

SAULO LUIS LIMA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE MEDIDA DE EMARANHAMENTO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011

SAULO LUIS LIMA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE MEDIDA DE EMARANHAMENTO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de julho de 2011.

Prof. Daniel H. Theodoro Franco
(Orientador)

Prof. Afrânio Rodrigues Pereira

Prof. José Abdalla H. Neto

Prof. Oswaldo Monteiro Del Cima

O homem pode, é certo, fazer o que quer, mas não pode querer o que quer.

(Schopenhauer)

Agradecimentos

Ao término de mais uma etapa decisiva em nossas vidas é quase impossível não lembrar de todos que contribuíram para que ela se concretizasse. Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, por tudo. À minha mãe Geni e ao Jorge pelo apoio, carinho e amor incondicional. Ao meu irmão Lucas. À minha família, sem a qual minha vida não teria sentido. Em especial, agradeço ao tio Wilson pela inspiração e segurança, ao tio Nivaldo e à tia Neuza pela ajuda na superação dos obstáculos, à tia Cota por todos os momentos de alegria, à vó Genásia e ao vô Tatão pela criação que me orgulho em ter recebido e a todos os meus tios e tias. Agradeço aos meus primões que fazem a vida ser bela e por eu saber que estarão sempre comigo. À Marysther pelo carinho, apoio, dedicação e amor dispensados a mim e por ter me suportado mesmo em meus momentos mais difíceis. Aos meus amigos que, antes de tudo, também são minha família e estarão sempre guardados a sete chaves no lado esquerdo do meu peito e jamais deixarão essa prisão onde eu espero que eles tenham prazer em estar, assim como tenho prazer de mantê-los.

Aos professores do departamento de física por todo o conhecimento que me proporcionaram, em especial ao professor Daniel pela amizade, companheirismo, preocupação, orientação e pela liberdade que me proporcionou discutir assuntos de física sem medo ou pré-conceito e aos professores Afrânio, Alvaro Vianna, Rober e Winder.

À Universidade Federal de Viçosa (UFV) por todo suporte oferecido em todos esses anos e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo o auxílio financeiro.

Sumário

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
1 Introdução	1
2 Introdução ao emaranhamento	5
2.1 Definição matemática de emaranhamento	5
2.2 Matriz densidade	7
2.2.1 Matriz densidade e subsistemas	8
2.3 Critérios de separabilidade	10
2.3.1 Testemunha de emaranhamento	13
2.4 Quantificação de emaranhamento em sistemas bipartidos	14
2.4.1 Negatividade	15
2.4.2 Emaranhamento de formação e concorrência	16
2.4.3 Exemplos	17
3 Distância entre estados como medida de emaranhamento	21
3.1 A distância como medida de emaranhamento	21
3.2 Formulação matemática do problema	22
3.2.1 A norma de Hilbert-Schmidt	22
3.2.2 Formulação do problema	24
3.3 O método de Frank-Wolfe	25
3.3.1 O algoritmo PA	26

4	Resultados e discussão	28
4.1	Estado de Bell	28
4.2	Estado misto do sistema de dois spins	29
4.3	Emaranhamento em uma cadeia de spins - composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$	31
4.4	O composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$	32
4.4.1	Emaranhamento de formação	34
4.4.2	Distância entre estados	36
5	Conclusões e perspectivas futuras	42
5.1	Conclusões	42
5.2	Perspectivas futuras	43
	Apêndice A - Prova de que $\mathcal{T}^{\otimes n}$ é um conjunto convexo compacto	44
	Apêndice B - Prova do Teorema 3.2.2	45
	Referências bibliográficas	48

Resumo

SILVA, Saulo L. Lima da. M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho, 2011. **Um Estudo Sobre Medida de Emaranhamento**. Orientador: Daniel Heber Theodoro Franco. Coorientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Winder Alexander de Moura Melo

O estudo de emaranhamento se justificaria simplesmente pelo seu interesse teórico, tendo em vista que, desde seu surgimento, lança importantes questionamentos de caráter fundamental nas bases do edifício que é a Mecânica Quântica. Além disso, o emaranhamento tem se mostrado um ingrediente indispensável no ramo da computação quântica (no processamento e transmissão de informação) e também na física da matéria condensada (na compreensão de transições de fase quântica). No presente trabalho temos por objetivo apresentar algumas formas de caracterizar tanto quantitativo, quanto qualitativamente, o emaranhamento. Em especial, pretendemos apresentar e aplicar o método desenvolvido por Dahl *et al.* [1]. Tal método consiste em determinar a distância do estado separável mais próximo do estado de interesse, uma vez que tal distância pode ser utilizada para medir o grau de emaranhamento do sistema. Entendemos por estado separável um estado que apresenta somente correlações clássicas, ou seja, um estado não-emaranhado, estados que não são separáveis são ditos emaranhados.

Abstract

SILVA, Saulo Luis Lima da. M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2011.
A Study of Entanglement Measure. Adviser: Heber Theodoro Franco. Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira and Winder Alexander de Moura Melo

The study of entanglement would be justified simply by its theoretical interest, given that this phenomenon since its inception, casts important questions on the basis of a fundamental character of the building that is quantum mechanics. Moreover, the entanglement has been an indispensable ingredient in the field of quantum computing (processing and transmission of information) and also in condensed matter physics (in the understanding of quantum phase transitions). In this paper we present and discuss some ways to characterize both quantitatively and qualitatively entanglement. In particular, we aim to introduce and apply the method developed by Dahl et al. [1]. This method determines the distance from the nearest separable state of the state of interest, since this distance may be used to measure the degree of entanglement of the system of interest. We consider a separable state by state with only classical correlations, ie a non-entangled, non-separable states which are said entangled.

Capítulo 1

Introdução

“Emaranhamento não é *um*, mas *o* traço característico da Mecânica Quântica”¹. Foram as palavras de Erwin Schroedinger sobre esse estranho fenômeno previsto pela Mecânica Quântica que denominamos emaranhamento. O nome é bastante sugestivo e nos induz a ter uma idéia do que seja esse fenômeno. No próximo capítulo faremos uma discussão quantitativa deste que é um dos aspectos mais empolgantes e misteriosos da Mecânica Quântica.

Em 1935 Albert Einstein, B. Podolsky e N. Rosen publicaram um artigo intitulado: “*Can Quantum-Mechanics Description of Physical Reality Be Considered Complete?*” [2]. Nesse artigo, os autores argumentam que a Mecânica Quântica não é completa, uma vez que ela possui incoerências internas no que concerne ao que os autores chamam realidade física. Esse artigo foi um dos principais assuntos das famosas e acirradas discussões entre Einstein e Bohr. Ainda hoje, esse tema não está considerado totalmente compreendido e é, ainda, motivo de muitas divergências na comunidade científica. As discussões entre os partidários da Mecânica Quântica e os que, em parte, a contestam é um ramo muito vasto e rico da física atual.

Apesar de já ter se passado mais de 70 anos desde que Einstein, Podolsky e Rosen publicaram seu artigo, a questão de identificar quando um sistema está ou não

¹No original: entanglement is not *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics.

emaranhado ainda não é muito bem compreendida e não se tem uma forma geral para tal fim. A questão de quantificar o quanto um sistema está emaranhado, uma vez que tal emaranhamento é detectado, é ainda mais complicada. O que se tem, atualmente, são vários critérios que, em alguns casos particulares, permite-nos identificar quando o sistema está emaranhado. Da mesma forma, em alguns casos específicos, uma vez que detectamos o emaranhamento podemos lançar mão de algumas definições que nos permite dizer o quanto o sistema está emaranhado dentro de uma determinada escala que varia de acordo com o critério que optamos por adotar. Em geral, utilizamos funções que crescem monotonicamente com o emaranhamento, o máximo dessas funções (que varia de acordo com o sistema) corresponde ao máximo de emaranhamento para o sistema. Neste caso, dizemos que o sistema está maximamente emaranhado e o mínimo da mesma, que truncamos em zero, corresponde ao sistema não estar emaranhado.

Podemos fazer uma analogia da situação atual do entendimento que temos sobre o emaranhamento com o tratamento que se dava para a temperatura antes de se definir a escala termodinâmica absoluta, onde se tinha várias escalas termométricas diferentes e uma forma de relacioná-las entre si, mas todas dependiam, em geral, do ponto de fusão e de ebulição de alguma substância específica a uma dada pressão. Ainda estamos à espera da “escala de emaranhamento absoluta”, se é que a mesma existe.

O estudo do emaranhamento se justificaria simplesmente pelo seu interesse teórico e pelo desafio de se formalizar sua caracterização e quantificação em um determinado sistema quântico. No entanto, recentemente foi mostrado que o emaranhamento é ingrediente fundamental para o campo da computação e da informação quântica, uma vez que ele pode ser usado no processamento e transmissão de informação permitindo formas de comunicação que são classicamente impossíveis (para mais informações ver os artigos de revisão [3, 4]). Além disso, verificou-se nas últimas duas décadas que o emaranhamento pode ser utilizado para ajudar a compreender o fenômeno de transições de fase quântica.

Transições de fase quântica são mudanças qualitativas que ocorrem nas pro-

priedades do estado fundamental de um sistema de muitos corpos, modificações essas que podem ser tanto nas interações entre seus constituintes como na interação do sistema com um agente externo, enquanto o sistema permanece à temperatura zero. Uma vez que o emaranhamento é uma propriedade inerente de estados quânticos e intimamente relacionado com correlações quânticas, devemos esperar que, de alguma forma, o emaranhamento de um determinado estado fundamental sofra uma mudança substancial quando o sistema sofre uma transição de fase quântica [5].

Nos últimos anos tem sido proposto que o emaranhamento possa ter papel fundamental na compreensão de processos biológicos, tais como a fotossíntese, ingrediente fundamental para a manutenção da vida, e para o entendimento de como os pássaros migratórios conseguem se localizar, levando assim ao nascimento de uma nova disciplina, a *biologia quântica* [6].

A fotossíntese é o processo pelo qual as plantas convertem luz solar em energia química, esse processo se dá por meio de elétrons ejetados pela luz incidente dentro das células das plantas, tais elétrons seguem para o mesmo lugar: o centro de reações químicas. A física clássica falha em explicar a eficiência com que esse processo acontece. Experimentos recentes sugerem que o emaranhamento pode ser a chave para se compreender a eficiência desse processo [7].

