ESRON KLINGER DUTRA

SUBVARIEDADES ANALÍTICAS E A ÁLGEBRA DE LIE DE CAMPOS DE VETORES HOLOMORFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título *Magister Scientiae.*

Orientador: Diogo Silva Machado

VIÇOSA - MINAS GERAIS
2023

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Campus Viçosa

T

D978s
2023

Dutra, Esron Klinger, 1997-
Subvariedades analíticas e a Álgebra de Lie de campos de vetores holomorfos / Esron Klinger Dutra. – Viçosa, MG, 2023.
1 dissertação eletrônica (57 f.)

Orientador: Diogo da Silva Machado.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2023.
Referências bibliográficas: f. 56-57.
DOI: https://doi.org/10.47328/ufvbbt.2023.284
Modo de acesso: World Wide Web.

1. Lie, Álgebra de. 2. Anéis não-associativos. I. Machado, Diogo da Silva, 1983-. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 22. ed. 512.482

Bibliotecário(a) responsável: Bruna Silva CRB-6/2552

ESRON KLINGER DUTRA

SUBVARIEDADES ANALÍTICAS E A ÁLGEBRA DE LIE DE CAMPOS DE VETORES HOLOMORFOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título *Magister Scientiae.*

APROVADA: 27 de fevereiro de 2023.

Assentimento:

Documento assinado digitalmente
ESRON KLINGER DUTRA
Data: 24/05/2023 12:45:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Esron Klinger Dutra
Autor

Documento assinado digitalmente
DIOGO DA SILVA MACHADO
Data: 24/05/2023 13:13:10-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Diogo Silva Machado
Orientador

Agradecimentos

Ao meu pai, Esron, pela herança de vida e formação e aos meus familiares pelo suporte e ensinamento ao longo dos anos.

Ao meu orientador, Diogo, pela disposição, aprendizado e incentivo.

À minha namorada, Nathália, pela paciência, compreensão e apoio, também agradeço a sua família, aos meus sogros, Cleiton e Patrícia, pelo carinho e amparo.

Aos meus amigos, Anna e Luis, que serviram de inspiração para trilhar este caminho.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, pelo apoio e eficientes serviços prestados.

À FAPEMIG pela concessão da bolsa de estudos indispensável para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

DUTRA, Esron Klinger, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2023. **Subvariedades analíticas e a álgebra de Lie de campos de vetores holomorfos**. Orientador: Diogo Silva Machado.

É sabido que a cada germe de subvariedade analítica está associado uma álgebra de Lie, chamada Álgebra Tangente, a qual é formada por todos os germes de campos de vetores holomorfos que são tangentes à subvariedade analítica dada. De forma recíproca, à toda subálgebra na álgebra de germes de campos de vetores existe uma subvariedade analítica associada, a qual é chamada subvariedade integral, definida como subvariedade de um apropriado ideal de funções holomorfas. Este trabalho tem como mote investigar as propriedades dessa correspondência (correspondência de Gröbner), em especial, estudar as formas de caracterização das álgebras que sejam álgebras tangentes de alguma subvariedade analítica dada.

Palavras-chave: Álgebra tangente. Álgebra balanceada. Variedades integrais. Correspondência de Gröbner.

Abstract

DUTRA, Esron Klinger, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2023. **Analytic subvariety and the Lie algebra of holomorphic vector fields**. Adviser: Diogo Silva Machado.

It is known that each germ of analytic subvariety is associated with a Lie algebra, called Tangent Algebra, which is formed by all germs of holomorphic vectors fields that are tangent to the given analytic subvariety. Conversely, to every subalgebra in the germ algebra of vector fields there is an associated analytic subvariety, which is called the integral subvariety, defined as the subvariety of the appropriate ideal of holomorphic functions. This work aims to investigate the properties of this correspondence (Gröbner correspondence), in particular, to study the ways of characterizing algebras that are tangent algebras of some given analytical subvariety.

Keywords: Tangent algebra. Balanced algebra. Integral varieties. Gröbner correspondence.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Seja $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de subvariedade analítica, que eventualmente chamaremos de germe analítico. Vamos denotar por $\mathcal{O}_n$ o conjunto de germes de funções holomorfas $(\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$ e $I_X \subset \mathcal{O}_n$ o ideal de funções que se anulam sobre X. Podemos associar à subvariedade analítica X a sua Álgebra Tangente, denotada por $\mathbb{D}_X$, a qual é formada por todos os germes de campos de vetores holomorfos que são tangentes à X. Notamos que $\mathbb{D}_X$ tem estrutura de álgebra de Lie: o conjunto $\mathbb{D}$ dos germes de campos de vetores holomorfos pode ser identificado com a álgebra de Lie das derivações de $\mathcal{O}_n$ e, assim, definimos $\mathbb{D}_X := \{D \in \mathbb{D} \ / \ D(I_X) \subset I_X\}$ como uma subálgebra (de Lie) de $\mathbb{D}$. No caso em que X constitui uma subvariedade analítica de codimensão 1 (hipersuperfície), K. Saito [16] considerou para cada ponto de $\mathbb{C}^n$ o conjunto de germes de campos de vetores tangentes à X neste ponto. Tomando cada um deste conjuntos como estrutura de stalk, ele obteve feixes de $\mathcal{O}_n$-módulos coerentes, independente da natureza da hipersuperfície X. No caso em que X é do tipo cruzamento normal, tal feixe é localmente livre. Posteriormente, A. G. Aleksandrov [2] obteve uma caracterização completa das hipersuperfícies cujo o feixe são do tipo localmente livre. O caso em que X tem codimensão qualquer foi considerado por Delphine Pol [5].

Agora, seja A uma subálgebra de $\mathbb{D}$. A *subvariedade integral* de A, denotada por X_A, é definida como sendo a menor subvariedade do espaço ambiente tal que todos os campos de vetores que se anulam sobre X_A pertencem à A. Mais precisamente: para uma subálgebra $A \subset \mathbb{D}$ consideramos o ideal $I_A \subset \mathcal{O}_n$ dado por $I_A = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g \cdot \mathbb{D} \subset A\}$. O conjunto de zeros $X_A \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ de I_A é a *variedade integral* de A.

Uma questão que surge naturalmente é: *como caracterizar todas as subalgebras de Lie $A \subset \mathbb{D}$ que são da forma $A = \mathbb{D}_X$, para alguma subvariedade $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$?*

Evidentemente, que terão maior valor aquelas caracterizações que possam ser eventualmente expressadas em termos puramente teóricos da álgebra de Lie. Com efeito, H. Hauser e G. Müller [8], [9] provaram o seguinte resultado, lançando luz a esta questão:

Correspondência de Gröbner: Considere os seguintes conjuntos

$$\Omega = \{X \ / \ X \text{ é subvariedade analítica de } (\mathbb{C}^n, 0)\}$$

e

$$\Gamma = \{A \subset \mathbb{D} \ / \ A \text{ é subálgebra geométrica de } \mathbb{D}\}.$$

Existe uma bijeção $\varphi : \Omega \longrightarrow \Gamma$, a qual é definida pela relação

$$\varphi : X \longmapsto \mathbb{D}_X$$

$$\varphi^{-1} : A \longmapsto X_A$$

O presente trabalho visa realizar um estudo no contexto das subvariedades analíticas e da álgebra de campos de vetores holomorfos. Especificamente, estudar as relações existentes entre a geometria de uma subvariedade analítica e as propriedades algébricas de sua álgebra tangente e, principalmente, tratar da questão da caracterização das subálgebras de Lie que constituem álgebras tangentes de apropriadas subvariedades.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos várias definições e vamos mostrar algumas afirmações que são usadas nas demonstrações de alguns teoremas e proposições ao longo do texto. As referências para este capítulo são [4], [7], [14], [17], [18], [19].

2.1 Conceitos Algébricos

Definição 2.1 (Divisor de zero)**.** *Seja R um anel comutativo com unidade, tem-se que um divisor de zero em R é um elemento $a \in R$ tal que existe $b \in R$, $b \neq 0$, com $ab = 0$. Assim, um anel $R \neq 0$ é um anel de integridade se não possui divisores de zero, isto é, se $ab = 0$, com $a, b \in R$, então $a = 0$ ou $b = 0$.*

Definição 2.2 (Módulo)**.** *Seja R um anel. Um R-módulo é um grupo abeliano M sobre o qual R atua linearmente. Mais precisamente, é um par (M, μ), onde M é um grupo abeliano e μ é uma aplicação de $R \times M$ em M tal que, se escrevermos $\mu(a, x) = ax$, com $a \in R$, $x \in M$, os seguintes axiomas são satisfeitos, para $a, b \in R$, $x, y \in M$:*

(i) $a(x + y) = ax + ay$,

(ii) $(a + b)x = ax + bx$,

(iii) $(ab)x = a(bx)$,

(iv) $1x = x$.

Definição 2.3 (Álgebra)**.** *Uma álgebra sobre um corpo K é um espaço vetorial V munido com a aplicação bilinear*

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

Definição 2.4 (Álgebra de Lie)**.** *Seja K um corpo. Uma álgebra de Lie sobre K é um K-espaço vetorial L, munido com a aplicação bilinear, chamado colchete de Lie*

$$[.,.] : L \times L \to L$$

Satisfazendo

- $[x, x] = 0, \forall x \in L$

- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, $\forall x, y, z \in L$

2.2 Anel de Germes de Funções Holomorfas

Agora veremos algumas propriedades das funções holomorfas. Para isto, introduzimos o conceito de *germe* sobre conjuntos e funções holomorfas.

Definição 2.5 (Germe de conjuntos)**.** *Introduzimos uma relação $\sim$ sobre subconjuntos de $\mathbb{C}^n$. Sejam $X, Y \subset \mathbb{C}^n$. Definimos que $X \sim Y$ se existe uma vizinhança U de 0 tal que $X \cap U = Y \cap U$. Facilmente notamos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Então chamamos a classe de equivalência de X o germe de X em 0.*

Temos que as operações de conjuntos são induzidas para os germes de conjutos, isto é, para dois germes A e B, as seguintes operações são bem definidas: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$. Mais ainda, a inclusão $A \subset B$.

Definição 2.6 (Germe de funções holomorfas)**.** *Seja H o conjunto de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Definimos uma relação $\sim$ em H tal que para dois elementos $f, g \in H$, $f \sim g$ se existe uma vizinhança U de 0 tal que f e g restritas a U são idênticas. Note que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Desse modo, a classe de equivalência de uma função f é chamada de germe de f em 0.*

Desta maneira, para $z \in \mathbb{C}^n$, definimos $\mathcal{O}_{n,z}$ como o conjunto quociente de H pela relação de equivalência em uma vizinhança de z. O conjunto $\mathcal{O}_{n,z}$ possui a estrutura de anel comutativo com relação as operações de adição e multiplicação de funções, sua unidade representa a classe de equivalência da função constante igual a 1, além de conter o corpo $\mathbb{C}$ como o germe das funções constantes. Denotaremos $\mathcal{O}_{n,0} = \mathcal{O}_n$ para o germe de funções holomorfas em uma vizinhança de 0.

Da definição 2.1 temos a seguinte proposição (ver [20, pág. 8]),

Proposição 2.1. *O conjunto $\mathcal{O}_n$ é um anel de integridade.*

Agora, seja $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ o anel de polinômios em z_n com coeficientes em $\mathcal{O}_{n-1}$ dado por:

$$\mathcal{O}_{n-1}[z_n] = \{f(z) = a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_k z_n^k \ / \ a_i \in \mathcal{O}_{n-1}\}.$$

Temos que $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ é um subanel de $\mathcal{O}_n$, além disso contém $\mathcal{O}_{n-1}$ como subanel.

Definição 2.7. *Um polinômio de Weierstrass em z_n, de grau k, é um elemento h de $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ da forma*

$$h = a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_{k-1} z_n^{k-1} + z_n^k$$

onde k é um inteiro positivo e $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ não são unidades de $\mathcal{O}_{n-1}$.

Observe que, $h(0, 0, \cdots, 0, z_n) = z_n^k$. Portanto a ordem de h é k e qualquer germe $f \in \mathcal{O}_n$ é escrito da forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z_n + \cdots + a_k z_n^k + \cdots$$

com $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$. O teorema abaixo afirma que tal f é igual a um polinômio de Weierstrass de grau k.

Teorema 2.1 (Teorema da divisão de Weierstrass, ver [20, pág. 10])**.** *Se h é um polinômio de Weierstrass em z_n, de grau k, então para algum germe $f \in \mathcal{O}_n$, existem elementos, unicamente determinados, $q \in \mathcal{O}_n$ e $r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ com $gr(r) < k$ tal que*

$$f = qh + r.$$

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [20, capítulo I].

Teorema 2.2. *O anel $\mathcal{O}_n$ é de fatoração única.*

Proposição 2.2. *Se f e g são relativamente primos em $\mathcal{O}_n$, então f e g são relativamente primos em $\mathcal{O}_{n,z}$, para z suficientemente próximo de 0.*

Teorema 2.3. *O anel $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano.*

2.3 Germes de Subvariedades

Nesta seção vamos definir o que são germes de subvariedades e estudar as relações entre esses germes e os ideais em $\mathcal{O}_n$.

Sejam $f_1, \cdots, f_k$ germes de funções holomorfas em $\mathcal{O}_n$ e U uma vizinhança próxima de 0 tal que estes germes são representados por funções holomorfas, as quais também denotaremos por $f_1, \cdots, f_k$.

Definição 2.8 (Subvariedade Analítica)**.** *Seja M uma variedade complexa em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e X um subconjunto de M. Dizemos que X é uma subvariedade analítica em $(\mathbb{C}^n, 0)$ se, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um número finito de funções holomorfas $f_1, \cdots, f_k$ em U tal que*

$$X \cap U = \{q \in U \ / \ f_1(q) = \cdots = f_k(q) = 0\}.$$

Daí, temos que X é a subvariedade analítica definida por $f_1, \cdots, f_k$. Sendo assim, considere I um ideal do anel $\mathcal{O}_n$. Como $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano (Teorema 2.3), existe um número finito de funções holomorfas $f_1, \cdots, f_k$, tal que $I = < f_1, \cdots, f_k >$ é o ideal gerado por tais funções, desse modo podemos definir o ideal I de uma subvariedade X.

Definição 2.9 (Ideal de X)**.** *Dado uma subvariedade analítica X, o ideal de X, denotado por I_X é*

$$I(X) = I_X = \{f \in \mathcal{O}_n \ / \ f(p) = 0, \forall \ p \in X, \text{ em uma vizinhança de } 0\}.$$

Definição 2.10. *Para um ideal I de $\mathcal{O}_n$, definimos o seu ideal radical como o conjunto*

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{O}_n \ / \ f^r \in I, \text{ para algum inteiro } r\}$$

Temos que o ideal radical $\sqrt{I}$ é um ideal de $\mathcal{O}_n$ contendo I.

Agora, podemos definir um germe de subvariedade atráves de um ideal de $\mathcal{O}_n$.

Definição 2.11. *O germe de uma subvariedade analítica definida por I é dado por*

$$X(I) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ f_1(p) = \cdots = f_k(p) = 0\}.$$

Feito tais considerações, podemos enunciar o Teorema de Hilbert Nullstelensatz e uma proposição ([20, pág. 22]) que relata as propriedades entre um germe de subvariedade e um ideal.

Proposição 2.3. *Sejam X, X_1 e X_2 germes de subvariedades analíticas em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e I, I_1 e I_2 ideais em $\mathcal{O}_n$.*

(1) $I_1 \subset I_2 \Rightarrow X(I_1) \supset X(I_2)$.

(2) $X_1 \subset X_2 \Rightarrow I(X_1) \supset I(X_2)$.

(3) $X(I_1) \cap X(I_2) = X(I_1 + I_2)$.

(4) $X(I_1) \cup X(I_2) = X(I_1 I_2) = X(I_1 \cap I_2)$.

(5) $I(X_1 \subset X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.

(6) $\sqrt{I_X} = I_X$.

(7) $X(\sqrt{I}) = X(I)$.

(8) $X(I_X) = X$.

(9) $I(X(I)) \supset \sqrt{I}$.

Teorema 2.4 (Teorema de Hilbert Nullstelensatz, [20, pág. 22])**.** *Para algum ideal $I \in \mathcal{O}_n$,*

$$I(X(I)) = \sqrt{I}.$$

Capítulo 3

A Álgebra Tangente de um Germe Analítico

Neste capítulo apresentaremos uma descrição sobre as álgebras tangentes. Através do Teorema de Seidenberg expressaremos as álgebras tangentes em termos de componentes irredutíveis de X. Possuindo álgebra tangente definida podemos reconstruir X a partir de $\mathbb{D}_X$ por ideais Fitting e mostraremos como calcular $\mathbb{D}_X$ a partir de X em alguns casos particulares. Os resultados desde capítulo se baseiam nas seguintes referências [1], [9], [10].

Seja $D : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$ um germe de campo de vetores analítico em $(\mathbb{C}^n, 0)$, o qual pode ser naturalmente identificado com uma derivação $\mathbb{C}$-linear $D : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ de $\mathcal{O}_n$.

