

JULIANA PATRÍCIO DE SOUZA

O GRUPO FUCHSIANO Γ_{8g-4}

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

S729g
2016 Souza, Juliana Patrício de, 1990-
O grupo Fuchsiano Γ_{8g-4} / Juliana Patrício de
Souza. – Viçosa, MG, 2016.
vii, 45f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Mercio Botelho Faria.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.44-45.

1. Geometria. 2. Geometria hiperbólica. 3. Curvas
algébricas. 4. Teoria dos números. 5. Álgebra abstrata.
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.
II. Título.

CDD 22. ed. 516

JULIANA PATRÍCIO DE SOUZA

O GRUPO FUCHSIANO Γ_{8g-4}

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 26 de fevereiro de 2016.

Lia Feital Fusaro Abrantes

Vandenberg Lopes Vieira

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

*"Nunca deixe que lhe digam que
não vale a pena acreditar no
sonho que se tem. Ou que seus
planos nunca vão dar certo, ou
que você nunca vai ser alguém."*

Renato Russo

Agradecimentos

Primeiramente eu agradeço a Deus pela imensa força em um dos momentos mais difíceis de minha vida e por me guiar em tudo o que faço. Sem Ele eu não conseguiria concluir mais esta etapa.

Ao Diêgo, fiel companheiro de todas as horas, meu amor e meu melhor amigo. Obrigada por estar ao meu lado sempre, por vencermos juntos as dificuldades, por torcer por mim e por todo apoio e ajuda durante o período do mestrado.

Aos meus pais, Lúcia e Manoel, por me incentivar e acreditar em mim. Obrigada por tudo que fizeram para que eu chegasse até aqui. Aos meus irmãos Janaína, João Victor e Jonas, por torcerem por mim ao longo de todos esses anos dedicados aos estudos.

Aos meus colegas do mestrado, em especial ao Rafael pelas horas de estudos divididas na biblioteca durante o período da qualificação e das disciplinas. Obrigada pelos grandes momentos de aprendizado.

Às meninas da república e ao Samuel pelos bons momentos de distração e pelas agradáveis conversas. Gosto muito de vocês!

Ao meu orientador Mercio pela oportunidade e por toda compreensão durante os estudos, e ao Vandenberg por todas as sugestões durante o desenvolvimento do trabalho. Também agradeço a professora Lia por aceitar o convite de participar da banca.

Ao Rogério por me acolher no programa e por me ajudar nas escolhas que fiz, mesmo não me conhecendo, e ao Abílio pelos bons conselhos no período da qualificação.

Aos meus queridos professores da UFV - campus Florestal pelo grande apoio e incentivo para que eu continuasse os estudos em Matemática. Vocês são minha inspiração.

Ao secretário da pós, João, por sua consideração e pelas boas conversas. Obrigada por tudo!

À CAPES, pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Geometria Hiperbólica e Grupos Fuchsianos	3
1.1 Isometria	3
1.2 Modelos Hiperbólicos	4
1.3 Grupos Fuchsianos	9
1.3.1 Círculo Isométrico e Região de Ford	11
1.3.2 Grupos Fuchsianos Co-compactos	13
1.3.3 A Assinatura de um Grupo Fuchsiano	14
2 Tesselações Regulares	15
2.1 Tesselações no Plano Euclidiano	15
2.2 Tesselações no Plano Hiperbólico	17
3 Corpos de Números, Anéis de Inteiros e Álgebra dos Quatérnios	21
3.1 Anéis e Corpos	21
3.2 Álgebra dos Quatérnios	27
3.3 Reticulados Hiperbólicos	29
4 Identificação dos Grupos Γ_{8g-4} em Ordens dos Quatérnios	31
4.1 O Grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}	31
4.2 Caso $g = 2$	36
Referências Bibliográficas	44

Lista de Figuras

1.1	Geodésicas em $\mathbb{D}^2$	5
1.2	Geodésicas em $\mathbb{H}^2$	5
1.3	Triângulo em $\mathbb{D}^2$	6
1.4	Triângulos em $\mathbb{H}^2$	6
2.1	Uma Tesselação em $\mathbb{R}^2$	16
2.2	Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por quadrados	16
2.3	Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por hexágonos regulares	17
2.4	Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por triângulos equiláteros	17
2.5	Tesselação Hiperbólica $\{8,8\}$ no Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	18
2.6	Tesselação Hiperbólica $\{10,5\}$ no Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	19
2.7	Tesselação de Farey no intervalo $[0,1]$	20
2.8	Tesselação de Farey no modelo do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$	20
4.1	Polígono P_{12}	34
4.2	Emparelhamento da Tesselação $\{8g - 4, 4\}$ para $g = 2$	34
4.3	Emparelhamento da Tesselação $\{8g - 4, 4\}$ para $g = 3$	35

Resumo

SOUZA, Juliana Patrício de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Fevereiro de 2016. **O grupo fuchsiano** Γ_{8g-4} . Orientador: Mercio Botelho Faria.

Neste trabalho, estudamos o Grupo Fuchsiano Γ_{8g-4} relacionado à família de tesselações hiperbólicas $\{8g-4, 4\}$, que é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, onde $g \geq 2$ representa o gênero. Esta tesselação apresenta propriedades geométricas interessantes, e os resultados ligados à essa teoria têm aplicações na teoria de códigos. Nosso objetivo é encontrar os geradores do grupo Γ_{8g-4} para o caso em que $g = 2$. Também identificamos os elementos de Γ_{12} com os elementos da ordem $\mathcal{O}$ associada a uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$.

Abstract

SOUZA, Juliana Patrício de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2016. **The fuchsian group** Γ_{8g-4} . Advisor: Mercio Botelho Faria.

In this work, we study the Fuchsian Group Γ_{8g-4} related to the family of hyperbolic tessellations $\{8g-4, 4\}$ which is a discrete subgroup of $PSL(2, \mathbb{R})$, where $g \geq 2$ represents the genus. This tessellation presents interesting geometric properties, and the results linked to this theory produce applications in coding theory. Our intention is to find the generators of the group Γ_{8g-4} for the case where $g = 2$. We also aim to identify the elements of Γ_{12} with the elements of order $\mathcal{O}$ associated with an quaternion algebra of $\mathcal{A}$.

Introdução

Tesselações Hiperbólicas têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores nos últimos anos devido à variedade de aplicações. Os principais resultados estão relacionados à comunicação digital e também à teoria de códigos. No trabalho pioneiro de Brandani [5] na área de constelações de sinais geometricamente uniformes provenientes de tesselações hiperbólicas regulares $\{p, q\}$, o autor considera tesselações auto-duais $\{p, p\}$.

Em [16], Lazari propõe a construção de constelações de sinais geometricamente uniformes no plano hiperbólico utilizando o processo de construção de cadeias de partições geometricamente uniformes a partir do grupo de isometrias do octógono, região fundamental da tesselação $\{8, 8\}$, e do grupo de isometrias do p -ágono da tesselação $\{p, 3\}$. Em [2], Agustini constrói famílias de constelações de sinais a partir de quocientes de espaços hiperbólicos por grupos discretos de isometrias.

No trabalho de Vieira, [20], ele considera a tesselação auto-dual $\{4g, 4g\}$ com $g = 2^n, 3 \cdot 2^n$ e $5 \cdot 2^n$. Os grupos fuchsianos aritméticos provenientes dessas tesselações são identificados com ordens dos quatérnios, e o rotulamento de algumas constelações de sinais geometricamente uniformes foi obtido, quando $g = 2, 3$ e 4 . No entanto, estas identificações não são uma tarefa fácil de se conseguir. Por exemplo, para a tesselação $\{12g - 6, 3\}$ só há um caso de identificação, quando $g = 3$, [20].

Um Grupo Fuchsiano Γ_p é um grupo discreto de isometrias no plano hiperbólico, e está relacionado à tesselação hiperbólica $\{p, q\}$. Para conseguir a identificação citada, trabalhamos com os geradores do grupo Γ_{8g-4} , proveniente da tesselação $\{8g - 4, 4\}$, que se encontram em [7]. Para isto, para cada valor do gênero g , obtemos um "conjunto de geradores" do Grupo Fuchsiano relacionado e então analisamos cada um deles. A partir disso estudamos se é possível ou não estabelecer a identificação em ordens dos quatérnios. A tesselação que trata este trabalho apresenta propriedades interessantes e até onde sabemos ela foi pouco estudada.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1 estudamos a teoria de Geometria Hiperbólica Plana e Grupos Fuchsianos utilizados no trabalho. Apresentamos os principais resultados envolvidos adotando o modelo do Semiplano Superior $\mathbb{H}^2$ e do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, que são os mais usados em Geometria Hiperbólica.

No Capítulo 2, apresentamos as Tesselações Regulares, com destaque para as Tesselações Hiperbólicas. Nele trazemos alguns exemplos de tesselações representadas nos modelos $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, e também podemos entender porque é mais vantajoso trabalhar com tesselações hiperbólicas em vez de tesselações euclidianas.

O Capítulo 3 trata da parte de Álgebra dos Quatérnios, tomando como ponto

de partida a teoria de anéis e corpos. É nessa parte do texto que fazemos uma correspondência dos elementos do Grupo Fuchsiano com os elementos de uma ordem dos quatérnios $\mathcal{O}$.

O Capítulo 4 mostra os resultados encontrados no desenvolvimento do trabalho. Nele apresentamos os geradores do grupo Γ_{8g-4} e para o caso em que $g = 2$, exibimos as matrizes geradoras em $\mathbb{D}^2$ e também em $\mathbb{H}^2$. Por fim, estabelecemos a identificação em ordens dos quatérnios.

Capítulo 1

Geometria Hiperbólica e Grupos Fuchsianos

Este capítulo trata dos resultados da teoria da geometria hiperbólica que serão utilizados neste trabalho, com destaque para os grupos fuchsianos e outros conceitos ligados a este. Os principais modelos utilizados em geometria hiperbólica também serão apresentados, mas um estudo mais detalhado sobre o assunto pode ser encontrado em [9], [13], [14] e [15] .

1.1 Isometria

Seja E um conjunto não-vazio. Uma *métrica* em E é uma função $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo, para quaisquer $x, y, z \in E$, as seguintes condições:

1. $d(x, y) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Nessas condições, $d(x, y)$ é dita *distância* de x a y , e o conjunto E munido de uma métrica d é chamado *espaço métrico*, indicado por (E, d) .

Exemplo 1.1.1. $(\mathbb{R}, d_1)$ e $(\mathbb{R}^n, d_2)$ são exemplos de espaços métricos, com $d_1(x, y) = |x - y|$ e $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, sendo $\|\mathbf{x}\|$ a norma do vetor $\mathbf{x}$.

Dado um espaço métrico (E, d) , uma aplicação $T : E \rightarrow E$ é dita uma *isometria* de E se T preserva a distância d , ou seja,

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Toda isometria T é uma aplicação injetora. Além disso, se T é sobrejetora, então T^{-1} também é uma isometria, e para quaisquer duas isometrias T e S de E , a composta $T \circ S$ é ainda uma isometria.

1.2 Modelos Hiperbólicos

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} > 0\}$$

munido da estrutura Riemanniana

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2}{x_{n+1}^2}.$$

Com essa estrutura, o semi-espço $\mathbb{H}^{n+1}$ é chamado de *espaço hiperbólico* $(n+1)$ -dimensional, e a métrica Riemanniana definida é chamada de *métrica hiperbólica*. A partir dessa métrica vamos definir comprimento de curvas, geodésicas e distância entre pontos.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma curva continuamente diferenciável por partes, com

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)).$$

O *comprimento hiperbólico* da curva γ , denotado por $\|\gamma\|$, é definido como

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{(\frac{dx_1}{dt})^2 + \dots + (\frac{dx_{n+1}}{dt})^2}}{x_{n+1}} dt.$$

Exemplo 1.2.1. *Seja γ uma curva diferenciável por partes parametrizada da seguinte forma:*

$$\gamma(t) = \begin{cases} (2t-2) + i(1+t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ (2t-2) + i(3-t), & \text{se } 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Então, seu comprimento hiperbólico é $\|\gamma\| \simeq 3,1$.

Podemos assumir que γ esteja definida no intervalo $[0,1]$. De fato, considerando a aplicação $\phi : [0,1] \rightarrow [a,b]$ definida por $\phi(t) = a+bt$ e $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma \circ \phi)(t) = \gamma(a+bt)$, obtemos pela regra da cadeia que

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{(\frac{dx_1}{d\phi})^2 + \dots + (\frac{dx_{n+1}}{d\phi})^2}}{x_{n+1}} d\phi = \int_0^1 \frac{\sqrt{(\frac{dx_1}{dt})^2 + \dots + (\frac{dx_{n+1}}{dt})^2}}{x_{n+1}} dt = \|\tilde{\gamma}\|.$$

Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.1. *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^{n+1}$, a distância entre p e q é definida por*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|,$$

onde o ínfimo é considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes $\gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Em [9] pode ser encontrada uma prova de que a distância definida acima é de fato uma métrica. Podemos agora definir as geodésicas em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Definição 1.2.2. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ é dita *geodésica* se para quaisquer $s, t \in [a, b]$, tivermos

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \inf \int_s^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_{n+1}}{du}\right)^2}}{x_{n+1}} du,$$

ou seja, se γ minimizar a distância entre os pontos de seu traçado.