O pássaro conhecido como pisco-de-peito-ruivo é uma ave migratória que todo ano viaja cerca de 13 mil quilômetros. Há muito acredita-se que os pássaros migratórios se localizam devido à uma espécie de bússola interna que os permitem diferenciar entre norte e sul. Nos anos 70 foi mostrado que uma espécie de pássaros - o pisco-do-peito-ruivo - era indiferente a uma reversão do campo magnético da terra. O que eles “percebem”, na realidade, é a inclinação do campo magnético da terra, no entanto, quando seus olhos estão vendados eles não responde de forma alguma a esse campo, sugerindo que, de alguma forma, eles “sentem” o campo magnético com os olhos. A proposta é que nos olhos do pássaro tem um tipo de molécula que possui dois elétrons que formam um par emaranhado com spin total zero. Quando essa molécula absorve luz visível os elétrons ganham energia suficiente para separarem-se

e se tornam suscetíveis a influências externas, como o campo magnético da terra [7].

Na presente dissertação temos por objetivo estudar e aplicar o critério proposto em [1] para quantificar emaranhamento utilizando o conjunto das matrizes densidade. Podemos resumir esse critério da seguinte maneira: encontrar o estado separável mais próximo para qualquer dado estado, estando este emaranhado ou não. A distância do estado separável mais próximo pode ser usado para medir o grau de emaranhamento do sistema em questão. Por estado separável entendemos um estado descrito por uma matriz densidade que pode ser escrita na forma separável, quando isso não for possível dizemos que o sistema está emaranhado.

No Capítulo 2, apresentaremos uma breve introdução aos conceitos básicos para a compreensão e tratamento de sistemas emaranhados. O Capítulo 3 destina-se a apresentar o critério proposto por Dahl *et al.* [1]. No Capítulo 4, discutiremos algumas aplicações do critério de Dahl *et al.*, comparando os resultados obtidos com outros resultados já presentes na literatura, dessa forma foi possível obter resultados análogos aos obtidos por Souza *et al.* em [8]. No Capítulo 5 apresentamos as conclusões e perspectivas do trabalho.

Capítulo 2

Introdução ao emaranhamento

Neste Capítulo abordaremos, de forma concisa, o emaranhamento. Partindo da definição matemática de emaranhamento apresentaremos os aspectos principais que o caracterizam. Será discutido critérios para determinar se o estado está emaranhado ou não e uma vez detectado o emaranhamento, discutiremos alguns critérios para quantificar o grau de emaranhamento do sistema.

2.1 Definição matemática de emaranhamento

Considere um sistema quântico constituído por dois subsistemas A e B e seja, ainda, H_A e H_B seus espaços de Hilbert associados, respectivamente. Dizemos que um estado puro $|\psi\rangle$, é separável se puder ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle, \quad (2.1)$$

com $|\psi_A\rangle \in H_A$ e $|\psi_B\rangle \in H_B$. Os estados que não admitem a forma (2.1) receberam de Schroedinger, em 1936, a denominação de estados emaranhados, essa denominação é utilizada até hoje.

Como exemplo de estado separável (não-emaranhado) podemos citar o estado

$$|\psi\rangle = \frac{|1^{(A)}2^{(B)}\rangle + |1^{(A)}3^{(B)}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.2)$$

uma vez que ele pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |1^{(A)}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|2^{(B)}\rangle + |3^{(B)}\rangle), \quad (2.3)$$

nessa notação $|i^{(A)}j^{(B)}\rangle$ significa que o subsistema A está no estado i e o subsistema B está no estado j . Como exemplo de um estado emaranhado podemos citar o estado

$$|\psi\rangle = \frac{|1^{(A)}2^{(B)}\rangle + |2^{(A)}1^{(B)}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.4)$$

já que ele não pode ser escrito na forma (2.1).

Provavelmente o exemplo mais famoso de emaranhamento na Mecânica Quântica é o paradoxo lançado por Schroedinger que ficou conhecido como *gato de Schroedinger*. Pouco depois de Einstein, Podolsky e Rosen terem publicado seu artigo em 1935 [2], Schroedinger, comentando esse artigo, elaborou um experimento imaginário onde considera uma caixa de aço completamente isolada do meio externo. Dentro da caixa encontram-se um gato e um aparato que é constituído por um contador Geiger com uma pequena quantidade de material radioativo. Imagine que em um determinado tempo esse material tem a mesma probabilidade de decair ou não, se o elemento decair, será acionado um dispositivo que libera ácido cianídrico na caixa matando o gato. Sendo assim, antes de abrirmos a caixa a única coisa que sabemos é que existe 50% de chance de o gato estar vivo e 50% de chance de o gato estar morto. A função de onda que descreve o sistema é da seguinte forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{gato vivo}\rangle + |\text{gato morto}\rangle), \quad (2.5)$$

observe que antes de abrirmos a caixa o sistema está em um estado de superposição em que o elemento decaiu e, conseqüentemente, o gato está morto e outro em que o elemento não decaiu e o gato continua vivo. Schroedinger disse que o gato e o aparato com o contador estão em um estado emaranhado.

Podemos generalizar a definição acima para sistemas constituídos por N subsistemas. No entanto, para sistemas multipartidos (N subsistemas) existem diferentes graus de separabilidade. Se o sistema puder ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle, \quad (2.6)$$

dizemos que o sistema é k separável, ou seja, possui k subsistemas não-emaranhados. Se $k = N$ então o sistema é completamente separável [9].

2.2 Matriz densidade

Apresentaremos agora o formalismo do operador densidade introduzido por J. Von Neumann em 1927, tal formalismo descreve quantitativamente tanto estados misturados quanto estados puros. Esse operador é explicitamente independente da fase global. Para um estado puro o operador densidade é definido por

$$\rho \equiv \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (2.7)$$

o denominador garante a normalização. Note que

$$\rho = \rho^\dagger = \rho^2, \quad (2.8)$$

ou seja, o operador densidade é idempotente. Vemos então que ρ é um operador de projeção, e, portanto seus autovalores são 0 e 1. Podemos obter o valor esperado de um dado operador A em termos de ρ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \langle\psi|A|\psi\rangle \\ &= \frac{\sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \\ &= \frac{\sum_n \langle n|A|\psi\rangle\langle\psi|n\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \\ &= \sum_n \langle n|A\rho|n\rangle \\ &= \text{Tr}(A\rho). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da condição de normalização temos que

$$\begin{aligned}
Tr(\rho) &= \sum_n \langle n | \rho | n \rangle \\
&= \frac{\sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&= \frac{\sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&= \frac{\langle \psi | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = 1.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2.1 Matriz densidade e subsistemas

Quando temos um estado $|\psi\rangle \in H = H_A \otimes H_B$ que não é emaranhado podemos descrever cada subsistema pelos seus respectivos vetores de estado nos seus respectivos espaços de Hilbert. Entretanto, isso não é possível quando o sistema está emaranhado. Para tanto, podemos calcular o valor esperado de uma variável dinâmica qualquer $P = P_A \otimes 1_B$ do subsistema A em termos da base produto $|m^{(A)}n^{(B)}\rangle$:

$$\begin{aligned}
Tr(P\rho) &= \sum_{m,n} \langle m^{(A)}n^{(B)} | P\rho | m^{(A)}n^{(B)} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \langle m^{(A)}n^{(B)} | P | m'^{(A)}n'^{(B)} \rangle \langle m'^{(A)}n'^{(B)} | \rho | m^{(A)}n^{(B)} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \langle m^{(A)} | P_A | m'^{(A)} \rangle \delta_{nn'} \langle m'^{(A)}n'^{(B)} | \rho | m^{(A)}n^{(B)} \rangle \\
&= \sum_{m,m'} \langle m^{(A)} | P_A | m'^{(A)} \rangle \sum_n \langle m'^{(A)}n^{(B)} | \rho | m^{(A)}n^{(B)} \rangle \\
&\equiv \sum_{m,m'} \langle m^{(A)} | P_A | m'^{(A)} \rangle \langle m'^{(A)} | \rho^{(A)} | m^{(A)} \rangle = Tr_A(P_A \rho^{(A)}),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

nessa notação, Tr_A indica o traço no espaço H_A . Assim, podemos calcular o valor esperado de um observável do primeiro subsistema utilizando a matriz

$$\langle m^{(1)} | \rho^{(1)} | m^{(1)} \rangle \equiv \sum_n \langle m^{(1)}n^{(2)} | \rho | m^{(1)}n^{(2)} \rangle. \tag{2.12}$$

Note que esta matriz é obtida através da matriz densidade completa tomando-se o *o traço parcial* sobre os índices de H_B . Observe que, como esse traço parcial é uma matriz que está associada a um operador densidade $\rho^{(A)}$ no espaço de fase H_A , ele representa, para H_A , o mesmo que o operador densidade ρ representa para o sistema completo H . O cálculo para um observável no segundo subsistema é análogo ao anterior. Chamaremos a matriz que se obtém tomando o traço parcial da matriz densidade completa de *matriz densidade reduzida*.

A matriz densidade reduzida é, assim como a matriz densidade, um operador hermitiano e de traço 1. No entanto, em geral, ela não é uma matriz idempotente, mas ela ainda preserva a propriedade de não negatividade, ou seja, seus autovalores podem assumir valores nulos ou positivos, mas não negativos. Essa propriedade pode ser demonstrado facilmente observando que

$$\begin{aligned} \langle \phi_A | \rho^{(A)} | \phi_A \rangle &= \sum_n \langle \phi_A n^{(B)} | \rho | \phi_A n^{(B)} \rangle \\ &= \sum_n | \langle \psi | \phi_A n^{(B)} \rangle |^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

para qualquer vetor $\phi_A \in H_A$ e com $\rho = | \psi \rangle \langle \psi |$.

Vamos discutir um pouco os resultados precedentes. Quando temos um operador idempotente sabemos que seus autovalores são, necessariamente, 0 ou 1. Bem, como a matriz densidade tem traço 1 ela só possui um autovalor não nulo e igual a 1, e o autovetor correspondente a esse autovalor é o vetor de estado $| \psi \rangle$ que descreve esse sistema. Ora, mas quando a matriz densidade reduzida não for idempotente teremos, na verdade, uma “mistura” de vetores que descrevem o sistema. Aos estados quânticos descritos por operadores densidade idempotentes daremos o nome de *estados puros*, quando os estados forem descritos por operadores não idempotentes chamaremos *estados mistos*.