Neste caso, tomando coordenadas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$, podemos escrever

$$D = (a_1, \cdots, a_n) = \sum a_i \partial_{x_i}.$$

Para cada $g \in \mathcal{O}_n$,

$$Dg = \sum a_i \partial_{x_i} g,$$

com $i = 1, \cdots, n$. Para cada $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$,

$$D(p) = (a_1(p), \cdots, a_n(p)) \in \mathbb{C}^n$$

Por $\mathbb{D}$ denotaremos os germes de campos de vetores analíticos em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Observamos que $\mathbb{D}$ constitui uma álgebra de Lie com a operação colchete dada por

$$[.,.] : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

$$[D, E] = D \circ E - E \circ D$$

Assim, podemos considerar $\mathbb{D}$ como um $\mathcal{O}_n$-módulo gerado pelas derivadas parciais $\partial_{x_1}, \cdots \partial_{x_n}$ e temos uma identidade básica que relaciona a $\mathcal{O}_n$-multiplicação com o colchete.

Proposição 3.1. *Sejam $D, E \in \mathbb{D}$ e $g \in \mathcal{O}_n$. Então vale a seguinte igualdade*

$$[D, gE] = Dg \cdot E + g \cdot [D, E].$$

Demonstração. Calculando o colchete, por definição e usando a regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned}[][D, gE] &= D \circ (gE) - (gE) \circ D \\ &= Dg \cdot E + g \cdot D \circ E - g \cdot E \circ D \\ &= Dg \cdot E + g \cdot [D, E]\end{aligned}$$

□

Definição 3.1 (Álgebra Tangente)**.** *Dado uma subvariedade analítica X a álgebra tangente de X, denotada por $\mathbb{D}_X$, é definida por*

$$\mathbb{D}_X = \{D \in \mathbb{D} \ / \ D(I_X) \subset I_X\}$$

Note que a álgebra tangente $\mathbb{D}_X$ é uma álgebra de Lie. De fato, sejam $D, E, F \in \mathbb{D}_X$ quaisquer. Então,

$$[D, D] = D \circ D - D \circ D = 0.$$

Além disso, usando o fato da bilinearidade do colchete, temos

$$[D,[E,F]] + [E,[F,D]] + [F,[D,E]]$$
$$=$$
$$[D, E \circ F - F \circ E] + [E, F \circ D - D \circ F] + [F, D \circ E - E \circ D] =$$
$$[D, E \circ F] - [D, F \circ E] + [E, F \circ D] - [E, D \circ F] + [F, D \circ E] - [F, E \circ D] =$$
$$(D \circ E \circ F) - (E \circ F \circ D) - (D \circ F \circ E) + (F \circ E \circ D) + (E \circ F \circ D) - (F \circ D \circ E) -$$
$$(E \circ D \circ F) + (D \circ F \circ E) + (F \circ D \circ E) - (D \circ E \circ F) - (F \circ E \circ D) + (E \circ D \circ F) =$$
$$(D \circ E \circ F) - (D \circ E \circ F) + (E \circ F \circ D) - (E \circ F \circ D) + (D \circ F \circ E) - (D \circ F \circ E) +$$
$$(F \circ E \circ D) - (F \circ E \circ D) + (F \circ D \circ E) - (F \circ D \circ E) + (E \circ D \circ F) - (E \circ D \circ F) = 0.$$

Assim, temos que a álgebra tangente $\mathbb{D}_X$ é uma álgebra de Lie.

A proposição a seguir descreve as álgebras tangentes $\mathbb{D}_X$ geometricamente.

Proposição 3.2. *Seja o germe de subvariedade analítico $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$.*

(a) $D \in \mathbb{D}$ é tangente à $X \Leftrightarrow D(p) \in T_pX$ para todos os pontos p de um subconjunto denso de X, ou seja, para todos os pontos regulares de X.

(b) $\mathbb{D}_X$ é o submódulo de Lie de $\mathbb{D}$, isto é, uma subálgebra de Lie como um $\mathcal{O}_n$-módulo. O conjunto $I_X \cdot \mathbb{D}$ de campos de vetores que se anulam em X é um ideal em $\mathbb{D}_X$.

Demonstração. Sejam $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}$, $p \in X$ e $I_X =< f_j >$. Então T_pX pode ser identificado com $(T_pf)^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$, isto é, o espaço tangente é igual ao núcleo da derivação de $f = (f_1, \cdots, f_k)$ em p. De fato,

$$
\begin{aligned}
Df(p) = (\sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i} f_j)(p) &= (a_1 \partial_{x_1} f_j)(p) + \cdots + (a_n \partial_{x_n} f_j)(p) \\
&= a_1(p) \partial_{x_1} f_j(p) + \cdots + a_n(p) \partial_{x_n} f_j(p) \\
&= \begin{bmatrix} \partial_{x_i} f_j(p) & \cdots & \partial_{x_n} f_j(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(p) \\ \vdots \\ a_n(p) \end{bmatrix} \\
&= Df_j(p) \cdot D(p) = 0 \\
&\Leftrightarrow D(p) \in Ker(Df(p)) = T_p X
\end{aligned}
$$

para p ponto regular.

Por continuidade, dado um subconjunto denso U de X, com $p \in X$, existe uma sequência (p_i), $p_i \in U$, convergindo para p tal que

$$D(p_i) \in T_p X \Leftrightarrow Df_j \in I_X, \forall j$$

o que equivale a dizer que

$$D(I_X) \subset I_X.$$

Assim, provamos (a). A primeira parte de (b) é imediata pela definição de $\mathbb{D}_X$. Finalmente para $D \in \mathbb{D}_X$, $E \in \mathbb{D}$ e $g \in I_X$:

$$[D, g \cdot E] = Dg \cdot E + g \cdot [D, E] \in I_X \cdot \mathbb{D}$$

provando que $I_X \cdot \mathbb{D}$ é um ideal. □

A seguir, o Teorema de Seidenberg afirma que qualquer campo de vetores tangente à um germe analítico é também tangente à sua redução.

Teorema 3.1 (Teorema de Seidenberg, [1, Teo. 1])**.**

(a) Seja $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ analítico. Um campo de vetores é tangente à X se, e somente se, é tangente à todas componentes irredutíveis $X_1, \cdots, X_m$ de X.

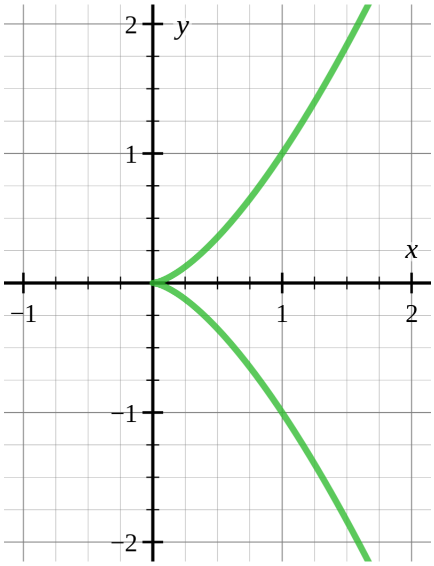
$$\mathbb{D}_X = \bigcap \mathbb{D}_{X_i}.$$

(b) Seja $I \subset \mathcal{O}_n$ um ideal arbitrário com radical $\sqrt{I} = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g^k \in I$ para algum $k \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$D(I) \subset I \Leftarrow D(\sqrt{I}) \subset \sqrt{I}.$$

Devido ao Teorema de Seidenberg devemos considerar somente germes analíticos reduzidos.

Exemplo 1. *Seja $X \subset \mathbb{C}^2$ a união do eixo $Y = \{(x, y) \ / \ x = 0\}$ e a cúspide $Z = \{(x, y) \ / \ x^3 = y^2\}$. Temos que $\mathbb{D}_Y$ é gerado como $\mathbb{C}[x, y]$- módulo por $x\partial_x$ e ∂_y e $\mathbb{D}_Z$ é gerado pelo campo de vetores de Euler $2x\partial_x + 3y\partial_y$ e o Hamiltoniano $2y\partial_x + 3x^2\partial_y$. Desta forma $\mathbb{D}_X = \mathbb{D}_Y \cap \mathbb{D}_Z$.*



Cúspide

De fato, por definição temos,

$$\mathbb{D}_Y = \{D \in \mathbb{D} \ / \ D(I_Y) \subset I_Y\}.$$

Seja $I_Y =< f >$, onde $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $f(x,y) = x$, com $f \in \mathcal{O}_n$.

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ x = 0\} = Y.$$

Queremos mostrar a igualdade $\mathbb{D}_Y =< x\partial_x, \partial_y >$. Observe que

$$< x\partial_x, \partial_y >= \{h_1, h_2 \in \mathcal{O}_n \ / \ h_1 x\partial_x + h_2\partial_y \in \mathbb{D}\}.$$

(i) $< x\partial_x, \partial_y >\subset \mathbb{D}_Y$:

Tomando $D \in< x\partial_x, \partial_y >$ arbitrário, temos que

$$D = h_1 x\partial_x + h_2\partial_y.$$

Daí,

$$D(f) = h_1 x\partial_x f + h_2\partial_y f = h_1 x \in I_Y.$$

Logo,

$$D \in \mathbb{D}_Y.$$

(ii) $\mathbb{D}_Y \subset< x\partial_x, \partial_y >$:

Tomando $D \in \mathbb{D}_Y$ árbitrário,

$$D = a\partial_x + b\partial_y,$$

com $a, b \in \mathcal{O}_n$, tal que

$$D(hf) \subset I_Y$$

para todo $h \in \mathcal{O}_n$. Basta mostrar que

$$D(hf) = h_1 x$$

para algum $h_1, \in \mathcal{O}_n$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} D(hf) & = & a\partial_x(hf) + b\partial_y(hf) \\ & = & a(\partial_x(h)f + h\partial_x(f)) + b(\partial_y(h)f + h\partial_y(f)) \\ & = & a(\partial_x(h)x + h) + b(\partial_y(h)x) \\ & = & a\partial_x(h)x + ah + b\partial_y(h)x \\ & = & h_1 x \end{array}$$

isso implica que

$$ah = h_1 x - a\partial_x(h)x - b\partial_y(h)x.$$

Em particular considere a função constante $h = 1$. Então,

$$a = h_1 x \text{ e } b = h_2.$$

Logo,

$$D = h_1 x\ \partial_x + h_2\partial_y \in < x\partial_x, \partial_y >.$$

Por fim,

$$\mathbb{D}_Y = < x\partial_x, \partial_y >,$$

como queríamos.

Agora, vamos mostrar que

$$\mathbb{D}_Z = < 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >.$$

Seja $I_Z = < g >$, onde $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $g(x, y) = x^3 - y^2$, com $g \in \mathcal{O}_n$.

$$g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ g(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ / \ x^3 - y^2 = 0\} = Z.$$

Queremos mostrar a igualdade $\mathbb{D}_Z = < 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >$. Note que,

$$< 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >= \{h_1, h_2 \in \mathcal{O}_n \ / \ h_1(2x\partial_x + 3y\partial_y) + h_2(2y\partial_x + 3x^2\partial_y) \in \mathbb{D}\}.$$

(i) $< 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y > \subset \mathbb{D}_Z$:

Tomando $D \in < 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >$ arbitrário, temos que

$$D = h_1(2x\partial_x + 3y\partial_y) + h_2(2y\partial_x + 3x^2\partial_y)$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} D(g) & = & h_1(2x\partial_x(g) + 3y\partial_y(g)) + h_2(2y\partial_x(g) + 3x^2\partial_y(g)) \\ & = & h_1(2x3x^2 - 3y2y) + h_2(2y3x^2 - 3x^2 2y) \\ & = & h_1(6x^3 - 6y^2) \\ & = & 6h_1(x^3 - y^2) \in I_Z \end{array}$$

Portanto,

$$D \in \mathbb{D}_Z.$$

(ii)$\mathbb{D}_Z \subset < 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >$:

Tomando $D \in \mathbb{D}_Z$ arbitrário,

$$D = a\partial_x + b\partial_y,$$

com $a, b \in \mathcal{O}_n$, tal que

$$D(hg) \subset I_Z$$

para todo $h \in \mathcal{O}_n$. Vamos mostrar que

$$D(hg) = h_1 g.$$

Para algum $h_1 \in \mathcal{O}_n$. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
D(hg) &= a\partial_x(hg) + b\partial_y(hg) \\
&= a(\partial_x(h)g + h\partial_x(g)) + b(\partial_y(h)g + h\partial_y(g)) \\
&= a(\partial_x(h)(x^3 - y^2) + h3x^2) + b(\partial_y(h)(x^3 - y^2) - h2y) \\
&= a\partial_x(h)(x^3 - y^2) + ah3x^2 + b\partial_y(h)(x^3 - y^2) - bh2y
\end{aligned}$$

Daí, para que $D(hg) = h_1 g$, temos

$$\begin{aligned}
a\partial_x(h)g + ah3x^2 + b\partial_y(h)g - bh2y &= h_1 g \\
ah3x^2 - bh2y &= h_1 g - a\partial_x(h)g - b\partial_y(h)g \\
(a3x^2 - b2y)h &= (h_1 - a\partial_x(h) + b\partial_y(h))g
\end{aligned}$$

Em particular, considere a função constante $h = \dfrac{1}{6}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(a3x^2 - b2y)\frac{1}{6} &= h_1 g \\
a3x^2 - b2y &= 6h_1 g \\
a3x^2 - b2y &= 6h_1 x^3 - 6h_1 y^2
\end{aligned}$$

Então,

$$a = 2h_1 x \text{ e } b = 3h_1 y.$$

Logo,

$$D = 2h_1 x\partial_x + 3h_1 y\partial_y \in < 2x\partial_x + 3y\partial_y, 2y\partial_x + 3x^2\partial_y >$$

como queríamos.

Agora iremos descrever o conjunto $\mathbb{D}_X$. Como,

$$X = Y \cup Z,$$

considere a função

$$h(x, y) = f(x, y)g(x, y) = x(x^3 - y^2) = x^4 - xy^2$$

com $h \in \mathcal{O}_n$ e além disso,

$$\begin{aligned} h^{-1}(0) &= \{h(x,y)\ /\ h(x,y)=0\} \\ &= \{(x,y)\ /\ f(x,y)g(x,y)=0\} \\ &= \{(x,y)\ /\ f(x,y)=0 \text{ ou } g(x,y)=0\} \\ &= X. \end{aligned}$$

Seja $I_X =< h >$, se $D = a\partial_x + b\partial_y \in \mathbb{D}_X$, $D(h) = ch$, com $a, b, c \in \mathcal{O}_n$, então

$$D(h) = a\partial_x(h) + b\partial_y(h) = cx(x^3 - y^2)$$

Por outro lado, como h é multiplo de f, temos $h \in I_Y$ e como h é multiplo de g, temos $h \in I_Z$. Portanto,

$$D(h) \subset I_Y \text{ e } D(h) \subset I_Z.$$

Logo,

$$D \in \mathbb{D}_Y \cap \mathbb{D}_Z.$$

Exemplo 2. *Seja $X =< f >$, uma hipersuperfície gerada por $f \in \mathcal{O}_n$ com decomposição em fatores primos $f = f_1^{k_1} \cdots f_m^{k_m}$. Então a redução de X é definida por $g = f_1 \cdots f_m$. Se $D(g) \in< g >$ então $D(f_i) \in< f_i >$, para todo i. Com efeito, se $D(g) \in< g >$ temos, pelo Teorema de Seidenberg, que D é tangente à toda componente irredutível de X, isto é, $D(f_i) \in< f_i >$.*

O próximo resultado é conhecido como Teorema de Rossi e será usado na Proposição 5.1.

Teorema 3.2 (Teorema de Rossi, [11, Cor. 3.4])**.** *Sejam $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe analítico e x_i as coordenadas em $(\mathbb{C}^n, 0)$.*

(a) Se $\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_k} \in \mathbb{D}_X$ então $X = (\mathbb{C}^k, 0) \times (X \cap (\mathbb{C}^{k-1}, 0))$.

(b) Se existem $D_1, \cdots, D_k \in \mathbb{D}_X$ tal que $D_1(0), \cdots, D_k(0)$ são $\mathbb{C}$-linearmente independentes, então existe um germe analítico Y tal que $X \cong (\mathbb{C}^k, 0) \times Y$.

(c) Se existem $D_1, \cdots, D_k \in \mathbb{D}_X$ tal que $D_1(0), \cdots, D_k(0)$ são $\mathbb{C}$-linearmente independentes, então X possui dimensão $\geq k$.

Neste momento, dispondo de álgebras tangentes definidas, gostaríamos de recuperar o germe X a partir da sua álgebra tangente $\mathbb{D}_X$. Isso é possível se conhecemos $\mathbb{D}_X$ como um $\mathcal{O}_n$-submódulo de $\mathbb{D}$, como veremos na proposição abaixo. É necessário definirmos $M(p)$, para um $\mathcal{O}_n$-submódulo arbitrário M de $\mathbb{D}$ e pontos $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$, como o $\mathbb{C}$-subespaço de $T_p(\mathbb{C}^n, 0) = \mathbb{C}^n$ gerado pelas avaliações $D_1(p), \cdots, D_m(p)$ dos $\mathcal{O}_n$-geradores $D_1, \cdots, D_m$ de M em p.