Para a geometria hiperbólica plana, vamos considerar dois modelos: o *Semi-plano Superior* $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, munido da métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

e do *Disco de Poincaré* $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, munido da métrica

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

As definições de comprimento de curva e distância entre dois pontos em $\mathbb{D}^2$ são análogas às definições em $\mathbb{H}^2$.

Os conjuntos $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ e $\partial \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ são os *bordos* de $\mathbb{H}^2$ e $\mathbb{D}^2$, respectivamente. O conjunto $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é o *fecho* de $\mathbb{H}^2$ e o conjunto $\overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{D}^2 \cup \partial \mathbb{D}^2$ é o *fecho* de $\mathbb{D}^2$.

Teorema 1.2.1. As geodésicas de $\mathbb{H}^2$ são as *semi-retas e semi-circunferências ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$* . Já as geodésicas de $\mathbb{D}^2$ são *segmentos de retas e de circunferências ortogonais a $\partial \mathbb{D}^2$* .

Vejamos como são as geodésicas no Disco de Poincaré¹ e no Semiplano².

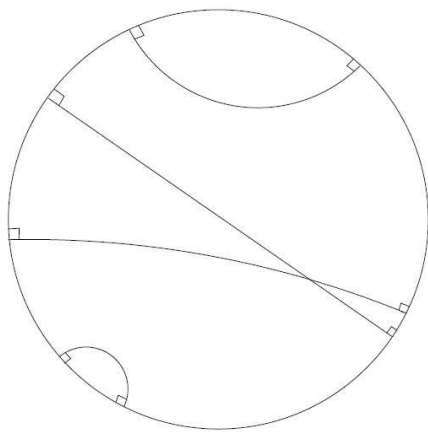


Figura 1.1: Geodésicas em $\mathbb{D}^2$

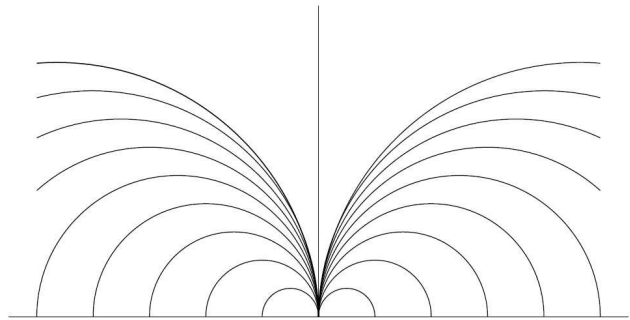


Figura 1.2: Geodésicas em $\mathbb{H}^2$

¹Figura retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_geometry_of_surfaces. Acesso em 26/01/2016.

²Figura retirada da referência [9].

Dado um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}^2$, sua área $\mu(\mathcal{A})$ é definida por

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{dx dy}{y^2},$$

desde que a integral exista e seja finita. Analogamente, se $\mathcal{A} \subset \mathbb{D}^2$, então

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{4 dx dy}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

O próximo teorema é uma versão simplificada do Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 1.2.2. *Seja $\triangle$ um triângulo hiperbólico com ângulos α, β, γ . Então*

$$\mu(\triangle) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

As demonstrações dos Teoremas 1.2.1 e 1.2.2 podem ser encontradas em [9].

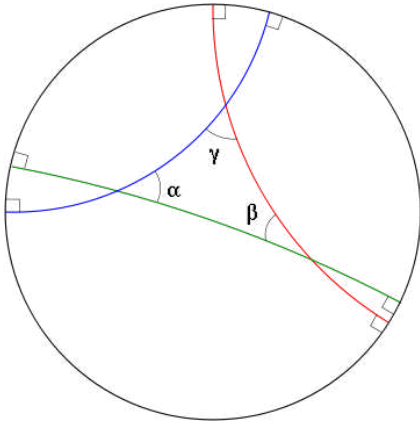


Figura 1.3: Triângulo em $\mathbb{D}^2$

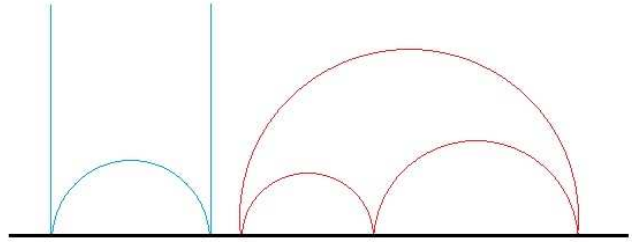


Figura 1.4: Triângulos em $\mathbb{H}^2$

Apresentaremos agora o conceito de grupo fuchsiano. Para isso, consideremos os conjuntos $PSL(2, \mathbb{R})$ e $SL(2, \mathbb{R})$ e também a definição de grupo.

Definição 1.2.3. *Seja G um conjunto com uma operação binária que atribui a cada par ordenado (a, b) de elementos de G um elemento de G denotado por ab . Dizemos que G é um grupo sob esta operação se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. (Associatividade) *A operação é associativa, isto é, $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in G$.*
2. (Elemento Neutro) *Existe um elemento e (chamado de elemento neutro) em G tal que $ae = ea = a$, $\forall a \in G$.*
3. (Inversos) *Para cada elemento $a \in G$, existe um elemento $b \in G$ (chamado de inverso de a) tal que $ab = ba = e$.*

Exemplo 1.2.2. O conjunto de matrizes 2×2

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{B \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det(B) = 1\}$$

é um grupo com a operação de multiplicação de matrizes.

Seja $PSL(2, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as transformações lineares fracionárias $T_A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definidas por

$$T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.1)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Essas transformações também são chamadas de *transformações de Möbius*.

Cada transformação $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ desse tipo pode ser representada pelas matrizes

$$A = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

onde $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Assim,

$$T_A \in PSL(2, \mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in SL(2, \mathbb{R}).$$

O conjunto $PSL(2, \mathbb{R})$ com a operação de composição de funções forma um grupo. De fato, a composta de duas transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$ corresponde ao produto de matrizes em $SL(2, \mathbb{R})$ e a inversa de uma transformação $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ corresponde à inversa da matriz A .

Sejam $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, $T_A = \frac{az+b}{cz+d}$ e A como uma das matrizes de (1.2). Observe que a função $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$, dada por $\varphi(A) = T_A$ é um homomorfismo sobrejetor com $Ker(\varphi) = \{\pm I_2\}$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2. Portanto,

$$PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I_2\}}. \quad (1.3)$$

O grupo quociente de (1.3) é chamado de *grupo projetivo linear*.

Consideremos agora a aplicação $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}. \quad (1.4)$$

A aplicação f é uma isometria bijetora muito importante. Ela permite trabalhar tanto em $\mathbb{H}^2$ quanto em $\mathbb{D}^2$. No Capítulo 4 mostraremos como isso pode ser feito.

O próximo resultado pode ser encontrado de forma mais detalhada em [9].

Lema 1.2.1. As isometrias que mantêm o disco de Poincaré invariante são as transformações lineares fracionárias da forma

$$T_1(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (1.5)$$

Essas transformações formam um grupo com a operação composição. Além disso,

essas isometrias podem ser escritas na forma

$$T_1(z) = f \circ T \circ f^{-1},$$

onde $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ e f é como em (1.4).

A seguir, caracterizaremos as transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$. Elas são classificadas em três tipos.

Sejam $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ e A como uma das matrizes em (1.2). Seja $tr(A) = |a + d|$. Dizemos que A ou a transformação T_A é:

1. *Elíptica*, se $tr(A) < 2$,
2. *Parabólica*, se $tr(A) = 2$,
3. *Hiperbólica*, se $tr(A) > 2$.

Teorema 1.2.3. [9] *Seja $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ com $T_A \neq Id$. Então existe uma matriz $B \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $T_B \circ T_A \circ T_B^{-1}$ é uma das matrizes*

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

onde $0 < \theta < 2\pi$, $t \in \mathbb{R}^*$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Com relação à análise do traço, pelo teorema que acabamos de apresentar, podemos assumir que a matriz A seja uma das matrizes de (1.6) a menos de conjugação, conforme A seja elíptica, parabólica ou hiperbólica, respectivamente.

Definição 1.2.4. *Dada uma estrutura algébrica, o conjunto sobre o qual as operações são definidas é chamado de conjunto subjacente.*

Exemplo 1.2.3. *Na estrutura algébrica $(\mathbb{Z}, +)$, o conjunto subjacente é $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros.*

Definição 1.2.5. *Um grupo topológico é um grupo cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com o produto no grupo, no sentido em que*

1. *O produto $p : G \times G \rightarrow G$, $p((g, h)) = gh$, é uma aplicação contínua, quando se considera $G \times G$ com a topologia produto.*
2. *A aplicação $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$, é contínua (e, portanto, um homeomorfismo, já que $i^{-1} = i$).*

Exemplo 1.2.4. *Num corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ pode-se definir a topologia da ordem, que é gerada pelos intervalos abertos. Em relação a essa topologia, a operação $+$ define um grupo topológico, enquanto que o produto define um grupo topológico em $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

Podemos identificar cada transformação $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ como em (1.1) com o elemento $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Assim, como espaço topológico, $SL(2, \mathbb{R})$ pode ser identificado com o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc = 1\},$$

herdando a topologia de $\mathbb{R}^4$.

Seja φ a função identidade sobre E . A aplicação $-\varphi : E \rightarrow E$ dada por $-\varphi(a, b, c, d) = (-a, -b, -c, -d)$ é um homeomorfismo e $G = \{\varphi, -\varphi\}$ é um grupo cíclico cuja ordem é 2. A topologia em $PSL(2, \mathbb{R})$ é definida como o espaço quociente

$$PSL(2, \mathbb{R}) \simeq \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm \varphi\}}.$$

Definimos a norma em $PSL(2, \mathbb{R})$ da seguinte maneira: para cada $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ como em (1.1),

$$\|T\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Observe que a norma está bem definida, pois $PSL(2, \mathbb{R})$ com relação à métrica $d(T, S) = \|T - S\|$ e o grupo das isometrias de $\mathbb{H}^2$, denotado por $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$, são ambos grupos topológicos.

1.3 Grupos Fuchsianos

Consideraremos nesta seção os Grupos Fuchsianos, nosso principal objeto de estudo.

Definição 1.3.1. Um subgrupo Γ de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ é chamado discreto se a topologia induzida em Γ é discreta, isto é, se Γ é um conjunto discreto no espaço topológico $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$.

Definição 1.3.2. Um grupo Γ é chamado grupo fuchsiano se é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.3.1. Considere o grupo formado por todas as transformações $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$. Ele é chamado de grupo modular e é denotado por $PSL(2, \mathbb{Z})$. Este é claramente um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, logo é um grupo fuchsiano.

A proposição seguinte caracteriza os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Proposição 1.3.1. Os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$ gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são discretos. Um subgrupo cíclico gerado por elemento elíptico é discreto se, e somente se, este subgrupo for finito.

Demonstração: Seja

$$\Gamma = \langle T_A \rangle = \{\dots, T_A^{-2}, T_A^{-1}, Id, T_A, T_A^2, \dots\} = \{\dots, T_{A^{-2}}, T_{A^{-1}}, Id, T_A, T_{A^2}, \dots\}$$

um subgrupo cíclico gerado por $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$. Assim, Γ é discreto se, e somente se,

$$T_B \Gamma T_B^{-1} = \langle T_B T_A T_B^{-1} \rangle = \{ \dots, T_{BA^{-1}B^{-1}}, Id, T_{BAB^{-1}}, \dots \}$$

for discreto. Pelo Teorema 1.2.3, A é conjugado a uma das matrizes A_θ , A_t ou A_λ de (1.6). Suponhamos inicialmente que T_A seja hiperbólica ou parabólica. Então, A será conjugada a alguma matriz A_λ ou A_t e $(A_\lambda)^n = A_{n\lambda}$ e $(A_t)^n = A_{nt}$. Mas,

$$\begin{aligned} 0 < \|Id - A_{n\lambda}\|^2 &= (1 - \lambda^n)^2 + (1 - \frac{1}{\lambda^n})^2 \leq \\ &(1 - \lambda^{n+1})^2 + (1 - \frac{1}{\lambda^{n+1}})^2 = \|Id - A_{(n+1)\lambda}\|^2. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$0 < \|Id - A_{nt}\|^2 = (nt)^2 < (n+1)^2 t^2 = \|Id - A_{(n+1)t}\|^2,$$

de modo que, se tivermos $\lambda, t > 0$, teremos uma vizinhança de Id que não contém nenhum ponto de Γ com exceção da própria Id , obtendo assim que Γ , o grupo gerado por T_{A_λ} ou T_{A_t} , é discreto.

