UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

GILSON LUIS FIRMINO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES E APLICAÇÕES.

VIÇOSA – MINAS GERAIS

2019

GILSON LUIS FIRMINO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES E APLICAÇÕES.

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte das exigências para obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa, campus Viçosa.

Orientador: Edson José Teixeira.

VIÇOSA – MINAS GERAIS

2019

GILSON LUIS FIRMINO

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES E APLICAÇÕES.

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte das exigências para obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa, campus Viçosa.

APROVADA: 13 de novembro de 2019.

Édir júnior F. Leite

Prof. Edir Junior Ferreira Leite

(UFV)

Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

Profa. Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão

(UFV)

Edson José Teixeira

Prof. Edson José Teixeira

(Orientador)

(UFV)

Resumo

A proposta deste trabalho é desenvolver um estudo sobre um tópico de Equações Diferenciais Ordinárias, mais especificamente os Sistemas de Equações Diferenciais Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes, apresentando a teoria necessária, métodos para resolução destas equações e modelagem e soluções de problemas práticos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Forma de Jordan, Aplicações.

Abstract

The purpose of this work is to develop a study on a topic of Ordinary Differential Equations, specifically the Equation Systems Homogeneous Differential Equations with Coefficients constants, with the necessary theory, methods for solving these equations and modeling and practical problem solving.

Keywords:Differential Equations, Jordan Form, Applications.

Agradecimentos

Primeiro lugar a Deus, que meu deu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis a que eu me deparei ao longo da minha graduação.

Aos meus pais, Antonio (in Memoriam) e Ana, eu devo a vida e todas as oportunidades que nela tive e que espero um dia poder lhes retribuir.

Ao meu orientador, professor Edson, por todo apoio e paciência ao longo da elaboração do meu projeto final.

É claro que não posso esquecer a minha família e amigos, porque foram eles que me incentivaram e inspiraram através de gestos e palavras a superar todas as dificuldades.

A todas as pessoas que de uma alguma forma me ajudaram a acreditar em mim eu quero deixar um agradecimento eterno, porque sem elas não teria sido possível

"Não é suficiente ter uma boa mente: o principal é usá-la bem". (René Descartes)

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Álgebra Linear apresenta um papel importante como ferramenta para diversas áreas do conhecimento. Dentro da Matemática isso é inquestionável por professores de matemática. Porém, entre estudantes, é bastante comum questionamentos a respeito da importância de determinados tópicos estudados ao logo do curso, em particular a Álgebra Linear. Muitos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática concluem sua graduação sem ter muita noção da potencialidade de determinadas ferramentas vistas ao longo do curso. Este trabalho tem, como um dos objetivos, agregar à formação do licenciando e mostrar a importância dos conceitos de Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias.

A modelagem de muitos problemas do cotidiano, utilizando as equações diferenciais ordinárias (EDO), é muito comum. Como exemplo de algumas aplicações mais conhecidas estão o problema da datação por carbono radioativo, a exploração de recursos renováveis, a dinâmica de populações, o de propagação de epidemias, a competição de espécies como, por exemplo, no sistema predador versus presa. Fora das Ciências Naturais, as equações diferenciais também encontram aplicação em economia, no sistema financeiro, no comércio, no comportamento de populações humanas, dentre outras.

O Capítulo 1 baseia-se em uma revisão e apresentação dos principais resultados estudados em um primeiro curso de Álgebra Linear. Uma vez que estes conceitos e resultados já são estudados pelos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, as demonstrações dos resultados, em sua maioria foram omitidas. No Capítulo 2 são estudados tópico de Álgebra Linear, que normalmente não são estudados por estudantes do curso de

Licenciatura em Matemática e por esta razão, os conceitos e resultados são estudados com mais detalhes. O tópico principal de estudo neste capítulo refere-se à Forma Canônica de Jordan, ferramenta essencial para resolução dos sistemas de equações diferenciais proposto neste trabalho. O Capítulo 3 está focado na obtenção de uma solução do sistema de equações diferenciais proposto. O problema de valor inicial, como poderá ser visto, apresenta única solução, que é dado em termos de uma exponencial de matriz, conceito este devidamente definido. Neste mesmo capítulo é apresentada a técnica para o cálculo da exponencial de uma matriz qualquer. Tal técnica permite a obtenção da solução do sistema de equações diferenciais proposto. Por fim, no Capítulo 4, são apresentados 3 problemas práticos das áreas das Ciências Naturais, em que as técnicas de resolução de sistemas de equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes serão aplicadas, evidenciando o uso da teoria de operadores lineares e Forma Canônica de Jordan. Este assunto é bastante trabalhado em Trabalhos de Conclusão de Curso, como por exemplo (ALMEIDA, 2011) e (GOMES, 2013).

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as principais definições, resultados e exemplos de conceitos que são estudados em um primeiro curso de Álgebra Linear. Os contéudos aqui apresentados podem ser encontrados em (COELHO; LOURENçO, 2007) e (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

Definição 1.1 *Um conjunto não vazio* $\mathbb{K}$ *é chamado de corpo se é munido de duas operações, denotadas por* $+$ *(adição) e* $\cdot$ *multiplicação, e além disso satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$, *para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{K}$*;*

(ii) $x + y = y + x$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{K}$;

(iii) existe um único elemento em $\mathbb{K}$, *denotado por* 0 *(zero), tal que*

$$x + 0 = 0 + x = x$$

para qualquer $x \in \mathbb{K}$

(iv) para cada x *em* $\mathbb{K}$, *existe um único elemento em* $\mathbb{K}$, *denotado por* $-x$ *(oposto) em* $\mathbb{K}$ *tal que*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0,$$

(v) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, *para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{K}$;

(vi) $x \cdot y = y \cdot x$, *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{K}$;

(vii) *existe um único elemento em* $\mathbb{K}$, *denotado por* 1 *(um), tal que*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{K}$;

(viii) *para cada* x *em* $\mathbb{K} - \{0\}$, *existe um único elemento em* $\mathbb{K}$, *denotado por* x^{-1} *ou* $\frac{1}{x}$, *tal que*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$$

(ix) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *e* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. *para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Definição 1.2 *Um conjunto não vazio* V *é um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$, *se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as operações de soma (+) e produto por escalar* $(\cdot)$, *em* V, *satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$;

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in V$;

(iii) *existe em* V *um vetor, denominado vetor nulo e denotado por* 0 *(zero), tal que* $0 + v = v, \forall v \in V$;

(iv) *a cada vetor* $v \in V$, *existe um vetor em* V, *denotado por* $-v$, *tal que* $v + (-v) = 0$;

(v) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$;

(vi) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$;

(vii) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u \cdot \alpha v$, $\forall u, v \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

(viii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$.

Exemplo 1.3 *O conjunto* $\mathbb{R}^n = \{v = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \in \mathbb{R}\}$, *para* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *com as operações de adição definida por*

$$u + v = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ *definida por*

$$\alpha \cdot u = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

é um espaço vetorial.

Um dos conceitos mais importantes envolvendo estrutura de espaço vetorial, é o conceito de base. Antes vejamos as seguintes definições

Definição 1.4 *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Diremos que*

(i) um vetor $v \in V$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

(ii) um conjunto $\mathcal{B} \subset V$ *é um conjunto gerador de* V *(ou que* $\mathcal{B}$ *gera* V*) se todo elemento de* V *for uma combinação linear de um número finito elementos de* $\mathcal{B}$*. Neste caso escrevemos* $[B] = V$*.*

Definição 1.5 *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V*. Diremos que*

(i) $\mathcal{B}$ *é linearmente independente (L.I.), se* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ *para* $v_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \cdots, n$*, então em* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$*, ou seja, a única combinação linear para o vetor nulo é a combinação linear trivial;*

(ii) o conjunto $\mathcal{B}$ *é chamado linearmente dependente (L.D.), se não for linearmente independente.*

Definição 1.6 *Seja* V *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Diremos que um subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* V *é uma base de* V *se*

(i) $\mathcal{B}$ *for um conjunto gerador de* V *e*

(ii) $\mathcal{B}$ *for linearmente independente.*

Proposição 1.7 *Seja* $V \neq \{0\}$ *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial finitamente gerado, ou seja, gerado por um conjunto finito de vetores não nulos. Então duas bases quaisquer de* V *têm o mesmo número de elementos.*

Definição 1.8 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*. Se* V *admite uma base finita, então chamamos de dimensão de* V *o número de elementos de tal base. Caso contrário diremos que a dimensão de* V *é infinita. Denotamos a dimensão de* V *sobre* $\mathbb{K}$ *por* $dim_{\mathbb{K}}V$*.*

Definição 1.9 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. Um subespaço vetorial* S *de* V *é um subconjunto não vazio de* V*, que por si só também possui estrutura de espaço vetorial, definido sobre o mesmo corpo* $\mathbb{K}$ *e com as mesmas operações definidas em* V*.*

Observação 1.10 *Se* V *é um espaço vetorial de dimensão finita e* W *é um subespaço de* V*, então* W *tem também dimensão finita e* $dimW \leq dimV$*. Além disso, se* $dimW = dimV$*, se, somente se,* $W = V$*.*

Exemplo 1.11 *O conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base para o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, a qual chamamos de base canônica do* $\mathbb{R}^2$*. De fato, o conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *é L.I., uma vez que a equação*

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

só é possível para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$*. E, além disso, o conjunto gera todo o* $\mathbb{R}^2$*, uma vez que qualquer* $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$*. Assim* $\{(1,0),(0,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^2$*. Portanto* $dim(\mathbb{R}^2) = 2$*.*

De modo geral, o conjunto $\{(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^n$*, chamada base canônica de* $\mathbb{R}^n$*.*

Proposição 1.12 *Seja* V *um espaço de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V *com* n *elementos. A seguintes afirmações são equivalentes*

(i) $\mathcal{B}$ *é uma base;*

(ii) $\mathcal{B}$ *é linearmente independente;*

(iii) $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V*.*

Proposição 1.13 *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *e seja* $\mathcal{B} \subseteq V$*. As seguintes afirmações são equivalentes* *(i)* $\mathcal{B}$ *é uma base de* V;

(ii) Cada elemento de V *se escreve de maneira única como combinação linear de* $\mathcal{B}$.

A proposição anterior afirma que dado $v \in V$, existem únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tais que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Devido a esta unicidade, é comum descrevermos o elemento v por meio destes valores, chamados coordenadas de v com respeito à base $\mathcal{B}$ e escrevemos

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

É claro que tais coordenadas dependem da base $\mathcal{B}$ escolhida e da ordem de seus elementos, por isso é importante deixar claro na notação qual base estamos considerando.

Proposição 1.14 *Um subconjunto não vazio* S *de um espaço vetorial* V *é um subespaço vetorial de* V *se, e somente se, satisfaz as condições:*

(i) A operação de adição definida em V *é fechada em* S*, ou seja,* $u + v \in S$, $\forall u, v \in S$;

(ii) A operação de multiplicação por escalar de V *é fechada em* S*, ou seja,* $\alpha u \in S$, $\forall u \in S$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

As vezes é conveniente escrever os elementos de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ como soma de elementos de dois (ou mais) subespaços. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Definição 1.15 *Sejam* W_1 *e* W_2 *subespaços de* V*. Definimos a interseção e a soma destes subespaços por*

(i) $W_1 \cap W_2 = \{v \in V; v \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$.

(ii) $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$.

Estes dois subconjuntos possuem estrutura de subespaços vetoriais, como podemos ver no próximo resultado.

Proposição 1.16 *Se V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e W_1, W_2 são subespaços de V, então*

(i) $W_1 \cap W_2$ *é um subespaço de* V;

(ii) $W_1 + W_2$ *é um subespaço de* V.

De maneira análoga podemos definir a união de dois subespaços vetoriais por

$$W_1 \cup W_2 = \{v \in V; v \in W_1 \text{ ou } v \in W_2\}.$$

Porém $W_1 \cup W_2$ nem sempre será subespaço vetorial de V. O conjunto $W_1 \cup W_2$ só terá estrutura de espaço vetorial quando $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

Proposição 1.17 *Sejam V um espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V, ambos de dimensão finita. Então*

$$\dim_{\mathbb{K}}(W_1 + W_2) = \dim_{\mathbb{K}} W_1 + \dim_{\mathbb{K}} W_2 - \dim_{\mathbb{K}}(W_1 \cap W_2).$$

Definição 1.18 *Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Diremos que V é soma direta de W_1 e W_2 se $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Neste caso, escrevemos $V = W_1 \oplus W_2$.*

Exemplo 1.19 *Observe que $\mathbb{R}^2 = [(1,0)] \oplus [(1,1)]$. Com efeito, para qualquer vetor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever $(a,b) = (a-b)(1,0) + b(1,1)$. Por outro lado,*

$$[(1,0)] \cap [(1,1)] = \{(0,0)\},$$

pois se $(a,b) \in [(1,0)] \cap [(1,1)]$, então $(a,b) = c(1,0)$ e $(a,b) = d(1,1)$, o que implica $a = b = 0$.