Dessa forma, vemos que a idempotência do operador densidade reduzido implica em fatorabilidade de $| \psi \rangle$ e sua não idempotência, ao contrário, implica em emaranhamento do vetor de estado. Sendo assim, temos uma forma de identificar o

emaranhamento em um determinado estado. Uma vez que identificamos o emaranhamento no sistema é interessante calcularmos o “grau de emaranhamento” de tal sistema. É natural então relacionarmos o quanto o sistema está emaranhado com o quanto ele é “não idempotente” [10]. Existem várias formas para quantificar o emaranhamento de tais sistemas e cada uma delas pode ser mais ou menos conveniente dependendo do problema de interesse. Dentre essas formas de quantificar emaranhamento, uma das mais comuns e conhecidas é a entropia de Von Neumann, definida por

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (2.14)$$

Observe que para estados puros temos $S(\rho) = 0$, situação em que a informação sobre o sistema é completa. Já para o caso de estados mistos temos $S(\rho) \neq 0$. É mais prático utilizar a entropia de Von Neumann na forma

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (2.15)$$

com λ_i sendo os autovalores de ρ . Observe que para estados separáveis $S(\rho) = 0$ e para estados emaranhados temos $0 < S(\rho) \leq \log_2 D$, onde D é a dimensão do subsistema. Se $S(\rho) = \log_2 D$, dizemos que o sistema está maximamente emaranhado [9].

2.3 Critérios de separabilidade

Como visto anteriormente, dado um estado $|\psi\rangle \in H = H_A \otimes H_B$, podemos obter informação sobre o subsistema A tomando um traço parcial sobre o subsistema B e obtendo a matriz densidade reduzida para o subsistema A . É importante observar que, nesse caso, o sistema como um todo é puro e a matriz densidade completa é idempotente. A não idempotência surge quando olhamos para uma parte do sistema, ou seja, a interação do “resto” do sistema com essa parte é o responsável pelo emaranhamento. Podemos imaginar também uma situação em que o sistema de interesse não

está isolado, ou seja, interage com todo o universo. Nessa situação não conseguimos descrever o sistema por um vetor de estado, embora ainda seja possível descrevê-lo via matriz densidade. Observe que agora temos um estado misto mais geral do que os que discutimos anteriormente.

Para estados puros observamos que a entropia de Von Neumann é uma boa medida do emaranhamento. No entanto, para estados mistos ela não se mostra adequada, uma vez que a entropia de cada subsistema pode ser nula mesmo o estado global do sistema estando emaranhado.

O estado de um sistema não puro constituído por dois (ou mais) subsistema pode ser descrito por um operador densidade ρ em $H = H_A \otimes H_B$. A forma como esses subsistemas estão relacionados podem ser classificadas como:

- *Fatorabilidade de ρ* : nesse caso, os dois subsistemas são independentes e podem ser determinados completamente separadamente, ρ é dito ser fatorizável quando puder ser escrito na forma

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B. \quad (2.16)$$

- *Separabilidade de ρ* : ρ será dito separável quando for possível escrevê-lo na forma

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j^{(A)} \otimes \rho_j^{(B)}, \quad (2.17)$$

com $p_j \geq 0$ e $\sum_j p_j = 1$. Note que, nesse caso, existem correlações entre os subsistemas, no entanto, essas correlações são do tipo clássicas, portanto um sistema que admite tal representação não está emaranhado.

- *ρ é não separável*: nesse caso, a matriz densidade ρ não pode ser escrita em nenhuma das formas anteriores, o sistema possui, além das correlações clássicas, correlações quânticas que caracterizam o sistema como estando emaranhado.

Com isso, vemos que o problema de saber se um estado está ou não emaranhado se resume em saber se a matriz densidade que descreve o sistema pode ser escrita na forma (2.17), se não for possível escrevê-la dessa forma é porque o sistema está

emaranhado. Mas essa, em geral, não é uma tarefa fácil, não existe um critério geral para a separabilidade. Um dos critérios mais utilizados para sistemas bipartidos é a abordagem via os chamados mapas positivos. Um mapa positivo é uma transformação feita sobre a matriz densidade de tal forma que

$$\Lambda(\rho) \geq 0, \quad \forall \rho \geq 0. \quad (2.18)$$

A utilização dos mapas positivos mostra-se conveniente graças ao fato de sua extensão $(1_A \otimes \Lambda_B)$ não ser, necessariamente, positiva. No entanto, se o estado for separável teremos

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j^{(A)} \otimes \rho_j^{(B)} \longrightarrow (1_A \otimes \Lambda_B)(\rho) = \sum_j p_j \rho_j^{(A)} \otimes \Lambda_B(\rho_j^{(B)}) \geq 0. \quad (2.19)$$

Vemos com isso que a extensão de uma mapa positivo pode ser usado como indicador de emaranhamento no sistema, uma vez que se ela for negativa saberemos, com certeza, que o estado é emaranhado. Porém, o fato de a extensão do mapa positivo ser positiva não implica, necessariamente, em separabilidade, isso só seria verdade se conseguíssemos demonstrar que todas as extensões de todos os mapas positivos são positivas.

Um mapa positivo muito utilizado e que é capaz de identificar uma grande quantidade de estados emaranhados é a transposição Γ , sendo sua extensão $(1_A \otimes \Gamma_B)$ a transposição parcial $P\Gamma$. A diferença da transposição parcial para a transposição usual é que, enquanto a última troca os índices das linhas da matriz densidade pelos índices das colunas, a transposição parcial troca apenas um dos índices. De forma mais clara podemos escrever

$$\langle i, k | \rho | j, l \rangle \longrightarrow \langle j, l | \rho | i, k \rangle, \quad (2.20)$$

para a transposição usual e

$$\langle i, k | \rho | j, l \rangle \longrightarrow \langle i, l | \rho | j, k \rangle, \quad (2.21)$$

para a transposição parcial. Como vimos, quando a transposição parcial da matriz densidade possuir pelo menos um autovalor negativo, podemos afirmar que o estado é emaranhado, no entanto, se tal transposição for positiva definida não podemos afirmar que a matriz densidade é separável. Entretanto, para sistemas com espaços de Hilbert de dimensões $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$ foi mostrado pelos irmãos Horodecki em 1996 [11] que a condição de positividade da transposição parcial é necessária e suficiente para garantir a separabilidade, esse critério ficou conhecido como critério de Peres-Horodecki [9, 10].

2.3.1 Testemunha de emaranhamento

Um critério bastante útil para se determinar se um dado estado está ou não emaranhado é a *testemunha de emaranhamento* (*EW*) do inglês “Entanglement Witness”. Esse critério é devido aos Horodeckis em 1996 [12] e consiste na seguinte definição: uma testemunha de emaranhamento é um observável W que satisfaz

$$\text{Tr}(W\rho) \geq 0,$$

para todos os estados separáveis e

$$\text{Tr}(W\rho) < 0,$$

para alguns estados emaranhados. Ou seja, se $\text{Tr}(W\rho) < 0$ então, com certeza, o estado é emaranhado, no entanto, se $\text{Tr}(W\rho) \geq 0$ não podemos dizer nada, pois o estado pode ser tanto separável quanto emaranhado.

Este método tem uma interessante interpretação geométrica. Considere \mathcal{D} como sendo o conjunto de todas as matrizes densidades, \mathcal{S} o conjunto das matrizes separáveis e \mathcal{E} o conjunto das matrizes emaranhadas. Como \mathcal{S} é um conjunto convexo, dado qualquer ponto fora de \mathcal{S} e pertencente a \mathcal{D} sempre é possível traçar um plano que separa o ponto do conjunto \mathcal{S} , como mostra a Figura 2.1. O que as testemunhas de emaranhamento fazem é definir esse plano, quanto mais próximo do conjunto \mathcal{S} o plano estiver, mais otimizada ela será e poderá detectar um maior número de estados emaranhados. Note que para detectar todos os estados emaranhados teríamos que

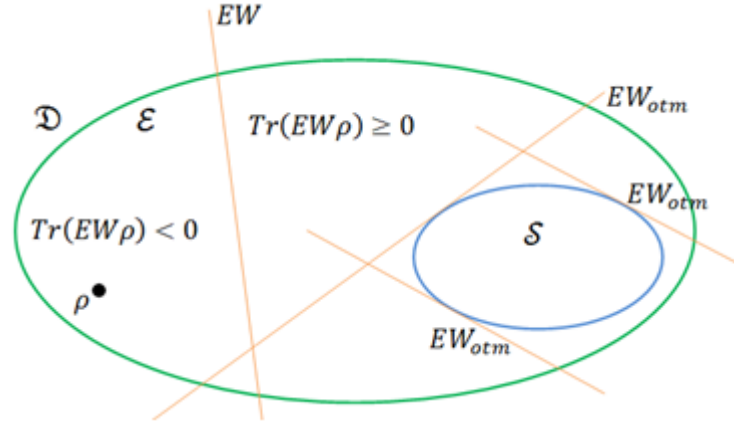


Figura 2.1: Figura esquemática das testemunhas de emaranhamento.

utilizar todas as testemunhas de emaranhamento que tangenciam \mathcal{S} , mas em geral o número de planos tangentes a \mathcal{S} é infinito.

2.4 Quantificação de emaranhamento em sistemas bipartidos

Vimos que os mapas positivos são uma boa forma de qualificar o estado como estando emaranhado, embora não seja, em geral, adequado para identificar o estado como sendo separável. Vamos discutir agora como podemos quantificar o emaranhamento em um estado misto. Um critério geral para tal fim não é conhecido, mas existem algumas condições gerais que devem ser satisfeitas por um bom candidato destinado a medir emaranhamento $F(\rho)$ em sistemas bipartidos mistos. Mesmo o conjunto de requisitos necessários para tal fim ainda é uma questão em aberto. Algumas dessas condições são [13, 10]:

1. Se ρ for separável então

$$F(\rho) = 0. \quad (2.22)$$

2. Operações unitárias locais deixam $F(\rho)$ invariante, isto é

$$F(\rho) = F(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger). \quad (2.23)$$

3. O grau de emaranhamento de ρ não pode aumentar devido a operações locais e comunicações clássicas, ou seja

$$F(\Omega_{OLCC}(\rho)) \leq F(\rho). \quad (2.24)$$

4. A soma do emaranhamento de dois estados deve ser maior ou igual ao emaranhamento do produto tensorial desses dois estados, essa propriedade é conhecida como sub-aditividade.

$$F(\rho \otimes \rho') \leq F(\rho) + F(\rho'). \quad (2.25)$$

5. F deve ser uma função convexa, ou seja

$$F(\lambda\rho + (1 - \lambda)\rho') \leq \lambda F(\rho) + (1 - \lambda)F(\rho'), \quad (2.26)$$

com $0 \leq \lambda \leq 1$.