Suponhamos agora que T_A seja uma isometria elíptica, isto é, conjugada a alguma matriz T_{A_θ} . Utilizando as fórmulas de trigonometria básica, temos que $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$. Obviamente, se Γ for finito ele será discreto. De qualquer modo, temos que $A_\theta = A_{\theta+2\pi}$. Assim, se considerarmos que Γ é discreto, podemos considerar que existe $0 < \theta_0$, com θ_0 o menor argumento tal que $T_{A_{\theta_0}} \in \Gamma$. Seja então $m \in \mathbb{N}$ o maior número natural tal que $m\theta_0 \leq 2\pi$. Se tivermos $m\theta_0 < 2\pi$ teremos que $(m+1)\theta_0 - 2\pi < \theta_0$ e

$$(T_{A_{\theta_0}})^{m+1} = T_{A_{(m+1)\theta_0}} = T_{A_{(m+1)\theta_0 - 2\pi}} \in \Gamma,$$

o que contradiz a minimalidade de θ_0 . Então, $m\theta_0 = 2\pi$ e $\Gamma = \langle T_{A_{\theta_0}} \rangle$ é um grupo cíclico de ordem m . ■

Definição 1.3.3. *Seja G um grupo de permutações de um conjunto $E \neq \emptyset$. Dado $x \in E$, o conjunto*

$$G(x) = \{T(x) \mid T \in G\}$$

é chamado de G -órbita de x . O subgrupo de G

$$G_x = \{T \in G \mid T(x) = x\}$$

é o estabilizador de x .

Nas considerações seguintes, E é um espaço métrico e G é um grupo de homeomorfismos agindo sobre E .

Definição 1.3.4. *Uma família $\{M_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ de subconjuntos de E é dita localmente finita se para qualquer compacto $K \subseteq E$, o conjunto $\{\alpha \in \Lambda \mid M_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ for finito.*

Dizemos que um grupo G age de maneira propriamente descontínua em E se a G -órbita de qualquer ponto $x \in E$ é localmente finita.

A demonstração do próximo teorema encontra-se em [15].

Teorema 1.3.1. Γ é um grupo fuchsiano se, e somente se, Γ age de maneira propriamente descontínua sobre $\mathbb{H}^2$.

Definição 1.3.5. Um subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ é dito grupo elementar se existir $z \in \mathbb{H}^2$ tal que a órbita $\Gamma(z)$ seja finita.

Teorema 1.3.2. [9] Seja Γ um grupo fuchsiano não-elementar. Então Γ possui elementos hiperbólicos.

Sejam Γ um grupo fuchsiano e $z \in \mathbb{H}^2$.

1. O conjunto limite de Γ determinado por z é o conjunto

$$\Lambda_z(\Gamma) = \{\xi \in \overline{\mathbb{H}^2} \mid \xi \text{ é ponto de acumulação de } \Gamma(z)\}.$$

2. O conjunto limite de Γ é o conjunto

$$\Lambda(\Gamma) = \bigcup_{z \in \mathbb{H}^2} \Lambda_z(\Gamma).$$

Teorema 1.3.3. Seja Γ um grupo fuchsiano e suponha que $\Lambda(\Gamma)$ possua mais do que dois pontos. Então uma das possibilidades ocorre:

1. $\Lambda(\Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$,
2. $\Lambda(\Gamma)$ é perfeito e magro, ou seja, todo ponto de $\Lambda(\Gamma)$ é ponto de acumulação de $\Lambda(\Gamma)$ e o complementar de $\Lambda(\Gamma)$ é denso.

Definição 1.3.6. Um grupo fuchsiano é de primeiro tipo se $\Lambda(\Gamma) = \partial_\infty \mathbb{H}^2$. O grupo Γ será de segundo tipo se $\Lambda(\Gamma) \neq \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Neste trabalho consideraremos apenas grupos fuchsianos de primeiro tipo. Esses grupos são não-elementares [15]. Assim, do Teorema 1.3.2, tais grupos possuem elementos hiperbólicos.

1.3.1 Círculo Isométrico e Região de Ford

Para determinar os geradores do grupo fuchsiano Γ_p associado ao polígono hiperbólico P_p precisamos considerar o conceito de círculo isométrico.

Definição 1.3.7. Sejam E um espaço métrico e Γ um grupo de homeomorfismos agindo sobre E de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset E$ com interior não-vazio é chamado região fundamental de Γ se:

1. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = E$,
2. $\tilde{\mathcal{D}} \cup T(\tilde{\mathcal{D}}) = \emptyset, \forall T \in \Gamma - \{Id\}$.

O conjunto $\tilde{\mathcal{D}}$ indica o interior de $\mathcal{D}$, e a família $\{T(\mathcal{D}) \mid T \in \Gamma\}$ é chamada *tesselação* ou *ladrilhamento* de E .

Sejam Γ um grupo fuchsiano e $z_0 \in \mathbb{H}^2$ tal que $T(z_0) \neq z_0$, para todo $T \in \Gamma$. Um *domínio* (ou *região*) de *Dirichlet* de Γ centrado em z_0 é o conjunto

$$\mathcal{D}_{z_0} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, z_0) \leq d(z, T(z_0)), \forall T \in \Gamma\}. \quad (1.7)$$

Teorema 1.3.4. [9] *Se Γ é um grupo fuchsiano, então $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ é uma região fundamental de Γ . Além disso, $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ é localmente finita.*

O polígono P_p constitui a fronteira de uma região de Dirichlet $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ de Γ_p . Considerando a isometria

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

temos que

$$T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Assim, se $z = z(t)$ for uma curva diferenciável tal que $|cz(t) + d| \equiv 1$, então temos a igualdade

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |T'(z(t))| |z'(t)| dt,$$

ou seja, o comprimento das curvas $z(t)$ e $(T \circ z)(t)$ são os mesmos. Disso segue que a distância hiperbólica e a distância euclidiana ao longo da curva são preservadas. Logo, a restrição de T a essa curva é uma isometria euclidiana.

Se $c \neq 0$, temos que

$$|cz + d| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left| z + \frac{d}{c} \right| = \frac{1}{|c|}.$$

Isto significa que o conjunto de pontos nos quais T age como uma isometria (hiperbólica ou euclidiana) é um círculo euclidiano de centro $-\frac{d}{c}$ e raio $r = \frac{1}{|c|}$.

Considere $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{R})$ uma isometria de $\mathbb{H}^2$ com $c \neq 0$. O *círculo isométrico* de T é o conjunto

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + d| = 1\}.$$

Analogamente, o círculo isométrico da isometria $T(z) = \frac{az+b}{bz+a}$, $b \neq 0$, de $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ é o conjunto

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{b}z + \bar{a}| = 1\}.$$

Proposição 1.3.2. [15] *Seja $I(T)$ o círculo isométrico de uma isometria T em $\mathbb{H}^2$. Então $I(T) \cap \mathbb{H}^2$ é uma geodésica em $\mathbb{H}^2$.*

Para isometrias em $\mathbb{D}^2$ temos um resultado análogo.

Considere agora Γ um grupo discreto de isometrias com elementos que preservam orientação em $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Por (1.5) essas isometrias são da

forma (supondo $b \neq 0$)

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1, \quad T \in \Gamma.$$

Consideremos também

$$\check{I}(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{b}z + \bar{a}| > 1\}.$$

Então

$$R_0 = \overline{\bigcap_{T \in \Gamma} \check{I}(T) \cap \mathbb{D}^2}$$

estabelece uma região fundamental para Γ , em que $\overline{X}$ denota o fecho do conjunto X . Essa região é chamada de *região fundamental de Ford*.

Teorema 1.3.5. [15] R_0 é uma região fundamental de Γ .

Em nosso trabalho, consideraremos regiões do tipo R_0 quando da obtenção de um conjunto de geradores para Γ_p .

1.3.2 Grupos Fuchsianos Co-compactos

Considere os espaços quocientes $\mathbb{H}^2/\Gamma$ ou $\mathbb{D}^2/\Gamma_p$, onde Γ e Γ_p são grupos discretos agindo de maneira propriamente descontínua sobre $\mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2$, respectivamente, [3]. O espaço $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é construído através da relação de equivalência sobre $\mathbb{H}^2$ dada por

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists T \in \Gamma \text{ tal que } z_2 = T(z_1).$$

Além disso, a classe de equivalência de um elemento $z \in \mathbb{H}^2$, denotada por $[z]$, é tal que $[z] = \Gamma$ -órbita de z . Assim, os elementos do espaço $\mathbb{H}^2/\Gamma$ são as Γ -órbitas, isto é,

$$\mathbb{H}^2/\Gamma = \{[z] \mid z \in \mathbb{H}^2\}.$$

O espaço $\mathbb{D}^2$ é construído de forma análoga. Topologicamente, qualquer g -toro $\mathcal{T}_g$ localmente isométrico a $\mathbb{D}^2$ pode ser obtido do espaço quociente de $\mathbb{D}^2$ por um grupo fuchsiano Γ_p , isto é, $\mathcal{T}_g = \mathbb{D}^2/\Gamma_p$. Dessa forma, podemos obter superfícies de Riemann.

Consideraremos grupos fuchsianos Γ cujo espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ seja uma superfície compacta. Nesse caso, o grupo Γ é dito *grupo fuchsiano co-compacto*. Temos os seguintes teoremas para os grupos fuchsianos co-compactos:

Teorema 1.3.6. [15] *Um grupo fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, toda região de Dirichlet de Γ for compacta.*

Teorema 1.3.7. [9] *Um grupo fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, Γ não possui elementos parabólicos e $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$.*

Observe que como a área sobre o espaço quociente $\mathbb{H}^2/\Gamma$ é induzida da área hiperbólica sobre $\mathbb{H}^2$, então $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma)$ está bem definida e vale $\mu(\mathcal{D})$. Neste trabalho consideraremos apenas superfícies $\mathbb{H}^2/\Gamma$ que são compactas de área finita, logo os grupos fuchsianos considerados não possuem elementos parabólicos.

1.3.3 A Assinatura de um Grupo Fuchsiano

Sejam Γ um grupo fuchsiano co-compacto e $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ uma região de Dirichlet de Γ . Existem em $\mathcal{D}_{z_0}(\Gamma)$ um número finito de vértices, digamos r , que são pontos fixos de elementos elípticos de Γ . Consideremos $m_1, \dots, m_r$ as ordens desses elementos elípticos e g o gênero da superfície $\mathcal{D}_{z_0}/\Gamma$, que é compacta e orientável [9]. O conjunto ordenado de inteiros $(g; m_1, \dots, m_r)$ é a *assinatura* de Γ . Se o grupo fuchsiano Γ não possuir elementos elípticos, sua assinatura é $(g; 0, \dots, 0)$ ou $(g; -)$. Temos os seguintes resultados:

Teorema 1.3.8. [9] *Seja Γ um grupo fuchsiano co-compacto com assinatura $(g; m_1, \dots, m_r)$. Então*

$$\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi \left[(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) \right]. \quad (1.8)$$

Se o grupo Γ não possuir elementos elípticos, então segue que $\mu(\mathbb{H}^2/\Gamma) = 2\pi[(2g - 2)]$.

A recíproca também é verdadeira:

Teorema 1.3.9. [9] *Dados inteiros $g \geq 0$, $r \geq 0$, $m_k \geq 2$ ($1 \leq k \leq r$), tais que*

$$(2g - 2) + \sum_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_k} \right) > 0,$$

existe um grupo fuchsiano com assinatura $(g; m_1, \dots, m_r)$.

Para encerrar esta parte do texto, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.10. [9] *Toda superfície compacta de gênero $g \geq 2$ pode ser modelada no plano hiperbólico.*

Este teorema nos diz que dada uma superfície compacta M de gênero $g \geq 2$, existe um grupo fuchsiano Γ de forma que M é definida pelo espaço quociente de $\mathbb{H}^2$ por Γ . Em símbolos, $M \equiv \mathbb{H}^2/\Gamma$.

Capítulo 2

Tesselações Regulares

Neste capítulo apresentamos um breve estudo sobre as Tesselações Regulares, com destaque para as Tesselações Hiperbólicas. Primeiramente abordamos o caso Euclidiano. Para mais informações o leitor interessado pode consultar as referências [1], [2], [17].

2.1 Tesselações no Plano Euclidiano

Nesta seção apresentaremos as Tesselações em $\mathbb{R}^2$. Para isto consideraremos o Plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ com a estrutura de espaço vetorial e a distância proveniente do produto interno usual.

Definição 2.1.1. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita uma isometria se $d(x, y) = d(f(x), f(y))$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$.*

A proposição a seguir caracteriza as isometrias e é simples de se demonstrar.

Proposição 2.1.1. *As isometrias satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *Toda isometria é injetora.*
2. *Toda isometria transforma reta em reta.*
3. *Toda isometria preserva medidas de ângulos.*
4. *Toda isometria é bijetora e a inversa é também uma isometria.*
5. *A composição de isometrias também é uma isometria.*

Exemplo 2.1.1. *Seja $\vec{u}$ um vetor de $\mathbb{R}^2$. A aplicação*

$$T_{\vec{u}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{com} \quad T_{\vec{u}}(x) = x + \vec{u}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

é uma isometria, chamada de translação pelo vetor $\vec{u}$.

De fato, temos que

$$d(T_{\vec{u}}(x), T_{\vec{u}}(y)) = d(x + \vec{u}, y + \vec{u}) = \|(x + \vec{u}) - (y + \vec{u})\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Vejamos agora o conceito de tesselação no plano $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.1.2. *Uma tesselação ou ladrilhamento em $\mathbb{R}^2$ é uma cobertura do plano por regiões poligonais congruentes de tal modo que todo ponto do plano é coberto por pelo menos uma região e duas regiões quaisquer não se interceptam, exceto, eventualmente, no bordo.*

A região poligonal será chamada de **ladrilho** e indicada por L .