Proposição 1.20 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V. Então $V = W_1 \oplus W_2$ se, e só se, cada elemento $v \in V$ se escreve de maneira única como uma soma $v = w_1 + w_2$ com $w_i \in W_i$, $i = 1, 2$.*

Podemos generalizar a soma direta para vários subespaços vetoriais da seguinte maneira. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Para subespaços $W_1, W_2, \cdots, W_t$ de V, definimos

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_t = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_t : v_i \in W_i, i = 1, 2, \cdots, t\}.$$

Se $W_i \cap (W_1 + W_2 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_t) = 0$, para cada $i = 1, 2, \cdots, t$, então a soma $W_1 + W_2 + \cdots + W_t$ é chamada de soma direta de $W_1, W_2, \cdots, W_t$ e será indicada por $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$. Também diremos que o espaço V é a soma direta dos subespaços $W_1, W_2, \cdots, W_t$ se $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$.

Exemplo 1.21 *Sejam* $V = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ *e* $W = \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = -B\}$ *subespaços vetoriais de* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, em que* A^t *representa a transposta de* A*. Desta forma,* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = V \oplus W$*.*

O exemplo pode ser visto da seguinte forma: toda matriz de ordem n *pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma anti-simétrica. Vamos determinar de forma única duas matrizes,* A *e* B*, com* $A \in V$ *(simétrica) e* $B \in W$ *(anti-simétrica), tais que* $M = A+B$*, com* M *uma matriz qualquer de ordem* n*. Temos* $A^t = A$ *e* $B^t = -B$*, assim,*

$$\begin{cases} M = A + B \\ M^t = A^t + B^t = A - B \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos, $A = \frac{M+M^t}{2}$*. Agora, subtraindo as duas equações do sistema, temos,* $B = \frac{M-M^t}{2}$*.*

Dessa forma, determinamos de forma única duas matrizes A *e* B*, com* $A \in V$ *e* $B \in W$*, de modo que* $M = A + B$*, para* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*. Portanto* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$*.*

Definição 1.22 *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais sobre um mesmo corpo* $\mathbb{K}$*. Dizemos que uma aplicação* $T : V \to W$ *é uma transformação linear, se satisfaz*

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2),$$

para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ *e quaisquer vetores* $v_1, v_2 \in V$*.*

Exemplo 1.23 *A função* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, dada por* $T(x, y) = x + y$*, é uma transformação* *linear. De fato, se* $v_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos*

$$\begin{aligned} T(v_1 + \alpha v_2) &= T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) \\ &= (x_1 + \alpha x_2) + (y_1 + \alpha y_2) \\ &= (x_1 + y_1) + \alpha(x_2 + y_2) \\ &= T(v_1) + \alpha T(v_2). \end{aligned}$$

Podemos listar algumas propriedades, como por exemplo:

(i) $T(O_V) = O_W$, em que O_V e O_W são os vetores nulos de V e W, respectivamente.

(ii) De modo geral

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v2) + \cdots + \alpha_n T(v_n),$$

para quaisquer $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$.

(iii) Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então para todo $v \in V$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, escalares reais tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ e portanto

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n),$$

isto é, dado $v \in V$, o vetor $T(v)$ estará unicamente determinado se são conhecidas as imagens dos vetores de uma base $\mathcal{B}$.

Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita, com bases fixadas, então uma transformação linear $T : V \to W$ pode ser representada por uma matriz. A vantagem de uma tal representação é que muitos problemas associados às transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita podem ser resolvidos com a teoria das matrizes.

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, em que $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ bases de V e W, respectivamente. Como $\mathcal{B}$ é uma base de V, podemos determinar únicos escalares a_{ij}, com $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, tais que

$$T(v_i) = a_{1i} w_1 + \cdots + a_{ji} w_j + \cdots + a_{mi} w_m.$$

Tomemos agora v em V . Temos $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$, em que $k_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$.

Pela linearidade de T, segue que

$$\begin{aligned} T(v) &= k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \cdots + k_nT(v_n) \\ &= k_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + k_2(a_{12}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m) + \\ &\quad + \cdots + k_n(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{nm}w_m) \\ &= (a_{11}k_1 + \cdots + a_{1n}k_n)w_1 + (a_{21}k_1 + \cdots + a_{2n}k_n)w_2 + \\ &\quad + \cdots + (a_{m1}k_1 + \cdots + a_{mn}k_n)w_m. \end{aligned}$$

Logo,

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + \cdots + a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{m1}k_1 + \cdots + a_{mn}k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

Uma vez fixadas as bases $\mathcal{B}$ de V e $\mathcal{C}$ de W, os escalares a_{ij}, com $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$, são únicos. Desta forma, definimos a matriz da transformação linear, com respeito a tais bases, como sendo

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Temos então a expressão

$$[T(v)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

para qualquer v em V.

Exemplo 1.24 *Sejam* $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,2)\}$ *e* $\mathcal{C} = \{(3,0,1),(0,1,0),(1,2,0)\}$, *bases de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$, *respectivamente. Calculemos* $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, *em que* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *é definida por* $T(x,y) = (2x, x-y, 2y)$. *Como* T *é uma transformação linear de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3, [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, *é uma matriz* 3×2, *digamos*

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$T(1,1) = (2,0,2) = a_{11}(1,0,1) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(1,2,0)$$

e

$$T(0,2) = (0,-2,4) = a_{12}(1,0,1) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(1,2,0).$$

Equivalentemente,

$$\begin{cases} a_{11} + a_{31} = 2 \\ a_{21} + 2a_{31} = 0 \\ a_{11} = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a_{12} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = -2 \\ a_{12} = 4 \end{cases}.$$

Resolvendo esses sistemas lineares obtemos

$$a_{11} = 2,\ a_{21} = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 4,\ a_{22} = 6,\ a_{32} = -4.$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.25 *Considere as bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, bases de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V. Então, para qualquer $v \in V$, vale a igualdade*

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$$

em que $I : V \to V$ é a transformação linear identidade.

Demonstração: Como $\mathcal{B}$ é uma base de V, podemos escrever os vetores de $\mathcal{B}'$ como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, sendo esta combinação única.

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ w_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{cases}$$

Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Daí, $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{aligned} v &= b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n \\ &= b_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n) + b_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n) \\ &\quad + \cdots + b_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n) \\ &= (b_1a_{11} + b_2a_{12} + \cdots + b_na_{1n})v_1 + (b_1a_{21} + b_2a_{22} + \cdots + b_na_{2n})v_2 \\ &\quad + \cdots + (b_1a_{n1} + b_2a_{n2} + \cdots + b_na_{nn})v_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_1a_{11} + b_2a_{12} + \cdots + b_na_{1n} \\ b_1a_{21} + b_2a_{22} + \cdots + b_na_{2n} \\ \vdots \\ b_1a_{n1} + b_2a_{n2} + \cdots + b_na_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'}.$$

A matriz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, é chamada Matriz Mudança de Base da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$. A notação $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é apropriada, uma vez que esta matriz coincide com a matriz da transformação linear identidade $I : V \to V$, em que é tomada como base do domínio a base $\mathcal{B}'$ e a base do contradomínio a base $\mathcal{B}$. ■

Observação 1.26 *A matriz mudança de base é inversível e satisfaz* $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \left([I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$. *Além disso, se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensões finitas e se* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *são bases de* V *e* $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *são bases de* W*, então*

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \cdot [T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} \cdot [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}.$$

Exemplo 1.27 *Considere as bases* $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $\mathcal{C} = \{(1,1),(0,1)\}$ *para* $\mathbb{R}^2$. *Vamos encontrar a matriz de mudança da base* $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C}$. *Vamos escrever os* *elementos da base $\mathcal{C}$ como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{B}$. Temos que*

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) \text{ e } (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1).$$

Assim, a matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$ é dada por

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 1.28 *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear*

(i) o núcleo de T, denotado por $Nuc(T)$, é definido por

$$Nuc(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

(ii) a imagem de T, denotada por $Im(T)$, é definida como

$$Im(T) = \{T(v);\ v \in V\}.$$

Proposição 1.29 *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, e uma transformação linear $T : V \to W$. Então*

(i) o núcleo de $Nuc(T)$ é um subespaço vetorial de V. A imagem $Im(T)$ é subespaço vetorial de W.

(ii) T é injetora se, e somente se, $Nuc(T) = \{0\}$.

Observe que uma transformação linear $T : V \to W$ é sobrejetora se, e somente se, $ImT = W$.

Teorema 1.30 *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, com $dim_{\mathbb{K}}V$ finita, e uma transformação linear $T : V \to W$. Então,*

$$dim_{\mathbb{K}}V = dim_{\mathbb{K}}Nuc(T) + dim_{\mathbb{K}}Im(T).$$

Exemplo 1.31 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$\begin{cases} T(1,1) = (3,2,1) \\ T(0,-2) = (0,1,0) \end{cases}.$$

Vamos determinar o núcleo e a imagem de T. Primeiro, determinamos explicitamente a transformação T. Podemos verificar que $\{(1,1),(0,-2)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^2$. Todo elemento do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito de modo único como

$$(x,y) = x(1,1) + \left(\frac{-y+x}{2}\right)(0,2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,1) + (\frac{-y+x}{2})(0,2)) \\ &= xT(1,1) + (\frac{-y+x}{2})T(0,2) \\ &= x(3,2,1) + (\frac{-y+x}{2})(0,1,0) \\ &= (3x, \frac{-y+5x}{2}, x). \end{aligned}$$

Pela definição, um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo de T se ele é transformado no elemento neutro do $\mathbb{R}^3$ pela transformação T, ou seja

$$T(x,y) = (3x, \frac{-y+5x}{2}, x) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ \frac{-y+5x}{2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos $x = 0$ e $y = 0$. Assim $Nuc(T) = \{(0,0)\}$. Um elemento do contra-domínio $\mathbb{R}^3$ pertencerá à imagem de T se for da forma

$$\left(3x, \frac{-y+5x}{2}, x\right) = x\left(3, \frac{5}{2}, 1\right) + y\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

Assim $Im(T) = [(3,5/2,1),(0,-1/2,0)]$. Podemos ver facilmente que esse conjunto de geradores é L.I. e portanto $\{(3,5/2,1),(0,-1/2,0)\}$ é uma base para $Im(T)$.

Dois espaços vetoriais V e W sobre um corpo $\mathbb{K}$ são isomorfos, e escrevemos $V \cong W$, se existir uma transformação linear bijetora $T : V \to W$. Nesse caso, dizemos que T é um isomorfismo entre V e W.

Considere um espaço vetorial V de dimensão n qualquer e seja $\mathcal{B}$ uma base qualquer de V. Então a aplicação $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ que leva cada vetor $v \in V$ em seu vetor de coordenadas $[v]_{\mathcal{B}}$ é um isomorfismo entre V e $\mathbb{K}^n$.

Exemplo 1.32 *A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - 2y, y)$ é um isomorfismo. Para mostrar que T é injetora, basta determinar o núcleo de T. Um elemento do $\mathbb{R}^2$ pertence ao núcleo se*

$$T(x, y) = (x - 2y, y) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Assim $Nuc(T) = \{(0, 0)\}$ e portanto, T é injetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos

$$dim(\mathbb{R}^2) = dim(Nuc(T)) + dim(Im(T))$$

$$dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(T)).$$

Logo, como a dimensão da imagem de T é igual a dimensão do contradomínio, então T é sobrejetora. Portanto T é um isomorfismo.

Definição 1.33 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um operador linear é uma transformação linear $T : V \to V$.*

Para o caso de operadores lineares sobre um espaço vetorial de dimensão finita V, se $\mathcal{B}$ é uma base de V, escreveremos $[T]_{\mathcal{B}}$ ao invés de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, com o intuito de simplificar a notação. Se $dim_{\mathbb{K}}V = n$ e $\mathcal{B}$ é uma base de V, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ pertence a $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Muitas vezes é conveniente trabalhar em uma base $\mathcal{B}$ de V, de tal forma que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja a mais simples possível. Sob certas condições, seremos capazes de determinar uma base $\mathcal{B}$ de V, de tal forma que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Nem sempre isto será possível, como veremos mais adiante.

Definição 1.34 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, em que $dim_{\mathbb{K}}V = n < \infty$. Diremos que T é diagonalizável, se existir uma base $\mathcal{B}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.*

Seja $T : V \to V$ um operador linear diagonalizável. Desta forma, existe uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ tenha a forma diagonal, ou seja,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots n\}$.

Definição 1.35 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existir um vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso, o vetor não nulo v é chamado de autovetor de T, associado ao autovalor λ.*

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de um operador linear $T : V \to V$. Considere o subconjunto de V definidor por

$$Aut_T(\lambda) = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}.$$

Este conjunto tem estrutura de espaço vetorial e portanto é um subespaço vetorial de V. Tal subespaço é chamado de autoespaço de V associado ao autovalor λ de T.

Definição 1.36 *Se $dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$, então o operador linear $T : V \to V$ será diagonalizável se existir uma base $\mathcal{B}$ de V formada por autovetores de T.*

Considere $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T. Daí, existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda I_n - T)(v) = 0$, onde $I_n : V \to V$ é o operador linear identidade em V. Segue então que λ é autovalor de T se, e somente se $Nuc(\lambda I_n - T) \neq \{0\}$. Mais ainda, um vetor não nulo $v \in V$ é um autovetor de T, associado ao autovalor λ se, e somente se, $v \in Nuc(\lambda I_n - T)$.