Vamos apresentar abaixo duas das medidas mais comuns de emaranhamento presentes na literatura.

2.4.1 Negatividade

A negatividade, $\aleph(\rho)$ pode ser vista como estando diretamente relacionada ao critério de Peres. A definição de negatividade é

$$\aleph(\rho) = \sum_{\lambda_i, \lambda_i < 0} |\lambda_i|, \quad (2.27)$$

onde λ_i são os autovalores negativos da transposição parcial de ρ . Note que este é um bom critério que, além de ser de fácil aplicação, é capaz de ser aplicado exatamente para sistemas $2 \otimes 2$ e $2 \otimes 3$, no entanto, ele não é capaz de distinguir entre estados emaranhados e estados separáveis com tranposta parcial positiva com dimensões maiores que essas [14].

2.4.2 Emaranhamento de formação e concorrência

Se imaginarmos que o emaranhamento de estados mistos pode ser visto como uma média do emaranhamento da mistura de estados puros, seremos levados ao conceito de *emaranhamento de formação*. No entanto, uma mistura estatística pode ter muitas decomposições diferentes, e cada uma com uma média de entropia diferente. Dentre essas possíveis decomposições escolheremos, para definir a entropia de formação $EF(\rho)$, a que possui a média de entropia mínima

$$EF(\rho) = \min \sum_i p_i S(\rho). \quad (2.28)$$

Para sistemas $2 \otimes 2$ é possível obter uma forma analítica para o emaranhamento de formação [15]

$$EF = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x), \quad (2.29)$$

onde

$$x = \frac{(1 + \sqrt{1 - C^2})}{2},$$

sendo C denominada *concorrência*. A concorrência é definida como

$$C \equiv \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}), \quad (2.30)$$

onde os λ 's são os autovalores, em ordem decrescente, do operador

$$R = \rho(\sigma^y \otimes \sigma^y) \rho^*(\sigma^y \otimes \sigma^y), \quad (2.31)$$

sendo σ^y a matriz de Pauli

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

A concorrência é uma função monótona do emaranhamento, por isso ela é, muitas vezes, tomada como a medida do emaranhamento. Os valores da concorrência podem

variar de 0, caso em que o estado é não emaranhado, até 1, situação em que o estado está maximamente emaranhado [9, 16].

2.4.3 Exemplos

Para ilustrar como podemos aplicar os métodos de quantificação de emaranhamento citados anteriormente consideremos o seguinte estado puro, conhecido como estado de Bell

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle). \quad (2.33)$$

A matriz densidade para este estado pode ser calculada facilmente, já que

$$\rho = \frac{1}{2} (|+-\rangle - |-+\rangle)(\langle+-| - \langle-+|), \quad (2.34)$$

considerando a base ordenada na forma padrão $\{++, +-, -+, --\}$, temos que

$$\rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

A transposta parcial de (2.35) pode facilmente ser calculada para obtermos

$$P\Gamma(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Calculando os autovalores de (2.35) obtemos $\{1, 0, 0, 0\}$ que é consistente com a não negatividade do operador densidade. No entanto, se calcularmos os autovalores de (2.36) obtemos $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}$. Sendo assim, pelo critério de Peres-Horodecki tal estado é emaranhado.

Para quantificar o quanto este estado está emaranhado vamos aplicar, primeiramente, a negatividade. De (2.27) temos

$$\aleph(\rho) = \frac{1}{2}. \quad (2.37)$$

Aplicando a concorrência temos

$$C = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) = \max(0, 1) = 1, \quad (2.38)$$

utilizando (2.30) e (2.31).

Vamos estudar um caso mais complexo. Imaginemos um estado misto do sistema de dois spins

$$\rho \equiv \frac{1-p}{4} \hat{\mathbb{I}} + p |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.39)$$

com $0 \leq p \leq 1$, $\hat{\mathbb{I}}$ representa a matriz identidade e $|\psi\rangle$ é o estado de Bell definido em (2.33). Esse sistema é composto por um estado não puro e com peso $1-p$ e outro estado puro e completamente emaranhado com peso p . Queremos analisar o emaranhamento em tal sistema. Intuitivamente vemos que para $p=0$ o sistema é não emaranhado e para $p=1$ o sistema está maximamente emaranhado. Em uma análise preliminar podemos julgar que para $p>0$ o sistema sempre estará emaranhado, uma vez que temos contribuição de um estado completamente emaranhado. Explicitamente temos

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

A transposta parcial será

$$P\Gamma(\rho) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1+p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+p & 0 \\ -2p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Os autovalores de $P\Gamma(\rho)$ são

$$\left\{ \frac{1+p}{4}, \frac{1+p}{4}, \frac{1+p}{4}, \frac{1-3p}{4} \right\}.$$

Dessa forma, vemos que, pelo critério de Peres-Horodecki, a única possibilidade de o sistema estar emaranhado é

$$\frac{1-3p}{4} < 0, \quad (2.42)$$

o que nos diz que esse sistema é emaranhado somente para $p > \frac{1}{3}$. Isto vai contra nossa análise preliminar!

Fazendo uso da negatividade para quantificar esse emaranhamento temos

$$\mathfrak{N}(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \frac{1}{3} \\ \left| \frac{1-3p}{4} \right|, & \text{se } p > \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2.43)$$

O gráfico da negatividade é mostrado na Figura 2.2.

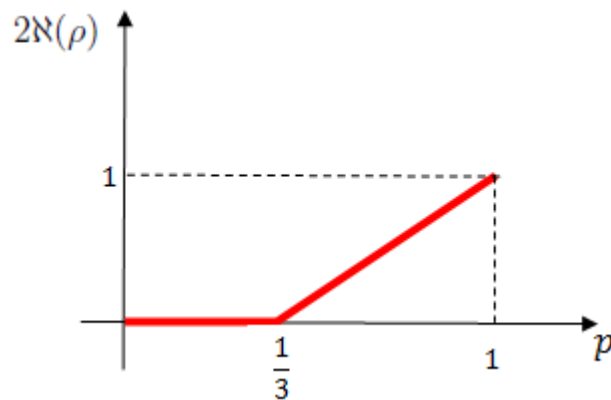


Figura 2.2: Negatividade como função de p para o estado misto (2.39).

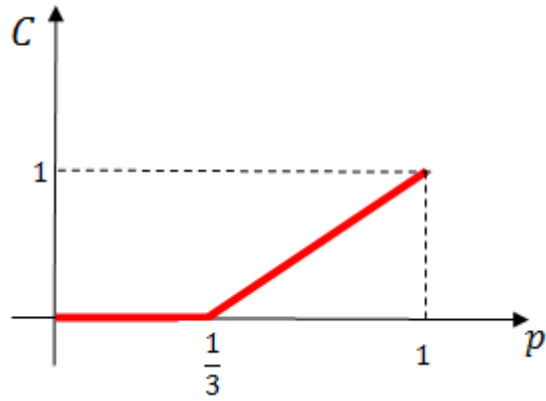


Figura 2.3: Concorrência como função de p para o estado misto (2.39).

Fazendo o cálculo do emaranhamento pela concorrência utilizando (2.31) e (2.30) obtemos que

$$C = \begin{cases} 0, & \text{se } p \leq \frac{1}{3} \\ p - \frac{1}{3}, & \text{se } p > \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2.44)$$

O gráfico da concorrência é mostrado na Figura 2.3.

Capítulo 3

Distância entre estados como medida de emaranhamento

Vamos apresentar nesse capítulo um outro método para quantificar emaranhamento. A idéia é encontrar a menor distância entre uma dada matriz densidade e a matriz densidade separável mais próxima e usar essa distância para obter informação sobre o grau de emaranhamento do sistema. A abordagem que faremos aqui tem como base, principalmente, o trabalho de Dahl *et al.* [1], mais informações pode ser encontrada em [17, 18, 19].

3.1 A distância como medida de emaranhamento

Imaginemos o conjunto das matrizes densidade \mathcal{T}_n $n \times n$ de dois subsistemas quânticos A e B . Esse conjunto pode ser visto como sendo constituído por dois outros subconjuntos disjuntos, a saber, o conjunto das matrizes densidades separáveis \mathcal{T}_n^{\otimes} e o conjunto das matrizes emaranhadas que é, na verdade

$$\mathcal{T}'_n = \mathcal{T}_n - \mathcal{T}_n^{\otimes}. \quad (3.1)$$

Uma forma de obter o grau de emaranhamento de uma dada matriz

$$\sigma \in \mathcal{T}_n,$$

é considerar a *distância* dessa matriz até o estado separável mais próximo. Dessa forma, podemos definir o emaranhamento do estado σ como sendo

$$F(\sigma) = \min D(\sigma \parallel \rho), \quad (3.2)$$

com $\rho \in \mathcal{T}^{\otimes n}$ e D é qualquer medida de distância entre os dois estados σ e ρ que satisfaça as condições listadas na seção 2.4. O estado σ possui tanto correlações clássicas quanto quânticas. A quantidade $F(\sigma)$ em (3.2) mede apenas as correlações quânticas. Considere $\rho^* \in \mathcal{T}^{\otimes n}$ como sendo o estado separável mais próximo de σ pela medida de D . As correlações clássicas também podem ser obtidas utilizando

$$F(\sigma) = D(\rho^* \parallel \rho_A^* \otimes \rho_B^*), \quad (3.3)$$

sendo ρ^* o estado separável que minimiza D e ρ_A^* e ρ_B^* são suas partes reduzidas, ou seja, ρ_A^* é obtido tomando-se o traço parcial de ρ^* sobre o sistema B e de forma análoga se obtém ρ_B^* . A Figura 3.1 dá uma idéia geométrica desses conceitos [17].

3.2 Formulação matemática do problema

Existem, na literatura, várias propostas para D e algumas podem ser encontradas em [17]. Uma dessas propostas é a norma de Hilbert-Schmidt que é, na verdade, a versão para matrizes complexas da norma de Frobenius.