Antes de enunciarmos a próxima proposição vamos fazer um comentário sobre ideais Fitting, para mais detalhes sobre ideais Fitting ver [6]. O objetivo é mostrar que cada conjunto

$$V_j(\mathbb{D}_X) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0)\ /\ dim(\mathbb{D}_X(p)) < n - j\}$$

coincide com o conjunto de zeros do $j-ésimo$ ideal Fitting F_j de $\mathbb{D}/\mathbb{D}_X$.
Vamos primeiro fixar a definição de F_j. Com efeito, considere o epimorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{O}_n^n = \mathcal{O}_n \times \cdots \times \mathcal{O}_n & \longrightarrow & \mathbb{D}/\mathbb{D}_X \\ a = (a_1, \cdots, a_n) & \longmapsto & \varphi(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}}. \end{array}$$

O núcleo de φ, $Ker(\varphi) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{O}_n^n \ / \ \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial_{x_i}} = 0\}$, é o submódulo de relações de

$$\frac{\partial}{\partial_{x_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial_{x_n}}.$$

Segundo o Teorema 1 [6, p.24], podemos obter um epimorfismo

$$\psi : \mathcal{O}_n \to Ker(\varphi)$$

e, consequentemente, construir a resolução

$$\mathcal{O}_n \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_n^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{D}/\mathbb{D}_X.$$

Seja

$$\Psi = \{a_j = (a_{j1}, \cdots, a_{jn})\}_{j \in E}$$

o conjunto dos geradores de $Ker(\varphi)$. Definimos

$$\Omega = \{A \ / \ A \text{ é uma matriz cujas linhas são elementos de } \Psi\}.$$

Vamos denotar por $\{\Delta_\alpha^j\}_{\alpha \in F}$ a família de todos os menores de ordem $n-j$ das matrizes de Ω. Com isso, por definição, o j-ésimo ideal Fitting F_j é o ideal gerado por $\{\Delta_\alpha^j\}_{\alpha \in F}$

$$F_j = < \Delta_\alpha^j \ / \ \alpha \in F >.$$

Podemos formular nosso objetivo como sendo provar que:

$$V_j(\mathbb{D}_X) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ \Delta_\alpha^j = 0, \ \alpha \in F\}.$$

Antes de provar a igualdade será necessário fazer algumas considerações sobre $V_j(\mathbb{D}_X)$:

Dado $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$, sejam $\{\text{posto } A(p) \ / \ A \in \Omega\}$. Como tal conjunto é um subconjunto limitado (não-vazio) de $\mathbb{N}$, existe

$$m(p) := max\{\text{posto } A(p) \ / \ A \in \Omega\}.$$

Lema 3.1. *Para todo* $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$, $m(p) = dim(\mathbb{D}_X(p))$.

Demonstração. Se $dim(\mathbb{D}_X(p)) < m(p)$, então $dim(\mathbb{D}_X(p))$ não é cota superior. Logo existe $A \in \Omega$ tal que o posto de $A(p) > dim(\mathbb{D}_X(p))$. Pondo $A(p) = (a_{ij}(p))_{\square \times n}$, definimos $\Diamond$ vetores de $\mathbb{D}_X$, tal que

$$v_k = \{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial_{x_j}}\},\ k = 1, \cdots, \lozenge.$$

Segue que $\{v_1(p), \cdots, v_k(p)\}$ é um subconjunto de $\mathbb{D}_X(p)$ tal que o espaço gerado $< v_1(p), \cdots, v_k(p) >$ possui dimensão igual ao posto de $A(p) > dim(\mathbb{D}_X(p))$. Absurdo! Pois, $< v_1(p), \cdots, v_k(p) >$ é subespaço de $\mathbb{D}_X(p)$. Portanto, $\mathbb{D}_X(p) \geq m(p)$.

Agora suponhamos por absurdo que $dim(\mathbb{D}_X(p)) > m(p)$. Seja $\beta = dim(\mathbb{D}_X(p))$. Então existe β vetores $v_1, \cdots, v_\beta \in \mathbb{D}_X$ tal que $\{v_1(p), \cdots, v_\beta(p)\}$ é base de $\mathbb{D}_X(p)$. Em particular a matriz

$$\tilde{A}(p) = \begin{bmatrix} v_1(p) \\ \vdots \\ v_\beta(p) \end{bmatrix}$$

possui posto β e $\tilde{A} \in \Omega$. Absurdo! Pois, neste caso, teríamos

$$m(p) < \beta = \text{ posto } \tilde{A}(p) \leq m(p).$$

Logo,

$$m(p) = dim(\mathbb{D}_X(p)),\ \forall p \in (\mathbb{C}^n, 0).$$

□

Finalmente, vejamos que $V_j(\mathbb{D}_X) = \{\Delta_\alpha^j\}$.

($\subset$) Seja $p \in V_j(\mathbb{D}_X)$, isto é, $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $dim(\mathbb{D}_X(p)) = r < n - j$. Pelo Lema 3.1,

$$m(p) = r < n - j.$$

Em particular, para todo $A \in \Omega$ temos que posto de $A(p) \leq r < n - j$. Por outro lado, para todo $A \in \Omega$, todo determinante menor $(n-j) \times (n-j)$ de $A(p)$ é zero. Logo, $\Delta_\alpha^j = 0$, para todo $\alpha \in F$, portanto, $p \in \{\Delta_\alpha^j = 0\}$.

($\supset$) Seja $p \in \{\Delta_\alpha^j = 0\}_{\alpha \in F}$. Então, para todo $A \in \Omega$, os determinantes menores $(n-j) \times (n-j)$ de $A(p)$ são nulos. Em particular, para todo $A \in \Omega$, posto de $A(p) < n-j$. Logo,

$$dim(\mathbb{D}_X(p)) = m(p) = max\{ \text{ posto } A(p)\ /\ A \in \Omega\} < n - j$$

como queríamos.

Lema 3.2 (Lema da Existência)**.** *Sejam $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ analítico, p um ponto regular de X e d a dimenão da componente de X contendo p. Então existem d campos de vetores D_i tangentes à X os quais são linearmente independentes em p.*

Demonstração. Sejam $X_1, \cdots, X_r$ as componentes de X com $p \in X_1$ e $f_1, \cdots, f_m$ os geradores do ideal I_{X_1} e seja k a codimensão de $X_1 \subset X$ dada por

$$codim(X_1) = dim(X) - dim(X_1).$$

A matriz

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \cdots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}$$

possui posto $\leq k$ em todo ponto de X_1 e $Sing(X_1)$ é definido pelos k-menores que se anulam. Como $p \notin Sing(X)$ podemos assumir que o k-menor

$$\begin{vmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_k} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k & \cdots & \partial_{x_k} f_k \end{vmatrix}$$

não se anula em p. Mais ainda, podemos escolher algum $g \in \mathcal{O}_n$ que se anula em $X_2, \cdots, X_r$ mas não em p. Considere d campos de vetores $(i = k+1, \cdots, n)$

$$D_i = g \cdot \begin{vmatrix} \partial_{x_1} & \cdots & \partial_{x_k} & \partial_{x_i} \\ \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_k} f_1 & \partial_{x_i} f_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k & \cdots & \partial_{x_k} f_k & \partial_{x_i} f_k \end{vmatrix}$$

dados pela expansão de cofatores ao longo da primeira linha. Pela escolha de g, os campos se anulam em $X_2 \cup \cdots \cup X_r$ e então são tangentes à essa união. Por outro lado, $D_i f_j = 0$ trivialmente para $j = 1, \cdots, k$. Para $j = k+1, \cdots, m$ as funções $D_i f_j$ se anulam em X_1, pois a matriz $(k+1) \times (k+1)$ possui posto $\leq k$ em X_1. Por construção $D_{k+1}, \cdots, D_n$ são linearmente independentes em p. $\square$

Proposição 3.3. *Sejam $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ analítico, diferente de $(\mathbb{C}^n, 0)$, e $d = dim(X)$.*

(a) $I_X = \sqrt{F_{n-d-1}} = \cdots = \sqrt{F_0}$, onde F_j é o j-ésimo ideal Fitting do $\mathcal{O}_n$-módulo $\mathbb{D}/\mathbb{D}_X$.

(b) $X = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ dim(\mathbb{D}_X(p)) \leq dim(X)\}$.

(c) Para X irredutível, temos $Sing(X) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ dim(\mathbb{D}_X(p)) < dim(X)\}$.

Observações: (a) É necessário excluir $X = (\mathbb{C}^n, 0)$ desde que $\emptyset$ e $(\mathbb{C}^n, 0)$ possuem a mesma álgebra tangente $\mathbb{D}_\emptyset = \mathbb{D}_{(\mathbb{C}^n,0)} = \mathbb{D}$ e $F = \mathcal{O}_n$.
(b) Colocando $V_j(\mathbb{D}_X) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ dim(\mathbb{D}_X(p)) < n - j\}$ para o conjunto de zeros de F_j temos $\emptyset = V_n(\mathbb{D}_X) \subset \cdots \subset V_0(\mathbb{D}_X)$ e a proposição afirma que

$$V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) = \cdots = V_0(\mathbb{D}_X) = X \ (*)$$

e

$$V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X) = \cdots = V_{n-d}(\mathbb{D}_X) = Sing(X) \ (**)$$

para $d' = dim(Sing(X))$ e X irredutível. Com efeito, como vimos anteriormente podemos tomar o conjunto $V_j(\mathbb{D}_X)$ para o conjunto de zeros de F_j. Temos que a cadeia de inclusões

$$\emptyset = V_n(\mathbb{D}_X) \subset \cdots \subset V_0(\mathbb{D}_X)$$

é verificada usando a definição. Assim, precisamos mostrar que a proposição é equivalente à (*) e (**) e provar as duas igualdades para obter a prova da proposição. Para isto vamos utilizar os resultados da Proposição 2.3 do capitúlo 1.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que a Proposição 3.3 seja verdadeira. Então temos que:

$$\begin{aligned} I_X = \sqrt{F_{n-d-1}} = \cdots = \sqrt{F_0} &\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \\ \sqrt{I_X} = \sqrt{F_{n-d-1}} = \cdots = \sqrt{F_0} &\overset{(7)}{\Leftrightarrow} \\ X(I_X) = X(F_{n-d-1}) = \cdots = X(F_0) &\overset{(8)}{\Leftrightarrow} \\ X = V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) = \cdots = V_0(\mathbb{D}_X). & \end{aligned}$$

Dessa forma a igualdade (*) é verdadeira. Agora vamos obter (**). Com efeito, por um lado, segue do item (c) da Proposição 3.3 que

$$\begin{aligned} Sing(X) &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) < dimX\} \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) < d\} \\ &= V_{n-d}(\mathbb{D}_X) \end{aligned}$$

Assim podemos escrever

$$Sing(X) = V_{n-d}(\mathbb{D}_X) \supset ... \supset V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X).$$

Por outro lado, $Sing(X) \subset V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X)$. De fato, pela Proposição 5.1, demonstrada no capítulo posterior, temos que $\mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Sing(X)}$. Logo,

$$V_j(\mathbb{D}_{Sing(X)}) \subset V_j(\mathbb{D}_X), \forall j.$$

Usando o item (b) da Proposição 3.3 para $Sing(X)$ obtemos

$$\begin{aligned} Sing(X) &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_{Sing(X)}(p)) \leq dim(Sing(X)) = d'\} \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_{Sing(X)}(p)) \leq d' + 1\} \\ &= V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_{Sing(X)}) \subset V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X) \end{aligned}$$

Portanto, (**) é verdadeira

$$Sing(X) = V_{n-d}(\mathbb{D}_X) = ... = V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que (*) e (**) sejam verdadeiras. Vamos mostrar os itens da Proposição 3.3. De fato, como trabalhamos com equivalências, (*) $\Leftrightarrow$ (a) está feito. Agora, por (**), temos

$$\begin{aligned} X = V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) < d + 1\} \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) \leq d\} \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) \leq dimX\}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o item (b). Para o item (c), utilizando (**), temos que

$$\begin{aligned} Sing(X) &= V_{n-d}(\mathbb{D}_X) \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) < d\} \\ &= \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \;/\; dim(\mathbb{D}_X(p)) < dimX\} \end{aligned}$$

como queríamos.
Finalmente, vamos demostrar a Proposição 3.3, provando as igualdades (*) e (**). Pimeiramente queremos provar que

$$V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) = \cdots = V_0(\mathbb{D}_X) = X$$

Vejamos inicialmente que $V_0(\mathbb{D}_X) \subset X$. Seja $p \in V_0(\mathbb{D}_X)$. Suponhamos por absurdo que $p \notin X$. Tomando $f \in I_X$ tal que $f(p) = 0$, temos que $f\partial_{x_1}, \cdots, f\partial_{x_n} \in I_X \cdot \mathbb{D} \subset \mathbb{D}_X$ são linearmente independentes em p.
Logo,

$$dim(\mathbb{D}_X(p)) \geq n, \text{ donde } p \notin V_0(\mathbb{D}_X).$$

Absurdo! Portanto, $V_0(\mathbb{D}_X) \subset X$.
Vejamos agora que $X \subset V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X)$. Suponhamos por absurdo que

$$X \not\subset V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X).$$

Então existe $p \in X$ tal que $p \notin V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X)$.

$$p \notin V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) \Rightarrow dim(\mathbb{D}_X(p)) \geq d+1$$

Em particular, existem $V_1, ..., V_k \in \mathbb{D}_X, k \geq d+1$, tal que $V_1(p), \cdots, V_k(p)$ são $\mathbb{C}$-linearmente independentes. Daí, pelo Teorema do Posto, X possui dimensão $\geq d+1$ em p.

$$dim(X) \geq d+1$$

Absurdo! Logo, $X \subset V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X)$, então

$$X \subset V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) \subset ... \subset V_0(\mathbb{D}_X) \subset X \Rightarrow V_{n-d-1}(\mathbb{D}_X) = ... = V_0(\mathbb{D}_X) = X.$$

Agora, queremos mostrar que

$$V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X) = \cdots = V_{n-d}(\mathbb{D}_X) = Sing(X).$$

De fato, usando a Proposição 5.1, demonstrada posteriormente, $\mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Sing(X)}$ e

$$V_j(\mathbb{D}_{Sing(X)}) \subset V_j(\mathbb{D}_X), \forall j.$$

Pela parte (a), que acabamos de mostrar, segue para $Sing(X)$ que

$$Sing(X) = V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_{Sing(X)}) \subset V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X)$$

Portanto, $Sing(X) \subset V_{n-d'-1}(\mathbb{D}_X)$.

Mostremos que $V_{n-d}(\mathbb{D}_X) \subset Sing(X)$: Seja $p \in V_{n-d}(\mathbb{D}_X)$. Suponha por absurdo que $p \notin Sing(X)$. Então p é um ponto regular de X. Pelo Lema 3.2, podemos obter d $(= dim(X))$ campos de vetores em $\mathbb{D}_X$ linearmente independentes em p. Absurdo, pois $p \in V_{n-d}(\mathbb{D}_X) \Rightarrow dim(\mathbb{D}_X(p)) < d$.

□

Naturalmente nos perguntamos se o contrário acontece. É possível encontrar $\mathbb{D}_X$ se conhecemos a subvariedade X? Em geral isso é bem complicado. A maneira de encontrar os geradores do $\mathcal{O}_n$-módulo de $\mathbb{D}_X$ é conhecida em casos especiais. É preciso determinar o módulo de relações entre $f, \partial_{x_1} f, \cdots, \partial_{x_n} f$. Conseguimos computar $\mathbb{D}_X$ a partir de X nestes casos especiais pelo Teorema de Aleksandrov e Kersken abaixo (ver [1]).

Teorema 3.3 (Teo. de Aleksandrov e Kersken, [3, Teo. 6.1, 12, Teo. 2.8])**.** *Seja X uma interseção completa de codimensão k em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com singularidade isolada em 0 tal que I_X pode ser gerado por polinômios homogêneos $f_1, \cdots, f_k$ (todos referentes a $w_1, \cdots, w_n$). Então $\mathbb{D}_X$ é gerado como um $\mathcal{O}_n$-módulo pelo ideal $I_X \cdot \mathbb{D}$, o campo de vetor de Euler $E = \sum w_i x_i \partial_{x_i}$ e os campos de vetores triviais os quais são zero em f_j e dado pela expansão de cofatores ao longo da primeira linha dos $(k+1)$-menores da matriz*

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} & \cdots & \partial_{x_n} \\ \partial_{x_1} f_1 & \cdots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k & \cdots & \partial_{x_n} f_k \end{pmatrix}.$$

A próxima proposição apresenta uma propriedade das álgebras de Lie que será utilizada na Seção 6.3 para a demonstração da Proposição 6.2.