Definição 1.37 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear e $\mathcal{B}$ uma base de V. O polinômio característico de T é definido por*

$$p_T(x) = det([xI_n - T]_{\mathcal{B}}).$$

Observação 1.38 *(i) Se T é um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita, então $Nuc(\lambda I_n - T) \neq \{0\}$, se somente se,* $\det([\lambda I_n - T]) = 0$. *Desta forma,* *um escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *é um autovalor de* T *se, e somente se,* λ *é raiz do polinômio característico de* T.

(ii) Seja V *um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial de dimensão* $n > 1$ *e seja* $T : V \to V$*. Como* $\mathbb{C}$ *é um corpo algebricamente fechado, o polinômio característico de* T *será da forma*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_t)^{r_t},$$

com $\lambda_1 \dots \lambda_t \in \mathbb{C}$ *e* $r_i \geqslant 1$*. Portanto,* T *possui autovalores, não necessariamente distintos.*

Teorema 1.39 *Seja* $T : V \to V$ *um operador linear, em que* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita e sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$*,* $t \geqslant 1$ *autovalores de* T*, distintos dois a dois.*

(i) Se $v_1 + v_2 + \dots + v_t = 0$ *com* $v_i \in Aut_T(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, t$*, então* $v_i = 0$ *para cada* i*.*

(ii) Para cada $i = 1, 2, \dots, t$*, seja* $\mathcal{B}_i$ *um conjunto linearmente independente contido em* $Aut_T(\lambda_i)$*. Então* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_t$ *é linearmente independente.*

Demonstração:

(i) Vamos mostrar por indução sobre $t \geqslant 1$. Se $t = 1$ não há nada a provar. Seja agora $t > 1$ e suponha que o resultado vale para $j < t$ e vamos provar para $j = t$. Seja

$$v_1 + v_2 + \dots + v_t = 0, \tag{1.1}$$

com $v_i \in Aut_T(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, t$. Calculando T na expressão (1.1) temos

$$0 = T(0) = T(v_1 + v_2 + \dots + v_t) = T(v_1) + T(v_2) + \dots + T(v_t)$$

e portanto,

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_t v_t. \tag{1.2}$$

Multiplicando a equação (1.2) por λ_1 e subtraindo (1.2), obtemos:

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + (\lambda_1 - \lambda_3)v_3 + \dots + (\lambda_1 - \lambda_t)v_t.$$

Pela hipótese de indução, $(\lambda_1 - \lambda_i)v_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_i$ se $i \neq 1$ temos $v_i = 0$ para cada $i = 2, 3, \ldots, t$. Substituindo estes valores em (1.1) temos $v_1 = 0$. Portanto $v_1 = \cdots = v_n = 0$. Pelo Princípio de Indução Finita, segue o resultado.

(ii) Para cada $i = 1, 2, \ldots, t$ escreva $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in_i}\}$. Vamos mostrar que $\{v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, \ldots, v_{t1}, \ldots, v_{tn_t}\}$ é linearmente independente. Para tanto considere a combinação linear

$$\alpha_{11}v_{11} + \cdots + \alpha_{1n_1}v_{1n_1} + \cdots + \alpha_{t1}v_{t1} + \cdots + \alpha_{tn_t}v_{tn_t} = 0,$$

em que $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$, para todo i e j. Como $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}v_{ij} \in Aut_T(\lambda_i)$para cada i, segue do item anterior que $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}v_{ij} = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, t$. Como $\mathcal{B}_i$ é um conjunto linearmente independente, teremos $\alpha_{ij} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, t$ e $j = 1, 2, \ldots, n_i$ e portanto, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$ é linearmente independente.

∎

Definição 1.40 *Seja λ um autovalor de um operador linear $T : V \to V$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e suponhamos $p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$, com $q(\lambda) \neq 0$, seja o polinômio característico de T. O número m é chamado de multiplicidade algébrica de λ e denotamos por $ma(\lambda)$. Chamamos multiplicidade geométrica de λ à dimensão do subespaço $Aut_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.*

Proposição 1.41 *Seja λ um autovalor de $T : V \to V$, em que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$*

Demonstração: Seja $W = Aut_T(\lambda)$ e assuma $dim_{\mathbb{K}}W = s$. Sejam $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ uma base de W e $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_s, w_{s+1} \ldots, w_n\}$ uma base de V contendo $\mathcal{B}'$. Como

$T(w_i) = \lambda w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$ podemos escrever $[T]_{\mathcal{B}}$ na forma de blocos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array} \right),$$

em que $A_1 \in \mathbb{M}_{s\times(n-s)}(\mathbb{K})$ e $A_2 \in \mathbb{M}_{(n-s)\times(n-s)}(\mathbb{K})$.

Desta forma,

$$p_T(x) = det(xI_n - [T]_{\mathcal{B}}) = (x-\lambda)^s.det(xI_{n-s} - A_2).$$

Por definição temos $ma(\lambda)$ é o maior índice j tal que $(x-\lambda)^j$ divide $p_T(x)$. Portanto, $mg(\lambda) = s \leq ma(\lambda)$, como queríamos. ■

Teorema 1.42 *Seja um operador linear $T : V \to V$, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$, os seus autovalores distintos. As seguintes afirmações são equivalentes*

(i) T é diagonalizável;

(ii) o polinômio característico é dado por $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}\cdot(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_t)^{n_t}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, para cada $i = 1, 2, \cdots, t$;

(iii) $dim_{\mathbb{K}}V = \sum\limits_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}}Aut(\lambda_i)$.

CAPÍTULO 2

FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Vimos anteriormente condições necessárias e suficientes para que um operador linear, sobre um espaço vetorial de dimensão finita, seja diagonalizável. Porém, nem todos os operadores lineares são diagonalizáveis, ou seja, nem sempre existe uma base de um espaço vetorial V, formada por autovetores de um operador linear $T : V \to V$, tornando desta forma a matriz deste operador, com respeito a esta base, diagonal. Entretanto, como veremos a seguir, é possível obter uma base de um espaço vetorial de tal forma que o operador linear possui sua matriz, com respeito a esta base, próxima de uma matriz diagonal. As referência utilizadas neste capítulo foram (COELHO; LOURENçO, 2007) e (HOFFMAN; KUNZE, 1979).

2.1 Subespaços T-invariantes

Definição 2.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, em que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Dizemos que W é um subespaço T-invariante se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.*

Observação 2.2 *(i) Os subespaços $Nuc(T)$ e $Im(T)$ são T-invariantes.*

(ii) Se λ for um autovalor de T, então $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V. De fato, se $v \in Aut_T(\lambda)$ então $T(v) = \lambda v \in Aut_T(\lambda)$.

(iii) Se W é um subespaço T-invariante, então a restrição de T a W é um operador linear.

Sejam $T : V \to V$ um operador linear em que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $W \subseteq V$ um espaço T-invariante de V, de dimensão de m, com $1 \leq m < n$. Considere $\mathcal{B}'$ uma base de W e estenda a uma base $\mathcal{B}$ de V. A restrição de T a W, isto é, $T' : W \to W$ dada por $T'(w) = T(w), \forall w \in W$, é um operador linear. Daí a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é escrita da seguinte maneira:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T']_{\mathcal{B}'} & A \\ O & B \end{pmatrix}$$

onde O indica a matriz nula em $\mathbb{M}_{(n-m)\times m}(\mathbb{K})$, $A \in \mathbb{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$.

Exemplo 2.3 *Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, x, y)$. Se $W = [e_1, e_2]$, então $T(W) = [e_2, e_3]$ e assim W não é um subespaço T-invariante de $\mathbb{C}^3$. Se $W' = [e_2, e_3]$, teremos então $T(W') = [e_3] \subseteq W'$ e segue assim que W' é um subespaço T-invariante de V.*

2.2 Polinômios Minimais de Operadores e o Teorema de Cayley-Hamilton

Definição 2.4 *O polinômio minimal de um operador linear $T : V \to V$, em que V é um K-espaço vetorial de dimensão finita, é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T)(v) = 0$, para todo $v \in V$.*

Teorema 2.5 (Cayley-Hamilton) *Se V é um K-espaço vetorial de dimensão finita, um operador linear $T : V \to V$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$, isto é, $p_T(T) = 0$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base de V e escreva $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Considere $A' = xI_n - A$ e portanto $p_T(x) = det(A')$. Por fim, seja $M = adj(A') = (m_{ij})$ a matriz adjunta de A'. Os elementos m_{ij} são cofatores de $xI_n - A$ e portanto, representam polinômios de x de grau no máximo $n - 1$. Escreva para cada i, j, tal polinômio como

$$m_{ij} = m_{ij}^{(0)}x^0 + m_{ij}^{(1)}x^1 + \cdots + m_{ij}^{(n-1)}x^{n-1}$$

$$\begin{aligned} M &= (m_{ij}) = \Big(m^{(0)} + m_{ij}^{(1)}x + \cdots + m_{ij}^{(n-1)}x^{n-1}\Big) \\ &= \Big((m^{(0)})1 + (m_{ij}^{(1)})x + \cdots + (m_{ij}^{(n-1)})x^{n-1}\Big) \\ &= M_{ij}^{(0)} + M^{(1)}x + \cdots + M^{(n-1)}x^{n-1}. \end{aligned}$$

Escreva $p_T(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n$. Note que, $A \cdot adj(A) = det(A) \cdot I_n$, para qualquer matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Em particular, para A', temos

$$M \cdot A' = adj(A') \cdot A' = det(A')I_n = p_T(x)I_n$$

$$(M^{(0)} + M^{(1)}x + \cdots + M^{(n-1)}x^{n-1})(xI_n - A) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + x^n I_n.$$

$$\begin{cases} -M^{(0)}A &= a_0I_n \\ M^{(0)} - M^{(1)}A &= a_1I_n \\ M^{(1)} - M^{(2)}A &= a_2I_n \\ \vdots \\ M^{(n-2)} - M^{(n-1)}A &= a_{n-1}I_n \\ M^{(n-1)} &= I_n \end{cases}.$$

Multiplicando as equações por, $I_n, A, A^2, \cdots, A^n$, obtemos

$$\begin{cases} -M^{(0)}A &= a_0I_n \\ M^{(0)}A - M^{(1)}A^2 &= a_1A \\ M^{(1)}A^2 - M^{(2)}A^3 &= a_2A^2 \\ \vdots \\ M^{(n-2)}A^{n-1} - M^{(n-1)}A^n &= a_{n-1}A^{n-1} \\ M^{(n-1)}A^n &= A^n \end{cases}.$$

Somando as equações acima,obtemos

$$0 = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
p_T(T)(v) &= \left(a_0I_n + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_{n-1}T^{n-1} + T^n\right)(v) \\
&= a_0I_n(v) + a_1A(v) + a_2A^2(v) + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}(v) + A^n(v) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

para todo $v \in V$. ∎

Proposição 2.6 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então os polinômios característico e minimal de T têm as mesmas raízes a menos de multiplicidade.*

Demonstração: Sejam $p_T(x)$ e $m_T(x)$ os polinômios característico e minimal de T, respectivamente. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostraremos que $p_T(\lambda) = 0$ se, e somente se, $m_T(\lambda) = 0$. Suponhamos que $p_T(\lambda) = 0$, ou seja, λ é autovalor de T. Daí, existe $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$T^i(v) = \lambda^i v.$$

Escreva $m_T(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = a_0 + a_1x + \cdots + a_m x^m$. Desta forma, pela definição de polinômio minimal

$$
\begin{aligned}
0 = m_T(T)(v) &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i T^i\right)(v) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i(v) \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i(v) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i\right) v.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\sum_{i=0}^{m} a_i\lambda^i = 0$, pois $v \neq 0$. Logo, $m_T(\lambda) = 0$.

Suponhamos agora que $m_T(\lambda) = 0$. Daí, existe um polinômio $q(x)$ tal que $m_T(x) = (x - \lambda)q(x)$. Uma vez que $m_T(x)$ é o polinômio minimal e o grau de q é estritamente menor do que o grau de $m_T(x)$, segue que $q(T) \neq 0$. Assim, existe $u \in V$ de tal forma que $q(T)(u) \neq 0$. Considere $v = q(T)(u)$. Assim,

$$0 = m_T(T)(u) = (T - \lambda I)(q(T)(u)) = (T - \lambda I)(v)$$

e desta forma v é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Isto garante que $p_T(\lambda) = 0$.