Caso a região poligonal seja compacta, o ladrilhamento poderá ser chamado de **ladrilhamento compacto**.

A Figura 2.1 mostra uma Tesselação em $\mathbb{R}^2$. Observe que nela aparecem dois tipos de polígonos, que são quadrados e octógonos regulares.

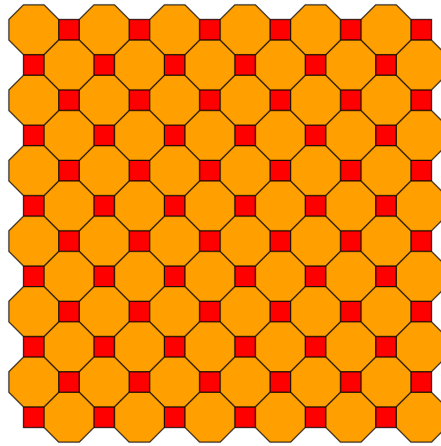


Figura 2.1: Uma Tesselação em $\mathbb{R}^2$

Quando todos os polígonos são regulares, são possíveis apenas três maneiras para tesselar o plano $\mathbb{R}^2$: por quadrados, por hexágonos regulares e por triângulos equiláteros¹. A próxima seção explicará este fato.

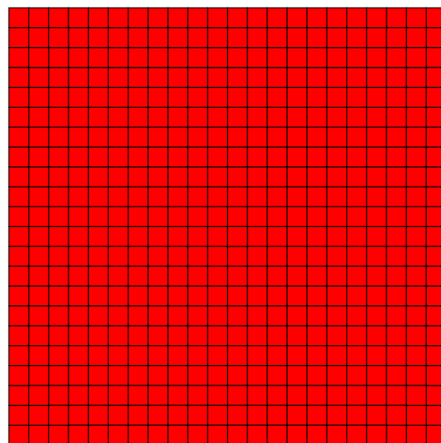


Figura 2.2: Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por quadrados

¹As Figuras 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 foram retiradas de CHAVEY, D. **Tilings by regular polygons-II: A Catalog of Tilings**. Computers & Mathematics with Applications. 17: 147-165, 1989

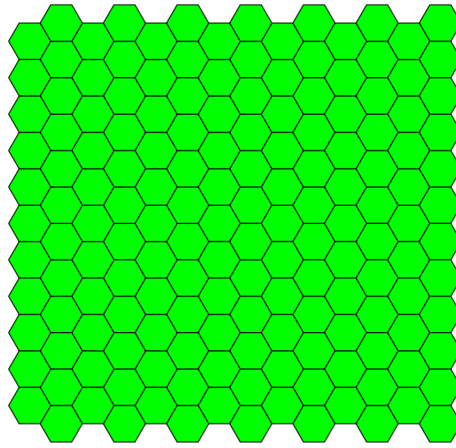


Figura 2.3: Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por hexágonos regulares

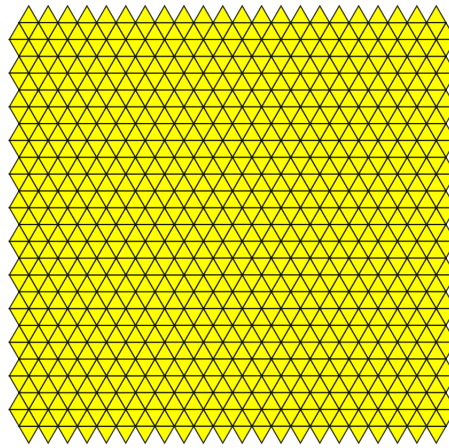


Figura 2.4: Tesselação em $\mathbb{R}^2$ por triângulos equiláteros

Veremos na seção a seguir que existem infinitas maneiras de se tesselar o plano hiperbólico por polígonos regulares, o que é uma vantagem ao se trabalhar com geometria hiperbólica, pois o mesmo não acontece na geometria euclidiana.

2.2 Tesselações no Plano Hiperbólico

Nesta seção apresentaremos as Tesselações Regulares Hiperbólicas. Veremos que existem infinitas tesselações do Plano Hiperbólico por polígonos regulares. No caso Euclidiano, temos apenas três tesselações quando os polígonos são regulares, que são quadrados, hexágonos regulares e triângulos equiláteros.

Definição 2.2.1. *Uma tesselação regular do plano hiperbólico é uma partição deste plano em polígonos regulares isométricos não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos à restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice.*

Se os polígonos de uma determinada tesselação de $\mathbb{H}^2$ contém p arestas, onde cada vértice é recoberto por q desses polígonos, então a tesselação será denotada por $\{p, q\}$. Em particular, se $p = q$ a tesselação será chamada de auto-dual.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que π , $\{p, q\}$ é uma tesselação regular de $\mathbb{H}^2$ se, e somente se [17],

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi,$$

ou seja, se, e somente se,

$$(p - 2)(q - 2) > 4.$$

Observe então que existem infinitas tesselações regulares em $\mathbb{H}^2$. Por outro lado, levando em conta que a soma dos ângulos internos de um triângulo euclidiano é igual a π , temos que as únicas tesselações regulares no plano euclidiano são $\{4, 4\}$, $\{6, 3\}$ e $\{3, 6\}$. Para esses casos, as partições de $\mathbb{R}^2$ são quadrados, hexágonos regulares e triângulos equiláteros, respectivamente, como foi comentado na seção anterior.

Vejamos alguns exemplos de tesselações regulares hiperbólicas².

Exemplo 2.2.1. Na Figura 2.5 temos a tesselação regular hiperbólica auto-dual $\{8, 8\}$, onde os polígonos desta tesselação tem 8 lados, e cada vértice é o encontro de 8 desses polígonos.

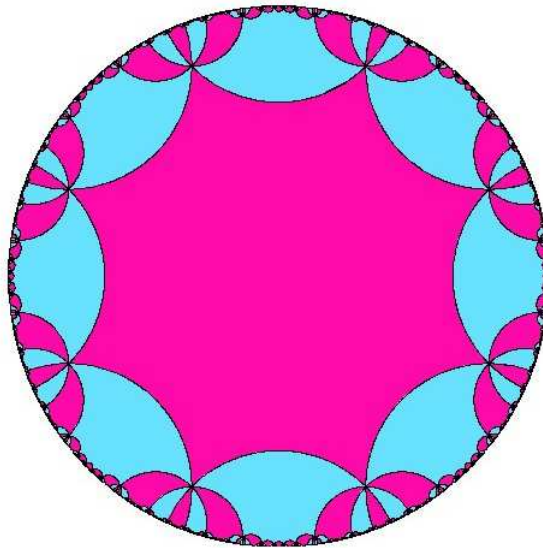


Figura 2.5: Tesselação Hiperbólica $\{8, 8\}$ no Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

²As figuras foram retiradas da referência [4].

Exemplo 2.2.2. Na Figura 2.6 temos a tesselação regular hiperbólica $\{10, 5\}$, onde cada polígono tem 10 lados e cada vértice é o encontro de 5 desses polígonos.

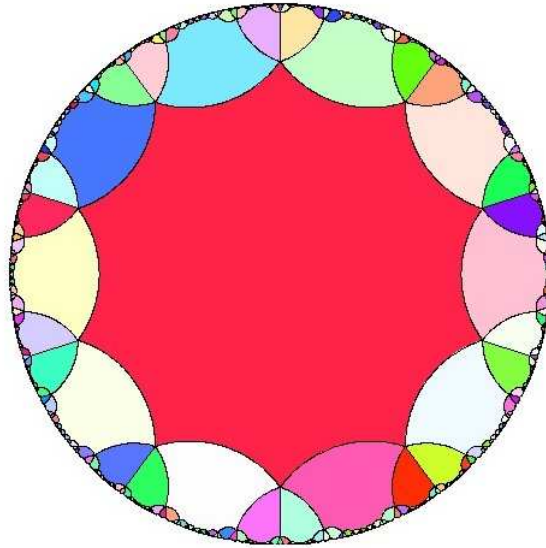


Figura 2.6: Tesselação Hiperbólica $\{10, 5\}$ no Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

Além dessas, temos uma tesselação muito interessante. Os exemplos a seguir mostram a Tesselação de Farey no intervalo $[0, 1]$ e no Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Ela é construída a partir da série de Farey, para mais detalhes o leitor pode consultar [17].

Considere o triângulo fundamental formado pelas geodésicas γ_1 , γ_2 e γ_3 , onde γ_1 tem pontos terminais ∞ e 0 , γ_2 tem pontos terminais 0 e 1 e γ_3 tem pontos terminais 1 e ∞ . Cada triângulo em $\mathbb{H}^2$ localizado abaixo do triângulo fundamental possui seus três vértices no eixo x . No modelo do Semiplano Superior para a geometria hiperbólica, dizemos que esses vértices estão no infinito, e no modelo do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$ esses vértices também estão no infinito, mas na fronteira do disco.

Vejamos os exemplos a seguir³.

³As figuras dos exemplos foram retiradas da referência [17].

Exemplo 2.2.3. *A Tesselação de Farey no intervalo $[0, 1]$.*

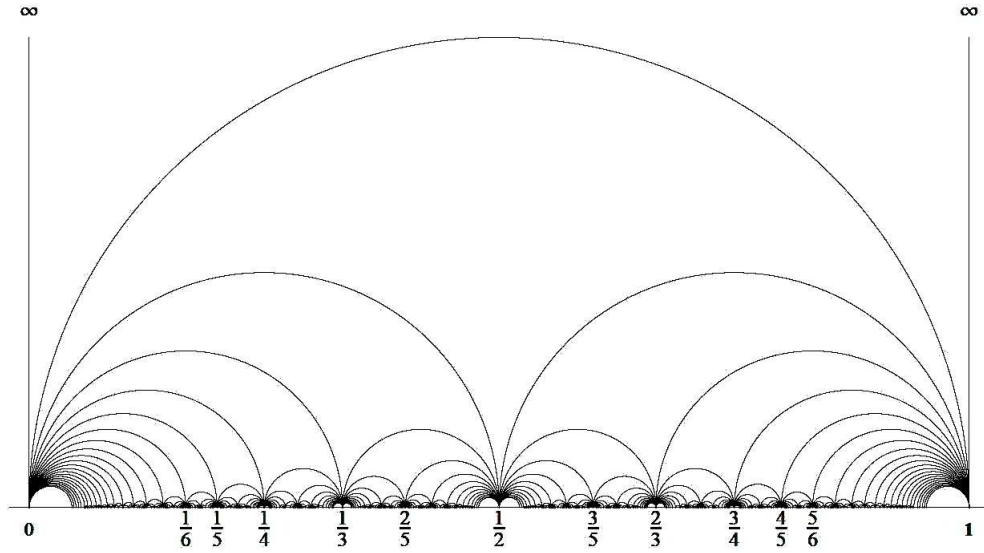


Figura 2.7: Tesselação de Farey no intervalo $[0, 1]$

Exemplo 2.2.4. *A Tesselação de Farey no modelo do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$. Observe que os vértices estão localizados na fronteira do disco.*

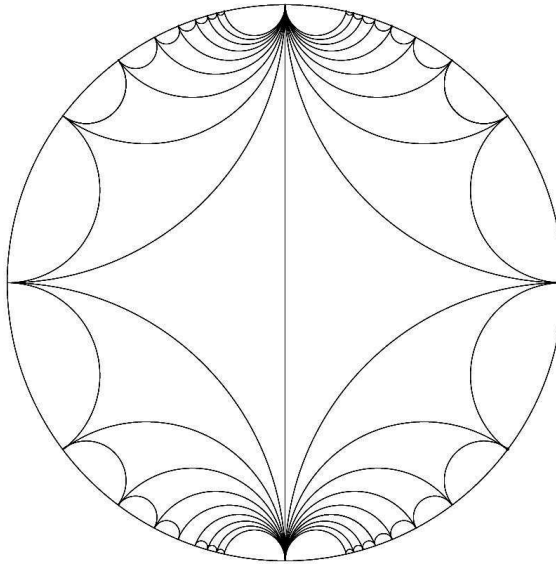


Figura 2.8: Tesselação de Farey no modelo do Disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$

Capítulo 3

Corpos de Números, Anéis de Inteiros e Álgebra dos Quatérnios

Neste capítulo apresentaremos os conceitos da teoria de anéis, de corpos e também de álgebra dos quatérnios, que serão utilizados no capítulo seguinte do trabalho. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [9], [10], [11], [12] e [15].

3.1 Anéis e Corpos

Definição 3.1.1. *Um anel R é um conjunto com duas operações binárias, adição (denotada por $a+b$) e multiplicação (denotada por ab), tal que para todos $a, b, c \in R$:*

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. *Existe um elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = a$, $\forall a \in R$.*
4. *Existe um elemento $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$.*
5. $a(bc) = (ab)c$.
6. $a(b + c) = ab + ac$ e $(b + c)a = ba + ca$.

Um anel R é *comutativo* se $ab = ba$, para todo $a, b \in R$. Ou seja, R é comutativo se a operação de multiplicação do anel é comutativa. Dizemos que o anel R tem *unidade* se existe um elemento $1 \in R$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo a em R .