3.2.1 A norma de Hilbert-Schmidt

Definimos o produto interno de matrizes hermitianas da seguinte maneira

$$\langle A, B \rangle \equiv \text{Tr}(AB). \quad (3.4)$$

O produto interno definido acima nos leva a uma escolha natural para a norma

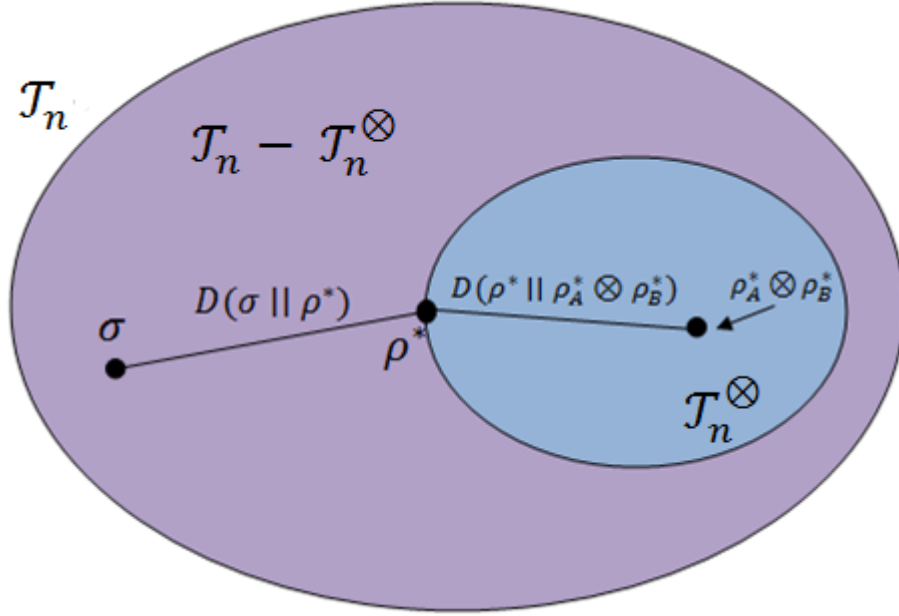


Figura 3.1: O conjunto de todas as matrizes densidades \mathcal{T}_n é representado pelo círculo externo. O círculo interno representa o subconjunto das matrizes separáveis \mathcal{T}_n^{\otimes} . O estado σ representa um estado emaranhado e ρ^* é o estado separável que minimiza a distância $D(\sigma || \rho)$. $D(\rho^* || \rho_A^* \otimes \rho_B^*)$ representa as correlações clássicas do estado σ .

$$|A| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{Tr}(A^2)}. \quad (3.5)$$

Essa norma nos dá uma métrica Euclidiana no espaço vetorial real das matrizes hermitianas, chamada de métrica de Hilbert-Schmidt. O quadrado dessa métrica é dado, simplesmente, por

$$|A|^2 = \text{Tr}(A^2), \quad (3.6)$$

dessa forma, temos que a distância entre as matrizes é dada por

$$|A - B| = \sqrt{\text{Tr}[(A - B)^2]}. \quad (3.7)$$

Nas abordagens matemáticas que faremos a seguir trataremos o caso de vetores reais e matrizes reais pois isso simplifica as discussões e porque a generalização para

o caso complexo é simples.

3.2.2 Formulação do problema

Estamos interessados em formular o seguinte problema de aproximação (PA): dado uma matriz densidade $A \in \mathcal{T}_n$, desejamos encontrar a matriz densidade separável $X \in \mathcal{T}_n^\otimes$, que minimiza a distância

$$\|X - A\|_F. \quad (3.8)$$

Vamos analisar este problema considerando-o como um problema de projeção associado com um conjunto convexo. O problema (PA) é encontrar a melhor aproximação, na norma de Frobenius, de uma dada matriz densidade $A \in \mathcal{T}_n$ ao conjunto convexo \mathcal{T}_n^\otimes consistindo de todas as matrizes densidades separáveis. Podemos escrever esse problema matematicamente da seguinte maneira

$$\inf\{\|X - A\|_F : X \in \mathcal{T}_n^\otimes\}. \quad (3.9)$$

Note que nesse problema a função a ser minimizada é

$$f : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R},$$

com

$$f(X) = \|X - A\|_F.$$

Lançando mão da desigualdade triangular, podemos provar que f é estritamente convexa e, portanto, contínua possuindo no máximo um mínimo¹. É fácil mostrar que o conjunto \mathcal{T}_n^\otimes é um conjunto convexo compacto (a prova é apresentada no Apêndice A). Ora, mas devido à compacidade a função é limitada o que implica que possui mínimo. Podemos resumir essas idéias no seguinte

¹Já que toda função convexa em $[a, b]$ é contínua em (a, b) e toda função estritamente convexa possui no máximo um mínimo.

Teorema 3.2.1 *Para um dado $A \in \mathcal{T}_n$ o PA (3.9) tem solução ótima única X^* .*

A solução única X^* será chamada de $X^*(A)$

Consideremos agora $Ext(\mathcal{T}_n^\otimes)$ como sendo o conjunto de todos os pontos extremos de \mathcal{T}_n^\otimes . Podemos enunciar o seguinte

Teorema 3.2.2 *Seja $A \in \mathcal{T}_n$ e $X \in \mathcal{T}_n^\otimes$. Então os 3 itens seguintes são equivalentes*

1. $X = X^*(A)$
2. $\langle A - X, Y - X \rangle \leq 0, \quad \forall Y \in \mathcal{T}_n^\otimes.$
3. $\langle A - X, Y - X \rangle \leq 0, \quad \forall Y \in Ext(\mathcal{T}_n^\otimes).$

A prova desse teorema está apresentada no Apêndice B.

3.3 O método de Frank-Wolfe

Na maioria dos casos para se resolver o PA é necessário utilizar métodos numéricos. Um algoritmo que pode ser utilizado para tal fim é um algoritmo que é uma adaptação de um método conhecido como método de Frank-Wolfe.

Podemos pensar da seguinte forma. Considere $X \in \mathcal{T}_n^\otimes$ como sendo um candidato a X^* . Então checaremos se $X = X^*$ resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\gamma(X) = \max \{ \langle A - X, Y - X \rangle : Y \in Ext(\mathcal{T}_n^\otimes) \}. \quad (3.10)$$

Descreveremos agora o algoritmo para resolver PA.

3.3.1 O algoritmo PA

1. Escolha o candidato inicial $X \in \mathcal{T}_n^\otimes$.
2. Teste de otimização: resolver o problema (3.9).
3. Se $\gamma(X) \leq 0$, pare, o problema está resolvido! Caso contrário, considere Y^* como sendo uma solução ótima de (3.9). Determine a matriz X' que está mais próximo de A no segmento de linha entre X e Y^* .
4. Troque X por Y^* e repita o processo de 1 a 3 até que a solução ótima seja encontrada.

A Figura 3.2 ilustra geometricamente o funcionamento do algoritmo.

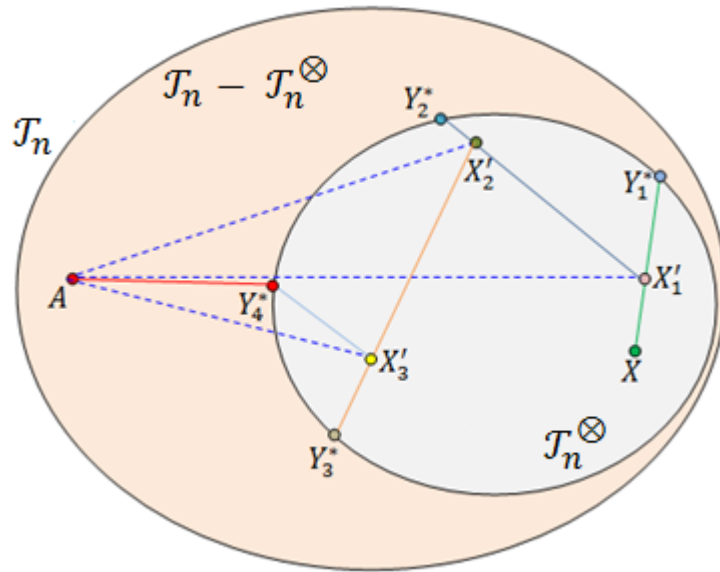


Figura 3.2: Figura esquemática do funcionamento do algoritmo PA. Primeiro escolhe-se o candidato X e faz-se o teste de otimização (3.10), se ele não for satisfeito escolhe-se o ponto X'_1 mais próximo de A na linha que une X a Y_1^* , que é um ponto qualquer pertencente a $Ext(\mathcal{T}_n^\otimes)$ então tome X'_1 como candidato a solução de PA e refaça o processo e assim sucessivamente.

A convergência desse método de Frank-Wolfe para resolver PA é garantida pelo seguinte

Teorema 3.3.1 *O algoritmo PA produz uma sequência de matrizes $\{X^{(k)}\}$ que converge para X^* .*

Capítulo 4

Resultados e discussão

Neste Capítulo vamos aplicar o método discutido no Capítulo 3 a alguns modelos, a fim de verificar sua validade e concordância com os resultados obtidos por outros métodos. Começemos por fazer isso aos exemplos apresentados no Capítulo 2.

4.1 Estado de Bell

Podemos aplicar o método de distância entre estados para o estado de Bell discutido no Capítulo 2. O estado descrito por (2.33)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - | -+\rangle). \quad (4.1)$$

Os estados separáveis desse sistema são

$$|\psi_1\rangle = |++\rangle, \quad (4.2)$$

e

$$|\psi_2\rangle = |--\rangle, \quad (4.3)$$

e suas respectivas matrizes densidades dadas por

$$\rho_1 = |++\rangle\langle ++| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

e

$$\rho_2 = |--\rangle\langle --| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Podemos calcular o emaranhamento desse sistema via distância entre estados facilmente, já que

$$|\rho_B - \rho_1| = \sqrt{\text{Tr}[(\rho_B - \rho_1)^2]} = \sqrt{\text{Tr}[(\rho_B - \rho_2)^2]} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (4.6)$$

onde ρ_B é a matriz dada em (2.35).