■

2.3 Operadores Nilpotentes

Definição 2.7 *Um operador linear $T : V \to V$ é nilpotente se existe $m \geq 1$ tal que $T^m = 0$. Se $T^m = 0$ e $T^n \neq 0$, para todo $1 \leq n < m$, diremos que m é o índice de nilpotência de T.*

Proposição 2.8 *Se $T : V \to V$ é um operador linear nilpotente e $dim(V) \geq 1$, então $Nuc(T) \neq \{0\}$.*

Demonstração: Seja $m \geq 1$ o índice de nilpotência de T. Daí, $T^m(w) = 0$, $\forall w \in V$. Mais ainda, existe $v \in V$ tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$ e $T^m(v) = 0$. Assim,

$$0 = T^m(v) = T(T^{m-1}(v)).$$

Logo, $T^{m-1}(v) \in Nuc(T)$. Como $T^{m-1}(v) \neq 0$, segue que $Nuc(T) \neq \{0\}$. ■

Teorema 2.9 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, em que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador inversível. Tal decomposição é essencialmente única.*

Demonstração: Observe que $Nuc(T^i) \subset Nuc(T^{i+1})$, para qualquer $i \geq 1$. De fato, seja $w \in Nuc(T^i)$. Assim, $T^i(w) = 0$. Logo,

$$T^{i+1}(w) = T(T^i(w)) = T(0) = 0,$$

ou seja, $w \in Nuc(T^{i+1})$. Além disso, $Nuc(T^i)$ é T-invariante para qualquer $i \geq 1$. Desta forma,

$$Nuc(T) \subseteq Nuc(T^2) \subseteq Nuc(T^3) \subseteq \cdots \subseteq Nuc(T^l) \subseteq \cdots \subseteq V.$$

Como $dimV < \infty$, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$Nuc(T^m) = Nuc(T^{m+i}), \forall i \geq 0.$$

Seja $m \in \mathbb{N}^*$ o menor natural com a propriedade anterior. Considere os espaços $W_1 = Nuc(T^m)$ e $W_2 = Im(T^m)$. Tais espaços são T-invariantes. De fato, seja $w \in W_1$. Observe que

$$0 = T^{m-1}(w) = T^m(T(w)),$$

ou seja, $T(w) \in Nuc(T^m)$. Logo, W_1 é T-invariante. Considere agora $w \in W_2$. Daí, existe $v \in V$ tal que $w = T^m(v)$ e desta forma,

$$T(w) = T^{m+1}(v) = T^m(T(v))$$

Logo, $T(w) \in Im(T^m) = W_2$. Logo W_2 é T-invariante.

Verifiquemos que V é soma direta de W_1 e W_2, ou seja, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ e $W_1 + W_2 = V$.

(i) Seja $v \in W_1 \cap W_2$. Como $v \in W_1 = Nuc(T^m)$, segue que $T^m(v) = 0$. Por outro lado, $v \in Im(T^m)$, ou seja, existe $v' \in V$ tal que $T^m(v') = v$. Logo,

$$0 = T^m(v) = T^m(T^m(v')) = T^{2m}(v').$$

Desta forma, $v' \in Nuc(T^{2m}) = Nuc(T^m) = W_1$. Assim, $v = T^m(v') = 0$. Portanto, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(ii) Considere o operador linear $T^m : V \to V$. Pela Proposição 1.17

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Como $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, temos

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Pelo teorema do Núcleo e da Imagem

$$\dim V = \dim(Nuc(T^m)) + \dim(Im(T^m)) = \dim W_1 + \dim W_2$$

$$\dim V = \dim(W_1 + W_2).$$

Logo, $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial de V, com $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$, ou seja, $W_1 + W_2 = V$.

Portanto, $W_1 \oplus W_2 = V$.

Considere agora as aplicações lineares $T_1 = T|_{W_1}$ e $T_2 = T|_{W_2}$. Vamos mostrar que $T = T_1 \oplus T_2$, ou seja, $T(v) = T_1(w_1) + T_2(w_2)$, com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ e $v = w_1 + w_2$, em que T_1 é nilpotente e T_2 é inversível.

(i) Seja $w_1 \in W_1$. Daí, $T_1^m(w_1) = T^m(w_1) = 0$, para todo $w_1 \in W_1$. Logo,

$$T_1^m \equiv 0,$$

e consequentemente, T_1 é nilpotente.

(ii) Seja $w_2 \in W_2$ tal que $T_2(w_2) = 0$. Como $w_2 \in W_2 = Im(T^m)$, existe $v' \in V$ tal que $T^m(v') = w_2$. Mais ainda,

$$0 = T_2(w_2) = T_2(T^m(v')) = T(T^m(v')) = T^{m+1}(v').$$

Daí, $v' \in Nuc(T^{m+1}) = Nuc(T^m) = W_1$. Logo, $w_2 = T^m(v') = 0$. Portanto, T_2 é injetora. Uma vez que T_2 é operador linear entre espaços de dimensão finita, com $Nuc(T_2) = \{0\}$, segue que T_2 é sobrejetora, e consequentemente, T_2 é inversível.

Vamos mostrar a unicidade desta decomposição. Suponhamos que existam U_1 e U_2 subespaços de V que são T-invariantes tais que $T_1' = T|_{U_1}$ é nilpotente com índice de nilpotência m' e $T_2' = T|_{U_2}$ é inversível.

Seja $\overline{m} = max\{m, m'\}$. Seja $w_1 \in W_1 \subset V = U_1 \oplus U_2$. Daí, $w_1 = u_1 + u_2$, como $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\overline{m}}(w_1) = T^{\overline{m}}(u_1 + u_2) = T^{\overline{m}}(u_1) + T^{\overline{m}}(u_2) \\ &= (T_1')^{\overline{m}}(u_1) + (T_2')^{\overline{m}}(u_2) \\ &= (T_2')^{\overline{m}}(u_2). \end{aligned}$$

Como $(T_2') = T|_{U_2}$ é inversível, segue que $(T_2')^{\overline{m}}$ é inversível. Logo $Nuc(T_2')^{\overline{m}} = \{0\}$, garantindo que $u_2 = 0$. Daí, $w_1 = u_1 \in U_1$, ou seja, $W_1 \subset U_1$. Analogamente mostra-se que $U_1 \subset W_1$. Portanto, $U_1 = W_1$.

Considere agora $w_2 \in W_2 = Im(T^m)$. Daí, existe $v \in V$ tal que $w_2 = T^m(v)$. Além disso, $v = u_1 + u_2$, em que $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$. Desta forma,

$$w_2 = T^m(v) = T^m(u_1 + u_2) = T^m(u_1) + T^m(u_2)$$

$$w_2 = T^m(u_2),$$

uma vez que $u_1 \in Nuc(T^m) = W_1 = U_1$. Uma vez que U_2 é T-invariante, obtemos $W_2 = T^m(u_2) \in U_2$. Logo, $W_2 \subset U_2$. Seja $u_2 \in U_2 \subset V$. Uma vez que $V = W_1 \oplus W_2$, segue que $u_2 = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Assim,

$$w_1 = u_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Logo, $w_1 = 0$ e assim $u_2 = w_2 \in W_2$. Portanto, $U_2 = W_2$ Desta forma, segue a unicidade.
■

Proposição 2.10 *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente, com índice de nilpotência $m \geq 1$ e V um espaço vetorial de dimensão finita. Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então*

(i) O conjunto $\{v, T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ é L.I.

(ii) Existe um espaço T-invariante $W \subset V$ tal que $V = U + V$, em que

$$U = [v, T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)].$$

Demonstração:

(i) Suponhamos que $\{v, T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ seja $L.D.$ Daí, existem escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_0 v + \alpha_1 T(v), \cdots, \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0.$$

Seja $l = min\{t; \alpha_t \neq 0\}$. Logo,

$$\alpha_l T^l(v) + \alpha_{l+1} T^{l+1}(v), \cdots, \alpha_{m-1} T^{m-1}(v) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T^{m-1}(v) &= T^{m-l+1}(T^l(v)) \\
&= T^{m-l+1}\left(-\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_l}T^{l+1}(v) - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_l}T^{m-1}(v)\right) \\
&= -\frac{\alpha_{l+1}}{\alpha_l}T^{m-l+1}(T^{l+1}(v)) - \cdots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_l}T^{m-l+1}(T^{m-1}(v)) \\
&= -\sum_{i=l+1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_l}T^{m-l+1}(T^i(v)) \\
&= -\sum_{i=l+1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_l}T^{(m+i)-(l+1)}(v).
\end{aligned}$$

Note que $l < m-1$. De fato, se $l = m-1$, então $\alpha_{m-1}T^{m-1}(v) = 0$, com $\alpha_{m-1} \neq 0$ e $T^{m-1}(v) \neq 0$, absurdo. Logo, $l < m-1$ que equivale a $l+1 < m$. Daí,

$$T^{m-1}(v) = -\sum_{i=l+1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_l}T^{(m+i)-(l+1)}(v) = 0,$$

uma vez que $T^{m+j}(v) = 0$, $\forall j \geq 0$. Isso é um absurdo, visto que estamos supondo $T^{m-1}(v) \neq 0$. Portanto, $\{v, T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ é $L.I.$

(ii) O subespaço $U = [v, T(v), \cdots, T^{m-1}(v)]$ é T-invariante. Com efeito, se $u \in U$, então existem escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}(v) \\
T(u) &= T(\alpha_0 v + \alpha_1 T(v) + \cdots + \alpha_{m-1}T^{m-1}(v)) \\
&= \alpha_0 T(v) + \alpha_1 T^2(v) + \cdots + \alpha_{m-2}T^{m-1}(v) + \alpha_{m-1}T^m(v) \\
&= \alpha_0 T(v) + \alpha_1 T^2(v) + \cdots + \alpha_{m-2}T^{m-1}(v) \in U.
\end{aligned}$$

Logo, U é T-invariante. A demonstração deste item é feita por indução sobre o índice de nilpotência m. O caso $m = 1$ é trivial pois, neste caso, $T^m(v) = T(v) = 0$, para todo $v \in V$. Desta forma, basta tomar $U = \{0\} = [\emptyset]$e $W = V$ e temos $V = U \oplus W$. Suponha que $m > 1$ e que o resultado seja válido para todos os operadores nilpotentes de índices $m-1$. Seja $T : V \to V$ um operador nilpotente com índice de nilpotência m. O subespaço vetorial $Im(T)$ é T-invariante, visto que $Im(T) \subset V$. Além disso, $\tilde{T} = T|_{Im(T)}$ é um operador nilpotente, com índice de nilpotência $m-1$. De fato, seja $u \in Im(T)$. Assim, existe $v \in V$ tal que $u = T(v)$. Logo

$$\tilde{T}^{m-1}(u) = T^{m-1}(u) = T^{m-1}(T(v))$$

$$\tilde{T}^{m-1}(u) = T^{m}(v) = 0.$$

Se $j < m-1$, temos $j+1 < m$. Assim, existe $v \in V$ tal que

$$T^{j+1}(v) \neq 0$$

$$T^{j}(T(v)) \neq 0.$$

Desta forma, $w = T(v) \in Im(T)$ e $\tilde{T}^{m-2}(w) \neq 0$. Logo, $\tilde{T}$ tem índice de nilpotência $m-1$.

Pela hipótese de indução, temos

$$Im(T) = U_1 \oplus W_1, \text{ com } U_1 = [T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)],$$

em que W_1 é $\tilde{T}-$invariante e consequentemente é $T-$invariante. Considere o subespaço vetorial $W_2 = \{w \in V,\ T(w) \in W_1\}$. Vamos mostrar algumas afirmações:

Afirmação 1: $V = U + W_2$. De fato, seja $u \in V$. Assim $T(u) \in Im(T) = U_1 \oplus W_1$. Daí, $T(u) = u' + w'$, em que $u' \in U_1$ e $w' \in W_1$. Segue que $u' = T(u'')$, em que $u'' \in U$ e desta forma $T(u) = T(u'') = w'$. Logo,

$$T(u - u'') = T(u) - T(u'') = w' \in W_1.$$

Pela definição de W_2, segue que $u - u'' \in W_2$. Logo,

$$u = u'' + (u - u'') \in U + W_2,$$

e segue a igualdade.

Afirmação 2: Seja $u \in U \cap W_1$. Observe que $T(u) \in U_1 \cap W_1$, uma vez que U_1 e W_1 são subespaços $T-$invariantes de V. Como $Im(T) = U_1 \oplus W_1$, segue que $T(u) = 0$. Por outro lado, $u \in U$, ou seja, existem escalares α_0, α_1, $\cdots$, α_{m-1} tais que

$$u = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i T^i(v).$$

Logo,

$$0 = T(v) = T\left(\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i T^i(v)\right) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i T^{i+1}(v) = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_i T^{i+1}(v),$$

uma vez que $T^m(v) = 0$. Mais ainda, como o conjunto $\{T(v), T^2(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ é L.I., temos $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-2} = 0$. Portanto, $u = \alpha_{m-1}T^{m-1}(v) \in U_1$. Logo, $u \in U_1 \cap W_1 = \{0\}$ e segue a afirmação.

