente fornece uma descrição completa do sistema em consideração. Sua forma não é prescrita pela mecânica quântica sozinha; em sua formulação a mecânica quântica define apenas o cenário no

qual os fenômenos ocorrem, deixando os detalhes das interações físicas para teorias como óptica quântica, eletrodinâmica quântica, etc. Para alguns exemplos de construção de hamiltonianas [8, 9].

Operações quânticas

Evoluções unitárias podem ser combinadas com medidas, na forma de operações quânticas. Essas são transformações na matriz densidade $\rho \rightarrow \rho' = \epsilon(\rho)$ que pode ser escrita na representação de um operador soma

$$\epsilon(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad (2.10)$$

onde E_k é um operador linear, e $\sum_k E_k^\dagger E_k \leq \mathbb{I}$ (a desigualdade significa que alguma informação sobre o sistema foi obtido através da medição).

Essa forma é geralmente utilizada para modelar decoerência (que é essencialmente a perda de informação sobre o quântico) quando o sistema interage com o ambiente. Nesse contexto, o sistema em consideração é chamado de aberto, enquanto a evolução unitária é válida para sistemas fechados.

Postulado 4 (Partículas distinguíveis). *Em um sistema composto de duas ou mais partículas, o estado de cada parte será representado por um vetor em um espaço apropriado; o estado global do sistema pertence a um espaço vetorial maior, dado pelo produto tensorial dos espaços individuais. Normalmente, se um sistema consiste de n sistemas menores, onde o sistema j é preparado no estado $|\psi_{ij}\rangle \in \mathcal{H}_j$ ($j \in [1, n]$), o estado global é*

$$|\psi_{i1}\rangle \otimes |\psi_{i2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{in}\rangle,$$

que reside no espaço vetorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.

Partículas distinguíveis e produto tensorial

O produto tensorial é uma forma de juntar espaços vetoriais em um espaço maior, no qual podemos compor, além de vetores de estado, operadores. Se A for um operador que age sobre $|v_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|v_2\rangle \in \mathcal{H}_2$, então o efeito global é que o operador $A \otimes B$ age sobre $|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

É importante destacar que, dado um estado misto de um sistema composto, podemos encontrar uma matriz densidade reduzida, que nos apresenta a melhor descrição possível de um subsistema separado. Isso é feito por meio do traço parcial.

Supondo que possuímos uma matriz densidade ρ_{AB} com dois subsistemas, a melhor informação que o subsistema A pode ter do sistema global é dado por

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB})$$

onde Tr_B denota o traço parcial sobre o subsistema B. A matriz resultante é por vezes chamada matriz densidade reduzida de A.

Como um inverso ao traço parcial, podemos sempre “purificar” um estado misto, i.e., podemos encontrar um estado puro em um espaço maior, tal que, quando o espaço vetorial extra é removido (por operação de traço), obtemos o estado inicial misto.

Postulado 5 (Partículas indistinguíveis). *Um sistema composto de várias partículas indistinguíveis deve ser um auto-estado de todos os operadores de permutação possíveis, e deve ser completamente simétrico ou antissimétrico sob essas operações. Essas são chamadas estatísticas fermiônicas e bosônicas, respectivamente. Isso dá origem ao princípio da exclusão de Pauli: não é possível a existência de dois férmions no mesmo estado quântico.*

Partículas indistinguíveis e simetria de permutação

No mundo clássico, é, em princípio possível sempre distinguir entre partículas, mesmo que seja computacionalmente impossível de armazenar toda essa informação. Podemos, por exemplo, enumerar as bolinhas colocadas em uma caixa, e com isso, é sempre possível dizer qual bolinha está em cada posição. Por outro lado, no mundo quântico, partículas podem ser perfeitamente indistinguíveis, sendo impossível caracterizar essas partículas por qualquer operação de medida imaginável. Isso leva a uma impossibilidade do tratamento via produto tensorial, a não ser que limitemos o estado a um subespaço particular do espaço composto.

Consideraremos aqui um conjunto de N partículas localizadas nas posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$. Vamos definir um operador de permutação P_{ij} , que age da seguinte forma,

$$P_{ij}\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N) = \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N) \quad (2.11)$$

ou seja, ele troca as posições das partículas i e j .

Para partículas indistinguíveis, vamos impor que a função de onda do estado global seja um auto-estado desse operador, caso contrário, poderíamos utilizar esse operador para distinguir entre as partículas. Como duas aplicações sucessivas desse operador deve retornar o estado à sua configuração inicial, $P_{ij}P_{ij}|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle = |\psi\rangle$, e, portanto $\lambda = \pm 1$. Esses autovalores correspondem a funções de onda completamente simétricas ($\lambda = +1$) onde as partículas que correspondem a esses estados são chamadas de bósons, devido a Satgendranath Bose, e também a estados antissimétricos ($\lambda = -1$), cujas partículas são chamadas férmions, nome oriundo de Enrico Fermi.

Sistemas de muitos férmions possuem, então, uma função de onda da forma

$$\psi_F(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{P \in S_N} \text{sign}(P) P[\psi(\vec{r}_1) \dots \psi(\vec{r}_N)] \quad (2.12)$$

onde as funções $\{\psi(\vec{r}_i)\}$ são funções de onda de uma partícula. O operador P é um elemento do grupo de permutação S_N , e a soma é feita sob todos os operadores. A função $\text{sign}(P)$ retorna $+1$ para um número par de permutações e -1 para um número ímpar.

As funções bosônicas são dadas por

$$\psi_B(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sqrt{\frac{\prod_{k=1}^{\infty} n_k}{N!}} \sum_{P \in S_N} P[\psi(\vec{r}_1) \dots \psi(\vec{r}_N)] \quad (2.13)$$

Uma descrição um pouco mais conveniente desses estados é por meio da chamada segunda quantização. Para isso, definimos operadores de criação e aniquilação, denotados por c^\dagger e c respectivamente, que desempenham papel de adicionar ou remover uma partícula do sistema. Assim, substituímos a notação anterior por meio da utilização da representação via número de ocupação.

Nessa linguagem, o estado de N férmions se torna

$$|n_1, \dots, n_N\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} (c_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle, \quad (2.14)$$

onde n_i é o número de ocupação do sítio i (ou seja, o número de partículas nesse sítio). Naturalmente, pela definição anterior, para férmions tal valor pode apenas ser 0

ou 1. Para bósons, o estado equivalente é dado por

$$|n_1, \dots, n_N\rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(b_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}} |0\rangle. \quad (2.15)$$

Da definição desses operadores, segue que devem satisfazer as seguintes relações de comutação e anti comutação

$$\begin{aligned} \text{férmions} : \{c_i, c_j^\dagger\} &= \delta_{ij}, \\ \text{bósons} : [b_k, b_l^\dagger] &= \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

em ambos casos, a ocupação do sítio é dada pelo operador número $n_k = c_k^\dagger c_k$ (ou $n_k = b_k^\dagger b_k$)

2.2 Emaranhamento

Definir em palavras o emaranhamento é difícil, porém, ao longo do trabalho, algumas ideias serão levantadas, em uma tentativa de descrever nossa interpretação do fenômeno. O emaranhamento é uma propriedade de sistemas **compostos**, ou seja, em sistemas que possuem duas ou mais partes “separadas”. Podemos, então, encontrar emaranhamento entre fótons, elétrons, átomos, partículas que compõem átomos e em alguns casos, apesar de um problema em aberto, é possível definir emaranhamento entre diferentes graus de liberdade de uma mesma partícula (spin e momento em um átomo, basicamente a essência do experimento de Stern-Gerlach).

2.2.1 Fundamentos do Emaranhamento

O caso mais simples, e mais rico em aplicações práticas nos dias de hoje é o emaranhamento de um sistema bipartite, ou seja, aquele com dois componentes. Por razões históricas, vamos definir cada parte como Alice e Bob (A e B). Se Alice consegue descrever seu sistema por um estado puro $|a\rangle$ e Bob seu sistema por outro estado puro $|b\rangle$, então, o sistema composto pela soma das partes A e B, pode ser descrito pelo estado também puro $|a\rangle \otimes |b\rangle = |ab\rangle$, onde \otimes representa o produto tensorial entre a e b.

O princípio de superposição diz que o espaço de estados para o sistema composto é dado pelo produto tensorial dos espaços dos subsistemas. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Matematicamente, podemos definir bases $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$ dos subsistemas e escrever uma base para o sistema

composto como $|a_i b_i\rangle$. Com isso vemos de imediato que a dimensão do espaço composto é o produto dos espaços dos subsistemas.

Utilizando tal base, podemos definir o emaranhamento. Seja \mathcal{H} o espaço vetorial de um sistema composto, $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, um vetor $|\psi\rangle$ é então separável se $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$. Caso não seja possível realizar tal decomposição, o estado $|\psi\rangle$ é dito emaranhado.

A existência de estados puros que preenchem a condição de emaranhamento não é diretamente óbvia, o estado $|\psi\rangle$ pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_{ij} |a_i b_j\rangle \quad (2.17)$$

onde α_{ij} é um parâmetro complexo tal que $\sum |\alpha_{ij}|^2 = 1$ e por simplicidade, utilizamos a notação $|a_i b_j\rangle = |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$. Portanto, queremos encontrar um estado que pode ser escrito como combinação linear de produtos tensoriais dos estados de base das partes, porém que não pode ser escrito como produto tensorial de dois estados das respectivas partes. O espaço de Hilbert \mathbb{C}^4 é um produto tensorial de espaços \mathbb{C}^2 e \mathbb{C}^2 . Vamos considerar dois estados $|\psi_1\rangle = \alpha_1 |0\rangle + \alpha_2 |1\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \beta_1 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle$ em \mathbb{C}^2 , e um estado $|\psi\rangle$ em \mathbb{C}^4 ,

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \alpha_1 \beta_1 |00\rangle + \alpha_1 \beta_2 |01\rangle + \alpha_2 \beta_1 |10\rangle + \alpha_2 \beta_2 |11\rangle. \quad (2.18)$$

Se o estado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathbb{C}^4$ fosse um estado produto, então teríamos que $\alpha_1 \beta_2 = 0$ e, assim, ou $\alpha_1 = 0$ ou $\beta_2 = 0$, portanto $\alpha_1 \beta_1$ ou $\alpha_2 \beta_2$ desapareceria, o que leva a uma contradição, já que definimos inicialmente o estado $|\Phi^+\rangle$ como um estado produto. A partir da definição de estado emaranhado, temos que $|\Phi^+\rangle$ é emaranhado, e assim foi mostrado que o emaranhamento existe.

O estado $|\Phi^+\rangle$ é um estado de Bell. Existem quatro estados de Bell que são emaranhados. São mutualmente ortogonais e formam uma base do espaço \mathbb{C}^4 .

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle) \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (2.19)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |11\rangle) \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{2}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Teorema 1 (Decomposição de Schmidt). *Para um estado bipartido geral $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$,*

onde $\dim \mathcal{H}_{A,B} = d_{A,B}$ existe uma decomposição da forma

$$|\Psi\rangle = \sum_i^d \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad (2.20)$$

onde $d = \min(d_A, d_B)$. Os coeficientes positivos λ_i são chamados coeficientes de Schmidt, e o número de coeficientes não nulos é conhecido como rank de Schmidt.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [?, 3, 10].

A decomposição de Schmidt é uma ferramenta extremamente poderosa no estudo da mecânica quântica de muitos corpos, nos dando diversos resultados importantes. Fica agora claro que tal decomposição $(|\psi\rangle_A |\phi\rangle_B + |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B)/\sqrt{2}$ dada acima não pode ser escrita como um estado produto: seu rank de Schmidt é $d = 2$. É fácil perceber que todo estado produto possui rank $d = 1$; o rank de Schmidt é claramente um indicador de emaranhamento, pois, vemos diretamente da decomposição que indicador de emaranhamento depende somente do coeficiente, já que estes são invariantes sob uma mudança de base (equivalente a operações locais unitárias). Temos também que as matrizes densidade reduzidas dos subsistemas A e B possuem autovalores iguais, e são dadas por $\rho_A = \sum_{i=1}^d \lambda_i |f_i\rangle \langle f_i|$ e $\rho_B = \sum_{i=1}^d \lambda_i |g_i\rangle \langle g_i|$.

A definição de estado separável pode ser feita de maneira mais rigorosa considerando estados mistos (ao invés de apenas puros), o que permite uma incerteza clássica.

Definição 1 (Estados classicamente correlacionados [3]). *Seja ρ uma matriz densidade de um sistema bipartite $A \otimes B$. Se o estado puder ser escrito como*

$$\rho = \sum_i c_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (2.21)$$

onde $\sum_i c_i = 1$ e $\rho_i^{A,B}$ são operadores densidade sob $\mathcal{H}_{A,B}$, então o estado é dito classicamente correlacionado, ou, separável.

A generalização da definição acima para sistema com mais partes é trivial [3];

O nome “classicamente correlacionado” é facilmente justificado, pois as correlações desses estados, podem ser facilmente simuladas pela criação de um estado através do seguinte procedimento. Vamos supor que Alice e Bob estão em laboratórios distantes, com seus dispositivos de preparação de estados. Cada dispositivo prepara um sistema físico em um estado quântico específico, que depende de alguma entrada i . Agora vamos

supor que em algum lugar exista um gerador aleatório, com saídas j com probabilidades p_j . Esse número é comunicado a Alice e Bob, que então preparam seus respectivos estados. Se interpretarmos o operador densidade como aquele que descreve nossa ignorância sobre o estado assim como sua realidade física, então, podemos ver que a descrição geral desse estado (considerando que não conhecemos o resultado do gerador de números aleatórios) é dado pela distribuição de probabilidade acima.

Podemos também ver que os valores esperados de dois observáveis \mathcal{O}_A e \mathcal{O}_B sob os respectivos subsistemas é dado por:

$$\langle \mathcal{O}_A \mathcal{O}_B \rangle = \text{tr} [\rho \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B] = \sum_i p_i \text{tr} [\rho_i^A \mathcal{O}_A] \text{tr} [\rho_i^B \mathcal{O}_B]. \quad (2.22)$$

Assim, os resultados e as correlações dependem apenas do número gerado aleatoriamente, que pode ser um dispositivo puramente clássico. Note que esse estado não precisa ser criado utilizando um dispositivo clássico, porém, suas propriedades estatísticas podem ser simuladas por um sistema que é puramente clássico. O estado maximamente correlacionado, com maior correlação clássica possível é dado por [11]:

$$\rho = \sum_{ij} a_{ij} |ii\rangle \langle jj|. \quad (2.23)$$

2.2.2 Critérios de separabilidade

Decidir quando um estado quântico (representado por um operador densidade ρ) é separável ou não é, em geral, um grande problema matemático [12, 13]. De fato, já foi mostrado que o problema de separabilidade é intratável computacionalmente, ou, mais especificamente, é um problema que pertence a uma classe de complexidade NP, tornando-o assim tão difícil quanto alguns dos problemas mais importantes na teoria da complexidade [3]. À primeira vista, pode parecer um pouco desanimador tal resultado, porém, essa intratabilidade é que dá ao emaranhamento parte de seu misticismo e seu poder computacional.

Embora não iremos fazer uso de critérios de separabilidade nessa dissertação, vamos introduzir dois dos mais importantes critérios utilizados em problemas práticos na teoria da informação quântica, sendo eles, o critério de Peres-Horodecki e a definição de testemunha de emaranhamento.

Definição 2 (Critério de Peres-Horodecki [14, 15]). *A transposta parcial de uma matriz densidade de um sistema multipartido é dada tomando a transposta de somente um subsistema. Dado uma matriz densidade bipartida $\rho = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes \rho_k^B$ de um estado compartilhado por Alice e Bob, a transposta parcial com respeito ao subsistema de Alice é dada por*

$$\rho^{TA} = \sum_k p_k (\rho_k^A)^T \otimes \rho_k^B = \sum_k p_k \tilde{\rho}_k^A \otimes \rho_k^B. \quad (2.24)$$

Estados separáveis possuem transposta parcial positiva ($\rho^{TA} \geq 0$) pois a transposta parcial de uma matriz densidade deve ser uma matriz densidade válida. Assim, a existência da transposição parcial positiva (PPT) é condição necessária para o estado ser separável. Em alguns casos, essa condição é também suficiente. Isso é verdade para espaços $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ ou $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^3$

Definição 3 (Testemunha de emaranhamento). *Uma matriz densidade ρ é emaranhada se, e somente se, existe um operador hermitiano W tal que*

$$\text{tr}(W\rho) < 0 \quad (2.25)$$

onde $\text{tr}(W_s) \geq 0$ para todo estado separável ρ_s .

2.3 Quantificação do emaranhamento

Vimos que a mecânica quântica permite a existência de estados não separáveis, e também critérios de separabilidade que dizem se um estado é emaranhado ou não. Entretanto, para além da simples não separabilidade, a própria decomposição de Schmidt nos dá uma ideia de que estados podem conter mais emaranhamento que outros.

Se o estado geral de um sistema é tal que dá origem a matrizes densidade reduzida de ignorância máxima (estados maximamente mistos), então esses estados podem ser considerados como tendo a quantidade máxima de emaranhamento. Os estados maximamente emaranhados são aqueles cujos coeficientes de Schmidt são todos iguais a $1/d$, com d sendo a dimensão do espaço de Hilbert de cada subsistema.

Definição 4 (Estado puro maximamente emaranhado). *Um estado $|\psi\rangle \in \mathcal{C}^d \otimes \mathcal{C}^d$ é maximamente emaranhado se as matrizes densidade reduzidas são proporcionais à identidade, i.e. o estado pode ser escrito como*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{d} \sum_i^d |ii\rangle$$

Como oposto, estados puros separáveis possuem matrizes densidade reduzidas puras.

Quando lidamos com estados mistos, a situação se complica um pouco, e, como veremos, não existe sequer uma medida única para emaranhamento de estados mistos. Mas, visto as dificuldades que podem surgir quanto à quantificação do emaranhamento, vale o questionamento quanto aos objetivos em se quantificar o emaranhamento, e, uma resposta direta para esse questionamento advém do início da teoria da informação quântica, quando Feynman, Deutsch e outros [?, 16] levantaram a hipótese de o emaranhamento ser um recurso que permite a solução de problemas não clássicos.

Para se quantificar o emaranhamento entre duas partes, primeiramente precisamos entender como podemos interagir com essas partes, e para isso vamos introduzir o conceito de LOCC.

Uma manipulação feita por alguma das partes em seu próprio sistema é chamada de operação local (“nome vem da possibilidade de separar as partes espacialmente, mas deixamos claro que essa separação não é necessária”). Através de “canais clássicos” de comunicação, dois observadores, Alice e Bob, em seus respectivos laboratórios A e B, podem combinar uma sequência de operações locais, que pode ser uma sequência de testes em uma das partes e de manipulações na outra parte, de forma que essa manipulação dependa do resultado dos testes anteriores; qualquer operação que seja que não envolva um “canal quântico”, ou seja, uma interação direta entre as partes do sistema ou a interação de ambas as partes com um sistema externo. Processos assim são chamados de operações locais com comunicação clássica “LOCC”.

Apesar de LOCC poder gerar correlações, é uma premissa que tais operações não podem gerar emaranhamento. Sendo então as correlações explicadas por descrições clássicas;

A operação quântica mais geral é o mapa probabilístico

$$\rho = \frac{\Lambda(\rho)}{\text{Tr}\Lambda(\rho)},$$

tal que o traço não aumenta, e o mapa é completamente positivo. Isto é

$$\Lambda(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^\dagger \tag{2.26}$$

onde os operadores $\{V_i\}$ são chamados operadores de Krauss. Essa operação ocorre com probabilidade igual a $\text{Tr}\Lambda(\rho)$. Se o mapa preserva o traço, então a probabilidade é igual a 1 e $\sum_i V_i^\dagger V_i = \mathbb{I}$. Nessa situação, o mapa é chamado de canal quântico.

Com esse formalismo, operações locais podem ser vistas como tendo a forma $\Lambda(\rho) = \lambda_A \otimes \lambda_B$, i.e. a operação é completamente separável. Com isso, podemos definir operações separáveis como:

Definição 5 (Operações separáveis).

$$\lambda(\rho) = \sum_i (A_i \otimes B_i) \rho (A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger) \quad (2.27)$$

onde $\sum_i A_i^\dagger A_i \otimes B_i^\dagger B_i = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$

Podemos discutir também a questão sobre até que ponto um estado puro pode ser manipulado, a qual foi discutida inicialmente por Popescu [?], que tentou encontrar estratégias para a conversão de estados via LOCC. Posteriormente, Nielsen [?] mostrou que transformar um estado em outro está diretamente relacionado aos coeficientes de Schmidt desses estados, concluindo que estados originais são mais mistos que os subsistemas do estado desejado, i.e. o estado original é mais emaranhado. Com isso, temos uma compreensão do que significa um estado ser mais emaranhado que outro: um estado mais emaranhado tem mais poder, no sentido de capacidade de conversão em um número maior de estados.

É claro que em situações físicas realistas (laboratório), usualmente estamos lidando com estados mistos, e, nesse cenário, o emaranhamento pode ser considerado como “ruidoso”, de forma que passamos a nos perguntar se o estado pode ser convertido em uma forma de emaranhamento que já entendemos melhor, ou que seja mais útil. Em 1996, Bennet et. al [17] mostrou que de fato é possível destilar emaranhamento puro a partir de estados ruidosos. Mais ou menos na mesma época, Peter Shor e Andrew Steane desenvolveram a correção de erros, com objetivo de proteger a informação quântica da decoerência (que tem o efeito de transformar estados puros em estados mistos) [18,19]. Esse processo foi relacionado posteriormente com o processo de destilação do emaranhamento [20].

O emaranhamento ruidoso pode sempre ser destilado? Em 1997, a família Horodecki mostrou [21] que todos os estados de dois qubits são destiláveis, entretanto, em 1998, a mesma família encontrou estados emaranhados que não podem ser destilados [22]. Com

isso, vemos que há dois tipos de emaranhamento: o que pode e o que não pode ser destilado.

Estados não destiláveis são ditos contendo emaranhamento preso, e dão origem a inúmeras questões acerca da natureza fundamental do emaranhamento, mas, até que ponto são úteis esses estados? Luis Mesanes mostrou que todos os estados emaranhados são úteis, e com isso, assim como sugerido pela família Horodecki, podemos entender estados emaranhados não apenas como inseparáveis, mas sim como aqueles estados capazes de realizar alguma tarefa não clássica.

Podemos então utilizar a ideia de destilar o emaranhamento para tentar comparar estados no que diz respeito ao emaranhamento.

Definição 6 (Emaranhamento destilável, E_d). *Considere uma sequência de operações LOCC $\{\Lambda_n\}$ agindo sobre n pares de entrada em um estado coletivo $\rho^{\otimes n}$, cada um em um espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, que mapeia esses estados em estados $\Lambda(\rho^{\otimes n}) \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes m} \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes m}$.*

Vamos denotar essa operação por \mathbb{P} e chama-la de protocolo. Se o estado final se aproximar de m cópias do estado singlete $|\psi\rangle^-$, ou seja, se a fidelidade

$$F\left(|\psi\rangle^{\otimes m}, \Lambda(\rho^{\otimes n})\right) \equiv \langle \psi^{-\otimes m} | \Lambda(\rho^{\otimes n}) | \psi^{-\otimes m} \rangle \rightarrow 1$$

no limite em que $n \rightarrow \infty$, então chamamos \mathbb{P} de protocolo de destilação. O emaranhamento destilável é definido como o supremo sobre todos esses protocolos de 'criação' de estados singletos destilados no limite em que $n \rightarrow \infty$.

$$E_D = (\rho) \text{Sup}_{\mathbb{P}} D_P \quad \text{onde} \quad D_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Qualitativamente falando, podemos considerar essa quantidade como medindo o número de estados singletos que podem ser “extraídos” de um determinado estado por número de cópias desse estado. Tudo isso no limite em que temos infinitas cópias.