Exemplo 3.1.1. *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros com as operações de adição e multiplicação usuais é um anel comutativo com unidade 1.*

Exemplo 3.1.2. *O conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ com as operações de adição e multiplicação módulo n é um anel comutativo com unidade 1.*

Exemplo 3.1.3. *O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$ é um anel não comutativo com unidade*

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.1.4. O conjunto $2\mathbb{Z}$ dos inteiros pares com a adição e multiplicação usuais é um anel comutativo sem unidade.

Um subconjunto S de um anel R é um *subanel de R* se S é também um anel com as operações de R .

O conjunto $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ é um subanel de $\mathbb{Z}_6$, os inteiros módulo 6. Também, o conjunto dos *Inteiros Gaussianos* $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ é um subanel dos números complexos $\mathbb{C}$.

Definição 3.1.2. Seja R um anel com unidade. Dizemos que um elemento $a \in R$ é invertível se existe $b \in R$ tal que $ab = ba = 1$. Além disso, b é chamado de inverso de a e é denotado por a^{-1} .

O conjunto dos elementos invertíveis de um anel R será denotado por $U(R)$.

Exemplo 3.1.5. Considere o anel $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$ com as operações de adição e multiplicação módulo 8. Temos que $U(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$.

Proposição 3.1.1. $U(R)$ é um grupo com a operação de multiplicação.

Definição 3.1.3. Sejam R e S anéis. Um homomorfismo de anéis é um mapa de R para S que preserva as duas operações do anel, isto é, para todo $a, b \in R$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad e \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Observe que se $\varphi : R \rightarrow S$ for um homomorfismo de anéis, temos que $\varphi(0) = 0$, e se os anéis possuírem unidade, então $\varphi(1) = 1$.

Um homomorfismo injetor é chamado de *monomorfismo* e um homomorfismo sobrejetor é um *epimorfismo*. Um homomorfismo bijetor é chamado de *isomorfismo*.

Se $\varphi : R \rightarrow S$ é um isomorfismo, então $\varphi^{-1} : S \rightarrow R$ também é isomorfismo. Por isso, dizemos que R e S são isomorfos, em símbolos, $R \simeq S$, quando existe um isomorfismo entre eles.

Exemplo 3.1.6. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{Z})$, definido por $\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, para todo $a \in \mathbb{Z}$. Temos que φ é um homomorfismo injetor, ou seja, é um monomorfismo, mas não é sobrejetor.

Definição 3.1.4. Um subanel I de um anel R é um ideal à esquerda (direita) de R se para todo $r \in R$ e todo $a \in I$, $ra \in I$ ($ar \in I$).

Exemplo 3.1.7. Seja R um anel comutativo com unidade e seja $a \in R$. O conjunto $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$ é um ideal de R , chamado de ideal principal gerado por a .

Exemplo 3.1.8. Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com constantes reais. Denote por I o subconjunto de todos os polinômios com termo constante igual a zero. Então, I é um ideal de $\mathbb{R}[x]$ e $I = \langle x \rangle$.

A teoria de Álgebra Abstrata tem três principais componentes: grupos, anéis e corpos.

Definição 3.1.5. Um corpo é um anel comutativo com unidade em que todo elemento não-nulo é invertível.

Definição 3.1.6. Um corpo E é uma extensão de corpo de um corpo F se $F \subseteq E$ e as operações de F são as mesmas de E , restritas a F . Neste caso, dizemos que F é um subcorpo de E .

Para indicar que E é uma extensão do corpo F , usaremos a notação $E|F$.

Exemplo 3.1.9. O corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Temos então que $\mathbb{Q}(\sqrt{3})|\mathbb{Q}$.

Se $E|F$, então através das operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : F \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, a) &\mapsto \lambda \cdot a \end{aligned}$$

tem-se que E é um espaço vetorial sobre F .

Definição 3.1.7. Seja E uma extensão de um corpo F . Dizemos que E tem grau n sobre F , e escrevemos $[E : F] = n$, se E tem dimensão n como um espaço vetorial sobre F . Se $[E : F]$ é finito, E é dita uma extensão finita de F ; caso contrário, dizemos que E é uma extensão infinita de F .

Exemplo 3.1.10. O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ é uma extensão do corpo dos números reais $\mathbb{R}$, com $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Observe que $\{1, i\}$ é uma base.

Exemplo 3.1.11. Para o corpo dos números racionais, temos que $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$, e também $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Sabemos que todo elemento do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ é escrito de forma simples como $a + b\sqrt{3}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, elementos de $\mathbb{Q}(\pi)$ são escritos de uma forma mais complicada:

$$\frac{a_n\pi^n + a_{n-1}\pi^{n-1} + \dots + a_0}{b_m\pi^m + b_{m-1}\pi^{m-1} + \dots + b_0},$$

com $a_i, b_j \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 0, 1, \dots, n; \forall j = 0, 1, \dots, m$. Os corpos do tipo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ tem uma ótima estrutura algébrica. Alguns resultados sobre esta estrutura são apresentados a seguir.

Definição 3.1.8. Seja E uma extensão de um corpo F e seja $a \in E$. Dizemos que a é algébrico sobre F se a é raiz de algum polinômio não-nulo em $F[x]$. Se a não é algébrico sobre F , então a é dito transcendente sobre F . Um elemento $a \in \mathbb{C}$ é um número algébrico se existir um polinômio não-nulo $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $f(a) = 0$. Nesse caso, dizemos que a é algébrico sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Uma extensão E de F é uma extensão algébrica de F se todo elemento de E é algébrico sobre F . Se E não é uma extensão algébrica de F , então E é uma extensão transcendente de F .

Exemplo 3.1.12. O elemento $\sqrt{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ é um polinômio não-nulo com $f(\sqrt{2}) = 0$.

Charles Hermite, em 1873, provou que e é transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Em 1882, Lindemann mostrou que π é transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Até hoje não se sabe se a soma $\pi + e$ é transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 3.1.9. Sejam F um corpo e $a \in E$ um elemento algébrico sobre F . O polinômio mônico irredutível $p(x) \in F[x]$ tal que $p(a) = 0$ é o polinômio minimal de a sobre F .

Exemplo 3.1.13. O polinômio $p(x) = x^3 - 2$ é o polinômio minimal de $\sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

O próximo resultado mostra que, para um polinômio $f(x) \in F[x]$ qualquer, $f(a)$ pode ser expresso de uma maneira única, onde $a \in E$ é um elemento algébrico sobre F , com $E|F$.

Proposição 3.1.2. Sejam $E|F$ e $a \in E$ um elemento algébrico sobre F . Se o grau do polinômio minimal de a é igual a n , então para todo $f(x) \in F[x]$, $f(a)$ pode ser expresso de maneira única na forma

$$f(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_{n-1}a^{n-1},$$

onde $c_i \in F, i = 0, \dots, n-1$.

Demonstração: Sejam $f(x) \in F[x]$ e $p(x)$ o polinômio minimal de a . Pelo algoritmo da divisão para polinômios, existem $q(x), r(x) \in F[x]$ tais que

$$f(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x),$$

onde $r(x) = 0$ ou $\partial r(x) < \partial p(x)$. Assim, $r(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$, onde $c_i \in F, i = 0, \dots, n-1$.

Temos,

$$f(a) = q(a) \cdot p(a) + r(a) \quad \text{e} \quad p(a) = 0 \Rightarrow f(a) = r(a),$$

ou seja, $f(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_{n-1}a^{n-1}$.

Para demonstrar a unicidade, suponha que

$$f(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_{n-1}a^{n-1} = b_0 + b_1a + \dots + b_{n-1}a^{n-1},$$

$b_i, c_i \in F, i = 1, \dots, n-1$. Segue então que o polinômio

$$s(x) = (c_0 - b_0) + (c_1 - b_1)x + \dots + (c_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$$

é tal que $s(a) = 0$ e $\partial s(x) < n = \partial p(x)$. Assim, $s(x) = 0$ e daí resulta que $c_i = b_i, \forall i = 1, \dots, n-1$. ■

Definição 3.1.10. Um número complexo α é dito um inteiro algébrico se existe um polinômio mônico não-nulo $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 3.1.14. Seja $\alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Então, α é um inteiro algébrico pois é raiz de $p(x) = x^2 - x + 1$.

Denotaremos o conjunto de todos os números algébricos sobre $\mathbb{Q}$ por $\mathbf{A}$, e o conjunto dos inteiros algébricos por $\mathbf{B}$. O conjunto $\mathbf{A}$ é subcorpo de $\mathbb{C}$ [18], com $[\mathbf{A} : \mathbb{Q}] = \infty$. Observe ainda que $\mathbf{B}$ é subanel de $\mathbf{A}$.

O resultado que segue mostra-nos que toda extensão finita é uma extensão algébrica.

Teorema 3.1.1. *Se E é uma extensão finita de F , então E é uma extensão algébrica de F .*

Demonstração: Suponha que $[E : F] = n$, e seja $a \in E$. Então, o conjunto $\{1, a, \dots, a^n\}$ é linearmente dependente sobre E , pois tem $n+1$ elementos. Assim, existem elementos $c_0, c_1, \dots, c_n \in F$, nem todos nulos, tais que

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \dots + c_1 a + c_0 = 0.$$

Claramente, a é uma raiz do polinômio não nulo

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0.$$

■

A recíproca deste teorema não é verdadeira. Com efeito, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots)$ é uma extensão algébrica de $\mathbb{Q}$, mas não é finita. Também, temos que $[\mathbf{A} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Considere F um corpo e sejam E uma extensão de F e $a \in E$. A proposição que segue caracteriza as extensões do tipo $F(a)$.

Proposição 3.1.3. *Sejam F um corpo e $E|F$ uma extensão de F . Se $a \in E$ é um elemento algébrico sobre F e o grau do polinômio minimal de a é igual a n , então $\{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ é uma base do espaço vetorial $F(a)$ sobre F e $[F(a) : F] = n$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.2, como $a \in E$ é um elemento algébrico sobre F e o polinômio minimal de a tem grau n , temos que todo elemento de $F(a)$ pode ser escrito de modo único como combinação linear sobre F de $1, a, \dots, a^{n-1}$. Assim, $\{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ é uma base de $F(a)$ sobre F , logo $[F(a) : F] = n$. ■

Exemplo 3.1.15. *Já vimos que $p(x) = x^3 - 2$ é o polinômio minimal de $\sqrt[3]{2}$, logo $\sqrt[3]{2}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$. Como $\partial p(x) = 3$, pela proposição anterior segue que $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\}$ é uma base de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ sobre $\mathbb{Q}$ e $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.*

O próximo teorema relaciona o grau da extensão $\mathbb{Q}(\alpha)$ com o grau do polinômio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.1.2. *Se $L|\mathbb{Q}$, então $\alpha \in L$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ se, e somente se,*

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \{f(\alpha) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$$

é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$. Neste caso, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \partial p(x)$, onde $p(x)$ é o polinômio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$, e $\partial p(x)$ denota o grau de $p(x)$.

Demonstração: Seja $\alpha \in L$ algébrico sobre $\mathbb{Q}$, e seja $p(x)$ o polinômio minimal de α . Pela Proposição 3.1.3, segue que $\mathbb{Q}(\alpha)$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, com $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \partial p(x)$. Reciprocamente, se $\mathbb{Q}(\alpha)$ é uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, então

$\mathbb{Q}(\alpha)$ é uma extensão algébrica sobre $\mathbb{Q}$ pelo Teorema 3.1.1. Como $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$, segue que α é algébrico. ■

Apresentaremos agora um resultado para a teoria de corpos que é uma versão análoga do Teorema de Lagrange para grupos finitos.

Teorema 3.1.3. *Seja F um corpo. Considere E uma extensão finita de F e K uma extensão finita do corpo E . Então, K é uma extensão finita de F , e $[K : F] = [K : E][E : F]$.*

Demonstração: Considere $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de K sobre E , e $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ uma base de E sobre F . Provaremos que

$$YX = \{y_j x_i \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n\}$$

é uma base de K sobre F . Para isso, seja $a \in K$. Então existem elementos $b_1, \dots, b_n \in E$ tais que

$$a = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$$

e, para cada $i = 1, \dots, n$, existem elementos $c_{i1}, \dots, c_{im} \in F$ tais que

$$b_i = c_{i1} y_1 + \dots + c_{im} y_m.$$

Então,

$$a = \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_{ij} y_j \right) x_i = \sum_{i,j} c_{ij} (y_j x_i).$$

Isso prova que YX gera K sobre F .

Agora, suponha que existam elementos $c_{ij} \in F$ tais que

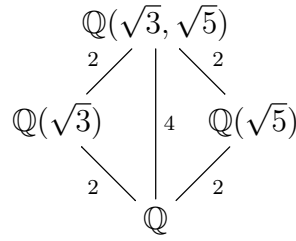
$$0 = \sum_{i,j} c_{ij} (y_j x_i) = \sum_i \left(\sum_j c_{ij} y_j \right) x_i.$$

Então, como cada $\sum_j c_{ij} y_j \in E$ e X é uma base de K sobre E , temos que

$$\sum_j c_{ij} y_j = 0$$

para cada i . Mas, cada c_{ij} pertence a F e Y é uma base de E sobre F . Logo, cada c_{ij} é nulo, o que prova que o conjunto YX é linearmente independente sobre F , portanto uma base de K sobre F . ■

Exemplo 3.1.16. *Como $\{1, \sqrt{3}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, e $\{1, \sqrt{5}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ sobre $\mathbb{Q}$, o Teorema 3.1.3 mostra que $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}\}$ é uma base para $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ sobre $\mathbb{Q}$.*



Na figura do exemplo anterior, temos um diagrama de extensões que cumpre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Para este trabalho, vamos considerar extensões algébricas finitas do corpo $\mathbb{Q}$, ou seja, extensões $E|\mathbb{Q}$ tais que $[E : \mathbb{Q}]$ é finito. Essas extensões denominam-se *corpos de números*. Dessa forma, temos que $E = \mathbb{Q}(\theta)$, para algum $\theta \in \mathbf{A}$.