Da segunda afirmação, temos $(U \cap W_2) \cap W_1 = \{0\}$. Observe que $W_1 \subset W_2$, uma vez que se $w \in W_1$, utilizando o fato de que W_1 é $T-$invariante, temos $T(w) \in W_1$, o que garante pela definição de W_2, que $w \in W_2$. Ainda pela afirmação 2, segue que $(U \subset W_2) \subset W_2$. Logo, existe um subespaço W_3 tal que

$$W_2 = (U \cap W_2) \oplus W_1 \oplus W_3. \tag{2.1}$$

Tome $W = W_1 \oplus W_3$. Como $W \subset W''$ e $W \cap (U \cap W_2) = \{0\}$, temos $U \cap W = \{0\}$. Pela afirmação 1 e pela expressão de W_2 em (2.1), temos $V = U + W_2$ e $W_2 = (U \cap W_2) \oplus W$. Logo, se $v \in V$, então $v = u + (h + w)$, com $u \in U$, $h \in (U \cap W_2)$ e $w \in W$. Assim, $v = (u + h) + w$, com $(u + h) \in U$ e $w \in W$ e desta forma, $V = U + W$. Portanto $V = U \oplus W$. ∎

Observação 2.11 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, com V espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$.*

(i) Se T é nilpotente com índice $m \geq 1$, então $m \leq n$. De fato, existe $v \in V$ tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$. Pelo teorema anterior $\{v, T(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ é l.i. Logo, $m \leq n$.

(ii) Se $m = n$, teremos $\mathcal{B} = \{v, T(v), \cdots, T^{m-1}(v)\}$ uma base para V. Desta forma,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Se $p_T(x) = (x - \lambda)^m$ é o polinômio característico de T, então pelo Teorema de Cayley-Hamilton, segue que

$$0 = p_T(T) = (T - \lambda I)^m.$$

Logo, $(T - \lambda I)$ é nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n, então existe $\mathcal{B}$ base para V tal que

$$[T - \lambda I]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definição 2.12 *Um bloco de Jordan $r \times r$ em λ é uma matriz $J_r(\lambda) \in \mathbb{M}_r(\mathbb{R})$ tal que $J_r(\lambda) = (a_{ij})$ com*

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 1, & i = j + 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}.$$

Logo,

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.13 *Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos $t, m_1, \cdots, m_t$ e vetores $v_1, v_2, \cdots, v_t \in V$ tais que*

(i) $m = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_t$.

(ii) O conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1), v_2, T(v_2), \cdots, T^{m_2-1}(v_2), \cdots, v_t, T(v_t), \cdots, T^{m_t-1}(v_t)\}$ *é uma base de V.*

(iii) $T^{m_i}(v_i) = 0$, *para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$.

(iv) Se S for um operador linear em W de dimensão finita, então os inteiros $t, m_1, \cdots, m_t$ associados a S e a T são iguais se, e somente se, existir um isomorfismo $\phi : V \to W$ com

$$\phi T \phi^{-1} = S.$$

Demonstração: Como $T^{m-1} \neq 0$. Logo, existe $v_1 \in V$ tal que $T^{m-1}(v_1) \neq 0$. Pela Proposição 2.10, o conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1)\}$ é $L.I.$ e $V = W_1 \oplus W_2'$, em que $W_1 = [v_1, T(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1)]$ e W_1 e W_2' são T-invariantes.

Se $W_1 = V$, o procedimento acaba. Se $W_1 \neq V$, tome $T_2 = T|_{W_2'} : W_2' \to W_2'$. Temos que T_2 é um operador linear nilpotente, com índice $m_2 \leq m_1 = m$. Daí, existe $v_2 \in W_2'$ tal que $T^{m_2-1}(v_2) \neq 0$. Pela Proposição 2.10, o conjunto $\mathcal{B} = \{v_2, T(v_2), \cdots, T^{m_2-1}(v_2)\}$ é L.I. e $W_2' = W_2 \oplus W_3'$, em que $W_2 = [v_2, T(v_2), \cdots, T^{m_2-1}(v_2)]$ e W_3' é T_2-invariante. Como $dimV < \infty$, o procedimento acima pode ser repetido um número finito de vezes, ou seja, existem números positivos, $t, m_1, m_2, \cdots, m_t$ e vetores $v_1, v_2, \cdots, v_t$ tais que $m = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_t$, os conjuntos

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, T(v_1), T^2(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{v_2, T(v_2), T^2(v_2), \cdots, T^{m_2-1}(v_2)\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{B}_t = \{v_t, T(v_t), T^2(v_t), \cdots, T^{m_t-1}(v_t)\}$$

são $L.I.$. e além disso

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \cdots \oplus W_t,$$

em que $W_i = [v_i, T(v_i), \cdots, T^{m_i-1}(v_i)]$. Logo, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$ é uma base para V. Também, pela construção, $T^{m_i}(v_i) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, t\}$.

Para a demonstração do último item, considere primeiramente $S : W \to W$ operador linear nilpotente. Suponha que os inteiros $t, m_1, m_2, \cdots, m_t$ associados aos operadores S e T são iguais. Daí,

$$\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1), \cdots, v_t, T(v_t), \cdots, T^{m_t-1}(v_t)\}$$

é base de V e

$$\mathcal{B}' = \{w_1, S(w_1), \cdots, S^{m_1-1}(w_1), \cdots, w_t, S(w_t), \cdots, S^{m_t-1}(w_t)\}$$

é base de W. Defina $\phi : V \to W$ por $\phi(T^j(v_i)) = S^j(w_i)$. A transformação ϕ é isomorfismo, pois leva uma base de V em uma base de W. Seja $w \in W$ um elemento qualquer. Daí existem únicos escalares $\alpha_1^0, \alpha_1^1, \cdots, \alpha_1^{m-1}, \cdots, \alpha_t^0, \alpha_t^1, \cdots, \alpha_t^{m-1}$ tais que

$$w = \sum_{j=0}^{m_t-1} \sum_{i=1}^{t} \alpha_i^j S^j(w_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ T \circ \phi^{-1})(w) &= \phi(T(\phi^{-1}(w)) \\
&= \phi\left(T\left(\phi^{-1}\left(\sum_{j=0}^{m_t-1} \sum_{i=1}^{t} \alpha_i^j S^j(w_i)\right)\right)\right) \\
&= \phi\left(T\left(\sum_{j=0}^{m_t-1} \sum_{i=1}^{t} \alpha_i^j \phi^{-1} S^j(w_i)\right)\right) \\
&= \phi\left(T\left(\sum_{j=0}^{m_t-1} \sum_{i=1}^{t} \alpha_i^j T^j(v_i)\right)\right)
\end{aligned}$$

.

Assim,

$$\begin{aligned}
(\phi \circ T \circ \phi^{-1})(w) &= \phi\left(\sum_{j=0}^{m_t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^j T^{j+1}(v_i)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{m_t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^j \phi\left(T^{j+1}(v_i)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{m_t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^j S^{j+1}(v_i)\\
&= S\left(\sum_{j=0}^{m_t-1}\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^j S^{j}(v_i)\right)\\
&= S(w).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\phi \circ T \circ \phi^{-1}) = S$.

Reciprocamente, suponha agora que existe $\phi : V \to W$ isomorfismo tal que

$$(\phi \circ T \circ \phi^{-1}) = S.$$

Primeiramente observe que

$$S^p = (\phi \circ T \circ \phi^{-1})^p = (\phi \circ T^p \circ \phi^{-1}),$$

para qualquer $p \in \mathbb{N}$. Isto garante que S e T possuem o mesmo índice de nilpotência. Seja $\mathcal{B}' = \{w_1, S(w_1), \cdots, S^{m_1-1}(w_1), \cdots, w_t, S(w_t), \cdots, S^{m_t-1}(w_t)\}$ uma base para W. Desta forma, temos $S^{m_j}(w_j) = 0$ para $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Assim, como ϕ é isomorfismo

$$S^{m_j}(w_j) = 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, t\}$$

$$(\phi \circ T \circ \phi^{-1})^{m_j}(w_j) = 0$$

$$\phi(T^{m_j}(\phi^{-1}(w_j))) = 0$$

$$T^{m_j}(\phi^{-1}(w_j)) = 0, \forall j \in \{1, 2, \cdots, t\}.$$

Tome $v_j = \phi^{-1}(w_j)$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Pelo que foi exposto anteriormente,

$S^{m_j}(w_j) = 0$ se, e somente se, $T^{m_j}(v_j) = 0$. Além disso,

$$\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), \cdots, T^{m_1-1}(v_1), \cdots, v_t, T(v_t), \cdots, T^{m_t-1}(v_t)\}$$

é base para V, o que conclui o resultado. ∎

No Teorema 2.13, fazendo a transformação T restrita a cada subespaço W_i, o operador $T : W_i \to W_i$ tem matriz na forma

$$[T]_{\mathcal{B}_i} = Jm_i(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}.$$

Logo, se $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$, então $T : V \to V$ é tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} Jm_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Jm_2(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Jm_t(0) \end{pmatrix}.$$

2.4 Formas de Jordan

Iremos utilizar agora os resultados das duas últimas seções para construir a chamada forma de Jordan de um operador linear sobre espaços vetoriais de dimensão finita.

Lema 2.14 *Seja T um operador linear sobre um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V. Se $T = T_1 \oplus T_2$, então $p_T(x) = p_{T_1}(x) \cdot p_{T_2}(x)$.*

Demonstração: Pela definição de soma direta de operadores, existem W_1, W_2 subespaços vetoriais de V tais que $W_1 \oplus W_2 = V$, de tal forma que T_1 é um operador sobre W_1, T_2 é um operador sobre W_2 satisfazendo $T_1 = T|_{W_1}$ e $T_2 = T|_{W_2}$. Considere B_1 uma base para W_1 e B_2 uma base para W_2. Como a soma é direta, $B = B_1 \cup B_2$ é uma base para W. A matriz do operador T com respeito a base B é da forma

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T_1]_{B_1} & O \\ & \\ O & [T_2]_{B_2} \end{bmatrix}.$$

O resultado segue diretamente de propriedade de determinante. ∎

Teorema 2.15 *Seja $T : V \to V$ um operador linear, em que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

com $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$. Então

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

em que para cada $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$, temos

(i) $\dim U_i = m_i$

(ii) O subespaço U_i é T-invariante

(iii) A restrição do operador $(\lambda_i I - T)$ a U_i é nilpotente.

Demonstração: Para cada $i \in \{1, 2, 3, \cdots, r\}$, considere o operador linear

$$T_i = \lambda_i I - T : V \to V.$$

Pelo Teorema 2.13, T_i é soma direta de um operador nilpotente e um inversível, ou seja, podemos escrever $V = U_i \oplus W_i'$, com U_i e W_i' subespaços T_i-invariantes. Tais subespaços também são T-invariantes. De fato, seja $u \in U_i$. Assim,

$$T_i(u) = (\lambda_i I - T)(u) \in U_i$$

$$\lambda_i u - T(u) \in U_i.$$

Daí, $T(u) \in U_i$. Logo U_i é T-invariante. De mesma forma, W_i' é T-invariante. Sejam $T' : U_i \to U_i$ e $T'' : W_i' \to W_i'$ as restrições de T a U_i e W_i', respectivamente. Como $T = T' \oplus T$", do Lema 2.14

$$p_T(x) = p_{T'}(x) \cdot p_{T''}(x)$$

Observe que λ_i é o único autovalor de T' e λ_i não é autovalor de T''. Desta forma, $p_{T'}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ e $\dim U_i = m_i$. Então, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$, encontramos um subespaço U_i que é T-invariante, $\dim U_i = m_i$ e a restrição $(\lambda_i I - T)|_{U_i}$ é nilpotente, com $V = U_1 + U_2 + \cdots + U_r$. Como λ_i é autovalor apenas de T',

$$U_i \cap (U_1 + U_2 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_r) = \{0\}.$$

Portanto, $V = U_i \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \cdots \oplus U_r$. ∎

Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que

$$p_T(x) = (x - \lambda_i)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

em que $r \geq 1$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Pelo teorema anterior, existe uma decomposição $V = U_i \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \cdots \oplus U_r$ que satisfaz as propriedades do teorema para cada $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$. Considere o operador linear

$$T_i = T|_{U_i} : U_i \to U_i.$$

O operador $\tilde{T} = (T_i - \lambda_i I_{m_i})$ é nilpotente, uma vez que $p_{\tilde{T}_i}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$. Portanto, existe uma base $\mathcal{B}_i$ de U_i e número $t_i, m_{i1} \geq m_{i2} \geq \cdots \geq m_{it_i}$ tais que

$$[T_i]_{\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} Jm_{i1}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Jm_{i2}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Jm_{it_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

em que para cada $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ e $j \in \{1, 2, \cdots, t_i\}$

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Como, $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$, segue que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é uma base de V e

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}.$$

A matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ acima é chamada forma de Jordan associado a T.

Exemplo 2.16 *Considere o operador linear $T : V \to V$, em que $p_T(x) = (x-1)^3(x-2)^2$ e $\dim V = 5$. As possíveis formas de Jordan são da forma*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} \end{pmatrix},$$

em que $[T_1]_{\mathcal{B}_1}$pode ser de uma das seguintes formas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $[T_2]_{\mathcal{B}_2}$ pode ser uma das seguintes formas

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observação 2.17 *Seja $T : V \to V$ um operador linear sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de* *dimensão finita. Suponha que o polinômio minimal de T seja dado por*

$$m_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{m_t},$$

em que $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$.

(i) O número natural m_i representa a ordem do maior bloco de Jordan $J_r(\lambda_i)$;

(ii) A multiplicidade geométrica de λ_i representa o número de blocos de Jordan $J_r(\lambda_i)$.