De maneira inversa, podemos pensar na quantidade de emaranhamento necessária para “criar” um estado arbitrário (em termos de estados singletos). Esse processo é chamado de custo de emaranhamento.

Definição 7. *Dado m cópias do estado singlete $|\psi\rangle^{\otimes m}$, se queremos criar n cópias de um estado ρ , devemos exigir que a fidelidade no processo $F\left(\Lambda(|\psi\rangle^{\otimes m}), \rho^{\otimes n}\right) \rightarrow 1$ quando tomado o limite de $n \rightarrow \infty$. O custo é então definido como*

$$E_C(\rho) = \text{Sup}_{\mathbb{P}} C_P \quad \text{onde} \quad C_P(\rho) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Podemos entender o custo de emaranhamento de um estado genérico ρ como o número de bits quânticos que Alice precisa enviar a Bob para que ele faça uma cópia desse mesmo estado [?].

O procedimento de destilar emaranhamento de um estado ruidoso e criar um estado geral a partir de estados maximamente emaranhado é definido de maneira dual, mas são eles duas faces de um mesmo princípio? Para estados bipartidos puros, os processos são reversíveis e $E_C = E_D$. Essa reversibilidade tem uma analogia interessante com o ciclo de Carnot [?], que fica ainda mais convincente quando se reformula a mecânica quântica em termos da informação acessível, e o poder de ser realizar uma tarefa não clássica.

Entretanto, de um modo geral, esses processos não são reversíveis, e a analogia com a termodinâmica se torna pouco rigorosa, o que se deve à existência de estados com emaranhamento preso. Esses estados requerem emaranhamento para sua criação, mas nenhum emaranhamento pode ser subsequentemente destilado. Há aqui uma irreversibilidade fundamental, sendo sua consequência mais profunda a ausência de uma medida única de emaranhamento [23, 24]. Dentro da analogia termodinâmica, estados com emaranhamento preso podem ser considerados como banhos térmicos [25]: É necessária uma energia para se criar o banho, mas nenhum trabalho pode ser extraído dele.

Por outro lado, em estados puros bipartidos (onde não existe emaranhamento preso) os processos não reversíveis, tendo então que $E_C = E_D$, e a quantidade de emaranhamento deve ser caracterizada por um número único. De fato, isso é verdade [26], usando a analogia com a termodinâmica e considerando o trabalho mecânico extraível, pode-se mostrar que, para um estado bipartido, as duas quantidades são iguais à entropia de von Neumann de um dos subsistemas.

Definição 8 (Entropia de von Neumann). *A entropia de von Neumann de um estado ρ com d níveis é definida como*

$$S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho = -\sum_{i=1}^d \lambda_i \log \lambda_i \quad (2.28)$$

onde $\{\lambda_i\}$ são autovalores de ρ , analogamente à entropia de Shannon de uma distribuição X , $H(X) = -\sum_i p_i \log p_i$.

O logaritmo é tomado na base 2, que leva à interpretação em termos do número de bits ou qubits que podem ser transmitidos utilizando canais clássicos ou quânticos.

A decomposição de Schmidt garante que a entropia de qualquer subsistema de um estado bipartido seja igual. Isso dá origem à definição de ebit como uma quantidade fundamental de emaranhamento: um subsistema de um estado bipartido maximamente emaranhado tem entropia de von Neumann igual a 1 e, portanto, podem ser considerados como unidades “fundamentais” de emaranhamento: um estado com entropia de von Neumann $S(\rho)$ exigiria que $S(\rho)$ singletos fossem compartilhados entre Alice e Bob para sua construção via LOCC.

Medidas axiomáticas

Apesar de se mostrarem simples e com interpretação muito direta, esses quantificadores não são universais, existindo, portanto, uma enorme classe de quantificadores de emaranhamento que não possuem uma interpretação direta. Uma dessas classes é chamada de quantificadores axiomáticos. Qualquer quantidade que se proponha a ser uma medida de emaranhamento precisa obedecer algumas regras, que serão apresentadas a seguir

- Para um estado separável, $E(\rho)$ deve ser igual a zero; (estados separáveis não possuem emaranhamento).
- Operações locais unitárias não devem alterar a quantidade $E(\rho)$, ou seja, $E(\rho) = E(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$.
- O emaranhamento não pode ser criado por operações locais com comunicação clássica, portanto, $E(\Gamma_{LOCC}(\rho)) \leq E(\rho)$; (aumentos nas correlações do sistema via LOCC devem ser de natureza clássica, e, portanto, não podendo gerar emaranhamento);
- Na presença de algumas “cópias” do estado em questão, a medida de emaranhamento deve ser aditiva, $E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho)$.

Diversos quantificadores de emaranhamento são conhecidos na literatura, sendo os que medem a distância entre estados um dos mais conhecidos. Por fugir do escopo do trabalho, nos limitaremos apenas aos apresentados anteriormente, mas enfatizamos que

inúmeros outros existem e são aplicados em distintas situações. Para uma revisão com maiores detalhes dos quantificadores de emaranhamento, o leitor interessado pode recorrer a [27, 28].

2.4 Origem do emaranhamento

Após discutirmos os aspectos matemáticos, é importante introduzir uma noção acerca de como o emaranhamento se manifesta, ou seja, de sua origem física. Uma maneira de se produzir emaranhamento é a partir da interação direta entre dois ou mais sistemas físicos.

Vamos inicialmente considerar um sistema de dois spins, que podem interagir de acordo com o hamiltoniano $\mathcal{H}_{ab} = \lambda(\sigma_z \otimes \sigma_z)$ onde λ é uma constante de acoplamento, geralmente relacionada à interação. Vamos supor inicialmente um estado de dois spins mais geral possível, ou seja

$$|\Psi(t_0)\rangle = |+\rangle_x |+\rangle_x = \frac{1}{2}(|++\rangle + |+-\rangle + |-+\rangle + |--\rangle), \quad (2.29)$$

vamos considerar que o hamiltoniano atua por um período de tempo $t = \frac{\pi\hbar}{4\lambda}$. Assim, o operador de evolução temporal é

$$U_{ab} = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\sigma_z \otimes \sigma_z\right). \quad (2.30)$$

Sendo assim

$$|\Psi(t)\rangle = U_{ab}|\Psi(t_0)\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{-i\pi/4}|++\rangle + e^{i\pi/4}|+-\rangle + e^{i\pi/4}|-+\rangle + e^{-i\pi/4} |--\rangle\right]. \quad (2.31)$$

Após algumas manipulações, podemos reescrever o estado como

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{(1-i)}{2}\left[|+\rangle |+\rangle_x + |-\rangle |-\rangle_x\right] \quad (2.32)$$

e assim vemos que o estado final é emaranhado.

2.5 Teletransporte

Vamos revisar brevemente nessa seção uma das mais interessantes aplicações onde o emaranhamento tem um papel fundamental como “combustível” para o procedimento, o teletransporte quântico.

Vamos imaginar a situação onde Alice deseja enviar a Bob uma mensagem do tipo $|\psi_A\rangle = \alpha |0_A\rangle + \beta |1_A\rangle$, ou fazer com que Bob faça uma copia do estado, $|\psi_B\rangle = \alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle$, porém Alice não conhece as constantes α e β . É permitido a Alice e Bob utilizarem LOCC. Entretanto, Alice pode enviar um estado emaranhado a Bob, e utilizar tal sistema como se segue.

Vamos supor que Alice e Bob dividam um estado emaranhado,

$$|\Psi_{A'B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle), \quad (2.33)$$

onde $|0_{A'}\rangle$ e $|1_{A'}\rangle$ é um outro estado de Alice. Primeiramente, Alice realiza o produto tensorial

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\psi_A\rangle \otimes |\Psi_{A'B}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha |0_A\rangle + \beta |1_A\rangle) \otimes (|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha |0_A\rangle (|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle) + \beta |1_A\rangle (|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle)], \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde os primeiros qubits A e A' pertencem a Alice e B pertence a Bob. Agora, deixemos Alice operar sobre os seus qubits utilizando um operador unitário (porta lógica C-NOT), da seguinte forma

$$U = |0_A0_{A'}\rangle \langle 0_{A'}0_A| + |0_A1_{A'}\rangle \langle 1_{A'}0_A| + |1_A0_{A'}\rangle \langle 1_{A'}1_A| + |0_A0_{A'}\rangle \langle 0_{A'}1_A| \quad (2.35)$$

com isso, ela obtém o seguinte estado

$$|\psi_1\rangle = U |\psi_0\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha |0_A\rangle (|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle) + \beta |1_A\rangle (|1_{A'}0_B\rangle + |0_{A'}1_B\rangle)]. \quad (2.36)$$

Após isso, ela opera sobre o primeiro qubit do estado $|\psi_1\rangle$ outro operador unitário

chamado porta de Hadamard.

$$U_H = |0_A\rangle\langle 0_A| + |0_A\rangle\langle 1_A| + |1_A\rangle\langle 0_A| - |1_A\rangle\langle 1_A|. \quad (2.37)$$

E então ela obtém o estado,

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= U_H |\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{2} [\alpha(|0_A\rangle + |1_A\rangle)(|0_{A'}0_B\rangle + |1_{A'}1_B\rangle) + \beta(|0_A\rangle - |1_A\rangle)(|1_{A'}0_B\rangle + |0_{A'}1_B\rangle)] \\ &= \frac{1}{2} [|0_A0_{A'}\rangle (\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle) + |0_A1_{A'}\rangle (\alpha |1_B\rangle + \beta |0_B\rangle) \\ &\quad + |1_A0_{A'}\rangle (\alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle) + |1_A1_{A'}\rangle (\alpha |1_B\rangle - \beta |0_B\rangle)]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Se Alice realizar uma medida nos qubits que a pertence, A e A', os possíveis resultados então são:

$$\begin{aligned} |0_A0_{A'}\rangle &\rightarrow \alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle, \\ |0_A1_{A'}\rangle &\rightarrow \alpha |1_B\rangle + \beta |0_B\rangle, \\ |1_A0_{A'}\rangle &\rightarrow \alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle, \\ |1_A1_{A'}\rangle &\rightarrow \alpha |1_B\rangle - \beta |0_B\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde o lado esquerdo representa o resultado das medidas de Alice, enquanto o lado direito seria o resultado obtido no lado de Bob.

Dependendo do resultado obtido por Alice, ela pode enviar uma informação via canais clássicos para Bob, e ele manipular seu estado de modo a obter o estado desejado. Por exemplo, se Alice obtiver o resultado $|0_A0_{A'}\rangle$, então Bob não precisa fazer nada. Por outro lado, se ela obtiver o resultado $|0_A1_{A'}\rangle$, então Bob pode aplicar uma operação do tipo $|0_B\rangle\langle 0_B| - |1_B\rangle\langle 0_B|$ de modo que ele obtenha o estado $|\psi_B\rangle = \alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle$. Se Alice obtiver algum dos outros resultados, Bob pode aplicar outras transformações sobre seu sistema de modo a obter o estado desejado. Esse procedimento é então o chamado de teletransporte quântico. Esse resultado já foi obtido experimentalmente diversas vezes [1].

Percebemos que, nesse protocolo, quando chega ao fim, Alice perde o estado $|\psi_A\rangle$. Notamos também que não é possível enviar informação mais rápida que a luz, já que é necessário utilizar um canal de comunicação clássico.

Capítulo 3

NÃO LOCALIDADE

É impossível apreciar a beleza do trabalho de Bell se não voltarmos um pouco mais no tempo e apreciarmos primeiramente o argumento EPR. De fato, uma das maiores causas de confusão a cerca do teorema de Bell se dá no não entendimento do argumento levantado por EPR.

Bell , no primeiro parágrafo do seu trabalho, explica brevemente o argumento EPR, e espera que seus leitores tivessem tido um contato maior com o trabalho de Einstein e entendesse o argumento: que a explicação em mecânica quântica padrão das correlações EPR não é local, mas que as explicações físicas locais dessas correlações particulares são, no entanto, possíveis.

De fato, fenômenos físicos locais devem ser determinísticos, de modo que a busca pela localidade implica, ao menos dentro da discussão levantada por EPR, em uma busca pelo determinismo, sendo, porém, a localidade o objetivo da busca e o determinismo apenas um meio para alcançá-la.

3.1 O argumento EPR

Essa seção terá como base dois trabalhos fundamentais, sendo eles [10, 30]

Devido a uma dificuldade de compreensão acerca do emaranhamento e suas consequências, diversos pesquisadores do início e meados do século passado questionavam até que ponto a mecânica quântica seria uma descrição do comportamento de objetos quânticos, e quais partes seriam apenas um algoritmo matemático capaz de prever resultados em testes.

Dentre eles, um dos principais expoentes era Einstein, que junto de Boris Podolski e Nathan Rosen (EPR), publicaram o trabalho “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”, onde propunham um experimento em que

questionavam a completeza da mecânica quântica.

Segundo EPR, temos duas questões fundamentais para determinar o sucesso de uma teoria física, sendo elas: 1) As previsões que derivam do modelo são precisas, e 2) A descrição dada pela teoria é completa?. Para eles, uma teoria satisfatória deveria responder sim as duas perguntas.

A resposta da primeira pergunta pode ser obtida a partir de verificações experimentais das previsões da teoria. No que diz respeito à segunda pergunta, a situação é um pouco mais delicada, tendo em vista que é preciso primeiramente definir o que significa “completa”.

De acordo com os autores, para que uma teoria seja completa, todo elemento da realidade deve ter uma contraparte na teoria física em questão. E, dentro dessa visão eles definiram o que seria elemento de realidade.

Elemento de realidade: Se, sem perturbarmos o sistema de nenhuma forma, pudermos prever com certeza (i. e. com probabilidade igual a 1) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento da realidade física associado a essa grandeza.

Apesar desse critério ser apenas um dos tantos possíveis para se definir um elemento da realidade, ele nos fornece uma maneira viável de se definir a realidade, e, apesar de não ser uma condição necessária, é ao menos suficiente, sendo compatível tanto com conceitos de toda a física clássica quanto com a mecânica quântica.

O elemento da realidade é então, segundo EPR, qualquer característica física do sistema que garante como este irá responder dada uma configuração de medida específica, o que é justamente um determinismo com respeito à operação de medida específica

Nesse critério, observamos a visão filosófica dos autores, que é carregada até os dias atuais por alguns cientistas, frente ao que se entende por realidade, que hoje chamamos de realismo local. A suposição de realismo assume que as propriedades de um corpo (por exemplo, posição ou momento), possuem uma existência intrínseca, que independe da observação. Quando uma medida é feita sobre o corpo, esta apenas exprime a propriedade que ali já existia. Realismo local seria então a visão onde propriedades físicas estão localmente atribuídas à partícula e a única forma de modificá-las seria intervindo diretamente no sistema físico em questão.

O experimento EPR-Bohm

O experimento inicialmente proposto por EPR envolvia um par de partículas com momento linear total nulo, e caracterizava-se pelas medidas sobre momento e posição dessas partículas. Por tratar-se de uma configuração com variáveis contínuas, por vezes torna-se difícil apreciar todos os detalhes do argumento. Sendo assim, vamos discutir o experimento proposto por Bohm, que é completamente análogo ao experimento EPR, porém, utilizando as medidas de spin.

Vamos considerar um sistema composto por dois qubits com spin total nulo, cujo estado quântico pode ser dado por um estado puro

$$|\psi\rangle = \frac{|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle}{2} \quad (3.1)$$

em que $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são auto-estados de spin na direção \hat{z} ($S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$). Vamos supor que em uma das partículas, que denotaremos por A, seja feita uma medida de um observável arbitrário \mathcal{O} e, em seguida, é feita uma medida desse mesmo observável sob a partícula B.

$$\mathcal{O} = c_0 M_0 + c_1 M_1 = c_0 |v\rangle \langle v| + c_1 |w\rangle \langle w|, \quad (3.2)$$

onde M_0 e M_1 são POVMs e $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ e $\langle v|w\rangle = \delta_{i,j}$. Assim, podemos escrever dois operadores, que são definidos no espaço de estados do sistema composto. Temos que a medição do operador \mathcal{O} no subsistema A é dado pela medição do operador \mathcal{O}^A no sistema composto (de maneira análoga definimos a atuação no subsistema B)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^A &= \mathcal{O} \otimes \mathbf{1} \\ \mathcal{O}^B &= \mathbf{1} \otimes \mathcal{O}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Precisamos agora avaliar as probabilidades de se obter os resultados c_0 e c_1 , e isso pode ser feito de maneira mais direta se reescrevermos nosso estado em termos da base formada pelos autovetores do operador \mathcal{O} . Os Auto-estados de S_z , escritos na base $\{|v\rangle, |w\rangle\}$, utilizando a representação via esfera de Bloch [3] são

$$\begin{aligned}
|0\rangle &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |v\rangle + e^{i\phi} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) |w\rangle \\
|1\rangle &= \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) |v\rangle - e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |w\rangle
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

Realizando uma mudança no estado que tínhamos inicialmente, obtemos

$$|\psi\rangle = \frac{|vw\rangle - |wv\rangle}{2}.$$
(3.5)

Assim, é fácil ver que se efetuarmos uma medida de \mathcal{O}^A , a probabilidade de se obter o resultado c_0 é igual a $1/2$, sendo o estado após essa medida dado por $|\psi\rangle' = |vw\rangle$. Realizando após isto, a medição de \mathcal{O}^B , o resultado c_1 é obtido com probabilidade igual a 1.

Voltando à medida de \mathcal{O}^A no estado 3.1, temos uma probabilidade de $1/2$ de se obter o resultado c_1 . Ao se obter esse resultado, o estado do sistema passaria então a ser $|\psi\rangle' = |wv\rangle$, e, medindo-se \mathcal{O}^B , obteríamos com probabilidade igual a 1 o resultado c_0 .

Os resultados explicitados acima caracterizam uma importante propriedade do estado singlete. Medidas de um mesmo observável em cada uma das partes do sistema composto, sempre terão como resultado uma anti-correlação perfeita.

Supondo agora que as partes A e B são levadas a locais distantes um do outro, com o intuito de que estas não mais possam interagir entre si (visto que a separação espacial funciona como um “isolante” a interações). Sendo assim, qualquer interferência no subsistema A não pode influenciar de maneira nenhuma o subsistema B e vice versa.

Sabendo que o sistema se encontra no estado singlete, é possível determinar, a partir de uma medida de \mathcal{O}^A , o resultado da medição de \mathcal{O}^B com probabilidade igual a 1, sem que qualquer interação seja feita no subsistema B. Da mesma forma, se definirmos um segundo observável \mathcal{P} (que não comuta com \mathcal{O}), e o avaliarmos sob o subsistema B com \mathcal{P}^B , é possível determinar o resultado de uma medida de \mathcal{P}^A com probabilidade igual a 1, mesmo que nenhuma interferência seja feita sobre o subsistema A. Sendo assim, de acordo com o critério EPR, tanto \mathcal{O}^B e \mathcal{P}^A são elementos da realidade, sendo propriedades intrínsecas dos subsistemas B e A, tendo então uma realidade que independe das medições nos sistemas A e B.

É sabido, a partir do princípio da incerteza de Heisenberg [6, 10], que para um par de observáveis que não comutam entre si, é impossível se descrever um estado que seja

auto-estado de ambos os operadores simultaneamente, e, portanto, onde os resultados dos observáveis não podem ser simultaneamente determinados. Partindo então da argumentação EPR e dessa impossibilidade, segue que ou a descrição da natureza dada pela mecânica quântica não é completa ou que ambas as quantidades acima descritas não podem ter realidade simultânea, ou seja, não correspondem simultaneamente a elementos da realidade.

Se supormos que a mecânica quântica é uma teoria completa, no qual o estado singlete a melhor descrição possível do sistema acima considerado, então temos que considerar de imediato que os observáveis \mathcal{O} e \mathcal{P} não podem ter realidade simultânea. No entanto, apesar de que mesmo considerando que $[\mathcal{O}, \mathcal{P}] \neq 0$, sempre teremos $[\mathcal{O}^A, \mathcal{P}^B] = 0$, e sendo assim, é sempre possível obter os resultados das medições de \mathcal{O}^A e \mathcal{P}^B simultaneamente.

Nos valendo disso e da conclusão anterior onde afirmamos que \mathcal{O}^B e \mathcal{P}^A são elementos da realidade, podemos afirmar que tanto \mathcal{O}^A e \mathcal{P}^A quanto \mathcal{O}^B e \mathcal{P}^B são elementos da realidade. Partindo então dessa conclusão, EPR afirmou que a suposição feita sobre a completeza da mecânica quântica estava incorreta, i. e., a mecânica quântica não é uma teoria completa. Sendo então a mecânica quântica não completa, deveria a teoria ser generalizada, de forma que variáveis “ocultas” deveriam surgir para possivelmente completar a teoria.

3.2 Probabilidades conjuntas e marginais

Precisamos também, para caracterizar um experimento de correlações, definir o que são as probabilidades descritas pelo experimento. Vamos supor uma situação onde em algum lugar um par de partículas é criado e enviado a dois observadores distintos, Alice e Bob, assim que recebem suas partículas, esses experimentadores devem escolher, dentro de um conjunto de possíveis testes, quais medições realizar.

Alice dispõe de um conjunto Q_A de possíveis medidas, e opta pela medida x . Enquanto Bob escolhe a medida y dentro do seu conjunto Q_y . Cada uma das possíveis medidas possui um conjunto de resultados possíveis, sendo R_x o conjunto de Alice e R_y o conjunto de Bob. Cada elemento do conjunto de possíveis resultados são descritos por a para Alice e b para Bob.

Então, a melhor maneira de se descrever o experimento conjunto é caracterizado pelas

probabilidades conjuntas de se obter os possíveis resultados a e b , quando são realizadas as medidas x e y . Denotaremos essas medidas por $p_{a,b|x,y}$.

3.3 Correlações

Como vimos anteriormente, o argumento EPR é construído sobre a visão de um experimento mental onde são obtidas correlações entre valores obtidos em testes feitos sobre partes distintas de um sistema quântico. Para melhor compreender esse tipo de experimento, vamos primeiramente introduzir alguns conceitos importantes para a sequência do raciocínio.

Começamos pois, com a descrição do que é conhecido como cenário de Bell, que nada mais é do que um experimento mental onde partículas são preparadas em um local, que chamaremos de fonte, e enviadas a locais distintos para serem testadas uma a uma. Em cada local onde chegam as partículas, um experimentador nesse local deve executar um teste, de um conjunto de observáveis possíveis nessa partícula, onde cada teste possui um conjunto de possíveis saídas (resultados).

Podemos então caracterizar um cenário de Bell a partir desses três valores: 1) Número de partes; 2) número de possíveis testes em cada parte e 3) número de possíveis resultados de cada teste possível em cada uma das partes. Vamos, ao longo dessa dissertação, manter nossa atenção ao cenário (2,2,2) (exemplificado na figura 3.1), que consiste em duas partes distintas que são enviadas a dois laboratórios L_A que é comandado por Alice e L_B , utilizado por Bob, onde cada parte pode escolher entre dois observáveis e cada observável possui duas saídas possíveis (mas manteremos as devidas generalizações a todos os cenários de Bell onde for preciso).