Proposição 3.4. *Sejam $a, b \in \mathcal{O}_n$, $F \in \mathbb{D}$ e $m \in \mathbb{N}$, então segue a congruência:*

$$(aF)^m(b) \equiv a^m F^m(b) \quad mod(aF(b), \cdots, a^{m-1}F^{m-1}(b)).$$

Demonstração. Com efeito, usaremos uma indução sobre m, juntamente com a regra do produto e a definição de congruência. Sendo trivial o caso $m = 1$, consideremos $m = 2$.

$$\begin{aligned} (aF)^2(b) - a^2F^2(b) &= aF(aF(b)) - a^2F^2(b) \\ &= aF(a) \cdot F(b) + a^2F^2(b) - a^2F^2(b) \\ &= aF(a)F(b) \\ &= L_1F(b), \end{aligned}$$

onde $L_1 = aF(a) \in \mathcal{O}_n$. A afirmação é verdadeira para $m = 2$. Suponhamos que para algum k a afirmação seja verdadeira, isto é,

$$(aF)^k(b) \equiv a^kF^k(b) \quad mod(aF(b), \cdots, a^{k-1}F^{k-1}(b)),$$

ou seja, existem $L_1, \cdots, L_{k-1} \in \mathcal{O}_n$ tais que

$$(aF)^k(b) - a^kF^k(b) = L_1aF(b) + \cdots + L_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b).$$

Em particular,

$$(aF)^k(b) = L_1aF(b) + \cdots + L_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b) + a^kF^k(b).$$

Agora, vejamos que a afirmação seja verdadeira para $k + 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (aF)^{k+1}(b) &= aF((aF)^k(b)) \\ &= aF(L_1aF(b) + \cdots + L_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b) + a^kF^k(b)) \\ &= aF(L_1aF(b)) + \cdots + aF(L_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b)) + aF(a^kF^k(b)) \\ (*) &= (\tilde{L}_1aF(b) + \hat{L}_1a^2F^2(b)) + \cdots + (\tilde{L}_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b) \\ &+ \hat{L}_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b)) + aF(a^kF^k(b)) \\ (**) &= \tilde{L}_1aF(b) + \hat{L}_1a^2F^2(b) + \cdots + \tilde{L}_{k-1}a^{k-1}F^{k-1}(b) \\ &+ \hat{L}_1a^kF^k(b) + kF(a)a^kF^k(b) + a^{k+1}F^{k+1}(b). \end{aligned}$$

Logo, pelo princício de indução finita,

$$(aF)^{k+1}(b) \equiv a^{k+1}F^{k+1}(b) \quad mod(aF(b), \cdots, a^kF^k(b)).$$

Vamos mostrar as afirmações $(*)$ e $(**)$ usadas na indução acima:
$(*)$ $\forall i, 1 \leq i \leq k-1$, vale

$$\begin{aligned}
aF(L_i a^i F^i(b)) &= aF(L_i)a^i F^i(b) + L_i aF(a^i F^i(b)) \\
&= aF(L_i)a^i F^i(b) + L_i a(F(a^i)F^i(b) + a^i F^{i+1}(b)) \\
&= aF(L_i)a^i F^i(b) + L_i a(iF(a)a^{i-1}F^i(b) + a^i F^{i+1}(b)) \\
&= aF(L_i)a^i F^i(b) + iL_i F(a)a^i F^i(b) + L_i a^{i+1}F^{i+1}(b) \\
&= (aF(L_i) + iL_i F(a))a^i F^i(b) + L_i a^{i+1}F^{i+1}(b).
\end{aligned}$$

$(**)$

$$\begin{aligned}
aF(a^k F^k(b)) &= aF(a^k)F^k(b) + a^k aF^{k+1}(b) \\
&= akF(a)a^{k-1}F^k(b) + a^{k+1}F^{k+1}(b) \\
&= kF(a)a^k F^k(b) + a^{k+1}F^{k+1}(b).
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Variedades Integrais

Neste capítulo temos como proposta, associar uma subálgebra $A \subset \mathbb{D}$ de campos de vetores com uma subvariedade de forma que os elementos de A sejam tangentes a tal subvariedade, através do conceito de variedade integral. Porém, antes disso, precisamos voltar a nossa atenção para os campos de vetores que são tangentes a mais de um germe, considerando assim as coleções de subvariedades analíticas, com intuito de trabalharmos com os germes analíticos irredutíveis. Os conceitos que serão trabalhados neste capítulo podem ser encontrados em [9].

4.1 Arquivos Analíticos

O foco desta seção é considerar caso tenhamos campos de vetores tangentes à vários germes analíticos, ou seja, vamos considerar as interseções das álgebras tangentes. Tais germes podem estar contidos uns nos outros, como veremos posteriormente, considerando o conjunto singular de um germe X que está contido em X, como uma subvariedade, temos que todo campo tangente à X é também tangente à $Sing(X)$. Então como vamos tratar de uma coleção de germes, vamos retringir nossa atenção para as coleções de germes irredutíveis, conforme o Teorema de Seidenberg. Assim, definimos o arquivo analítico.

Definição 4.1. *Um arquivo de germes analíticos em* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *é um conjunto finito*

$$\mathbb{X} = \{X_1, \cdots, X_m\}$$

de germe analíticos irredutíveis, possivelmente contidos uns nos outros. Além disso, para qualquer arquivo $\mathbb{X}$*, associamos o seu germe subjacente*

$$|\mathbb{X}| = \bigcup X_i$$

o qual é um germe de um conjunto analítico, onde as componentes irredutíveis X_i *são as componentes de* $\mathbb{X}$ *que não estão contidas em nenhuma outra.*

Definição 4.2. *Para um arquivo analítico* $\mathbb{X} = \{X_1, \cdots, X_m\}$ *nós definimos a álgebra tangente* $\mathbb{D}_{\mathbb{X}}$ *como a álgebra de Lie dos campos de vetores tangentes à todas componentes* X_i *de* $\mathbb{X}$*, ou seja,* $\mathbb{D}_{\mathbb{X}} = \bigcap \mathbb{D}_{X_i}$.

4.2 Variedades Integrais

Neste momento podemos nos perguntar se dado uma subálgebra A de $\mathbb{D}$, conseguimos encontrar uma variedade X de modo que todo campo de vetores de A é tangente à X? A resposta é sim e será o intuito desta seção é associar à tal subálgebra A o germe analítico X_A (arquivo analítico $\mathbb{X}_A$), este conceito é chamado de variedade integral.

Seja $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}$ a álgebra tangente de algum arquivo analítico $\mathbb{Y}$. Para a subálgebra $A \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ definimos

$$I_A = I_A(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}) = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset A\}.$$

Definição 4.3. *O conjunto de zeros de I_A será chamado de variedade integral de A relativo à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ e denotado por $X_A = X_A(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}})$.*

Proposição 4.1. *Seja $A \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ uma subálgebra relativa à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Qualquer campo de vetores em A é tangente a variedade integral X_A:*

$$A \subset \mathbb{D}_{X_A}.$$

Demonstração. De fato, é suficiente mostrar que qualquer $D \in A$ satisfaz $D(I_A) \subset I_A$. Seja $g \in I_A$. Para $E \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ temos que

$$Dg \cdot E = [D, g \cdot E] - g \cdot [D, E] \in A$$

Então pela definição de I_A,

$$Dg \in I_A.$$

□

Exemplo 3. *Considere o arquivo analítico $\mathbb{X} = \{X_1, X_2\}$, onde as componentes $X_1, X_2 \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ são dadas por:*

$$X_1 = \{x = 0\} \ e \ X_2 = \{0\}.$$

Então $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X}} \subset \mathbb{D}$ é o $\mathcal{O}_2$-módulo gerado pelos campos de vetores $x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y$.

Com efeito,

$$A =< x\partial_x, (x+y)\partial_y >= \{h_1, h_2, h_3 \in \mathcal{O}_2 \ / \ h_1 x\partial_x + h_2 x\partial_y + h_3 y\partial_y \in \mathbb{D}\}.$$

Portanto, I_A é gerado por $f \in \mathcal{O}_2$ tal que $f(x,y) = x$, ou seja $I_A =< f >$. De fato, por definição I_A é o conjunto

$$I_A = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g \cdot \mathbb{D} \subset A\}.$$

Então seja $D = a\partial_x + b\partial_y \in \mathbb{D}$ um campo arbitrário, com $a, b \in \mathcal{O}_2$. Temos que

$$f \cdot D = ax\partial_x + bx\partial_y \in A.$$

Como X_A é o conjunto de zeros de I_A temos que a variedade integral é dada por

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \ / \ x = 0\} = X_1.$$

Logo,

$$X_A(\mathbb{D}) = \{x = 0\} = X_1.$$

A componente “perdida” X_2 pode ser recuperada. Com efeito, $\mathbb{D}_{X_A}$ é o $\mathcal{O}_2$-módulo gerado po $x\partial_x, \partial_y$, $\mathbb{D}_{X_A} =< x\partial_x, \partial_y >$. Então seja $I_{\mathbb{D}_{X_A}}$ gerado pela função identidade g, assim,

$$g^{-1}(0) = \{0\} = X_A(\mathbb{D}_{X_A}) = X_2,$$

é a variedade integral de A relativa à $\mathbb{D}_{X_A}$. Portanto, nós definimos:

Definição 4.4. *Para a subálgebra $A \subset \mathbb{D}$ definimos indutivamente uma sequência X_A^i de germes de conjuntos analíticos em $(\mathbb{C}^n, 0)$ por*

$$\begin{aligned} X_A^1 &:= X_A(\mathbb{D}) \\ X_A^i &:= X_A(\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_{X_A^1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{X_A^{i-1}}). \end{aligned}$$

Os ideais geradores I_A^i de X_A^i são dados por

$$I_A^i = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g \cdot (\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_{X_A^1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{X_A^{i-1}}) \subset A\}.$$

O arquivo analítico $\mathbb{X}_A$ formado por todas componentes irredutíveis de $X_A^1, \cdots, X_A^k$ serão chamados de arquivo integral de A relativo à $\mathbb{D}$. A Proposição 4.1 garante que

$$A \subset \mathbb{D}_{X_A}.$$

No exemplo anterior temos que

$$\{X_1, X_2\} = \{X_A(\mathbb{D}), X_A(\mathbb{D}_{X_A})\} = \{X_A^1, X_A^2\}.$$

No próximo capítulo, especificamente pelo resultado da Proposição 5.3, mostraremos que a variedade integral de uma álgebra tangente $\mathbb{D}_X$ é igual ao germe X. Além disso, a variedade integral pode ser trivial, isto é, vazia ou igual a $(\mathbb{C}^n, 0)$. Estes casos não geométricos não ocorrem se A é uma subálgebra geométrica, como veremos na Proposição 6.3.

Capítulo 5

Invariância e Irredundância

Agora nos perguntamos se diferentes germes ou arquivos podem possuir a mesma álgebra tangente. No geral, isto somente é possível para arquivos, ou seja, existem arquivos analíticos contidos um no outro tal que qualquer componente de $\mathbb{X}'$ é também uma componente de $\mathbb{X}$, com $\mathbb{D}_{\mathbb{X}'} = \mathbb{D}_{\mathbb{X}}$. Isso significa que as compenentes de $\mathbb{X}$ não situadas em $\mathbb{X}'$ não têm efeito sobre a álgebra tangente. Tais conceitos são abordados em [9].

Definição 5.1. *Dados arquivos analíticos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ dizemos que $\mathbb{X}$ é $\mathbb{Y}$-invariante se qualquer campo de vetores tangente à $\mathbb{Y}$ é também tangente à $\mathbb{X}$, isto é,*

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{X}}.$$

Observação: A noção de invariância para germes de subvariedades analíticas é formalizada de maneira análoga.

Proposição 5.1. *Seja $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe analítico. A locus singular $Sing(X)$ de X é invariante em relação à X,*

$$\mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Sing(X)}.$$

Demonstração. Se $D \in \mathbb{D}_X$ é não-singular, $D(0) \neq 0$, uma mudança de coordenadas em $(\mathbb{C}^n, 0)$ permite assumir que $D = \partial_{x_1}$. O Teorema de Rossi (Teo. 3.2) implica que

$$X = (\mathbb{C}, 0) \times X' \text{ com } X' = X \cap (\mathbb{C}^{n-1}, 0).$$

Vamos descrever as igualdades acima.

$$\begin{aligned} X' &= \{x = (x_1, \cdots, x_n) \ / \ f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} \cap \{(x_2, \cdots, x_n) \ / \ x_i \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\hat{x} = (x_2, \cdots, x_n) \ / \ f_j(0, x_2, \cdots, x_n) = 0, \ , j = 1, \cdots, k\} \\ &= \{\hat{x} = (x_2, \cdots, x_n) \ / \ \hat{f}_j(x_2, \cdots, x_n) = 0 \ , j = 1, \cdots, k\}. \end{aligned}$$

Daí,

$$(\mathbb{C}, 0) \times X' = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \ / \ \tilde{f}_j(x) = 0 \ , j = 1, \cdots, k\} = X.$$

Por outro lado, temos que a primeira coordenada x_1 é livre, além disso a jacobiana de $Sing(X)$ possui mesmo posto que a jacobiana de $Sing(X')$. De fato, $Sing(X) = \{x \in X \ / \ J\tilde{f}_j(x)$ não tem posto máximo$\}$.

$$J\tilde{f}_j(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_{\tilde{f}_1}}{\partial_{x_2}} & \cdots & \frac{\partial_{\tilde{f}_1}}{\partial_{x_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial_{\tilde{f}_k}}{\partial_{x_2}} & \cdots & \frac{\partial_{\tilde{f}_k}}{\partial_{x_n}} \end{pmatrix}.$$

Como a primeira coluna é nula, o posto será igual o posto da matriz jacobiana de $Sing(X') = \{\hat{x} \in X' \ / \ J\hat{f}_j(x)$ não tem posto máximo$\}$

$$J\hat{f}_j(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial_{\hat{f}_1}}{\partial_{x_2}} & \cdots & \frac{\partial_{\hat{f}_1}}{\partial_{x_n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial_{\hat{f}_k}}{\partial_{x_2}} & \cdots & \frac{\partial_{\hat{f}_k}}{\partial_{x_n}} \end{pmatrix}.$$

Logo, podemos escrever $Sing(X) = (\mathbb{C}, 0) \times Sing(X')$ e para todo $\tilde{f} \in I_{Sing(X)}$ temos que

$$D\tilde{f} = \frac{\partial_{\tilde{f}}}{\partial_{x_1}} = 0 \in I_{Sing(X)},$$

assim,

$$D \in \mathbb{D}_{Sing(X)}.$$

Agora, se D é singular, então $D(0) = 0$ e o argumento anterior é aplicado em todos pontos $p \in Sing(X)$ tal que $D(p) \neq 0$. Para os outros pontos temos que $D(p) = 0$, além disso o espaço tangente é o espaço das derivações, como $D(p) = \sum a_i \partial_{x_i}(p)$ é uma derivação que se anula em cada ponto p, temos que $D(p) \in T_p Sing(X)$, logo

$$D \in \mathbb{D}_{Sing(X)}.$$

$\square$

Proposição 5.2. *Suponha que o germe irredutível $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é invariante em relação à algum arquivo analítico $\mathbb{Y}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$, isto é, $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_X$. Então temos que uma das alternativas é verdadeira:*

(a) $X = (\mathbb{C}^n, 0)$,

(b) *X está contido em pelo menos duas componentes de $\mathbb{Y}$,*

(c) *X está contido na locus singular de uma componente de $\mathbb{Y}$,*

(d) *X é igual uma componente de $\mathbb{Y}$.*

Para o objetivo deste trabalho, vamos assumir que nenhuma das três primeiras possibilidades é verdadeira e provaremos que X é igual a uma componente de $\mathbb{Y}$.