Exemplo 2.18 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ operador linear definida por*

$$T(y_1, y_2, y_3, y_4) = (8y_1 - y_2, 4y_1 + 12y_2, 9y_3 + 2y_4, 2y_3 + 6y_4).$$

Seja C a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Daí,

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} p_T(x) &= \det(xI_4 - [T]_C) \\ &= \det \begin{pmatrix} x-8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & x-12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & x-6 \end{pmatrix} \\ &= (x-10)^3(x-5). \end{aligned}$$

O polinômio minimal é dado por $m_T(x) = (x-10)^i(x-5)$, para algum $i \in \{1, 2, 3\}$. Uma vez que

$$([T]_C - 10I_4)^1([T]_C - 5I_4)^1 \neq 0$$

e

$$([T]_C - 10I_4)^2([T]_C - 5I_4)^1 = 0,$$

segue que $m_T(x) = (x-10)^2(x-5)$*. Assim, o maior bloco de Jordan referente ao autovalor* 10 *é de ordem* 2*. Logo existe uma base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para determinar v_2, v_3 *e* v_4*, determinar o autoespaço correspondente a cada autovalor, pois* $T(v_2) = 10v_2$*,* $T(v_3) = 10v_3$ *e* $T(v_4) = 5v_4$*. Por meio de um cálculo padrão, encontramos*

$$Aut_{10}(T) = Nuc(T - 10I_4) = [(1, -2, 0, 0), (0, 0, 2, 1)]$$

e

$$Aut_5(T) = Nuc(T - 5I_4) = [(0, 0, 1, -2)].$$

Assim, basta tomar $v_2 = (1, -2, 0, 0)$*,* $v_3 = (0, 0, 2, 1)$ *e* $v_4 = (0, 0, 1, -2)$*.*

O vetor $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *é de tal forma que*

$$T(v_1) = 10v_1 + 1(\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3).$$

$$(T - 10I_4)(v_1) = \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3.$$

$$(T - 10I_4)(v_1) = (\alpha_1, -2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_2).$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha_2 = 0$ *e* α_1 *qualquer. Uma vez que* $\alpha_2 = 0$ *temos*

$$T(v_1) = 10v_1 + \alpha_1(1, -2, 0, 0).$$

Escolha $\alpha_1 = 1$. Vamos encontrar $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ satisfazendo a equação

$$(T - 10I_4)(v_1) = (1, -2, 0, 0).$$

Tal equação nos leva ao sistema linear dado por

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

em que $v_1 = (1, -3, 2, 1)$ é uma solução. Assim,

$$\mathcal{B} = \{(1, -3, 2, 1), (1, -2, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, -2)\},$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$ e além disso,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.19 *Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x-2)^4$ e $m_T(x) = (x-2)^2$. O maior bloco de Jordan correspondente ao autovalor -2 é 2. As possível Formas de Jordan são dadas por*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seja $Aut_T(-2) = Nuc(T + 2I_4)$ o auto espaço relacionado ao autovalor $\lambda = -2$. Temos duas possibilidades.

(i) $\dim(Aut_T(-2)) = 2$, *então a matriz de T com respeito à base de Jordan terá 2 blocos. Neste caso, será a matriz A.*

(ii) $\dim(Aut_T(-2)) = 3$, *então a matriz de* T *com respeito à base de Jordan terá* 3 *blocos. Neste caso, será a matriz* B.

Exemplo 2.20 *Seja*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Existe um único operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = A$, *em que* $\mathcal{C}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^4$. *Temos* $p_T(x) = x^4$ *e* $m_T(x) = x^2$. *O maior bloco de Jordan correspondente ao autovalor* $\lambda = 0$ *é* 2. *Além disso,*

$$Aut_T(0) = [(5, 0, 6, 3), (0, 5, -2, -1)].$$

Como $\dim(Aut_A(0)) = 2$, *temos dois blocos de Jordan relacionados ao autovalor* $\lambda = 0$. *Vamos determinar* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *base de* $\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$T(v_1) = v_2 \in Nuc(T),$$

$$T(v_2) = 0,$$

$$T(v_3) = v_4 \in Nuc(T),$$

$$T(v_4) = 0.$$

Podemos tomar $v_2 = (5, 0, 6, 3)$ *e* $v_4 = (0, 5, -2, -1)$. *O próximo passo é encontrar um vetor* $v_1 \in \mathbb{R}^4$ *tal que* $T(v_1) = v_2$, *com* $v_1 \notin [v_2, v_4]$. *Para isso é necessário resolver o* *sistema*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Uma solução do sistema nos permite tomar o vetor $v_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. *Além disso,*

$$v_1 \notin [(5,0,6,3),(0,5,-2,-1)].$$

Vamos encontrar agora $v_3 = (a,b,c,d)$ *tal que* $T(v_3) = v_4$ *e* $v_3 \notin [v_1, v_2, v_4]$. *Novamente devemos resolver um sistema linear dado por*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos uma solução que fornece $v_3 = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. *Além disso,* $v_3 \neq [v_1, v_2, v_4]$, *pois a combinação linear*

$$\left(1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \alpha_1 \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + \alpha_2(5,0,6,3) + \alpha_4(0,5,-2,-1)$$

não é possível. Logo, tomando $\mathcal{B} = \{(2,-1,3,0),(5,0,6,3),(2,5,-1,0),(0,5,-2,-1)\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.21 *Seja a transformação linear* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *definida por*

$$T(x,y,z,t) = (2x + y + z + t, 2y - z - t, 3z - t, 4t).$$

O polinômio característico é dado por $p_T(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$ *e o polinômio minimal* $m_T(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base de Jordan para* T. *Assim, pelas* *multiplicidades das raízes do polinômio minimal, temos a matriz* $[T]_{\mathcal{B}}$ *é constituída por um bloco de Jordan* $J_2(2)$, *um bloco de Jordan* $J_1(3)$ *e um bloco de Jordan* $J_1(4)$, *ou seja,*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.22 *Seja* $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, *tal que o polinômio característico é* $p_T(x) = (x-2)^5$ *e o polinômio minimal* $m_T(x) = (x-2)^3$. *O autoespaço é dado por*

$$Aut_T(2) = [(1, 0, -1, -1, -1), (0, 1, 2, 2, 2)]$$

Seja $\mathcal{B}$ *uma base de Jordan para* T. *Assim, a matriz* $[T]_{\mathcal{B}}$ *possui 2 blocos de Jordan, um deles de ordem 3 e o outro de ordem 2.*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

CAPÍTULO 3

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

Neste capítulo estudaremos a exponencial de matrizes, com suas principais propriedades e a partir destas propriedades será possível garantir a existência e unicidade de solução para um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneo com coeficientes constantes, com uma condição inicial. O capítulo baseia-se em (POLAC; BONFIM, 2008).

Nossa finalidade é encontrar soluções do tipo $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ para o sistema

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}, \tag{3.1}$$

em que a_{ij} são constantes reais, para todos $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. O sistema pode ser escrito na forma matricial $x'(t) = A \cdot x(t)$, em que

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.1 Exponencial de Matrizes

Para encontrar solução do sistema 3.1, devemos antes de mais nada definir a exponencial de matrizes e obter algumas propriedades a seu respeito. Sabemos que a equação diferencial ordinária $x'(t) = a \cdot x(t)$ tem por solução a função $x(t) = e^{at}x(0)$. Podemos então pressupor que a solução do sistema $x'(t) = A \cdot x(t)$ seja dada por $e^{tA}x(0)$. A exponencial de um número real x é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

A definição de exponencial de uma matriz quadrada é dada de maneira similar à expressão de exponencial de um número real.

Definição 3.1 *Dada uma matriz quadrada M de ordem n, definimos*

$$e^M = I + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 \cdots + \frac{1}{n!}M^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^j}{j!}, \tag{3.2}$$

em que, I é a matriz identidade de ordem n.

É possível mostrar que a série (3.2) sempre converge, qualquer que seja a matriz M de ordem n. Neste caso escrevemos

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{M^n}{n!}.$$

A prova deste fato foge do escopo deste trabalho e pode ser encontrada em (FUIGUEIREDO, 2008).

A exponencial de matrizes satisfaz algumas propriedades relevantes.

Lema 3.2 *Se I é a matriz identidade de ordem n, então $e^O = I$, em que O é a matriz nula de ordem n.*

Demonstração: É imediata uma vez que $O^n = O$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. ■

Lema 3.3 *Se P é inversível, então $e^{P.A.P^{-1}} = P.e^A.P^{-1}$.*

Demonstração: Esta propriedade segue do fato que

$$(P.A.P^{-1})^k = P.A^k.P^{-1},$$

para todo número natural k. De fato,

$$\begin{aligned}
e^{P.A.P^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}(P.A.P^{-1})^k \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(P.A.P^{-1})^k \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}P.A^k.P^{-1} \\
&= P\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}A^k\right)P^{-1} \\
&= P.\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right).P^{-1} \\
&= P.e^A.P^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.4 *Se $X(t) = e^{tA}$, então $X'(t) = AX(t)$, para todo número real t.*

Demonstração: A demonstração deste lema é apresentado sem todo o rigor necessário, mas podemos utilizar a derivação termo a termo

$$\begin{aligned}
X'(t) &= \frac{d}{dt}\left\{I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right\} \\
&= A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots \\
&= A\left\{I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 \cdots + \frac{t^{n-1}}{n-1!}A^{n-1} + \cdots\right\} \\
&= Ae^{tA} = AX(t).
\end{aligned}$$

■

Para a demonstração do próximo lema é necessário um resultado da Regra de Leibniz para matrizes. Desta forma, sejam $A(t) = (a_{ij}(t))$ e $B(t) = (b_{ij}(t)) \in M_n(\mathbb{R})$. Definindo $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ e $B'(t) = (b'_{ij}(t))$, temos $C(t) = A(t).B(t) = c_{ij}(t)$ é tal que

$$\begin{aligned} c_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t).b_{kj}(t) \\ c'_{ij}(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t).b_{kj}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(a'_{ik}(t).b_{kj}(t) + a'_{ik}(t).b'_{kj}(t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a'_{ik}(t).b_{kj}(t)) + \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik}(t).b'_{kj}(t)\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$C'(t) = A'(t).B(t) + A(t).B'(t).$$

Lema 3.5 *Para todo $t \in \mathbb{R}$, a matriz e^{tA} é inversível e $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. Em particular $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$.*

Demonstração: Utilizando a Regra de Leibniz e o Lema 3.4, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{tA}e^{-tA}\right\} = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA}.$$

Como a matriz A comuta com toda potência natural de A, então A comuta com e^{tA}, de onde segue que

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{tA}e^{-tA}\right\} = Ae^{tA}e^{-tA} - Ae^{tA}e^{-tA} = 0.$$

Desta maneira, $e^{tA}e^{-tA}$ é uma matriz constante. Como, em particular, para $t = 0$, vale $e^{0A}e^{-0A} = I$, segue que $e^{tA}e^{-tA} = I$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, e^{tA} é inversível para todo $t \in \mathbb{R}$ e $(e^tA)^{-1} = e^{-tA}$. Em particular, para $t = 1$, $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$. ■

Lema 3.6 *Dada uma matriz quadrada A de ordem n existe uma única matriz quadrada $Y(t)$ de ordem n satisfazendo $Y'(t) = AY(t)$ e $Y(0) = I$.*

Demonstração: Vimos anteriormente que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ e $e^{0A} = I$, ou seja, $Y(t) = e^{tA}$ satisfaz as condições do lema anterior. Resta mostrar a unicidade. Para isso, seja $Y_1(t)$ tal que $Y_1'(t) = A.Y_1(t)$ e $Y_1(0) = I$. Então

$$\frac{d}{dt}\{e^{-tA}Y_1(t)\} = -Ae^{-tA}Y_1(t) + e^{-tA}Y_1'(t) = -Ae^{-tA}Y_1(t) + e^{-tA}AY_1(t),$$

e como A comuta com e^{-tA} obtemos ainda que

$$\frac{d}{dt}\{e^{-tA}Y_1(t)\} = -Ae^{-tA}Y_1(t) + e^{-tA}AY_1(t) = 0.$$

Logo $e^{-tA}Y_1(t) = e^{-0A}Y_1(0) = I$, e consequentemente $Y_1(t) = e^{tA} = Y(t)$. ■

Lema 3.7 *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Se $AB = BA$, então*

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt},$$

para todo número real t. Em particular, se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.

Demonstração: Seja $X(t) = e^{tA}e^{tB}$. Então $X'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$. Como, por hipótese, $AB = BA$, então B comuta com todas as potências naturais de A, e portanto comuta com e^{tA}. Logo,

$$X'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)X(t).$$

Observe que $X(0) = I$. Pelo lema anterior, temos $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$. ■

Ainda que a exponencial de matrizes produza uma resposta bem simples para o sistema $x'(t) = Ax(t)$, pode ser complicado calcular a exponencial de uma matriz por meio da sua definição como soma de uma série infinita. Os dois casos a seguir serão suficientes para o cálculo da exponencial de qualquer matriz quadrada de ordem n.