Uma primeira condição fundamental que consideraremos é a de não sinalização, que visa garantir que nenhum sinal seja emitido por uma das partes, Alice, por exemplo, e recebido por Bob, antes dele efetuar o teste na partícula por ele recebida.

Podemos formalizar essa condição com a linguagem apropriada da relatividade especial. Vamos aqui considerar um evento como sendo uma região do espaço-tempo, na qual o processo de medida das partes acontece como mostrado na figura 3.2. Vamos definir como \mathcal{M}_A o evento de medição que ocorre no laboratório L_A , de Alice, que tem início no momento em que Alice escolhe qual medida x irá realizar, e tem fim quando o resultado

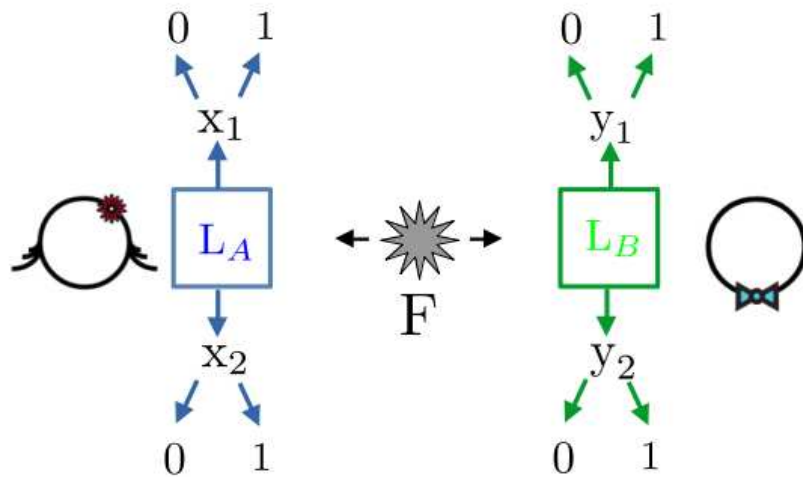


Figura 3.1: Cenário de Bell (2,2,2), onde uma fonte F prepara e distribui a dois laboratórios L_A e L_B , que podem escolher cada um entre duas medidas possíveis, e cada medida escolhida tem como saída dois possíveis resultados.

a é obtido. De maneira equivalente, o evento \mathcal{M}_B ocorre no laboratório L_B , tem início quando Bob escolhe qual medida y irá realizar e termina com a obtenção do resultado b . Dizemos então que \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B tem uma separação tipo espaço se nenhum sinal possa ser enviado entre eles em velocidade não superior a da luz. Para que isso seja válido, é necessário apenas que \mathcal{M}_A não intersecte o cone de luz de \mathcal{M}_B e vice versa. Essa condição impõe certas restrições as probabilidades que descrevem o experimento.

Para entender essa afirmação, podemos considerar um experimento onde um conjunto de pares de partículas são preparados na fonte e enviadas simultaneamente a dois observadores com uma separação tipo espaço, e, ao chegar nos laboratórios, Alice e Bob executam suas medidas (x e y) em todas as partículas também simultaneamente e anotam os resultados, de onde podem inferir suas distribuições estatísticas. No limite em que esse conjunto se torna muito grande, a distribuição estatística torna-se uma distribuição de Probabilidade que descreve o experimento.

Alice e Bob dispõem, então, das suas probabilidades marginais. Se a distribuição marginal de Alice dependesse, por exemplo, da medida que Bob escolheu efetuar, ela poderia, através da sua distribuição, obter informação sobre o observável y e, sendo assim, Bob poderia enviar uma mensagem a Alice somente escolhendo sua medida. Como definimos que os eventos de medida ocorrem em uma separação tipo espaço, esse envio de informação teria acontecido em uma velocidade superior a velocidade da luz. Queremos evitar que isso possa acontecer, então deve valer a seguinte condição de não sinalização,

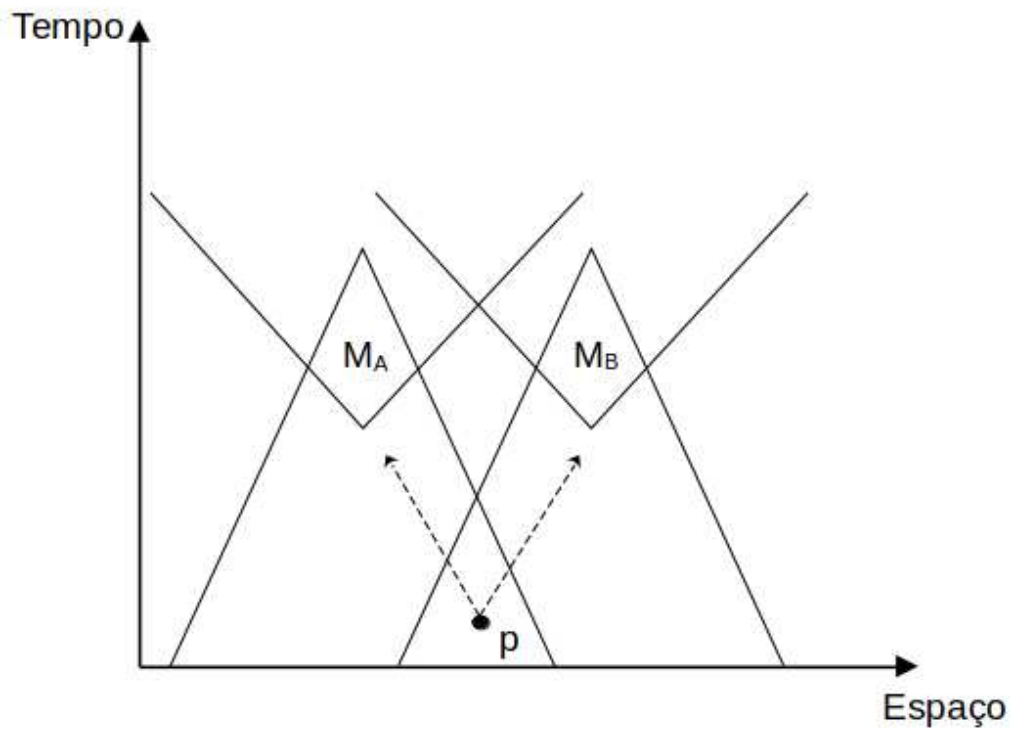


Figura 3.2: Diagrama espaço tempo dos eventos de medição de Alice e Bob

$$\begin{aligned}
 \sum_b p_{a,b|x,y} &= \sum_b p_{a,b|x,y'} = p_{a|x} & \forall a, x, y, y'; \\
 \sum_a p_{a,b|x,y} &= \sum_a p_{a,b|x',y} = p_{b|y} & \forall b, x, x', y.
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Não é apenas por meio de sinalização que um evento de medição pode ter influência sobre outro, mesmo que espacialmente separado. A não sinalização nada diz a respeito de influências não-locais que, caso não sejam detectadas nas probabilidades marginais, podem intervir instantaneamente no sistema.

Vamos aqui definir influência como sendo uma relação causal entre os eventos, ou seja, existe uma causa associada à medição de Alice que leva a um efeito na medição feita por Bob. A causalidade local diz que, para que se estabeleça uma relação causal entre os dois eventos, é necessário que qualquer informação transmitida entre eles seja em uma velocidade de no máximo a velocidade da luz.

A hipótese de causalidade local não garante necessariamente que os eventos de medida de Alice e Bob sejam independentes. Os eventos são correlacionados caso as probabilidades conjuntas $p_{a,b|x,y}$ que descrevem o experimento total não seja igual ao produto das probabilidades marginais

$$p_{a,b|x,y} \neq p_{a|x}p_{b|y}, \quad (3.7)$$

ou seja, medir x e obter o resultado a e medir y e obter o resultado b não são independentes.

Nada de quântico (muito menos de místico) existe aqui, isso decorre apenas de uma constatação observada em sistemas correlacionados, e, assumindo a causalidade local, todas as correlações existentes entre os dois eventos \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B tem uma origem no passado comum entre os eventos.

Formalizando essa ideia, vamos supor um modelo teórico no qual, dado uma coleção de variáveis λ , é possível calcular a probabilidade $p_{a,b|x,y}$ de se obter os resultados a e b nas medições x e y . Consideraremos aqui que λ represente todas as variáveis que poderiam ser causas locais de ambos os eventos de medição. Não faremos nenhuma suposição quanto a natureza desta variável. Vamos então supor que essa nossa teoria assume a hipótese de causalidade local, que, por simplicidade, chamaremos apenas de local. Então, sendo fixadas as variáveis λ , nenhum outro fator poderia correlacionar os eventos \mathcal{M}_A e \mathcal{M}_B , que agora se tornam independentes, ou seja

$$p_{a,b|x,y} = p_{a|x,\lambda}p_{b|y,\lambda}. \quad (3.8)$$

Caso estejamos de posse das probabilidades $p_{a,b|x,y}$ e desejamos saber se as correlações que elas descrevem admitem uma interpretação causal, é necessário que nenhuma teoria seja descartada a priori, devendo pois considerar inclusive aquelas em que λ representa variáveis que não são descritas por nenhuma teoria atual, podendo ser λ inacessível por refinamento experimental ou descritas apenas por teorias mais gerais, ainda não descobertas.

Na falta de conhecimento sobre essas variáveis “ocultas”, a melhor forma de se descrever o experimento é pela média de seus valores, sendo assim, temos

$$p_{a,b|x,y} = \int_{\Gamma} d\lambda q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} p_{b|y,\lambda}, \quad (3.9)$$

onde q_{λ} é uma distribuição da variável λ em um conjunto Γ . Diremos então que são correlações locais todas aquelas que puderem ser escritas sobre a forma 3.9, e, nessa situação, as correlações obtidas são fruto da ignorância a respeito da existência da variável λ .

Com o intuito de melhor esclarecer os aspectos acima levantados, pensaremos pois, em um exemplo, que consiste em duas moedas magnéticas onde pretendemos realizar medidas de cara ou coroa em repetidos testes. Essas moedas serão medidas por dois observadores que desconhecem as características das moedas, podendo apenas verificar qual face se encontra pra cima e anotar seu resultado separadamente. Se supormos que os momentos magnéticos são grandes, então, quando as moedas são lançadas próximas uma a outra, é de se esperar que em praticamente todos os testes as moedas caiam com a mesma face para cima.

Com base no formalismo apresentado acima, podemos descrever os resultados dos teste como saídas $(0, 1) = (cara, coroa)$ e, se questionarmos os observadores acerca das probabilidades de se medir “cara”, cada um o faria por meio de suas probabilidades marginais, sendo $p_{0|x_A} \approx \frac{1}{2}$ o resultado de Alice, enquanto que $p_{0|y_B} \approx \frac{1}{2}$ o resultado de Bob.

Ao comparar os resultados, eles descobririam que a probabilidade conjunta de se obter cara é dada por $p_{00|x_A, y_B} \approx \frac{1}{2}$, que é diferente do produto das probabilidades individuais, $p_{00|x_A, y_B} \neq p_{0|x_A} p_{0|y_B}$, mostrando então que existe uma correlação entre os resultados obtidos.

Aos observadores cabe então tentar obter informação sobre o modelo que rege as correlações por eles encontradas introduzindo variáveis a eles “ocultas”, λ_B e assim conseguiriam descrever as probabilidades conjuntas por meio das probabilidades marginais. A variável oculta aqui (que sabemos ser o campo magnético), ao ser introduzido quebra a dependência estatística, pois dado um ímã imerso em um campo magnético, podemos saber sua orientação, e isso seria observado por meio de λ_B , que leva a $p_{00|x_A, y_B} = p_{0|x_A, \lambda_B} p_{0|y_B, \lambda_B} = \frac{1}{2}$.

Como veremos, isso não poderia ser feito caso considerássemos correlações entre dois momentos magnéticos intrínsecos a partículas, o spin. Nesse caso, as correlações não podem ser descritas por meio de um modelo realista local, como veremos a seguir. Isso é devido a diferenças fundamentais entre os conjuntos de correlações locais e quânticos.

3.4 Desigualdade de Bell

Nos anos que sucederam o artigo EPR, inúmeras discussões foram levantadas acerca da possibilidade da generalização da mecânica quântica por uma teoria por meio de variáveis ocultas que a tornaria local. Um dos primeiros a caminharem nesse sentido foi Von Neumann, em 1932, que apresentou uma demonstração da impossibilidade da complementação da mecânica quântica por meio de variáveis ocultas em [31] traduzido para o inglês em 1955 [32].

Já em 1952, David Bohm propôs uma nova interpretação da mecânica quântica onde introduzia de maneira bastante intuitiva um certo tipo de variáveis ocultas que podem descrever sistemas quânticos de maneira similar a sistemas clássicos [33, 34].

Uma década após o trabalho de Bohm, John Bell encontrou uma hipótese não explícita na demonstração de von Neumann que invalidava sua demonstração [2]. O mesmo John Bell, seguindo um caminho um pouco diferente foi quem encontrou uma argumentação concreta, que vem se mostrando cada vez mais válida: Bell deixou de lado os aspectos contraditórios encontrados em discussões anteriores e buscou estabelecer condições que as estatísticas dos resultados deveriam satisfazer para que pudessem ser explicadas por um modelo de variáveis ocultas, e fosse realista local.

Para compreender o que foi feito por Bell, partiremos de um exemplo que se consiste em um cenário de Bell onde a fonte prepara um par de partículas emaranhadas e as envia a Alice e Bob, onde estes podem escolher entre três observáveis possíveis com duas saídas possíveis em cada observável (± 1).

Como primeira hipótese sobre o experimento, consideraremos que existe liberdade de escolher entre os possíveis observáveis por cada uma das partes. Consideraremos também a existência de um conjunto de variáveis ocultas, que dizem como cada partícula deve se comportar quando cada medida for escolhida, e, com isso, temos a condição de realismo local, dizendo que os valores observados pré-existem, e são apenas revelados quando o observador atua sobre o estado.

Outra consideração a ser feita é sobre a localidade das medidas, com intuito de garantir que as medidas são feitas localmente por cada observador, não havendo interação entre as partículas (ou seja, não há envio de informação), e, por último, tomaremos como hipótese que as correlações obtidas entre as estatísticas do experimento podem ser descritas por um modelo de variáveis ocultas.

Temos caracterizado, então, o cenário de variáveis ocultas locais, onde cada partícula sabe exatamente o que fazer quando encontrar pela frente alguma das medidas possíveis, como se existisse algum tipo de manual de instrução, sendo então essa a causa das correlações.

Feitas todas as condições acima, cada partícula individualmente recebe um “manual de instrução” que pode ser traduzido como a tabela 3.1, onde cada linha representa uma preparação possível

	X	Y	Z
1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1
3	+1	-1	+1
4	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1
6	-1	+1	-1
7	-1	-1	+1
8	-1	-1	-1

Tabela 3.1: Tabela com todos os estados e suas possíveis saídas dada uma configuração realista local

Por exemplo, a primeira instrução informa para a partícula que, naquele estado específico, ela deve retornar +1 para qualquer que seja o teste que foi submetida (X, Y ou Z). A segunda linha, que representa uma segunda instrução possível ao estado, diz que deve retornar +1 para os observáveis X e Y, e -1 para a medida de Z, e assim por diante.

Analisando a situação específica onde temos um par de partículas que são preparadas juntas e recebem as mesmas instruções, caso sejam efetuadas medidas do mesmo observável nas duas partes, teremos coincidência de resultados em 100% das vezes.

Uma situação mais interessante surge quando cada operador mede um observável distinto. Vamos então encontrar três combinações possíveis, pois estamos interessados apenas na correlação dos resultados, e para tal, não faz diferença qual operador mediu qual observável. Os resultados possíveis para a situação de um par que recebeu instruções iguais, que será testado em observáveis distintos serão listados na tabela 3.2, que diz se os resultados dos testes são iguais (I) ou diferentes (D).

Avaliando a tabela 3.2, podemos perceber que quando Alice e Bob optam por medir observáveis distintos, eles encontrarão uma correspondência de resultados em ao menos $\frac{1}{3}$ das vezes, independente da distribuição de probabilidade da preparação ρ .

Com base nisso, concluímos que um modelo determinístico causal para o experimento aqui apresentado deve exibir coincidência em $1/3$ das situações. Podemos traduzir isso dizendo que o modelo de variáveis ocultas impõe um limite inferior sobre as probabilidades de se obter resultados iguais, $p_I \geq \frac{1}{3}$

-	X e Y	Z e Y	X e Z
1	I	I	I
2	I	D	D
3	D	D	I
4	D	I	D
5	D	I	D
6	D	D	I
7	I	D	D
8	I	I	I

Tabela 3.2: Medidas de Alice e Bob em estados igualmente preparados onde I representa resultados iguais e D resultados distintos. Podemos ver que quando preparados iguais, qualquer estado fornece resultados iguais pra medidas distintas em ao menos 1 das 3 configurações possíveis.

Agora que encontramos um limite que deve ser satisfeitos por experimentos de correlação, em um modelo realista causal como descrito acima, podemos considerar uma situação onde os sistemas são quânticos, e a preparação é feita por meio de um estado emaranhado, como, por exemplo, o estado $|\Phi^-\rangle$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle), \quad (3.10)$$

para uma melhor visualização, podemos supor que o experimento é do tipo Stern-Gerlach (caso não se recorde, o leitor pode encontrar uma excelente descrição do experimento de Stern-Gerlach em [6]). Sendo assim, trataremos os operadores X, Y e Z como operadores de spin S_x , S_y e S_z .

Como queremos avaliar a situação em que Alice e Bob efetuam medidas distintas, vamos efetuar uma rotação em uma das partes do estado 3.10, que representará duas medidas defasadas por um ângulo θ . Matematicamente, essa operação pode ser escrita como $M = \mathbb{I} \otimes R(\theta)$, onde \mathbb{I} é a matriz identidade, que mantém o primeiro subsistema sem alteração e $R(\theta)$ é uma rotação, que gira o segundo subsistema por um ângulo θ , portanto

$$\begin{aligned}
|\Phi^-\rangle &= M|\Phi^-\rangle \\
&= (\mathbb{I} \otimes R(\theta)) \left(\frac{|11\rangle - |00\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [|1\rangle \otimes (\cos\theta |1\rangle + \sin\theta |0\rangle) - |0\rangle \otimes (-\sin\theta |1\rangle + \cos\theta |0\rangle)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos\theta |11\rangle + \sin\theta |10\rangle + \sin\theta |01\rangle - \cos\theta |00\rangle].
\end{aligned}$$

Nos lembrando a interpretação de Born, onde os coeficientes no estado representam amplitudes de probabilidade, é fácil perceber que a probabilidade de obter resultados iguais, ou seja, a probabilidade de encontrar os estados $|11\rangle$ ou $|00\rangle$ é dada por

$$\begin{aligned}
p_I &= p_{11} + p_{00} \\
&= \left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{-\cos\theta}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
&= \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos^2\theta}{2} \\
&= \cos^2\theta,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

com isso vemos que a probabilidade de se obter resultados iguais no experimento com estados quânticos está no intervalo $[0,1]$.

Podemos olhar para o caso específico de $\theta = 120^\circ$, a probabilidade de se obter os resultados iguais é $p_I = \cos^2(120) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$. Com isso, encontramos que, em um caso particular, a mecânica quântica é capaz de violar um limite realista local para variáveis ocultas.

Apesar do exemplo anterior ser bastante simples, ele contém toda a essência do teorema de Bell, e foi com uma análise similar a esta que levou Bell a resposta para o argumento EPR que é a mais válida até hoje: A mecânica quântica não pode ser descrita nem generalizada por nenhum modelo de variáveis ocultas locais. Bell concluiu que a suposta contradição advém da inviabilidade das hipóteses ao caso quântico, ou seja, a noção aparentemente válida do realismo local clássico provavelmente não se aplica à mecânica quântica, e, portanto, a mecânica quântica é uma teoria **não local**.

3.4.1 Desigualdade CHSH

A discussão apresentada anteriormente, apesar de muito rica, carece de um viés mais formal que se generaliza a qualquer experimento quântico de duas partes, além disso,

existe uma restrição que diz como cada medida deve ser feita. Trataremos agora da desigualdade de Bell mais conhecida, que trata do mesmo cenário (222), porém sem nenhuma consideração acerca do experimento ou do tipo de preparação.

Essa desigualdade, devido a John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony e Richard Holt, conhecida por desigualdade CHSH [35] será apresentada aqui de maneira breve e até simplista, com uma demonstração um pouco mais geral que a originalmente proposta, onde é possível trabalhar com qualquer observável que seja limitado. Todos os detalhes dessa demonstração podem ser encontrados em [36].

Começaremos novamente supondo que pares de partículas são enviadas a dois laboratórios distintos, separados espacialmente, que continuaremos tratando como Alice e Bob.

Ao receberem suas partes eles podem escolher qual medida irão efetuar, sendo A e A' os possíveis observáveis de Alice e B e B' os de Bob. Após uma quantidade significativa de repetições, podemos então calcular as probabilidades conjuntas de resultados, que, como vimos, é dada por $p_{a,b|A,B}$.

Reafirmamos que essa probabilidade geralmente não pode ser fatorada em um produto das probabilidades individuais (que seria uma dependência entre os resultados de cada laboratório). Portanto, vamos tentar construir um modelo onde as probabilidades conjuntas possam ser fatoradas, nos valendo das variáveis ocultas λ .

A hipótese de determinismo nos garante que os resultados obtidos em um laboratório, ou seja, as probabilidades marginais, podem até depender da configuração experimental montada, incluindo toda a preparação dos estados e observáveis, porém não podem depender dos resultados obtidos pelo outro observador, ou seja, $a = a(A, B, \lambda)$ e $b = b(A, B, \lambda)$, e, portanto, as probabilidades marginais são descritas por $p_{a|A,B,\lambda}$.

A condição de localidade impõe uma segunda condição, que é a independência dos resultados obtidos por um observador com respeito as decisões tomadas pelo outro, ou seja $p_{a|A,B,\lambda} = p_{a|A,\lambda}$. Não nos esquecendo de considerar o livre arbítrio tanto de Alice quanto de Bob, podemos então escrever

$$p_{a,b|A,B,\lambda} = p_{a|A,\lambda}p_{b|B,\lambda}. \quad (3.12)$$

Se tomarmos agora a distribuição da variável oculta λ , encontramos a distribuição de probabilidade efetivamente medida

$$p_{a,b|A,B} = \int_{\Gamma} d\lambda q_{\lambda} p_{a|A,\lambda} p_{b|B,\lambda}. \quad (3.13)$$

Um outro componente importante na construção da desigualdade CHSH é o cálculo dos valores esperados dos observáveis em questão, que são dados por:

$$\begin{aligned} \langle A \otimes B \rangle &= \int da db ab p_{a,b|A,B} \\ &= \int d\lambda q_{\lambda} \left(\int da p_{a|A,\lambda} a \right) \left(\int db p_{b|B,\lambda} b \right) \\ &= \int d\lambda \langle A \rangle_{\lambda} \langle B \rangle_{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tomando então todos os observáveis disponíveis $\{A, A', B, B'\}$, vamos definir a seguinte quantidade,

$$S = |\langle A \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle + \langle A' \otimes B \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle| \quad (3.15)$$

utilizando a relação 3.14, temos

$$\begin{aligned} S &= \left| \int d\lambda q_{\lambda} (\langle A \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle + \langle A' \otimes B \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle) \right| \\ &= \left| \int d\lambda q_{\lambda} \langle A \rangle_{\lambda} (\langle B \rangle_{\lambda} + \langle B' \rangle_{\lambda}) + \langle A' \rangle_{\lambda} (\langle B \rangle_{\lambda} - \langle B' \rangle_{\lambda}) \right| \\ S &= \left| \int d\lambda q_{\lambda} S_{\lambda} \right|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

da desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left| \int d\lambda q_{\lambda} S_{\lambda} \right| &\equiv S \leq \int d\lambda q_{\lambda} |S_{\lambda}|. \quad \text{Ou,} \\ |S_{\lambda}| &\leq |\langle A \rangle_{\lambda} (\langle B \rangle_{\lambda} + \langle B' \rangle_{\lambda}) + \langle A' \rangle_{\lambda} (\langle B \rangle_{\lambda} - \langle B' \rangle_{\lambda})|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Consideraremos agora um observável genérico \mathcal{O} com autovalores o sendo a única restrição a de possuir o espectro limitado, ou seja, $o_{min} \leq o \leq o_{max}$. Então, o valor esperado desse operador deve também ser limitado,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle_{\lambda} &\leq \int do p_{o|O,\lambda} o_{max} = o_{max} \\ \langle \mathcal{O} \rangle_{\lambda} &\geq \int do p_{o|O,\lambda} o_{min} = o_{min}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ou seja, $|\langle \mathcal{O} \rangle_{\lambda}| \leq \bar{o}$, onde $\bar{o} = \max\{|o_{min}|, o_{max}\}$.