Sendo $E = \mathbb{Q}(\theta)$ um corpo de números, com $[E : \mathbb{Q}] = n$, existem n monomorfismos $\varphi_i : E \rightarrow \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$, definidos por $\varphi_i(\theta) = \theta_i$ [18], onde θ_i são as raízes distintas em $\mathbb{C}$ do polinômio minimal de θ sobre $\mathbb{Q}$. Esses monomorfismos deixam fixos os elementos de $\mathbb{Q}$, e desde que $\mathbb{C}|E$, o conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ constitui o *grupo de Galois* da extensão $E|\mathbb{Q}$.

Exemplo 3.1.17. *Seja $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Como o polinômio minimal de $\theta = \sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é $p(x) = x^3 - 2$, segue que existem três monomorfismos $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$, dados por $\varphi_1(\theta) = \theta$, $\varphi_2(\theta) = \omega\theta$ e $\varphi_3(\theta) = \omega^2\theta$, com $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.*

O elemento ω do exemplo anterior é uma raiz 3-ésima primitiva da unidade. Seja E um corpo de números. Considere o conjunto

$$\mathfrak{D}_E = E \cap \mathbf{B}.$$

Então, $\mathfrak{D}_E$ é um subanel de E , chamado de *anel de inteiros* de E . Como $\mathbb{Z} \subseteq \mathbf{B}$, segue que $\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{D}_E$.

Definição 3.1.11. *Um número $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ é livre de quadrado se este não é divisível por um quadrado de um número primo.*

Exemplo 3.1.18. *Os números 6, 7 e 10 são livres de quadrado, e 18 e 25 não o são.*

Teorema 3.1.4. [8] *Seja d um inteiro livre de quadrado. Então, o anel de inteiros algébricos de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ é dado por*

$$\mathfrak{D}_E = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & \text{se } d \not\equiv 1 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}], & \text{se } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

3.2 Álgebra dos Quatérnios

Veremos a seguir o conceito de álgebra dos quatérnios e algumas propriedades.

Definição 3.2.1. *Seja E um corpo. Uma álgebra $\mathcal{B}$ sobre E é um espaço vetorial com uma estrutura de anel com unidade $1_{\mathcal{B}}$, com operações de multiplicação do anel e por escalar relacionadas por*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \forall \alpha \in E \text{ e } \forall x, y \in \mathcal{B}.$$

A álgebra $\mathcal{B}$ é dita comutativa se ela é comutativa sob sua estrutura de anel.

Uma álgebra dos quatérnios é um caso particular da Definição 3.2.1.

Definição 3.2.2. *Seja E um corpo tal que $\text{car} E \neq 2$. Uma álgebra dos quatérnios sobre E é uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre E satisfazendo as seguintes condições:*

1. *O radical $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ (um ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{I}^n = \{0\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$) é trivial;*
2. *$\mathcal{Z} = \{x \in \mathcal{A} \mid x \cdot y = y \cdot x, \forall y \in \mathcal{A}\} = E$, onde $\mathcal{Z}$ é o centro de $\mathcal{A}$;*
3. *$\dim_E(\mathcal{A}) = 4$.*

Uma álgebra que satisfaz as condições 1-3 é chamada de *álgebra simples central*.

Podemos encontrar uma E -base $\{1, i, j, k\}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo, [13],

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji,$$

com $a, b \in E - \{0\}$. Denotaremos a álgebra $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A} = (a, b)_E$. Observe que $\mathcal{A}$ não é comutativa, já que $ij = -ji$.

Se cada elemento da álgebra $\mathcal{A}$ possuir inverso, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra de divisão*.

Definição 3.2.3. *Seja $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathcal{A}$, onde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in E$. O conjugado de x é dado por $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$.*

Observe que quaisquer elementos $x, y \in \mathcal{A}$ satisfazem

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \bar{\bar{x}} = x. \quad (3.1)$$

Definição 3.2.4. *Seja $x \in \mathcal{A}$. A norma reduzida de x , denotada por $Nrd(x)$, e o traço reduzido de x , denotado por $Trd(x)$, são definidos por*

$$Nrd(x) = x \cdot \bar{x} = x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 \quad \text{e} \quad Trd(x) = x + \bar{x} = 2x_0. \quad (3.2)$$

A função norma Nrd satisfaz

$$Nrd(x \cdot y) = Nrd(x) \cdot Nrd(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{A}. \quad (3.3)$$

Estabeleceremos agora uma conexão entre os elementos de uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$ e os elementos de uma sub-álgebra de $M(2, E(\sqrt{a}))$.

Sejam $\mathcal{A} = (a, b)_E$ e M_0, M_1, M_2, M_3 matrizes linearmente independentes de $M(2, E(\sqrt{a}))$, dadas por

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ -b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a aplicação $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M(2, E(\sqrt{a}))$, definida por

$$\varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot M_0 + x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3.$$

Como $\varphi(i^2) = aI_2$, $\varphi(j^2) = bI_2$, $\varphi(i)\varphi(j) = -\varphi(j)\varphi(i)$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, verifica-se que φ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em uma subálgebra de $M(2, E(\sqrt{a}))$. Assim, cada elemento de $\mathcal{A}$ é identificado com

$$x \mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Teorema 3.2.1. [15] *Se $\mathcal{A} = (a, b)_E$ não é isomorfa a $M(2, E)$, então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão.*

Teorema 3.2.2. *$\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão se, e somente se, $Nrd(x) = 0$ apenas para $x = 0$.*

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{A}$ com $x \neq 0$. Então $Nrd(x) \neq 0$. Como $Nrd(x) = x \cdot \bar{x}$, temos que

$$\frac{\bar{x}}{Nrd(x)} \cdot x = 1, \text{ ou seja, } \frac{\bar{x}}{Nrd(x)}$$

é o elemento inverso de x . Logo, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão. Reciprocamente, se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão e $x \neq 0$, então $x^{-1} \neq 0$ e $Nrd(x) \cdot Nrd(x^{-1}) = 1$, ou seja, $Nrd(x) \neq 0$. ■

Exemplo 3.2.1. *Sejam $\mathcal{A} = (5, 11)_{\mathbb{Q}}$, e $h \in \mathcal{A}$, com $h = 1 + 3i + j + k \neq 0$. Temos que $Nrd(h) = 1^2 - 5 \cdot 3^2 - 1 \cdot 1^2 + 55 \cdot 1^2 = 0$. Pelo teorema anterior, segue que $\mathcal{A}$ não é uma álgebra de divisão.*

Exemplo 3.2.2. *Sejam $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$ a álgebra dos quatérnios de Hamilton e*

$$\mathbb{H}^1 = \{x \in \mathbb{H} \mid Nrd_{\mathbb{H}}(x) = 1\}.$$

Considere o conjunto

$$Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) = \{Trd_{\mathbb{H}}(x) \mid x \in \mathbb{H}^1\}.$$

Então, dado $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathbb{H}^1$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, temos de (3.2) que $Nrd_{\mathbb{H}}(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Disso segue que $|x_0| \leq 1$ e, consequentemente, $Trd_{\mathbb{H}}(x) = 2x_0 \in [-2, 2]$. Logo, $Trd_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^1) = [-2, 2]$.

3.3 Reticulados Hiperbólicos

Nesta seção é apresentada o conceito de ordem em uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A}$.

Definição 3.3.1. *Seja R um anel. Um conjunto não vazio M é dito um R -módulo (ou um módulo sobre R) se M é um grupo abeliano sob uma operação $+$ tal que, para todo $r \in R$ e $m \in M$, existe um elemento $rm \in M$ que satisfaz:*

$$1. \ r(a + b) = ra + rb$$

$$2. \ r(sa) = (rs)a$$

$$3. \ (r + s)a = ra + sa$$

para todo $a, b \in M$ e $r, s \in R$.

Exemplo 3.3.1. *Sejam R um anel e I um ideal à esquerda de R . Seja $M = \{a + I \mid a \in R\}$ o conjunto de todas as classes laterais à esquerda de R . Em M , defina $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ e $r(a + I) = ra + I$, $r \in R$. Dessa forma, M é um R -módulo.*

Definição 3.3.2. *Um R -módulo M é dito finitamente gerado se existem elementos $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ tais que todo $m \in M$ é da forma*

$$m = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n,$$

$$r_1, r_2, \dots, r_n \in R.$$

Definição 3.3.3. *Um subconjunto discreto Λ de pontos de $\mathbb{R}^n$ é um reticulado de dimensão n se este for um $\mathbb{Z}$ -módulo, gerado através de uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$.*

Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra dos quatérnios sobre E e R um anel. Uma R -ordem $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$ é um subanel de $\mathcal{A}$ com unidade que é um R -módulo finitamente gerado tal que $\mathcal{A} = E\mathcal{O}$.

A R -ordem $\mathcal{O}$ também será chamada de *reticulado hiperbólico*.

No trabalho de Carvalho, [6], os reticulados hiperbólicos são utilizados no processo de rotulagem de uma constelação de sinais geometricamente uniforme no plano hiperbólico.

No próximo capítulo, vamos considerar a tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$ associada ao grupo fuchsiano Γ_{8g-4} e identificá-lo com a respectiva ordem $\mathcal{O}$.

Consideremos, para cada ordem $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$, o conjunto $\mathcal{O}^1$, definido por

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid \text{Nrd}(x) = 1\}.$$

Proposição 3.3.1. $\mathcal{O}^1$ é um grupo multiplicativo.

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathcal{O}^1$. Por definição, temos que $x \cdot y \in \mathcal{O}$. Por outro lado, temos que

$$\text{Nrd}(x \cdot y) = \text{Nrd}(x) \cdot \text{Nrd}(y) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Segue então que $x \cdot y \in \mathcal{O}^1$. Também, o inverso de x é $\bar{x}$, e $\text{Nrd}(\bar{x}) = 1$, pois de (3.2),

$$\text{Nrd}(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{\bar{x}} = \bar{x} \cdot x = x \cdot \bar{x} = \text{Nrd}(x)$$

■

A R -ordem $\mathcal{O}$ será denotada por $\mathcal{O} = (a, b)_{\mathfrak{D}_E}$.

Capítulo 4

Identificação dos Grupos Γ_{8g-4} em Ordens dos Quatérnios

Vieira em [20] apresenta alguns casos de identificação dos grupos fuchsianos em ordens dos quatérnios de algumas tesselações, com destaque para o grupo fuchsiano Γ_{4g} associado à tesselação auto-dual $\{4g, 4g\}$, onde g é o gênero da superfície compacta $\mathbb{D}^2/\Gamma_{4g}$. Nesse trabalho, o autor generaliza os casos em que $g = 2^n$, $g = 3 \cdot 2^n$ e $g = 5 \cdot 2^n$, com $n > 0$ um natural. Mas identificar um grupo fuchsiano em ordens dos quatérnios pode ser uma tarefa difícil. Por exemplo, para a tesselação $\{12g - 6, 3\}$, Vieira mostrou em seu trabalho apenas um caso de identificação, quando $g = 3$, [20].

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira, apresentamos o grupo fuchsiano Γ_{8g-4} proveniente da tesselação $\{8g - 4, 4\}$ e um conjunto de geradores, com destaque para o caso em que $g = 2$. Na segunda, tratamos a identificação em ordens dos quatérnios dos elementos desse grupo.

4.1 O Grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}

Nesta seção apresentamos o grupo fuchsiano Γ_{8g-4} . Uma abordagem mais detalhada dos assuntos tratados aqui pode ser encontrada em [7].

Considere a tesselação $\{8g - 4, 4\}$, com gênero $g \geq 2$, e seja P_{8g-4} o polígono hiperbólico regular de $8g - 4$ arestas associado. A superfície $\mathbb{D}^2/\Gamma_{8g-4}$ dá origem a um g -toro, [20], através do emparelhamento de arestas descrito em [7]. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o polígono P_{8g-4} esteja centrado na origem de $\mathbb{D}^2$.

Sejam $\tau_1, \dots, \tau_{8g-4}$ as arestas de P_{8g-4} , sendo a contagem iniciada no sentido anti-horário, e considere as isometrias hiperbólicas que formam um conjunto gerador do grupo fuchsiano Γ_{8g-4} . Temos então um polígono regular de $8g - 4$ arestas que está associado a um grupo Γ_{8g-4} de assinatura $(g, -)$. Segue do Teorema 1.3.8 que a área hiperbólica de P_{8g-4} é

$$\mu(P_{8g-4}) = \mu(\mathbb{D}^2/\Gamma_{8g-4}) = 4\pi(g - 1).$$

Note que o grupo Γ_{8g-4} não possui elementos elípticos.