(i) Se A é uma matriz diagonal, ou seja, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, então

$$A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!}\lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!}\lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!}\lambda_n^k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Se A é uma matriz nilpotente, então existe um numero natural r tal que $A^r = O$. Para matrizes nilpotentes de índice r o cálculo da exponencial se resume à uma soma finita,

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}A^{r-1},$$

e esta soma sempre pode ser efetuada.

Observação 3.8 *Vimos anteriormente que, uma vez fixadas as bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ para os* *espaços vetoriais V e W, de dimensões finitas, uma transformação linear $T : V \to W$ está associada a uma única matriz denotada por $[T]_C^B$. Além disso, pelo Teorema 1.25, $[v]_{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$. Podemos fazer esta associação para operadores lineares $T : V \to V$, considerando $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Vamos considerar, a partir de agora, que $\mathcal{C}$ é a base canônica do espaço vetorial V.*

(i) Se $T : V \to V$ é um operador linear diagonalizável, em que $\dim(V) = n$, então existe uma base de autovetores de T, digamos $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Considere P a matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Assim, se $A = [T]_{\mathcal{C}}$ e $D = [T]_{\mathcal{B}}$, então

$$A = P^{-1}DP,$$

com D diagonal.

(ii) Se $T : V \to V$ não é diagonalizável, vimos que existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_B$ é uma matriz constituída por blocos de Jordan. Desta forma, analogamente ao caso anterior, considerando P a matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $A = [T]_{\mathcal{C}}$, temos

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} [J_{\lambda_1}] & & & \\ & [J_{\lambda_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [J_{\lambda_k}] \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{B}}.$$

Um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ pode ser decomposto na soma

$$J_\lambda = D_\lambda + N_\lambda,$$

em que D_λ é uma matriz diagonal de ordem r e N_λ é uma matriz nilpotente de ordem r, com índice de nilpotência $r - 1$.

Desta forma, dada qualquer matriz quadrada A, existem P inversível, D diagonal e N nilpotente tais que $PAP^{-1} = D + N$, que equivale a escrever $A = P^{-1}(D + N)P$, e uma vez que $DN = ND$, temos

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P^{-1}e^{tD+tN}P \\ &= P^{-1}e^{tD}e^{tN}P. \end{aligned}$$

Vimos anteriormente como é efetuado o cálculo da exponencial de uma matriz diagonal e de uma matriz nilpotente. Desta forma, o cálculo da exponencial de uma matriz pode ser efetuado para qualquer matriz quadrada A.

Pelo Lema 3.6, o Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tem solução única dada por $x(t) = e^{tA}x_0$.

Exemplo 3.9 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = -3x_1(t) + x_2(t) \\ x_1(0) = 1, x_2(0) = 2 \end{cases},$$

em que $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Como vimos anteriormente, a solução deste sistema é dada por* $x(t) = e^{tA}x_0$. *Encontrando os autovalores e os autovetores da transformação linear associada a* A, *somos capazes de encontrar uma matriz* P *inversível e uma matriz* D *diagonal tal que* $A = PDP^{-1}$. *Um cálculo simples nos fornece as matrizes*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ \\ -\frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2}e^{4t} + \dfrac{3}{2}e^{-2t} \\ \\ \dfrac{1}{2}e^{4t} + \dfrac{3}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

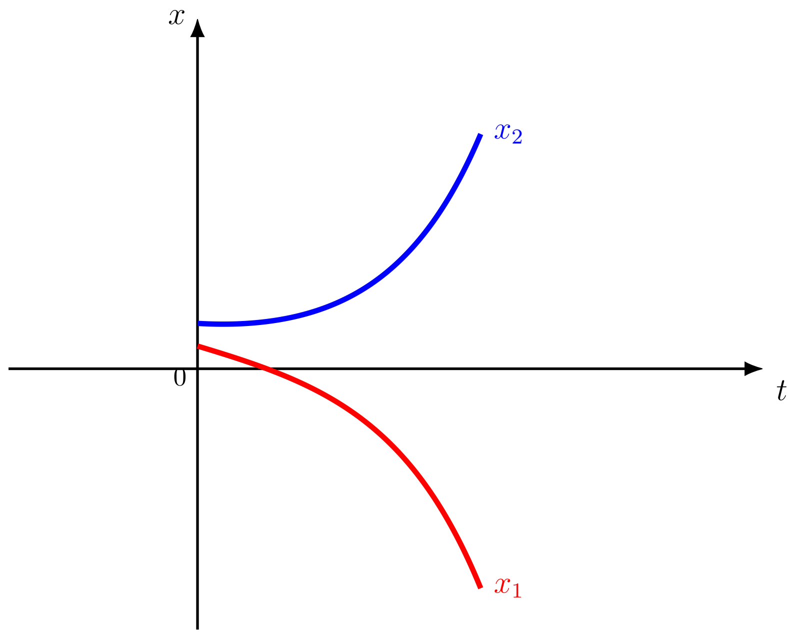

Figura 3.1: Solução do Exemplo 3.9

CAPÍTULO 4

ALGUMAS APLICAÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Neste capítulo apresentaremos três problemas que podem ser resolvidos utilizando as técnicas estudadas neste texto, ou seja, utilizaremos sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, bem como o método de sua resolução. As principais referências são (BOYCE; DIPRIMA, 2010) e (ZILL, 2003).

4.1 O Problema da Mistura I

Em uma indústria, dois tanques se encontram conectados conforme a ilustração a seguir. Os tanques contém soluções de sal e possuem um mecanismo de agitação de forma a deixar a mistura homogênea.

No instante de tempo $t_0 = 0$, o tanque 1 contém 10 litros de água pura e o tanque 2 contém 20 litros de uma mistura de água com 12 Kg de sal. Água pura está sendo constantemente bombeada para dentro do tanque 1 a uma taxa de 10 litros por minuto, as misturas salinas são trocadas entre os dois tanques como na Figura 4.1, e a mistura escoa do tanque 2 a uma taxa de 10 litros por minuto. Queremos determinar a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t.

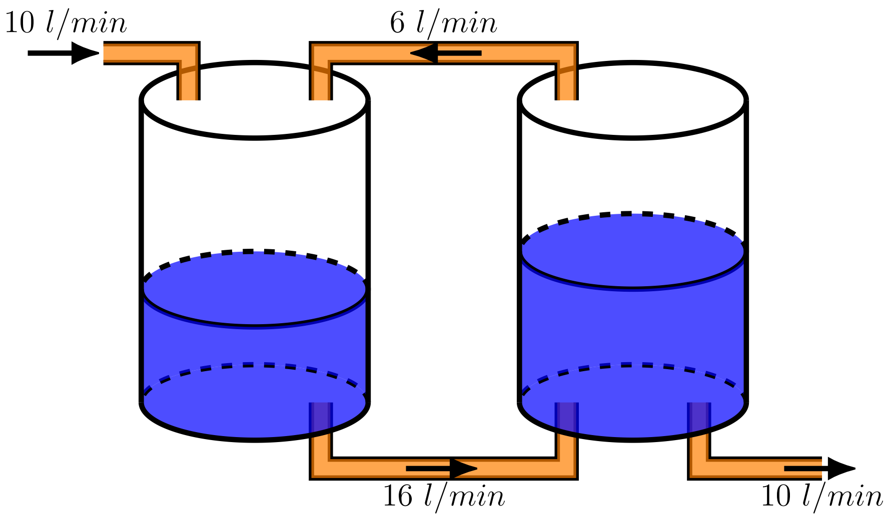

Figura 4.1: Problema com dois tanques

Considere $x_1(t)$ a quantidade de sal no tanque 1 no instante t e $x_2(t)$ a quantidade de sal no tanque 2 no instante t.

As taxas de variação instantânea da quantidade de sal em cada tanque são respectivamente

$$x_1'(t) = \frac{dx_1}{dt} \text{ e } x_2'(t) = \frac{dx_2}{dt}.$$

Cada uma destas taxas deve ser igual à diferença entre a taxa à qual o sal está entrando e a taxa à qual o sal está saindo do respectivo tanque, ou seja,

$$\frac{dx_i}{dt} = \text{(taxa de entrada do sal)-(taxa de saída do sal)} = T_e - T_s.$$

No tanque 1, a taxa à qual o sal está entrando é igual a

$$6\frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t)}{20}\frac{Kg}{l} = \frac{3}{10}x_2(t)\frac{Kg}{min},$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$16\frac{l}{min} \cdot \frac{x_1(t)}{10}\frac{Kg}{l} = \frac{8}{5}x_1(t)\frac{Kg}{min}.$$

Portanto

$$x_1'(t) = \frac{3}{10}x_2(t) - \frac{8}{5}x_1(t),$$

No Tanque 2, a taxa à qual o sal está entrando é igual a

$$16\frac{l}{min}\cdot\frac{x_1(t)}{10}\frac{Kg}{l}=\frac{8}{5}x_1(t)\frac{Kg}{min},$$

enquanto que a taxa à qual o sal está saindo é igual a

$$(10+6)\frac{l}{min}\cdot\frac{x_2(t)}{20}\frac{Kg}{l}=\frac{4}{5}x_2(t)\frac{Kg}{min}.$$

Logo,

$$x_2'(t)=\frac{8}{5}x_1(t)-\frac{4}{5}x_2(t).$$

Além disso, a quantidade de solução em cada um dos tanques permanece sempre constante. Como foram dados $x_1(0)=0$ Kg e $x_2(0)=12$ Kg segue que as quantidades desejadas podem ser obtidas resolvendo-se o seguinte PVI

$$\begin{cases} x_1'(t)=-\frac{8}{5}x_1+\frac{3}{10}x_2 \\ x_2'(t)=\frac{8}{5}x_1-\frac{4}{5}x_2 \\ x_1(0)=0, x_2(0)=12 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

A matriz de coeficientes deste sistema é

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

que está associada a um operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Calculando o polinômio característico e determinando seus autovalores, encontramos $\lambda_1=-\frac{2}{5}$ e $\lambda_2=-2$. Os autoespaços associados a esses autovalores são $Aut_A(\lambda_1)=[(1,4)]$ e $Aut_A(\lambda_2)=[(-3,4)]$. Sejam $\mathcal{C}=\{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}=\{(1,4),(-3,4)\}$, temos $A=PDP^{-1}$, em que

$$D=\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, P=[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
A &= P \cdot D \cdot P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At}.x_0 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot e^{Dt} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\frac{2}{5}t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t} \\ 3e^{-\frac{2}{5}} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto a solução do sistema de equações diferenciais $x'(t) = A.x(t)$ é

$$x_1(t) = \frac{9}{4}e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{9}{4}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 9e^{-\frac{2}{5}t} + 3e^{-2t}.$$

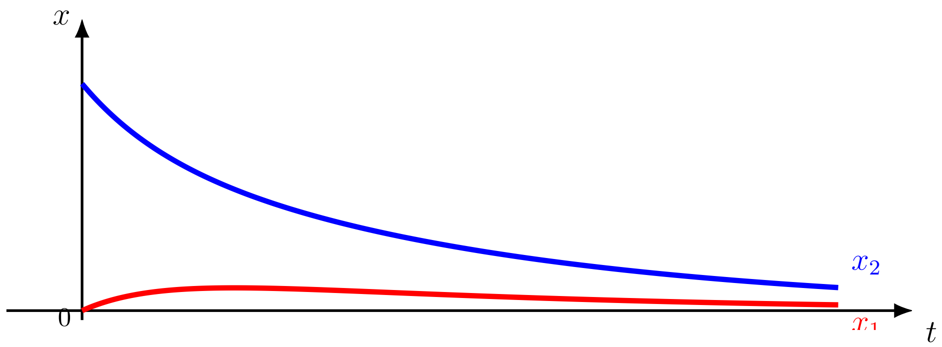

Figura 4.2: Solução do problema de dois tanques

4.2 O Problema da Mistura II

Considere agora três tanques A, B e C, cada um com $x_1(0) = 0, x_2(0) = 10$ e $x_3(0) = 10$ quilogramas de sal. Os líquidos bem misturados são bombeados entre os tanques conforme a figura a seguir.

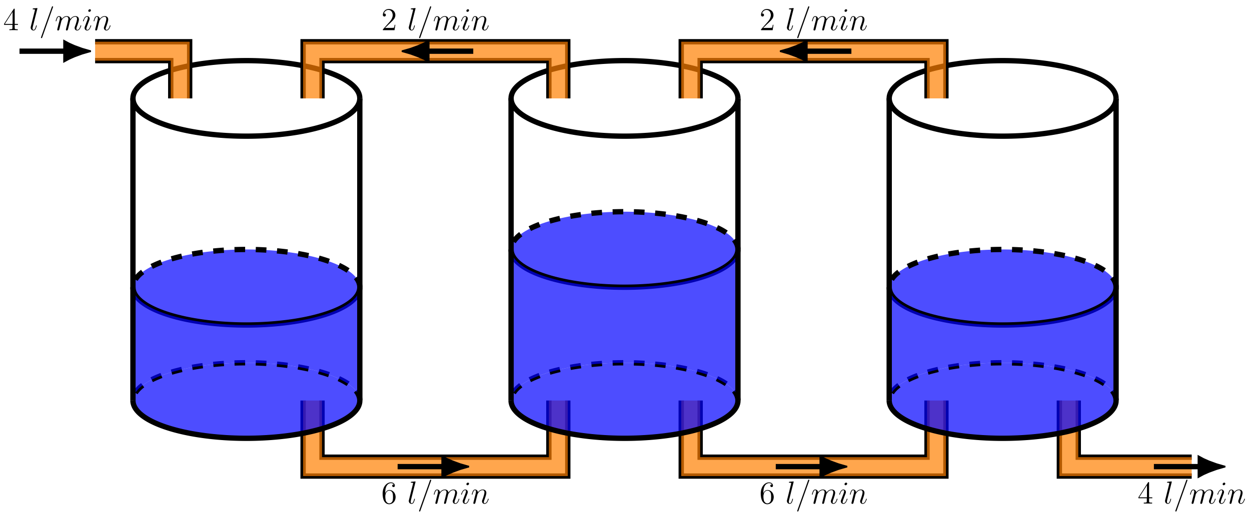

Figura 4.3: Problema com três tanques

Sejam $x_1(t), x_2(t)$ e $x_3(t)$ a quantidade de sal nos tanques A, B e C no instante t, respectivamente.