Considerando então que o conjunto de operadores $\{A, A', B, B'\}$ é também limitado, temos

$$|S_\lambda| \leq \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} [|\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda| + |\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda|] \quad (3.19)$$

onde \bar{a} e \bar{a}' são os limites dos observáveis A e A' . No que diz respeito aos termos entre colchetes, podemos tratar da seguinte forma: definimos $\alpha \equiv |x + y| + |x - y| \geq 0$, onde $\{x, y\} \in \mathbb{R}$.

Por manipulação algébrica, temos que $\alpha = 2(x^2 + y^2 + |x^2 - y^2|) = 4\max\{x^2, y^2\}$, o que implica que $\alpha = 2\max\{|x|, |y|\}$. Substituindo então na desigualdade acima, temos

$$|S_\lambda| \leq 2\max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\}. \quad (3.20)$$

Como,

$$S \leq \int d\lambda q_\lambda |S_\lambda|$$

temos que,

$$S \leq 2\max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\} \quad (3.21)$$

que, quando aplicado ao caso considerado inicialmente por CHSH, (onde os observáveis tinham autovalores $\{+1, -1\}$), obtemos o mesmo resultado, $|S| \leq 2$.

Teorema de Gisin

Com base nisso, Gisin demonstrou um importante resultado, que nos será útil posteriormente [37]. Nesse trabalho, ele mostra que todo estado bipartido emaranhado gera correlações que violam uma desigualdade de Bell para algum conjunto de observáveis.

Vamos considerar então um estado puro emaranhado bipartido, ou seja, $|\psi\rangle \neq |u\rangle \otimes |v\rangle$. Pela decomposição de Schimidt, esse estado pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle \quad (3.22)$$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Como o estado, por hipótese, é emaranhado, temos que ao menos $c_1, c_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} |\psi_\parallel\rangle &= c_1 |u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + c_2 |u_2\rangle \otimes |v_2\rangle \\ |\psi_\perp\rangle &= \sum_{i>2} c_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle \end{aligned} \quad (3.23)$$

então, $|\psi\rangle = |\psi_\parallel\rangle + |\psi_\perp\rangle$. Podemos ver que o estado $|\psi_\parallel\rangle$ é um estado de dois qubits.

Vamos supor que a esse qubit seja aplicado uma transformação local da forma $U_A \otimes U_B$, que, por ser local, não altera propriedades físicas do estado global. Consideraremos que essa transformação torne o estado em

$$|\psi\rangle = c_1 |01\rangle + c_2 |10\rangle. \quad (3.24)$$

Vamos definir, então, dois operadores A_x e B_y tal que, $A_x = \hat{a}_x \cdot \vec{\sigma}$ e $A_y = \hat{b}_y \cdot \vec{\sigma}$, com $\hat{a}_x, \hat{b}_y \in \mathcal{R}^3$ e $|\hat{a}_x| = |\hat{b}_y| = 1$. Definimos então,

$$\begin{aligned} \hat{a}_x &= (\text{sen}(\alpha_x), 0, \cos(\alpha_x)) \\ \hat{b}_y &= (\text{sen}(\gamma_y), 0, \cos(\gamma_y)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

com $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 = \pm 1$, onde o sinal é definido como sendo o contrário de $c_1 c_2$. Definiremos agora,

$$\mathcal{B}_{CHSH} = A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 \quad (3.26)$$

assim temos que $S = \langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = \beta_{CHSH}$. Portanto,

$$\beta_{CHSH} = \cos \gamma_0 - \cos \gamma_1 + 2(c_1 c_2)(\sin \gamma_0 + \sin \gamma_1), \quad (3.27)$$

e esse valor é máximo para $\cos \gamma_0 = -\cos \gamma_1 = (1 + 4|c_1 c_2|^2)^{-\frac{1}{2}}$ onde $\sin \gamma_0 > 0$, $\sin \gamma_1 > 0$, e, portanto,

$$\beta_{CHSH} = 2\sqrt{1 + 4|c_1 c_2|^2} \quad (3.28)$$

e podemos perceber que esse valor é estritamente maior que 2 para quaisquer c_1 e c_2 diferentes de zero, ou seja, para todo $|\psi\rangle$ emaranhado.

Uma importante consideração a ser feita aqui é que as medidas escolhidas para que haja uma violação da desigualdade CHSH dependem do estado em questão e de seus coeficientes de decomposição. Diferentes estados irão exigir um conjunto diferente de observáveis para a verificação de uma possível violação. Isso será importante no capítulo 5.

Se consideramos, por exemplo, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, encontramos $\beta_{CHSH} = 2\sqrt{2}$. Um resultado devido a Boris Tsirelson mostra que essa é a maior violação possível para qualquer sistema quântico.

3.5 Conjuntos de correlações e politopos

Vimos até aqui como se deu a construção das desigualdades de Bell, desde o argumento EPR até a construção da desigualdade mais geral para o caso de dois observáveis em um sistema bipartido.

Vamos introduzir brevemente uma maneira diferente e mais moderna que combina um pouco de tudo que foi feito ao longo do capítulo, e ajuda a visualizar as desigualdades de Bell de maneira geométrica.

No cenário (2,2,2), as correlações que existem entre os possíveis eventos podem ser descritas como um vetor de 16 componentes cujas componentes são exatamente cada uma das probabilidades $p_{a,b|x,y}$. Com isso, percebemos que o espaço associado às correlações nesse cenário vivem em uma dimensão $d \leq 16$. Esse vetor deve satisfazer as seguintes condições

$$\textit{Positividade} : p_{a,b|x,y} \geq 0 \quad \forall a, b, x, y, \quad (3.29)$$

e

$$\textit{Normalização} : \sum_{a,b} p_{a,b|x,y} = 1 \quad \forall x, y. \quad (3.30)$$

As condições de normalização impõem 4 restrições ao conjunto das correlações, limitando então a dimensão do espaço, sendo, portanto, o conjunto das correlações um ente que vive em \mathcal{R}^{12} . Chamaremos esse conjunto de \mathcal{P} .

A soma convexa de vetores de probabilidade é também um vetor de probabilidade, portanto podemos dizer que o conjunto de correlações é um conjunto convexo. Dado um conjunto, dizemos que os pontos extremais desse conjunto são aqueles que não podem ser escritos como combinação convexa dos outros. Esses pontos são pontos determinísticos, i.e, pontos de probabilidade 0 ou 1. Qualquer conjunto convexo que contém um número finito de pontos extremais é conhecido como politopo convexo, e, com isso, dizemos que o conjunto \mathcal{P} é um politopo convexo de dimensão 12.

Correlações não sinalizadoras

Considerando a condição de não sinalização 3.6, vamos denotar todos os comportamentos $p_{ab|xy}$ que a satisfazem por \mathcal{NS} , e, com isso, podemos definir um conjunto que restringe o espaço das possíveis correlações. É possível mostrar que, de todas as condições

de não sinalização existentes, apenas 4 são independentes [38], e, portanto, o conjunto das correlações não sinalizadora (\mathcal{NS}) possui apenas 8 parâmetros livres.

O conjunto \mathcal{NS} é convexo (um conjunto X é convexo se todo segmento de reta ligando dois pontos em X está contido em X , ou seja $\forall x, y \in X, \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in X$), pois se o componente $p_{ab|xy}^i$ obedece à não sinalização, então

$$p_{ab|xy} = \sum_i c_i p_{ab|xy}^i \quad (3.31)$$

com $\sum_i c_i = 1$ também obedece.

$$\begin{aligned} \sum_b p_{ab|xy} - \sum_b p_{ab|xy'} &= \sum_b \sum_i c_i p_{ab|xy}^i - \sum_b \sum_i p_{ab|xy'}^i \\ &= \sum_i c_i \left(\sum_b p_{ab|xy}^i - \sum_b p_{ab|xy'}^i \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Notamos então que, para definir o conjunto \mathcal{NS} partimos do politopo \mathcal{P} com 12 dimensões e fizemos apenas restrições lineares, e esse tipo de restrição define hiperplanos no conjunto de correlações. É sabido que um subconjunto de um politopo convexo, limitado por planos é também um politopo. \mathcal{NS} possui 24 pontos extremais, e assim é também um politopo convexo. Dado tudo isso, é possível concluir que $\mathcal{NS} \subset \mathcal{P}$.

Correlações locais

A restrição de localidade é formada pelos comportamentos que satisfazem a condição $p_{a,b|x,y} = \int_{\Gamma} d_{\lambda} q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} p_{b|y,\lambda}$. Toda correlação local satisfaz a não sinalização,

$$\begin{aligned} p_{a|x,y} &= \sum_b \int_{\Gamma} d_{\lambda} q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} p_{b|y,\lambda} \\ &= \int_{\Gamma} d_{\lambda} q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} \left(\sum_b p_{b|y,\lambda} \right) \\ &= \int_{\Gamma} d_{\lambda} q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} = p_{a|x} \end{aligned} \quad (3.33)$$

e o mesmo se aplica a $p_{b|x,y}$.

Vamos denotar por \mathcal{L} o conjunto dos comportamentos que satisfazem a condição de localidade, e com isso imediatamente vemos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{NS}$. As probabilidades marginais podem ser representadas por meio de vetores de 4 componentes

$$\vec{p}_{a|x} = \begin{pmatrix} p_{0|x} \\ p_{1|x} \\ p_{0|x'} \\ p_{1|x'} \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_{b|y} = \begin{pmatrix} p_{0|y} \\ p_{1|y} \\ p_{0|y'} \\ p_{1|y'} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

onde os pontos determinísticos do conjunto das correlações locais são

$$\vec{p}_{a|x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\vec{p}_{b|y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o conjunto das correlações locais possui 16 pontos determinísticos. Podemos mostrar que todo vetor $\vec{p}_{a,b|x,y}$ pode ser escrito como uma soma convexa dos 16 pontos determinísticos de \mathcal{L} . Para isso, vamos inicialmente considerar um vetor de probabilidade

$$p_{a,b|x,y} = \int_{\Gamma} d\lambda q_{\lambda} p_{a|x,\lambda} p_{b|y,\lambda} \quad (3.36)$$

Todas as probabilidades marginais podem ser escritas como

$$p_{a|x,\lambda} = \sum_{i=1}^4 c_{a,i}(\lambda) p_{a|x}^i; \quad \sum_{i=1}^4 c_{a,i}(\lambda) = 1$$

e

$$p_{b|y,\lambda} = \sum_{j=1}^4 c_{b,j}(\lambda) p_{b|y}^j; \quad \sum_{j=1}^4 c_{b,j}(\lambda) = 1$$

onde $p_{a|x}^i$ e $p_{b|y}^j$ são probabilidades marginais determinísticas. Então,

$$\begin{aligned}
p_{a,b|x,y} &= \int_{\Gamma} q_{\lambda} \sum_{i,j=1}^4 c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) p_{a|x}^i p_{b|y}^j d\lambda \\
&= \sum_{i,j=1}^4 \left(\int_{\Gamma} q_{\lambda} c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) d\lambda \right) p_{a|x}^i p_{b|y}^j \\
&= \sum_{i,j=1}^4 \tilde{c}_{ij} p_{a|x}^i p_{b|y}^j,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

e os coeficientes \tilde{c}_{ij} satisfazem as condições:

$$\tilde{c}_{ij} = \int_{\Gamma} q_{\lambda} c_{a,i}(\lambda) c_{b,j}(\lambda) d\lambda \geq 0, \quad e, \quad \sum_{i,j=1}^4 \tilde{c}_{i,j} = 1. \tag{3.38}$$

Sendo os pontos determinísticos os pontos extremais do conjunto, pois estes não podem ser escritos como combinação convexa de outros pontos do conjunto, e qualquer ponto do conjunto pode ser escrito como combinação convexa desses pontos.

Quanto à dimensão do conjunto, vemos que a condição de localidade restringe as possíveis correlações, porém não diminui o número de parâmetros livres necessários na descrição do conjunto. Temos então que qualquer vetor nesse espaço pode ser escrito como combinação dos 16 parâmetros $\tilde{c}_{i,j}$ e temos 8 condições impostas a eles, sendo a normalização e não-sinalização. Portanto, o conjunto \mathcal{L} é um politopo convexo de dimensão 8, com 16 pontos extremais, contidos no politopo não sinalizador. $\mathcal{L} \subset \mathcal{NS} \subset \mathcal{P}$

Correlações quânticas

Finalmente, consideraremos o conjunto das correlações encontradas na mecânica quântica. Formalmente, o conjunto \mathcal{Q} dos comportamentos quânticos corresponde a todos os elementos de \mathcal{P} tal que

$$p_{a,b|x,y} = Tr(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}) \tag{3.39}$$

onde $p_{a,b|x,y} = \langle \psi | M_{a|x} | M_{b|y} \rangle$, ρ_{AB} é o estado quântico do sistema composto e $M_{a|x}$, $M_{b|y}$ são operadores de medida. Podemos mostrar que \mathcal{Q} satisfaz a não sinalização

$$\begin{aligned}
\sum_b p_{a,b|x,y} &= \sum_b Tr[\rho_{AB} (M_{a|x} \otimes M_{b|y})] \\
&= Tr[\rho_{AB} (M_{a|x} \otimes (\sum_b M_{b|y}))] \\
&= Tr(\rho_A M_{a|x}) = p_{a|x},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

onde a probabilidade marginal é definida como sendo $p_{a|x} = \text{Tr}(\rho_A M_{a|x})$, com ρ_A sendo a matriz densidade reduzida de Alice, (e de maneira análoga a Bob).

É possível mostrar também que qualquer comportamento local admite uma descrição na forma quântica, e portanto pertence a \mathcal{Q} , (entretanto, existem correlações quânticas que não pertencem ao conjunto local).

Em geral, temos $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{NS}$. E, apesar do conjunto quântico ser convexo, ele não representa um politopo, pois não pode ser descrito por um conjunto finito de pontos extremais.

Desigualdades de Bell

Os conjuntos \mathcal{L} , \mathcal{Q} e \mathcal{NS} são fechados, limitados e convexos. Isso quer dizer que se \vec{p}_1 e \vec{p}_2 pertencem a um desses conjuntos, então uma mistura $\mu\vec{p}_1 + (1 - \mu)\vec{p}_2$ com $0 \leq \mu \leq 1$ também pertence a esse conjunto.

Pelo teorema de separação de hiperplanos, temos que, para cada $\hat{p} \in \mathbb{R}$ (o vetor \hat{p} é por vezes conhecido na literatura como “comportamento”) que não pertence a um dos conjuntos $\mathcal{K} = \mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{NS}$, deve existir um hiperplano que separa o ponto \hat{p} do conjunto correspondente, o que leva à existência de uma desigualdade da forma

$$\vec{s} \cdot \vec{p} = \sum_{abxy} s_{xy}^{ab} p_{ab|xy} \leq S_k,$$

que é satisfeita por todos os pontos $\vec{p} \in \mathcal{K}$, porém é violada para $\vec{p} : \vec{s} \cdot \vec{p} > S_k$. No caso do conjunto Local \mathcal{L} , tais desigualdades são exatamente as desigualdades de Bell. Os limites associados ao conjunto quântico \mathcal{Q} são as desigualdades de Tsirelson.

3.6 Loophole e testes experimentais

Na demonstração da desigualdade de Bell, algumas suposições foram feitas, e sendo assim, devem ser consideradas quando se planeja um teste experimental. A primeira suposição é um tanto quanto sutil e levantou debates ao longo dos anos, que é a suposição de livre arbítrio tomada quando fizemos $p_{x,y,\lambda} = p_x p_y p_\lambda$, a qual diz que as escolhas sobre quais os observáveis independe do estado físico do sistema. Se essa condição não for válida, então é possível simular resultados quânticos por meio de variáveis ocultas.

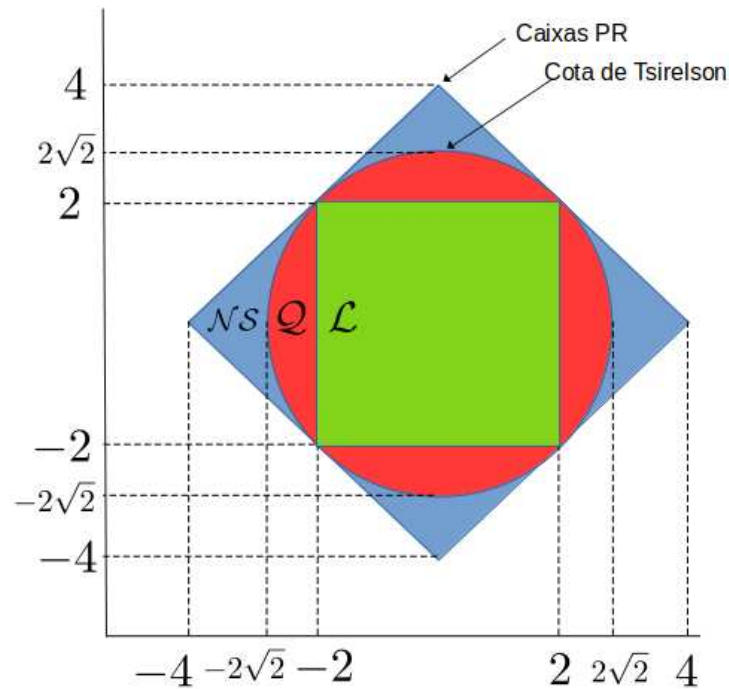


Figura 3.3: Representação esquemática de uma seção bidimensional do politopo de correlações no cenário CHSH)

Garantir livre arbítrio é um tanto quanto difícil, já que nenhum argumento de causalidade pode fazer tal garantia. Todos os eventos e processos de medida possuem uma causa comum (Big bang se desejar), mas todos os experimentos na ciência estão sujeitos a esse mesmo tipo de restrição, e, a menos que possamos assumir o livre arbítrio, qualquer esforço científico é, em partes, em vão.

Porém, isso não quer dizer que não devemos nos esforçar para tornar a condição de livre arbítrio o mais plausível possível. Nesse sentido, experimentos de Bell são feitos por vezes utilizando fótons cósmicos como entradas que decidirão qual observável escolher e, dessa maneira, qualquer correlação entre as escolhas de medição e o sistema físico preparado durante o experimento deve ter origem há centenas de anos, muito tempo antes de o aparato ter sido criado [39].

Uma outra abordagem foi feita por meio da utilização da aleatoriedade humana, onde milhares de pessoas pelo mundo decidiram por meio de um jogo quais as medidas seriam tomadas em vários experimentos de Bell ocorrendo em laboratórios ao redor do mundo [40].

Outra suposição feita na dedução do modelo de variáveis ocultas foi a de localidade,

afirmando que $p_{a,b|x,y,\lambda} = p_{a|x,\lambda}p_{b|y,\lambda}$, ou seja, que o resultado da medida obtido em um laboratório só pode depender das escolhas de medidas e do estado do sistema. Com intuito de garantir isso, basta exigir que os laboratórios estejam muito afastados, e assim nenhuma medida em uma parte pode afetar a estatística observada pelo outro laboratório.

Apesar de ser um conceito simples, na prática isso torna-se um desafio. Podemos gerar pares emaranhado com certa facilidade (chips supercondutores, íons, experimentos fotônicos), entretanto separá-los espacialmente é uma tarefa difícil. Claramente, para cobrir grandes distâncias, pares de fótons são ideais, entretanto ao se utilizar fótons, outro problema surge, associado a eficiência na detecção.

Para compreender como a eficiência na detecção dos fótons pode ser um grande problema, vamos imaginar um experimento que utiliza pares de fótons emaranhados, e que cada laboratório dispõe de um fotodetector convencional de avalanche, cuja eficiência média é por volta de 10%.

Vamos chamar de $p_{a,b|x,y}^D$ a distribuição de probabilidade dos fótons detectados e $p_{a,b|x,y}^{ND}$ a distribuição dos fótons não detectados. Portanto, a distribuição de probabilidade real associada ao experimento é $p_{a,b|x,y} = \eta p_{a,b|x,y}^D + (1 - \eta)p_{a,b|x,y}^{ND}$, porém, na prática, o experimentador só tem acesso a p^D .

Para visualizarmos o problema, vamos imaginar um cenário onde $p_{a,b|x,y}^D$ leva a uma violação máxima da desigualdade CHSH, de $2\sqrt{2}$, e, da direção contrária, $p_{a,b|x,y}^{ND}$ leva a um valor de CHSH de 0. A violação real da desigualdade CHSH é então dada por $p_{a,b|x,y} = \eta p_{a,b|x,y}^D = \eta 2\sqrt{2}$ que é maior que o limite clássico apenas se $\eta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$. Como a eficiência real é inferior aos 70%, o experimento não pode ser conclusivo.

Para dizer se houve ou não uma violação de desigualdade de Bell, é necessário que uma nova suposição seja utilizada, que é a de amostragem justa, dizendo basicamente que os eventos detectados e não detectados são iguais, não havendo uma conspiração da natureza para confundir o resultado dos testes.

Dito tudo isto, percebemos que bons detectores são necessários quando se trata de experimentos de Bell, e esses detectores existem, com eficiência próxima de 100%, aplicados a detecções envolvendo íons ou spin, mas, como foi dito, esse tipo de sistema não pode ser separado por longas distâncias tão facilmente.

Foi então que em 2015, um grupo sueco fez a primeira detecção de violação de desigualdade de Bell livre de loopholes [41]. Para esse feito, eles utilizaram dois laboratórios

(A e B) separados por mais de um quilômetro, e um terceiro laboratório (C) auxiliar. Nos laboratórios, sistemas de vacâncias de nitrogênio, contendo um spin em cada vacância foram preparados em um estado excitado e levados a decair, gerando emaranhamento entre o spin da vacância e o fóton que emerge.

Os fótons provenientes dos dois laboratórios foram então enviados ao laboratório auxiliar, onde foram combinados em um feixe único e medidos em uma base emaranhada, fazendo com que o emaranhamento fóton-spin fosse transferido para o sistema spin-spin, por um processo conhecido como troca de emaranhamento.