Demonstração. Pela Proposição 3.3 e como $X \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ podemos escrever

$$X = V_0(\mathbb{D}_X) = \{p \in (\mathbb{C}^n, 0) \ / \ dim \mathbb{D}_X(p) < n\}.$$

A inclusão $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_X$ implica que $X = V_0(\mathbb{D}_X) \subset V_0(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}})$. De fato, caso contrário, existiria $p \notin V_0(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}})$ tal que $dim(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}(p)) \geq n$, absurdo pois

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_X \Rightarrow dim(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}) \leq dim(\mathbb{D}_X) < n.$$

Deste modo, temos que $X \subset V_0(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}})$. Porém, $V_0(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}) \subset |\mathbb{Y}|$ pois qualquer função f que se anula em $|\mathbb{Y}|$ induz campos de vetores $f\partial_{x_1}, \cdots, f\partial_{x_n}$ tangentes à $\mathbb{Y}$ e linearmente independentes do conjunto de zeros de f. Portanto, $X \subset |\mathbb{Y}|$. Sendo irredutível, X precisa estar contido em alguma componente de $\mathbb{Y}$, digamos $X \subset Y_1$. Devemos mostrar que $X = Y_1$ comparando suas dimensões. Então, seja $k = codim(Y_1)$. Assumimos que X não está contido em duas componentes de $\mathbb{Y}$, nem no lugar dos pontos singulares de alguma das componentes. Isto permite escolher pontos $p \in X$, fora de $Y_2 \cup \cdots \cup Y_r \cup Sing(Y_1)$ e arbitrariamente próximo de 0. Pelo Lema 3.2 existem $n-k$ campos de vetores D_i em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ linearmente independentes em p. Como $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_X$, os campos D_i pertencem a $\mathbb{D}_X$. Pelo Teorema de Rossi, a dimensão de X em p precisa ser maior ou igual $n-k$. Como p está arbitrariamente próximo de 0, nós concluímos que $dim(X) \geq n-k$. Junto com $X \subset Y_1$ e $k = codim(Y_1)$, implica que $X = Y_1$ e a afirmação está estabelecida. □

Definição 5.2 (Irredundância)**.** *Dados arquivos analíticos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$, dizemos que $\mathbb{X}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$, se excluindo qualquer componente de $\mathbb{X}$, altera a álgebra tangente*

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} := \mathbb{D}_{\mathbb{X}} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}.$$

É equivalente dizer que nenhuma componente X_j de $\mathbb{X}$ é invariante em relação à $\mathbb{X}^- \cup \mathbb{Y}$, onde $\mathbb{X}^- = \mathbb{X} - \{X_j\}$. De fato, suponha por absurdo que X_j seja uma componente de um arquivo $\mathbb{X}$ invariante à $\mathbb{X}^- \cup \mathbb{Y}$ e tal que uma vez deletada altera-se $\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$. Assim, temos que

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X}^- \cup \mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{X_j} \text{ e } \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} \neq \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-,\mathbb{Y}}.$$

Por outro lado, usando o fato da invariância em $(*)$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} &= \mathbb{D}_{X_j} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \\ &\overset{(*)}{=} \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \\ &= \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-,\mathbb{Y}}. \end{aligned}$$

O que mostra o absurdo.

Se $\mathbb{X}$ é redudante em relação à $\mathbb{Y}$ então claramente podemos excluir alguma componente de $\mathbb{X}$ que não altera a álgebra tagente $\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} := \mathbb{D}_{\mathbb{X}} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, isto é, podemos obter um novo arquivo $\hat{\mathbb{X}}$ com

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbb{X}},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}.$$

Caso o arquivo $\hat{\mathbb{X}}$ for redundante em relação à $\mathbb{Y}$, podemos excluir alguma componente e obter outro arquivo $\tilde{\mathbb{X}}$ com

$$\mathbb{D}_{\tilde{\mathbb{X}},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{\hat{\mathbb{X}},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$$

tal que $\tilde{\mathbb{X}}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$.

Exemplo 4. *Para $\mathbb{Y} = \emptyset$ e qualquer germe X o arquivo*

$$\mathbb{X} = \{(\mathbb{C}^n, 0), X, \textit{ componentes de } X\}$$

é redundante. De fato, se excluirmos qualquer componente de $\mathbb{X}$, temos, utilizando o Teorema de Seidenberg, que não se altera

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X},X} = \mathbb{D}_X.$$

Exemplo 5. *Para um germe Y o arquivo $\mathbb{X} = \{Y, Sing(Y), Sing(Sing(Y))\}$ é redundante em relação à $\mathbb{Y}$.*

A proposição a seguir nos diz que tal arquivo $\tilde{\mathbb{X}}$ é unicamente determinado por $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, isto é, $\tilde{\mathbb{X}}$ é o arquivo integral da álgebra tangente $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ relativo à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$.

Proposição 5.3. *Dados arquivos analíticos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ suponha $\mathbb{X}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$. Então o arquivo integral de $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ relativo à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ é igual à $\mathbb{X}$:*

$$\mathbb{X}_A = \mathbb{X}.$$

Demonstração. Sejam $X_1, \cdots, X_k$ as componentes irredutíveis do germe $|\mathbb{X}|$. Vamos mostrar que $|\mathbb{X}|$ é igual a variedade integral de A relativa à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, isto é,

$$|\mathbb{X}| = X_A.$$

Repetindo o argumento com $\mathbb{Y}$ substituído por $\mathbb{Y}^+ = \mathbb{Y} \cup \{X_1, \cdots, X_k\}$ e $\mathbb{X}$ por $\mathbb{X}^- = \mathbb{X} - \{X_1, \cdots, X_k\}$.

Observe primeiro que qualquer g que se anula em $|\mathbb{X}|$ satisfaz

$$g \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = A.$$

Com efeito, seja $g \in \mathcal{O}_n$ tal que g se anula em $|\mathbb{X}|$, ou seja, $g \in I_{|\mathbb{X}|}$. Considere um campo de vetores $W \in g \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Basta mostrar que $W \in \mathbb{D}_{\mathbb{X}}$ e que $W \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Escrevendo,

$$W = g \cdot V, \text{ com } V \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}.$$

Temos que $W \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ pois, como $V \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ segue que $g \cdot V \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Agora, para mostrar que $W \in \mathbb{D}_{\mathbb{X}}$, vamos provar que

$$W(I_{|\mathbb{X}|}) \subset I_{|\mathbb{X}|}.$$

Tomando o ideal $I_{|\mathbb{X}|} =< f_1, \cdots, f_k >$, seja $h \in W(I_{|\mathbb{X}|})$, isso implica

$$\begin{aligned} h &= W(a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k) \\ &= g \cdot V(a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k) \end{aligned}$$

Por outro lado, $V(f) \in \mathcal{O}_n$, onde $f = (a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k)$, portanto

$$h = g \cdot V(f) \in I_{|\mathbb{X}|},$$

logo, temos que $W(I_{|\mathbb{X}|}) \subset I_{|\mathbb{X}|}$, ou seja,

$$W \in \mathbb{D}_{\mathbb{X}}.$$

Então temos que $I_{|\mathbb{X}|} \subset I_A$ e segue do item (1) da Proposição 2.3, que $X_A \subset |\mathbb{X}|$. Como $\mathbb{X}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$ existem campos de vetores $D_j \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tal que $D_j \notin \mathbb{D}_{X_j}$, para $j = 1, \cdots, k$. De fato, pela irredundância, nenhuma componente de $\mathbb{X}$, digamos X_j, é invariante em relação à $\mathbb{X}^- \cup \mathbb{Y}$, onde $\mathbb{X}^-$ é o arquivo excluído X_j. Com efeito, suponha por absurdo que para algum $j = 1, \cdots, k$ todo $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tem-se que $D \in \mathbb{D}_{X_j}$. Logo,

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{X_j}.$$

Dessa forma, eliminando-se X_j, temos

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X_j} \cap \mathbb{D}_{|\mathbb{X}-X_j|} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{|\mathbb{X}-X_j|} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-,\mathbb{Y}}.$$

Absurdo, pois $\mathbb{X}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$. Então existe $h_j \in I_{X_j}$ com $D_j h_j \notin I_{X_j}$. Sendo assim, considere $g \in I_A$ arbitrária. Como os campos $g \cdot D_j$ pertecem a A por definição e como $A \subset \mathbb{D}_{X_j}$ temos que

$$g \cdot D_j h_j \in I_{X_j}.$$

Os X_j's são irredutíveis e $D_j h_j \notin I_{X_j}$, então

$$g \in I_{X_j}, \, \forall j.$$

Assim, mostramos que

$$I_A \subset \bigcap I_{X_j} = I_{|\mathbb{X}|},$$

a igualdade segue do item (4) da Proposição 2.3. Logo,

$$|\mathbb{X}| \subset X_A.$$

$\square$

Capítulo 6

Álgebras

Agora iremos definir cadeias de inclusões de álgebras que estão ligadas entrei si pela Proposição 6.1 e que nos auxiliará a caracterizar as álgebras tangentes. Tal caracterização é fundamental para a associação das álgebras tangentes com as subvariedades analíticas. Este capítulo tem como referências [9], [11], [12].

6.1 Álgebras Balanceadas, Geométricas e Visíveis

Definição 6.1. *Uma subálgebra A de uma álgebra de Lie B é chamada balanceada em B, se A não contém nenhum ideal não nulo de B, mas um elemento, $a \in A$, com $a \neq 0$ tal que*

$$[a, B] \subset A \text{ e } [[a, B], B] \subset A.$$

A subálgebra A de B é dita balanceada maximal, se não existe outra subálgebra $\tilde{A}$ de B, balanceada tal que

$$A \subsetneq \tilde{A}.$$

Definição 6.2. *Uma subálgebra A é chamada geométrica em B se toda cadeia de inclusões,*

$$A \subset A_k \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal, pode ser completada

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com todas inclusões balanceadas maximal.

Observacão 1: Se A for balanceada maximal em B, então A é geométrica em B. Com efeito, se A não fosse geométrica em B, então seria possível encontrar uma cadeia

$$A \subset A_k \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_k \subset A_{k-1}$, $A_{k-1} \subset A_{k-2}$, $\cdots$, $A_1 \subset A_0 = B$, balanceadas maximal, a qual não pode ser completada numa cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A = A_m \subset A_{m-1}, \cdots, A_k \subset A_{k-1}, A_{k-1} \subset A_{k-2}, \cdots, A_1 \subset A_0 = B$, balanceadas maximal. Em particular, a existência da primeira cadeia

$$A \subset A_k \subset \cdots \subset A_0 = B$$

já nos dá a contradição, pois

$$A_1 \subset A_0 = B$$

é balanceada maximal. Como $A \subset A_1$, temos um absurdo sobre a maximalidade de A.

Definição 6.3. *Uma subálgebra A de uma álgebra de Lie B é chamada visível, se existe uma cadeia*

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal para todo i. Além disso, A é dita visível maximal em B se não existe uma subálgebra $\tilde{A}$ visível em B tal que

$$A \subsetneq \tilde{A}.$$

Observacão 2: Se A for geométrica em B, então A é visível em B. Com efeito, seja A geométrica em B. Então tomando a cadeia de inclusões

$$A \subset A_0 = B$$

a condição $A_k \subset A_{k-1}, \cdots, A_1 \subset A_0 = B$, balanceadas maximal é satisfeita trivialmente. Logo, pelo fato de A ser geométrica em B, existe uma cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_m \subset A_{m-1}, \cdots, A_1 \subset A_0$ balanceadas maximal. Em particular ser balanceada maximal implica ser visível.

Tendo em consideração a Observação 1 e a Observação 2, temos o seguinte resultado:

Proposição 6.1. *Seja uma subálgebra A de uma álgebra de Lie B, temos que A é*

$$\textit{balanceada maximal} \Leftrightarrow \textit{visível maximal} \Leftrightarrow \textit{geométrica maximal}$$

Demonstração. Vamos mostrar a primeira equivalência.
($\Rightarrow$) Sendo A balanceada maximal, temos que A é visível. Suponha por absurdo que A não seja visível maximal. Então existiria $\tilde{A}$ visível em B tal que $A \subset \tilde{A} \subset B$. Sendo $\tilde{A}$ visível, existe a cadeia de inclusões

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. Em particular, $A_1 \subset A_0 = B$ balanceada. Mas,

$$\begin{cases} A \subset \tilde{A} \\ \tilde{A} \subset A_1 \end{cases} \Rightarrow A \subset A_1.$$

Absurdo, pois A é balanceada maximal.
($\Leftarrow$) Sendo A visível, existe uma cadeia de inclusões

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_0 = B$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. Porém, A sendo visível maximal, devemos ter $A = A_1$ $(m = 1)$. Assim,

$$A = A_1 \subset A_0 = B$$

é balanceada maximal.

Agora mostraremos a segunda equivalência.
($\Leftarrow$) Supondo A geométrica maximal. Queremos mostrar que A é visível maximal. Com efeito, pela Obersevação 2, o fato de A ser geométrica implica que A é visível, ou seja, existe a cadeia de inclusões

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = B$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. Como, em particular, $A_1 \subset A_0 = B$ é balanceada maximal, segue da Observação 1 que A_1 é geométrica. Daí, pela maximalidade de A, segue que

$$A = A_1 \subset A_0 = B.$$

Logo A é balanceada maximal que é equivalente a ser visível maximal como visto anteriormente.
($\Rightarrow$) Seja A visível maximal em B, devemos mostrar que A é geométrica maximal em B. Com efeito, pela primeira equivalência, como A é visível maximal, temos que A é balanceada maximal. Assim, pela Observação 1, A é geométrica. Suponhamos por absurdo que A não seja geométrica maximal. Então existe $\tilde{A}$ subálgebra geométrica em B com

$$A \subsetneq \tilde{A} \subset B.$$

Sendo $\tilde{A}$ geométrica, segue da Observação 2 que $\tilde{A}$ é visível. Logo existe uma cadeia de inclusões $\tilde{A} = \tilde{A}_m \subset \cdots \subset \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_0 = B$, com $\tilde{A}_i \subset \tilde{A}_{i-1}$ balanceada maximal. Em particular, $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_0 = B$ é balanceada maximal. Mas,

$$\begin{cases} A \subsetneq \tilde{A} \subset B \\ \tilde{A} = \tilde{A}_m \subset \cdots \subset \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_0 = B \end{cases} \Rightarrow A \subsetneq \tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_0 = B.$$

Absurdo, pois A é balanceada maximal. □

Observação 3: A visibilidade é transitiva, isto é, sejam A e $\hat{A}$ subálgebras de B com $A \subset \hat{A}$. Se A é visível em $\hat{A}$ e $\hat{A}$ é visível em B, então A é visível em B. De fato,

- A é visível em $\hat{A} \Rightarrow$ existe uma cadeia $A = A_m \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = \hat{A}$ com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal.
- $\hat{A}$ é visível em $B \Rightarrow$ existe uma cadeia $\hat{A} = \hat{A}_m \subset \cdots \subset \hat{A}_1 \subset \hat{A}_0 = B$ com $\hat{A}_i \subset \hat{A}_{i-1}$ balanceada maximal.

Assim, tomando a cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = \hat{A} = \hat{A}_m \subset \cdots \subset \hat{A}_1 \subset \hat{A}_0 = B$$

temos que é balanceada maximal em cada nível. Logo A é visível em B.

6.2 Séries de Transporte

Nesta seção vamos definir as séries de transporte que nos permitem caracterizar as álgebras balanceadas.

Definição 6.4. *Sejam A e B álgebras de Lie, tal que $A \subset B$. Chamamos de série de transporte de A relativa à B, uma série decrescente $A^{[i]}$ das subálgebras de A tal que*

$$\begin{aligned} A^{[1]} &:= \{D \in A \ / \ [D,B] \subset A\} \\ A^{[i]} &:= (A^{[i-1]})^{[1]} = \{D \in A^{[i-1]} \ / \ [D,B] \subset A^{[i-1]}\} \\ A^{[\infty]} &:= \bigcap A^{[i]}. \end{aligned}$$

Lema 6.1. *Seja $A \subset B$ álgebras de Lie.*

(i) $A^{[\infty]}$ é o maior ideal de B contido em A.

(ii) A é balanceada se, e somente se, $A^{[\infty]} = 0$ e $A^{[2]} \neq 0$.

Demonstração. (i) Primeiramente, vamos mostrar que $A^{[\infty]}$ é um ideal de B. Seja $D \in A^{[\infty]}$ e $E \in B$. Temos, por definição, que

$$D \in A^{[i]} \Rightarrow [D,E] \in A^{[i-1]}$$

para todo i. Portanto,

$$[D,E] \in A^{[\infty]}$$

e está mostrado que é um ideal. Por outro lado, seja $A' \subset A$ um ideal de B. Então $A' \subset A^{[1]}$. Se $A' \subset A^{[i]}$ para algum i, então

$$[A', B] \subset A' \subset A^{[i]}$$

isto é, $A' \subset A^{[i+1]}$, logo

$$A' \subset A^{[\infty]}$$

e provamos que $A^{[\infty]}$ é o maior ideal de B contido em A.

(ii) ($\Rightarrow$) Como A é balanceada, temos por definição que A não contém nenhum ideal não nulo de B, portanto $A^{[\infty]} = 0$. Por outro lado, por A ser balanceada, então

$$[[D, B], B] \subset A,$$

o que é equivalente à

$$[D, B] \subset A^{[1]}$$

Logo, $A^{[2]} \neq 0$.

($\Leftarrow$) Se $A^{[\infty]} = 0$, A não possui nenhum ideal não nulo de B, pois pelo item (i), $A^{[\infty]}$ é o maior ideal de B contido em A. Como $A^{[2]} \neq 0$, então existe $D \in A^{[1]}$ tal que

$$[D, B] \subset A^{[1]} \subset A.$$

Por outro lado,

$$[[D, B], B] \subset A,$$

o que mostra que A é balanceada. □

Para provar as proposições da próxima seção vamos provar dois resultados auxiliares. O primeiro mostra como construir elementos em I_A a partir de elementos de $A^{[1]}$ e o segundo relaciona o ideal de A com o primeiro conjunto da série de transporte de A.