No tanque A, obtemos as seguintes equações diferenciais.

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t)}{10} \frac{Kg}{min} - 6\frac{l}{min} \cdot \frac{x_1(t)}{10},$$

desta forma,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{5}x_2(t) - \frac{3}{5}x_1(t)$$

No tanque B, obtemos

$$\frac{dx_2}{dt} = 6\frac{l}{min} \cdot \frac{x_1(t)}{10} \frac{Kg}{min} + 2\frac{l}{min} \cdot \frac{x_3(t)}{10} \frac{Kg}{min} - 2\frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t)}{10} \frac{Kg}{min} - 6\frac{l}{min} \cdot \frac{x_2(t)}{10} \frac{Kg}{min},$$

assim,

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{3}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t) + \frac{1}{10}x_3(t)$$

No tanque C, temos

$$\frac{dx_3}{dt} = 6\frac{l}{min}\cdot\frac{x_2(t)}{10}\frac{Kg}{min} - 2\frac{l}{min}\cdot\frac{x_3(t)}{10} - 4\frac{l}{min}\cdot\frac{x_3(t)}{10}\frac{Kg}{min},$$

portanto

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{3}{10}x_2(t) - \frac{3}{5}x_3(t).$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias que modela o problema proposto é dado por

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\dfrac{3}{5}x_1(t) + \dfrac{1}{5}x_2(t) \\ \\ x_2'(t) = \dfrac{3}{5}x_1(t) - \dfrac{4}{5}x_2(t) + \dfrac{1}{10}x_3(t) \\ \\ x_3'(t) = \dfrac{3}{10}x_2(t) - \dfrac{3}{5}x_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \\ x_2'(t) \\ \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ \\ \dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{25} & \dfrac{1}{10} \\ \\ 0 & \dfrac{3}{10} & -\dfrac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \\ \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Para achar as soluções da equação $x'(t) = Ax(t)$ devemos primeiramente encontrar os autovalores e autovetores.Calculando os autovalores e autovetores e encontramos $\lambda_1 = -\dfrac{3}{25}, \lambda_2 = -\dfrac{1}{50}, \lambda_3 = -\dfrac{3}{50}$ e um autovetor associado a cada autovalor é dado, respectivamente, por

$$[v_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, [v_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [v_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Segue,

$$A = P.D.P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{50} & \frac{1}{50} & 0 \\ \frac{3}{50} & -\frac{2}{25} & \frac{1}{50} \\ 0 & \frac{3}{50} & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{25} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{50} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Considerando $x_1(0) = 0, x_2(0) = 10$ e $x_3(0) = 10$ temos como solução do PVI

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At}.x_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot e^{Dt} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\frac{3}{25}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{50}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{3}{50}t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{25}t} + 3e^{-\frac{1}{50}t} - \frac{5}{3}e^{-\frac{3}{50}t} \\ 4e^{-\frac{3}{25}t} + 6e^{-\frac{1}{50}t} \\ -4e^{-\frac{3}{25}t} + 9e^{-\frac{1}{50}t} + 5e^{-\frac{3}{50}t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

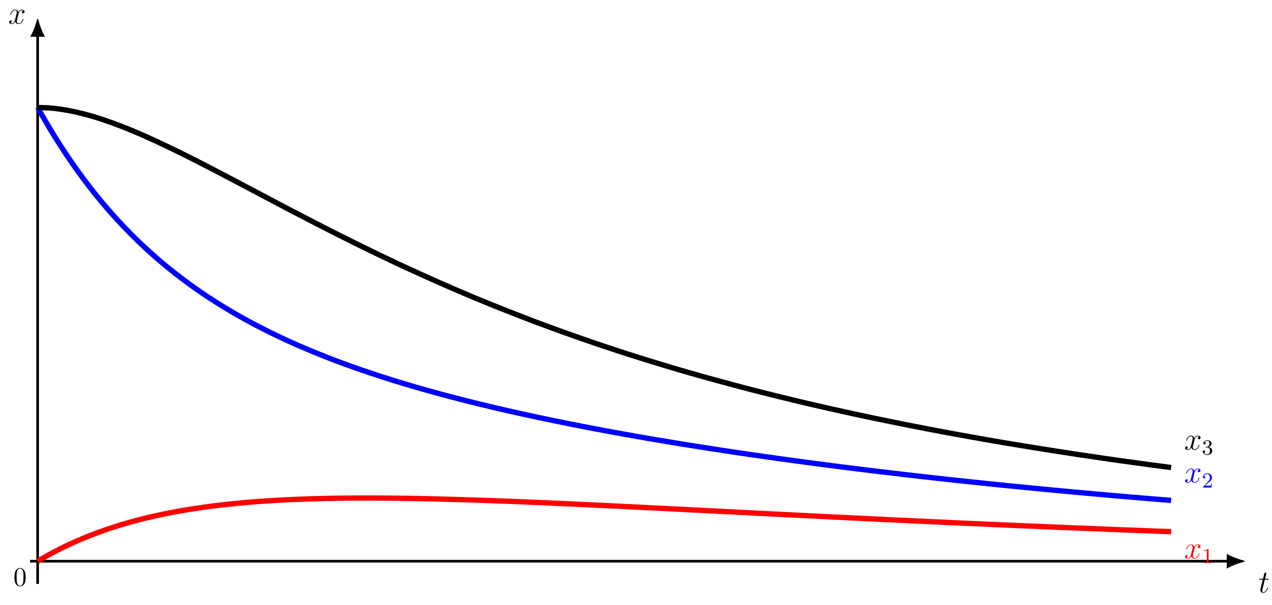

Figura 4.4: Solução do problema com três tanques

4.3 O Circuito Elétrico

Considere o circuito elétrico contendo um indutor (L), um resistor (R) e capacitor (C), conforme ilustrado na figura a seguir.

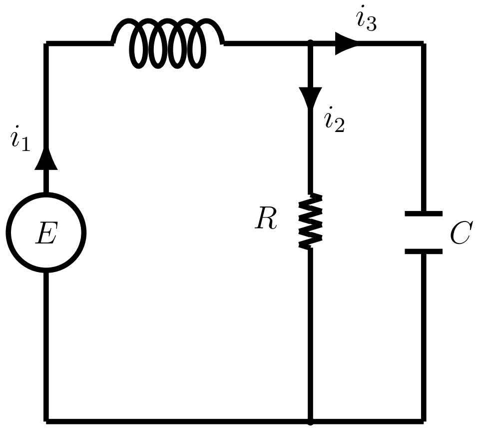

Figura 4.5: Circuito RLC

Utilizando a Segunda Lei de Kirchoff, conforme (HALLIDAY et al., 2009), e sob certas condições, a saber $E(t) = 0$ e $i_1 = i_2 + i_3$. Considerando a malha da esquerda , que a voltagem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada deve ser igual a soma das quedas de voltagem, sendo assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$E(t) = L\frac{di_1}{dt} + i_2R$$

Agora considere a malha da direita, temos a equação

$$\frac{1}{C}q_3 - i_2R = 0$$

$$q_3 - CRi_2 = 0.$$

Derivando em função de t

$$\frac{dq_3}{dt} - CR\frac{di_2}{dt} = 0.$$

Como $\frac{dq}{dt} = i$ e $i_1 = i_2 + i_3$ temos:

$$i_3 - CR\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$i_1 - i_2 - CR\frac{di_2}{dt} = 0$$

$$CR\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0.$$

As correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} i_1'(t) = -\dfrac{R}{L}i_2 \\ i_2'(t) = \dfrac{1}{CR}i_1 - \dfrac{1}{CR}i_2 \end{cases},$$

em que pelo Sistema Internacional de Unidades a resistência de um resistor R é medido em ohm, simbolizada por Ω. Um capacitor C tem a capacitância de um $Faraday(F)$. E o indutor L medida em $Henry(H)$.

O sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} i_1'(t) \\ i_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{R}{L} \\ \dfrac{1}{CR} & -\dfrac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}.$$

Considerando $R = 1\ \Omega$, $C = 2\ mF$ e $L = 4\ H$. O sistema toma a forma,

$$\begin{pmatrix} i_1'(t) \\ i_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}.$$

Associando a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ a um operador linear sobre espaço vetorial de dimensão 2, encontramos como autovalores $\lambda_1 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}i$ e $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$. Além disso, um autovetor associado a λ_1 é dado por $v_1 = (1, 1+i)$ e um autovetor associado ao autovalor λ_2 é dado por $v_2 = (1, 1-i)$. Desta forma, tomando $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$, temos $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 1-i & i \end{pmatrix}$ e desta forma,

$$A = PDP^{-1},$$

em que $D = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1-i & 0 \\ 0 & -1+i \end{pmatrix}$. Consideremos como condições iniciais $i_1(0) = 10$ e $i_2(0) = 5$. Sabemos que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$. Logo,

$$\begin{aligned}
i(t) &= e^{At} \cdot x_0 \\
&= P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} \cdot i_0 \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^{-t/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{4}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{t}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 1-i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \cdot e^{-t/4} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{4}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) & -\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) \\ 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) & \cos\left(\frac{t}{4}\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10e^{-t/4}\cos\left(\frac{t}{4}\right) + 5e^{-t/4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) \\ 5e^{-t/4}\cos\left(\frac{t}{4}\right) + 15e^{-t/4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{4}\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

uma vez que $i_0 = \begin{pmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Portanto,

$$i_1(t) = 10e^{-t/4}\cos\left(\frac{t}{4}\right) + 5e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right)$$

e

$$i_2(t) = 5e^{-t/4}\cos\left(\frac{t}{4}\right) + 15e^{-t/4}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{4}\right).$$

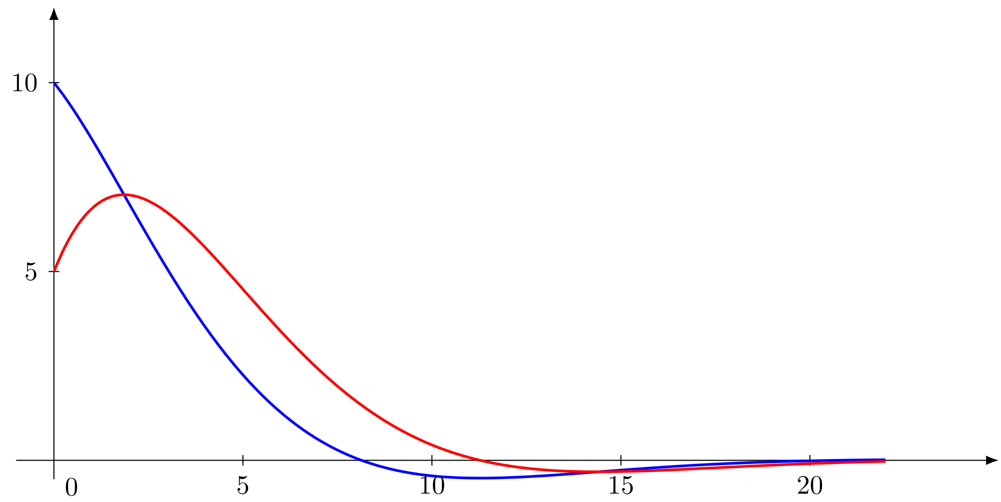

Figura 4.6: Solução do circuito RLC

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. G. F. *A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações*. Campina Grande: [s.n.], 2011. Disponível em ⟨http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/427/1/PDF%20-%20Arthur%20Gilzeph%20Farias%20Almeida.pdf⟩. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática).

BOYCE W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

COELHO F. U.; LOURENçO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007.

FUIGUEIREDO, D. G. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

GOMES, M. *Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*. Florianópolis: [s.n.], 2013. Disponível em ⟨https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/126450/Marcelo_Gomes.pdf?sequence=1⟩. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática).

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: eletromagnetismo*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 3.

HOFFMAN K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

POLAC L. G.; BONFIM, L. R. P. *O Uso da Álgebra Linear nas Equações Diferenciais*. Uberlândia: FAMAT em Revista, 2008.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais (com aplicações em modelagem)*. São Paulo: Thomson, 2003.