Como a eficiência na medida de spin é bastante alta, os spins agora emaranhados foram medidos, encontrando valores que extrapolam os limites locais da desigualdade CHSH, mostrando assim que a natureza é essencialmente não local.

Capítulo 4

FÉRMIONS DE MAJORANA

A Computação quântica topológica é um ramo extremamente rico que nos permite per-
meiar áreas que passam pela física, (lidando com problemas de fundamentos de mecânica
quântica, classificação e manipulação de fases topológicas), pela matemática (abordando
questões desde a identificação de ferramentas formais para a classificação completa das
fases topológicas) e vão até a ciência da computação, lidando com problemas de comple-
xidade computacional.

Essas áreas se convergem em um esforço combinado para realizar computação quântica
tolerante a falhas. Pensar sobre topologia em matéria condensada a partir de uma
perspectiva da computação quântica é por vezes mais criativo que lidar com perguntas
padrões de física da matéria condensada.

4.1 Anyons

A estatística de troca é o elemento central da descrição quântica do mundo e é uma
consequência da indistinguibilidade das partículas. Vimos no postulado 5 que a troca de
duas partículas idênticas representa uma operação de simetria, que não afeta as proprie-
dades físicas do estado quântico.

Em três dimensões espaciais, existem apenas dois tipos de partículas, os bósons e os
férmions. Podemos compreender essa limitação analisando a troca adiabática de duas
partículas, e percebendo que trocar duas vezes as partículas é equivalente a contornar
adiabaticamente uma partícula ao redor da outra por um dado caminho \mathbf{C} , como visto
na figura 4.1.

Vemos que o caminho não intersecta a posição \vec{r}_2 da segunda partícula. Uma deforma-
ção contínua do caminho não afeta a função de onda, e podemos ver que, em 3D, qualquer
caminho $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{r}_2\}$ pode ser continuamente deformado ao caminho trivial $\mathbf{C}_0(\vec{r}_1)$,

que corresponde a manter a primeira partícula na posição original.

Como uma troca dupla não modifica a função de onda, uma troca simples da posição das partículas pode apenas deixar a função de onda inalterada, que corresponde a um bóson, ou alterar o sinal total, que corresponde a um férmion.

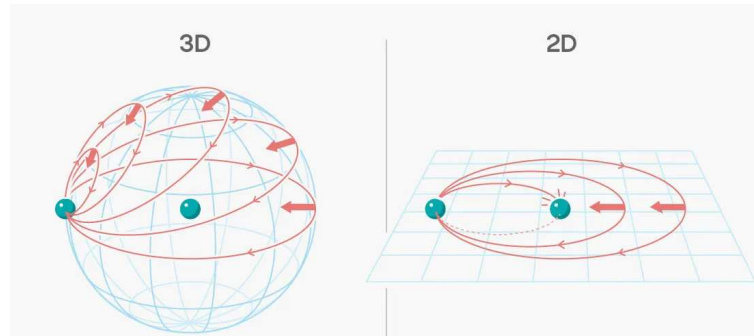


Figura 4.1: Representação de rotação de uma partícula ao redor da outra. Em 3D todos os caminhos podem ser comprimidos até um ponto, visto que não é necessário se manter a trajetória no plano. Em 2D os caminhos não podem ser comprimidos, visto que esbarriariam em uma partícula fixa no plano, retirada de [?]

Em uma dimensão, as propriedades de troca não são bem definidas, visto que seria necessário sobrepor as partículas durante o caminho da troca. Já em duas dimensões, temos um verdadeiro paraíso para a estatística quântica. Existe uma rica diversidade de comportamentos possíveis em 2D [42], essencialmente porque um loop \mathbf{C} que circula uma segunda partícula em \vec{r}_2 não pode ser deformado continuamente até o caminho trivial $\mathbf{C}_0(\vec{r}_1)$ sem passar por cima da segunda partícula. Sendo assim, é possível existir caminhos não triviais, que significa que o estado final e inicial não são necessariamente iguais.

A diferença entre 3D e 2D é de natureza topológica, e pode ser expressa através de grupos fundamentais $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 1$ (Em 3D os caminhos podem ser deformados a um ponto sem passar pela origem) e $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{Z}$ (em 2D existem caminhos que são não triviais).

Podemos então considerar uma troca no sentido anti-horário de duas partículas idênticas em 2D. Como resultado, a função de onda pode mudar por um fator de fase,

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow e^{i\theta} \psi(\vec{r}_1, r_2), \quad (4.1)$$

e efetuar uma segunda troca anti-horária não necessariamente leva o estado ao que era inicialmente, ou seja, a fase $e^{2i\theta}$ pode ser arbitrária, o que implica que, em geral, o ângulo θ pode ser diferente dos tradicionais 0 ou π (bósons e férmions). Partículas com $\theta \neq 0, \pi$

são chamados de *anyons* [42] com estatística θ .

Em um sistema 2D com N partículas idênticas, os caminhos associados a troca de pares de partículas pertence a classes topológicas que possuem correspondência direta ao chamado grupo de tranças [42,43]. A evolução do sistema é então dada pela atuação desse grupo sobre o estado quântico composto pelas múltiplas partículas. O caso mais simples corresponde a uma generalização de 4.1, em que os elementos do grupo de tranças pode ser representado por um fator de fase da forma $e^{im\theta}$, onde m é o número de trocas feitas no sentido anti-horário menos o número de trocas efetuadas no sentido horário.

Dizemos que $e^{im\theta}$ é uma representação unidimensional do grupo de tranças e que m não depende da ordem específica que as tranças são tomadas, ou seja, as operações comutam, e com isso dizemos que a representação é abeliana. As quase-partículas descritas por uma função de onda que obedece essa forma de representação é chamada de *anyons abelianos*.

Uma outra classe de partículas possível é dada pelas trocas que correspondem a uma representação de dimensão mais alta do grupo de trança. Se considerarmos novamente N partículas em certas posições fixas cujo estado é g vezes degenerado, e sendo ψ_α , com $\alpha = 1, 2, \dots, g$, uma base ortonormal do subespaço degenerado; um elemento σ do grupo de tranças pode ser representado por uma matriz unitária $g \times g$ agindo nesse subespaço

$$\psi_\alpha = [U(\sigma)]_{\alpha\beta} \psi_\beta. \quad (4.2)$$

consequentemente, a troca de duas partículas corresponde a uma rotação do subespaço degenerado.

Como geralmente duas matrizes unitárias $U(\sigma)$ e $U(\sigma')$ que correspondem a duas operações de tranças distintas não comutam, a evolução do sistema depende diretamente de como a operação foi realizada. As quase-partículas caracterizadas por esse tipo de estatística são chamadas de *anyons não abelianos*.

Sendo assim, como as evoluções de sistemas quânticos são dadas por operações unitárias, como visto no postulado 3, uma maneira simples de atuar no sistema é trocar a posição das partículas. Essa é uma propriedade fundamental da computação quântica topológica.

4.1.1 Tranças

Vamos considerar um conjunto de N partículas, cujas trajetórias podem ser dadas por N linhas de mundos (fios), que se iniciam em pontos (\vec{R}_n, t_i) e terminam em (\vec{R}_m, t_f) . Se considerarmos inicialmente o caso 3D, temos duas opções: caso as partículas sejam distinguíveis, todas as trajetórias podem ser deformadas a linhas retas, paralelas à direção temporal, correspondendo a partículas permanecendo imóveis nas posições iniciais. Caso as partículas sejam indistinguíveis, então as trajetórias podem ter posições iniciais e finais diferentes $\vec{R}_n \neq \vec{R}_m$, e as N linhas de mundo pertencem a diferentes classes topológicas que correspondem a elementos P do grupo de permutações S_N . Esse grupo possui duas representações unidimensionais, uma trivial, $P \rightarrow 1$ e a representação de sinal $P \rightarrow \text{sign}(P)$, que descrevem a evolução de um sistema de N bósons ou férmions respectivamente.

No caso 2D, por outro lado, os fios associados com as partículas indistinguíveis estão em correspondência com os elementos do grupo de trança B_N . Um elemento do grupo de trança corresponde a N pontos distintos sobre o eixo horizontal e o tempo sendo representado pelo eixo vertical, como representado na figura 4.2. É importante deixar claro quando a troca é no sentido horário ou anti-horário, como visto na figura 4.2.

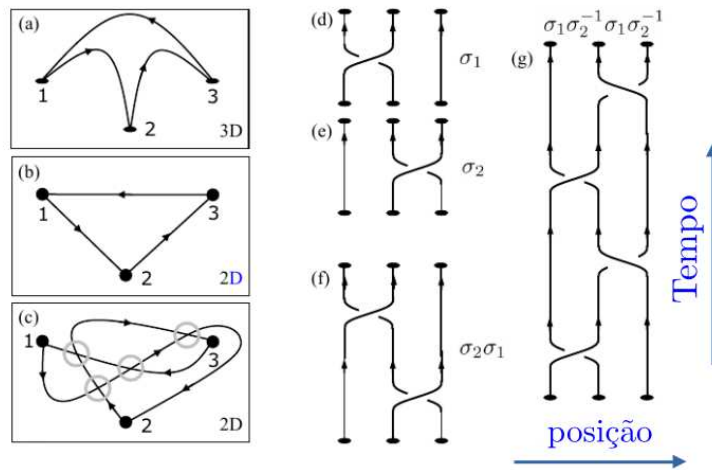


Figura 4.2: a-c Representação gráfica de trajetórias no espaço real e d-g linhas de mundo das quasipartículas para sistemas com 3 partículas idênticas. As imagens a-c correspondem aos mesmos elementos do grupo de permutação S_3 , $(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1)$, que determina unicamente a evolução do sistema em 3D (a), entretanto não em 2D (b,c). A evolução mostrada na figura (b) corresponde aos elementos de trança mostrados em (f). A evolução de (c) corresponde aos elementos de trança mostrados em (g). Todas essas operações podem ser construídas pelas operações elementares representadas em (d-e)

Uma operação de trança elementar corresponde a uma troca das partículas i e $i + 1$ no sentido anti-horário, como mostrado na figura 4.2. Uma descrição mais formal pode ser

dada pelos geradores σ_i , com $1 \leq i \leq N - 1$. Uma troca no sentido horário das partículas i e $i + 1$ corresponde ao inverso σ_i^{-1} .

É importante dizer que $\sigma_i^{-1} \neq \sigma_i$, ou seja, $\sigma_i^2 \neq 1$. Um elemento arbitrário do grupo de tranças pode ser escrito como um produto de geradores. Esses operadores que são os geradores do grupo de trança satisfaz algumas relações básicas, que são:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &\neq \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i - j| = 1 \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \text{ para } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vemos que os elementos P_i do grupo de permutação S_N representando permutações $i \leftrightarrow i + 1$ satisfaz relações similares, entretanto $P_i^2 = 1$, que leva o grupo a ser finito, possuindo $N!$ elementos. Já para tranças, temos $\sigma^2 \neq 1$ e o grupo sendo infinito.

4.1.2 Propriedades fundamentais de anyons

Dado um sistema de N férmions, se juntarmos números pares desses férmions, podemos criar compostos que se comportam efetivamente como bósons. Por exemplo, em um sistema supercondutor, podemos emparelhar elétrons em pares de Cooper, que podem se comportar como um bóson de spin zero, sendo um supercondutor do tipo *onda s*, ou um bóson com spin 1, que dá origem aos supercondutores *onda p*.

Podemos observar esse mesmo tipo de comportamento quando tratamos de anyons, porém a situação é geralmente mais complicada, pois temos diversos tipos de anyons. Disso surge uma questão interessante, que é investigar quais são as regras para se combinar diferentes tipos de anyos e quais seriam as estatísticas de troca.

Com intuito de introduzir o assunto, pensaremos no caso mais simples, onde possuímos um sistema de N anyons abelianos com estatística $\theta = \pi/m$, e compostos combinados de anyons, feitos de k partículas. A troca de dois compostos de duas partículas ($k = 2$) é equivalente a 4 trocas de anyons simples ($k=1$), e portanto os compostos $k = 2$ possuem estatística $\theta = 4\pi/m$. Descrever completamente o sistema significa caracterizar todas as espécies de anyons, (estatística $\theta = \pi/m, 4\pi/m, 9\pi/m, \dots$). O parâmetro estatístico é definido mod 2π , o que leva a um número finito de espécies distintas de anyons.

O bóson com parâmetro estatístico $\theta = 0$ se comporta de maneira trivial, sendo por vezes chamado de vácuo e denotado por $\mathbf{1}$. Como dito que o parâmetro estatístico é

definido somente até $\text{mod}2\pi$, podemos atribuir um número topológico $-k$ a espécies de partículas $m - k$ (para m par) ou $2m - k$ (para m ímpar), sendo a estatística dessas partículas $k^2\pi/m$.

As regras para se combinar dois anyons em um composto maior são chamadas *regras de fusão*. Para anyons abelianos, as regras são extremamente simples: $\phi_n \times \phi_k = \phi_{n+k}$ que pode ser vista como o anyon ϕ_n se fundindo com o anyon ϕ_k . No caso não abeliano, a situação se torna mais complicada (e mais interessante) pois diferentes *canais de fusão* são possíveis, similar ao que acontece quando combinamos dois elétrons em um supercondutor.

Em geral, as regras de fusão para um conjunto de partículas $\phi_0 \equiv \mathbf{1}, \phi_a, \phi_b, \dots$ pode ser escrito como

$$\phi_a \times \phi_b = \sum_c N_{ab}^c \phi_c, \quad (4.4)$$

mostrando que a fusão de partículas ϕ_a e ϕ_b pode resultar em qualquer uma das partículas ϕ_c para a qual $N_{ab}^c \neq 0$. No caso abeliano $N_{ab}^c = \delta_{a+b,c}$, mostrando que a fusão leva sempre a uma mesma partícula.

Por outro lado, no caso não abeliano, existe ao menos um par de anyons (ϕ_a, ϕ_b) que possui um canal de fusão múltiplo, ou seja, um par onde $\sum_c N_{ab}^c > 1$. É possível encontrar modelos onde ϕ_a e ϕ_b se funde em ϕ_c de maneiras distintas, possuindo $N_{ab}^c > 1$, mas não nos preocuparemos com eles nessa dissertação.

Vamos agora considerar uma situação um pouco mais geral, onde desejamos fundir três anyons ϕ_a, ϕ_b e ϕ_c em um anyon ϕ_d . Nessa situação, existe uma liberdade sobre qual par vc irá fundir primeiro, sendo possível fundir $\phi_a \times \phi_b$ em ϕ_i e posteriormente $\phi_i \times \phi_c$ em ϕ_d ou, podemos realizar a fusão de $\phi_b \times \phi_c$ em ϕ_j e por ultimo fundir $\phi_a \times \phi_j$ em ϕ_d . O canal de fusão total é fixo, portanto o resultado final ϕ_d é o mesmo, porem os estados intermediários são distintos.

Entretanto, esses estados intermediários são bases distintas de um mesmo espaço de Hilbert anyonico, e, portanto, podemos relacioná-los por meio de uma rotação na base dos estados intermediários. A relação entre essas bases distintas é dada por meio do que é comumente conhecido na literatura como matrizes F. Por meio das matrizes F, quaisquer fusões intermediárias podem ser mapeadas umas nas outras, como ilustrado na figura 4.3.

Como o canal de fusão é fixo, trançar essas duas partículas não pode alterar o canal de fusão, pois a carga topológica total (que é uma propriedade não local), não depende

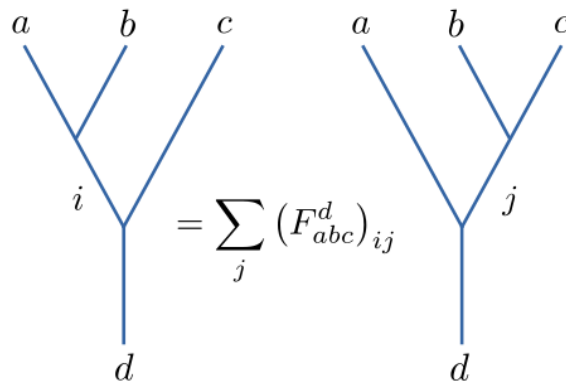


Figura 4.3: Correspondência no processo de fusão de um sistema com três anyons e canal de fusão fixo (d). As matrizes F podem ser vistas como rotações no espaço de fusão intermediário

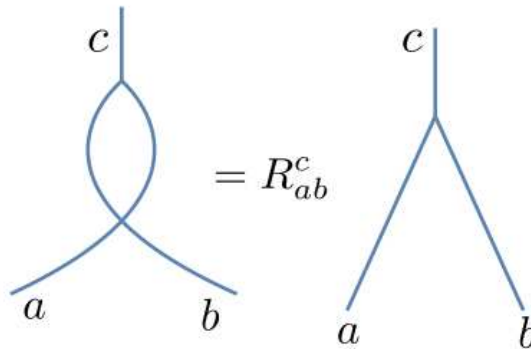


Figura 4.4: Representação simbólica de uma trança no sentido anti-horário de anyons a e b que se fundem em uma partícula c . Esse processo de trança gera uma fase R_{ab}^c

da evolução do par, desde que não ocorra uma trança com uma terceira partícula. Sendo assim, uma troca no sentido anti-horário das partículas ϕ_a e ϕ_b podem ser vistas como meia torção sob a partícula ϕ_c , que corresponde a multiplicar a função de onda da partícula c por um fator de fase, R_{ab}^c , como pode ser visto na figura 4.4.

Por essa breve análise introdutória, vemos que, para caracterizar as estatísticas de trança dos anyons precisamos especificar as espécies envolvidas, as regras de fusão (N_{ab}^c), a matriz F e as matrizes R .

Para finalizar essa breve introdução aos anyons, queremos relatar a conexão entre spin e estatística. Como vimos nos casos 3D, existe uma relação direta entre a estatística obedecida e o spin das partículas. No caso anyônico isso é também verdadeiro, entretanto, temos que o spin pode assumir qualquer valor.

Para tentar visualizar como isso ocorre, olharemos para fitas de mundo (ao invés de

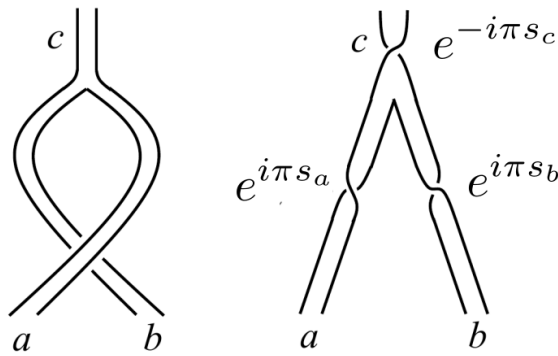


Figura 4.5: Representação simbólica de uma trança como na figura 4.4 utilizando fitas e mundo. A deformação das fitas produz processos que são topologicamente equivalentes a meias torções que correspondem a rotações das partículas ao redor uma das outras.

linhas). Considerando k trocas de partículas ϕ_a e ϕ_b com um dado canal de fusão c , sendo os spins dados por s_a , s_b e s_c , a fase adquirida por uma troca no sentido anti-horário de uma partícula com spin s por um ângulo θ é $e^{i\theta s}$.

Se considerarmos que a evolução é invariante sob deformações contínuas das fitas de mundo, o processo total de troca é equivalente a realizar k torções de π dessas fitas (rotação anti-horárias para partículas a e b , e horárias para c) como pode ser visto na figura 4.5. Essa equivalência é expressa de maneira similar ao teorema spin-estatística [43]

$$(R_{ab}^c)^k = e^{i\pi k s_a} e^{i\pi k s_b} e^{-i\pi k s_c}. \quad (4.5)$$

Da relação acima, vemos que se trocarmos a partícula q e sua anti-partícula \bar{q} de mesmo spin s , se fundindo ao vácuo $\mathbb{1}$, o resultado é similar à relação de spin estatística $R_{a\bar{a}}^{\mathbb{1}} = e^{i2\pi s}$

4.2 Férmions de Majorana na matéria condensada

Com o advento da física de partículas e a descoberta de novas partículas, surgiu a necessidade de descrever objetivamente as dinâmicas associadas a cada uma delas. Um dos grandes expoentes na descrição fundamental da natureza foi Ettore Majorana, e um de seus trabalhos mais marcantes foi onde ele deu luz aos chamados férmions de Majorana.

Objetivamente ele buscava uma forma de se descrever nêutrons, que haviam sido recém descobertos. Dentro disso, encontrou uma equação auto-conjugada que descrevia férmions neutros que eram suas anti-partículas. Pouco tempo após o trabalho de Majorana ficou

claro que sua descrição não era adequada aos nêutrons, pois esses eram compostos de partículas internas.

Entretanto, logo após, seus trabalhos foram base para discutir o comportamento dos neutrinos. Apesar de existir certa convicção de que os neutrinos não são efetivamente férmions de Majorana, ainda existe uma discussão acalorada sobre como a descrição de Majorana seria capaz de descrever fenômenos associados a dinâmica de neutrinos, mais especificamente a oscilação destes [44].

O nome Majorana ressurgiu em um local distinto da física de partículas, na matéria condensada. Nessa nova abordagem, campos similares aos de Majorana surgiam acoplados a vórtices [44] sendo similares aos férmions de Majorana, entretanto não possuindo spin semi inteiro, o que faz com que estes deixem de ser efetivamente férmions.

Pouco tempo depois, campos similares a esses acoplados a vórtices foram propostos por Alexei Kitaev [?], onde encontrou excitações em sistemas unidimensionais simples que exibiam propriedades de auto-conjugação da carga e são suas próprias anti-partículas.

Em matéria condensada, ao buscar excitações que poderiam de alguma forma ser iguais às anti-partículas, é natural investigar sistemas supercondutores. Nesse tipo de sistema, as excitações são compostas de elétrons e buracos, o que pode fazer com que excitações sejam naturalmente sem carga.

Sistemas supercondutores são extremamente interessantes e absolutamente ricos em discussões. Apesar disso, não entraremos nesse assunto a fundo. Para o leitor interessado em se aprofundar no entendimento de supercondutores, uma discussão simples e bastante detalhada pode ser encontrada em [9, 45].

4.2.1 Formalismo de Bogoliubov de-Gennes

Uma forma de se estudar supercondutores que é particularmente útil na busca por férmions de Majorana é o Hamiltoniano de Bogoliubov de-Gennes que introduziremos aqui brevemente (para o leitor interessado em se aprofundar nesse ferramental extremamente útil em diversas situações, uma extensa revisão sobre esse formalismo pode ser encontrada em [46]). Partiremos então diretamente do Hamiltoniano supercondutor [45], que pode ser escrito em uma aproximação de campo médio como

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{k\sigma} \epsilon_{k\sigma} c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} - \sum_k \Delta_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger - \sum_k \Delta_k^* c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} \quad (4.6)$$

uma forma de diagonalizar esse hamiltoniano é por meio da proposta de Bogoliubov, que pode ser escrito como

$$H = \frac{1}{2} \sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k \quad (4.7)$$

com $C_k^\dagger = [c_{k\uparrow}^\dagger, c_{-k\downarrow}]$ e $\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ d_k & e_k \end{pmatrix}$.