4.2 Estado misto do sistema de dois spins

Consideremos agora o sistema descrito pelo estado misto em (2.39). A matriz densidade ρ que descreve tal sistema é dada em (2.40). Sabemos que

$$0 \leq p \leq 1$$

e que para

$$p \leq \frac{1}{3}$$

o sistema é separável, dessa forma podemos escrever o conjunto das matrizes densidade separáveis da seguinte forma

$$\rho_{sep} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x & -2x & 0 \\ 0 & -2x & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

com

$$0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Analogamente, para o conjunto das matrizes densidades emaranhadas temos

$$\rho_{em} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 1+p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

com

$$\frac{1}{3} < p \leq 1.$$

Para calcular o quanto uma dada matriz emaranhada possui de emaranhamento precisamos apenas verificar para qual valor de x a quantidade

$$| \rho_{sep}(x) - \rho_{em}(p) |,$$

assume seu menor valor (mantendo p fixo), esse valor será o quanto tal sistema possui de emaranhamento. Podemos calcular explicitamente essa distância

$$| \rho_{sep}(x) - \rho_{em}(p) | = \sqrt{Tr[(\rho_{sep}(x) - \rho_{em}(p))^2]}. \quad (4.9)$$

Podemos calcular explicitamente o valor de (4.9) em termos de x e p . Como resultado obtemos uma equação bastante simples

$$| \rho_{sep}(x) - \rho_{em}(p) | = \frac{1}{2} | p - x |. \quad (4.10)$$

Como $0 \leq x$ e $x < p$ é imediato que o mínimo de (4.10) ocorre sempre para o maior valor possível de x , ou seja, para $x = \frac{1}{3}$. Dessa forma, é imediato perceber como o emaranhamento varia com o parâmetro p , essa variação é mostrada na Figura 4.1

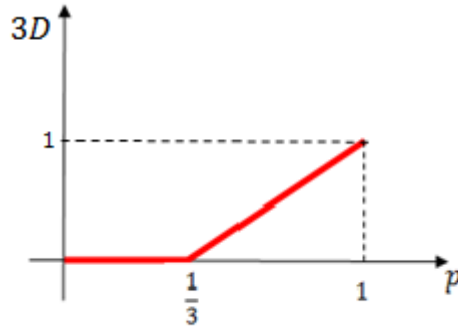


Figura 4.1: Distância D do estado separável mais próximo ao estado emaranhado (4.8) em função de p .

4.3 Emaranhamento em uma cadeia de spins - composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$

O emaranhamento é uma característica genuinamente quântica, e como tal, em geral, ele não é percebido para sistemas macroscópicos ou a altas temperaturas. Diz-se que quando temos um sistema constituído por muitos corpos e à temperaturas finitas a interação das muitas partículas com o ambiente induz um fenômeno conhecido como decoerência, que leva à perda do emaranhamento. No entanto, teoricamente é possível demonstrar que existe emaranhamento em sólidos à temperaturas finitas [20]. Esse emaranhamento é conhecido como “Emaranhamento Térmico”.

Emaranhamento térmico e emaranhamento macroscópico podem até estar relacionados, mas são dois conceitos diferentes. Emaranhamento térmico se refere ao emaranhamento que ocorre à temperatura finita, independente do “tamanho” do sistema. Já emaranhamento macroscópico se refere a emaranhamento que ocorre em sistemas macroscópicos.

Desde os primeiros trabalhos propondo a existência de emaranhamento térmico, muitos outros trabalhos teóricos nessa linha foram publicados (ver, por exemplo, [21, 22]). No entanto, o número de experimentos confirmando a presença de emaranhamento térmico ainda não é muito numeroso (ver, por exemplo [23]). O estudo de

emaranhamento tanto térmico quanto em sólido é de grande importância e interesse para a computação quântica, uma vez que muitas propostas de chips quânticos são baseadas em sistemas de estado sólido.

Em 2003 Ghosh e colaboradores (*Nature*, 452, 48 (2003) *apud* [9]) fizeram medidas da susceptibilidade magnética a baixas temperaturas ($T < 1K$) no composto $LiHo_xY_{1-x}F_4$ e observaram que a susceptibilidade dependia da temperatura segundo a equação

$$\chi \sim T^\alpha, \quad (4.11)$$

com $\alpha \sim 0.75$. O interessante desse resultado é que esses dados não podem ser explicados apenas com aproximações clássicas ou semi-clássicas. Nesse trabalho, Ghosh *et al.* concluíram que o emaranhamento é um ingrediente fundamental para se explicar os fenômenos observados.

Vértési e Bene [24] mostraram experimentalmente, via susceptibilidade magnética do composto $Na_2V_3O_7$, que a temperatura crítica abaixo da qual existe emaranhamento é de aproximadamente $T \sim 365K$, mostrando dessa forma, pela primeira vez, que o emaranhamento pode existir à temperatura ambiente.

4.4 O composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$

Discutiremos de forma resumida os aspectos mais relevantes do composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$ para nossa discussão. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em [25].

A Figura 4.2 ilustra a estrutura do $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$, os átomos de cobre estão separados em dois grupos e possuem $s = \frac{1}{2}$, cada grupo contém 2 e 3 átomos chamados dímeros e trímeros, respectivamente. A nuvem eletrônica do oxigênio induz uma interação indireta, de troca, entre os átomos de cobre. Os spins dos átomos do trímero interagem antiferromagneticamente, enquanto os spins dos átomos do dímero interagem ferromagneticamente. Há, também, uma interação mútua entre o dímero e o trímero e tal interação se dá de forma antiferromagnética.

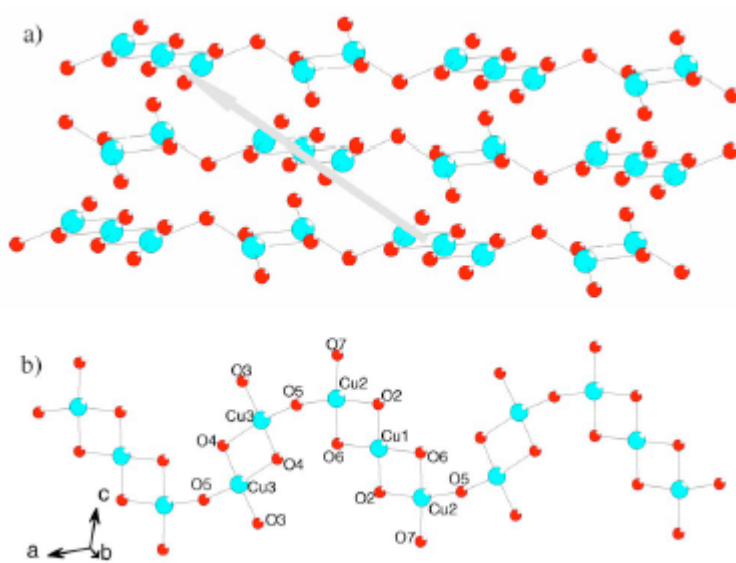


Figura 4.2: Estrutura do composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$ apresentada em dois pontos de vista. Os círculos vermelho menores representam os átomos de oxigênio, enquanto os círculos azuis maiores representam os átomos de cobre. Em (a) está ilustrado a vista lateral e em (b) uma visão superior da cadeia [25].

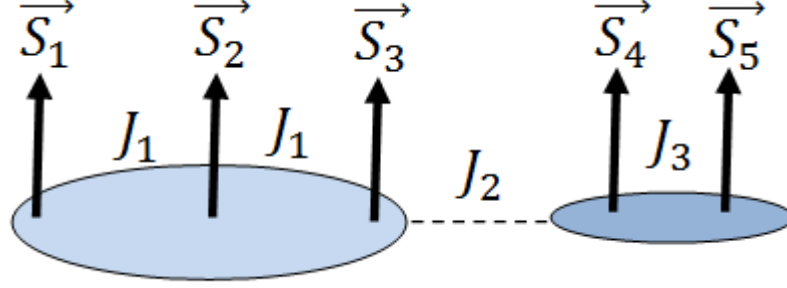


Figura 4.3: Figura esquemática do sistema dímero-trímero.

O magnetismo desse sistema, na ausência de campo externo, pode ser descrito pela Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -J_1(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3) - J_2(\vec{S}_A \cdot \vec{S}_B) - J_3(\vec{S}_4 \cdot \vec{S}_5), \quad (4.12)$$

com S_i sendo os spins representados na Figura 4.3, $\vec{S}_A = \vec{S}_4 + \vec{S}_5$ é o spin total do dímero e $\vec{S}_B = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ é o spin total do trímero. Os valores dos Js foram obtidos experimentalmente e valem $J_1 = -224.9K$, $J_2 = -8.01K$ e $J_3 = 40.22K$, onde o sinal negativo indica interação antiferromagnética e o sinal positivo significa interação ferromagnética [25]. Mais informações pode ser encontrada em [9].

4.4.1 Emaranhamento de formação

Para determinar o emaranhamento do sistema dímero-trímero Souza *et al.* [8] utilizaram o emaranhamento de formação derivado da susceptibilidade magnética. O emaranhamento de formação foi introduzido no Capítulo 2. Essa quantidade é, em geral, obtida a partir da matriz densidade, no entanto, os autores estabeleceram uma relação entre ela e a susceptibilidade magnética.