Lema 6.2 (Lema de Amemiya, [13, pág. 547]). *Seja $A \subset \mathbb{D}'$ uma subálgebra de um submódulo de Lie $\mathbb{D}'$. Se $D \in A^{[1]}$ e $h \cdot D \in A^{[1]}$ para algum $h \in \mathcal{O}_n$, então $(Dh)^2 \in I_A$.*

Demonstração. Para um campo arbitrário $E \in \mathbb{D}'$ temos que

$$[D, h \cdot E] = Dh \cdot E + h \cdot [D, E] \in A$$

e

$$[h \cdot D, E] = -Eh \cdot D + h \cdot [D, E] \in A.$$

Portanto,

$$Dh \cdot E + Eh \cdot D \in A.$$

Substituindo E por $Eh \cdot D$ e $Dh \cdot E$, obtemos que

$$Dh \cdot Eh \cdot D \in A$$

e

$$(Dh)^2 \cdot E + Dh \cdot Eh \cdot D \in A.$$

Logo,

$$(Dh)^2 \cdot E \in A$$

para todo $E \in \mathbb{D}'$, ou seja,

$$(Dh)^2 \in I_A.$$

□

Lema 6.3 (Lema de Omori [12, Lema 3.4])**.** *Seja $A \subset \mathbb{D}'$, $A \neq 0$, submódulos de $\mathbb{D}$. Então $A^{[1]}$ também é um submódulo. Além disso*

$$A^{[1]} = 0 \Leftrightarrow I_A = 0.$$

Demonstração. Considere a equação

$$[f \cdot D, E] = -Ef \cdot D + f \cdot [D, E].$$

Se $f \in \mathcal{O}_n$, $D \in A^{[1]}$, $E \in \mathbb{D}'$ então

$$[f \cdot D, E] \in A \text{ e } f \cdot D \in A^{[1]}.$$

Suponha $A^{[1]} = 0$. Seja $f \in I_A$ e escolha $D \in A$, $D \neq 0$. Então

$$[f \cdot D, E] \in A$$

para todo $E \in \mathbb{D}'$, ou seja, $f \cdot D \in A^{[1]}$ e $f = 0$.

Finalmente, suponha $I_A = 0$. Seja $D \in A^{[1]}$. Para todo $f \in \mathcal{O}_n$ temos que $f \cdot D \in A^{[1]}$. O Lema de Amemiya fornece que $(Df)^2 \in I_A$, consequentemente $Df = 0$. Isto prova que $D = 0$ e o Lema. □

6.3 Álgebras Tangentes são Balanceadas

Neste seção mostraremos que as álgebras tangentes são balanceadas através de duas proposições mutualmente simétricas. A primeira prova tal afirmação se o arquivo correspondente a álgebra tangente satisfaz certas condições. Em contrapartida, a segunda mostra que o arquivo integral das álgebras balanceadas satisfaz tais condições.

Proposição 6.2. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ arquivos analíticos em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com álgebra tangente $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ considerada como subálgebra de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Se $|\mathbb{X}|, |\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ e $|\mathbb{X}| \not\subset |\mathbb{Y}|$, então a álgebra tangente $\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ é uma subálgebra balanceada de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$.*

Demonstração. Para mostrar que A é subálgebra balanceada em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ vamos mostrar que

i) $A^{[2]} \neq 0$

ii) $A^{[\infty]} = 0$.

Primeiramente vamos mostrar que

$$A^{[2]} \neq 0.$$

Considere $X = |\mathbb{X}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$. Escolha $g \in I_X$, $g \neq 0$. Então, $g \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset A$, basta observar que para $E \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ temos

$$g \cdot E(I_X) \subset I_X$$
$$g \cdot E(I_{\mathbb{Y}}) \subset I_{\mathbb{Y}}$$

Daí,

$$g \cdot E \in A.$$

Assim, temos que $g \cdot I_A$, por definição. Para $D, E \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ temos

$$\begin{array}{rcl} [g^2 \cdot D, E] & = & g^2 \cdot D \circ E - E \circ (g^2 \cdot D) \\ & = & g^2 \cdot D \circ E - (Eg^2 \cdot D + g^2 \cdot E \circ D) \\ & = & g^2 \cdot [D, E] - E(gg) \cdot D \\ & = & g^2 \cdot [D, E] - (E(g)g + gEg) \cdot D \\ & = & g^2 \cdot [D, E] - 2gEg \cdot D \in A \end{array}$$

Portanto, $g^2 \cdot D \in A^{[1]}$ e $g^2 \in I_{A^{[1]}}$. O Lema de Omori implica que

$$A^{[2]} = (A^{[1]})^{[1]} \neq 0.$$

Assim mostramos o item (i).
Agora, supondo, por hipótese que $|\mathbb{X}|, |\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ e $|\mathbb{X}| \not\subset |\mathbb{Y}|$ e provar que

$$A^{[\infty]} = 0.$$

Isso significa que para cada $D \in A$, $D \neq 0$ existem campos de vetores $E_1, \cdots, E_k \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tal que

$$[\cdots, [D, E_1], \cdots, E_k] \notin A.$$

Observe que

$$I_X \cdot \mathbb{D} = \{\sum g_j \cdot D_j \ / \ g_j \in I_X \text{ e } D \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}\}$$

é um ideal do anel $(\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}, +, [,])$, onde o produto segue do colchete de Lie $([,])$. Então dado $D \in A$, $D \neq 0$, temos que mostrar que existem

$$E_1, \cdots, E_k \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

tal que

$$[\cdots, [D, E_1], \cdots, E_k] \notin A.$$

Para isto, vamos dividir em dois casos.

Caso 1: Suponha $D \notin I_X \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Escolha $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $D(g) \notin I_X$. Temos que um tal g existe. Pois, caso contrário, se $\forall g \in \mathcal{O}_n$ tivéssemos $Dg \in I_X$, então para $g_i = x_i$, $i = 1, \cdots, n$, teríamos

$$\begin{array}{rcl} Dg_i \in I_X & \Leftrightarrow & Dx_i \in I_X \\ & \Leftrightarrow & Dx_i = \sum a_j \partial_{x_j}(x_i) = a_i \\ & \Leftrightarrow & D = Dx_1 \partial_{x_1} + \cdots + Dx_n \partial_{x_n} \in I_X \cdot D. \end{array}$$

Absurdo. Logo, tal $g \in \mathcal{O}_n$ existe.

Agora pela Proposição 5.3, supondo a irredundância de X em relação à $\mathbb{Y}$, temos que

$$X_A = X.$$

Daí,

$$I_A \subset \sqrt{I_A} = I_X.$$

De fato, $I_A \subset \sqrt{I_A}$ por definição. Por outro lado, segue do Teorema 2.4 que

$$\sqrt{I_A} = I_{V(I_A)} = I_{X_A} = I_X.$$

Deste modo, $Dg \notin I_A$, isto é, $Dg \cdot E \notin A$, para um apropriado $E \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, pois $I_A = \{g \in \mathcal{O}_n \ / \ g \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset A\}$. Se $[D, g \cdot E] \notin A$ está satisfeito. Caso $[D, E] \in A$, então,

$$[D, g \cdot E] \notin A$$

e está satisfeito. Com efeito, suponha por absurdo que $[D, g \cdot E] \in A$. Então, como

$$[D, g \cdot E] = Dg \cdot E + g \cdot [D, E]$$

segue que

$$Dg \cdot E = [D, g \cdot E] - g \cdot [D, E] \in A$$

Absurdo. Pois, $Dg \cdot E \notin A$.

Caso 2: Suponha que $D \in I_X \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. É suficiente encontrar $E_1, \cdots, E_k \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tal que

$$[\cdots, [D, E_1], \cdots, E_k] \notin I_X \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}.$$

Isto é verdade, pois, neste caso, tomando

$$\bar{D} = [\cdots, [D, E_1], \cdots, E_k],$$

teríamos $\bar{D} \notin A$ ou $\bar{D} \in A$. Se $\bar{D} \notin A$, então, como $\bar{D} = [\cdots, [D, E_1], \cdots E_k]$ não há nada a fazer. Se $\bar{D} \in A$, com $\bar{D} \notin I_X \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, segue do Caso 1 que existe $\bar{E} \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tal que $[\bar{D}, \bar{E}] \notin A$. Então, consideremos, para $n \geq 2$, uma hipersuperfície H em $(\mathbb{C}^n, 0)$ suave tal que D não é tangente. Tal hipersuperfície existe. Com efeito, suponhamos por absurdo que D seja tangente a qualquer hipersuperfície suave. Pondo $D = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i}$, como $D \neq 0$, existe $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $D(p) \neq 0$. Em particular, $a_\delta(p) \neq 0$ para algum $\delta = \{1, \cdots, n\}$. Agora, consideremos n hipersuperfícies suaves

$$H_1 = \{f_1 = 0\},\ H_2 = \{f_2 = 0\},\ \cdots,\ H_n = \{f_n = 0\}$$

onde,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots, x_n) &= x_1 - p_1 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) &= x_2 - p_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) &= x_n - p_n. \end{aligned}$$

Como D é tangente a cada hipersuperfície H_i, $i = 1, \cdots, n$, temos

$$D(q) \in T_q H_i,\ \forall q \in H_i.$$

Em particular, para o ponto p, obtemos

$$D(p) \in T_p H_i.$$

Por outro lado, $T_p H_i = Ker(df_i)(p)$. Como $J_{f_i}(p) = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, segue que

$$D(p) \in T_p H_i \Leftrightarrow a_i(p) = 0.$$

Assim, para $\delta = i$, obtemos $a_\delta(p) = 0$. Absurdo. Logo tal hipersuperfície existe. Sendo H suave podemos utilizar a forma local da submersão, na função que define H, e escrever

$$H = \{x_n = 0\}.$$

Além disso, utilizando o Teorema da Divisão de Weiestrass podemos escrever

$$D(x_n) = g + x_n h$$

com $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ e $h \in \mathcal{O}_n$. Temos que $g \not\equiv 0$, pois $D(x_n) \notin < x_n >$, por D não ser tangente. Usando este fato, podemos fazer a seguinte construção: Mudando as primeiras $n-1$ coordenadas $x_1, \cdots, x_{n-1}$ linearmente, nós podemos obter $g(x_1, 0, \cdots, 0) \neq 0$. De fato, seja $p = (p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n)$, com $p \in (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que

$$g(p) \neq 0.$$

Pela continuidade de g existe uma bola aberta $B(p, \varepsilon)$ tal que

$$g(z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}, z_n) \neq 0, \forall z = (z_1, \cdots, z_n) \in B(p, \varepsilon).$$

Seja $T : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ o ismorfismo dado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \Delta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \Delta_{n-1} \end{bmatrix} \text{,onde } \Delta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } p_i = 0 \\ -\frac{p_{i-1}}{p_i}, & \text{se } i \geq 2 \text{ e } p_i \neq 0 \\ -\frac{p_{n-1}}{p_i}, & \text{se } i = 1 \text{ e } p_i \neq 0 \end{cases}.$$

Note que $T : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ é um isomorfismo tal que

$$T(p_1, \cdots, p_{n-1}) = 0 \in \mathbb{C}^{n-1}$$

e T leva o aberto

$$\{(z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n)\} \in B(p, \varepsilon)$$

na vizinhança aberta V_0 de 0 de $\mathbb{C}^{n-1}$. Agora, tomando $\hat{g} := g \circ \hat{T}$, onde $\hat{T}$ é a mudança de coordenadas definida abaixo

$$\begin{array}{rcl} \hat{T} : \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \\ x = (\hat{x}, x_n) & \longrightarrow & (T^{-1}(x_n), x_n + p_n) \end{array}$$

obtemos nosso objetivo:

$$\forall x_1 \in (-\delta, \delta), \hat{g}(x_1, 0, \cdots, 0) \neq 0.$$

Com efeito, para todo x_1 suficientemente pequeno (em módulo), o ponto $(x_1, 0, \cdots, 0)$ pertence a vizinhança aberta V_0. Daí,

$$(T^{-1}(x_1, 0, \cdots, 0), p_n) \in B(p, \varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \hat{g}(x_1, 0, \cdots, 0) & = & (g \circ \hat{T})(x_1, 0, \cdots, 0) \\ & = & g(\hat{T}(x_1, 0, \cdots, 0)) \\ & = & g(T^{-1}(x_1, 0, \cdots, 0), 0 + p_n) \\ & = & g(T^{-1}(x_1, 0, \cdots, 0), p_n) \\ & \neq & 0 \end{array}$$

onde $(T^{-1}(x_1, 0, \cdots, 0), p_n) \in B(p, \varepsilon)$. Deste modo encontramos coordenadas sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ para as quais um monômio x_1^e aparece para algum $e \geq 0$ na expansão em série de potência de D_{x_n}. Com efeito, vamos considerar $D(x_n)$ nestas coordenadas.

$$\begin{aligned}
\hat{D}(x_n)(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) &= D(x_n)(\hat{T}((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)) \\
&= D(x_n)(T^{-1}((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n) \\
&= h(T^{-1}((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)x_n + \hat{g}((x_1, x_2, \\
&\quad \cdots, x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}$$

Portanto, considerando a série de Taylor de $\hat{D}(x_n)$ em torno de $(0, 0, \cdots, 0, 0) \in \mathbb{C}^n$ e avaliando em $(x_1, 0, \cdots, 0, 0)$ obtemos

$$\hat{D}(x_n)(x_1, 0, \cdots, 0) = \hat{D}(x_n)(0, 0, \cdots, 0) + C_{(1,0,\cdots,0)}x_1 + \cdots + C_{(k,0,\cdots,0)}{x_1}^k + \cdots$$

Mas como,

$$\begin{aligned}
\hat{D}(x_n)(x_1, 0, \cdots, 0) &= h(T^{-1}((x_1, 0, \cdots, 0), 0)0 + \hat{g}(x_1, 0, \cdots, 0) \\
&= 0 + g(x_1, 0, \cdots, 0) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Segue que x_1^e $(e \geq 0)$ aparece na série de potências de $\hat{D}(x_n)$. Agora, usamos a hipótese $X \not\subset |\mathbb{Y}|$ para encontrar $f \in \mathcal{O}_n$ tal que f se anula sobre $|\mathbb{Y}|$ mas não se anula sobre X. De fato, se uma tal função f não existisse, então toda função se anulando sobre $|\mathbb{Y}|$ deveria se anular sobre X, donde, $X \subset |\mathbb{Y}|$. Absurdo. Portanto uma tal f existe e afirmamos que um campo de vetores $E = f\partial_{x_1}$ satisfaz $[\cdots, [D, E], \cdots, E] \notin I_X \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Usando a Proposição 3.4, mostramos que, para $a, b \in \mathcal{O}_n$, $F \in \mathbb{D}$ e $m \in \mathbb{N}$:

$$(aF)^m(b) \equiv a^m F^m(b) \quad mod(aF(b), \cdots, a^{m-1}F^{m-1}(b)).$$

Tomando, $a = f$, $b = D(x_n)$, $F = \partial_{x_1}$, obtemos

$$[f\partial_{x_1}, \cdots, [f\partial_{x_1}, D], \cdots](x_n) \equiv f^m \partial_{x_1}^m(D(x_n)) \quad mod(f\partial_{x_1}(D(x_n)), \cdots$$
$$\cdots, f^{m-1}\partial_{x_1}^{m-1}(D(x_n))).$$

Se o lado esquerdo não pertence a I_X para algum m, está provado. Se o lado esquerdo pertecente a I_X para todo m, então, segue diretamente da congruência que

$$f^m \partial_{x_1}^m(D(x_n)) \in I_X, \forall m.$$

Mas, $\partial_{x_1}^e(D(x_n))$ é unidade em $\mathcal{O}_n$. Logo,

$$\begin{aligned}
f^e &= f^e \partial_{x_1}^e(D(x_n))(\partial_{x_1}^e(D(x_n)))^{-1} \\
&= (\partial_{x_1}^e(D(x_n)))^{-1} f^e \partial_{x_1}^e(D(x_n)) \in I_X.
\end{aligned}$$

Em particular, $f \in I_X$, absurdo. Assim, concluímos que

$$A^{[\infty]} = 0.$$

Logo, mostrados os itens (i) e (ii), pelo segundo item do Lema 6.1, temos que a álgebra tangente $\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ é uma subálgebra balanceada de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. $\square$

Proposição 6.3. *Sejam* $\mathbb{Y}$ *um arquivo analítico, com* $|\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ *e* $A \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ *uma subálgebra de Lie com variedade integral* X_A *relativa a* $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$*.*

(a) Se $A^{[2]} \neq 0$*, então* $X_A \neq (\mathbb{C}^n, 0)$*.*

(b) Se $A^{[\infty]} = 0$*, então* $X_A \not\subset |\mathbb{Y}|$*.*

Ou seja, cada subálgebra balanceada A *de uma álgebra tangente* $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ *de algum arquivo* $\mathbb{Y}$ *em* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *com* $|\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ *possui variedade integral* X_A *diferente de* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *e não contida em* $|\mathbb{Y}|$*.*

Demonstração. (a) Precisamos construir um elemento não nulo em I_A. Não é possível aplicar o Lema de Omori usando a afirmação fraca $A^{[1]} \neq 0$ por não sabermos se $A^{[1]}$ é um submódulo. Ao invés, vamos usar o Lema de Amemiya.