Então,

$$H = \frac{1}{2} \sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k = \begin{pmatrix} c_{k\uparrow}^\dagger & c_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ d_k & e_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Portanto, podemos escrever:

$$\sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k = \sum_k a_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + b_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + d_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + e_k c_{-k\downarrow} c_{-k\downarrow}^\dagger. \quad (4.9)$$

Se utilizarmos a relação de comutação de elétrons $[c_{k\sigma}^\dagger, c_{k'\sigma'}]_+ = \delta_{kk',\sigma\sigma'}$, podemos escrever

$$\sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k = \sum_k \left[a_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + b_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + d_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} - e_k c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow} \right] + \sum_k e_k. \quad (4.10)$$

Se compararmos essa expressão com o hamiltoniano BCS, vemos que podemos escrever

$$H_{BCS} = \sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k + \sum_k \epsilon_k, \quad (4.11)$$

com,

$$\mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} \epsilon_k & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & -\epsilon_k \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

O último termo que representa a soma sobre as energias é uma constante, e, como medimos apenas diferenças de energias, podemos negligenciar tal termo. Sendo assim,

$$H_{BCS} = \sum_k C_k^\dagger \mathcal{H}_k C_k. \quad (4.13)$$

Queremos agora diagonalizar esse hamiltoniano, e, para isso, vamos realizar uma ope-

ração unitária, de forma que temos

$$H_{BCS} = \sum_k C_k^\dagger U_k^\dagger (U_k \mathcal{H}_k U_k^\dagger) U_k C_k \quad (4.14)$$

onde U é uma matriz unitária da forma

$$U_k = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

e $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$. Na sequência, vamos definir os spinores na nova base como

$$\phi_k \equiv U_k C_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Dado tudo isso, podemos agora escrever o hamiltoniano como uma equação de autovalor simples, dada por

$$\mathcal{H}_k \phi_k = E_k \phi_k \quad (4.17)$$

que pode ser resolvida diretamente como

$$\begin{vmatrix} \epsilon_k - E_k & -\Delta_k \\ -\Delta_k^* & -\epsilon_k - E_k \end{vmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

e, portanto,

$$E_k = \pm \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta_k|^2} \quad (4.19)$$

onde E_k correspondem as energias das excitações do sistema.

Por fim, o hamiltoniano agora pode ser escrito em sua forma diagonalizada

$$H_{BCS} = \sum_k E_k \phi_k^\dagger \sigma_3 \phi_k, \quad (4.20)$$

onde σ_i corresponde as matrizes de Pauli.

Com o hamiltoniano nessa forma, podemos escrever a forma explícita dos operadores α_k na nova base.

$$\phi_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k\uparrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k^* & u_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k\uparrow} \\ c_{-k\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

que implica diretamente nas excitações de Bogoliubov, ou também conhecidas como bogoliubons:

$$\begin{aligned}\alpha_{k\uparrow} &= u_k c_{k\uparrow} + v_k c_{-k\downarrow} \\ \alpha_{-k\downarrow}^\dagger &= u_k^* c_{k\downarrow}^\dagger - v_k^* c_{k\uparrow}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Podemos estudar também a simetria partícula-buraco no hamiltoniano BCS no formalismo de Bogoliubov, e, para isso, vemos diretamente que

$$\sigma_1 C_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-k}^\dagger \\ c_k \end{pmatrix} = (C_{-k}^\dagger)^T.\tag{4.23}$$

Podemos ver que a operação acima levou uma quasi-partícula de bogoliubov em seu buraco. Sendo assim, somos levados a crer com essa operação que a existência de uma simetria partícula-buraco. Definimos o operador responsável por essa simetria como

$$P = \sigma_1 K,\tag{4.24}$$

onde K é o operador de conjugação. É fácil perceber que $P^2 = 1$.

Se então exigirmos que o hamiltoniano BCS tenha simetria partícula-buraco,

$$P\mathcal{H}_k P^\dagger = -\mathcal{H}_{-k},\tag{4.25}$$

vemos que necessariamente $\Delta_k = -\Delta_{-k}$. Essa é uma propriedade de supercondutores do tipo onda-p.

Outra propriedade especialmente interessante é a de que para cada excitação com uma energia E_k temos um estado com energia $-E_k$. É fácil notar isso partindo da equação de autovalor $\mathcal{H}\phi = E\phi$ e verificando como ela se comporta sobre a operação de simetria

$$\begin{aligned}P\mathcal{H}_k P^\dagger(P\phi_k) &= PE_k P^\dagger(P\phi_k), \\ \mathcal{H}_{-k}(P\phi_k) &= -E_{-k}(P\phi_k), \\ \mathcal{H}_k(P\phi_k) &= -E_k(P\phi_k)\end{aligned}\tag{4.26}$$

onde utilizamos $\mathcal{H}_{-k} = \mathcal{H}_k$ e $E_{-k} = E_k$. Com isso, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_k\phi_k &= E_k\phi_k \\ \mathcal{H}_k(P\phi_k) &= -E_k(P\phi_k).\end{aligned}\tag{4.27}$$

Se definirmos $\tilde{\phi}_k = P\phi_k$, vemos das equações acima que $\tilde{E}_k = -E_k$. Nos lembrando da forma explícita de ϕ_k , podemos analisar melhor a ideia exibida acima como

$$P\phi_k = \begin{pmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k^\dagger \\ \alpha_{-k} \end{pmatrix}\tag{4.28}$$

e, como $\tilde{\phi}_k = P\phi_k$, então

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_k \\ \tilde{\alpha}_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k^\dagger \\ \alpha_{-k} \end{pmatrix}\tag{4.29}$$

e com isso fica fácil concluir que $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k^\dagger$.

Ou seja, criar uma partícula de Bogoliubov com energia E_k ou destruir sua antipartícula com energia $-E_k$ tem o mesmo efeito no sistema. Disso podemos perceber que ser conseguirmos que $\tilde{E}_k = E_k$, então $E_k = -E_k$ e, portanto, $E_k = 0$. Como consequência, teremos

$$\alpha_k = \alpha_k^\dagger, \quad \text{com } E_k = 0,\tag{4.30}$$

que corresponde à propriedade fundamental dos férmions de Majorana, onde a partícula é igual a sua antipartícula.

4.2.2 Cadeia de Kitaev

Uma rota direta para se encontrar férmions de Majorana num sistema de matéria condensada foi proposto em 2001 por Kitaev [5], que mostrou como podemos obter essas partículas em um fio unidimensional, desde que o sistema obtenha supercondutividade, tenha um forte acoplamento spin-órbita e que os elétrons sejam sem spin.

Por esse último critério, o modelo de Kitaev foi desacreditado por um tempo. Porém, modos de Majorana foram propostos a serem procurados em sistemas compostos de isolantes topológicos e sistemas híbridos de supercondutor-semicondutor [44].

Para construir o hamiltoniano correto para uma cadeia que exhibe os modos de Majorana

rana que queremos encontrar, devemos obedecer três condições. Primeiramente, o hamiltoniano deve ter a forma quadrática, pois as simetrias do sistema devem seguir os elétrons originais, já que tudo o que foi feito até agora equivale a uma mudança de base para o sistema.

Em segundo lugar, a simetria de calibre $U(1) : c_j \rightarrow e^{-i\theta} c_j$ (que descreve a conservação da carga), deve se reduzir a uma simetria do tipo $Z_2 : c_j \rightarrow -c_j$, pois os modos de Majorana gerados a partir dos elétrons da cadeia não podem se misturar sob nenhuma transformação de simetria.

Por último, os elétrons na cadeia não podem exibir nenhuma dependência de spin, pois, como vimos, os modos de Majorana possuem uma simetria elétron-buraco, que correlacionam o operador $\gamma_k(E)$, com energia positiva, ao operador $\gamma_k^\dagger(-E)$, com energia negativa.

Um hamiltoniano que cumpre esses três requisitos foi dado por Kitaev em [5]:

$$H = -\mu \sum_{j=1}^n c_j^\dagger c_j - \sum_{j=1}^{N-1} \left[t c_j^\dagger c_{j+1} + t c_{j+1}^\dagger c_j + |\Delta| e^{i\phi} c_j c_{j+1} + |\Delta| e^{-i\phi} c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger \right], \quad (4.31)$$

em que μ representa o potencial químico dos elétrons, t descreve o potencial de salto (movimento de elétrons pelos sítios da cadeia), $\Delta e^{i\phi}$ representa o parâmetro de ordem supercondutor, com $|\Delta|$ sendo a magnitude do gap supercondutor (que é a energia aproximada para romper um par de Cooper) e ϕ é uma fase escolhida espontaneamente do estado supercondutor [47]. Percebemos aqui que o potencial de salto e o emparelhamento supercondutor conectam elétrons vizinhos, enquanto o potencial químico esta associado a contagem dos elétrons presentes no sistema.

Com intuito de estudar a cadeia de Kitaev no formalismo de Bogoliubov (para posteriormente introduzirmos a noção de topologia desse sistema), precisamos passar para o espaço recíproco. Para isso, vamos definir a seguinte transformação sobre os operadores

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikx_j} c_k \quad , \quad c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikx_j} c_k^\dagger \quad (4.32)$$

e, com isso, após alguns passos simples, porém tediosos, o hamiltoniano assume a forma

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ -2[\mu + t\cos(ka)]c_k^\dagger c_k + i\Delta e^{i\phi} \text{sen}(ka)c_k c_{-k} - i\Delta e^{-i\phi} \text{sen}(ka)c_{-k}^\dagger c_k^\dagger \right\}. \quad (4.33)$$

Escrevendo o hamiltoniano acima na forma de Bogoliubov-de Gennes, e definindo $C_k^\dagger = [c_k^\dagger, c_{-k}]$, encontramos

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -[\mu + t\cos(ka)] & i\Delta e^{i\phi} \text{sen}(ka) \\ -i\Delta e^{-i\phi} \text{sen}(ka) & \mu + t\cos(ka) \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Vimos que, de maneira geral, as energias no formalismo de Bogoliubov são dadas por $E_k = \pm \sqrt{\epsilon_k^2 + |\Delta|^2}$, e, por comparação com 4.12, vemos que $\epsilon_k = -[\mu + t\cos(ka)]$ e $\Delta_k = i\Delta e^{i\phi} \text{sen}(ka)$. Temos portanto que

$$\begin{aligned} E_k &= \pm \sqrt{[\mu + t\cos(ka)]^2 + \Delta^2 \text{sen}^2(ka)} \\ &= \pm \sqrt{(t - \Delta^2)\cos^2(ka) + 2\mu t\cos(ka) + \mu^2 + \Delta^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como visto na seção anterior, podemos encontrar campos similares aos majoranas quando a energia é nula, e, portanto, queremos que $E_k = 0$, ou seja

$$(t - \Delta^2)\cos^2(ka) + 2\mu t\cos(ka) + \mu^2 + \Delta^2 = 0$$

e queremos que essa relação seja satisfeita para todo Δ , sendo assim, devemos exigir que $-\Delta^2\cos^2(ka)$ se anule com Δ^2 , o que acontece se $\cos(ka) = \pm 1$. Portanto, temos diretamente que

$$\begin{aligned} (t + \mu)^2 &= 0, \quad \text{se } \cos(ka) = 1, \\ (t - \mu)^2 &= 0 \quad \text{se } \cos(ka) = -1, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e, é possível perceber que as soluções com energia nula são os pontos $\mu = \pm t$.

Esses pontos são exatamente a extremidade da banda do fio quântico e, em uma abordagem por meio da primeira zona de Brillouin, os pontos limites $k = \pm \frac{\pi}{a}$, correspondem a $\mu = t$ enquanto que o ponto central da zona de Brillouin $k = 0$ corresponde à $\mu = -t$.

Esses dois regimes são fundamentalmente distintos, e estão diretamente correlacionados com a possibilidade da existência e da estabilidade dos modos de Majorana. Portanto, nos dedicaremos um pouco em discutí-los com algum detalhe a seguir.

4.2.3 Invariante de Kitaev

De maneira geral, transições de fase são estudadas por meio do método de Landau, estando associadas à quebra espontânea de alguma simetria do sistema [48]. Entretanto, nas últimas décadas, novas formas de se compreender transições de fase foram descobertas por meio da noção de ordem topológica.

A topologia é um ramo de estudo da matemática, que estuda como objetos matemáticos se portam sob transformações contínuas. Esse ramo é dividido em topologia geral, topologia algébrica e topologia geométrica. Introduziremos aqui a noção de topologia geométrica, que foi inicialmente estudada por Gauss e Borel [49].

Tradicionalmente, os conceitos de topologia geométrica podem ser vistos por meio de um exemplo simples. Imaginemos que possuímos uma esfera no espaço tridimensional e comecemos a distorcê-la de maneira suave. Diversas formas podem ser moldadas a partir da esfera sem que nada abrupto seja feito. É possível se obter elipsóide (próximo ao formato de uma bola de futebol americano), um cilindro reto ou até mesmo um copo.

Dizemos que todos os objetos que podem ser obtidos por deformações suaves a partir de um outro, é topologicamente equivalente a este. Então, a esfera, o elipsóide, o cilindro e o copo pertencem a uma mesma classe topológica.

Se considerarmos agora um toroide, é possível perceber que não é possível de maneira nenhuma obter esse toroide a partir da esfera sem que algum tipo de ruptura abrupta seja feita, ou seja, é preciso “rasgar” a esfera em algum momento para se obter o toro. A partir de um toroide, podemos obter, por exemplo, uma caneca, que possui apenas um furo. Então, temos que a esfera pertence a uma classe topológica enquanto que o toroide e a caneca pertencem a outra classe.

O que diferencia essas duas classes é o número de furos que os objetos de cada classe topológica possuem, e esse número de furos é dito ser o invariante topológico, é aquilo que caracteriza a qual classe pertence o objeto. A esse número de furos, é dado o nome de Genus, por questões históricas.

A esfera tem genus $g = 0$ (nenhum buraco), já a caneca tem genus $g = 1$ (um buraco). Vemos que podemos caracterizar a topologia simplesmente identificando o invariante topológico. Geralmente não é tão simples calcular esse invariante, mas uma vez feito, podemos classificar todas as classes topológicas.

Na matéria condensada, temos uma situação similar à exposta acima, entretanto vamos

olhar para à geometria das bandas do material, dando origem então a teoria topológica de bandas. Como dito acima, fases distintas não podem ser conectadas de forma suave, portanto, ao analisar a estrutura de bandas, as transições topológicas são caracterizadas pelo fechamento do gap em pontos protegidos por alguma simetria.

Do ponto de vista topológico, o vácuo é considerado um isolante trivial, portanto não existe diferença topológica entre o isolante comum e o vácuo. Sendo assim, ao olharmos para a borda de um isolante trivial (que está em contato com o vácuo) nenhum efeito importante acontece, visto que podemos conectar o vácuo ao isolante por um caminho adiabático. Então, os estados de superfície do isolante são conectados aos estados de vácuo.

Por outro lado, se olharmos para um isolante não trivial, os estados de borda diferem dos estados de vácuo, pois são distintos topologicamente, e isso faz com que existam estados de superfície que são metálicos (sem gap), visto que é necessário uma transição de fase topológica na fronteira do material. Essa visão vai de encontro com a ideia exposta sobre a impossibilidade da conexão da esfera com o toroide sem uma ruptura.

Podemos aplicar a ideia de fases topológicas também a supercondutores, onde os estados normais, que são caracterizados por excitações de Bogoliubov apresentam um gap.

Nas fases não triviais do supercondutor, é possível a existência de excitações de energia zero, ou seja, sem um gap, e essas partículas, como dito acima, se comportam como Majorana.

Vamos agora olhar para os diferentes regimes topológicos associados à cadeia de Kitaev, e, para isso, vamos estudar o hamiltoniano de Kitaev 4.31, reescrito sob a forma

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_k & \Delta_k \\ \Delta_k^* & -\epsilon_k \end{pmatrix} = \epsilon_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \text{Re}[\Delta_k] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \text{Im}[\Delta_k] \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

que pode ser escrito sob a forma compacta

$$\mathcal{H} = \vec{h}(k) \cdot \vec{\sigma} \quad (4.38)$$

onde σ são as matrizes de Pauli. Temos $h_x(k) = \text{Re}[\Delta_k]$, $h_y(k) = \text{Im}[\Delta_k]$ e $h_z(k) = \epsilon_k$. Se olharmos para os valores de ϵ_k e Δ_k da cadeia de Kitaev, vemos que

$$\begin{aligned} h_{x,y}(k) &= -h_{x,y}(-k) \\ h_z(k) &= h_z(-k). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Podemos, por conveniência, definir um versor que mapeia todo o hamiltoniano em uma esfera unitária

$$\hat{h}(k) = \frac{\vec{h}(k)}{|\vec{h}(k)|}. \tag{4.40}$$

Das relações de paridade, vemos que, nos limites da primeira zona de Brillouin ($k = 0$ e $k = \pi$), temos $h_{x,y}(0) = h_{x,y}(\pi) = 0$. Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= s_0 \hat{z} \\ \hat{h}(\pi) &= s_\pi \hat{z}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Lembrando que h_z representa a energia cinética, e, se escolhermos o parâmetro de rede como 1, temos

$$h_z(k) = -\mu + t \cos(k) \tag{4.42}$$

Notamos que o começo e final da trajetória, que são os limites das zona de Brillouin, correspondem aos polos da esfera unitária ($s_0 \hat{z}$ e $s_\pi \hat{z}$). Esses pontos distintos são consequência da simetria partícula-buraco, e é isso que garante estados com proteção topológica no sistema (os valores de s_0 e s_π são nada mais que a energia cinética nos polos), que claramente podem assumir apenas valores ± 1 , porém, como queremos alguma quantidade que seja invariante ao longo de todo o trajeto adiabático, vamos olhar para o produto $s_0 s_\pi$. Quando variamos continuamente o valor de k , de 0 a π , podemos identificar dois comportamentos: quando a trajetória sobre a esfera unitária for fechada, o valor do produto $s_0 s_\pi$ é sempre positivo. Entretanto, se o caminho for tal que em algum momento, ocorre o fechamento do gap, o produto se torna negativo.

Sendo assim, podemos utilizar o produto $s_0 s_\pi$ como o invariante topológico do modelo de Kitaev, análogo ao genus no caso da esfera,

$$\eta = s_0 s_\pi. \tag{4.43}$$

Temos então que se $\eta = 1$ encontramos o chamado regime topologicamente trivial,

enquanto se $\eta = -1$, temos o regime topológico. Partindo da relação da energia cinética 4.42, temos

$$\eta = s_0 s_\pi = -\frac{t^2 - \mu^2}{|t - \mu|^2} = \begin{cases} -1, & \text{se } |\mu| < t \\ +1, & \text{se } |\mu| > t \end{cases} \quad (4.44)$$

É fácil notar que a transição entre as fases topológica e trivial se dá quando $\mu = \pm t$. Olhando para a energia no ponto de transição ($\mu = \pm t$) nos limites da zona de Brillouin, vemos que $E_{0,\pi} = 0$, que é exatamente a condição para a existência de modos de Majorana em supercondutores do tipo p. Esse é o motivo de ser por vezes referenciado na literatura como Majoranas modo zero.

No regime topológico do fio, as bordas do material possuem uma distinção do exterior do fio (vácuo), é por essa distinção que sempre encontramos modos de Majorana nas bordas do fio no regime topológico. É necessária uma transição de fase nos limites entre o vácuo e o fio topológico.

Visto que queremos então visualizar o comportamento dos modos de Majorana no fio, passamos pois a descrever o fio em termos dos operadores de Majorana. Para isso, reescrevemos a hamiltoniana em termos dos operadores de majorana γ , que satisfazem a álgebra $\{\gamma_{\alpha,j}, \gamma_{\alpha',j'}\} = 2\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'}$, onde cada elétron sem spin pode ser escrito como

$$c_j = \frac{e^{-i\phi/2}}{2}(\gamma_{B,j} + i\gamma_{A,j}). \quad (4.45)$$

Substituindo esses novos operadores na hamiltoniana de Kitaev, com uma enfadonha álgebra, obtemos:

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N (1 + i\gamma_{B,j}\gamma_{A,j}) - \frac{i}{4} \sum_{j=1}^{N-1} [(\Delta + t)\gamma_{B,j}\gamma_{A,j+1} + (\Delta - t)\gamma_{A,j}\gamma_{B,j+1}]. \quad (4.46)$$

Esse hamiltoniano pode ser representado como na figura 4.6, e se torna extremamente simples em dois cenários limites. O primeiro deles é encontrado quando tomamos $\mu \neq 0$ e $t = \Delta = 0$. Do ponto de vista topológico, é fácil perceber que o regime é trivial, visto que $\eta = +1$. Nessa situação, temos

$$H = -\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N (1 + i\gamma_{B,j}\gamma_{A,j}) \quad (4.47)$$

4.3 Computação quântica com MZM

Visto que podemos construir um modelo que suporte modos de Majorana, queremos agora discutir como essas partículas podem ser efetivamente utilizadas para realizar computação quântica.

Os férmions de Majorana pertencem a uma classe de anyons conhecidos com Ising anyons. A importância desses anyons deu início com os trabalhos de Moore e Read que sugeriram que as excitações no plato $\nu = 5/2$ do efeito hall quântico fracionário seriam anyons não abelianos [50, 51].

Foi mostrado que as estatísticas dessas excitações são essencialmente a de anyons não abelianos, somados a um termo abeliano [52]. Os modos de majorana se comportam como anyons não abeliano e veremos então as principais características e como fomentar a computação com essa classe de excitações.

O modelo de majoranas contem três tipos de partículas, sendo elas o vácuo, $\mathbb{1}$, o anyon não abeliano, que no caso é o majorana γ e o férmion (elétron) ψ . O vácuo se funde trivialmente com as outras partículas $\gamma \times \mathbb{1} = \gamma$ e $\psi \times \mathbb{1} = \psi$. Os canais de fusão não triviais são, então,

$$\gamma \times \gamma = \mathbb{1} + \psi, \quad \gamma \times \psi = \gamma, \quad \psi \times \psi = \mathbb{1}. \quad (4.49)$$

Vemos assim a existência de dois canais de fusão associados ao canal de fusão dos modos de majorana, que são exatamente os dois estados ortogonais que compõem o estado fundamental no modelo de Kitaev, onde os dois estados possuem paridade distinta. Vemos também que dois férmions se fundem no vácuo, e portanto o número total de férmions não é bem definido, porém, a paridade é uma quantidade bem definida e pode ser medida.

Se considerarmos a fusão de três majoranas, dado que o canal de fusão total é fixo, encontramos o único caso em que temos mais de uma quase-partícula intermediária, e a fusão total, pelas regras acima colocadas, só pode ser um majorana.

Como $\gamma \times \gamma = \mathbb{1} + \psi$, o espaço de fusão intermediário possui duas dimensões, e podemos escolher os estados de fusão $|\gamma, \gamma \rightarrow \mathbb{1}\rangle$ e $|\gamma, \gamma \rightarrow \psi\rangle$ como uma possível base. Tomando então essa base, a matriz F é dada por

$$F_{\gamma\gamma}^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Essa equação pode ser compreendida a partir do diagrama 4.3 tomando todas as partículas iniciais como γ e as partículas intermediárias sendo o vácuo $\mathbb{1}$ ou o férmion ψ . A derivação dessa equação utiliza as identidades de pentágono, que são equações de consistência que as matrizes F devem satisfazer. Todos os passos podem ser encontrados no capítulo 4 do livro do Pachos [43].

As matrizes R que nos fornecem as fases adquiridas quando se move um Majorana ao redor do outro (quando o canal de fusão é fixo) podem ser obtidas por meio das identidades de hexágono [43], e possuem a forma explícita

$$R_{\gamma\gamma}^{\mathbb{1}} = e^{-i\pi/8}, \quad R_{\gamma\gamma}^{\psi} = e^{3i\pi/8}, \quad R_{\psi\psi}^{\mathbb{1}} = -1, \quad R_{\gamma\psi}^{\gamma} = i \quad (4.51)$$

Note que a troca de dois férmions muda o sinal do estado, como era de se esperar. Já a troca de dois majoranas, depende do canal de fusão do par.