Tal relação foi obtida utilizando o fato de que a Hamiltoniana (4.12) comuta com S^z , dessa forma, podemos escrever a matriz densidade reduzida dos spins localizados nos sítios i e j na forma

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} v^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & z^* & 0 \\ 0 & z & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^- \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$v^\pm = \frac{1 \pm \langle S_i^z + S_j^z \rangle + 4\langle S_i^z S_j^z \rangle}{4}, \quad (4.14)$$

e

$$z = \langle S_i^x S_j^x \rangle + \langle S_i^y S_j^y \rangle + i\langle S_i^x S_j^y \rangle - i\langle S_i^y S_j^x \rangle. \quad (4.15)$$

Aplicando a definição de concorrência apresentada no Capítulo 2 encontramos

$$C_{ij}(T) = 2\max(0, |z| - \sqrt{v^+ v^-}). \quad (4.16)$$

Como na ausência de campo externo o sistema é isotrópico podemos considerar

$$\langle S_i^x S_j^x \rangle = \langle S_i^y S_j^y \rangle = \langle S_i^z S_j^z \rangle = \frac{G_{ij}}{3}, \quad (4.17)$$

e

$$\langle S_i^x S_j^y \rangle = \langle S_i^y S_j^x \rangle, \quad (4.18)$$

com $G_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{1\alpha} \sigma_{2\beta} \rangle = \text{Tr}(\sigma_{1\alpha} \sigma_{2\beta} \rho)$. Sendo assim, podemos descrever a concorrência (4.16) em termos das funções de correlação

$$C_{ij}(T) = \frac{2}{3}\max(0, 2|G_{ij}| - G_{ij} - \frac{3}{4}). \quad (4.19)$$

Da relação [26]

$$\chi^\alpha(T) = \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \left(\sum_{j,k=1}^N \langle S_j^\alpha S_k^\alpha \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^N S_k^\alpha \right\rangle^2 \right), \quad (4.20)$$

com g sendo o fator de Landé e μ_B o magneton de Bohr, podemos escrever

$$\chi_{ij}(T) = 2 \frac{(g\mu_B)^2}{k_B T} \left(\frac{1}{4} + \frac{G_{ij}}{3} \right), \quad (4.21)$$

sendo assim, podemos escrever a concorrência na forma

$$C_{ij}(T) = \frac{k_B T}{(g\mu_B)^2} \max \left(0, 2 \left| \chi_{ij}(T) - \frac{(g\mu_B)^2}{2k_B T} \right| - \chi_{ij}(T) \right). \quad (4.22)$$

A equação (4.22) relaciona a concorrência do par $i-j$ com a susceptibilidade que pode ser obtida experimentalmente. A equação (4.22) leva à concorrência calculada por Asoudeh e Karimipour [27] utilizando aproximações de campo médio, para clusters de spins [9].

Na Figura 4.4 é mostrado o emaranhamento de formação experimental obtido da medida da susceptibilidade magnética para os pares pertencentes ao trímero (1 – 2, 2 – 3, 1 – 3). Podemos perceber que só há emaranhamento entre os pares 1 – 2 e 2 – 3, o emaranhamento para os outros pares é sempre nulo, mostrando que apenas o trímero possui emaranhamento¹.

4.4.2 Distância entre estados

Para aplicar o método de distância entre estados precisamos, primeiramente, identificar o conjunto das matrizes separáveis, faremos isso via a transposição parcial. A transposta parcial da matriz (4.13) é

$$P\Gamma(\rho_{ij}) = \begin{pmatrix} v^+ & 0 & 0 & z^* \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ z & 0 & 0 & v^- \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

¹Em [8] podemos encontrar uma outra forma de mostrar que apenas o trímero possui emaranhamento via testemunha de emaranhamento.

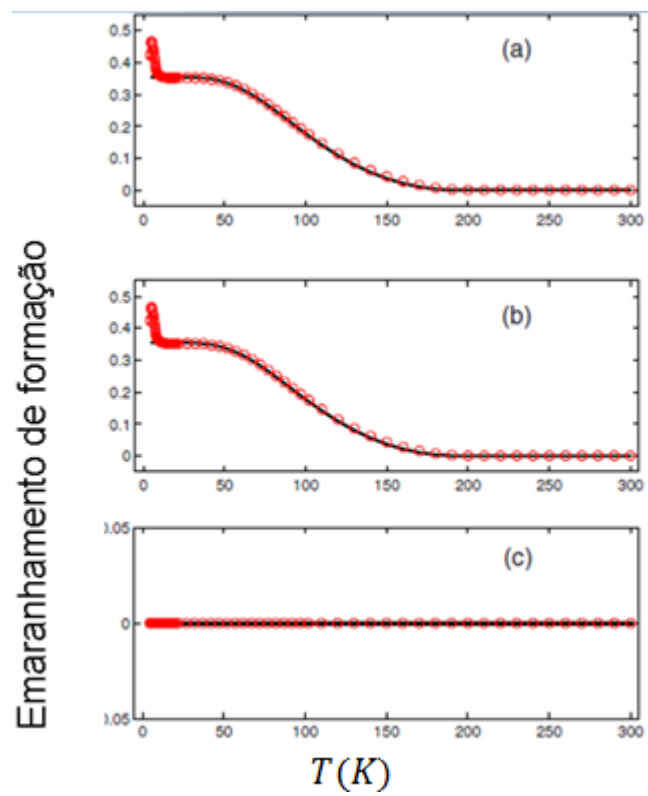


Figura 4.4: Emaranhamento de formação determinado experimentalmente no composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$. (a) para o par 1 – 2, (b) para o par 2 – 3 e (c) para o par 1 – 3. A linha sólida é a previsão teórica [8]

Os autovalores de (4.13) são dados por

$$\{v^+, v^-, w - |z|, w + |z|\},$$

sabemos que $\rho_{ij} \geq 0$, logo

$$\begin{cases} v^+ \geq 0, \\ v^- \geq 0 \\ w \geq |z|. \end{cases} \quad e \quad (4.24)$$

Os autovalores da transposta parcial de ρ_{ij} são

$$\{w, w, \frac{1}{2}(v^+ + v^- - \sqrt{(v^+ - v^-)^2 + 4|z|^2}), \frac{1}{2}(v^+ + v^- + \sqrt{(v^+ - v^-)^2 + 4|z|^2})\}.$$

Pelo critério de Peres-Horodecki sabemos que haverá emaranhamento quando algum autovalor da transposta parcial de ρ_{ij} for negativo, sendo assim, só haverá emaranhamento quando

$$v^+v^- < |z|^2. \quad (4.25)$$

Inversamente, a condição para separabilidade é que

$$v^+v^- \geq |z|^2. \quad (4.26)$$

Vamos agora considerar

$$v^+ = v^- = v. \quad (4.27)$$

De (4.14) é evidente que essa consideração equivale a dizer

$$\langle S_i^z + S_j^z \rangle = 0. \quad (4.28)$$

Com essa consideração, (4.13) se reduz a

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & z^* & 0 \\ 0 & z & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Dessa forma, seus autovalores serão

$$\{v, v, w - |z|, w + |z|\},$$

e os autovalores da transposta parcial serão

$$\{w, w, v - |z|, v + |z|\}.$$

Sendo assim, a condição para que haja emaranhamento é

$$v < |z|, \quad (4.30)$$

e ρ_{ij} será separável para

$$v \geq |z|. \quad (4.31)$$

Consideremos então, o conjunto das matrizes densidade separáveis como sendo

$$\rho_{sep} = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - v & z^* & 0 \\ 0 & z & \frac{1}{2} - v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

com² $v \geq |z|$. Seja o conjunto das matrizes densidades emaranhadas dadas por

²Note que $w = \frac{1}{2} - v$ pela condição de normalização $Tr(\rho) = 1$

$$\rho_{em} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - x & z^* & 0 \\ 0 & z & \frac{1}{2} - x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

com $x < |z|$, é importante ressaltar que estamos considerando $x = v$ sempre que $v < |z|$. Seja ainda, DS a distância de um dado estado pertencente ao conjunto das matrizes emaranhadas a um estado pertencente ao conjunto das matrizes separáveis³, essa distância será dada por

$$\begin{aligned} DS &= \sqrt{\text{Tr}[(\rho_{sep} - \rho_{em})^2]} \\ &= 2\sqrt{(v - x)^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Note que DS será mínimo quando v for mínimo, uma vez que $v > x$, ou seja, para que DS seja mínimo

$$v = |z|. \quad (4.35)$$

De (4.15), (4.17) e (4.18)

$$v = |z| = \left| \frac{2G_{ij}}{3} \right|. \quad (4.36)$$

Dessa forma, (4.34) pode ser escrita na forma

$$DS = 2 |v - x| = 2 \left| \left| \frac{2G_{ij}}{3} \right| - \frac{1}{4} - \frac{G_{ij}}{3} \right|, \quad (4.37)$$

nessa última expressão utilizamos o fato de que

$$x = \frac{1 + 4\langle S_i^z \cdot S_j^z \rangle}{2},$$

³É fácil identificar a qual conjunto pertence cada estado, pois basta olhar a relação entre v e $|z|$; se o estado for separável $v \geq |z|$, caso contrário, o estado será emaranhado, de acordo com as equações (4.31) e (4.30).

devido à (4.14) e (4.28).

De (4.21) temos

$$\frac{G_{ij}}{3} = \frac{k_B T}{2(g\mu_B)^2} \chi_{ij}(T) - \frac{1}{4}, \quad (4.38)$$

então, substituindo (4.38) em (4.37) obtemos

$$DS = \frac{k_B T}{(g\mu_B)^2} \left| 2 \left| \chi_{ij}(T) - \frac{(g\mu_B)^2}{2k_B T} \right| - \chi_{ij}(T) \right|. \quad (4.39)$$

Observe que encontramos um resultado muito similiar ao encontrado em (4.22), com a diferença que em (4.22) escolhemos o máximo entre 0 e o valor que encontramos em (4.39). Essa diferença se deve à separação que fizemos entre as matrizes separáveis (4.32) e emaranhadas (4.33).

Agora, vamos justificar a consideração feita em (4.27). Tal afirmação implica que o sistema possui invariância translacional e é um autoestado de S^z , com autovalor nulo, em outras palavras, estamos tratando sistema que, em média, a soma de dois spins vizinhos é zero e isso é verdade para qualquer lugar da rede que for observado. Isso é verdade para sistemas antiferromagnéticos, que é o caso do trímero e do acoplamento entre o dímero e o trímero. No entanto, os átomos do dímero interagem ferromagneticamente e nossa consideração não se aplica a ele, mas vimos⁴ que o dímero não contribui para o emaranhamento do sistema, o que torna nossa consideração válida.

⁴Ver [8]

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

5.1 Conclusões

Vimos que o emaranhamento surgiu como um desafio à Mecânica Quântica e como tal, suscitou várias e acirradas discussões entre os físicos, sendo as discussões entre Bohr e Einstein as mais famosas. Vimos também que a palavra final nessas discussões foi dada pela Natureza e, ao que parece, ela se posicionou ao lado de Bohr. Discutimos alguns critérios para identificar quando um sistema está emaranhado e, uma vez identificado tal emaranhamento, apresentamos alguns métodos de quantificá-lo. Percebemos que esta, em geral, não é uma tarefa fácil. Uma das formas de fazer isso é via distância entre estados, identificando a distância do estado de interesse ao estado separável mais próximo. Esse método é interessante devido a seu apelo geométrico e, consequentemente, fácil visualização do processo de quantificação de emaranhamento, uma vez que ele utiliza diretamente as matrizes densidades. Existem várias propostas de distâncias possíveis para se usar, optamos por utilizar a norma de Hilbert-Schmidt de acordo com Dahl *et al.* [1]. Mostramos que ela se aplica muito bem ao caso do estado de Bell, dando o resultado esperado e já presente na literatura, tal método também se mostrou confiável quando aplicado ao estado misto de dois spins apresentado no final do Capítulo 2. Por fim, aplicamos esse método ao composto $Na_2Cu_5Si_4O_{14}$ na ausência de campo externo e foi possível obter um resultado analítico para o emaran-

hamento em função da susceptibilidade magnética, tal resultado está em concordância com os resultados obtidos em Souza *et al.* [8].