Tome $D \in A^{[2]}$, $D \neq 0$. Então o operador diferencial D^2 obtido compondo D com ele próprio é diferente de zero. Escolha $g \in \mathcal{O}_n$ com

$$D^2 g \neq 0.$$

Temos que $D \in A^{[1]}$ e $Dg \cdot D = [D, g \cdot D] \in A^{[1]}$. Então o Lema de Amemiya 6.2 afirma que

$$(D^2 g)^2 \in I_A.$$

(b) Precisamos mostrar que $I_Y \not\subset \sqrt{I_A}$ para $\mathbb{Y} = |\mathbb{Y}|$. Por outro lado $I_{\mathbb{Y}}^k \subset I_A$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Para $g \in I_{\mathbb{Y}}^k$ e $D, E \in \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tem-se que

$$[g \cdot D, E] = -Eg \cdot D + g \cdot [D, E] \in I_Y^k \cdot \mathbb{D}_Y.$$

Portanto $I_{\mathbb{Y}}^k \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset I_A \cdot \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset A$ é um ideal não nulo de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, contradição.

Mostrados os itens (a) e (b) temos a afirmação pela definição de álgebras balanceadas. $\square$

Capítulo 7

A Correspondência de Gröbner

Neste capítulo, mostramos a correspondência de Gröbner, uma correspondência bijetiva que associa um germe analítico a sua álgebra tangente, que se apresenta como uma subálgebra geométria de uma álgebra de Lie. Até aqui faltam dois teoremas, para mostrarmos a bijeção, que caracterizam as álgebras tangentes como visíveis e consequentemente geométricas. Para uma leitura sobre os resultados a seguir, ver [9].

7.1 Teorema de Echo

Nesta seção vamos formular e demonstrar o Teorema de Echo que afirma que toda álgebra geométrica de $\mathbb{D}$ é álgebra tangente de uma variedade, a qual é única e dada pela variedade integral dessa álgebra.

Proposição 7.1. *Seja $\mathbb{Y}$ um arquivo analítico em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com $|\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$. Cada subálgebra visível maximal A de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ é uma álgebra tangente $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$, onde X é um germe analítico irredutível diferente de $(\mathbb{C}^n, 0)$ e não contido em $|\mathbb{Y}|$, mas com $Sing(X) \subset |\mathbb{Y}|$ e dado por $X = X_A$.*

Demonstração. A unicidade segue da Proposição 5.3, sendo que $X \neq (\mathbb{C}^n, 0)$, irredutível e não contido em $|\mathbb{Y}|$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$. Para provar a existência observe que, pela Proposição 6.3, X_A é diferente de $(\mathbb{C}^n, 0)$ e não contida em $|\mathbb{Y}|$. Para mostrar que $A = \mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}}$ escolha uma componente irredutível X de X_A não contida em $|\mathbb{Y}|$. Pela Proposição 4.1 e o Teorema de Seidenberg temos as inclusões

$$A \subset \mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}.$$

Pela escolha de X a Proposição 6.2 se aplica. Isso mostra que $\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ é balanceada em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Em particular $\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \neq \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Então $A \subset \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ implica que $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$, pois A é visível maximal, portanto balanceada maximal em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Como X é irredutível e estritamente contido em $(\mathbb{C}^n, 0)$ a Proposição 5.3 se aplica novamente e nos dá que $X_A = X$. Portanto X_A é irredutível e $A = \mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}}$. Até aqui mostramos todas propriedades execeto $Sing(X_A) \subset |\mathbb{Y}|$. Para mostrar esta inclusão, um argumento similar para X_A funciona. Suponha que $SingX_A \not\subset |\mathbb{Y}|$. Escolha uma componente irredutível Z de $Sing(X_A)$, tal que $Z \not\subset |\mathbb{Y}|$. Pela Proposição 5.1 e o Teorema de Seidenberg temos

$$\mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{SingX_A,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}}.$$

Pela Propoição 6.2, $\mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ é balanceada. Então $A = \mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ implica que $A = \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}}$, pois A é balaneada maximal em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Temos então que $\mathbb{D}_{X_A,\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}}$. A unicidade de X_A nos dá que $Z = X_A$, contradição, pois $Z \subset SingX_A$. Assim, concluímos a demonstração. $\square$

Teorema 7.1 (Teorema de Echo). *Seja* $\mathbb{Y}$ *um arquivo analítico em* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *com* $|\mathbb{Y}| \neq (\mathbb{C}^n, 0)$. *Cada subálgebra visível* A *de* $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ *é um álgebra tangente* $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$, *onde* $\mathbb{X}$ *é um arquivo analítico em* $(\mathbb{C}^n, 0)$, *cujas componentes não estão contidas em* $|\mathbb{Y}|$. *O arquivo* $\mathbb{X}$ *é único, a menos de irredundância em relação à* $\mathbb{Y}$, *dado por* $\mathbb{X} = \mathbb{X}_A$.

Demonstração. A unicidade de $\mathbb{X}$ segue novamente da Proposição 5.3. Para mostrar a existência vamos proceder por uma redução. Com efeito, por A ser uma subálgebra visível, temos que admite uma cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_1 \subset A_0 = \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. Em particular, A_1 é balanceada maximal e consequentemente visível maximal em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Assim, pela Proposição 7.1, A_1 é uma álgebra tangente

$$A_1 = \mathbb{D}_{\mathbb{X}^1,\mathbb{Y}},$$

para um arquivo $\mathbb{X}^1 = \{X_1\}$, onde X_1 é um germe analítico irredutível único. Portanto, para o arquivo $\mathbb{X}^1$, podemos substituir $\mathbb{Y}$ por $\mathbb{Y}^1 = \mathbb{X}^1 \cup \mathbb{Y}$ e considerar a cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_1 = \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1}.$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. Em particular, A_2 é balanceada maximal e consequentemente visível maximal em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1}$. Repetindo o processo, novamente pela Proposição 7.1, A_2 é uma álgebra tangente

$$A_2 = \mathbb{D}_{\mathbb{X}^2}$$

para um arquivo $\mathbb{X}^2 = \{X_2\}$, onde X_2 é um germe analítico irredutível único. Assim, substituindo $\mathbb{Y}^1$ por $\mathbb{Y}^2 = \mathbb{X}^2 \cup \mathbb{Y}^1$, podemos considerar a cadeia

$$A = A_m \subset \cdots \subset A_2 = \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^2}.$$

com $A_i \subset A_{i-1}$ balanceada maximal. O comprimento da cadeia diminuiu, e repetindo novamente o processo, a nossa hipótese de redução se aplica e dá a afirmação. De fato, podemos considerar a subálgebra $A \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ visível maximal e pela Proposição 7.1 temos que A é uma álgebra tangente $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ para algum arquivo $\mathbb{X}$. $\square$

7.2 Teorema de Narkisso

Como dito anteriormente, para concluirmos o objetivo deste trabalho, vamos agora formular e demonstrar outro resultado fundamental, o Teorema de Narkisso. Com o intuito de provarmos o teorema, temos a seguinte proposição:

Proposição 7.2. *Seja* $\mathbb{Y}$ *um arquivo analítico em* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *e* X *um germe irredutível diferente de* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *com* $X \not\subset |\mathbb{Y}|$, *mas* $Sing(X) \subset |\mathbb{Y}|$. *Então a subálgebra tangente* $\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ *é um subágebra visível maximal de* $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$.

Demonstração. Pela Proposição 6.2, $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ é balanceada em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$. Basta provar que A é maximal, pois ser balanceada maximal implica ser visível maximal (Prop. 6.1). Com efeito, seja $B \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ tal que B é balanceada em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ e $A \subset B$. Devemos mostrar que $A = B$.

Pela Proposição 6.3, a variedade integral X_B é diferente de $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $X_B \not\subset |\mathbb{Y}|$. Podemos então escolher uma componente irredutível Z de X_B tal que $Z \not\subset |\mathbb{Y}|$. De fato se isso não fosse possível teríamos $X_B \subset |\mathbb{Y}|$, absurdo.

Note que, pela Proposição 4.1, temos que $B \subset \mathbb{D}_{X_B}$. Portanto,

$$\begin{cases} B \subset \mathbb{D}_{X_B} \\ B \subset \mathbb{D}_Y \end{cases} \Rightarrow B \subset \mathbb{D}_{X_B,\mathbb{Y}}.$$

Além disso, do Teorema de Seidenberg, temos $\mathbb{D}_{X_B} = \bigcap \mathbb{D}_{Z_i}$, onde Z_i são as componentes de X_B. Então segue que,

$$\mathbb{D}_{X_B} = \bigcap \mathbb{D}_{Z_i} = \mathbb{D}_Z \cap \mathbb{D}_{Z_i} \Rightarrow \mathbb{D}_{X_B} \subset \mathbb{D}_Z \Rightarrow \mathbb{D}_{X_B,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}}$$

Assim, obtemos

$$A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset B \subset \mathbb{D}_{X_B,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_Z$$

Em particular,

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_Z,$$

ou seja, Z é um germe invariante em relação ao arquivo

$$\tilde{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \cup \{X\}.$$

Então, pela Proposição 5.2, há 4 possibilidades:

(1ª) $Z = (\mathbb{C}^n, 0)$

(2ª) Z está contida em pelo menos duas componentes de $\tilde{\mathbb{Y}}$

(3ª) Z está contido no conjunto singular de alguma componente $\tilde{Y}_j$ de $\tilde{\mathbb{Y}}$

(4ª) Z é igual a alguma componente $\tilde{Y}_j$ de $\tilde{\mathbb{Y}}$.

Vamos verificar que três primeiras possibilidades não ocorrem. Com efeito,

(1ª) $Z \neq (\mathbb{C}^n, 0)$, pois $Z \subset X_B \not\subset |\mathbb{Y}| \subset (\mathbb{C}^n, 0)$.

(2ª) Se Z estivesse contida em pelo menos duas componentes de $\tilde{\mathbb{Y}}$, digamos, $\tilde{\mathbb{Y}}_{j_1}$ e $\tilde{\mathbb{Y}}_{j_2}$. Então, como

$$\tilde{\mathbb{Y}} = \mathbb{Y} \cup \{X\}$$

segue que pelo menos uma das duas componentes, $\tilde{\mathbb{Y}}_{j_1}$ ou $\tilde{\mathbb{Y}}_{j_2}$, é componente do arquivo $\mathbb{Y}$. Assim, como

$$Z \subset \tilde{\mathbb{Y}}_{j_1} \text{ e } Z \subset \tilde{\mathbb{Y}}_{j_2}$$

segue que,

$$Z \subset |\mathbb{Y}|.$$

Absurdo! Pois, $Z \subset X_B \not\subset |\mathbb{Y}|$.

(3ª) Se $Z \subset Sing(\tilde{\mathbb{Y}}_j)$ para alguma componente $\tilde{\mathbb{Y}}_j$ de $\tilde{\mathbb{Y}}$, então, caso $\tilde{\mathbb{Y}}_j = X$, teremos

$$Z \subset Sing(X) \subset |\mathbb{Y}|.$$

Absurdo! Pois, $Z \subset X_B \not\subset |\mathbb{Y}|$. Por outro lado, caso $\tilde{\mathbb{Y}}_j \subset \mathbb{Y}$, então

$$Z \subset Sing(\tilde{\mathbb{Y}}_j) \subset |\mathbb{Y}|.$$

Absurdo! Novamente, pois, $Z \subset X_B \not\subset |\mathbb{Y}|$. Dessa forma, a 4ª possibilidade ocorre, ou seja,

$$Z = \tilde{\mathbb{Y}}_j$$

para alguma componente de $\tilde{\mathbb{Y}}$. Se fosse, $\tilde{\mathbb{Y}}_j \subset \mathbb{Y}$, então teríamos

$$Z = \tilde{\mathbb{Y}}_j \subset |\mathbb{Y}|.$$

Logo, somente podemos ter $\tilde{\mathbb{Y}}_j = X$. Portanto,

$$Z = X$$

Assim, obtemos,

$$A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset B \subset \mathbb{D}_{X_B,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z,\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}.$$

Portanto,

$$A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset B \subset \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} = A.$$

Donde,

$$A = B.$$

Como queríamos demonstrar. □

Corolário 7.1. *Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ arquivos analíticos em $(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\mathbb{X} = \{X\}$ e $X \subset |\mathbb{Y}|$. Então,*

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível.

Demonstração. Por hipótese, $X \subset |\mathbb{Y}|$. Seja k_0 tal que $Sing^{k_0}(X) \not\subset |\mathbb{Y}|$ e $Sing^{k_0+1}(X) \subset |\mathbb{Y}|$. Se $k_0 = 0$, então temos $X \not\subset |\mathbb{Y}|$ e $Sing(X) \subset |\mathbb{Y}|$. Daí, usando a Proposição 7.2, segue que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível maximal e o corolário está provado.
Caso contrário, se $k_0 > 0$, então considere a decomposição de $Sing^{k_0}(X)$ em fatores irredutíveis

$$Sing^{k_0}(X) = Z_{01} \cup \cdots \cup Z_{0l_0} \cup \cdots Z_{0p_0} \tag{7.1}$$

onde $Z_{0j} \not\subset |\mathbb{Y}|$, para $j = 1, \cdots, l_0$, e $Z_{0l_0+1}, \cdots, Z_{0p_0} \subset |\mathbb{Y}|$.
Afirmamos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq l_0$, temos as inclusões Δ_{0j} e ∇_{0j} abaixo, sendo ∇_{0j} visíveis:

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}} \qquad (\Delta_{0j})$$

e

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j-1}\}} \qquad (\nabla_{0j})$$

Sendo assim, vamos provar (Δ_{0j}). Com efeito, pela Proposição 5.1 (a), obtemos

$$\mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Sing(X)} \subset \mathbb{D}_{Sing(Sing(X))} \subset \cdots \subset \mathbb{D}_{Sing^{k_0}(X)} = \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \cap \cdots \mathbb{D}_{Z_{0p_0}}$$

onde usamos o Teorema de Seidenberg na última igualdade. Agora, como

$$\mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \cap \cdots \mathbb{D}_{Z_{0p_0}} \subset \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}}$$

segue que,

$$\mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_X \subset \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} &\Rightarrow \mathbb{D}_X = \mathbb{D}_X \cap \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \\ &\Rightarrow \mathbb{D}_X \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_X \cap \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \\ &\Rightarrow \mathbb{D}_X \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \cap \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}}$$

e a igualdade (Δ_{0j}) está provada.
Agora vamos provar (∇_{0j}). Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}} &= \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \cap \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j}} \\ &\subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \cap \mathbb{D}_{Z_{01}} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_{0j-1}} \\ &= \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j-1}\}} \end{aligned}$$

onde a inclusão é finalmente obtida eliminando-se a componente $\mathbb{D}_{Z_{0j}}$.
Precisamos checar a visibilidade. De fato, vamos considerar a Proposição 7.2 tomando a componente Z_{0j} como X e $\mathbb{Y} \cup \{Z_{01}, \cdots, Z_{0j}\}$ como $\mathbb{Y}$. Note que Z_{0j} é um germe irredutível e

$$Z_{0j} \not\subset |\mathbb{Y} \cup \{Z_{01}, \cdots, Z_{0j-1}\}| \qquad (1)$$

e

$$Sing(Z_{0j}) \subset |\mathbb{Y} \cup \{Z_{01}, \cdots, Z_{0j-1}\}| \qquad (2).$$

Com efeito,

$$Z_{0j} \subset Sing^{k_0}(X) \Rightarrow Sing(Z_{0j}) \subset Sing^{k_0+1}(X) \subset |\mathbb{Y}|.$$

Daí, segue a inclusão (2). Por outro lado, se a relação (1) não fosse verdadeira, então, teríamos

$$\begin{aligned} Z_{0j} \subset |\mathbb{Y} \cup \{Z_{01}, \cdots, Z_{0j-1}\}| &\Rightarrow Z_{0j} = Z_{0j} \cap (|\mathbb{Y}| \cup \{Z_{01} \cup \cdots \cup Z_{0j-1}\}) = \\ (Z_{0j} \cap |\mathbb{Y}|) \cup (Z_{0j} \cap (Z_{01} \cup \cdots \cup Z_{0j-1})) &\Rightarrow Z_{0j} = (Z_{0j} \cap |\mathbb{Y}|) \text{ ou} \\ & Z_{0j} = (Z_{0j} \cap (Z_{01} \cup \cdots \cup Z_{0j-1})) \\ &\Rightarrow Z_{0j} \subset |\mathbb{Y}| \text{ ou} \\ & Z_{0j} \subset Z_x,\ x \in \{1, \cdots, j-1\}. \end{aligned}$$

Absurdo! Portanto a relação (1) é verdadeira.
Dessa forma, usando (1) e (2) na Proposição 7.2, obtemos

$$\mathbb{D}_{Z_{0j},\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j-1}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j-1}\}}$$

é visível. Como,

$$\mathbb{D}_{Z_{0j},\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j-1}\}} = \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0j}\}}$$

segue a prova da afirmação.
Defina $\mathbb{Y}^1 := \mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0l_0}\}$. Assim, obtemos

$$Sing^{k_0}(X) \subset |\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0l_0}\}| = |\mathbb{Y}^1|$$

logo existe $k_1 < k_0$ tal que

$$Sing^{k_1}(X) \not\subset |\mathbb{Y}^1| \text{ e } Sing^{k_1+1}(X) \subset |\mathbb{Y}^1|.$$

Se $k_1 = 0$, então

$$X \not\subset |\mathbb{Y}^1| \text{ e } Sing(X) \subset |\mathbb{Y}^1|.$$

Daí, pela Proposição 7.2,

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1}$$

é visível maximal. Isso implica que $\Delta_{0_{l_0}}$ é visível. Como $\nabla_{0_{l_0}}$ também é visível, segue por transitividade que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{0_1},\cdots,Z_{0_{l_0-1}}\}}$$

é visível, ou seja, a inclusão $(\Delta_{0_{l_0-1}})$ é visível. Assim, como $(\Delta_{0_{l_0-1}})$ e $(\nabla_{0_{l_0-1}})$ são visíveis, segue transitividade que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{0_1},\cdots,Z_{0_{l_0-2}}\}}$$

é visível, ou seja, a inclusão $(\Delta_{0_{l_0-2}})$ é visível. Assim, como $(\Delta_{0_{l_0-2}})$ e $(\nabla_{0_{l_0-2}})$ são visíveis, segue transitividade que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}\cup\{Z_{01},\cdots,Z_{0l_0-3}\}}$$

é visível, ou seja, a inclusão $(\Delta_{0_{l_0-3}})$ é visível. Seguindo com este procedimento, obtemos finalmente que (Δ_{0_1}) e (∇_{0_1}) são visíveis. Logo, por transitividade

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível e o corolário está provado.