Tendo em mãos as matrizes R e F , podemos partir para a responder à pergunta fundamental: como podemos explorar os majoranas para computação quântica topológica? Em essência, com um par de p majoranas γ tem dois canais de fusão, podemos visualiza-los como um qubit, com estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, que corresponde aos canais de fusão $\mathbb{1}$ e ψ .

Entretanto, quando falamos de computação classicamente, estamos falando sobre a manipulação de bits por meio de operações lógicas, de modo que dado um conjunto inicial de bits em estados devidamente preparados, após as devidas operações lógicas, teremos que os bits no estado final estarão organizados de modo a fornecer a resposta do problema que está sendo computado efetivamente.

Isso é também válido na computação quântica, onde um qubit precisa ser manipulado, de modo a gerar sobreposições e transformações de $|0\rangle$ em $|1\rangle$ ou vice versa e os canais de fusão de majoranas só podem ser alterados quando são trançados com majoranas que pertencem a pares distintos. Sendo assim, um par de majorana se torna inviável, visto que o canal de fusão de um único par é fixo, e, portanto, o máximo que pode ser obtido são fases globais no estado.

Vamos então considerar, para um único qubit, um conjunto com dois pares de majoranas, e assumiremos que os pares são gerados do vácuo, como mostrado na figura 4.9,

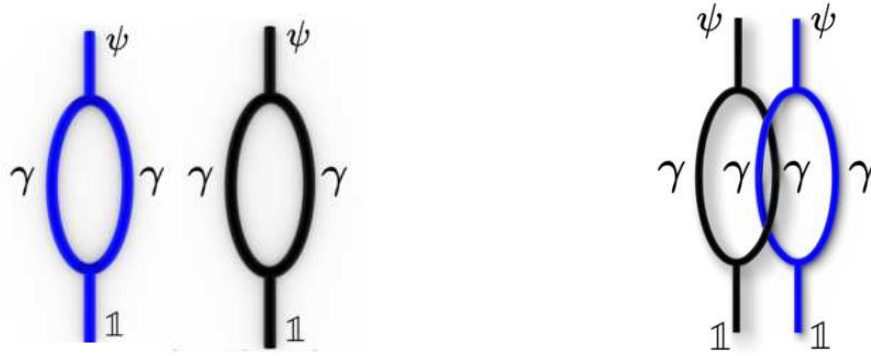


Figura 4.9: (a) Linhas de mundo para um conjunto de dois pares de majorana que surgem do vácuo. (b) Linhas de mundo para os mesmos pares de majorana que surgiram do vácuo, porém trançando um majorana de cada par antes da fusão. Vemos que nessa situação é possível alterar o canal de fusão de cada par.

tal que o estado inicial de cada par é dado por $\mathbb{1}$.

Após isso, vamos trançar dois majoranas que pertencem a pares distintos, como na figura 4.9. Perceba que esses majoranas não possuem diretamente um canal de fusão, ou seja, quando fundidos devem retornar uma superposição de $\mathbb{1}$ e ψ . Para determinar então o efeito dessa troca, primeiro utilizamos a matriz F para a fusão dos majoranas em uma quase-partícula α , com α sendo $\mathbb{1}$ ou ψ .

Após isso, precisamos considerar a rotação de 2π , aplicando então a matriz $R_{\gamma\gamma}^\alpha$ duas vezes e, finalmente, restauramos o canal de fusão original por meio da aplicação de F^{-1} . Explicitamente, o estado de fusão do primeiro par, após essa operação de trança com a terceira partícula se torna [43]

$$|\gamma, \gamma \rightarrow \mathbb{1}\rangle \Rightarrow \sum_{\beta} |\gamma, \gamma \rightarrow \beta\rangle B = e^{-i\pi/4} |\gamma, \gamma \rightarrow \psi\rangle \quad (4.52)$$

onde, a matriz B é dada por

$$B = F^{-1} R^2 F = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Concluimos assim que trançar com uma terceira partícula muda o canal de fusão do primeiro par de $\mathbb{1}$ para ψ . Uma conclusão similar é encontrada para o segundo par.

Portanto, os quatro majoranas com um canal de fusão total $\mathbb{1}$, possui um espaço de fusão intermediário bidimensional que é expandido pelos estados $|\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle$ e $|\psi\psi\rangle$, onde a

notação $||ab\rangle\rangle = |\gamma, \gamma \rightarrow a\rangle \otimes |\gamma, \gamma \rightarrow b\rangle$ é usada para simplificar a descrição dos espaços de fusão. O espaço bidimensional que corresponde a um qubit pode ser então utilizado para armazenar informação de maneira não local.

Uma consideração similar se aplica a um par de majoranas criados a partir do vácuo e outro a partir de um elétron, tendo então um canal de fusão total igual a ψ . A base nessa situação é dada por $||1\psi\rangle\rangle$ e $||\psi 1\rangle\rangle$, e, como antes, trançar majoranas pertencentes a diferentes pares muda o canal de fusão desse par. Estados dessa forma podem ser úteis para as investigações sobre detecção dos majoranas, visto que podemos teletransportar um elétron de um par a outro apenas por meio de tranças [43].

Para três pares de majoranas com canal de fusão total igual ao vácuo, temos como estados de base $||111\rangle\rangle$, $||1\psi\psi\rangle\rangle$, $||\psi 1\psi\rangle\rangle$ e $||\psi\psi 1\rangle\rangle$, que é a base do espaço quadridimensional que corresponde a dois qubits. Esses estados serão utilizados no próximo capítulo, quando investigarmos as propriedades de não localidade nos modos de Majorana.

De maneira geral, temos que n pares de majoranas com um canal de fusão fixo deve gerar um espaço de Hilbert de dimensão 2^{n-1} , que pode ser visto com $n-1$ qubits lógicos. Operações lógicas podem ser efetuadas para se trançar as partículas.

Apesar de toda a riqueza e simplicidade trazida pelo modelo de computação com majoranas, estes não são suficientes para computação quântica topológica universal [53, 54]. É necessário adicionar às operações de tranças uma porta lógica de fase e uma medida de 2-qubit, que podem ser realizadas de maneira não topológica.

Pelo fato dessas operações serem não topológicas, elas introduzem erros no sistema, contudo, resultados recentes [55] mostram que as taxas de erro causadas por essas operações não topológicas, após um protocolo de correção de erros é da ordem de 14%, o que torna a computação com majoranas viável.

Capítulo 5

EMARANHAMENTO DE MAJORANAS

Visto a importância já apresentada acerca do emaranhamento, e acima disso, o potencial previsto da computação quântica topológica, apresentaremos agora uma configuração de cadeias de Kitaev dado um estado inicial genérico, onde encontramos emaranhamento em diversas bases de medida.

A importância de tal situação se dá na execução de protocolos de computação, onde a liberdade de escolha de configuração é extremamente útil, como, por exemplo, o teletransporte [56]. Para isto, descreveremos uma configuração de “box-qubit”, onde a informação é armazenada na carga topológica anyonica, dada pela paridade do sistema. Todo esse capítulo foi construído com base nas referências: [?, 57–59].

5.1 Qubit de Majorana

Começaremos esse capítulo descrevendo como se dá a construção de um único qubit baseado em férmions de Majorana. Como vimos no capítulo anterior, no modelo de Kitaev temos um estado fundamental degenerado, dado por estados ortogonais de paridade distinta que podem ser descritos por operadores eletrônicos que são compostos pelos majoranas de borda $f_b^\dagger = \gamma_{A,1} + \nu\gamma_{B,N}$.

Os distintos estados de paridade acontecem os dois no estado topológico da cadeia de Kitaev, sendo estes estados, os espaços de fusão vistos no capítulo anterior e são aqui caracterizados pelo número de elétrons que compõem o estado topológico em questão (se são pares ou ímpares).

Podemos denominar o estado de paridade par como $|0\rangle$ e o estado de paridade ímpar por $|1\rangle$, onde a paridade pode ser calculada por $\mathcal{P} = \prod_j \nu\gamma_j$ e assim, temos o qubit

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle, \text{ onde,} \\
f_b^\dagger |0\rangle &= |1\rangle, \\
f_b |0\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Entretanto, apesar de ser um estado de dois níveis físico, esse qubit não pode gerar um estado lógico, ou seja, não é possível realizar sobre ele operações que alterem o estado $|0\rangle$ para $|1\rangle$ ou vice versa. Para entender essa impossibilidade, voltemos à operação de trança, dada pelas equações 4.52, 4.53. De uma maneira mais geral, as matrizes de trança podem ser escritas como [44, 47]

$$B_{ij} = \frac{1 + s_{ij}\gamma_i\gamma_j}{\sqrt{2}}, \tag{5.2}$$

onde s_{ij} representa um sinal que pode ser adquirido por um dos majoranas durante a trança, devido à natureza não abeliana da troca [44].

Quando atuamos com uma operação de trança sobre um qubit físico simples, obtemos

$$\begin{aligned}
B_{A1,BN} |0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) |0\rangle \\
B_{A1,BN} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) |1\rangle.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Portanto, vemos que uma cadeia de Kitaev sozinha não é útil para a computação. Isso se dá pela restrição quanto a criação de partículas, que no sistema supercondutor deve ocorrer sempre aos pares, conservando então a paridade. Podemos partir para a segunda configuração mais simples, que se dá pela junção de duas cadeias de Kitaev, considerando novamente a paridade total fixa.

Daqui em diante, como estamos interessados apenas nos majoranas de borda, consideraremos sempre o estado topológico da cadeia de Kitaev, e com isso, vamos definir γ_1, γ_2 os majoranas livres na borda do primeiro fio, γ_3, γ_4 , os majoranas do segundo fio e assim por diante, como mostrado na figura 5.1a.

Nessa nova configuração, podemos executar operações de trança da mesma forma como no qubit físico, entretanto nessa nova situação encontramos que ao trocar dois majoranas que pertencem a regiões topológicas distintas (diferentes fios) podemos obter sobreposições de estados, o que é essencial para operações lógicas.

Vamos então definir o qubit lógico, composto por dois fios de Kitaev que podem ter

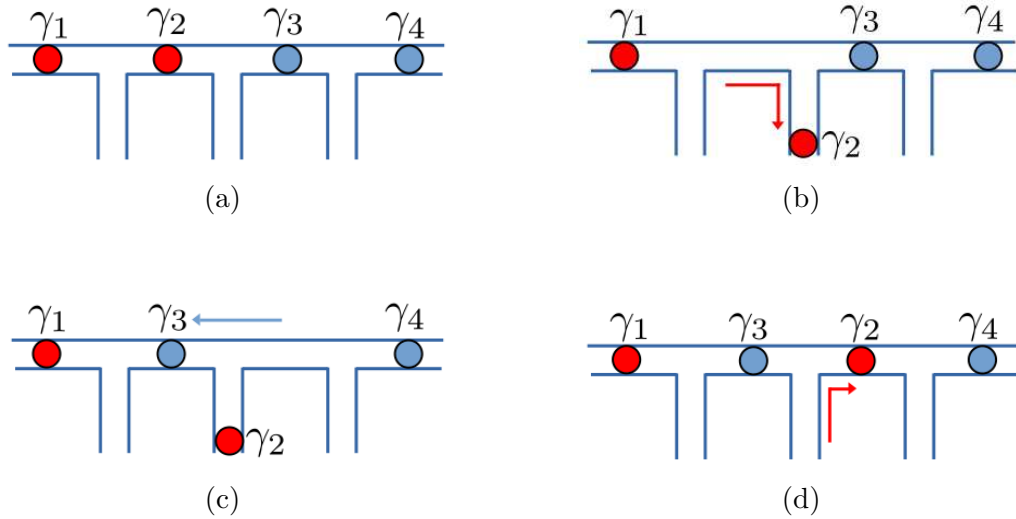


Figura 5.1: a Representação esquemática de um único qubit. São necessários 2 pares de majoranas para configurar um qubit lógico, devido a preservação da paridade total do sistema b,c e d esquema para troca de dois majoranas que pertencem a fios diferentes dando origem a combinações de estados lógicos

separadamente paridade par ou ímpar, desde que a paridade total seja sempre a mesma, sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= c_1 |\mathbf{0}\rangle + c_2 |\mathbf{1}\rangle, \\
 f_1^\dagger f_2^\dagger |\mathbf{0}\rangle &= |\mathbf{1}\rangle, \\
 f_1 f_2 |\mathbf{0}\rangle &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Onde os estados $|\mathbf{1}\rangle$ $|\mathbf{0}\rangle$ são definidos a partir de $|p_1, p_2\rangle$, que são as paridades dos fios individuais. Vemos aqui que podemos ter dois tipos de qubits lógicos, os com paridade par ($|\mathbf{0}\rangle = |0_1 0_2\rangle$ e $|\mathbf{1}\rangle = |1_1 1_2\rangle$) e o qubit com paridade ímpar ($|\mathbf{0}\rangle = |0_1 1_2\rangle$ e ($|\mathbf{1}\rangle = |1_1 0_2\rangle$)).

Essas operações de trança que foram definidas a partir das linhas de mundo 4.9 pode ser implementada em um esquema de cadeia de Kitaev como demonstrado na figura 5.1, e é possível mostrar que, apesar de ser construído a partir de sistemas unidimensionais, a estatística de troca dessas partículas obedece a mesma regra que anyons em sistemas 2D [47], e são descritas por:

$$\begin{aligned}
 U_{23} U_{23} |\mathbf{0}\rangle &= \gamma_2 \gamma_3 |\mathbf{0}\rangle = i |\mathbf{1}\rangle \\
 U_{23} U_{23} |\mathbf{1}\rangle &= \gamma_2 \gamma_3 |\mathbf{1}\rangle = i |\mathbf{0}\rangle.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Construído pois o primeiro qubit lógico de majoranas e com intuito de estudar sistemas compostos, vamos construir o segundo qubit. Poderíamos pensar que, como são

necessários 4 majoranas para um qubit, deveríamos ter 8 majoranas para dois qubits, entretanto, como a informação é armazenada na paridade dos pares de majoranas, apenas 6 majoranas são necessários. Cada par pode admitir paridade +1 ou -1, portanto, se a paridade **total** for fixa e igual a +1, temos as opções como na tabela 5.1.

$\gamma_1\gamma_2$	$\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_5\gamma_6$	P_T
+1	+1	+1	+1
+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	+1
-1	-1	+1	+1

Tabela 5.1: Tabela com os possíveis estados de paridade para um conjunto de 6 majoranas com paridade total fixa em -1 (canal de fusão fermiônico)

Onde, como mostrado no capítulo anterior, as paridades estão associadas aos canais de fusão anyonico, sendo $p = -1$ o par se fundindo em um férmion ψ e $p = +1$ a fusão no vácuo $\mathbb{1}$. A partir dessa base simples composta de majoranas, podemos, a principio, criar quantos qubis for necessário, bastando apenas a inclusão de mais fios de Kitaev em fases topológicas.

Criado então o par de qubits, construir uma superposição de estados lógicos é a primeira tarefa para computação quântica, e isso pode ser feito simplesmente por uma operação de tranças da forma

$$\begin{aligned}
 U_{12}U_{23}U_{12}|\mathbf{0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3)|\mathbf{0}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}\rangle + |\mathbf{1}\rangle), \\
 U_{12}U_{23}U_{12}|\mathbf{1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_3)|\mathbf{1}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\mathbf{0}\rangle - |\mathbf{1}\rangle).
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Essa operação de tranças configura uma porta lógica conhecida como porta de Hadamard, que é por vezes utilizada como primeiro passo para a computação. Essa operação via diagrama de tranças pode ser vista na figura 5.2

5.2 Rede de Majoranas

Uma computação quântica de maneira escalável, necessita um número arbitrário de qubits que estão disponíveis para efetuarem portas lógicas, para isso, vamos aqui considerar um sistema em forma de rede, onde diversos fios de Kitaev são dispostos lado a lado, como mostrado na figura 5.3.

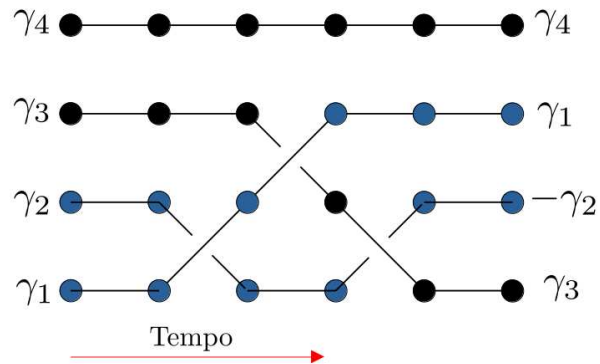


Figura 5.2: Diagrama de tranças para troca de majoranas oriundos de regiões topológicas diferentes, dando origem a uma sobreposição de estados. Essa operação é conhecida como porta de Hadamard.

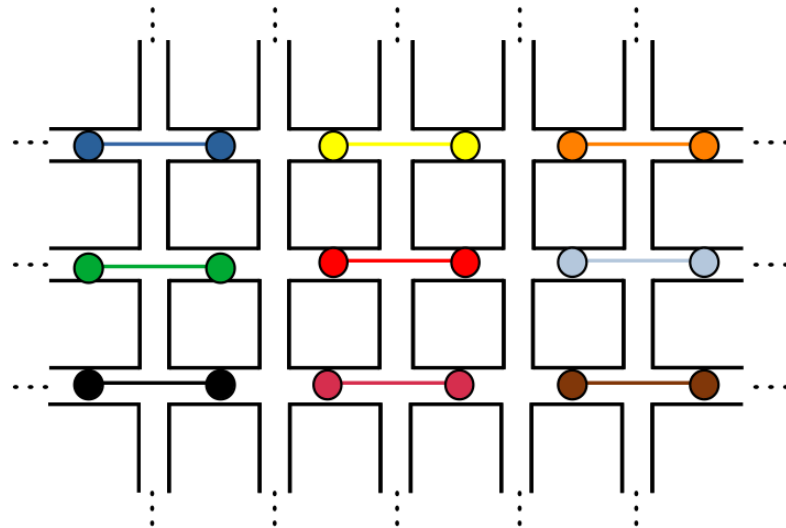


Figura 5.3: Rede de majoranas, onde cada linha demonstra um estado topológico de Kitaev e as regiões não preenchidas por linhas encontram-se em estados triviais, podendo ser transformadas em regiões topológicas de acordo com a necessidade de transporte dos majoranas para operações lógicas.

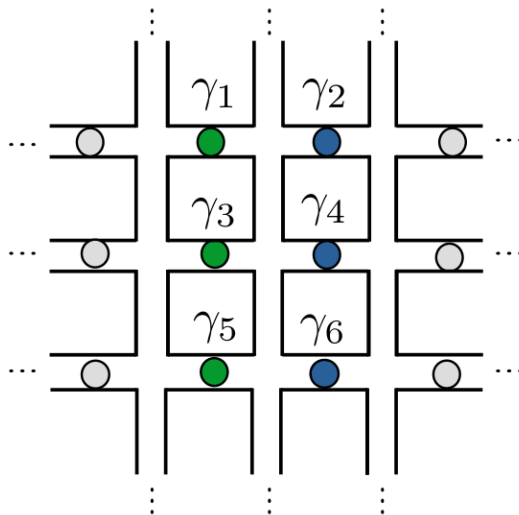


Figura 5.4: Configuração de Majoranas dados por um subespaço da rede geral. Os Majoranas do lado esquerdo, em verde, serão os disponíveis a Alice, enquanto que os do lado direito, em azul, os de Bob.

Essa configuração pode ser construída de maneira relativamente simples seguindo a proposta experimental ???. Teremos em mente daqui por diante que a configuração geral do sistema é dada pela descrição acima, mas vamos nos concentrar em um subespaço desse sistema, sendo esse subespaço com paridade total definida como -1, ou seja, a fusão de todos os majoranas levaria a um elétron.

Tendo em vista que queremos estudar o emaranhamento de dois qubits de Majorana, bastam 6 majoranas, como representado na figura 5.4. Nessa situação, vamos tratar os majoranas da esquerda (em verde), como sendo a parte de Alice, enquanto que os majoranas da direita (azul) será a parte referente a Bob.

Inicialmente, vamos escrever os operadores de criação eletrônicos que dão origem aos 6 majoranas como

$$f_{12}^\dagger = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad f_{34}^\dagger = \gamma_3 + i\gamma_4, \quad f_{56}^\dagger = \gamma_5 + i\gamma_6. \quad (5.7)$$

Podemos descrever esse sistema por meio de um estado geral conforme

$$|\psi\rangle = c_1 f_{12}^\dagger f_{34}^\dagger f_{56}^\dagger |000\rangle + c_2 f_{12}^\dagger |000\rangle + c_3 f_{34}^\dagger |000\rangle + c_4 f_{12}^\dagger |000\rangle. \quad (5.8)$$

Queremos estudar o comportamento desse estado frente a desigualdade CHSH, mostrada na relação 3.21, entretanto é um pouco trabalhoso realizar os cálculos no estado 5.8. Uma maneira mais simples se dá reescrevendo esse estado em termos da base de paridade.

Como estamos interessados no subespaço de paridade gerado por esses 6 majoranas, vamos reescrever o estado acima no espaço das paridades, e, para isso, vamos escrever os operadores

$$\begin{aligned} A_x &= -i\gamma_1\gamma_3, & A_y &= -i\gamma_3\gamma_5, & A_z &= -i\gamma_5\gamma_1 \\ B_x &= -i\gamma_4\gamma_2, & B_y &= i\gamma_2\gamma_6, & B_z &= -i\gamma_5\gamma_4. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Se nos valermos das relações de anti-comutação entre os operadores eletrônicos f_i^\dagger ou dos majoranas γ_i

$$\begin{aligned} \{f_i^\dagger, f_j^\dagger\} &= \{f_i, f_j\} = 0, & \{f_i^\dagger, f_j\} &= \delta_{ij}, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Podemos mostrar que as relações de comutação entre os novos operadores $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ são dadas por

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \epsilon_{ijk}A_k, \\ [B_i, B_j] &= \epsilon_{ijk}A_k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

De posse dessas informações, podemos mapear o estado 5.8 em um estado de dois níveis da forma

$$|\psi\rangle = c_1 |++\rangle + c_2 |+-\rangle + c_3 |-+\rangle + c_4 |--\rangle, \quad (5.12)$$

que é análogo a um estado mais geral possível de spin, entretanto, no caso de spin seria impossível a existência simultânea de termos ($|++\rangle, |--\rangle$) com termos ($|+-\rangle, |-+\rangle$), devido à conservação do momento angular. Aqui já podemos perceber que, se tratando de qubits de férmions de Majorana, temos uma riqueza ainda maior que os casos de spin.