De maneira sucinta, as isometrias geradoras de Γ_{8g-4} são encontradas como

segue. Em [7], esse processo se encontra mais detalhado.

Sejam $\tau_1, \dots, \tau_{8g-4}$ as arestas de P_{8g-4} , contadas no sentido anti-horário. Considere a transformação hiperbólica que emparelha as arestas τ_1 e τ_{4g-1} :

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1. \end{aligned}$$

A inversa de α_1 é

$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1} : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{az - \bar{b}}{-bz + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1. \end{aligned}$$

Os círculos isométricos de α_1 possuem centro $-\frac{\bar{a}}{b}$ e raio $\frac{1}{|b|}$, e os de α_1^{-1} tem centro de $\frac{a}{b}$ e mesmo raio, com

$$a = \pm \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} \quad e \quad b = \pm \frac{\sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}\right)} \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{-i\pi \frac{8g-3}{8g-4}}.$$

Levando em conta esses valores, podemos representar α_1 pela matriz

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} & ue^{(-i\pi \frac{8g-3}{8g-4})} \\ ue^{(i\pi \frac{8g-3}{8g-4})} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

com

$$u = \frac{\sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}\right)} \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}}. \quad (4.2)$$

Considere agora a isometria definida por

$$\begin{aligned} \rho_k : \mathbb{D}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto ze^{i\frac{\pi}{4g-2}(\frac{1}{2}+k)}, \quad k = 1, \dots, 8g-5 \end{aligned}$$

Matricialmente, podemos escrevê-la como

$$M_{\rho_k} = \begin{pmatrix} e^{(i\frac{2\pi}{8g-4})} & 0 \\ 0 & e^{(-i\frac{2\pi}{8g-4})} \end{pmatrix}.$$

Denotando as funções de emparelhamento das arestas por α_{k+1}^a , α_{k+1}^b , β_{k+1}^c e β_{k+1}^d , com $k = 1, \dots, g-1$, conseguimos escrevê-las em função de α_1 , [7]. Então, fazendo a conjugação desses emparelhamentos com a isometria ρ_k , obtemos as isometrias hiperbólicas que são os geradores do grupo fuchsiano Γ_{8g-4} em forma matricial:

$$M_{\alpha_{k+1}^a} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{i \frac{8k\pi}{8g-4}} & ue\left(-i\pi \frac{8g-3}{8g-4}\right) \\ ue\left(i\pi \frac{8g-3}{8g-4}\right) & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{-i \frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$M_{\alpha_{k+1}^b} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{-i \frac{8k\pi}{8g-4}} & ue\left(-i\pi \frac{8g-3}{8g-4}\right) \\ ue\left(i\pi \frac{8g-3}{8g-4}\right) & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{i \frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$M_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} & ue\left(-i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) \\ ue\left(i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M_{\beta_{k+1}^c} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{i \frac{8k\pi}{8g-4}} & ue\left(-i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) \\ ue\left(i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{-i \frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$M_{\beta_{k+1}^d} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{-i \frac{8k\pi}{8g-4}} & ue\left(-i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) \\ ue\left(i\pi \frac{16g-7}{8g-4}\right) & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4g-2}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4g-2}} e^{i \frac{8k\pi}{8g-4}} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Considere agora a isometria

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ z &\mapsto \frac{zi + 1}{z + i}. \end{aligned}$$

Através dessa aplicação, temos que $\Gamma \simeq \Gamma_{8g-4}$ [20]. Desse modo, podemos trabalhar tanto em $\mathbb{H}^2$ quanto em $\mathbb{D}^2$. Assim, para cada transformação $\xi : \mathbb{D}^2 \rightarrow$

$\mathbb{D}^2$, temos uma correspondente em $\mathbb{H}^2$, que é dada por $f^{-1} \cdot \xi \cdot f$.

Seja $\xi = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a\bar{a} - b\bar{b} = 1$. Então

$$\begin{aligned} f^{-1} \cdot \xi \cdot f : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ z &\mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a) + \operatorname{Im}(b) & \operatorname{Re}(b) + \operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a) & \operatorname{Re}(a) - \operatorname{Im}(b) \end{pmatrix} (z). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para trabalhar com a identificação, vamos considerar as matrizes em $\mathbb{H}^2$. Nesse processo, poderemos observar que os geradores se escrevem na forma

$$G = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_k + y_k \sqrt{t} & z_k + w_k \sqrt{t} \\ -z_k + w_k \sqrt{t} & x_k - y_k \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

onde $x_k, y_k, z_k, w_k \in \mathbb{Z}[\theta]$, $\mathbb{Z}[\theta]$ é o anel de inteiros de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m > 0$, $t \in \mathbb{Z}[\theta]$ e $\sqrt{t} \notin \mathbb{Z}[\theta]$.

Através das funções de emparelhamento descritas em [7], o polígono P_{12} associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ quando $g = 2$ é mostrado na Figura 4.1¹.

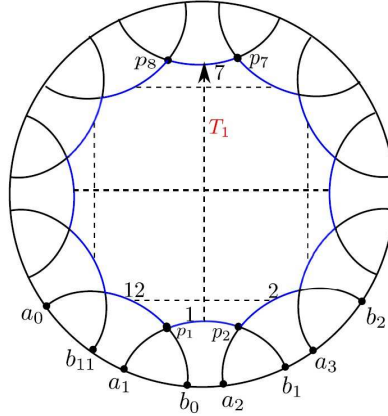


Figura 4.1: Polígono P_{12}

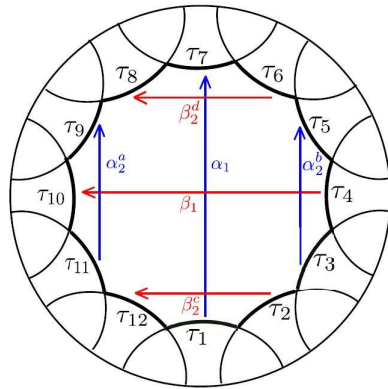


Figura 4.2: Emparelhamento da Tesselação $\{8g - 4, 4\}$ para $g = 2$

¹As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 foram retiradas da referência [7].

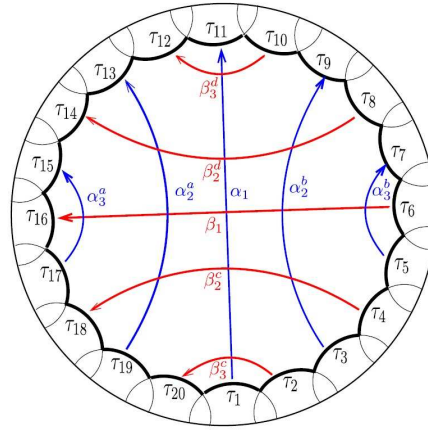


Figura 4.3: Emparelhamento da Tesselação $\{8g - 4, 4\}$ para $g = 3$

A tesselação $\{8g - 4, 4\}$ para $g = 2$ tem seu emparelhamento representado na Figura 4.2. Apresentaremos na seção a seguir o grupo fuchsiano Γ_{8g-4} em que $g = 2$. Determinaremos a ordem dos quatérnios $\mathcal{O}$ em $\mathcal{A}$ associada ao grupo Γ_{8g-4} , em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra dos quatérnios, e identificaremos o grupo fuchsiano Γ_{8g-4} em ordens dos quatérnios no caso em que $g = 2$. Para isso, consideraremos inicialmente o anel de inteiros de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

De acordo com o Teorema 3.1.4, temos a seguinte:

Proposição 4.1.1. *Seja $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. O anel de inteiros de E é*

$$\mathfrak{D}_E = \mathbb{Z}[\sqrt{3}].$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.4, como $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$, segue que o anel de inteiros de $E = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ é $\mathfrak{D}_E = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. ■

Proposição 4.1.2. *Seja Γ um grupo fuchsiano finitamente gerado por $G_1, \dots, G_l$, com*

$$G_k = \begin{pmatrix} x_k + y_k\sqrt{\theta} & z_k + w_k\sqrt{\theta} \\ -z_k + w_k\sqrt{\theta} & x_k - y_k\sqrt{\theta} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, l,$$

onde $G_k \in M(2, E(\sqrt{\theta}))$ e $\theta, x_k, y_k, z_k, w_k \in E$, sendo E um corpo. Então qualquer elemento $T \in \Gamma$ assume a mesma forma dos geradores de Γ .

Demonstração: Sejam G_1 e G_2 dois geradores de Γ , digamos

$$G_1 = \begin{pmatrix} x_1 + y_1\sqrt{\theta} & z_1 + w_1\sqrt{\theta} \\ -z_1 + w_1\sqrt{\theta} & x_1 - y_1\sqrt{\theta} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = \begin{pmatrix} x_2 + y_2\sqrt{\theta} & z_2 + w_2\sqrt{\theta} \\ -z_2 + w_2\sqrt{\theta} & x_2 - y_2\sqrt{\theta} \end{pmatrix}.$$

Se $G_1 \cdot G_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, então

$$\begin{aligned} a_{11} &= x_1x_2 - z_1z_2 + (y_1y_2 + w_1w_2)\theta + (x_1y_2 + x_2y_1 + z_1w_2 - z_2w_1)\sqrt{\theta}, \\ a_{22} &= x_1x_2 - z_1z_2 + (y_1y_2 + w_1w_2)\theta - (x_1y_2 + x_2y_1 + z_1w_2 - z_2w_1)\sqrt{\theta}, \\ a_{21} &= -z_1x_2 - x_1z_2 - (y_1w_2 - w_1y_2)\theta + (-z_1y_2 + x_2w_1 + x_1w_2 + y_1z_2)\sqrt{\theta}, \\ a_{12} &= z_1x_2 + x_1z_2 + (y_1w_2 - w_1y_2)\theta + (-z_1y_2 + x_2w_1 + x_1w_2 + y_1z_2)\sqrt{\theta}. \end{aligned}$$

■

Proposição 4.1.3. *Sejam a álgebra $\mathcal{A} = (a, b)_E$ com uma E -base $\{1, i, j, k\}$, $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ fixo e R o conjunto*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{r^m} \mid \alpha \in \mathfrak{D}_E \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\},$$

onde $\mathfrak{D}_E$ é o anel de inteiros do corpo E . Então

$$\mathcal{O} = (a, b)_R = \{x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

é uma ordem em $\mathcal{A}$.

Demonstração: Temos que R é um subanel de E que contém o anel de inteiros $\mathfrak{D}_E$. Por definição, $\mathcal{O}$ é um R -módulo. Seja $\beta \in E$. Então, existe $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $c\beta \in \mathfrak{D}_E$. Assim, para quaisquer $x_0, x_1, x_2, x_3 \in E$, existem $c_l \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tais que $c_l x_l = \alpha_l \in \mathfrak{D}_E$, $l = 0, 1, 2, 3$. Dessa forma, dado $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in \mathcal{A}$, existe $\gamma \in E$ tal que $x = \gamma x'$, com $x' \in \mathcal{O}$. Ou seja, $\mathcal{A} = E\mathcal{O}$, e então $\mathcal{O}$ é uma ordem em $\mathcal{A}$. ■

4.2 Caso $g = 2$

Nesta seção veremos como ficam as matrizes e a identificação quando $g = 2$. Para o nosso caso, apresentaremos os geradores de Γ_{8g-4} em $\mathbb{D}^2$ e também em $\mathbb{H}^2$. De (4.2), observe que

$$u = \frac{\sqrt{2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6}}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Primeiramente, faremos uma observação muito importante. Sendo $\theta = 3 + 2\sqrt{3}$, temos que $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \neq t^2$ em $\mathbb{Z}[\theta]$. De fato, observe que $\mathbb{Z}[\theta] = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Agora, suponha que $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = t^2$, $t = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} &= (a + b\sqrt{3})^2 \\ \Rightarrow 3 + 2\sqrt{3} &= (a + b\sqrt{3})^4 \\ \Rightarrow 3 + 2\sqrt{3} &= a^4 + 9b^4 + 18a^2b^2 + (4a^3b + 12ab^3)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Disso, resulta que

$$\begin{aligned} 4a^3b + 12ab^3 &= 2 \\ \Rightarrow 2a^3b + 6ab^3 &= 1 \\ \Rightarrow b(2a^3 + 6ab^2) &= 1. \end{aligned}$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}$, então $b = 1$ e $2a^3 + 6ab^2 = 1$ ou $b = -1$ e $2a^3 + 6ab^2 = -1$. Se $b = 1$ e $2a^3 + 6ab^2 = 1$, temos que $2a^3 + 6a = 1$, ou seja, $a(2a^2 + 6) = 1$. Assim, $a = 1$ e $2a^2 + 6 = 1$ ou $a = -1$ e $2a^2 + 6 = -1$. Mas como a é inteiro, nenhuma das possibilidades ocorre. O caso em que $b = -1$ e $2a^3 + 6ab^2 = -1$ é análogo, e então segue que $\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \neq t^2$ em $\mathbb{Z}[\theta]$.

Mostraremos a seguir as matrizes M_{α_1} , $M_{\alpha_2^a}$, $M_{\alpha_2^b}$, M_{β_1} , $M_{\beta_2^a}$, $M_{\beta_2^b}$ no modelo do Disco $\mathbb{D}^2$. Para isso, assumiremos que o valor de θ é $3 + 2\sqrt{3}$.