5.2 Perspectivas futuras

Nossa abordagem nesse trabalho foi feita para sistemas de spin-1/2, para o qual o critério de Peres-Horodecki é condição necessária e suficiente. Isso facilita muito a aplicação do método de distância entre estados, já que existe uma forma exata de se obter todas as matrizes densidade separáveis do sistema. Temos por objetivo, na continuação desse trabalho, utilizar o emaranhamento em sistema de spin-1/2 como indicador de transição de fase quântica e também aplicar o método estudado a sistemas de spins maiores que 1/2, mais especificamente, a sistemas de spin-1, utilizando o emaranhamento como indicador de transição fase quântica, como feito, por exemplo, em [28]. Para isso, no entanto, será necessário estabelecer uma forma de obter todo o conjunto das matrizes densidades separáveis. Pretendemos, também, aplicar o método de distancia entre estados para algum composto que possa ser modelado por uma Hamiltoniana do tipo (4.12), em sistemas dímeros com $S_A = S_B$, uma vez que em [29] é apresentado uma forma analítica para a susceptibilidade magnética para compostos que podem ser modelados dessa forma.

Apêndice A - Prova de que $\mathcal{T}^{\otimes n}$ é um conjunto convexo compacto

Fixemos dois número inteiros p e q e consideremos $n = pq$. Se $A \in \mathcal{T}_n$ é separável podemos escrevê-la de seguinte forma

$$A = \sum_{j=1}^N \lambda_j B_j \otimes C_j,$$

com N inteiro positivo, $B_j \in \mathcal{T}_p$, $C_j \in \mathcal{T}_q$, $\lambda_j \geq 0$ com $\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1$.

Por definição, $\mathcal{T}^{\otimes n}$ é o conjunto de todas as combinações convexas das matrizes em $\mathcal{T}_p \otimes \mathcal{T}_q$. De um resultado básico em convexidade, isso significa que $\mathcal{T}^{\otimes n}$ coincide com o envelope convexo de $\mathcal{T}_p \otimes \mathcal{T}_q$ ¹.

Consideremos agora a função

$$g : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \mapsto \mathcal{L}_n,$$

dada por

$$g(B, C) = B \otimes C,$$

com $B \in \mathcal{L}_p$, $C \in \mathcal{L}_q$ e \mathcal{L}_n é o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$. Então

$$g(\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q) = \mathcal{T}_p \otimes \mathcal{T}_q,$$

e a função g é contínua². Portanto, $\mathcal{T}^{\otimes n}$ é compacto, assim como $\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q$ (e o envelope convexo de um conjunto compacto também é compacto)[1].

¹Envelope convexo de $\mathcal{T}_p \otimes \mathcal{T}_q$ é o menor conjunto convexo contendo $\mathcal{T}_p \otimes \mathcal{T}_q$ [30]

²Já que a imagem de um espaço compacto por uma função contínua é contínua.

Apêndice B - Prova do Teorema

3.2.2

Vamos proceder a prova da seguinte maneira: assumamos 2 como sendo verdadeira e $Y \in \mathcal{T}_n^\otimes$, então

$$\begin{aligned} \|A - Y\|^2 &= \|(A - X) - (Y - X)\|^2 \\ &= \|A - X\|^2 + \|Y - X\|^2 - 2\langle A - X, Y - X \rangle \\ &\geq \|A - X\|^2 + \|Y - X\|^2 \\ &\geq \|A - X\|^2, \end{aligned}$$

note que a primeira desigualdade se justifica já que estamos considerando que 2 é verdadeira. Sendo assim,

$$\|A - X\| \leq \|A - Y\| \quad \forall Y \in \mathcal{T}_n^\otimes,$$

logo $X = X^*$ e 1 está provado!

Inversamente, assumamos 1 como sendo verdadeira e $Y \in \mathcal{T}_n^\otimes$ considere $0 \leq \lambda \leq 1$ e considere a matriz

$$X(\lambda) = (1 - \lambda)X + \lambda Y,$$

então $X(\lambda) \in \mathcal{T}_n^\otimes$ já que \mathcal{T}_n^\otimes é convexo. considere ainda a função

$$\begin{aligned}
g(Y) &= |A - X(\lambda)|^2 \\
&= |(1 - \lambda)(A - X) + \lambda(A - Y)|^2 \\
&= (1 - \lambda)^2 |A - X|^2 + \lambda^2 |A - Y|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\langle A - X, A - Y \rangle.
\end{aligned}$$

Derivando g em $\lambda = 0$ pela direita temos

$$\frac{dg}{d\lambda} = -2\langle A - X, Y - X \rangle.$$

Agora, note que a derivada de g em $\lambda = 0$ não pode ser negativa, já que nesse caso, teríamos que g seria decrescente em $\lambda = 0$, mas

$$X = X^*,$$

logo $|X - X(\lambda = 0)|$ é mínimo, então g não pode estar decrescendo nesse ponto, sendo assim

$$\langle A - X, Y - X \rangle \leq 0,$$

e 2 está provado!

Para mostrar a equivalência de 2 e 3 utilizaremos o fato de que cada $Y \in \mathcal{T}_n^\otimes$ pode ser representado como uma combinação convexa³

$$Y = \sum_{j=1}^t \lambda_j Y_j,$$

onde $\lambda_j \geq 0$ ($j \leq t$) e $\sum_j \lambda_j = 1$ e cada Y_j é uma matriz de rank 1. Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle A - X, Y - X \rangle &= \langle A - X, \sum_{j=1}^t \lambda_j Y_j - X \rangle \\
&= \langle A - X, \sum_{j=1}^t \lambda_j (Y_j - X) \rangle = \sum_{j=1}^t \lambda_j \langle A - X, Y_j - X \rangle \leq 0,
\end{aligned}$$

a desigualdade na última passagem se justifica devido a 2. Ora, mas

$$Y \in \mathcal{T}_n^\otimes,$$

³A prova dessa afirmação pode ser encontrada no teorema 2.2 da referência [1]

o que implica que Y é um conjunto convexo compacto, logo, pelo Teorema de Krein-Milman Y é o envelope convexo fechado dos pontos extremos de

$$\mathcal{T}^{\otimes}_n = \text{conv}(\text{Ext}(\mathcal{T}^{\otimes}_n)),$$

já que $\text{conv}(\text{Ext}(\mathcal{T}^{\otimes}_n)) = \text{Ext}(\mathcal{T}^{\otimes}_n)$. O que prova 3!

Referências Bibliográficas

- [1] G. Dahl, J. M. Leinaas, J. Myrheim, and E. Ovrum. *Linear Algebra and its applications*, 420:711–725, 2007.
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. *Phys. Rev.*, 47:777, 1935.
- [3] A. Galindo and M. A. Martín-Delgado. *Rev. Mod. Phys.*, 74:347, 2002.
- [4] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden. *Rev. Mod. Phys.*, 74:145, 2002.
- [5] R. Somma, G. Ortiz, H. Barnum, E. Knill, and L. Viola. *Phys. Rev. A*, 70:042311, 2004.
- [6] P. Ball. *Nature*, 474:272, 2011.
- [7] V. Vedral. *Scientific American Brasil*, 110:30, 2011.
- [8] A. M. Souza, M. S. Reis, D. O. Soares-Pinto, I. S. Oliveira, and R. S. Sarthour. *Phys. Rev. B*, 77:104402, 2008.
- [9] A. M. de Souza. *Um Estudo de Emaranhamento e Desigualdades de Bell em Sistemas Térmicos Magnéticos*. PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas/MCT, 2008.
- [10] A. F. R. T. Piza. Sistemas quânticos compostos e emaranhamento, sistemas quânticos abertos e decoerência. <http://www.fma.if.usp.br/piza/EFT/2009.pdf>, agosto 2009.
- [11] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. *Phys. Lett. A*, 223:1, 1996.

- [12] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki. *Phys. Lett. A*, 223:1, 1996.
- [13] D. Brub. *J. Math. Phys.*, 43:4237, 2002.
- [14] G. Vidal and R. F. Werner. *Phys. Rev. A*, 65:032314, 2002.
- [15] W. K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2245, 1998.
- [16] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters. *Phys. Rev. A*, 53:2046, 1996.
- [17] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2275, 1997.
- [18] K. Audenaert, B. De Moor, K. G. H. Vollbrecht, and R. F. Werner. *Phys. Rev. A*, 66:032310, 2002.
- [19] V. Vedral and M. B. Plenio. *Phys. Rev. A*, 57:1619, 1998.
- [20] M. C. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral. *Phys. Rev. Lett.*, 87:017901, 2001.
- [21] X. Wang and P. Zanardi. *Phys. Lett. A*, 301:1, 2002.
- [22] X. Wang, H. Li, Z. Sun, and Y. Li. *J. Phys. A:Math. Gen.*, 38:8703, 2005.
- [23] C. Brukner, V. Vedral, and A. Zeilinger. *Phys. Rev. A*, 73:012110, 2006.
- [24] T. Vértesi and E. Bene. *Phys. Rev. B*, 73:134404, 2006.
- [25] M. S. Reis and A. M. dos Santos. *Phys. Rev. B*, 73:214415, 2006.
- [26] M. Wieśniak, V. Vedral, and C. Brukner. *New. J. Phys.*, 7:258, 2005.
- [27] M. Asoudeh and V. Karimipour. *Phys. Rev. A*, 73:062109, 2006.
- [28] X. Wang and S. Gu. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:10759, 2007.
- [29] D. O. Soares-Pinto, A. M. Souza, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, M. S. Reis and P. Brandão, J. Rocha, and A. M. dos Santos. *EPL*, 87:40008, 2009.

- [30] D. H. T. Franco. “Métodos Matemáticos da Física I: Tópicos de Análise Funcional e Aplicações à Mecânica Quântica”, Notas de aula 2008-2011.