Queremos agora, a partir de uma decomposição de Schmidt, reescrever o estado 5.12 em uma forma mais fácil de se trabalhar. Para isso, começaremos por escrever esse estado na forma compacta

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |ij\rangle \quad (5.13)$$

onde,

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Podemos escrever o estado acima na forma de uma matriz densidade composta, e com isso, temos

$$\rho^{AB} = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} a_{i,j} a_{i',j'}^* |i, j\rangle \langle i', j'|. \quad (5.15)$$

A decomposição de Schmidt diz respeito aos estados individuais, seja de Alice ou Bob. Vamos aqui considerar o conhecimento máximo que Alice consegue ter do estado composto 5.12, que é dado por um traço parcial sobre os estados de Bob, assim, temos

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB}) = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} a_{i,j} a_{i',j'}^* \delta_{j,j'} |i\rangle \langle i'|, \quad (5.16)$$

ou seja,

$$\rho^A = \sum_{i,j,k} a_{i,k} a_{j,k} |i\rangle \langle j|. \quad (5.17)$$

Os coeficientes de Schmidt são dados pelos autovalores da matriz, $\rho = \hat{a}\hat{a}^\dagger$, que podem ser calculados de maneira direta a partir de

$$\rho^A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* & c_2^* \\ c_3^* & c_4^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 + |c_2|^2 & c_1 c_3^* + c_2 c_4^* \\ c_3 c_1^* + c_4 c_2^* & |c_3|^2 + |c_4|^2 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

e os autovalores de ρ^A , são calculados por $\det(\rho^A - I\epsilon) = 0$, daí

$$\det(\rho^A) = \epsilon^2 - [Tr \rho^A]\epsilon + \det(\rho^A) = 0. \quad (5.19)$$

Então,

$$\epsilon_{\pm} = Tr(\rho^A) \pm \sqrt{([Tr(\rho^A)]^2 - 4\det(\rho^A))},$$

$$\epsilon_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - 4[(|c_1|^2 + |c_2|^2)(|c_3|^2 + |c_4|^2) - (c_1 c_3^* + c_2 c_4^*)(c_3 c_1^* + c_4 c_2^*)]}.$$

Onde nos valendo da condição de normalização sobre o estado inicial, sem que $|c_1|^2 +$

$|c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2 = 1$ e, portanto, obtemos finalmente

$$\epsilon_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1 - 4|c_1c_4 - c_2c_3|^2}. \quad (5.20)$$

E, assim, o estado na base de paridade 5.12, é reescrito em uma maneira mais simples como

$$|\psi\rangle = \sqrt{\epsilon_+} |++\rangle + \sqrt{\epsilon_-} |--\rangle. \quad (5.21)$$

Estamos agora prontos para estudar o comportamento desse estado frente as desigualdades de Bell, e, para isso, começaremos por definir os seguintes observáveis

$$\mathbf{A}_0 = \hat{r}_0 \cdot \vec{a}, \quad \mathbf{A}_1 = \hat{r}_1 \cdot \vec{a}, \quad \mathbf{B}_0 = \hat{s}_0 \cdot \vec{b}, \quad \mathbf{B}_1 = \hat{s}_1 \cdot \vec{b}, \quad (5.22)$$

onde $\vec{a} = \{A_x, A_y, A_z\}$ e $\vec{b} = \{B_x, B_y, B_z\}$ dados na equação 5.36 e de modo que $|0\rangle$ e $|1\rangle$ sejam autovetores de A_z e B_z . Além disso, $\hat{r}_0, \hat{r}_1, \hat{s}_0, \hat{s}_1$ são vetores unitários em \mathbf{R}^3 . Procuraremos então vetores para os quais alguma das desigualdades CHSH seja violada.

Vamos definir o seguinte operador

$$\mathbb{B}_{CHSH} = \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1. \quad (5.23)$$

Dada a nossa escolha de observáveis, encontramos

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = \langle \hat{r}_0 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_0 \cdot \vec{b} \rangle - \langle \hat{r}_0 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_1 \cdot \vec{b} \rangle + \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_0 \cdot \vec{b} \rangle + \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_1 \cdot \vec{b} \rangle \quad (5.24)$$

Vamos calcular o valor esperado de cada termo no estado 5.21. Para isso, o valor esperado geral

$$\langle \hat{r} \cdot \vec{a} \otimes \hat{s} \cdot \vec{b} \rangle_{\psi} = \langle \psi | \hat{r} \cdot \vec{a} \otimes \hat{s} \cdot \vec{b} | \psi \rangle$$

Iniciando pelo cálculo da atuação do operador $(\hat{r} \cdot \vec{a} \otimes \hat{s} \cdot \vec{b})$ no estado $|\psi\rangle = \epsilon_+ |++\rangle + \epsilon_- |--\rangle$ em partes, a seguir calculando cada termo da soma separadamente e somando

tudo ao final. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
& \epsilon_+ \langle \psi | (r_x A_x + r_y A_y + r_z A_z) \otimes (s_x B_x + s_y B_y + s_z B_z) |++\rangle \\
&= \epsilon_+ \langle \psi | (r_x |-\rangle + ir_y |-\rangle + r_z |+\rangle) \otimes (s_x |-\rangle + is_y |-\rangle + s_z |+\rangle) \\
&= \epsilon_+ \langle \psi | (r_x s_x |--\rangle + ir_x s_y |--\rangle + r_x s_z |--\rangle + ir_y s_x |--\rangle - r_y s_y |--\rangle \\
&\quad + ir_y s_z |--\rangle + r_z s_x |+-\rangle + ir_z s_y |+-\rangle + r_z s_z |++\rangle) \\
&= \epsilon_+^2 (r_z s_z) + \epsilon_+ \epsilon_- (r_x s_x + ir_x s_y + ir_y s_x - r_y s_y)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

onde utilizamos na última passagem o fato de que $\langle ij|ij\rangle = \delta_{ij}$. Realizando o mesmo cálculo para o segundo termo da expressão, temos

$$\begin{aligned}
& \epsilon_- \langle \psi | (r_x A_x + r_y A_y + r_z A_z) \otimes (s_x B_x + s_y B_y + s_z B_z) |--\rangle \\
&= \epsilon_- \langle \psi | (r_x |+\rangle - ir_y |+\rangle) r_z |-\rangle \otimes (s_x |+\rangle - is_y |+\rangle - s_z |-\rangle) \\
&= \epsilon_- \langle \psi | (r_x s_x |++\rangle - ir_x s_y |++\rangle - r_x s_z |+-\rangle - ir_y s_x |++\rangle - r_y s_y |++\rangle \\
&\quad + ir_y s_z |+-\rangle - r_z s_x |+-\rangle + ir_z s_y |+-\rangle + r_z s_z |--\rangle) \\
&= \epsilon_-^2 (r_z s_z) + \epsilon_+ \epsilon_- (r_x s_x - ir_x s_y - ir_y s_x - r_y s_y).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Portanto, somando as duas soluções acima,

$$\langle \hat{r} \cdot \vec{a} \otimes \hat{s} \cdot \vec{b} \rangle_\psi = r_z s_z + 2\epsilon_+ \epsilon_- (r_x s_x - r_y s_y) \tag{5.27}$$

Se tomarmos,

$$\hat{r}_0 = (0, 0, 1), \quad \hat{r}_1 = (1, 0, 0), \quad \hat{s}_0 = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \hat{s}_1 = (\sin \phi, 0, \cos \phi). \tag{5.28}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{r}_0 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_0 \cdot \vec{b} \rangle &= \cos \theta, & \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_0 \cdot \vec{b} \rangle &= 2\epsilon_+ \epsilon_- \sin \theta, \\
\langle \hat{r}_0 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_1 \cdot \vec{b} \rangle &= \cos \phi, & \langle \hat{r}_1 \cdot \vec{a} \otimes \hat{s}_1 \cdot \vec{b} \rangle &= 2\epsilon_+ \epsilon_- \sin \phi.
\end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo os termos acima em 5.24,

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = \cos \theta - \cos \phi + 2\epsilon_+ \epsilon_- (\sin \theta + \sin \phi), \tag{5.29}$$

podemos agora escolher direções específicas no espaço, sendo

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+4(\epsilon_+\epsilon_-)^2}}, \\ \sin \theta &= \sin \phi = \frac{2\epsilon_+\epsilon_-}{\sqrt{1+4(\epsilon_+\epsilon_-)^2}}.\end{aligned}\tag{5.30}$$

Assim, finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle &= \frac{2}{\sqrt{1+4(\epsilon_+\epsilon_-)^2}} + 2\epsilon_+\epsilon_- \left(\frac{4\epsilon_-\epsilon_+}{\sqrt{1+4(\epsilon_+\epsilon_-)^2}} \right) \\ &= 2\sqrt{1+4(\epsilon_+\epsilon_-)^2}\end{aligned}$$

Agora, precisamos apenas substituir os valores de ϵ_+ e ϵ_- , dado em 5.20.

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{1+4(c_1c_4 - c_2c_3)^2}.\tag{5.31}$$

Logo de cara já notamos que existe uma violação da desigualdade CHSH pelo estado 5.12 desde que $c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$, e, portanto, vemos que é possível encontrar emaranhamento em um estado geral de majoranas.

Apesar de encontrarmos a possibilidade de emaranhamento nesse estado considerado inicialmente, vamos um pouco além, e podemos repetir o mesmo procedimento enfado-nho acima para outras três configurações de medida possíveis dada a mesma situação experimental, como mostrado na figura 5.5.

Na segunda configuração, vista na figura 5.5a consideraremos os seguintes operadores de Alice e Bob

$$\begin{aligned}A_x &= -i\gamma_6\gamma_4, & A_y &= -i\gamma_4\gamma_5, & A_z &= -i\gamma_5\gamma_6 \\ B_x &= -i\gamma_2\gamma_1, & B_y &= i\gamma_3\gamma_2, & B_z &= -i\gamma_1\gamma_3.\end{aligned}\tag{5.32}$$

E após repetirmos todo o procedimento anterior, obtemos um valor de desigualdade

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{1+4(c_1c_3 - c_4c_2)^2}.\tag{5.33}$$

Para a terceira configuração, mostrada na figura 5.5b, os operadores são definidos como

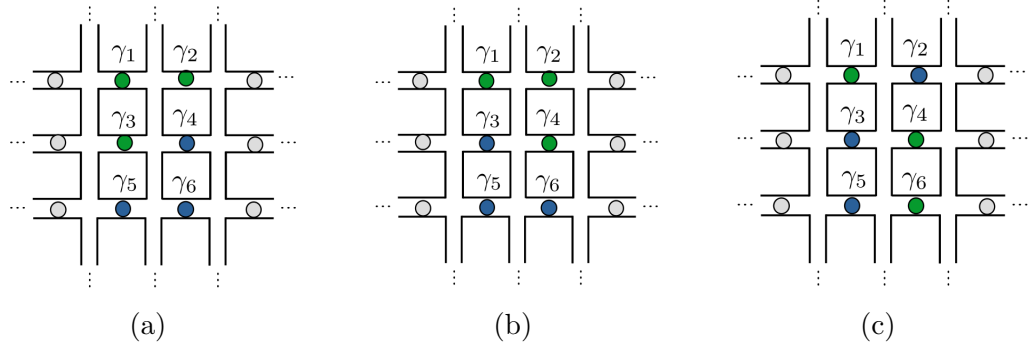


Figura 5.5: Três configurações possíveis de medida. Os pontos verdes representam os Majoranas em posse de Alice, enquanto os azuis são os majoranas de Bob.

$$\begin{aligned}
 A_x &= -i\gamma_2\gamma_1, & A_y &= -i\gamma_4\gamma_1, & A_z &= -i\gamma_4\gamma_2 \\
 B_x &= -i\gamma_3\gamma_5, & B_y &= i\gamma_6\gamma_3, & B_z &= -i\gamma_5\gamma_6.
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

Que leva a um valor de desigualdade CHSH de

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{1 + 4(c_1c_2 - c_3c_4)^2}
 \tag{5.35}$$

e, por último, a quarta configuração, mostrada na figura 5.5c, os operadores,

$$\begin{aligned}
 A_x &= -i\gamma_4\gamma_1, & A_y &= -i\gamma_6\gamma_1, & A_z &= -i\gamma_4\gamma_6 \\
 B_x &= -i\gamma_3\gamma_2, & B_y &= i\gamma_2\gamma_5, & B_z &= -i\gamma_5\gamma_3.
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

Retornando

$$\langle \mathbb{B}_{CHSH} \rangle = 2\sqrt{1 + 4(c_1^2 + c_3^2 + c_4^2 - c_2^2)^2},
 \tag{5.37}$$

como valor de desigualdade CHSH.

Temos, portanto, um conjunto de 4 equações vinculadas às desigualdades CHSH e uma equação de vínculo $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 1$, associada à normalização da função de onda. Se quisermos por exemplo, encontrar inicialmente uma condição para que todas as configurações de medida sejam separáveis, ou seja, não emaranhadas, esse sistema de equações pode ser resumido em

$$\begin{aligned}
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 &= 1, \\
c_1^2 + c_3^2 + c_4^2 - c_2^2 &= 0, \\
c_1c_4 - c_2c_3 &= 0, \\
c_1c_3 - c_4c_2 &= 0, \\
c_1c_2 - c_3c_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Podemos perceber que não existe nenhum valor para as constantes que satisfaçam todas as equações, e, sendo assim, vemos que necessariamente ao menos uma das configurações deve ser não localmente emaranhada.

Podemos também efetuar uma abordagem numérica a esse problema, tentando encontrar situações que poderiam ser interessantes no contexto experimental. Por exemplo, vemos que para $c_1 = -0,694, c_2 = 0,707, c_3 = 0,120, c_4 = 0,07$ Encontramos que as configurações 1,2 e 3 são emaranhadas não localmente. Podemos também buscar valores de mínimo de violação dentre essas três, que é dado por um valor de $\mathbb{B}_{CHSH} = 2,06$ para a configuração 2.

Capítulo 6

Considerações Finais

O objetivo do trabalho foi discutir principais conceitos acerca do emaranhamento e computação quântica topológica utilizando férmions de majorana.

Para isso, abordamos o emaranhamento desde seus princípios fundamentais, passando pela descrição matemática formal e, por fim, pudemos passar brevemente por uma de suas aplicações mais interessantes, que é o teletransporte. Discutimos com certo grau de detalhes as discussões levantadas oriundas do emaranhamento, acerca da completude da mecânica quântica e chegamos aos argumentos de John Bell, que deram origem à sua famosa desigualdade, que pôs fim no debate iniciado por EPR.

O trabalho EPR deu início a um dos ramos mais ricos em pesquisa nos dias atuais, que é a informação quântica e, diante da incessante busca por modelos de computação quântica mais eficientes e com simplicidade para aplicação experimental, revisamos o modelo de Kitaev para modos de majorana, tendo em vista seu potencial de aplicação para a computação quântica, discutindo desde sua origem em um sistema supercondutor, passando pelas suas principais características associadas à proteção topológica e estatística de troca e por fim, chegando à descrição de como podem efetivamente ser utilizados como qubits.

A partir desse ferramental teórico, investigamos o comportamento dos modos de Majorana em uma configuração específica frente a desigualdade de Bell, mais especificamente a desigualdade CHSH, abordando uma configuração mínima de dois qubits e estudando as diferentes formas de se repartir esse sistema.

Pudemos constatar que, dadas as condições impostas de paridade fixa e desconsiderando efeitos térmicos, vemos que os modos de majorana apresentam uma configuração não localmente emaranhada para algum conjunto de observáveis, qualquer que seja o estado inicial. Acreditamos que isso possa estar associado à descrição por nós utilizada, onde um elétron que dá origem a dois majoranas está sempre sendo medido em partes

distintas.

Vimos também que existe um mínimo de violação de $\mathbb{B}_{CHSH} = 2,06$ que pode ser obtido nesse sistema e que nos conduz à ideia de considerarmos, na sequência desse trabalho, a discussão de um protocolo de emaranhamento ruidoso, utilizando esse canal de mínima violação, nos baseando nas ideias inicialmente levantadas em [56].

Por fim, sabemos que o modelo de Majoranas para a computação quântica topológica não é suficiente para executar a computação quântica universal, apesar de existirem abordagens com uma taxa de erro pequena que estende a computação com majoranas.

Além disso, como dito acima, o emaranhamento intrínseco encontrado no modelo de Kitaev pode estar associado à forma como o sistema foi repartido entre Alice e Bob, entretanto, é inegável a simplicidade e o poder de aplicação dos modos de Majorana. Apesar de o futuro da computação topológica não ser necessariamente os majoranas (talvez os anyons de Fibonacci [60]), toda a base fenomenológica e matemática para o futuro da computação topológica deve passar pela descrição por nos apresentada.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [2] JOHN S. BELL. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, Jul 1966.
- [3] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] A Yu Kitaev. Quantum computations: algorithms and error correction. dec 1997.
- [5] A Yu Kitaev. Unpaired majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44(10S):131–136, oct 2001.
- [6] Jun John Sakurai. *Modern quantum mechanics; rev. ed.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [7] Leslie E. Ballentine. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. 1998.
- [8] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. 1996.
- [9] Alexander Altland and Ben D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 2010.
- [10] A. Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [11] E. M. Rains. Bound on distillable entanglement. *Phys. Rev. A*, 60:179–184, Jul 1999.
- [12] Lawrence M. Ioannou. Computational complexity of the quantum separability problem. *Quantum Info. Comput.*, 7(4):335–370, may 2007.
- [13] Barbara M. Terhal. Detecting quantum entanglement. *Theoretical Computer Science*, 287(1):313–335, 2002. Natural Computing.
- [14] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996.
- [15] Michał Horodecki, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1):1–8, 1996.
- [16] Richard P. Feynman. Simulating Physics with Computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6-7):467–488, June 1982.
- [17] Charles H. Bennett, Herbert J. Bernstein, Sandu Popescu, and Benjamin Schumacher. Concentrating partial entanglement by local operations. *PRA*, 53(4):2046–2052, April 1996.
- [18] Peter W. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *PRA*, 52(4):R2493–R2496, October 1995.

- [19] A. M. Steane. Error correcting codes in quantum theory. *PRL*, 77(5):793–797, jul 1996.
- [20] Charles H. Bennett, David P. Divincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *PRA*, 54(5):3824–3851, nov 1996.
- [21] Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki. Inseparable two spin-12 density matrices can be distilled to a singlet form. *PRL*, 78(4):574–577, jan 1997.
- [22] Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki. Mixed-state entanglement and distillation: Is there a "bound" entanglement in nature? *Phys. Rev. Lett.*, 80:5239–5242, Jun 1998.
- [23] Paweł Horodecki, Ryszard Horodecki, and Michal Horodecki. Entanglement and thermodynamical analogies. *arXiv: Quantum Physics*.
- [24] Dong Yang, Michal Horodecki, Ryszard Horodecki, and Barbara Synak-Radtke. Irreversibility for all bound entangled states. *PRL*, 95(19):190501, nov 2005.
- [25] Barbara M. Terhal, Michael M. Wolf, and Andrew C. Doherty. Quantum entanglement: A modern perspective. *Physics Today*, 56(4):46–52, April 2003.
- [26] Sandu Popescu and Daniel Rohrlich. Thermodynamics and the measure of entanglement. *Phys. Rev. A*, 56:R3319–R3321, Nov 1997.
- [27] Otfried Gühne and Géza Tóth. Entanglement detection. *Physics Reports*, 474(1):1–75, 2009.
- [28] Marlon Marques. *Uma proposta de grandeza física de medida de emaranhamento quântico*. PhD thesis, Universidade Federal De Viçosa, 2019.
- [29]
- [30] Tim Maudlin. What bell did. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(42):424010, oct 2014.
- [31] J. Von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer-Verlag, 1932.
- [32] J. Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [33] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [34] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [35] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.

- [36] L. S. Silveira and R. M. Angelo. Classical-hidden-variable description for entanglement dynamics of two-qubit pure states. *Phys. Rev. A*, 95:062105, Jun 2017.
- [37] N. Gisin. Bell's inequality holds for all non-product states. *Physics Letters A*, 154(5):201–202, 1991.
- [38] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Rev. Mod. Phys.*, 86:419–478, Apr 2014.
- [39] Johannes Handsteiner and et.al. Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars. *PRL*, 118(6):060401, February 2017.
- [40] BIG Bell Test Collaboration. Challenging local realism with human choices. *Nature*, 557(7704):212–216, May 2018.
- [41] B. Hensen, H. Bernien, A.E. Dreau, A. Reiserer, N. Kalb, M.S. Blok, J. Ruitenber, R. F. L. Vermeulen, R.N. Schouten, C. Abellan, W. Amaya, V. Pruneri, M. W. Mitchell, M. Markham, D. J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T.H. Taminiau, and R. Hanson. Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres. *Nature*, 526(7575):682–686, October 2015.
- [42] Avinash khare. *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific Publishing.
- [43] Jiannis K. Pachos. *Introduction to Topological Quantum Computation*. 2012.
- [44] Steven R. Elliott and Marcel Franz. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics. *Rev. Mod. Phys.*, 87:137–163, Feb 2015.
- [45] J F Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Oxford master series in condensed matter physics. Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [46] Jian-Xin Zhu. *Bogoliubov-de Gennes Method and Its Applications*. Lecture Notes in Physics. Springer Cham, 2016.
- [47] Jason Alicea. Non-abelian anyons and topological quantum information processing in 1d wire networks. 2012:D44.001, feb 2012.
- [48] Michel Le Bellac, Fabrice Mortessagne, and G. George Batrouni. *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [49] Bert Mendelson. *Introduction to Topology*. Dover Publications, INC, 2004.
- [50] R. Willett, J. P. Eisenstein, H. L. Stormer, D. C. Tsui, A. C. Gossard, and J. H. English. Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1776–1779, Oct 1987.
- [51] Gregory Moore and Nicholas Read. Nonabelions in the fractional quantum hall effect. *Nuclear Physics B*, 360(2):362–396, 1991.
- [52] Chetan Nayak and Frank Wilczek. 2n-quasihole states realize 2n-1-dimensional spinor braiding statistics in paired quantum hall states. *Nuclear Physics B*, 479(3):529–553, 1996.

- [53] Michael H. Freedman and Michael Larsen. A modular functor which is universal for quantum computation. *Communications in Mathematical Physics*, 227, Jun 2002.
- [54] Michael H. Freedman, Michael J. Larsen, and Zhenghan Wang. The two-eigenvalue problem and density of jones representation of braid groups. *Communications in Mathematical Physics*, 228(1):177–199, Jan 2002.
- [55] Sergey Bravyi. Universal quantum computation with the $\nu = \frac{5}{2}$ fractional quantum hall state. *Phys. Rev. A*, 73:042313, Apr 2006.
- [56] He-Liang Huang, Marek NaroZniak, Futian Liang, Youwei Zhao, Anthony D. Castellano, Ming Gong, Yulin Wu, Shiyu Wang, Jin Lin, Yu Xu, Hui Deng, Hao Rong, Jonathan P. Dowling, Cheng-Zhi Peng, Tim Byrnes, Xiaobo Zhu, and Jian-Wei Pan. Emulating quantum teleportation of a majorana zero mode qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 126:090502, Mar 2021.
- [57] Earl T. Campbell, Matty J. Hoban, and Jens Eisert. Majorana fermions and non-locality. 2013.
- [58] Zhi Wang, Xue-Yuan Hu, Qi-Feng Liang, and Xiao Hu. Detecting majorana fermions by nonlocal entanglement between quantum dots. *Phys. Rev. B*, 87:214513, Jun 2013.
- [59] David E. Drummond, Alexey A. Kovalev, Chang-Yu Hou, Kirill Shtengel, and Leonid P. Pryadko. Demonstrating entanglement by testing bell’s theorem in majorana wires. *Phys. Rev. B*, 90:115404, Sep 2014.
- [60] Emil G enetaJ Johansen and Tapio Simula. Fibonacci anyons versus majorana fermions: A monte carlo approach to the compilation of braid circuits in $SU(2)_k$ anyon models. *PRX Quantum*, 2:010334, Mar 2021.