Iniciaremos com a matriz M_{α_1} . Fazendo $g = 2$ em (4.1), temos que

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} & ue^{-i\frac{13\pi}{12}} \\ ue^{i\frac{13\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}.$$

Pela fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} e^{i\frac{13\pi}{12}} &= \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

Da expressão para u , resolvendo e simplificando as expressões de M_{α_1} , segue que

$$M_{\alpha_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} & (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Para a matriz $M_{\alpha_2^a}$ em $\mathbb{D}^2$, fazendo $g = 2$ em (4.3), tem-se

$$M_{\alpha_2^a} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{i\frac{2\pi}{3}} & ue^{-i\frac{13\pi}{12}} \\ ue^{i\frac{13\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Da fórmula de Euler,

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$$

Já sabemos o valor de u , também $e^{i\frac{13\pi}{12}} = -\frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]$. Assim, resolvendo e simplificando as expressões de $M_{\alpha_2^a}$, resulta que

$$M_{\alpha_2^a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3}) & (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Fazendo $g = 2$ em (4.4), temos que a matriz $M_{\alpha_2^b}$ em $\mathbb{D}^2$ é escrita da forma:

$$M_{\alpha_2^b} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} e^{-i \frac{2\pi}{3}} & u e^{-i \frac{13\pi}{12}} \\ u e^{i \frac{13\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} e^{i \frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Como

$$e^{i \frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$

e

$$e^{i \frac{13\pi}{12}} = -\frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})],$$

$M_{\alpha_2^b}$ é dada por

$$M_{\alpha_2^b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3}) & (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Para M_{β_1} no modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2$, fazendo $g = 2$ em (4.5), resulta

$$M_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} & u e^{-i \frac{25\pi}{12}} \\ u e^{i \frac{25\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} \end{pmatrix}.$$

Novamente pela fórmula de Euler, segue que

$$\begin{aligned} e^{i \frac{25\pi}{12}} &= \cos \frac{25\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{25\pi}{12} = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen} \left(2\pi + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{12} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

Considerando os valores de u e θ , resulta que a matriz M_{β_1} é dada por

$$M_{\beta_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} & (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

A quinta matriz geradora de Γ_{12} , $M_{\beta_2^c}$, no modelo do disco $\mathbb{D}^2$ é obtida da mesma

maneira. De (4.6), fazendo $g = 2$, tem-se

$$M_{\beta_2^c} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{i \frac{2\pi}{3}} & u e^{-i \frac{25\pi}{12}} \\ u e^{i \frac{25\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{-i \frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Sabendo que

$$e^{i \frac{25\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]$$

e

$$e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

resulta que $M_{\beta_2^c}$ se escreve como

$$M_{\beta_2^c} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3}) & (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Por fim, temos a última matriz geradora de Γ_{12} escrita no modelo $\mathbb{D}^2$. Sendo $g = 2$ em (4.7), temos

$$M_{\beta_2^d} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{-i \frac{2\pi}{3}} & u e^{-i \frac{25\pi}{12}} \\ u e^{i \frac{25\pi}{12}} & \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} e^{i \frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}.$$

Já que

$$e^{i \frac{25\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}[(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]$$

e

$$e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

a matriz $M_{\beta_2^d}$ se escreve da forma

$$M_{\beta_2^d} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} - i(3 + 2\sqrt{3}) & (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} - i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} + i(\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} + i(3 + 2\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

No próximo Teorema mostraremos como os geradores de Γ_{12} são escritos no modelo do semiplano $\mathbb{H}^2$.

Teorema 4.2.1. *Em $\mathbb{H}^2$, as matrizes geradoras de Γ_{12} são:*

$$M_{\alpha_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\alpha_2^a} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 3 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ -3 - 2\sqrt{3} + (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\alpha_2^b} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -3 - 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ 3 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_2^e} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & 3 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ -3 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_2^d} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & -3 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ 3 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

com $\theta = 3 + 2\sqrt{3}$.

Demonstração: Para demonstrar este Teorema, utilizaremos as matrizes geradoras de Γ_{12} no modelo do Disco de Poincaré descritas anteriormente. Considerando a aplicação dada por (4.8) em cada matriz no modelo $\mathbb{D}^2$, segue que as matrizes correspondentes escritas no modelo do semiplano $\mathbb{H}^2$ são dadas por

$$M_{\alpha_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \\ (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\alpha_2^a} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & 3 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ -3 - 2\sqrt{3} + (-\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\alpha_2^b} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} & -3 - 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ 3 + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & 4 + 2\sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_2^e} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & 3 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ -3 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

$$M_{\beta_2^d} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} & -3 - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} \\ 3 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{\theta} & -2 - \sqrt{3} - (1 - \sqrt{3})\sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

com $\theta = 3 + 2\sqrt{3}$. ■

Agora descreveremos o reticulado hiperbólico associado ao grupo Γ_{8g-4} para $g = 2$.

Teorema 4.2.2. *Os elementos do grupo fuchsiano $\Gamma \simeq \Gamma_{8g-4}$ para $g = 2$ são identificados, via isomorfismo, com elementos do grupo dos invertíveis $\mathcal{O}^1$ da ordem $\mathcal{O} = (\theta, -1)_R$, onde*

$$R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\}$$

e $\theta = 3 + 2\sqrt{3} \in E - \{0\}$, com E sendo um corpo. Consequentemente,

$$\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta}\text{Im}\}$$

é uma R -base para o reticulado $\mathcal{O}$, sendo Im a unidade imaginária.

Demonstração: Consideremos as seguintes matrizes M_0, M_1, M_2 e M_3 em $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{\theta}))$,

dadas por

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & M_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\theta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\theta} \end{pmatrix}, \\ M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\theta} \\ \sqrt{\theta} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se $T \in \Gamma$, então pela Proposição 4.1.2 e por (4.9),

$$T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x_l + y_l \sqrt{\theta} & z_l + w_l \sqrt{\theta} \\ -z_l + w_l \sqrt{\theta} & x_l - y_l \sqrt{\theta} \end{pmatrix},$$

onde $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$. Portanto, T é identificado com o elemento $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$,

$$x = \frac{x_l}{4} + \frac{y_l}{4}i + \frac{z_l}{4}j + \frac{w_l}{4}k,$$

através do isomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \varphi(\mathcal{A})$ definido por

$$\varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0 \cdot M_0 + x_1 \cdot M_1 + x_2 \cdot M_2 + x_3 \cdot M_3,$$

ou seja,

$$\varphi(x) = T,$$

com $i^2 = \theta$, $j^2 = -1$, $k = ij$ e $x_l, y_l, z_l, w_l \in \mathbb{Z}[\theta]$. Portanto, cada elemento do grupo fuchsiano $\Gamma \simeq \Gamma_{8g-4}$ para $g = 2$ é identificado, através do isomorfismo φ , com um elemento $x \in \mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O} = (\theta, -1)_R$ e $\{1, \sqrt{\theta}, \text{Im}, \sqrt{\theta}\text{Im}\}$ é uma R -base de $\mathcal{O}$. ■

Observe que $\varphi(\mathcal{A}) \subset M(2, E(\sqrt{\theta}))$, com $\mathcal{A} = (\theta, -1)_E$ e $E = \mathbb{Q}(\theta)$.

O Teorema que apresentaremos a seguir é o ponto-chave deste trabalho. É com ele que concluímos os objetivos apresentados no início do texto.

Teorema 4.2.3. *A ordem associada ao grupo fuchsiano $\Gamma \simeq \Gamma_{12}$ é*

$$\mathcal{O} = (3 + 2\sqrt{3}, -1)_R,$$

onde $R = \{\frac{\alpha}{2^m} \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N}\}$, $\theta = 3 + 2\sqrt{3}$ e

$$\{1, \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}, \text{Im}, \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \text{Im}\}$$

é uma R -base de $\mathcal{O}$.

Demonstração:

Pelo Teorema 4.2.1, podemos escrever as matrizes da forma que segue. Assim, temos a identificação, que é dada por (3.4):

$$M_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + y_1 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{4} & \frac{-w_1 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{-w_1 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{4} & \frac{x_1 - y_1 \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{x_1}{4} + \frac{y_1}{4}i - \frac{w_1}{4}k \right),$$

$$M_{\alpha_2^a} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{-x_1}{2} + y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{z_1 - w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{-z_1 - w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{\frac{-x_1}{2} - x_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{-x_1}{8} + \frac{y_1}{4}i + \frac{z_1}{4}j - \frac{w_1}{4}k \right),$$

$$M_{\alpha_2^b} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{-x_1}{2} - y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{-z_1 - w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{z_1 - w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{\frac{-x_1}{2} + y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{-x_1}{8} - \frac{y_1}{4}i - \frac{z_1}{4}j - \frac{w_1}{4}k \right),$$

$$M_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 - y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{x_1 + y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{x_1}{4} - \frac{y_1}{4}i + \frac{w_1}{4}k \right),$$

$$M_{\beta_2^c} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{-x_1}{2} - y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{z_1 + w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{-z_1 + w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{\frac{-x_1}{2} + y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{-x_1}{8} - \frac{y_1}{4}i + \frac{z_1}{4}j + \frac{w_1}{4}k \right),$$

$$M_{\beta_2^d} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{-x_1}{2} - y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{-z_1 + w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \\ \frac{z_1 + w_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} & \frac{\frac{-x_1}{2} + y_1 \sqrt{3+2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix} = \varphi \left(\frac{-x_1}{8} - \frac{y_1}{4}i - \frac{z_1}{4}j + \frac{w_1}{4}k \right),$$

com

$$x_1 = 4 + 2\sqrt{3}, \quad y_1 = \sqrt{3} - 1,$$

$$z_1 = 3 + 2\sqrt{3}, \quad w_1 = \sqrt{3} + 1,$$

e $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow M(2, \mathbb{Z}(\sqrt{3+2\sqrt{3}}))$.

Do Teorema 4.2.2, segue que

$$\mathcal{O} = (3 + 2\sqrt{3}, -1)_R, \text{ com } R = \left\{ \frac{\alpha}{2^m} \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\theta] \text{ e } m \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\theta = 3 + 2\sqrt{3} \text{ e}$$

$$\{1, \sqrt{3+2\sqrt{3}}, \text{Im}, \sqrt{3+2\sqrt{3}} \text{Im}\}$$

é uma R -base de $\mathcal{O}$.

■

Observação: Note que o elemento $\frac{x_1}{2} = 2 + \sqrt{3}$ pertence ao anel $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}[\theta]$ como foi mostrado no Teorema 4.2.2.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E. **Ladrilhamentos**. Dissertação de Mestrado, IMEEC-UNICAMP, 1998.
- [2] AGUSTINI, E. **Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos**. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2002.
- [3] BEARDON, A. **The Geometry of Discret Groups**. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] BENEDITO, C. W. O. **Construção de Grupos Fuchsianos Aritméticos Provenientes de Álgebras dos Quatérnios e Ordens Maximais dos Quatérnios Associados a Reticulados Hiperbólicos**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2014.
- [5] BRANDANI, E. **Constelações de Sinais e Análise de Desempenho no Plano Hiperbólico**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [6] CARVALHO, E. D. **Construção e Rotulamento de Constelações de Sinais Geometricamente Uniformes em espaços Euclidianos e Hiperbólicos**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2001.
- [7] DRUMOND, F. A. **Sístoles em Superfícies Geradas pela Tesselação $\{8g - 4, 4\}$** . Dissertação de Mestrado, UFV 2015.
- [8] ENDLER, O. **Teoria dos Números Algébricos**. Projeto Euclides, IMPA, 2ª edição, 2006.
- [9] FIRER, M. **Grupos Fuchsianos**. Notas de Aula, IMECC-UNICAMP, 2001.
- [10] GALLIAN, J. A. **Contemporary Abstract Algebra**. Cengage Learning, 8ª edição, 2012.
- [11] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Projeto Euclides, 5ª edição, 1999.
- [12] HERSTEIN, I. N. **Topics in Algebra**. University of Chicago, 1964.
- [13] JOHANSSON, S. **A Description of Quaternion Algebra**. www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html.
- [14] JOHANSSON, S. **Genera of Arithmetic Fuchsian Groups**. www.math.chalmers.se/~sj/forskning.html.

- [15] KATOK, S. **Fuchsian Groups**. The University of Chicago Press, 1992.
- [16] LAZARI, H. **Uma Contribuição à Teoria de Códigos Geometricamente Uniformes Hiperbólicos**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2000.
- [17] LESKOW, L. H. A., **Tesselações Hiperbólicas Aplicadas a Codificação de Geodésicas e Códigos de Fonte**. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, 2011.
- [18] STEWART, I.N. e Tall, D.O. **Algebraic Number Theory**. Chapman and Hall, 1996.
- [19] VIEIRA, V. L. **Códigos sobre Inteiros Algébricos de Corpos Quadráticos**. Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.
- [20] VIEIRA, V. L. **Grupos Fuchsianos Aritméticos Identificados em Ordens dos Quatérnios para Construção de Constelações de Sinais**. Tese de doutorado, FEEC-UNICAMP, 2007.