Caso contrário, se $0 < k_1 < k_0$, então considere a decomposição de $Sing^{k_1}(X)$ em componentes irredutíveis:

$$Sing^{k_1}(X) = Z_{11}\cup Z_{12}\cup\cdots Z_{1l_1}\cup\cdots Z_{1p_1} \qquad (*)$$

onde as primeiras l_1 componentes são tais que $Z_{1j} \not\subset |\mathbb{Y}|$ e as demais são tais que $Z_{1l_1+1}, \cdots, Z_{1p_1} \subset |\mathbb{Y}|$. Então afirmamos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq l_1$, temos as inclusões $(\Delta_{0_{l_0-2}})$ e $(\nabla_{0_{l_0-2}})$ abaixo, sendo $(\nabla_{0_{l_0-2}})$ visível:

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{11}, \cdots, Z_{1j}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y} \cup \{Z_{1_1}, \cdots, Z_{1_j}\}} \qquad (\Delta_{1_j})$$

e

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{1_1}, \cdots, Z_{1_j}\}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{1_1}, \cdots, Z_{1_j-1}\}} \qquad (\nabla_{1_j}).$$

De fato, segue da demonstração da afirmação que fizemos anteriormente, tomando $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^1$ e $Z_{0k} = Z_{1k}$ para cada k.
Agora, definimos $\mathbb{Y}^2 := \mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{1_1}, \cdots, Z_{1_{l_1}}\}$. Dessa forma, obtemos

$$Sing^{k_1}(X) \subset |\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{11}, \cdots, Z_{1l_1}\}| = |\mathbb{Y}^2|$$

logo existe $k_2 < k_1 < k_0$ tal que

$$Sing^{k_2}(X) \not\subset |\mathbb{Y}^2| \text{ e } Sing^{k_2+1}(X) \subset |\mathbb{Y}^2|.$$

Se $k_2 = 0$, então

$$Sing^{k_2}(X) = X \not\subset |\mathbb{Y}^1| \text{ e } Sing^{k_2+1}(X) = Sing(X) \subset |\mathbb{Y}^1|.$$

Daí, pela Proposição 7.2,

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^2} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^2}$$

é visível maximal, em particular visível, ou seja, a inclusão (Δ_{1l_1}) é visível. Assim, sendo (Δ_{1l_1}) e (∇_{1l_1}) visíveis, segue pela transitividade da visibilidade que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{11}, \cdots, Z_{1l_1-1}\}}$$

é visível, ou seja, (Δ_{1l_1-1}) é visível. Assim, sendo (Δ_{1l_1-1}) e (∇_{1l_1-1}) visíveis, segue pela transitividade da visibilidade que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1 \cup \{Z_{11}, \cdots, Z_{1l_1-2}\}}$$

é visível, ou seja, (Δ_{1l_1-2}) é visível. Seguindo este raciocínio, obtemos finalmente que (Δ_{11}) e (∇_{11}) são visíveis. Logo, pela transitividade da visibilidade, obtemos

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^1} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^1}$$

é visível. Daí, usando o procedimento feito para l_0, obtemos que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível e a prova é atingida.

Se $0 < k_2 < k_1 < k_0$, então considere a decomposição de $Sing^{k_2}(X)$ em componentes irredutíveis

$$Sing^{k_2}(X) = Z_{21} \cup Z_{22} \cup \cdots Z_{2l_2} \cup \cdots Z_{2p_2}$$

considerando que $Z_{2j} \not\subset |\mathbb{Y}|$, para $j = 1, \cdots, l_2$, e as demais são tais que $Z_{2l_2+1}, \cdots, Z_{2p_2} \subset |\mathbb{Y}|$. Procedendo como no caso anterior, obtemos $k_3 < k_2 < k_1 < k_0$ tal que

$$Sing^{k_3}(X) \not\subset |\mathbb{Y}^3| \text{ e } Sing^{k_3+1}(X) \subset |\mathbb{Y}^3|.$$

onde, $\mathbb{Y}^3 := \mathbb{Y}^2 \cup \{Z_{21}, \cdots Z_{2p_2}\}$.
Se $k_3 = 0$, então como no caso anterior, obtemos da Proposição 7.2 que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^3} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^3}$$

é visível maximal, em particular visível. Como no caso anterior efetuamos um procedimento para l_2 e obtemos

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^2} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^2}$$

visível. Logo, utilizando os procedimentos feitos para l_1 e l_0, obtemos

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível e a prova é mostrada.

Se $0 < k_3 < k_2 < k_1 < k_0$, então o processo é seguido repetindo-se até encontrarmos $k_t \in \mathbb{N}$, com

$$0 = k_t < k_{t-1} < \cdots < k_3 < k_2 < k_1 < k_0.$$

Daí, teremos pela Proposição 7.2,

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}^{t+1}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^{t+1}}$$

visível maximal, em particular visível. Após os procedimentos para $l_t, l_{t-1}, \cdots, l_1, l_0$, chegamos finalmente que

$$\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível, como queríamos demonstrar. □

Teorema 7.2 (Teorema de Narkisso)**.** *Seja $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ arquivos analíticos em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com nenhuma componente de $\mathbb{X}$ contida em $|\mathbb{Y}|$. Então a álgebra tangente $\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ é uma subálgebra visível de $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$.*

Demonstração. Vamos usar o princípio de indução finita sobre o número de componentes de $\mathbb{X}$.

Se $\mathbb{X} = \{X_1\}$ tem uma componente, como por hipótese,

$$X_1 \not\subset |\mathbb{Y}|,$$

segue do Corolário 7.2 que $\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ é visível. Suponhamos por hipótese de indução, que o resultado seja válido caso $\mathbb{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$ tenha k componentes. Vamos provar que o resultado é válido para o caso em que $\mathbb{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_k, X_{k+1}\}$ tenha $k+1$ componentes. Suponha $\mathbb{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_k, X_{k+1}\}$ enumerado tal que $X_i \not\subset X_1$ para $i \geq 2$. Com efeito, sejam

$$\begin{aligned} \mathbb{X}^- &= \mathbb{X} - \{X_1\} \\ \mathbb{Y}^+ &= \mathbb{Y} \cup \{X_1\}. \end{aligned}$$

Neste caso note que nenhuma componente $X_2, X_3, \cdots, X_{k+1}$ de $\mathbb{X}^-$ está contida em $\mathbb{Y}^+ = \mathbb{Y} \cup \{X_1\}$. Assim, como $\mathbb{X}^-$ possui k componentes, obtemos pela hipótese de indução que

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{\mathbb{X}^-,\mathbb{Y}^+} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}^+}$$

é visível. Por outro lado,

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Y}^+} = \mathbb{D}_{X_1,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

também é visível. Dessa forma usando a transitividade da visibilidade, segue que

$$\mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$$

é visível. □

7.3 A Correspondência de Gröbner

Finalmente, após todas as considerações feitas e demonstrados os resultados preliminares, possuímos todos os ingredientes necessários para enunciar e provar o objetivo principal deste estudo, a correspondência de Gröbner.

Teorema 7.3 (Teorema da correspondência de Gröbner)**.** *Sejam X em $(\mathbb{C}^n, 0)$ um germe analítico, com $X_i \not\subset |\mathbb{Y}|$ e $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ uma subálgebra geométrica relativa à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ para qualquer arquivo analítico $\mathbb{Y}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Então a correspondência de Gröbner relativa à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ é uma bijeção:*

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftrightarrow & A \\ X & \longrightarrow & \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \\ X_A & \longleftarrow & A \end{array}$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que a correspondência é bem definida. Seja $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ a álgebra tangente associada a algum germe X em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e a algum arquivo $\mathbb{Y}$ tal que nenhuma componente X_i de X esteja contida em $|\mathbb{Y}|$. Por definição das álgebras geométricas, precisamos mostrar que A é visível em cada subálgebra visível B de $\mathbb{D}_Y$ contendo A. O Teorema de Echo afirma que $B = \mathbb{D}_{\mathbb{Z},\mathbb{Y}}$ para algum arquivo analítico $\mathbb{Z}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Observe que podemos escolher $\mathbb{Z}$ irredundante em relação à $\mathbb{Y}$. Agora suponha que exista uma componente X_1 contida em $|\mathbb{Y}| \cup |\mathbb{Z}|$, então como $X_1 \not\subset |\mathbb{Y}|$ temos que $X_1 \subset Z_1$ para alguma componente Z_1 de $\mathbb{Z}$. Neste ponto nosso objetivo é mostrar que $X_1 = Z_1$. Vamos considerar o arquivo

$$\mathbb{X} = \{X_1, \cdots, X_m\}$$

onde X_i, com $i = 1, \cdots, m$, são as componentes irredutíveis de X. Note que

$$\begin{array}{rcl} B \supset A & \Leftrightarrow & \mathbb{D}_{\mathbb{Z},\mathbb{Y}} \supset \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \\ & \Leftrightarrow & \mathbb{D}_{Z_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_k} \cap \mathbb{D}_{Y_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Y_l} \\ & \subset & \mathbb{D}_X \cap \mathbb{D}_{Y_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Y_l} \end{array}$$

Pelo Teorema de Seidenberg, $\mathbb{D}_{\mathbb{X}} = \bigcap \mathbb{D}_{X_i}$, então podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D}_{Z_1} & \supset & \mathbb{D}_{Z_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Z_k} \cap \mathbb{D}_{Y_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Y_l} \\ & \supset & \mathbb{D}_{X_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{X_m} \cap \mathbb{D}_{Y_1} \cap \cdots \cap \mathbb{D}_{Y_l} \\ & = & \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}. \end{array}$$

Assim, temos

$$\mathbb{D}_{Z_1} \supset \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}.$$

Pela Proposição 5.2, com $Z_1 \neq (\mathbb{C}^n, 0)$, Z_1 não está contido em pelo menos duas componentes de $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$, uma vez que $\mathbb{Z}$ é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$, $X_1 \subset Z_1$ com X_1 uma componente irredutível, resta mostrar que Z_1 não está contido em nenhum conjunto singular de alguma componente de $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$. De fato, a irredundância de $\mathbb{Z}$ garante que

$$Z \not\subset Sing(Y_i), \forall i.$$

Por outro lado, a irredutibilidade das componentes de $\mathbb{X}$, mais o fato de $X_1 \subset Z_1$, implicam que se Z_1 estivesse em algum conjunto singular seria

$$Z_1 \subset Sing(X_1)$$

donde

$$X_1 = Sing(X_1)$$

o que é absurdo. Portanto, ocorre que Z_1 é igual a uma componente de $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$, no caso, $Z_1 = X_1$.

Então podemos deletar X_1 de X e $\mathbb{Z}$ e adicionar a $\mathbb{Y}$ sem alterar a inclusão $\mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y},\mathbb{Z}}$.

Este argumento pode ser repetido até que nenhuma componente de X esteja contida em $|\mathbb{Y}| \cup |\mathbb{Z}|$. Então o Teorema de Narkisso implica que

$$A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y},\mathbb{Z}} \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y},\mathbb{Z}} = B$$

é visível. Portanto, $A = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ é geométrica em $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$.

Para mostrar a bijeção vamos mostrar primeiro a injetividade. De fato, como $X \neq (\mathbb{C}^n, 0)$ e X não possui componentes em $|\mathbb{Y}|$ temos pela contrapositiva da Proposição 5.2 que $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}} \not\subset \mathbb{D}_X$, portanto X é irredundante em relação à $\mathbb{Y}$. Segue da Proposição 5.3 que X é igual a variedade integral de A relativa à $\mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$, $X = X_A$.

Agora para mostrar a sobrejetividade, seja $A \subset \mathbb{D}_{\mathbb{Y}}$ uma subálgebra geométrica. Como A é visível, o Teorema de Echo nos dá um arquivo analítico $\mathbb{X}$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$ com nenhuma componente contida em $|\mathbb{Y}|$ e tal que $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$. Podemos escolher $\mathbb{X}$ irredundante em relação a $\mathbb{Y}$. Precisamos mostrar que $\mathbb{X}$ não possui componentes "embutidas", isto é, que X é igual ao arquivo analítico associado ao seu germe subjacente $X := |\mathbb{X}|$. Com efeito, se este não fosse o caso, a irredundância de $\mathbb{X}$ implicaria que $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$ fosse estritamente contido em $B = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$. Temos pelo Teorema de Narkisso que $B = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ é visível em $\mathbb{D}_Y$. Como A é geométrico, então é visível em B, além disso, sendo diferente de B existe uma subálgebra balanceada de B contendo A. Isso implica que A não pode conter um ideal não nulo de B. Por outro lado, sejam $D \in \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}}$, $E \in \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ e $f \in I_X$, então

$$[D, fE] = Df \cdot E + f \cdot [D, E] \in I_X \cdot \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}},$$

onde $I_X \cdot \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$ é um ideal de B, não nulo pois $X \neq (\mathbb{C}^n, 0)$, contido em A, o que nos dá uma contradição. Portanto, $\mathbb{X}$ é o arquivo de componentes irredutíveis de $X = |\mathbb{X}|$ e $A = \mathbb{D}_{\mathbb{X},\mathbb{Y}} = \mathbb{D}_{X,\mathbb{Y}}$. Desta maneira mostramos que a correspondência é uma bijeção. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Abraham Seidenberg : *Differential ideals in rings of finitely generated type.* Amer. J. Math 89 (1967), 22-42

[2] A. G. Aleksandrov, A. K. Tsikh : *Multi-logarithmic differential forms on complete intersections.* J. Siberian Federal University, 2:105–124, 2008.

[3] A. G. Aleksandrov : *Cohomology of a quasi-homogeneous complete intersection.* Math. USSR Izv. 26 (1986), 437-477

[4] B. V. Shabat : *Introduction to Complex Analysis, Part II, functions of several variables.* American Mathematical Society, 1991.

[5] Delphine Pol *Singularités libres, formes et résidus logarithmiques.* Thése de doctorat, Université d'Angers, 2016.

[6] D. G. Northcott: *Finite free resolutions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[7] D. Huybrechts, *Complex Geometry An Introduction*, Universitext, Springer, 2004.

[8] Herwig Hauser, Gerd Müller:*Analytic varieties versus integral varieties of Lie algebras of vector fields.* Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1992), 276-279

[9] Herwig Hauser, Gerd Müller *Affine Varieties and Lie Algebras of Vector Fields.* Manuscripta Math (1993), 309-337.

[10] H. Rossi: *Vector fields on analytic spaces.* Ann. of Math. (2) 78 (1963), 455-467

[11] H. Omori: *A method of classifying expansive singularities.* J. Diff. Geom. 15 (1980), 493-512

[12] I. Amemiya: *Lie algebras of vector fields and complex structures.* J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 545-549

[13] I. N. Hernstein : *Tópicos de Álgebra.* São Paulo: Editora da Univ. w Polígono, 1970.

[14] J.-P. Brasselet, J. Seade & T. Suwa, *Vector Fields on Singular Varieties*, Lecture Notes in Mathematics, Spring, 2009.

[15] J. Wahl : *Derivations, automorphisms and deformations of quasihomogeneous singularities.* Proe. Symp. Pure Math. 40, part 2 (1983), 613-624

[16] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27(2), p. 265-291, 1980.

[17] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald : *Introduction Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[18] R.C. Gunning : *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume I.* Wadsworth, 1990.

[19] T. Suwa: *Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations.* Actualits Mathmatiques, Hermann diteurs des Sciences et des Arts, 1998.